Ш. Ж. де ла ВАЛЛЕ-ПУССЕН

КУРС АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

ГТТИ
1933

ШАРЛЬ-ЖАН де ла ВАЛЛЕ-ПУССЕН

проф. Университета в Лувене, член Бельгийской Академии Наук

КУРС АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ И С ПРИМЕЧАНИЯМИ

ПРОФ. Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦА

ТОМ ВТОРОЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД 1933 МОСКВА

COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE

par

CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN

Professeur à l'Université de Louvain,
Membre de l'Académie Royale de Belgique

ОТ РЕДАКТОРА.

Второй том К у р с а **а н а л и з а** б е с к о н е ч н о м а л ы х de la Vallée Poussin'а сейчас впервые появляется на русском языке. Первый том, уже однажды издававшийся (Научным книгоиздательством в 1922 г.), вскоре будет переиздан.

Перевод, в основном, сделан со второго французского издания; последующие издания не содержат уже изложения теории и приложений интегралов Lebesgue'а, столь важных для современного анализа, и это заставило нас предпочесть более старое издание. Вместе с тем мы восстановили и теорию эйлеровых интегралов (которыми автор пожертвовал для того, чтобы освободить место для интегралов Lebesgue'а), взяв ее из первого французского издания.

Г. М. Фихтенгольц.

28 февраля 1933.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ФРАНЦУЗСКОМУ ИЗДАНИЮ.

В этом втором издании вся редакция тома II подверглась более или менее глубоким изменениям; наиболее важным из них является введение кратных интегралов Lebesgue'а. Мы изложили эту теорию, руководствуясь основными мемуарами автора; она нашла себе интересные применения в новом рассмотренном нами вопросе — о разложении функций в ряды полиномов. Сверх того, теория тригонометрических рядов, которая также обязана Lebesgue'у своими наиболее важными успехами, была полностью переработана и доведена до уровня современных знаний. Зато, в виду отсутствия места, мы пожертвовали теорией Euler'овых интегралов (которая была изложена в первом издании), полагая что ее столь же естественно рассматривать, как иллюстрацию свойств аналитических функций.

Как и прежде мелкий шрифт сохранен для более возвышенных или более специальных вопросов, которые при первом чтении можно было бы опустить.

C. de la Vallée Poussin.

Лувен, 15 мая 1912.

ГЛАВА I.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

§ 1. Двойные интегралы.

1. Понятия, связанные с областью D изменения двух переменных. Отнесем переменные x, y к двум прямоугольным осям. Проведем в плоскости xy простой контур C, т. е. замкнутый контур, не пересекающий сам себя. Этот контур ограничивает часть D плоскости. Если точка $M(x, y)$, представляющая систему значений x, y, может занимать всевозможные положения внутри контура C и на самом контуре, мы будем говорить, что переменные x, y изменяются в *области* D.

Во избежание неясностей, мы будем предполагать, что контур C может быть разложен на конечное число частей, на каждой из которых, при описывании контура, x и y изменяются в одном направлении. Очевидно, что такого рода часть (если только она не представляет прямолинейного отрезка, параллельного одной из осей) может быть пересечена прямой, параллельной оси x-ов или оси y-ов, лишь в одной точке.

Рассматриваемая область D может также составляться частью плоскости, расположенной внутри некоторого контура C и вне других контуров C', C'', ..., подчиненных тем же ограничениям, что и C. Наконец, область D может состоять из нескольких отдельных областей D', D'', ..., подобных только-что определенной области. Во всех этих случаях область D имеет *сложный контур.*

Контуры C, C', ... составляют *границу* области D. Эта граница, по определению, входит в состав самой области.

Диаметром области D называется maximum расстояния двух ее точек (следовательно, двух точек ее границы).

Понятие об области и ее границе можно обобщить; эти обобщения и общие определения относятся к теории совокупностей *).

2. Свойства непрерывных функций **). *Функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (a, b) области D, если колебание этой функции стремится к нулю в каждой части области D, которая содержит точку (a, b) и диаметр которой стремится к нулю.*

Функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

---

*) См. Введение, т. I, § 11.

**) См. также Введение (т. I, § 4).

Следующие теоремы являются основными в теории двойных интегралов.

I. *Если невозможно разложить область D с помощью прямых, параллельных осям, на части (прямоугольные, исключая прилегающих к контуру) так, чтобы колебание функции $f(x, y)$ было $< \varepsilon$ (где ε — данное положительное число) в каждой части, эта функция $f(x, y)$ прерывна в области D.*

Действительно, если с помощью секущих разложить область D на несколько частей, то, по крайней мере, одну из этих частей также невозможно разложить на части указанного свойства (ибо иначе это было бы возможно для всей области). Следовательно, можно найти в D часть D_1 сколь угодно малого диаметра, в которой упомянутое разложение невозможно; затем, в D_1 можно найти часть D_2 еще меньшего диаметра, в которой все же разложение невозможно, и т. д. Таким образом мы построим бесконечную последовательность областей D, D_1, D_2, ..., D_n, ... с бесконечно убывающими диаметрами, каждая из них содержится в предыдущей и в каждой колебание функции $f(x, y)$ остается $\geqslant \varepsilon$. Эти области имеют общую им всем предельную точку M, которая, следовательно, содержится в области D_n сколь угодно малого диаметра, в которой однако колебание функции $f(x, y) \geqslant \varepsilon$; в этой точке $f(x, y)$ имеет разрыв.

II. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то для каждого положительного числа ε существует такое число δ, что колебание функции в каждой части области D, с диаметром $< \delta$, будет $< \varepsilon$.*

Разложим, согласно теореме I, область D на прямоугольники и части прямоугольников, в которых колебание функции $f(x, y)$ было бы $< \varepsilon : 2$. Пусть δ будет наименьшая из сторон этих прямоугольников. Колебание $f(x, y)$ будет $< \varepsilon$ в каждой части области D, достаточно малой, чтобы не захватывать двух не соприкасающихся прямоугольников, следовательно, в каждой части диаметра $< \delta$.

III. *Пусть x, y и x', y' будут две точки области D; каждому положительному числу ε соответствует такое число δ, что неравенство*

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

выполняется, лишь только $|x' - x| < \delta$ и $|y' - y| < \delta$.

Действительно, достаточно выбрать δ столь малым, чтобы колебание функции $f(x, y)$ было $< \varepsilon$ в каждом квадрате со стороной $< \delta$.

Последнее свойство часто формулируют, говоря, что $f(x', y')$ *равномерно* стремится к пределу $f(x, y)$, если точка x', y' области D стремится к другой точке x, y той же области. Наконец, это же свойство выражают так: *функция, непрерывная в области D, равномерно непрерывна в этой области.*

IV. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна во всех точках, у которых ордината равна β, а абсцисса содержится в промежутке (a, A), то каждому положительному числу ε соответствует такое число δ, что неравенство*

$$|f(x, y) - f(x, \beta)| < \varepsilon$$

выполняется для каждого значения x в промежутке (a, A), при условии, что $|y-\beta|<\delta$.

Предположим, что это утверждение не выполняется для некоторого данного ε. Разделим пополам промежуток (a, A) изменения x; наше утверждение не выполняется хоть для одной из половин, ибо, в противном случае, оно выполнялось бы для всего промежутка значений x. Эту половину разделим снова пополам, и т. д. Последовательность этих промежутков, каждый из которых составляет половину предшествующего, имеет предельную точку $x=\alpha$, содержащуюся во всех промежутках. Таким образом, эта точка α принадлежит сколь угодно малому промежутку значений x, для которого утверждение теоремы оказывается неверным; иными словами, при данном ε, можно удовлетворить условию

$$|f(x, y)-f(x, \beta)| \geqslant \varepsilon$$

для x и y, сколь угодно близких, соответственно, к α и β. Следовательно, $f(x, y)$ имеет разрыв в точке α, β, вопреки предположению.

3. Непрерывность определенного интеграла по отношению к параметру. Если функцию $f(x, y)$, зависящую от параметра y, проинтегрировать по x, то ясно, что результат будет функцией $\varphi(y)$ от этого параметра. Следующие теоремы устанавливают условия непрерывности этой функции.

I. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна относительно x, y в прямоугольнике R, ограниченном прямыми $x=a$, $x=A$ и $y=b$, $y=B$, или, общнее, если эта функция ограничена в названном прямоугольнике и имеет лишь ограниченное число точек разрыва для каждого частного значения y* *), *интеграл*

$$\varphi(y)=\int_a^A f(x, y)\, dx$$

является непрерывной функцией от y в промежутке (b, B).

Возьмем частное значение $y=\beta$ в этом промежутке и покажем, что $\varphi(y)$ непрерывна в точке β.

Предположим сначала, что функция $f(x, y)$ не имеет точек разрыва с ординатой β. Имеем:

$$|\varphi(y)-\varphi(\beta)| \leqslant \int_a^A |f(x, y)-f(x, \beta)|\, dx.$$

Применим теорему IV предшествующего n°. Сколь бы малым ни взять ε, можно предположить, что в этом интеграле

$$|f(x, y)-f(x, \beta)|<\varepsilon$$

при условии лишь, что $|y-\beta|<\delta$; отсюда

$$|\varphi(y)-\varphi(\beta)|<\varepsilon(A-a),$$

---

*) Теорема и ее доказательство без труда распространяются и на случай, когда совокупность этих точек разрыва имеет меру 0 (в смысле Lebesgue'a).

так что приращение функции $\varphi(y)$ может быть сделано сколь угодно малым, и эта функция в точке β непрерывна.

Это доказательство легко распространяется на случай, когда функция $f(x, y)$ имеет конечное число точек разрыва с ординатой β. Допустим для определенности, что имеется одна лишь такая точка, абсцисса которой α содержится между a и A. Обозначив через ε произвольно малое число, произведем разложение

$$|\varphi(y)-\varphi(\beta)| \leqslant \int_{a}^{\alpha-\varepsilon} + \int_{\alpha+\varepsilon}^{A} + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} |f(x, y)-f(x, \beta)|\, dx.$$

Прежде всего можно последний интеграл сделать, вместе с ε, сколь угодно малым, ибо если M есть верхняя граница $|f(x, y)|$, этот интеграл не превосходит $4M\varepsilon$, по теореме о среднем. Затем, как и в предшествующем рассуждении, остальные два интеграла становятся бесконечно малыми вместе с $|y-\beta|$, ибо из них точка разрыва с ординатой β исключена. Итак, приращение $\varphi(y)$ снова может быть сделано сколь угодно малым, и $\varphi(y)$ непрерывна в точке β.

II. Рассмотрим теперь интеграл, пределы которого $x_1=\psi_1(y)$ и $x_2=\psi_2(y)$ представляются непрерывными функциями от y в промежутке (b, B). Пусть этот интеграл будет

$$\varphi(y)=\int_{x_1} f(x, y)\, dx.$$

Он представляет и в этом случае непрерывную функцию от y в промежутке (b, B), если только функция $f(x, y)$ непрерывна в области D *), *содержащейся между двумя кривыми $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ и двумя прямыми $y=b$ и $y=B$, или, если эта функция ограничена в области D и имеет в этой области, для каждого частного значения y, лишь конечное число точек разрыва.*

Эта теорема приводится к предыдущей. Действительно, область D может быть заключена в прямоугольник R, ограниченный прямыми $y=b$, $y=B$ и надлежаще выбранными прямыми $x=a$, $x=A$. Обозначим через $f_1(x, y)$ функцию, равную $f(x, y)$ в каждой точке D и 0 вне D. Эта функция в прямоугольнике R не имеет иных точек разрыва, кроме точек разрыва функции $f(x, y)$ в области D и точек границы этой области. Для каждого значения y таких точек может быть лишь конечное число. Следовательно, интеграл

$$\int_{a}^{A} f_1(x, y)\, dx$$

есть непрерывная функция от y в промежутке (b, B). Но этот интеграл приводится к $\varphi(y)$, в силу определения f_1, что и доказывает теорему.

*) Эта область не стеснена ограничениями n° 1.

4. Определение двойного интеграла в прямоугольнике с помощью простых интегралов. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x, y)$ в прямоугольнике R, ограниченном прямыми $x=a$, $x=A$ и $y=b$, $y=B$. Интеграл, взятый по x в предположении неизменяемости y,

$$\int_a^A f(x,y)\,dx \tag{1}$$

является непрерывной функцией от y в промежутке (b, B), которая, следовательно, может быть проинтегрирована, в свою очередь, в этом промежутке. Это интегрирование приводит нас к следующему выражению:

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x,y)\,dx, \tag{2}$$

которое содержит два знака интеграла и называется, в связи с этим, *двойным интегралом.* Переменные x, y, фигурирующие в этом интеграле, изменяются в прямоугольнике R. Последний называется *областью интегрирования.*

Мы предположили, что функция $f(x, y)$ непрерывна в области R, но выражение (2) сохраняет смысл и при более общих условиях.

Предположим, действительно, что функция $f(x, y)$, оставаясь ограниченной в прямоугольнике R, имеет в нем точки разрыва, которые все расположены на *конечном числе* непрерывных линий, которые мы назовем *линиями разрыва.* При этом точки разрыва могут быть рассеяны по этим линиям или заполнять их целиком, так что функция может иметь и изолированные точки разрыва.

Двойной интеграл сохраняет вполне определенный смысл, если линии разрыва составляются из прямых, параллельных осям координат, и из линий, которые лишь в конечном числе точек пересекаются прямыми, параллельными осям.

Действительно, в силу теоремы I предшествующего n°, интеграл (1) является непрерывной функцией от y, за исключением отдельных значений, соответствующих линиям разрыва, параллельным оси x-ов. Но так как интеграл для этих исключительных значений y и вблизи их остается ограниченным, он все же является интегрируемой по y в (b, B) функцией, так что выражение (2) сохраняет определенное значение.

Впредь мы будем предполагать, что если $f(x, y)$ не непрерывна в прямоугольнике R, ее точки разрыва удовлетворяют указанным выше условиям.

Двойной интеграл обладает следующим основным свойством, которое позволит нам преобразовать его определение:

Если m и M суть нижняя и верхняя границы функции $f(x, y)$ в области интегрирования и R — площадь этой области, то двойной интеграл содержится между mR и MR.

Действительно, по теореме о среднем,

$$m(A-a) \leqslant \int_a^A f(x,y)\,dx \leqq M(A-a).$$

Помножив эти неравенства почленно на dy, проинтегрируем их от b до B и заметим, что $(A-a)(B-b)=R$; мы получим:

$$mR \leqslant \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx \leqslant MR. \tag{3}$$

5. Определение двойного интеграла в прямоугольнике, как предела сумм. Разложим прямоугольник R на прямоугольные части с помощью двух систем прямых, параллельных осям; при этом прямые, параллельные оси y-ов, пусть имеют абсциссы $x_1=a$, $x_2, \ldots$, $x_{n+1}=A$, а прямые, параллельные оси x-ов, имеют ординаты $y_1=b$, $y_2, \ldots, y_{m+1}=B$. Обозначим через α_{ik} площадь прямоугольника, содержащегося между прямыми $x=x_i$, $x=x_{i+1}$ и $y=y_k$, $y=y_{k+1}$; наконец, пусть M_{ik} и m_{ik} будут верхней и нижней границами функции $f(x, y)$ в прямоугольнике α_{ik}. Соотношение (3), примененное к этому прямоугольнику, даст

$$m_{ik}\alpha_{ik} \leqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx \leqslant M_{ik}\alpha_{ik}.$$

Сложив все неравенства этого вида, при всех возможных значениях i и k, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m_{ik}\alpha_{ik} \leqslant \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} M_{ik}\alpha_{ik}.$$

Мы видим, что двойной интеграл содержится между двумя двойными суммами. Докажем, что он является общим пределом этих сумм, когда оба измерения всех прямоугольников нашей сети (которою мы покрыли основной прямоугольник R) стремятся к нулю, причем число их бесконечно возрастает.

С этой целью достаточно доказать, что разность двух двойных сумм

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (M_{ik}-m_{ik})\alpha_{ik} \tag{4}$$

имеет пределом нуль.

Это заключение непосредственно получается, если функция $f(x, y)$ непрерывна в области R, ибо, согласно теореме II n° 2, все колебания $M_{ik}-m_{ik}$ становятся меньшими произвольно заданного положительного числа ε, когда области α_{ik} стремятся к нулю. Следовательно, сумма (4) также может быть сделана произвольно малой, ибо, когда все колебания $<\varepsilon$, она становится меньшей, чем $\varepsilon \sum \sum \alpha_{ik} = \varepsilon R$.

Это заключение остается в силе, если функция $f(x, y)$, оставаясь ограниченной, имеет точки разрыва, лишь бы линии разрыва удовлетворяли условиям предшествующего n°. Действительно, колебания $M_{ik}-m_{ik}$ становятся меньшими во всех элементах α_{ik}, когда последние стремятся к нулю, исключая, быть может, элементы, пересекаемые линиями разрыва, или элементы, бесконечно к этим линиям приближающиеся. Но так как линии разрыва могут быть заключены в сколь угодно малую окрестность, в которую войдут все исключительные элементы, сумма площадей этих элементов, а с ними и сумма соответствующих членов в выражении (4), может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, выражение (4) имеет пределом нуль.

Установленную только-что теорему можно формулировать следующим образом, если устранить лишь ставшие бесполезными двойные значки:

Двойной интеграл от $f(x, y)$ в прямоугольнике R является общим пределом двух сумм

$$\sum_R m_i \alpha_i, \quad \sum_R M_i \alpha_i,$$

получаемых путем разложения R на бесконечно малые прямоугольные элементы α_i и сложения произведений площадей всех этих элементов соответственно на нижние и верхние границы m_i и M_i функции $f(x, y)$ в этих элементах.

6. Теорема об обращении порядка интегрирований. Новое обозначение двойного интеграла. Во всех рассуждениях предыдущего n^0 можно переставить переменные x и y. Так как определение двойного интеграла, как предела сумм, не зависит от порядка, в котором рассматриваются эти переменные, то мы получаем следующую теорему:

Значение двойного интеграла в прямоугольнике R не зависит от порядка, в котором производятся интегрирования, т. е.

$$\int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\, dy = \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx.$$

Впредь, для представления двойного интеграла в прямоугольнике R, естественно применять обозначения, которые напоминали бы одновременно и об его определении, как предела сумм, и об его сведении к двум последовательным простым интегрированиям.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\iint_R f(x, y)\, dR \quad \text{или} \quad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

Выражение $f(x, y)\, dx\, dy$, к которому применяется двойное интегрирование, называется элементом двойного интеграла.

7. Двойной интеграл в области произвольного вида. Определение двойного интеграла, как предела сумм, распространяется без труда на случай области, ограниченной какими-либо кривыми, удовлетворяющими условиям n^0 1.

Пусть D будет такой областью. Рассмотрим функцию $f(x, y)$, непрерывную в этой области, или же ограниченную и имеющую линии разрыва, подчиненные тем же условиям, что и выше (n° 4). С помощью двух систем прямых, параллельных осям, можно разложить D на бесконечно малые элементы α_i. Все эти элементы будут прямоугольниками, кроме тех, которые примыкают к границе области. Пусть M_i и m_i будут верхней и нижней границами $f(x, y)$ в α_i. Следующая теорема приводит к определению двойного интеграла в области D:

Две суммы, распространенные на все элементы D,

$$\sum_D M_i \alpha_i, \quad \sum_D m_i \alpha_i, \tag{1}$$

стремятся к одному и тому же пределу, когда элементы α_i бесконечно убывают в обоих направлениях. Этот общий предел есть двойной интеграл $f(x, y)\,dx\,dy$ в области D и выражается обозначениями:

$$\int\int_D f(x, y)\,dx\,dy \quad \text{или} \quad \int\int_D f(x, y)\,dD.$$

Действительно, этот предел легко приводится к двойному интегралу, распространенному на прямоугольник. Для этого опишем вокруг области D прямоугольник R со сторонами, параллельными осям. Пусть A и a будут крайними значениями абсцисс, а b и B — крайними значениями ординат точек этого прямоугольника.

Обозначим через $f_1(x, y)$ функцию, равную $f(x, y)$ во всех точках D и нулю — вне D. Точки разрыва этой функции удовлетворят указанным выше условиям, так что двойной интеграл от $f_1(x, y)$ в R представляется вполне определенным.

Разложим R на бесконечно малые прямоугольные элементы α_i, вместе с чем определенным образом разложится и область D. Построим для функции f и всего прямоугольника R две суммы:

$$\sum_R M_i \alpha_i, \quad \sum_R m_i \alpha_i, \tag{2}$$

аналогичные суммам (1) занимающей нас теоремы, но имеющие пределом интеграл от f_1 в R. Члены, соответствующие элементам α_i, расположенным вне D, равны нулю; члены же, соответствующие элементам, расположенным внутри D, оказываются теми же в суммах (2), что и в суммах (1). Итак, соответствующие суммы $\sum_D$ и $\sum_R$ могут, в действительности, отличаться лишь членами, соответствующими тем элементам α_i, которые касаются границы области D. Но, так как сумма этих элементов, следовательно, и упомянутых членов стремится к нулю, то обе суммы $\sum_D$ и $\sum_R$

имеют один и тот же предел. Таким образом, как мы и утверждали, получается, что

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_R f_1(x, y)\, dR.$$

8. Приведение к простым интегралам. *Двойной интеграл в области D также может быть приведен к двум последовательным интегралам по отношению к x и к y.*

В самом деле, на основании предшествующего, имеем

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_b^B dy \int_a^A f_1(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_b^B f_1(x, y)\, dy.$$

Предположим, что (как это обычно и имеет место) контур области D пересекается любой параллелью оси x-ов или оси y-ов лишь в двух точках. Тогда, при каждом значении x между a и A, y изменяется между двумя значениями y_1 и y_2, зависящими от x; подобным же образом, при каждом значении y между b и B, x изменяется между двумя значениями x_1 и x_2, зависящими от y. Можно в предшествующих формулах устранить промежутки интегрирования, в которых f_1 равна нулю; так как в остальных промежутках $f_1 = f$, то получим:

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_b^B dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy.$$

В общем случае, каков бы ни был контур области D, можно написать формулу приведения в виде

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int dy \int f(x, y)\, dx = \int dx \int f(x, y)\, dy.$$

Но этот результат нуждается в следующих пояснениях:

Предположим, что мы сначала интегрируем по x, а затем по y. Рассматривая y, как постоянную, мы интегрируем по x во всех промежутках, в которых $f_1 = f$, т. е. во всех тех, которые, при данном значении y, дают точки области D. Другими словами, интегрирование по x распространяется на *сечение* области D прямой с ординатой y. Результат представит собою функцию от y, которую интегрируют затем по y между крайними значениями ординаты в области D.

9. Свойства двойного интеграла. I. *Пусть D будет площадью области интегрирования, M и m — верхней и нижней границами функции $f(x, y)$ в D; тогда*

$$MD \geqslant \int\int_D f(x, y)\, dx\, dy \geqslant mD.$$

Действительно, двойной интеграл есть общий предел двух сумм $\sum M_i \alpha_i$ и $\sum m_i \alpha_i$, каждая из которых содержится между $M \sum \alpha_i$ и $m \sum \alpha_i$, т. е. между MD и mD.

II. Если, в частности, положить $f = 1$, то получим площадь области интегрирования в виде двойного интеграла

$$D = \int\limits_D \int dx\, dy.$$

III. *Если разложить область с помощью секущих на несколько частей, то интеграл в D будет суммой интегралов, взятых в каждой части.*

При доказательстве мы можем предположить, что область D одной секущей разложена на две части D' и D'', так как всякий другой случай может быть исчерпан повторным применением этого рассуждения.

Покроем тогда D сетью прямоугольников α_i, как и прежде, и рассмотрим сумму $\sum M_i \alpha_i$, которая имеет пределом интеграл в области D. Если пренебречь элементами, задетыми секущей, она разлагается на две суммы, имеющие предельные интегралы в D' и в D''. Но элементы, рассеченные секущей, дают сумму, стремящуюся к нулю. Таким образом, пренебрегая ими, мы не совершим ошибки, что и доказывает теорему.

10. Обобщение определения двойного интеграла. Пусть D — область интегрирования. Разложим ее прямыми или кривыми на элементы с вполне определенными площадями α_i. Пусть M_i и m_i будут границами $f(x, y)$ в α_i.

Двойной интеграл от $f(x, y)$ в области D есть общий предел двух сумм

$$\sum M_i \alpha_i, \quad \sum m_i \alpha_i,$$

распространенных на все элементы α_i области D, когда все эти элементы бесконечно убывают в обоих направлениях.

В самом деле, по свойству I предшествующего n°,

$$M_i \alpha_i \geqslant \int\limits_{\alpha_i} \int f(x, y)\, d\alpha_i \geqslant m_i \alpha_i;$$

сложив почленно все аналогичные неравенства, по свойству III получим:

$$\sum M_i \alpha_i \geqslant \int\limits_D \int f(x, y)\, dx\, dy \geqslant \sum m_i \alpha_i.$$

Покажем теперь, что разность $\sum (M_i - m_i)\, \alpha_i$ крайних сумм стремится к нулю, откуда будет следовать, что оба они имеют пределом двойной интеграл.

Заключение относительно упомянутой разности непосредственно очевидно в случае, если $f(x, y)$ непрерывна, ибо все разности $M_i - m_i$ тогда равномерно стремятся к нулю. Но оно сохраняет силу и в случае, когда функция $f(x, y)$ имеет разрывы, подчиненные тем же условиям, что и выше, ибо рассуждение, приведенное в конце n°5, применимо и в данном случае.

Предшествующее определение можно видоизменить еще следующим образом:

Двойной интеграл $f(x, y)$ в D есть предел суммы

$$\sum f(\xi_i, \eta_i)\, \alpha_i,$$

где ξ_i, η_i есть произвольная точка в α_i и сумма распространена на все элементы α_i области D, при условии, что все эти элементы бесконечно убывают во всех направлениях.

Действительно, $f(\xi_i, \eta_i)$ содержится между m_i и M_i, так что сумма, рассматриваемая в этом новом предположении, содержится между двумя суммами предшествующего утверждения.

11. **Теорема о среднем.** Если $\varphi(x, y)$ не меняет знака в области D и если функция $f(x, y)$ содержится между границами m и M, интеграл

$$\iint\limits_D f(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

будет содержаться между следующими двумя:

$$m \iint\limits_D \varphi(x, y)\, dx\, dy, \qquad M \iint\limits_D \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

В этом именно и состоит *теорема о среднем*, которая аналогична соответствующей теореме относительно простых интегралов; ее доказательство вполне очевидно.

Легко заметить, что теорема I n°9 есть частный случай этой теоремы.

12. **Криволинейные интегралы. Формула Green'a для плоскости.** Рассмотрим дугу плоской кривой L, выраженной параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где x и y — непрерывные функции от t; точка x, y описывает дугу L, когда t изменяется от t_1 до T. Обозначим через $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ две непрерывные функции от x, y. Разложим промежуток (t_1, T) последовательными точками $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1} = T$ на части; пусть x_i, y_i означают значения x и y для $t = t_i$. Образуем теперь две суммы $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\sum_i P(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i), \quad \sum_i Q(x_i, y_i)(y_{i+1} - y_i).$$

Когда последовательные значения t безгранично сближаются то же происходит и со значениями x и y, и обе предшествующие суммы вообще стремятся к определенным пределам, которые, соответственно, обозначают через

$$\int P(x, y)\,dx, \quad \int Q(x, y)\,dy.$$

Эти два выражения, а также сумма их

$$\int_L P\,dx + Q\,dy$$

и называются *криволинейными интегралами, взятыми вдоль по кривой* L.

Существование их было установлено в томе I (п°360, стр. 420) при единственном условии, чтобы линия L была спрямляема. Здесь мы ограничимся более простым предположением, что кривая L разлагается на конечное число отрезков, вдоль каждого из которых x и y изменяются лишь в одном направлении. Так как ко второй из приведенных выше сумм приложимо аналогичное рассуждение, достаточно провести рассуждение по отношению к первой:

$$\sum P(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i);$$

мы покажем, что предел ее приводится к обычным определенным интегралам по отношению к переменной x.

Если x изменяется от a до b постоянно в одном направлении, когда точка (x, y) пробегает линию L, уравнение кривой может быть представлено в виде:

$$y = \varphi_1(x),$$

где φ_1 есть непрерывная функция от x между a и b, и непосредственно ясно, что пределом предшествующей суммы, по определению, является определенный интеграл

$$\int P(x, \varphi_1)\,dx.$$

Если линия L параллельна оси y-ов, x будет постоянным и интеграл обратится в нуль.

Если же линия L составляется из нескольких отрезков, вдоль каждого из которых x изменяется в одном направлении, то для каждого из этих отрезков криволинейный интеграл приводится к обыкновенному интегралу относительно x, а интеграл, распространенный на L, будет их суммой.

Вернемся теперь к параметрическому представлению линии L и предположим, что функции x и y от t имеют непрерывные производные x' и y' между t и T. Можно преобразовать интегралы, относительно x, взяв t за новую переменную интегрирования. Тогда получится

$$\int_L P(x, y)\,dx = \int_{t_1}^{T} P(x, y)\,x'\,dt.$$

Аналогично найдем, что

$$\int_L Q(x, y)\, dy = \int_{t_1}^{T} Q(x, y)\, y'\, dt$$

и, следовательно, складывая

$$\int_L P\, dx + Q\, dy = \int_{t_1}^{T} (Px' + Qy')\, dt.$$

Эти формулы, очевидно, сохраняют силу, если производные x', y' имеют разрывы в конечном числе точек, но остаются ограниченными.

Если изменить направление, в котором пробегается линия L, то это приведет к перестановке пределов определенных интегралов, взятых по отношению к x, y или t и, следовательно, криволинейный интеграл изменит знак. Пусть A, B будут концами линии L; если желательно указать направление, в котором пробегается линия L, в самом обозначении криволинейного интеграла, то заменяют значок L через AB или BA. Таким орбазом,

$$\int_{AB} P\, dx + Q\, dy = -\int_{BA} P\, dx + Q\, dy.$$

Исследуем в частности случай, когда линия L представляет собой замкнутый контур без кратных точек.

Движение по этому контуру может происходить либо в *прямом* направлении, либо в *обратном*. Прямым называется направление вращения положительной оси x-ов в сторону положительной оси y-ов. Обыкновенно это направление обратно направлению вращения часовой стрелки и оставляет начало влево от наблюдателя. В этом случае, прямым направлением на контуре C будет то, при котором внутренняя область остается слева от движущегося по контуру наблюдателя.

В случае замкнутого контура C уславливаются символом

$$\int_C P\, dx + Q\, dy$$

обозначать интеграл, взятый в прямом направлении.

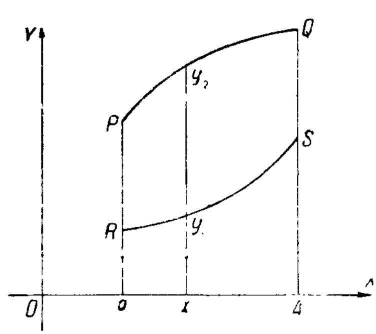


Рис. 1.

Green пользовался одной важной формулой (обыкновенно связываемой с его именем), которая приводит некоторый двойной интеграл к криволинейному. Мы установим ее.

Рассмотрим область D, ограниченную замкнутым контуром C. Предположим сначала, что этот контур (рис. 1) составляется из двух дуг кривых RS и PQ и двух параллелей оси y-ов — RP и SQ. Ординаты y_1 и y_2 ($y_2 > y_1$) точек этих кривых предполагаются не-

непрерывными функциями от x в промежутке (a, A), соответствующем рассматриваемым дугам. Может случиться, что эти дуги одним или обоими концами соприкасаются; тогда одна из прямых контура или обе прямые исчезнут. Пусть теперь $P(x, y)$ будет функцией однозначной и непрерывной, вместе со своей производной $\frac{\partial P}{\partial y}$, в области D. По формуле n°8 будем иметь:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int\limits_{a}^{A} dx \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_{a}^{A} P(x, y_2)\, dx - \int\limits_{a}^{A} P(x, y_1)\, dx.$$

Оба последних простых интеграла могут быть рассматриваемы, как криволинейные интегралы, взятые первый — по дуге PQ, а второй — по дуге RS. Таким образом получается

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\int\limits_{QP} P\, dx - \int\limits_{RS} P\, dx.$$

утверждаю, что этот результат можно написать в виде

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\int\limits_{C} P\, dx.$$

Действительно, когда точка описывает контур C в прямом направлении, она последовательно пробегает дуги RS и QP и прямолинейные отрезки SQ и PR; но так как интеграл, взятый по этим отрезкам, равен нулю, их можно и не принимать во внимание.

Предшествующая формула без труда распространяется на область D, ограниченную контуром C произвольной формы, лишь бы этот контур удовлетворял условиям n°1. В самом деле, тогда можно с помощью секущих разложить D на части $D_1, D_2, \ldots$, ограниченные контурами такого же типа, как и только что рассмотренный. Двойной интеграл в каждой части приводится к криволинейному. Взяв сумму этих двойных интегралов, мы получим интеграл, распространенный на всю область D. С другой стороны, сумма криволинейных интегралов приведется к криволинейному интегралу вдоль C, ибо интегралы, взятые по секущим, исчезнут. Действительно, по каждой секущей придется взять интеграл дважды и в двух противоположных направлениях, рассматривая ее как принадлежащую к контуру той или другой из двух разделяемых ею областей; эти два соответствующие интеграла взаимно уничтожаются.

Пусть теперь $Q(x, y)$ будет другой непрерывной функцией в области D, вместе со своей производной $\frac{\partial Q}{\partial x}$; формула

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int\limits_{C} Q\, dy$$

устанавливается подобно предыдущей. Вычитая обе формулы почленно, мы получим, наконец, *формулу Green'а*

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy=\int_C P\,dx+Q\,dy.$$

Она сводит вычисление двойного интеграла в области D к вычислению криволинейного интеграла, взятого по контуру области.

Мы уже встречали в первой части курса некоторые приложения этой формулы. Положим $Q=x$ и $P=-y$; тогда

$$\int_C x\,dy-y\,dx=2\int\int_D dx\,dy=2D.$$

Это одна из формул, выражающих площадь области D, ограниченной контуром C, с помощью интеграла, взятого по контуру. Две другие формулы

$$D=-\int_C y\,dx=\int_C x\,dy$$

получаются аналогичным образом, если положить $Q=0$, $P=-y$ или $Q=x$, $P=0$.

13. Тройные интегралы. Предшествующие рассуждения распространяются и на систему трех переменных x, y, z. Таким образом мы приходим к понятию о *тройных интегралах*. Мы удовольствуемся указанием следующих результатов, так как доказательства их проводятся так же, как и в случае двойных интегралов.

Предположим, что точка (x, y, z) изменяется в пределах прямоугольного параллелепипеда R, ограниченного значениями a и A переменной x, значениями b и B переменной y и значениями c и C переменной z. Пусть $f(x, y, z)$ будет непрерывной функцией от x, y, z в этой области или ограниченной функцией, точки разрыва которой лежат на конечном числе *плоских* или *кривых* поверхностей, называемых *поверхностями разрывов. Кривые* поверхности сверх того подчинены некоторым ограничениям. Необходимо, чтобы при пересечении их плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей, получающаяся система *линий* разрывов удовлетворяла условиям, которые до сих пор налагались на эти линии в плоскости двух переменных.

Установив это, образуем вполне определенное выражение:

$$\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f(x, y, z)\,dz, \qquad (1)$$

которое получается в результате трех последовательных интегрирований, по отношению к z, рассматривая x и y как постоянные, затем по отношению к y, принимая x за постоянную и, наконец, по отношению к x. Это выражение есть *тройной интеграл, распространенный на область R*.

Можно его определить также и как предел сумм:

Тройной интеграл в R есть общий предел двух сумм

$$\sum m_i\alpha_i, \quad \sum M_i\alpha_i,$$

получаемых путем разложения области R на бесконечно малые призматические элементы α_i с помощью трех систем плоскостей, соответственно параллельных координатным плоскостям, и складывая затем произведения всех этих элементов, соответственно, на нижние границы m_i и верхние границы M_i функции $f(x, y, z)$ в каждом из них.

Так как порядок, в котором рассматриваются переменные, не влияет на это определение, то отсюда вытекает следующая теорема:

Если последовательно проинтегрировать ту же функцию $f(x, y, z)$ по отношению к трем переменным x, y, z между постоянными пределами, то результат не будет зависеть от порядка, в котором производятся эти три интегрирования.

Определение тройного интеграла распространяется также и на область D, ограниченную замкнутой поверхностью произвольного вида. Однако, для того, чтобы могла быть обобщена предшествующая теория двойных интегралов, на эту границу нужно наложить некоторые ограничения.

Предположим, что мы пересекаем область D плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей, например, плоскостью с ординатой z, параллельной плоскости xy. Точки области D, принадлежащие плоскости z, образуют двумерную область, которую называют с е ч е н и е м области D плоскостью z. Мы допустим, что контур этого сечения удовлетворяет условиям, которые мы раньше налагали на контур области изменения двух переменных, и что это справедливо и для каждого другого сечения, параллельного одной из координатных плоскостей.

Тройной интеграл от $f(x, y, z)$ в области D произвольного вида есть общий предел двух сумм $\sum M_i\alpha_i$ и $\sum m_i\alpha_i$, получаемых при разложении, с помощью произвольных поверхностей, области D на части α_i, бесконечно малые во всех направлениях, и суммировании произведения всех этих элементов, соответственно, на верхние границы M_i и нижние границы m_i функции $f(x, y, z)$ в каждом из них. Этот предел обозначается символом

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{2}$$

Теорема о среднем распространяется и на тройные интегралы. Мы укажем лишь следующий ее частный случай. Если через D обозначить объем области интегрирования, а через μ — надлежаще выбранное среднее значение f в этой области, то можно написать

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dx = \mu D. \tag{3}$$

В частности, если $f=1$, получаем:

$$D=\iiint_D dx\,dy\,dz, \tag{4}$$

что дает общее выражение для объема тела под видом тройного интеграла.

14. Приведение тройных интегралов. Рассмотрим интеграл

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

распространенный на область произвольного вида.

Этот интеграл легко приводится к другому, взятому в призматической области. Пусть a и A будут крайними значениями x, b и B — крайними значениями y, c и C — крайними значениями z в области D. Прямоугольный параллелепипед R, ограниченный указанными значениями, содержит область D. Если через f_1 обозначить функцию, равную f в каждой точке D и нулю вне D, то

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_R f_1(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Интеграл в R вычисляется с помощью трех последовательных простых интегрирований, выполненных по отношению к x, y, z в произвольном порядке. Например, его можно привести к

$$\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f_1(x, y, z)\,dz. \tag{5}$$

Рассмотрим результат двух первых интегрирований

$$\int_b^B dy\int_c^C f_1(x, y, z)\,dz.$$

Это есть двойной интеграл, распространенный на прямоугольник; при этом x рассматривается как постоянная. Этот двойной интеграл можно заменить другим, относящимся к функции f. Для этого достаточно свести область интегрирования к той области, в которой $f_1=f$. Эта область есть не что иное, как сечение области D плоскостью x. Обозначая ее через S_x, мы можем переписать предшествующий интеграл так:

$$\iint_{S_x} f(x, y, z)\,dy\,dz,$$

и тогда тройной интеграл примет вид

$$\int_a^A dx\iint_{S_x} f(x, y, z)\,dy\,dz. \tag{6}$$

Так как двойной интеграл может быть выписан с помощью двух простых интегралов, взятых по y и по z, то вычисление тройного интеграла, таким образом, приводится к трем последовательным интегрированиям по отношению к функции f.

Это выражают следующим общим соотношением:

$$\iiint_D f\,dx\,dy\,dz = \int dx \int dy \int f\,dz. \tag{7}$$

Первое интегрирование выполняется по отношению к z, причем x и y предполагаются данными и интегрирование распространяется на значения z, для которых точка (x, y, z) принадлежит D. Второе интегрирование распространяется на значения y, для которых (при данном x) прямая x, y пересекает D; третье же интегрирование распространяется на все значения x, которым соответствуют точки D.

Можно интегрирования переставить, но тогда нужно также переставить буквы в предыдущем правиле, вследствие чего вообще изменятся и пределы интегрирования.

§ 2. Функциональные определители. Преобразование двойных интегралов.

15. Функциональный определитель или якобиан. Пусть u, v — две независимые переменные, а x, y — две функции

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

непрерывные вместе с их первыми частными производными. Определитель

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

называется *функциональным определителем или якобианом* x, y по отношению к u, v. Он обозначается символом

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)},$$

напоминающим обозначение производных. В действительности мы увидим, что функциональный определитель обладает свойствами, аналогичными свойствам производной. Мы укажем следующие:

I. Предположим, что переменные u, v сами представляют функции двух новых независимых переменных u', v', также допускающие непрерывные частные производные. Тогда

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u'} & \dfrac{\partial x}{\partial v'} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u'} & \dfrac{\partial y}{\partial v'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial u'} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial u'} & \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial v'} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial v'} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial u'} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial u'} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial v'} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix}$$

и согласно правилу умножения определителей,

$$\frac{d(x, y)}{d(u', v')} = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \frac{d(u, v)}{d(u', v')}.$$

Эта формула аналогична формуле, выражающей производную функцию от функции.

II. Когда $u' = x$ и $v' = y$, предшествующая формула дает

$$1 = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \frac{d(u, v)}{d(x, y)}.$$

Итак, якобиан u, v по отношению к x, y есть величина, обратная якобиану x, y по отношению к u, v, что напоминает правило для нахождения производной обратной функции.

Это правило, очевидно, предполагает существование обратных функций u, v от x, y, но в этом существовании можно удостовериться с помощью следующей теоремы.

III. Если функции x, y принимают значения x_0, y_0 в точке u_0, v_0 и если их якобиан J в этой точке не обращается в нуль, то можно и обратно рассматривать u, v, как функции от x, y, непрерывные в окрестности точки x_0, y_0 и принимающие в этой точке значения u_0, v_0. Эти функции однозначны и имеют частные производные.

Это есть приложение теоремы n^0 170 первой части курса.

Определение якобиана распространяется на любое число функций x_1, x_2, ..., x_n от такого же числа независимых переменных u_1, u_2, ..., u_n. Полагают

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} = \frac{d(x_1, x_2, \dots, x_n)}{d(u_1, u_2, \dots, u_n)}.$$

Свойства I, II, III, очевидно, обобщаются и на этот случай.

IV. Еще одно свойство, обобщающее правило дифференцирования сложных функций: пусть x, y будут данные функции от ξ, η, ζ:

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \psi(\xi, \eta, \zeta).$$

Если ξ, η, ζ зависят от двух переменных u, v, переменные x и y являются сложными функциями от u, v. Мы докажем, что

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} \frac{d(\xi, \eta)}{d(u, v)} + \frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)} \frac{d(\eta, \zeta)}{d(u, v)} + \frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)} \frac{d(\zeta, \xi)}{d(u, v)}. \quad (1)$$

Во второй части равенства столько членов, сколько сочетаний из букв ξ, η, ζ по два. Так как эта формула легко распространяется на случай большего числа переменных, мы дадим доказательство ее, также легко поддающееся обобщению.

Заменим сначала в $d(x, y) : d(u, v)$ одно лишь x через $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, т. е. $\frac{dx}{du}$ через $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial u}+\ldots$ и т. д. Этот определитель представится в виде суммы определителей:

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{d(\xi, y)}{d(u, v)}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{d(\eta, y)}{d(u, v)}+\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{d(\zeta, y)}{d(u, v)}.$$

Это — выражение, линейное относительно функциональных определителей (ξ, y), (η, y), (ζ, y). Заменим теперь в последних y через $\psi(\xi, \eta, \zeta)$; они в свою очередь выразятся линейно через функциональные определители (ξ, η), (η, ζ), (ζ, ξ), ибо якобианы (ξ, ξ), ... суть нули. Внеся эти значения в предшествующие выражения, мы получим

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)}=A\frac{d(\xi, \eta)}{d(u, v)}+B\frac{d(\eta, \zeta)}{d(u, v)}+C\frac{d(\zeta, \xi)}{d(u, v)}.$$

В этом равенстве коэффициенты A, B, C зависят лишь от вида функций φ и ψ от ξ, η, ζ, но не от вида функций ξ, η, ζ от u, v. Поэтому их можно определить с помощью частного выбора зависимости ξ, η, ζ от u, v. Так, A мы найдем непосредственно, положив $u=\xi$, $v=\eta$, $\zeta=\mathrm{const}$, благодаря чему вторая часть равенства сведется к A; аналогично вычисляются B и C. В результате мы придем к формуле (1).

16. Соответствие двух плоских областей D и D', однозначное, прямое или обратное. Вычисление площади в криволинейных координатах. Отнесем переменные u, v к двум прямоугольным осям Ou и Ov, а переменные x, y — к двум прямоугольным осям Ox и Oy. Формулы

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v),$$

которые мы предположим удовлетворяющими условиям предшествующего n°, устанавливают некоторого рода соответствие между точками плоскости uv и точками плоскости xy. Предположим, что ими устанавливается соответствие между точками области D', ограниченной контуром C', в плоскости xy, и точками области D, ограниченной контуром C, в плоскости uv.

Соответствие будет *однозначным*, если каждой точке D соответствует одна и только одна точка D', и каждой точке D' — одна и только одна точка D. Другими словами, оно будет однозначным, если каждому замкнутому контуру, описанному точкой (u, v), соответствует замкнутый же контур, описанный точкой (x, y), и обратно. Ясно, что, в частности, контуры C и C' обеих областей соответствуют друг другу в указанном смысле. В n° 18 читатель найдет общую теорему об однозначности соответствия двух областей.

Соответствие называется *прямым*, если соответствующие точки (u, v) и (x, y) одновременно описывают замкнутые контуры в одном и том же направлении (прямом или обратном); оно называется обратным, если направления, в которых одновременно описываются эти контуры, противоположны. Это определение, очевидно, предполагает, что род соответствия остается тем же для всех контуров, которые можно провести в области D.

Род соответствия зависит от функционального определителя

$$J=\frac{d(x, y)}{d(u, v)}.$$

Подробное исследование этой зависимости требует довольно отвлеченного анализа, который будет приведен в n° 18. Здесь мы предположим только, что определитель J не меняет знака в области D и что соответствие областей D и D' является однозначным. Поставим себе задачей вычислить площадь D' с помощью интеграла, распространенного на D. С этой целью мы воспользуемся известным выражением (n° 12) площади D' в виде криволинейного интеграла:

$$D'=\int_{C'} x\, dy.$$

Последний приводится к обыкновенному интегралу, если рассматривать u, v и, следовательно, x, y как функции одной независимой переменной t, которая изменяется от t_0 до T, когда точка (u, v) описывает контур C, а точка (x, y) — контур C'. Мы предположим, что (x, y) описывает контур C' в прямом направлении, тогда

$$D'=\int_{C'} x\, dy=\int_{t_0}^{T} x \frac{dy}{dt} dt=\int_{t_0}^{T} x\left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}\right) dt.$$

Последний интеграл представляет собою результат преобразования к переменной t криволинейного интеграла, взятого вдоль C,

$$\varepsilon \int_{C} x\left(\frac{\partial y}{\partial u} du+\frac{\partial y}{\partial v} dv\right),$$

где ε означает положительную или отрицательную единицу, именно, $\varepsilon=+1$, если контур C описывается в прямом направлении, и $\varepsilon=-1$, если он описывается в обратном направлении.

Этот интеграл также равен D'; мы преобразуем его по формуле Green'а. Положим

$$P=x \frac{\partial y}{\partial u}, \quad Q=x \frac{\partial y}{\partial v},$$

откуда, предполагая существование и непрерывность $\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}=J;$$

мы получаем

$$D'=\varepsilon \int_{C}(P\, du+Q\, dv)=\varepsilon \int\int_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right) du\, dv=\int\int_{D} \varepsilon J\, du\, dv$$

Заметим, что D' положительно и J не меняет знака, так что $\varepsilon J = |J|$, следовательно,

$$D' = \iint\limits_{D} |J|\, du\, dv.$$

Это и есть формула, которую мы желали установить.

Выражение $|J|\, du\, dv$ под знаком интеграла называется *элементом площади* D' в криволинейных координатах u, v. Предшествующая формула представляет собой общую формулу для квадрирования площадей плоских фигур в криволинейных координатах.

Замечание. Так как εJ положительно, то $\varepsilon = +1$ или -1 в зависимости от того, будет ли J положительно или отрицательно, так что точки (u, v) и (x, y) описывают контуры C и C' в одинаковых или обратных направлениях, смотря по тому, будет ли J положительно или отрицательно. Так как те же рассуждения приложимы к любой части области D' и, следовательно, к любому контуру, то отсюда следует, что соответствие областей D и D' будет прямым или обратным, в зависимости от того, будет ли J положительно или отрицательно.

17. Обобщение предыдущего доказательства. Предшествующее доказательство основывается на преобразовании Green'а

$$\int\limits_{C} x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\, du + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv\right) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\, dv,$$

которое мы установили в допущении существования и непрерывности $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$.

На самом же деле это условие излишне, достаточно существования и непрерывности первых производных. В главе IV мы докажем, что в этом случае можно определить полином $P(u, v)$, стремящийся к y, с тем чтобы и его производные стремились к соответственным производным y, и притом *равномерно*. Предшествующая формула без труда устанавливается, если y заменено полиномом P, у которого все производные существуют. В пределе она остается верной и для y.

18. Теорема. *Если якобиан J функций x, y относительно u, v не обращается в нуль в области D и если, сверх того, точка (x, y), связанная с точкой (u, v), описывает в своей плоскости простой контур C', когда (u, v) описывает контур C области D, то области D и D', ограниченные контурами C и C', связаны однозначным соответствием.*

Обозначим пока через Δ область, которую описывает точка (x, y), когда (u, v) изменяется в области D. Мы прежде всего покажем, что Δ не может иметь иной границы, чем C', а для этого обнаружим, что каждая точка (x_0, y_0), соответствующая некоторой точке (u_0, v_0) *внутри* D, сама лежит *внутри* Δ. С этой целью заметим, что так как J не нуль, u и v суть непрерывные функции от x, y и принимают значения, близкие к u_0, v_0, так что соответствующая им точка содержится в D, когда x и y изменяются в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0); таким образом эта достаточно малая область входит в состав области Δ.

Область Δ, имеющая своей единственной границей C' и не простирающаяся в бесконечность, не может отличаться от части D' плоскости, содержащейся внутри этого контура C'.

Итак, области D и D' взаимно соответствуют. Ясно, что (x, y) описывает замкнутый контур, если (u, v) описывает такой же. Для установления однозначности соответствия остается показать, что и (u, v) описывает замкнутый контур одновременно с (x, y).

Предположим противное, именно, что линии L, соединяющей две различные точки (u_0, v_0) и (u_1, v_1) области D, в области D' соответствует замкнутая линия L', исходящая из точки x_0, $y_0)$ и к ней возвращающаяся. Мы покажем, что в этом содержится противоречие.

Так как J не обращается в нуль, то переменные u, v являются непрерывными функциями от x, y в окрестности каждой точки линии L', так что, если линия L' непрерывным образом деформируется, то и соответствующая ей линия L также непрерывно деформируется. Но с помощью непрерывного деформирования можно свести линию L' к единственной точке (x_0, y_0), не меняя притом ее концов, совпадающих с этой точкой. Тогда и линия L должна была бы одновременно свестись к точке, несмотря на то, что ее концы также остаются неизменными, а это невозможно, ибо эти концы отличны один от другого.

19. Преобразование переменных в двойных интегралах. Пусть $f(x, y)$ будет функцией от x, y, имеющей вполне определенный интеграл в области D', рассмотренной в n^0 16. Предложим себе преобразовать переменные в этом интеграле с помощью соотношений $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ того же n^0. Задача состоит в замене интеграла, распространенного на D', эквивалентным ему интегралом, взятым по отношению к новым переменным u, v в области D. Решение представляется в виде формулы

$$\int\int_{D'} f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_{D} f(\varphi, \psi)\, |J|\, du\, dv,$$

которую мы и докажем.

Разложим с помощью секущих область D на бесконечно малые элементы α_i; тогда соответствующими секущими в плоскости xy область D' разложится на бесконечно малые элементы α_i'. Обозначим через m_i и M_i границы $f(x, y)$ в α_i' или, что то же, границы $f(\varphi, \psi)$ в α_i; по теореме о среднем (n^0 11), будем иметь

$$m_i \int\int_{\alpha_i} |J|\, du\, dv < \int\int_{\alpha_i} |J|\, f(\varphi, \psi)\, du\, dv < M_i \int\int_{\alpha_i} |J|\, du\, dv.$$

Крайние члены, по формуле n^0 16, имеют, соответственно, значение $m_i \alpha_i'$ и $M_i \alpha_i'$; поэтому, если просуммировать все неравенства, аналогичные предшествующим, получим

$$\sum m_i \alpha_i' < \int\int_{D} |J|\, f(\varphi, \psi)\, du\, dv < \sum M_i \alpha_i',$$

Но два крайних члена, по определению, имеют своим общим пределом интеграл от $f(x, y)$ в D'; следовательно, этот интеграл равен среднему члену, что и требовалось доказать.

Отсюда вытекает следующее правило:

Для преобразования переменных в двойном интеграле нужно заменить x и y их значениями в функции от новых переменных u, v, а элементы площади $dx\,dy$ элементом площади в системе координат u, v. Область интегрирования по отношению к x, y заменяется той, которая ей соответствует в плоскости u, v.

20. Преобразование к полярным координатам. Это преобразование есть частный случай общего преобразования. Переход от прямоугольных координат к полярным производится по формулам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

Якобиан имеет величину

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Формула преобразования интеграла, взятого по отношению к x, y, в другой, взятый по отношению к r, φ, имеет вид

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy = \int\int f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Области интегрирования должны соответствовать одна другой.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ.

1. Если положить $F(X, Y) = \int\limits_a^X dx \int\limits_b^Y f(x, y)\,dy$, то будем иметь

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial Y} = f(X, Y).$$

Обратно, если F удовлетворяет последнему равенству, то

$$\int\limits_a^X dx \int\limits_b^Y f(x, y)\,dy = F(X, Y) - F(a, Y) - F(X, b) + F(a, b).$$

Распространить эти результаты на случай трех переменных.

2. Рассматривая двойной интеграл в треугольнике, доказать, что

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x, y)\,dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x, y)\,dx.$$

3. Пусть A будет часть плоскости, ограниченная двумя линиями уровня непрерывной функции $f(x, y)$, т. е. двумя линиями, вдоль которых f сохраняет соответственно постоянные значения f_1 и f_2 ($f_1 < f_2$). Предполагается,

что проведены и промежуточные линии уровня, что все эти линии замкнуты и что мы умеем вычислять площадь E фигуры, ограниченной каждой такой линией (f). Пусть крайним линиям соответствуют значения E_1 и E_2 площади E; тогда, смотря по тому, будет ли E рассматриваться как функция от f или f как функция от E,

$$\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{E_1}^{E_2} f\, dE = [Ef]_1^2 - \int_{f_1}^{f_2} E\, df.$$

Отв. Рассмотрим f, как функцию от E; пусть ΔE будет площадью той части плоскости, которая содержится между последовательными линиями (f) и $(f+\Delta f)$, тогда значение двойного интеграла в ΔE есть $f'\Delta E$, где f' есть среднее значение f в ΔE. Предполагая, что ΔE стремится к нулю, получим

$$\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \lim \sum f' \;\Delta E = \int_{E_1}^{E_2} f dE.$$

4. ***Эллиптические координаты.*** Рассмотрим софокусные конические сечения

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

где λ есть произвольный параметр. Через каждую точку плоскости проходят два конических сечения этого семейства, эллипс и гипербола, ибо для каждой системы значений x, y это уравнение (относительно λ) имеет два положительных корня λ и μ, из которых один больше, а другой меньше c^2. Эти величины λ, μ и называются эллиптическими координатами точки (x, y). Показать, что при $x > 0$, $y > 0$

$$x = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{c}, \quad y = \frac{\sqrt{(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}{c},$$

$$\frac{d(x, y)}{d(\lambda, \mu)} = -\frac{1}{4} \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{\lambda\mu(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}.$$

Определить род соответствия между областями в плоскости x, y и λ, μ.

5. Определить две функции P, Q от двух переменных x и y так, чтобы криволинейный интеграл

$$\int P(x+\alpha, y+\beta)\, dx + Q(x+\alpha, y+\beta)\, dy,$$

взятый вдоль любого замкнутого контура, зависел лишь от этого контура и не зависел бы от постоянных α, β.

Отв. Преобразуя двойной интеграл по формуле Green'а, замечаем, что $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ должно свестись к постоянной k. Отсюда легко вывести выражения для P и Q.

§ 3. Площади кривых поверхностей.

21. Определение площади поверхности. Элемент поверхности. Поверхности, которые чаще всего встречаются в приложениях, имеют касательную плоскость, положение которой непрерывным образом изменяется вместе с положением точки касания. В настоящей главе мы будем рассматривать только такие поверхности.

Пусть S будет часть такой поверхности, ограниченная некоторым контуром K и достаточно малая для того, чтобы угол между любыми двумя нормалями к ней был меньше двух прямых. Проведем плоскость P, которая не была бы перпендикулярна ни к одной из касательных плоскостей; при сделанных предположениях это всегда возможно.

Поверхность S проектируется на плоскость P в виде некоторой фигуры D, ограниченной контуром C, который представляет собой проекцию контура K. Различные точки поверхности проектируются в различные же точки области D, так что соответствие между точками поверхности S и фигуры D является однозначным.

Рассмотрим какой-либо способ подразделения поверхности S на бесконечно малые элементы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, и одновременно разложим область D на элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, являющиеся проекциями предшествующих. Обозначим вообще через Z угол касательной плоскости к поверхности с плоскостью P, через Z_i — значение Z в произвольной точке σ_i. Естественно рассматривать частное $\alpha_i : \cos Z_i$, как приближенное значение площади σ_i, так как это значение было бы точным, если бы σ_i была плоской поверхностью, совпадающей с касательной к ней плоскостью. Мы говорим, что $\alpha_i : \cos Z_i$ есть *элемент поверхности и что площадь S есть предел суммы*

$$\sum \frac{\alpha_i}{\cos Z_i}$$

всех этих элементов, когда они стремятся к нулю.

Для того, чтобы оправдать это определение, нужно показать, что 1°) этот предел существует, 2°) он не зависит от выбора плоскости P.

Существование предела становится непосредственно очевидным, если привести его к двойному интегралу. С этой целью отнесем поверхность S к трем взаимно перпендикулярным осям Ox, Oy, Oz, взяв плоскость P в качестве плоскости xy, и представим уравнение поверхности в виде

$$z = f(x, y);$$

ордината z и ее частные производные $p = f_x'$ и $q = f_y'$ будет непрерывными функциями от x и y. Угол Z касательной плоскости с плоскостью xy есть в то же время угол с осью Oz нормали к поверхности (если эту нормаль направить так, чтобы угол оказался острым); имеем $\cos Z = 1 : \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, откуда

$$S = \lim \sum \frac{\alpha_i}{\cos Z_i} = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\,dy. \quad (1)$$

Нужно еще показать, что величина площади, определяемая по формуле (1), не зависит от выбора плоскости P (взятой в качестве плоскости xy).

Пусть P' будет вторая плоскость, пересекающая первую под углом θ. Так как ось y-ов в плоскости P может быть взята произвольно, то возьмем за ось y-ов прямую пересечения P и P'. Повернем теперь оси вокруг Oy на угол θ так, что плоскость xy совпадет с P', и обозначим через x', y, z' новые переменные координаты. Мы будем иметь

$$x' = x\cos\theta + z\sin\theta,$$

$$\frac{d(x', y)}{d(x, y)} = \frac{\partial x'}{\partial x} = \cos\theta + p\sin\theta.$$

Поверхность S проектируется на плоскость $x'y(P')$ в виде некоторой фигуры D', причем точки двух областей D и D' находятся в однозначном соответствии. Если преобразовать интеграл (1) к новым переменным x', y по формуле n° 19, то получим

$$S = \int\int_D \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \int\int_{D'} \frac{dx' \cdot dy}{(\cos\theta + p\sin\theta)\cos Z}.$$

Но последний знаменатель есть не что иное, как косинус угла Z', составленного нормалью к поверхности с плоскостью P'. В самом деле, обозначая $\sqrt{1+p^2+q^2}$ через Δ, мы можем представить косинусы направления нормали по отношению к старым осям в виде $-p:\Delta$, $-q:\Delta$, $1:\Delta$, в то время как ось Oz' имеет косинусы направления $-\sin\theta, 0, \cos\theta$, так что, взяв сумму их произведений попарно, получим

$$\cos Z' = \frac{p\sin\theta + \cos\theta}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \cos Z\,(\cos\theta + p\sin\theta),$$

следовательно,

$$S = \int\int_{D'} \frac{dx'\,dy}{\cos Z'}.$$

Итак, S определяется по отношению к плоскости P' так же, как и по отношению к плоскости P, что мы и желали установить. Выражение, стоящее в формуле (1) под знаком интеграла, называется *элементом поверхности* в системе координат x, y; его обозначают через $d\sigma$. Таким образом,

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Теперь мы попытаемся видоизменить наше первоначальное определение, опираясь на следующую лемму:

Лемма. *Площадь части S поверхности, точки которой проек-*

тируются на плоскость P раздельно, равна частному от деления площади проекции S на эту плоскость на косинус угла, составленного с P некоторой надлежаще выбранной касательной плоскостью к S.

Для доказательства достаточно применить теорему о среднем к двойному интегралу, выражающему площадь S, когда плоскость P взята в качестве плоскости xy. Этот интеграл распространяется на проекцию D поверхности S на эту плоскость; поэтому, означая через ζ среднее значение угла Z, имеем

$$S = \int\int_D \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \frac{D}{\cos \zeta}$$

Новое определение площади кривой поверхности. *Площадь части S поверхности есть предел суммы проекций всех ее элементов на какие-либо соответствующие им касательные плоскости, если S разлагается на части, бесконечно убывающие по всем измерениям* *).

Пусть σ_i будет одним из элементов поверхности, а α_i — его проекцией на одну из соответствующих касательных плоскостей P_i. Применим теперь предыдущую лемму; означая через ζ_i угол плоскости P_i с некоторой надлежаще выбранной касательной же к σ_i плоскостью (о которой была речь в лемме), мы получим

$$\sigma_i = \frac{\alpha_i}{\cos \zeta_i}, \quad \text{откуда} \quad S = \sum \frac{\alpha_i}{\cos \zeta_i}.$$

Но углы ζ_i образованы двумя плоскостями, касательными к одному и тому же элементу; они равномерно стремятся к нулю. вместе с самими элементами, косинусы же их — к единице. Можно пренебречь этими косинусами, не изменяя тем предела предшествующей суммы, так что получается

$$S = \lim \sum \alpha_i.$$

---

*) Можно еще видоизменить предшествующее определение так, чтобы оно стало независимым от рассмотрения касательной плоскости. Проекция каждого из элементов α_i на переменную плоскость достигает своего наибольшего значения β_i при некотором определенном положении этой плоскости. Но β_i не может превзойти σ_i в силу леммы, и в то же время, по определению, не может быть меньше α_i. Следовательно,

$$\sigma_i \geqslant \beta_i \geqslant \alpha_i.$$

Сложив почленно все неравенства этого вида и переходя к пределу, получим

$$S \geqslant \lim \sum \beta_i \geqslant S.$$

Итак, $S = \lim \sum \beta_i$, откуда вытекает следующее определение:

Площадь части поверхности есть предел суммы наибольших значений плоских проекций элементов этой поверхности, в предположении, что поверхность делится на бесконечно малые части.

Это новое определение делает очевидным то обстоятельство, что площадь зависит лишь от формы поверхности.

22. Площади поверхности в криволинейных координатах. Замечание о вычислении элемента площади. Рассмотрим теперь поверхность, заданную в *криволинейных координатах*, т. е. с помощью параметрического представления

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v).$$

Положим

$$A = \frac{d(y, z)}{d(u, v)}, \quad B = \frac{d(z, x)}{d(u, v)}, \quad C = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}.$$

Предположим, что эти три функциональные определители являются непрерывными функциями от u, v в некоторой области Ω плоскости uv и ни в одной точке этой области одновременно не обращаются в нуль. Если точка (u, v) описывает область Ω, точка (x, y, z) описывает некоторую часть S поверхности. В каждой точке этой части поверхности существует определенная касательная плоскость, причем ее положение изменяется непрерывным образом вместе с изменением положения точки касания, ибо направляющие косинусы нормали определяются равенствами

$$\frac{\cos X}{A} = \frac{\cos Y}{B} = \frac{\cos Z}{C} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Если нормаль направлена так, что угол ее с осью OZ оказывается острым, то косинус этого угла должен быть положительным, так что

$$\cos Z = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Предположим сначала, что C не обращается в нуль в области Ω плоскости uv); касательная плоскость повсюду будет наклонена под острым углом к плоскости xy и площадь S представится определенным интегралом, распространенным на область D плоскости xy, которая служит проекцией S,

$$S = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \iint\limits_D \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|}\,dx\,dy.$$

Преобразуем этот интеграл в другой, распространенный на область Ω в плоскости uv. Определителем преобразования является C. Мы получим

$$S = \iint\limits_\Omega \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv. \tag{2}$$

Если бы какой-либо из двух других определителей A, B не обращался в нуль в области Ω, то можно было рассуждать подобным же образом по отношению к плоскости yz или zx, причем получилась бы та же формула. Так как, во всяком случае, можно разложить область Ω на части, в каждой из которых хоть один из трех определителей не обращается в нуль, то *формула (2) является общей и имеет место, каково бы ни было положение касательной плоскости.*

Обыкновенно формулу (2) представляют в другом виде. Положим

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

Имеет место тождество $EG-F^2=A^2+B^2+C^2$. Поэтому

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{2'}$$

Параметры E, F, G, которые мы только что ввели, играют важную роль в теории поверхностей. Если сложить квадраты dx, dy, dz, то получим

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

так что квадрат элемента дуги на поверхности есть однородная форма второй степени относительно du, dv, дискриминантом которой служит выражение $EG-F^2$.

Положительное выражение, стоящее под знаком двойного интеграла в формулах (2) и (2'), называется *элементом площади* в системе координат u, v. Его обыкновенно обозначают через $d\sigma$. Итак,

$$d\sigma=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{3}$$

и формулы, выражающие направляющие косинусы нормали, могут быть теперь переписаны в следующем виде

$$\frac{\cos X}{A}=\frac{\cos Y}{B}=\frac{\cos Z}{C}=\pm\frac{du\,dv}{d\sigma}. \tag{1}$$

§ 4. Употребительные формулы для вычисления объемов и площадей. Приложения.

23. Объемы в прямоугольных и цилиндрических координатах. Так как тело ограничено со всех сторон плоскими или кривыми поверхностями, то точки тела образуют некоторую область D. В прямоугольных координатах объем тела выражается тройным интегралом (n° 13)

$$V=\iiint\limits_{D}dx\,dy\,dz. \tag{1}$$

Интегрирование может быть выполнено различными способами: 1°. *Суммирование по параллельным слоям.* Пусть a, A будут крайними значениями x в D. Обозначим через S_x сечение тела плоскостью x, перпендикулярной к Ox или же область значений yz в этом сечении. Будем иметь

$$V = \int_a^A dx \int\int_{S_x} dy\,dz.$$

Но интеграл от $dy\,dz$ представляет, в функции от x, площадь сечения S_x, так что, означая эту площадь через $\varphi(x)$, получим

$$V = \int_a^A \varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

Итак, если известно $\varphi(x)$, то определение V сводится к простой квадратуре. Применение формулы (2) соответствует суммированию по параллельным слоям. Действительно, элемент $\varphi(x)\,dx$ интеграла есть главная часть объема слоя тела, заключаемого между плоскостями x и $x+dx$. Формулой (2) мы уже пользовались в первой части курса. Можно написать и две аналогичные ей формулы, заменяя x на y или z.

2°. *Суммирование по призматическим столбикам.* Выполним теперь в формуле (1) первое интегрирование по z. Предположим, что поверхность тела пересекается параллелью оси Oz лишь в двух точках, и обозначим через z_1 и z_2 ординаты этих точек, в функции от x, y. Пусть, наконец, D_1 будет та часть плоскости xy, в которую проектируется тело; эта часть ограничивается видимым контуром тела. Мы будем иметь

$$V = \int\int_{D_1} dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} dz = \int\int_{D_1} (z_2 - z_1)\,dx\,dy. \tag{3}$$

Определение V приведено к двойному интегралу. Говорят в этом случае, что суммирование элементов производится по призматическим столбикам, так как элемент $(z_2 - z_1)\,dx\,dy$ этого интеграла есть главная часть объема столбика, заключенного между плоскостями x и $x+dx$, перпендикулярными к Ox, и плоскостями y и $y+dy$, перпендикулярными к Oy.

Формула (3) упрощается, если тело имеет плоское основание B в самой плоскости xy, с боков ограничено цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а сверху — поверхностью $z = f(x, y)$.

Основание B тогда и составляет область D_1; имеем $z_1 = 0$, $z_2 = z$, так что

$$V = \int\int_B z\,dx\,dy. \tag{4}$$

3°. *Суммирование по призматическим столбикам в цилиндрических координатах.* Суммирование по призматическим столбикам обыкновенно осуществляется при помощи цилиндрических (или полу-полярных) координат z, r, θ. Это сводится к пользованию полярными координатами r, θ в плоскости xy. Преобразуем интеграл (4), заменяя $dx\,dy$ через $r\,dr\,d\theta$, и получим

$$V = \int\int_B z\,r\,dr\,d\theta. \tag{5}$$

Интегрирование распространяется на область изменения точки (r, θ), соответствующую основанию B.

24. Объемы в полярных координатах *). В полярных координатах положение точки M определяется ее *радиусом-вектором* r, или ее расстоянием от начала O, ее *широтой* θ, или углом OM с OZ, и ее *долготой* φ, или углом полу-плоскости ZOM с ZOX. Когда M описывает все пространство, r изменяется от 0 до ∞, θ — от 0 до π и φ — от 0 до 2π.

Для того, чтобы вычислить объем в полярных координатах, разлагают тело на элементы с помощью трех семейств поверхностей: сфер с центром O, определяемых радиусом r, конусов, с осью OZ, определяемых углом θ, и проходящих через ось OZ плоскостей, определяемых углом φ.

Элемент объема, содержащийся между двумя сферами r и $r + dr$, двумя конусами θ и $\theta + d\theta$, двумя плоскостями φ и $\varphi + d\varphi$, может быть уподоблен бесконечно малому прямоугольному параллелепипеду, имеющему ребрами dr, $r\,d\theta$ и $r \sin\theta\,d\varphi$, и, следовательно, объем $r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$.

Поэтому объем V, который представляет собой сумму этих элементов, выразится тройным интегралом

$$V = \int\int\int r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi, \tag{6}$$

причем интеграл распространяется на область, описываемую точкой (r, θ, φ), соответствующую рассматриваемому телу.

Это есть общая формула для вычисления объёмов в полярных координатах.

Предположим, что радиус-вектор пересекает поверхность тела лишь в двух точках, и пусть r_1 и r_2 будут значения r в этих точках, в функции от θ, φ. Обозначим через K область изменения (θ, φ) в этом теле. Если выполнить первое интегрирование по отношению к r, то получим

$$V = \frac{1}{3}\int\int_K (r_2^3 - r_1^3) \sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \tag{7}$$

В частности, если начало O содержится внутри тела и радиус-вектор пересекает поверхность тела *лишь* в одной точке, то в пре-

*) Строго этот вопрос трактуется в n° 36. Здесь мы довольствуемся лишь общим указанием.

дыдущей формуле следует положить $r=0$. Заменяя r_2 через r, мы получим

$$V=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^3 \sin\theta\, d\theta. \tag{8}$$

В двух последних формулах элемент интеграла представляет объем *конического* элемента тела, содержащегося между двумя конусами (вращение вокруг Ox), θ и $\theta+d\theta$, и двумя (проходящими через Oz) плоскостями, φ и $\varphi+d\varphi$.

Дадим теперь некоторые приложения этих формул.

25. **Пример суммирования с помощью призматических столбиков.** Пусть требуется вычислить объем тела, ограниченного плоскостью xy, эллиптическим параболоидом

$$z=\alpha x^2+\beta y^2$$

и вертикальным цилиндром, основанием которого служит эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Основанием тела служит часть B плоскости xy, ограниченная этим эллипсом. Формула (4) дает

$$V=\int\int_B z\,dx\,dy=\alpha\int\int_B x^2\,dx\,dy+\beta\int\int_B y^2\,dx\,dy.$$

Крайние значения x в B суть $-a$ и $+a$; крайние значения y, при данном x, получаются из уравнения эллипса:

$$y_2=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad y_1=-y_2.$$

Итак, имеем

$$\int\int_B x^2\,dx\,dy=\int_{-a}^{a} x^2\,dx\int_{-y_2}^{y_2} dy=4\int_0^a x^2 y_2\,dx=\frac{4b}{a}\int_0^a x^2\,dx\sqrt{a^2-x^2}.$$

Путем замены переменной $x=a\sin\varphi$ приводим этот интеграл к виду

$$4a^3b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{a^3b}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi=a^3b\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Интеграл от $y^2\,dx\,dy$ в B будет $ab^3\cdot\frac{\pi}{4}$, ибо он из предыдущего получается путем простой перестановки букв. Окончательно получаем

$$V=\frac{\pi}{4}ab(\alpha a^2+\beta b^2).$$

26. Применение цилиндрических координат. Задача Viviani. *Прямой круговой цилиндр пересекают сферой, центр которой лежит на поверхности цилиндра и радиус а которой равен диаметру прямого сечения цилиндра. Найти объем тела, ограниченного сферой и цилиндром.*

Возьмем начало в центре сферы, ось z-ов выберем параллельной образующим цилиндра. Прямое сечение цилиндра плоскостью xy есть круг, проходящий через начало. Проведем ось x через его центр; уравнение круга, в полярных координатах, будет

$$r = a\cos\theta,$$

а уравнение сферы, в прямоугольных координатах,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

откуда, переходя к цилиндрическим координатам,

$$z = \pm\sqrt{a^2 - r^2}.$$

Найдем сначала объем V тела, общего полусфере, соответствующей положительным z, и полуцилиндру, соответствующему положительным y. Это тело имеет своим основанием B в плоскости xy половину прямого сечения, в которой θ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. С другой стороны, при постоянном θ, r изменяется от 0 до $a\cos\theta$. Таким образом, по формуле (5),

$$V = \int\int_B zr\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\,dr\sqrt{a^2 - r^2} = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta + \sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)\frac{a^3}{3}.$$

Для того чтобы получить весь объем тела, общего сфере и цилиндру, нужно учетверить этот результат, что даст

$$\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\right)a^3.$$

Первый член равен объему полусферы. Поэтому *избыток объема полусферы (расположенной со стороны положительных x) над объемом тела, вырезаемого из нее цилиндром, равен девятой части куба диаметра. Это — классический пример кубатуры, выполненной точно, без введения иррациональностей.*

27. Квадратура кривых поверхностей. Площадь тела Viviani. Для вычисления площади кривой поверхности чаще всего употребляют формулы n⁰ 21:

$$S = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy, \tag{9}$$

где интегралы распространены на проекцию D поверхности S на плоскость xy, а также формулу, которая получается отсюда введением полярных координат r, θ в плоскости xy:

$$S = \iint\limits_D \frac{r\,dr\,d\theta}{\cos Z}. \tag{10}$$

Последней формулой мы и воспользуемся для вычисления площади поверхности *тела Viviani.*

Данные — те же, что и в примере n⁰ 26; речь идет теперь об определении площади части сферической поверхности, содержащейся внутри цилиндра.

Сохраним те же оси, что и выше, и ограничимся полусферой, соответствующей положительным z, и полуцилиндром, соответствующим положительным y. Пусть S будет площадь части этой полусферы, содержащейся в этом полуцилиндре; проекцией ее на плоскость xy служит область B, рассмотренная в n⁰ 26, так что

$$S = \iint\limits_B \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \iint\limits_B \frac{r\,dr\,d\theta}{\cos Z}.$$

Этот косинус тотчас же вычисляется, ибо $z = a\cos Z$, откуда

$$\cos Z = \frac{z}{a} = \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a}.$$

Подставим это значение в двойной интеграл; пределы r и θ те же, что и в n⁰ 26; мы получим

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{a\cos\theta} \frac{ar\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\theta)\,d\theta = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2.$$

Для того чтобы получить площадь части сферической поверхности, заключенной внутри цилиндра, нужно учетверить этот результат, что даст $(2\pi-4)a^2$. Первый член равен площади полусферы. *Итак, избыток площади полусферы (расположенной со стороны положительных x) над площадью ее части, вырезаемой цилиндром, равен* $4a^2$. Таким образом, площадь этой кривой поверхности выражается точно, без введения иррациональностей; это — первый пример такого рода.

28. Квадратура кривых поверхностей в криволинейных координатах. Общая формула, которую мы установили в n⁰ 22,

$$S = \iint\limits_\Omega \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{11}$$

также находит частое применение. Она приводит, подобно предшествующим формулам, вычисление площади S к двойному интегралу. Есть три главных случая, когда эта квадратура непосредственно приводится к простому интегралу:

1°. *Поверхности, образуемые винтовым движением некоторой кривой.* Винтовым движением называют движение, слагающееся из вращения вокруг некоторой оси и перемещения параллельно той же оси. Возьмем в качестве оси x ось вращения; пусть $X=\varphi(u)$, $Y=\psi(u)$ будут уравнения сечения поверхности плоскостью xy. Когда это сечение повернется на угол v, перемещение его будет av (a постоянно); точка $(X, 0, Y)$ перейдет в положение (x, y, z), где

$$x=X+av, \quad y=Y\cos v, \quad z=Y\sin v;$$

эти уравнения и дают представление поверхности в криволинейных координатах u, v. Означая штрихами производные по u, имеем:

$$ds^2=(X'^2+Y'^2)\,du^2+2aX'\,du\,dv+(Y^2+a^2)\,dv^2,$$

следовательно,

$$EG-F^2=Y^2(X'^2+Y'^2)+a^2Y'^2.$$

Так как это выражение зависит только от u, то интегрирование по v в формуле (1) производится сразу.

2°. *Поверхности вращения.* Если в винтовом движении перемещение параллельно оси равно нулю, то поверхность оказывается поверхностью вращения. В этом случае $a=0$, откуда

$$\sqrt{EG-F^2}=Y\sqrt{X'^2+Y'^2}.$$

Следовательно, площадь поверхности, описанной образующей при полном обороте вокруг оси, выразится формулой

$$S=\int Y\sqrt{X'^2+Y'^2}\,du\int_0^{2\pi}dv=2\pi\int Y\,du\sqrt{X'^2+Y'^2}=2\pi\int Y\,ds,$$

означая через s дугу образующей.

Эта формула была уже выведена в первой части курса.

3°. *Линейчатые поверхности.* В криволинейных координатах u, v они определяются тремя уравнениями

$$x=a_1+b_1u, \quad y=a_2+b_2u, \quad z=a_3+b_3u,$$

где a, b зависят только от v. Означая их производные по v штрихами, будем иметь

$$ds^2=[(a_1'+b_1'u)^2+\ldots]\,dv^2+2\,[a_1'b_1+\ldots]\,du\,dv+[b_1^2+\ldots]\,du^2.$$

Отсюда получаем, что

$$EG-F^2=M+2Nu+Pu^2,$$

где M, N, P зависят только от v. Так как элемент площади содержит лишь квадратный корень из этого трехчлена, то мы умеем (том I, n° 202) проинтегрировать его по u.

29. Площади частей поверхности, ограниченных линиями равного наклона. Назовем линиями равного наклона поверхности такие линии, вдоль которых Z постоянно. Во многих важных случаях, например, *для поверхностей второго порядка,* непосредственно вычисляется площадь E проекции на плоскость xy части S поверхности, ограниченной линией равного наклона. Тогда определение площади S зависит лишь от вычисления простого интеграла.

Действительно, назовем через ΔE приращение E, т. е. площадь фигуры, ограниченной проекциями двух линий (Z) и $(Z+\Delta Z)$; соответствующее приращение S будет ΔE: $\cos(Z+\theta\Delta Z)$, на основании леммы n^0 21. Поэтому, если рассматривать сначала Z как функцию от E, то, заставляя ΔE стремиться к нулю, мы будем иметь

$$S=\sum\Delta S=\sum\frac{\Delta E}{\cos(Z+\theta\Delta Z)}=\int\frac{dE}{\cos Z}.$$

Если нужно вычислить площадь S фигуры, заключенной между двумя линиями (Z_1) и (Z_2), то, беря Z за независимую переменную, мы получим

$$S=\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{dE}{dZ}\cdot\frac{dZ}{\cos Z}.$$

30. Площадь эллипсоида. В виде примера применения метода, изложенного в предыдущем n^0, вычислим площадь эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>b>c)$$

Прежде всего нужно определить проекцию линии, вдоль которой $\cos Z$ имеет постоянное значение u. Мы получим ее уравнение, определяя из уравнения эллипсоида значение p и q в функции от x, y и подставляя эти значения в равенство

$$1+p^2+q^2=\frac{1}{u^2}.$$

Последнее соотношение легко приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1-\alpha^2u^2}{1-u^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1-\beta^2u^2}{1-u^2}\right)=1,$$

полагая

$$a^2-c^2=a^2\alpha^2,$$
$$b^2-c^2=b^2\beta^2.$$

Итак, искомая проекция есть эллипс, для которого мы знаем полуоси, а следовательно, и площадь E, именно,

$$E=\pi ab\frac{1-u^2}{\Delta\cdot\Delta'},$$

если положить

$$\Delta^2=1-\alpha^2u^2,\quad \Delta'^2=1-\beta^2u^2.$$

Так как u (или $\cos Z$) изменяется от 1 до 0 для верхней половины эллипсоида, то площадь всей поверхности будет

$$S = -2\int_0^1 \frac{dE}{du}\cdot\frac{du}{u}.$$

Преобразуем сначала неопределенный интеграл. Именно

$$\frac{E\,du}{u^2} = \pi\, ab\,\frac{du}{u^2\Delta\Delta'} - \pi\, ab\,\frac{du}{\Delta\Delta'};$$

с другой стороны, дифференцируя, получим,

$$d\frac{\Delta\Delta'}{u} = -\frac{\alpha^2\Delta'}{\Delta}\,du - \frac{\beta^2\Delta}{\Delta'}\,du - \frac{\Delta\Delta'}{u^2}\,du = -\frac{\alpha^2\Delta'}{\Delta}\,du - \frac{\Delta}{u^2\Delta'}\,du$$

$$= -\frac{\alpha^2\Delta'}{\Delta}\,du - \frac{du}{u^2\Delta\Delta'} + \alpha^2\frac{du}{\Delta\Delta'},$$

откуда

$$\frac{E\,du}{u^2} = \pi\, ab\left[-d\frac{\Delta\Delta'}{u} - \frac{\alpha^2\Delta'}{\Delta}\,du - (1-\alpha^2)\frac{du}{\Delta\Delta'}\right].$$

На основании этого соотношения

$$\int\frac{dE}{u} = \frac{E}{u} + \int\frac{E\,du}{u^2} =$$

$$= \pi\, ab\left[\frac{1-u^2}{u\,\Delta\Delta'} - \frac{\Delta\Delta'}{u} - \alpha^2\int\frac{\Delta'}{\Delta}\,du - (1-\alpha^2)\int\frac{du}{\Delta\Delta'}\right].$$

Тогда полная площадь S эллипсоида определится из равенства

$$\frac{S}{2\pi\, ab} = -\left[\frac{1-u^2-\Delta^2\Delta'^2}{u\,\Delta\Delta'}\right]_0^1 + \alpha^2\int_0^1\frac{\Delta'}{\Delta}\,du + (1-\alpha^2)\int_0^1\frac{du}{\Delta\Delta'},$$

или, подставляя в первом члене второй части, вместо Δ, Δ', α, β их значения,

$$\frac{S}{2\pi\, ab} = \frac{c^2}{ab} + \alpha^2\int_0^1\frac{\Delta'}{\Delta}\,du + (1-\alpha^2)\int_0^1\frac{du}{\Delta\Delta'}.$$

Эти интегралы приводятся к эллиптическим интегралам Legendre'a (том I, n° 353) подстановкой $\alpha u = \sin\varphi$. Выражение для $S:2\pi ab$ примет вид

$$\frac{c^2}{ab} + \alpha\int_0^{\arcsin\alpha} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + \frac{1-\alpha^2}{\alpha}\int_0^{\arcsin\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

где $k = \beta:\alpha = \left(1-\dfrac{c^2}{b^2}\right):\left(1-\dfrac{c^2}{a^2}\right)$ и, по предположению, < 1.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ.

1. Площадь части конической поверхности $z^2 = 2xy$, содержащейся между плоскостями $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Отв. $S = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{ab}{2}}\,(a + b)$.

2. Площадь части параболоида $z = \frac{x^2 + y^2}{2a}$ содержащейся внутри сферы $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = c^2$ $(c > a)$.

Отв. $S = {}^2/_3\,\pi a^2\left[(4c/a - 3)^{3/2} - 1\right]$

3. Плошадь части параболоида $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Отв. $S = \frac{2\pi ab}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right)$.

4. Площадь части того же параболоида, заключенной внутри кривой равного наклона Z.

Отв. $S = \frac{2\pi ab}{3}\left(\frac{1}{\cos^3 Z} - 1\right)$.

5. Объем тела, общего параболоиду и цилиндру примера 3.

Отв. Разложить на призматические столбики. Интегрирования выполняются легко.

6. Объем тела, ограниченного сферой с центром в начале и радиуса a, плоскостью xy и цилиндром $x^2(x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2) = 0$.

Отв. Разложить на призматические столбики в цилиндрических координатах. В результате $V = \frac{2a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \log 2\right)$

§ 5. Интегралы по поверхности. Объемы в криволинейных координатах.

31. Определение интегралов на поверхности. Пусть $f(x, y, z)$ будет непрерывная функция от x, y, z во всех точках части S некоторой поверхности. Разложим S на бесконечно малые элементы с площадями $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ и обозначим через (ξ_i, η_i, ζ_i) произвольную точку элемента σ_i. Составим сумму, распространенную на все эти элементы,

$$\sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\sigma_i.$$

Эта сумма стремится к определенному пределу, который обозначают символом

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,d\sigma$$

и называют интегралом от $f(x, y, z)\,d\sigma$, распространенным на поверхность S.

Покажем, что это выражение приводится к обыкновенному двойному интегралу.

Предположим сначала, что касательная плоскость нигде не оказывается перпендикулярной к плоскости xy. Уравнение поверхности S может быть представлено в виде:

$$z = \varphi(x, y).$$

Часть S поверхности проектируется в виде некоторой фигуры D на плоскость xy, причем точки D связаны однозначным соответствием с точками S. Проведем к S нормаль в направлении, в котором она составляет острый угол с Oz, и пусть Z будет этот угол. Обозначим через Z_i значение Z в точке (ξ_i, η_i, ζ_i), взятой произвольно в σ_i. Так как $\zeta_i = \varphi(\xi_i, \eta_i)$, то, по самому определению двойного интеграла (n° 10), имеем

$$\iint\limits_D f[x, y, \varphi(x, y)] \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \lim \sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \frac{\alpha_i}{\cos Z_i}.$$

Обратим наше внимание на этот предел сумм.

Мы знаем (n° 21), что σ_i равно $\alpha_i : \cos \zeta_i$, где ζ_i есть значение Z в надлежаще выбранной точке σ_i. Так как отношения $\cos Z_i : \cos \zeta_i$ равномерно стремятся к инице, когда элементы σ_i стремятся к нулю, то этот предел сумм не изменится, если заменить в нем $\cos Z_i$ через $\cos \zeta_i$, что равносильно замене дроби $\alpha_i : \cos Z_i$ через σ_i. Итак, мы получаем, если подставить еще z вместо φ,

$$\left.\begin{aligned} \iint\limits_D f(x, y, z) \frac{dx\,dy}{\cos Z} &= \lim \sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\sigma_i = \\ &= \iint\limits_S f(x, y, z)\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Таким образом, интеграл, распространенный на поверхность, приводится к двойному интегралу, распространенному на область D плоскости xy.

Если касательная плоскость не перпендикулярна к плоскости yz или xz, то интеграл по поверхности приводится подобным же образом к двойному интегралу в той или другой из этих плоскостей.

Так как, во всяком случае, можно разложить S на части так, чтобы в пределах каждой части касательная плоскость была наклонена под острым углом к одной из координатных плоскостей, то всегда можно выразить интеграл по поверхности в виде суммы двойных интегралов.

Если поверхность задана параметрическим представлением и координаты x, y, z являются функциями от u, v в некоторой области Ω, то можно было бы предшествующие интегралы преобразовать в интегралы, взятые по отношению к u, v, как в n° 22; при этом получили бы

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_\Omega f(x, y, z) \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv = \tag{2}$$
$$= \iint_\Omega f(x, y, z) \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv.$$

32. Интеграл, распространенный на определенную сторону поверхности. Пусть S будет частью поверхности, ограниченною определенным контуром, который составляет ее край. Предположим, что эта поверхность имеет две различные стороны. Под этим следует разуметь, что, если рассматривать S как кусок материальной поверхности с бесконечно малой толщиной, но непроницаемой, то движущаяся по поверхности точка может перейти с одной стороны на другую, лишь пройдя через край.

Предположим сначала, что касательная плоскость к S нигде не становится перпендикулярной к плоскости xy, или, по крайней мере, может стать к ней перпендикулярной лишь на границе, и представим уравнение S в виде

$$z = \varphi(x, y).$$

Условимся рассматривать нормаль как луч, исходящий из точки касания, и тогда два возможных направления нормали соответствуют двум сторонам поверхности. При наших предположениях у поверхности будет *верхняя сторона* (соответствующая положительному направлению оси z) *и нижняя сторона* (соответствующая отрицательному направлению оси z); с ними, соответственно, связаны *верхняя нормаль и нижняя нормаль.*

Пусть $R(x, y, z)$ будет непрерывная функция во всех точках S, и D—проекция S на плоскость xy. Рассмотрим интеграл по поверхности

$$\iint_S R \cos Z\, d\sigma,$$

где Z означает угол нормали с Ox; смотря по тому, возьмем ли мы верхнюю или нижнюю нормаль, этот интеграл приведется к тому или другому из двух двойных интегралов

$$\iint_D R\, dx\, dy, \qquad -\iint_D R\, dx\, dy.$$

Мы будем говорить, что интеграл в первом случае распространен на *верхнюю часть* поверхности S, а во втором — на *нижнюю ее часть*. Мы условимся, впрочем, в обоих случаях обозначать его одним символом

$$\iint_S R\, dx\, dy,$$

но указывая всякий раз, на какую сторону поверхности интеграл распространяется. Этого указания будет достаточно для того, чтобы определить тот из двойных интегралов, распространенных на область D в плоскости xy, который выражает интеграл на поверхности S.

Мы можем теперь устранить те ограничения, которые мы наложили на касательную плоскость, и рассмотреть поверхность произвольной формы и притом замкнутую или нет, лишь бы только у нее были две различные стороны. Действительно, всегда можно разложить поверхность на части так, чтобы касательная плоскость могла стать перпендикулярной к плоскости xy, либо на границах этих частей, либо же во всех точках каких-либо из них *). Для последних интеграл по поверхности есть нуль (вместе с $\cos Z$); в других интеграл определяется, как выше; наконец, интеграл, распространенный на какую-либо сторону всей поверхности, есть сумма интегралов, распространенных на соответствующую сторону отдельных ее частей.

Аналогичным образом определяются и интегралы

$$\int\int_S P(x, y, z)\,dy\,dz, \quad \int\int_S Q(x, y, z)\,dx\,dz.$$

Взяв сумму всех трех интегралов, получим *наиболее общее выражение интеграла по поверхности* в следующем виде

$$\int\int_S (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy).$$

Этот интеграл, *распространенный на определенную сторону поверхности* S, приводится, по определению, к

$$\int\int_S (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\,d\sigma,$$

где $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ суть направляющие косинусы нормали, соответствующей рассматриваемой стороне поверхности.

33. Преобразование интегралов на поверхности. Рассмотрим интеграл, распространенный на определенную сторону поверхности S

$$\int\int_S P(x, y, z)\,dx\,dy$$

и предположим, что формулы преобразования

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta)$$

---

*) Однако следует заметить, что при указанном разложении линиями деления S будут те линии, вдоль которых касательная плоскость перпендикулярна к плоскости xy, или же те, которые ограничивают цилиндрические части S, с образующими, перпендикулярными к этой плоскости. Для того чтобы можно было без затруднений применить изложенные выше теории, необходимо еще допустить, что эти линии составлены из частей, вдоль которых координаты x и y изменяются каждая в одном направлении. Теоремы, очевидно, имеют место и при более общих предположениях, но мы не делаем этого обобщения, которое сейчас представляет для нас мало интереса. Мы раз навсегда допустим, что предшествующее условие выполнено, и в следующих теоремах не будем более к этому возвращаться.

устанавливают однозначное соответствие между точками поверхности S в пространстве xyz и точками другой поверхности Σ в пространстве $\xi\eta\zeta$. *Задача преобразования состоит в замене интеграла, распространенного на S, другим интегралом, распространенным на Σ.*

Для решения ее, рассмотрим координаты x, y, z и ξ, η, ζ соответствующих точек поверхностей S и Σ, как функции двух независимых переменных параметров u, v, которые описывают некоторую область Ω в плоскости uv.

Для поверхности S направляющие косинусы нормали удовлетворяют равенствам (4) n° 22, именно:

$$\frac{\cos X}{A}=\frac{\cos Y}{B}=\frac{\cos Z}{C}=\pm\frac{du\,dv}{d\sigma};\quad A=\frac{d(y,z)}{d(u,v)},\ldots$$

Означая указателем 1 соответствующие величины для Σ, будем иметь

$$\frac{\cos X_1}{A_1}=\frac{\cos Y_1}{B_1}=\frac{\cos Z_1}{C_1}=\pm\frac{du\,dv}{d\sigma_1};\quad A_1=\frac{d(\eta,\zeta)}{d(u,v)},\ldots$$

Но формула (1) n° 15 может быть представлена в виде

$$C=\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}A_1+\frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)}B_1+\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}C_1;$$

умножая это равенство на $du\,dv$, в виду предшествующих соотношений получим

$$\cos Z\,d\sigma=\pm\left[\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}\cos X_1+\frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)}\cos Y_1+\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}\cos Z_1\right]d\sigma_1.$$

Впрочем, можно ограничиться и одним знаком $+$, если условиться нормаль к Σ направлять в соответствующую сторону. Умножим еще обе части предшествующего равенства на P и проинтегрируем по отношению к u, v в области Ω. Результат может быть написан в следующем виде

$$\iint\limits_S P\,dx\,dy=\iint\limits_\Sigma P\left[\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}d\eta\,d\zeta+\frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)}d\zeta\,d\xi+\right.$$
$$\left.+\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}d\xi\,d\eta\right] \tag{2}$$

Это и есть формула преобразования, интегрирование должно быть распространено на сторону поверхности Σ, соответствующую выбранному выше направлению нормали.

С помощью круговой перестановки букв P, Q, R, и x, y, z, можно было бы получить две другие аналогичные формулы, которые бесполезно выписывать.

Остается лишь дать правило для определения *стороны* поверхности Σ, на которую распространяется интеграл.

Определим сначала, что мы разумеем под *соответствующими сторонами* на поверхностях S и Σ. Вообразим точку, бесконечно близкую к S с одной стороны от этой поверхности; соответствующая ей точка будет бесконечно близка к Σ с определенной стороны от этой второй поверхности. Это и будут две стороны, которые естественно считать соответствующими.

Затем можно высказать следующее правило, доказательство которого мы дадим в n° 36:

Два интеграла формулы (3) распространены на соответствующие стороны обеих поверхностей, если якобиан J переменных x, y, z относительно ξ, η, ζ будет положительным, и на обратные стороны, если он будет отрицательным.

34. Формула Green'а для пространства. Пусть S будет замкнутая поверхность, а V — тело (и объем тела), ею ограниченное. Эта поверхность имеет внутреннюю и внешнюю стороны и, следовательно, внутреннюю и внешнюю нормали. Пусть $R(x, y, z)$ будет функция, непрерывная вместе со своею производной $\frac{\partial R}{\partial z}$ во всей области V и на поверхности S. Мы установим сначала следующую формулу (которая является частным случаем формулы Green'а)

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_S R\, dx\, dy. \tag{4}$$

Она приводит вычисление тройного интеграла, распространенного на тело V, к вычислению интеграла, распространенного *на внешнюю сторону* поверхности, ограничивающей это тело.

Предположим сначала, что поверхность S встречается параллелью оси z лишь в двух точках; тогда поверхность S разлагается на две части S_1 и S_2, из которых первая ограничивает тело снизу, а вторая — сверху; ординаты их мы обозначим, соответственно, через z_1 и z_2 ($z_1 < z_2$). Эти ординаты будут непрерывными функциями от x, y внутри области D, ограниченной видимым контуром S на плоскости xy.

Если выполнить первое интегрирование по отношению к z, то получим

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_D R(x, y, z_2)\, dx\, dy - \iint_D R(x, y, z_1)\, dx\, dy.$$

Рассмотрим эти два двойных интеграла с их знаками; они приводятся к интегралам, взятым соответственно, по поверхности S_2 и S_1, но первый из них распространен на верхнюю сторону, а второй — на нижнюю. В обоих случаях приходится говорить о внешней стороне поверхности S, так что сумма обоих интегралов дает как раз интеграл, распространенный на внешнюю сторону поверхности S; таким образом, мы приходим к формуле (4).

Формула (4) продолжает существовать и в том случае, если тело V с боков ограничено цилиндрической поверхностью (с образующими, параллельными оси Oz), которая отделяет две поверхности S_1, S_2, аналогичные предшествующим. Действительно, частям цилиндрической поверхности соответствует интеграл, равный нулю, и его нечего принимать во внимание.

Наконец, формула (4) сохраняет силу, какова бы ни была ограничивающая тело V поверхность, ибо всегда можно разложить тело V на части, ограниченные поверхностями, удовлетворяющими поставленным выше условиям. К каждой части можно применить формулу (4), и, складывая результаты, мы пришли бы к той же формуле при общих предположениях. В самом деле, лишние интегралы, соответствующие поверхностям, отделяющим части тела друг от друга, будут распространены как на ту, так и на другую стороны этих поверхностей (ибо каждая сторона будет внешней по отношению к одной из соприкасающихся частей); следовательно, все эти интегралы взаимно уничтожаются.

Подобно формуле (4), можно установить две аналогичные формулы

$$\int\int\int_V \frac{\partial P}{\partial x} dx\,dy\,dz = \int\int_S P\,dy\,dz, \int\int\int_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx\,dy\,dz = \int\int_S Q\,dz\,dx,$$

складывая же все три, получим формулу Green'a

$$\left.\begin{aligned} &\int\int\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \\ &= \int\int_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

причем интегралы по поверхности распространены на ее внешнюю сторону.

35. Выражение объемов интегралами по поверхности. Если положить $P = x$, $Q = R = 0$ в предшествующей формуле, то получится первая из следующих формул, другие две получатся вполне аналогично:

$$V = \int\int_S x\,dy\,dz = \int\int_S y\,dz\,dx = \int\int_S z\,dx\,dy; \quad (6)$$

они выражают объем тела интегралом, распространенным на внешнюю сторону ограничивающей тело поверхности. Складывая их, получим

$$V = \frac{1}{3}\int\int_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

Отсюда, вводя направляющие косинусы внешней нормали,

$$V = \frac{1}{3}\int\int_S (x\cos X + y\cos Y + z\cos Z)\,d\sigma.$$

Этот результат легко преобразовать. Если обозначить через (r, n) угол внешней нормали с радиусом-вектором r, исходящим из начала, то будем иметь

$$x \cos X + y \cos Y + z \cos Z = r \cos (r, n).$$

Таким образом,

$$V = \frac{1}{3} \iint_S r \cos (r, n)\, d\sigma. \tag{7}$$

36. Объемы в криволинейных координатах. Определение элемента объема. Возьмем вновь формулы преобразований n° 33

$$x = \varphi_1 (\xi, \eta, \zeta), \quad y = \varphi_2 (\xi, \eta, \zeta), \quad z = \varphi_3 (\xi, \eta, \zeta)$$

и предположим, что они устанавливают однозначное соответствие между точками тела V, ограниченного поверхностью S, в пространстве xyz, и тела Ω, ограниченного поверхностью Σ, в пространстве $\xi\eta\zeta$. Применяя к одному из интегралов (6) предшествующего n° формулу преобразования (3) n° 33, получим

$$V = \iint_S z\, dx\, dy =$$

$$= \iint_\Sigma z \left[\frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)} d\eta\, d\zeta + \frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)} d\zeta\, d\xi + \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} d\xi\, d\eta \right].$$

Мы знаем, что первый интеграл распространен на внешнюю сторону поверхности S, но мы еще не знаем, на какую сторону поверхности Σ должно распространить второй интеграл. Сейчас мы это установим, опираясь на то, что V должно быть положительным.

Преобразуем по формуле Green'a интеграл, распространенный на Σ, в тройной интеграл, распространенный на Ω. При этом полагаем

$$P = z \frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)}, \quad Q = z \frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)}, \quad R = z \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)},$$

так что, обозначая через J определитель преобразования, имеем

$$\frac{dP}{d\xi} + \frac{dQ}{d\eta} + \frac{dR}{d\zeta} = \frac{dz}{d\xi} \frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)} + \ldots = \frac{d(x, y, z)}{d(\xi, \eta, \zeta)} = J,$$

ибо непосредственно проверяется, что вторые производные взаимно уничтожаются. Итак, преобразование Green'a дает, если знак + или — выбрать в зависимости от того, распространяется ли интеграл на внешнюю или внутреннюю сторону поверхности Σ,

$$V = \pm \iiint_\Omega J\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \iiint_\Omega |J|\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{8}$$

Это и есть общая формула для вычисления объемов *).

---

*) Это доказательство предполагает существование вторых производных от x, y, z. Снять это ограничение можно так же, как и в случае двух перемен-

Если $J > 0$, следует взять в предшествующей формуле знак $+$, и интеграл по поверхности Σ распространяется на внешнюю ее сторону; подобно этому, если $J < 0$, этот интеграл распространяется на внутреннюю сторону Σ. Внешние стороны обеих поверхностей S и Σ рассматриваются как соответствующие по определению. Итак, интегралы, взятые по поверхности S и Σ, распространяются на соответствующие стороны этих поверхностей или же нет, смотря по тому, будет ли $J > 0$ или < 0.

Таким образом, правило, приведенное в конце n° 33, оправдано для замкнутых поверхностей. Но оно имеет место и для каких угодно поверхностей, ибо их всегда можно рассматривать как части замкнутых.

Выражение $|J|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$ под знаком интеграла в формуле (8) называется *элементом объема* в системе координат ξ, η, ζ. Его можно преобразовать.

Квадрат элемента дуги $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ есть однородная форма второй степени относительно $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, которую можно написать в виде

$$ds^2 = H_1\,d\xi^2 + H_2\,d\eta^2 + H_3\,d\zeta^2 + 2F_1\,d\eta\,d\zeta + 2F_2\,d\zeta\,d\xi + 2F_3\,d\xi\,d\eta,$$

полагая, для краткости,

$$H_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2, \quad H_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \ldots, H_3 = \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \ldots,$$

$$F_1 = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad F_2 = \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \ldots, F_3 = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \ldots$$

Дискриминант M этой формы будет

$$M = \begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2 \\ F_3 & H_2 & F_1 \\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix}$$

Но достаточно возвысить J в квадрат по обычному правилу возвышения в квадрат определителей, чтобы получить $J^2 = M$.

Поэтому элемент объема равен также $\sqrt{M}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$.

Говорят, что система координат ξ, η, ζ *ортогональна*, если $F_1 = F_2 = F_3 = 0$. В этом случае имеем

$$ds^2 = H_1 d\xi^2 + H_2 d\eta^2 + H_3 d\zeta^2$$

и элемент объема принимает вид $\sqrt{H_1 H_2 H_3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$.

Система *полярных координат в пространстве* ортогональна, ибо из соотношений

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta,$$

ных (n° 17). С другой стороны, поверхности S и Σ также подчинены ограничениям. Для того чтобы распространить формулу (8) на случай, когда тело V ограничено произвольной поверхностью, достаточно применить ее к телу V', удовлетворяющему этим условиям, и предположить V' стремящимся к V. Формула сохранится и в пределе, лишь бы V было определенным.

прямо выводим

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2.$$

Таким образом, *элемент объема в полярных координатах* равен $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$. Этот результат легко получается и прямо при помощи геометрических соображений (п° 24).

37. Преобразование тройных интегралов. Пусть требуется преобразовать тройной интеграл

$$\int\int_V\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

в другой, распространенный на тело Ω в пространстве $\xi\eta\zeta$. Предположим, что формулы преобразования

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta)$$

устанавливают однозначное соответствие между точками обеих областей V к Ω. Тогда

$$\int\int_V\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_\Omega\int f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\left|\frac{d(x, y, z)}{d(\xi, \eta, \zeta)}\right| d\xi\,d\eta\,d\zeta. \quad (9)$$

Доказательство получается путем непосредственного обобщения тех рассуждений, которые были приведены в п° 18 для случая двух переменных.

38. Криволинейные интегралы в пространстве. Формула Stokes'a. Понятие о криволинейных интегралах распространяется само собой и на кривые в пространстве. Представим дугу L кривой, вдоль которой x либо все время возрастает, либо убывает от a до b. Две другие координаты y, z будут непрерывными функциями от x между a и b, так что каждая непрерывная функция $P(x, y, z)$ от трех переменных вдоль кривой L будет непрерывной же сложной функцией от x. Мы положим, по определению,

$$\int_L P\,dx = \int_a^b P\,dx,$$

причем направление, в котором пробегается кривая L, и порядок пределов a, b должны соответствовать.

Это первое определение криволинейного интеграла распространяется непосредственно на каждую линию L, составленную из последовательных частей, вдоль которых x изменяется постоянно в одном направлении или остается неизменным (причем в последнем случае соответствующий интеграл, по определению же, равен нулю). Наконец, взяв сумму трех выражений, определенных аналогичным образом, получим

$$\int_L (P dx + Q dy + R dz),$$

что представляет собою общее выражение криволинейного интеграла, распространенного на линию L.

Перейдем теперь к формуле Stokes'a, которая имеет целью сведение интеграла по поверхности к криволинейному интегралу, взятому по контуру, ограничивающему эту поверхность.

Пусть S будет часть поверхности, ограниченная линией L, и $P(x, y, z)$ — непрерывная функция от x, y, z на этой поверхности. Мы начнем с уста новления следующей формулы:

$$\int\int_S \left[\frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy - \frac{\partial P}{\partial z} dx\, dz\right] = \int_L P\, dx, \tag{10}$$

которая является частным случаем формулы Stokes'а.

Предположим сначала, что касательная плоскость во всех точках поверхности S наклонена под острым углом к плоскости xy, исключая, разве лишь, край ее. Поверхность S будет иметь *верхнюю и нижнюю* стороны; она проектируется на плоскость xy в виде некоторой фигуры D, ограниченной также простым контуром C, который является проекцией L; наконец, уравнение поверхности может быть представлено в виде

где φ есть непрерывная функция, имеющая частные производные p и q.

Для определенности, допустим, что интеграл по поверхности S, в формуле (10), распространен на верхнюю часть S. Пусть $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ будут направляющие косинусы *верхней нормали* ($\cos Z > 0$); будем иметь (n⁰ 32)

$$\int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy - \frac{\partial P}{\partial z} dx\, dz\right) = \int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos Z - \frac{\partial P}{\partial z} \cos Y\right) d\sigma.$$

Но косинусы пропорциональны $-p$, $-q$, 1, так что отношение $\cos Y : \cos Z = -q$. Если обозначить еще через $P_1(x, y)$ то, что получится из $P(x, y, z)$, когда вместо z подставим $\varphi(x, y)$, то из сказанного вытекает, что предшествующий интеграл последовательно преобразуется следующим образом

$$\int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\, \frac{\partial P}{\partial z}\right) \cos Z d\sigma =$$

$$= \int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\, \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx\, dy = \int\int_D \frac{\partial P_1}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Итак, интеграл по поверхности приведен к двойному интегралу, распространенному на область D в плоскости xy. По формуле Green'а (n⁰ 12), последний может быть преобразован в криволинейный интеграл, взятый по контуру C области D в прямом направлении (в направлении вращения от оси Ox к оси Oy). Мы получим

$$\int\int_D \frac{\partial P_1}{\partial y} dx\, dy = \int_C P_1 dx = \int_L P\, dx,$$

ибо оба криволинейные интеграла вдоль C и вдоль L имеют один и тот же смысл, лишь бы только направление на L также соответствовало вращению от оси Ox к оси Oy. Если бы интеграл по поверхности был распространен на нижнюю часть поверхности, то для сохранения формулы нужно было бы лишь изменить направление контура в криволинейном интеграле.

Но можно охватить оба случая одним правилом.

Вообразим, что наблюдатель, помещенный на плоскости xy со стороны положительных z, описывает вокруг оси Oz круг в направлении от оси Ox к оси Oy; внутренняя часть круга может быть либо справа, либо слева от него. Мы будем, вообще, говорить, что наблюдатель, перемещающийся на поверхности с определенной ее стороны и движущийся вдоль замкнутого контура, лежащего с той же стороны, описывает его *в прямом направлении*, если внутренняя часть остается от него с той же стороны (справа или слева), что и для рассмотренного только что круга. Согласно этому определению, прямое направление меняется для одного и того же контура, смотря по стороне поверхности, на которой он нанесен. Оба случая в формуле (10) могут быть объединены следующим правилом: *в формуле (10) криволинейный интеграл берется в прямом смысле, соответственно рассматриваемой стороне поверхности.*

Для того, чтобы устранить ограничения, наложенные на касательную плоскость, и распространить формулу (10) на поверхность S произвольной формы, но имеющую две различные стороны, достаточно разложить поверхность на части и рассуждать так, как и в случае формулы Green'а, лишь вместо поверхностей раздела в этом случае приходится рассматривать линии раздела, проведенные по поверхности. Мы не станем воспроизводить это доказательство.

Перейдем теперь к общей формуле Stokes'а.

Пусть P, Q, R будут три функции от x, y, z, непрерывные вместе с их производными. С помощью круговой перестановки букв P, Q, R и x, y, z получаются еще две формулы, аналогичные формуле (10). Складывая все три формулы, получим

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_S\int \left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)dy\,az+&\\ +\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)dz\,dx=&\\ =\int\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz.&\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Это и есть общая *формула Stokes'а*. В ней криволинейный интеграл должен быть взят в прямом направлении, соответственно рассматриваемой стороне поверхности. Если оси даны в обычном их расположении, то вращения от Ox до Oy, от Oy до Oz и от Oz до Ox происходят по часовой стрелке для наблюдателя, стоящего на плоскости вращения со стороны, указываемой третьей осью. В этом случае прямое направление есть то, при котором внутренняя часть поверхности остается справа. Это как раз обратно тому, что имеет место на плоскости, что объясняется тем, что оси Ox, Oy выбираются в пространстве и на плоскости, обыкновенно, не с одинаковым направлением вращения.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ.

1. *Интеграл Gauss'a.* Пусть S будет замкнутая поверхность, M — постоянная точка, r — радиус-вектор, исходящий из M, наконец, (r, n) — угол r с внешней нормалью к поверхности. Смотря по тому, будет ли M внутри, вне или на поверхности, имеем

$$\iint_S \frac{\cos(r, n)\, d\sigma}{r^2} = 4\pi, \quad 0, \quad 2\pi.$$

Отв. Следует заметить, что элемент этого интеграла представляет телесный угол, под которым элемент $d\sigma$ виден из M.

2. *Эллиптические координаты.* Рассмотрим софокусные поверхности второго порядка

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} - 1 = 0 \qquad (a > b > c)$$

Для каждой системы x, y, z это уравнение имеет три корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $[c < \lambda_1 < b < \lambda_2 < a < \lambda_3]$, которые называют эллиптическими координатами точки (x, y, z). Через каждую точку, таким образом, проходят три поверхности: эллипсоид, двуполый гиперболоид и однополый гиперболоид Имеем

$$x^2 = \frac{(\lambda_3 - a)(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)}{(a - b)(a - c)}, \quad \frac{2dx}{x} = \frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - a} + \frac{d\lambda_2}{\lambda_2 - a} + \frac{d\lambda_3}{\lambda_3 - a},$$

и другие равенства, получающиеся при круговой перестановке букв xyz и abc. Показать, что система ортогональна и вычислить элемент объема $\sqrt{H_1 H_2 H_3}\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3$.

Отв. Находим

$$4H_1 = \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)(\lambda_1 - c)},$$

H_2 и H_3 получаются при круговой перестановке.

ГЛАВА II.

НЕСОБСТВЕННЫЕ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ.

39. Определение несобственного интеграла. Предположим, как в главе I, что точки разрыва подлежащей интегрированию функции расположены на некоторых линиях разрывов, удовлетворяющих условиям n° 4; но мы допустим, что функция или же область интегрирования более уже не ограничена. Те из точек разрыва, в окрестности которых функция не ограничена, мы будем называть *особенными точками.*

Неотрицательные функции. Прежде всего, если область интегрирования D конечна и ограничена контуром C, удовлетворяющим условиям n° 1, для того чтобы определить интеграл от *неотрицательной функции* $f(x, y)$

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy,$$

поступают почти так же, как и в случае простых интегралов. Начинают с выключения особенных точек из области интегрирования. С этой целью изолированные особенные точки окружают бесконечно малыми контурами, линии же разрыва заключают между двумя бесконечно близкими контурами, и рассматривают часть D' области D, лежащую вне вспомогательных контуров. Интеграл, распространенный на D', есть собственный интеграл; по определению полагают затем

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \lim \iint_{D'} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Если этот предел конечен, то несобственный интеграл существует. Так как f положительна, для существования интеграла, очевидно, достаточно, чтобы интеграл во второй части оставался ограниченным, когда D' стремится к D; тогда предел его не зависит от способа стремления D' к D. Если интеграл не существует, он равен положительной бесконечности.

Далее, если область интегрирования простирается в бесконечность во всех направлениях или же в некоторых, то поступают аналогично. Сначала рассматривают интеграл (собственный или нет) в ограниченной части D' области D, затем последовательно расширяют D' до D: интеграл в D есть предел, конечный или нет, интеграла в D'. Этот предел, впрочем, не зависит от способа стремления D' к D; если D простирается в бесконечность в нескольких направлениях, то D' может возрастать до бесконечности либо сразу во всех направлениях, либо же в различных направлениях последовательно.

Случай неположительных функций приводится к рассмотренному случаю простой переменой знака; на этом нет надобности останавливаться.

Функции переменного знака. *Мы будем считать существующим несобственный двойной интеграл от функции переменного знака лишь в том случае, если он будет абсолютно сходящимся*, т. е. если существует интеграл

$$\int\int_D |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

Если это условие выполнено, то интеграл от $f(x, y)$ в D определяется с помощью тех же предельных переходов, что и в случае положительных функций, причем легко убедиться, что этот предел является конечным и единственным, каким бы образом D' ни стремилось к D. В самом деле, в этом случае f представляет собою разность двух положительных функций $f_1 = |f|$ и $f_2 = |f| - f$, интегралы которых существуют.

Замечание. Если f положительна, ее несобственный интеграл в области D может также быть определен с помощью вспомогательной функции

$$f_n = \begin{cases} n, & \text{если } f \geqslant n; \\ f, & \text{если } f \leqslant n. \end{cases}$$

Действительно, если область D ограничена, то

$$\int\int_D f \, dx \, dy = \lim_{n=\infty} \int\int_D f_n \, dx \, dy;$$

если же D не ограничена, то, рассматривая последовательность ограниченных областей D_n, стремящихся к D, когда n бесконечно возрастает, будем иметь

$$\int\int_D f \, dx \, dy = \lim_{n=\infty} \int\int_{D_n} f_n \, dx \, dy.$$

Доказательства проводятся как и в случае простых интегралов.

Прежде чем перейти к вопросу о приведении несобственного двойного интеграла к повторному, докажем вспомогательное предложение.

40. Теорема *). *Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ будет неубывающая по-*

*) Это — очень частный случай общей теоремы. Ограничения, относящиеся к непрерывности F_n и F, исчезают при введении интеграла Lebesgue'а (том I, n° 26, теорема III).

следовательность положительных функций от x; если каждая функция ограничена и непрерывна (за исключением разве лишь изолированных значений x, не зависящих от n), то, обозначая через $F(x)$ конечный или бесконечный предел, к которому F_n стремится с возрастанием n до бесконечности, имеем

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b F_n(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx,$$

будет ли промежуток (a, b) конечным или нет, лишь бы только у функции F были лишь изолированные точки разрыва, и следовательно она имела элементарный интеграл, который может быть конечным или бесконечным.

Доказательство очевидно, если функции F_n и F непрерывны и промежуток (a, b) конечен. Теорема равносильна утверждению о возможности почленно интегрировать ряд положительных непрерывных функций

$$F = F_1 + (F_2 - F_1) + \ldots + (F_n - F_{n-1}) + \ldots,$$

что, действительно, допустимо, в виду непрерывности суммы (том I, n⁰ 392).

Если промежуток (a, b) конечен, но функции F_n и F перестают быть непрерывными или F обращается в бесконечность в конечном числе точек $x_1, x_2, \ldots$, то можно ограничиться случаем, когда a и b будут единственными особенными значениями. Тогда, при любом $\varepsilon > 0$, на основании только что доказанного,

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b F_n\,dx \geqslant \lim_{n=\infty} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} F_n\,dx = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} F\,dx.$$

Предполагая, что ε стремится к нулю, мы получим в пределе (причем последний интеграл при этом может стремиться и к бесконечности)

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b F_n\,dx \geqslant \int_a^b F\,dx.$$

Но неравенство здесь невозможно, ибо первый интеграл при любом n не превосходит второго.

Наконец, если пределы a и b бесконечны, например, оба, то каково бы ни было положительное N, на основании того, что выше было доказано,

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_n\,dx \geqslant \lim_{n=\infty} \int_{-N}^{N} F_n\,dx = \int_{-N}^{N} F\,dx;$$

достаточно предположить N стремящимся к бесконечности, чтобы доказать предложение как и в предшествующем случае.

41. Приведение несобственных двойных интегралов от положительных функций *). *Если $f(x, y)$ не меняет знака в области D, ограниченной или нет, ее двойной интеграл в D приводится к двум последовательным простым интегралам по обычному правилу, лишь бы только интегрирование по одной из переменных приводило к такой функции от второй переменной, которая была бы интегрируема в элементарном смысле, т. е. имела бы разве лишь изолированные точки разрыва.* Это правило применимо как к конечному двойному интегралу, так и к бесконечному.

Первый случай. Двойной интеграл распространяется на всю плоскость. Определим f_n, как в n⁰ 39, и положим

$$F_n(x) = \int_{-n}^{n} f_n dy.$$

Пусть D' будет часть D между прямыми $x = -N$ и $x = N$, D_n' — часть D' между ординатами $y = -n$ и $y = n$. Воспользовавшись замечанием в конце n⁰ 39, мы получим, по замене собственного двойного интеграла повторным,

$$\iint_{D'} f\,dx\,dy = \lim_{n=\infty} \iint_{D_n'} f_n\,dx\,dy = \lim_{n=\infty} \int_{-N}^{N} F_n(x)\,dx.$$

Функция $F_n(x)$ непрерывна, за исключением разве лишь тех значений x, которым соответствуют прямые разрывов, параллельные оси Oy; но их может быть лишь конечное число между $-N$ и N. Поэтому можно применить теорему предшествующего n⁰, в результате чего, заменяя F_n ее пределом, получим

$$\iint_{D'} f\,dx\,dy = \int_{-N}^{+N} dx \int_{-\infty}^{\infty} f\,dy.$$

Если заставить N стремиться к бесконечности, то D' будет стремиться к D и, в пределе, мы получим подлежавшую доказательству формулу:

$$\iint_{D} f\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f\,dy.$$

Общий случай. Другие случаи приводятся к предшествующему с помощью вспомогательной функции f_1, равной f в D, к нулю вне D. Интеграл от f в D приводится к интегралу от f_1 во всей плоскости, а последний приводится к повторному, согласно пред-

*) Такое приведение всегда выполнимо с помощью интеграла Lebesgue'а (n⁰ 94); следовательно, оно выполнимо и с помощью других интегралов (которые служат для интеграла Lebesgue'а лишь частными случаями) при условии, что им доставляется определенный результат. Частные правила, в роде приводимого в тексте, могут быть оправданы лишь чрезвычайной своей элементарностью. Это и есть цель, которую мы в данном случае себе поставили.

ществующей формуле. Если отбросить промежутки, в которых f_1 равна нулю, то эта формула даст нам формулу, относящуюся уже к функции f.

Замечание. Если f меняет знак в области D, то простейший способ убедиться в законности приведения к повторному интегралу, состоит в разложении области D на части, в которых f уже сохраняет знак, и в выполнении приведения в каждой части отдельно.

42. Изменение порядка интегрирований. *Если f не меняет знака, то каковы бы ни были постоянные пределы интегралов, имеем*

$$\int_a^A dx \int_b^B f\,dy = \int_b^B dy \int_a^A f\,dx,$$

если только внутренние интегралы представляют собою непрерывные функции, соответственно, от x или y, исключая разве лишь изолированные точки.

В самом деле, обе части равенства служат выражениями для одного и того же двойного интеграла, ибо в формулах предшествующего n⁰ можно переместить переменные x и y.

43. Преобразование несобственных двойных интегралов. Пусть Ω будет область, ограниченная или нет, в плоскости uv, $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ — две непрерывные функции, якобиан которых J также непрерывен и отличен от нуля внутри Ω. Относительно границы ее мы ничего не предполагаем. Предположим, что формулы

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

устанавливают однозначное соответствие между точками, лежащими внутри Ω, и точками, лежащими внутри некоторой области D, ограниченной или нет, в плоскости xy. Тогда

$$\int\int_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\int_\Omega |J| f(\varphi, \psi)\,du\,dv.$$

Действительно, обозначим через Ω' ограниченную область, содержащуюся внутри Ω, в пределах которой функция f непрерывна; если Ω' стремится к Ω, то соответствующая ей также ограниченная область D' будет стремиться к D. Предшествующее равенство очевидно имеет место, если D и Ω снабдить штрихами (n⁰ 19); оно сохранится и в пределе, так что штрихи снова можно уничтожить. Смысл предшествующего равенства тот же, что и в случае преобразования простых интегралов (том I, n⁰ 244). Оба интеграла либо равны, либо оба неопределенны, но с теми же границами колебания.

§ 2. Интегрирование и дифференцирование определенных интегралов по параметру. Равномерная сходимость несобственных интегралов.

44. Интегрирование по параметру. Пусть $f(x, \alpha)$ будет непрерывная функция от двух переменных x и α в прямоугольной области R, ограниченной значениями a и b переменной x и значениями α_0 и α_1 параметра α; интеграл

$$\varphi(\alpha)=\int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

как мы доказали в n⁰ 3 (где лишь y заменяет собою α), есть непрерывная функция от α в промежутке (α_0, α_1). Можно поставить вопрос об интегрировании или дифференцировании этой функции.

Если взять интеграл от $\varphi(\alpha)$, то мы столкнемся с повторным интегралом

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \varphi(\alpha)\, d\alpha=\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx.$$

Для вычисления его можно воспользоваться любым из методов преобразования, изученных в главе I, но наиболее употребительным является *правило интегрирования под знаком интеграла*, которое состоит в обращении двух интегрирований по отношению к x и α. Однако, не следует забывать, что это правило установлено лишь для собственных интегралов. Мы ниже увидим, что на несобственные интегралы оно может быть распространено лишь при частных предположениях.

45. Дифференцирование по параметру. Правило Leibnitz'а. Рассмотрим, как и в предыдущем n⁰, собственный интеграл

$$\varphi(\alpha)=\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

и предположим, что функция $f(x, \alpha)$ имеет частную производную $f_\alpha'(x, \alpha)$, определенную и непрерывную в прямоугольнике, ограниченном значениями a и b переменной x и значениями α_0 и α_1 параметра α. Тогда производная $\varphi(\alpha)$ в промежутке (α_0, α_1) получится путем простого дифференцирования по α подинтегральной функции. В этом состоит *правило дифференцирования под знаком интеграла, или правило Leibnitz'а.* Оно является следствием предшествующего.

Пусть α будет какое-либо значение из промежутка (α_0, α_1); в силу правила интегрирования под знаком интеграла, имеем

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f_\alpha'(x, \alpha)\, dx=\int_a^b [f(x, \alpha)-f(x, \alpha_0)]\, dx=\varphi(\alpha)-\varphi(\alpha_0).$$

Производная первого члена по α есть подинтегральная (для внешнего интеграла) функция. Поэтому, приравнивая производные от двух крайних членов, получим

$$\int_a^b f_\alpha'(x, \alpha)\, dx=\varphi'(\alpha).$$

Это есть правило **Leibnitz'а**.

Это правило предполагает, что пределы a, b не зависят от α. Рассмотрим теперь интеграл

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \alpha)\, dx, \quad (x_2 > x_1)$$

пределы которого x_1, x_2 являются функциями от α. Предположим, что: 1) x_1 и x_2 суть непрерывные функции от α, имеющие в промежутке (α_0, α_1) непрерывные же производные, 2) частная производная $f'_\alpha(x, \alpha)$ определена и непрерывна в области D плоскости $x\alpha$, ограниченной прямыми $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$ и кривыми $x = x_1$, $x = x_2$.

Я утверждаю, что при этих условиях в промежутке (α_0, α_1) имеет место соотношение

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx + f(x_2, \alpha)\frac{dx_2}{d\alpha} - f(x_1, \alpha)\frac{dx_1}{d\alpha},$$

так что к члену, фигурирующему в правиле Leibnitz'а, нужно присоединить еще два дополнительных члена.

Это новое правило приводится к правилу Leibnitz'а с помощью замены переменной. Введем, действительно, вместо x новую переменную t, связав с нею x соотношением

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t,$$

так что x представляется теперь функцией от t и α и совпадает с x_1 при $t = 0$ и с x_2 при $t = 1$. Интеграл преобразуется к виду

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 f(x, \alpha)\frac{\partial x}{\partial t}\, dt.$$

Подинтегральная функция и ее частная производная по α являются непрерывными функциями от t и α в прямоугольнике плоскости $t\alpha$, содержащемся между прямыми $t = 0$, $t = 1$ и $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$. К этому интегралу с постоянными пределами 0, 1 правило Leibnitz'а применимо и даст в результате

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial t} + f\frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial \alpha}\right) dt.$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial t}\, dt + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(f\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx + \left[f\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right]_{t=0}^{t=1}$$

Это и есть, хотя и в другой форме, подлежавшее доказательству соотношение.

46. Равномерная сходимость несобственных интегралов. Предшествующие правила и самая непрерывность функции $\varphi(\alpha)$ осноываются на предположениях, что: 1) $f(x, \alpha)$ (и ее частная производная по α — если речь идет о правиле Leibnitz'а) непрерывна, 2) промежуток же интегрирования ограничен. Эти правила могут оказаться неприложимыми для несобственных интегралов и для того, чтобы иметь возможность указать те случаи, когда они сохраняют свою силу, удобно ввести одно новое понятие — *о равномерной сходимости* несобственных интегралов. Мы ограничимся здесь лишь простейшими сведениями по этому вопросу. Существуют два главных случая:

1. Исследуем сначала случай, когда подинтегральная функция непрерывна, но один из пределов интеграла бесконечен. Пусть же

$$\varphi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx.$$

Мы будем говорить, что этот интеграл сходится равномерно для некоторой определенной области изменения α, например, для промежутка (α_0, α_1), если каждому положительному ε соответствует такое число X, ***не зависящее от*** *α, что, при условии $X' > X$,* ***для всех рассматриваемых значений*** *α имеет место неравенство*

$$\left| \int_{X'}^\infty f(x, \alpha)\,dx \right| < \varepsilon.$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда функция $f(x, \alpha)$ может бесконечно возрастать при приближении к некоторым точкам (x, α), но непрерывна в каждой точке, в окрестности которой она остается ограниченной. Этот случай сложнее предшествующего, потому что распределение точек разрыва в плоскости $x\alpha$ может быть более или менее сложным. Эти точки могут быть изолированными или располагаться непрерывным образом на некоторых линиях. Мы ограничимся здесь самым простым (но и наичаще встречающимся) случаем, когда $f(x, \alpha)$ обращается в бесконечность лишь для конечного числа значений x, не зависящих от α.

Это условие может осуществляться двумя различными способами, а именно, либо $f(x, \alpha)$ обращается в бесконечность лишь для изолированных точек плоскости $x\alpha$, либо же вдоль некоторых прямых, параллельных оси α. Следующие два интеграла дают примеры этих двух случаев:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}, \quad \int_0^1 x^{-\alpha}(1 - x)\,dx.$$

В первом подинтегральная функция обращается в бесконечность лишь в изолированной точке (в начале); во втором же — она имеет разрывы вдоль всей положительной части оси α. В определениях и теоремах, которые приводятся ниже, в различении этих случаев нет нужды.

При сделанных предположениях равномерность сходимости интегралов от разрывных функций вполне аналогична равномерной сходимости интегралов с бесконечными пределами, и теоремы, относящиеся к этим двум различным случаям, формулируются в одних и тех же выражениях.

Рассмотрим сначала интеграл

$$\varphi(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

и предположим, что $f(x,\alpha)$ может обратиться в бесконечность лишь при $x=b$. Мы будем говорить, что *интеграл сходится равномерно в некоторой области изменения α, если каждому положительному числу ε соответствует такое положительное число δ,* ***не зависящее от*** *α, что при условии $0<\delta'<\delta$,* ***для всех рассматриваемых значений*** *α, имеет место неравенство*

$$\left|\int_{b-\delta'}^{b} f(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Непосредственно ясно, как должно видоизменить предшествующее определение, если f может обращаться в бесконечность лишь при $x=a$. Если же существует несколько таких особенных значений $x=x_1, x_2, \ldots$, то разлагают промежуток интегрирования (а вместе с ним и предложенный интеграл) на ряд других, в каждом из которых f может обращаться в бесконечность лишь на одном из концов. Наконец, если f имеет конечное число точек (линий) разрыва и, сверх того, один из пределов интеграла бесконечен, то можно разложить интеграл на несколько интегралов, подобных предшествующим, да еще на один интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным пределом. Если каждый из составляющих интегралов сходится равномерно, то то же говорят и относительно предложенного интеграла.

При поставленных условиях равномерная сходимость несобственных интегралов вполне соответствует равномерной сходимости рядов, изученной в первом томе (n° 388). Покажем, в самом деле, что *равномерно сходящийся несобственный интеграл может быть представлен в виде суммы равномерно сходящегося ряда собственных интегралов.*

Если интеграл имеет бесконечный предел, то, обозначив через $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ последовательность возрастающих до бесконечности чисел, напишем

$$\int_a^\infty f\,dx=\int_a^{b_1} f\,dx+\int_{b_1}^{b_2} f\,dx+\ldots+\int_{b_{n-1}}^{b_n} f\,dx+\ldots$$

Если интеграл в первой части сходится равномерно, то то же справедливо и о ряде во второй части, и обратно, если ряд сходится равномерно при произвольном выборе чисел $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$, то и интеграл сходится равномерно.

С другой стороны, если интеграл имеет конечные пределы a, b, но подинтегральная функция может обратиться в бесконечность, например при $x = b$, то, обозначив через b_1, $b_2, \ldots, b_n, \ldots$ возрастающую последовательность чисел, стремящихся к b, напишем

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^{b_1} f\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f\,dx + \ldots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} f\,dx + \ldots$$

Если интеграл в первой части сходится равномерно, то то же справедливо и о ряде во второй части, и обратно.

Отсюда вытекает, что к равномерно сходящимся интегралам можно непосредственно приложить соответствующие теоремы, относящиеся к непрерывности, интегрированию и дифференцированию рядов. Поэтому весьма важно уметь распознавать равномерную сходимость. Следующее правило далеко от того, чтобы быть общим, но оно достаточно во многих случаях.

47. Признак равномерной сходимости. *Несобственный интеграл, зависящий от параметра, сходится равномерно, если его последовательные элементы не превосходят по абсолютной величине соответственных элементов абсолютно сходящегося интеграла, взятого между теми же пределами, но не содержащего параметра.*

Мы можем при доказательстве ограничиться тем случаем, когда интеграл имеет бесконечный предел, ибо в остальных случаях доказательство вполне аналогично. Сравним два интеграла

$$\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx, \qquad \int_a^\infty |\varphi(x)|\,dx,$$

предполагая, что последний сходится и что постоянно $|f(x, \alpha)| \leqslant |\varphi(x)|$. Имеем очевидно неравенство

$$\left| \int_{X'}^\infty f(x, \alpha)\,dx \right| \leqslant \int_{X'}^\infty |\varphi(x)|\,dx.$$

Но, так как интеграл $\int_a^\infty |\varphi(x)|\,dx$, по предположению, сходится, то каждому положительному числу ε соответствует такое число X, что вторая часть этого неравенства становится $< \varepsilon$, лишь только $X' > X$. Но тогда первая часть и подавно будет $< \varepsilon$, в чем и заключается равномерная сходимость, которую нужно было установить.

При этом следует хорошо помнить, что функция $f(x, \alpha)$ удовлетворяет условию непрерывности, содержащемуся, как предположение, в определении равномерной сходимости, данном в предшествующем n°.

48. Непрерывность, интегрирование, дифференцирование равномерно сходящихся интегралов. *I. Несобственный интеграл, содержащий параметр α, есть непрерывная функция от этого пара-*

метра в каждом промежутке, в котором его сходимость равномерна.

II. Если подинтегральное выражение положительно, то условием, необходимым и достаточным для того, чтобы несобственный интеграл был непрерывной функцией от содержащегося в нем параметра α, является его равномерная сходимость.

III. Интегрирование под знаком несобственного интеграла по параметру α остается законным во всяком **конечном** *промежутке, в котором сходимость равномерна.*

IV. Если подинтегральное выражение положительно, то интеграл, представляющий собою непрерывную функцию от параметра, всегда может быть проинтегрирован по α между конечными пределами под знаком интеграла.

V. Несобственный интеграл, зависящий от параметра α и равномерно сходящийся в промежутке (α_0, α_1), может быть проинтегрирован по α между пределами α_0 и α, где $\alpha_0 < \alpha \leqslant \alpha_1$, под знаком интеграла, и полученный таким образом новый интеграл также будет равномерно сходящимся в промежутке (α_0, α_1).

Применяя предшествующую теорему последовательно к получающимся интегралам, мы видим, что интегрирование по α в промежутке (α_0, α) по отношению к интегралу, равномерно сходящемуся в промежутке (α_0, α_1), может быть любое число раз выполнено под знаком интеграла, и что получающийся в результате интеграл будет снова равномерно сходящимся в том же промежутке, что и исходный.

VI. Если дифференцирование под знаком собственного интеграла или же несобственного (в предположении его существования) приводит к несобственному интегралу, то правило Leibnitz'а сохраняет силу, т. е. исходный интеграл имеет своей производной интеграл, получаемый по этому правилу, если этот последний интеграл сходится равномерно в окрестности рассматриваемого значения параметра.

Так как при этом подразумевается, что условия непрерывности, содержащиеся в определении равномерной сходимости (n° 46), выполнены, то все эти теоремы приводятся к соответствующим теоремам из теории рядов (том I, nn° 391—393), если переписать интегралы в виде равномерно сходящихся рядов.

В виде примера, рассмотрим интеграл с бесконечным пределом

$$\varphi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx,$$

равномерно сходящийся в промежутке (α_0, α_1), и покажем, что в этом промежутке можно произвести интегрирование по α под знаком интеграла (правило III).

Представим $\varphi(\alpha)$ в виде равномерно сходящегося ряда

$$\varphi(\alpha) = \int_a^{b_1} f\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f\,dx + \ldots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} f\,dx + \ldots$$

Этот ряд может быть почленно проинтегрирован, а в каждом члене можно интегрировать под знаком интеграла; в результате мы получаем ряд, равномерно сходящийся в промежутке (α_0, α_1),

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \varphi(\alpha)\, d\alpha = \sum \int_{b_{n-1}}^{b_n} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f\, d\alpha = \int_{a}^{\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f\, d\alpha.$$

и этот последний интеграл, подобно ряду, сходится равномерно.

§ 3. Вычисление интегралов с помощью различных искусственных приемов.

49. Значение интеграла $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. Этот интеграл уже был вычислен в первом томе (п^0 249, I). Мы покажем другой, гораздо более быстрый, способ его вычисления. Рассмотрим двойной интеграл, распространенный на часть D плоскости, содержащуюся между положительными направлениями осей,

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dD.$$

Пусть D' будет частью D, ограниченной дугой круга радиуса r, описанного вокруг начала. Переходя к полярным координатам, будем иметь

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\, dD' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r e^{-r^2} \cdot r\, dr = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-r^2}\right).$$

Если заставить r стремиться к ∞, то D' последовательно охватит все точки D; так как предшествующий интеграл остается ограниченным, а подинтегральная функция положительна, то интеграл в D будет пределом предшествующего, так что

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \frac{\pi}{4}.$$

С другой стороны, рассмотрим квадрат D'', ограниченный прямыми $x=0$, $x=r$, $y=0$, $y=r$. Будем иметь:

$$\iint_{D''} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \int_0^r e^{-x^2} dx \int_0^r e^{-y^2} dy = \left[\int_0^r e^{-x^2} dx\right]^2.$$

Но D' содержится в D'', а D'' — в D, следовательно, интегралы в D', D'' и D идут возрастая; то же относится и к их квадратным корням, что даст

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-r^2}} < \int_0^r e^{-x^2} dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Если r стремится к бесконечности, первое из этих трех выражений очень быстро стремится к третьему; поэтому

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{1}$$

и мы видим, что интеграл $\int_0^r e^{-x^2}dx$ очень быстро приближается к этому пределу, когда r бесконечно возрастает. Этот интеграл играет важную роль в теории вероятностей *).

50. Вычисление интеграла. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. В томе I (n⁰ 213) мы получили два следующих интеграла

$$\left.\begin{aligned} \int e^{ax}\sin bx\,dx &= \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C, \\ \int e^{ax}\cos bx\,dx &= \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Отсюда, как частный случай, выводим

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos \alpha x\,dx = \frac{1}{1+\alpha^2}. \tag{3}$$

Все элементы этого интеграла получают наибольшие по абсолютной величине (и притом положительные значения) при $\alpha = 0$, и так как и при этом значении интеграл сходится, исходный интеграл сходится равномерно, в какой бы области ни изменялось α (n⁰ 47). Произведем два раза под ряд интегрирование по α от 0 до α, что может быть выполнено под знаком интеграла (n⁰ 48); мы получим

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx = \int_0^\alpha \operatorname{arctg}\alpha\,d\alpha = \alpha \operatorname{arctg}\alpha - \frac{\operatorname{Log}(1+\alpha^2)}{2}.$$

---

*) Еще проще, без привлечения несобственных интегралов, можно было бы привести вычисление, если, рассматривая кроме областей D' и D'', еще область D''', ограниченную дугой описанной окружности радиуса $r\sqrt{2}$, исходить из неравенств

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-r^2}) < \left[\int_0^r e^{-x^2}\,dx\right]^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2r^2}).$$

Прим. ред.

Предполагая α положительным, заменим x на $\frac{x}{\alpha}$, тогда

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha}} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \operatorname{arctg} \alpha - \frac{\operatorname{Log}(1+\alpha^2)}{2\alpha}.$$

Рассмотрим теперь этот интеграл, как зависящий от параметра $\frac{1}{\alpha}$; все его элементы получают наибольшие по абсолютной величине, и притом положительные значения, при $\frac{1}{\alpha}=0$, причем интеграл сохраняет сходимость. Следовательно, интеграл сходится равномерно (n^0 47) для положительных и нулевого значений параметра $\frac{1}{\alpha}$ и представляет собою непрерывную функцию от этого параметра (n^0 48). Если заставить α стремиться к бесконечности или $\frac{1}{\alpha}$ — к нулю, то в пределе получим

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Из этого интеграла можно вывести другие. Можно прежде всего проинтегрировать его по частям, рассматривая $dx : x^2$, как дифференциал, что и приведет нас к интегралу, указанному в заглавии. Можно затем заменить $1-\cos x$ через $2\sin^2(x:2)$ и взять $x:2$ за новую переменную. Таким образом мы находим два результата

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Пусть теперь α будет положительный параметр. Заменяя в первом интеграле (4) переменную x на αx, что не отразится на пределах интеграла, будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } \alpha > 0.$$

Итак, для положительных значений α этот интеграл имеет постоянное значение, не зависящее от α. Если изменить знак α, то все элементы интеграла изменят знак, и он получит значение $-\pi:2$. Наконец, при $\alpha=0$ все элементы равны нулю, и интеграл также обращается в нуль. Итак,

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{если } \alpha < 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } \alpha > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Таким ооразом этот интеграл есть разрывная функция от параметра, его значение изменяется скачком, когда α достигает значения 0 или проходит через него. Отсюда можно заключить, на основании теоремы I n^0 48, что в окрестности $\alpha = 0$ сходимость не может быть равномерной, в чем легко убедиться и непосредственно. Действительно, для положительных α имеем

$$\int_N^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \int_{N\alpha}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

и в этой форме непосредственно видно, что сходимость равномерна, если α изменяется в промежутке, не содержащем нулю, и не может быть равномерна в промежутке, содержащем нуль.

Интеграл (5), в то же время, дает пример интеграла, которого нельзя дифференцировать по α под знаком интеграла. Так как функция (для $\alpha > 0$, например) сохраняет постоянное значение, то производная ее равна нулю, в то время как дифференцирование под знаком приводит к не имеющему смысла интегралу.

51. Интегралы, вычисляемые при помощи дифференцирования под знаком интеграла. I. Если в интеграле n^0 49 заменить x на $x \cdot \sqrt{t}$, где $t > 0$, то получим

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}. \tag{6}$$

Дифференцируя под знаком интеграла по t, найдем

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} \cdot x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{1}{t\sqrt{t}}.$$

В общем случае, после n дифференцирований, для $t > 0$, найдем

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n} \cdot \frac{1}{t^n \cdot \sqrt{t}}. \tag{7}$$

Эти дифференцирования дозволительны, на основании теоремы IV n^0 48. Действительно, получающиеся при этом интегралы сходятся р а в н о м е р н о, если t изменяется произвольно, не спускаясь однако ниже некоторого положительного числа α (сколь бы малым α ни взять). Эти интегралы сходятся и при значении $t = \alpha$, при котором все элементы получают наибольшие значения.

II. Рассмотрим затем интеграл

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x\,dx.$$

По теореме VI n° 48, имеем

$$\frac{dI}{d\alpha} = -\int_0^\infty 2xe^{-x^2}\sin 2\alpha x\,dx.$$

Действительно, этот интеграл сходится *равномерно*, ибо его элементы по абсолютной величине меньше элементов сходящегося (том I, n° 235) интеграла, который получается отсюда устранением множителя $\sin 2\alpha x$. Рассматривая здесь $-2xe^{-x^2}dx$, как дифференциал от e^{-x^2}, мы приведем последний интеграл, путем интегрирования по частям, к исходному интегралу. Именно, мы найдем

$$\frac{dI}{d\alpha} = -2\alpha I, \quad \text{откуда} \quad \frac{dI}{I} = -2\alpha\,d\alpha, \quad \frac{I}{I_0} = e^{-\alpha^2}.$$

Заметив, что $I_0 = \sqrt{\pi} : 2$ (n° 49), получим

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}. \tag{8}$$

III. Пусть α будет положительно; расмотрим разность

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{x}.$$

двух интегралов, равномерно сходящихся (если только α изменяется в промежутке, не содержащем нуля); о первом это было доказано в n° 50, а ко второму применим признак n° 47. В результате мы получим интеграл, равномерно сходящийся (при тех же условиях),

$$I = \int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{1+x^2}\,\frac{dx}{x}.$$

Продифференцируем теперь дважды последний интеграл по правилу Leibnitz'а, что приведет нас к равномерно сходящимся интегралам

$$I' = -\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx, \quad I'' = \int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx = I.$$

Итак, имеем $I'I'' = II'$, откуда $I'^2 = I^2 + C$. Так как при $\alpha = 0$ интегралы I и I' стремятся соответственно к пределам $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$, то $C = 0$ и $I' = -I$, ибо именно это равенство имеет место при $\alpha=0$. Отсюда $I' : I = -1$ и $I : I_0 = e^{-\alpha}$. Следовательно, для $\alpha > 0$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}. \tag{9}$$

52. Интегралы диффракции. Вернемся к интегралу (6)

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{t}},$$

который, как мы видели, сходится *равномерно*, если t изменяется, не спускаясь ниже некоторой положительной границы α. Умножим обе части равенства на $\sin t$, что не помешает интегралу сходиться равномерно, ибо $|\sin t| \leqslant 1$, и проинтегрируем по t между двумя положительными пределами α и $\beta > \alpha$, что может быть выполнено под знаком интеграла; мы получим, таким образом,

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \int_\alpha^\beta e^{-tx^2} \sin t\, dt.$$

Выполняя интегрирование под знаком по формуле (2), найдем

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\sin\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} x^2\, dx}{1+x^4} + \cos\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}\, dx}{1+x^4} \right] -$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\sin\beta \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x^2} x^2\, dx}{1+x^4} + \cos\beta \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x^2}\, dx}{1+x^4} \right].$$

Четыре интеграла в правой части приводятся при $\alpha=\beta=0$ к следующим *):

$$\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{1+x^4} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

---

*) Эти последние два интеграла равны между собой, ибо один приводится к другому заменой x на $1 : x$, следовательно, каждый из них равен их полусумме

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2+x\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2-x\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \Big[\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1) \Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Значит, эти четыре интеграла сходятся равномерно для неотрицательных значений α и β, ибо они, как мы видим, сходятся при $\alpha=\beta=0$, когда все их элементы получают наибольшие по абсолютной величине и притом положительные значения. Заставим теперь α стремиться к нулю и заменим β через u; мы получим в пределе, так как интегралы представляют непрерывные функции от параметра α (n^0 48),

$$\int_0^u \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\sin u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2} x^2 \, dx}{1+x^4} + \cos u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2} dx}{1+x^4} \right].$$

Если бы умножили не на $\sin t$, а на $\cos t$, то аналогичное вычисление привело бы нас к результату

$$\int_0^u \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\cos u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2} x^2 \, dx}{1+x^4} - \sin u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2} dx}{1+x^4} \right].$$

Интегралы в левых частях этих двух соотношений встречаются в теории *диффракции*; сами соотношения принадлежат Gilbert'у и играют в этой теории важную роль.

Если предположить, что u бесконечно возрастает, то интегралы, служащие множителями при $\sin u$ и $\cos u$, постоянно убывают и стремятся к нулю. Действительно, пренебрегая x^4 в знаменателе, мы видим, что они, соответственно, меньше следующих интегралов, вычисленных в предыдущем n^0,

$$\int_0^\infty e^{-ux^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{u}}, \quad \int_0^\infty e^{-ux^2} x^2 \, dx = \frac{1}{4u} \sqrt{\frac{\pi}{u}}.$$

Поэтому, в пределе при $u=\infty$, получается

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Заменяя здесь t на $\frac{\pi}{2} x^2$, придем к интегралам

$$\int_0^\infty \sin \frac{\pi}{2} x^2 \, dx = \int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2} x^2 \, dx = \frac{1}{2}, \tag{10}$$

которые обычно и называют *интегралами диффракции*.

53. Интегралы Frullani. Это название дают некоторым интегралам, значение которых определяется при помощи рассмотрения особенного интеграла. Пусть $f(x)$ будет непрерывная функция от x такого рода, что интеграл с бесконечным пределом

$$\int_A^\infty f(x)\,\frac{dx}{x} \qquad (A>0)$$

имеет определенное значение; обозначим, далее, через a и b две положительные постоянные. Интеграл

$$I=\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$

и есть *интеграл Frullani*. Для того, чтобы вычислить его значение, напишем

$$I=\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{f(ax)}{x}dx-\int_\varepsilon^\infty \frac{f(bx)}{x}\,dx\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{a\varepsilon}^\infty-\int_{b\varepsilon}^\infty\right]\frac{f(x)\,dx}{x}=\lim_{\varepsilon=0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\,\frac{dx}{x}.$$

Значение этого особенного интеграла получается по теореме о среднем. Если ξ есть надлежаще выбранное среднее значение между $a\varepsilon$ и $b\varepsilon$ (которое стремится к 0 вместе с ε), то

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\,\frac{dx}{x}=\lim f(\xi)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{dx}{x}=f(0)\,\mathrm{Log}\,\frac{b}{a}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\,\mathrm{Log}\,\frac{b}{a}. \tag{11}$$

Например, полагая $f(x)=\cos x$ или e^{-x}, получим $(a>0)$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x-\cos ax}{x}\,dx=\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\,dx=\mathrm{Log}\,a. \tag{12}$$

Часто интеграл может быть приведен к виду (11) с помощью замены переменной. Так, подстановка $x=e^{-z}$ дает нам (a и $b>-1$)

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\mathrm{Log}\,x}\,dx=\int_0^\infty \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(b+1)z}}{z}\,dz=\mathrm{Log}\,\frac{b+1}{a+1}.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ.

1. Вывести из первого из нижеприведенных интегралов второй из них:

$$2\alpha\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\,dx=\sqrt{\pi},\qquad \int\limits_0^\infty\left(e^{-\frac{a^2}{x^2}}-e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx=(b-a)\sqrt{\pi}.$$

Отв. Нужно проинтегрировать по α между a и b и заменить на $\dfrac{1}{x}$.

2. Показать, что, при $a>0$,

$$\int\limits_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a},\qquad \int\limits_0^\infty e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Отв. Оба соотношения равносильны. Второй интеграл имеет своей производной по a выражение

$$2\int\limits_0^\infty e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2}\,dx-2\int\limits_0^\infty e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2}\,\frac{a\,dx}{x^2},$$

которое равно нулю, ибо оба интеграла взаимно уничтожаются (один к другому приводятся заменой x на $a:x$). Итак, второй из предложенных интегралов имеет постоянное (относительно a) значение, которое легко определить, полагая $a=0$.

3. Показать (разлагая в ряд по степеням a), что

$$\int\limits_0^a\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-a\cos x}\cos(a\sin x)\,dx.$$

4. Показать, разлагая $\operatorname{Log}(1+x)$ в степенной ряд, что (если считать известным числовой ряд)

$$\int\limits_0^1\operatorname{Log}(1+x)\frac{dx}{x}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots=\frac{\pi^2}{12}.$$

§ 4. Интегрирование полных дифференциалов.

54. Случай двух независимых переменных. Пусть x и y будут две независимые переменные, $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — две функции от них, непрерывные вместе со своими первыми частными производными. Говорят, что выражение $P\,dx+Q\,dy$ есть *точный дифференциал*, если существует функция u двух переменных x и y, для которой это выражение служит полным дифференциалом, так что

$$du=P\,dx+Q\,dy. \tag{1}$$

Вообще выражение вида $P\,dx + Q\,dy$ не является точным дифференциалом. Действительно, соотношение (1), по определению, приводится к двум следующим

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

Так как вторые члены равны, то мы видим, что $P\,dx + Q\,dy$ может быть точным дифференциалом, только лишь если *тождественно* (т. е. при произвольных и независимых x и y) выполняется соотношение

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

Таково условие, *необходимое* для того, чтобы $P\,dx + Q\,dy$ было точным дифференциалом. Но это условие также и достаточно, и мы покажем, что, если оно выполнено, то интеграл u уравнения (1) получается с помощью двух квадратур.

Неизвестная функция u прежде всего подчинена условию

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y).$$

Пусть a будет произвольная постоянная; определенный интеграл

$$\int_a^x P(x, y)\,dx,$$

вычисленный в предположении, что y постоянно, есть частное решение этого уравнения. Общее решение получится, если прибавить к нему произвольную постоянную относительно x, т. е. в данном случае произвольную функцию $\varphi(y)$ от y. Положим же

$$u = \int_a^x P(x,y)\,dx + \varphi(y). \tag{3}$$

Остается определить, если это возможно, функцию $\varphi(y)$ так, чтобы было удовлетворено второе условие

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y),$$

что, в виду (3) и на основании правила Leibnitz'a, приводится к условию

$$\int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = Q\,(x,y).$$

Но, в силу тождества (2), которое предположено верным,

$$\int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}\,dx = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = Q(x, y) - Q(a, y),$$

благодаря чему предшествующее соотношение принимает вид

$$\varphi'(y) = Q(a, y), \text{ откуда } \varphi(y) = \int Q(a, y)\,dy.$$

Наконец, подставляя это значение φ в (3) и написав явно произвольную постоянную, входящую в неопределенный интеграл, найдем

$$u = \int_a^x P(x, y)\,dx + \int Q(a, y)\,dy + C. \tag{4}$$

Таким образом, мы видим, что, если условие (2) выполнено, уравнение (1) имеет бесконечное множество интегралов, отличающихся один от другого значением постоянной интегрирования C.

Так как постоянная a может быть взята произвольно, то, в каждом отдельном случае, ее выбирают так, чтобы по возможности упростить интегрирование.

Ясно, что можно было бы обратить порядок произведенных операций и начать с интегрирования относительно y. В этом случае, означая через b произвольную постоянную, получили бы

$$u = \int_b^y Q(x, y)\,dy + \int P(x, b)\,dx + C. \tag{5}$$

Пусть, напр., дано выражение

$$(3x^2 + 2y)\,dx + 2(x + y)\,dy.$$

Оно представляет собой точный дифференциал, ибо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2.$$

Вычислим его интеграл, полагая в формуле (4) $a = 0$; получим

$$u = \int_0^x (3x^2 + 2y)\,dx + \int 2y\,dy + C = x^3 + 2xy + y^2 + C.$$

55. Замечание. Формулы (4) и (5) предполагают функции P и Q, равно как и их первые производные, непрерывными для всех систем значений (x, y), которые входят в формулы. Если эти условия выполняются во всей плоскости, то не возникает никаких трудностей. Вообще, если они выполняются в прямоугольнике R, ограниченном прямыми $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, то формула (4) применима в этом прямоугольнике, при условии, что a выбрано между a_1 и a_2, а формула (5) — при условии, что b выбрано между b_1 и b_2. Действительно, тогда все входящие в формулы значения x и y соответствуют точкам прямоугольника R.

Эти формулы показывают, что при каждом значении произвольной постоянной C *интеграл и есть однозначная и непрерывная функция от x и y в прямоугольнике* R, в котором эти условия выполнены.

56. Случай трех независимых переменных. Изложенный метод распространяется на случай любого числа независимых переменных, но достаточно проделать выкладки для трех переменных. Пусть P, Q, R будут три функции от x, y, z, непрерывные вместе с их первыми производными. Говорят, что выражение

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{6}$$

есть *точный дифференциал*, если существует такая функция u от трех переменных x, y, z, для которой оно служит полным дифференциалом. Для этого нужно, чтобы u удовлетворяла трем уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

Так как вторые производные не зависят от порядка, в котором выполняются дифференцирования, мы получаем условия, *необходимые* для того, чтобы предложенное выражение было точным дифференциалом, в виде трех равенств

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{7}$$

Эти условия в то же время и *достаточны*, и мы покажем, что если они выполнены, то интеграл u выражения (6) получается с помощью квадратур.

Действительно, этот интеграл, прежде всего, имеет по отношению к x производную P, следовательно, он содержится в общей формуле

$$u = \int_a^x P(x, y, z)\,dx + \varphi(y, z), \tag{8}$$

где a — произвольная постоянная и φ — произвольная функция от y и z.

Для того чтобы u имело своим полным дифференциалом выражение (6), нужно еще, чтобы

$$\frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = Qdy + Rdz. \tag{9}$$

Но, применяя правило Leibnitz'а и замечая, что P_y', тождественное с Q_x', интегрируется непосредственно, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y, z) - Q(a, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Подобным же образом,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=R(x, y z)-R(a, y, z)+\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

В силу этих соотношений, условие (9) приводится к следующему:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z} dz=d\varphi=Q(a, y, z) dy+R(a, y, z) dz.$$

Итак, определение φ зависит от интегрирования дифференциального выражения с двумя переменными. Условие интегрируемости выполняется, в виду равенств (7). Таким образом, φ определяется по методу, указанному выше (n^0 54). Обозначая через b новую постоянную, выбираемую по произволу, и заменяя φ в (8) его выражением, мы видим, что выражение (6) имеет бесконечное множество интегралов, содержащихся в общей формуле

$$u=\int_a^x P(x, y, z)\, dx+\int_b^y Q(a, y, z)\, dy+\int R(a, b, z)\, dz+C.$$

Условия непрерывности, предположенные в изложенном доказательстве, очевидно, требуют замечания, аналогичного сделанному в предшествующем n^0.

§ 5. Криволинейные интегралы, которые зависят лишь от их пределов.

57. Криволинейные интегралы. Пусть P и Q будут две однозначные и непрерывные функции от x и y в области D, ограниченной простым контуром. Криволинейный интеграл

$$\int_L P\, dx+Q\, dy, \tag{1}$$

взятый по линии L, проведенной в пределах области D, был определен в n^0 12 в элементарной форме, но при некоторых ограничениях относительно L, в томе I (n^0 360) было дано определение для любого спрямляемого контура. Следующие предложения приложимы также к каждой спрямляемой кривой L, для которой криволинейный интеграл определен.

Большая часть доказательств, впрочем, приводится к случаю многоугольного контура, в силу следующего предложения:

58. Лемма. *Если в области D проведена линия интегрирования L, то в нее можно вписать ломаную Π так, чтобы интеграл вдоль L отличался сколь угодно мало от интеграла вдоль Π. Для этого нужно лишь, чтобы стороны ломаной были достаточно малы.*

Очевидно, достаточно доказать теорему для каждого из интегралов от $P\,dx$ и от $Q\,dy$. Мы ограничимся одним лишь интегралом от $P\,dx$, так как для другого доказательство может быть проведено аналогично.

Обозначим длину линии интегрирования также через L, а концы ее — через m_1 и M. Впишем в кривую L ломаную, имеющую вершинами точки $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и M. Пусть x_i и P_i будут значения x и P в точке m_i; через c_i обозначим как сторону $m_i m_{i+1}$, так и ее длину. Взяв по произволу положительное число ε, можно сделать все стороны c_i настолько малыми, чтобы колебание непрерывной функции P на каждой стороне было $<\varepsilon$ и чтобы разность между суммой $\sum\limits_i (x_{i+1} - x_i) P_i$ и ее пределом $\int\limits_L P\,dx$ также была $<\varepsilon$. Далее, имеем

$$\int\limits_{L} P\,dx = \sum_i \int\limits_{c_i} P\,dx,$$

что можно переписать так

$$\int\limits_{L} P\,dx = \sum_i (x_{i+1} - x_i) P_i + \sum_i \int\limits_{c_i} (P - P_i)\,dx.$$

Это соотношение доказывает теорему, ибо первый член правой части отличается от $\int\limits_L P\,dx$ меньше чем на ε, между тем как второй, по абсолютной величине, меньше $\varepsilon \sum c_i$ и a fortiori меньше εL.

59. Криволинейные интегралы, зависящие лишь от их пределов. Вообще говоря, криволинейный интеграл, взятый по линии C, проведенной на плоскости xy от точки (x_1, y_1) до точки (X, Y), зависит не только от этих точек, но и от вида самой линии. Если же интеграл оказывается зависящим только от концов линии интегрирования и от направления, в котором точка ее пробегает, то естественно отметить это свойство уже самим обозначением, аналогичным обозначению обыкновенного интеграла: в этом случае интеграл, взятый по любой линии, соединяющей точки (x_1, y_1) и (X, Y), обозначают так:

$$\int\limits_{(x_1, y_1)}^{(X, Y)} P\,dx + Q\,dy$$

и говорят, что *криволинейный интеграл зависит лишь от его пределов.*

60. Теорема I. *Если $P\,dx + Q\,dy$ есть полный дифференциал*)*

---

*) Так как функции P и Q предполагаются непрерывными, то равенства $\frac{dF}{dx} = P, \frac{dF}{dy} = Q$ являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy$ было полным дифференциалом F в том смысле, какой был установлен для этого понятия в томе I (пп⁰ 147, 148). Это замечание нужно иметь в виду и впредь.

Прим. ред.

некоторой функции $F(x, y)$, однозначной в области D, то интеграл от $P\,dx + Q\,dy$ зависит лишь от его пределов, вдоль всякой линии в области D, и равен приращению функции F при переходе от одного из концов линии интегрирования к другому.

Так как интеграл вдоль произвольной линии является пределом интеграла вдоль ломаной, в силу предшествующей леммы, то достаточно доказать теорему для ломаной линии.

На каждой ломаной линии П можно рассматривать x и y, как непрерывные функции переменной t, имеющие повсюду непрерывные производные, исключая вершины, где существуют лишь односторонние производные, односторонне же непрерывные. Взяв t за переменную интегрирования, получим

$$\int\limits_{\text{П}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{t_1}^{T}\left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt}\right)dt = \int\limits_{t_1}^{T}\frac{dF}{dt}dt.$$

Следовательно, если x_1, y_1 и X, Y суть координаты концов,

$$\int\limits_{\text{П}} P\,dx + Q\,dy = F(X, Y) - F(x_1, y_1),$$

что и доказывает предложение.

61. Теорема II. *Если интеграл от $P\,dx + Q\,dy$ зависит лишь от его пределов (в области D), то, взяв его от постоянной точки (x_1, y_1) до переменной точки (x, y), мы получим однозначную функцию от x, y (в области D), имеющую своим полным дифференциалом выражение $P\,dx + Q\,dy$, т. е. имеющую своими частными производными P и Q.*

Обозначим через (x_1, y_1) постоянную точку, а через (X, Y) — переменную. Пусть тогда

$$F(X, Y) = \int\limits_{x_1, y_1}^{X, Y} P\,dx + Q\,dy$$

будет интеграл, взятый между этими двумя точками. Эта функция F однозначна по предположению; остается лишь показать, что она имеет частными производными P и Q.

Сохранив Y неизменным, придадим X бесконечно малое приращение $\Delta X = h$. Для вычисления нового интеграла можно выбрать, в качестве пути интегрирования ломаную, имеющую своей последней стороной прямолинейный отрезок, соединяющий точки (X, Y) и $(X + h, Y)$. Приращение ΔF сведется тогда к интегралу, взятому вдоль этой последней стороны; но так как здесь y постоянно и dy равно нулю, этот интеграл представляется в виде обыкновенного определенного интеграла

$$\Delta F = \int\limits_{X}^{X+h} P(x, Y)\,dx.$$

Отсюда, по теореме о среднем, выводим, что

$$\Delta F = P(X + \theta h, Y)\,\Delta X$$

и, следовательно,

$$F'_x = \lim \frac{\Delta F}{\Delta X} = P(X, Y); \text{ подобно этому и } F'_y = Q.$$

Сопоставляя две предшествующие теоремы, мы можем высказать следующее предложение.

62. **Теорема III.** *Если P и Q суть непрерывные функции от x и y в области D, то условие, необходимое и достаточное для того, чтобы криволинейный интеграл от $Pdx + Qdy$ зависел лишь от его пределов (внутри области D), состоит в том, чтобы выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом от некоторой функции, однозначной в области D.*

63. **Теорема IV.** *Для того, чтобы интеграл от $Pdx + Qdy$ зависел лишь от его пределов (в области D), необходимо и достаточно, чтобы он равнялся нулю вдоль любого замкнутого контура C, проведенного в D. Далее, достаточно для этого, чтобы этот интеграл был нулем вдоль любого треугольного контура или хотя бы вдоль сколь угодно малого треугольного контура.*

Пусть L и L_1 будут две линии с теми же концами, L_1^{-1} — линия L_1, но описанная в обратном направлении. Контур LL_1^{-1} будет замкнутым, причем

$$\int_L - \int_{L_1} = \int_{LL_1^{-1}}$$

Поэтому, если интегралы вдоль L и вдоль L_1 равны, то интеграл вдоль замкнутого контура LL_1^{-1} равен нулю, и обратно; этим доказана первая часть теоремы.

Я утверждаю теперь, что для того, чтобы интеграл был нулем вдоль любого замкнутого контура, достаточно, чтобы он был нулем вдоль треугольного контура. Действительно, интеграл вдоль замкнутого контура есть предел интеграла вдоль многоугольника П. Для того же, чтобы интеграл вдоль П был нулем, достаточно, чтобы он был нулем вдоль достаточно малого треугольника, ибо, если многоугольный контур П является простым (т. е. себя не пересекает), то с помощью вспомогательных прямых можно разложить многоугольник, ограниченный контуром П, на сеть сколь угодно малых треугольников. При суммировании интегралов, взятых по контурам всех этих треугольников, интегралы вдоль вспомогательных линий взаимно уничтожатся, так как вдоль каждой линии интегралы берутся дважды, но в противоположных направлениях. Сумма интегралов сведется к интегралу вдоль внешнего многоугольного контура, так что последний интеграл обращается в нуль одновременно с интегралами вдоль треугольников.

Если же многоугольный контур П себя пересекает, то он составляется из нескольких простых контуров, и мы возвращаемся к предшествующему случаю.

64. **Теорема V.** *Если P, Q и их частные производные P_y', Q_x' являются непрерывными функциями от x и y в области D, то для того, чтобы интеграл от $P\,dx + Q\,dy$ зависел лишь от его преде-*

лов, вдоль каждой проведенной в области D линии, необходимо и достаточно, чтобы внутри области D выполнялось тождество $P_y' = Q_x'$.

Это заключение, прежде всего, непосредственно вытекает из формулы Green'а. По предшествующей теореме, достаточно ограничиться рассмотрением интеграла от $P\,dx + Q\,dy$ вдоль треугольного контура C, проведенного в области D. Обозначим через A самый треугольник. По формуле Green'a,

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\int\limits_A (Q_x' - P_y')\,dx\,dy.$$

Если $Q_x' - P_y' = 0$, то и интеграл в первой части равен нулю; в противном же случае, можно было бы так выбрать контур C, чтобы этот интеграл не был нулем; этим предложение доказано.

Но нет необходимости обращаться к формуле Green'a; мы дадим другое доказательство, которое легче может быть перенесено на случай любого числа переменных. Для доказательства достаточности условия можно ограничиться рассмотрением достаточно малых треугольников, содержащихся в области D', в свою очередь лежащей в н у т р и (в узком смысле) области D. Но каждый достаточно малый треугольник в D' содержится в некотором прямоугольнике R, лежащем внутри D, а в R выражение $P dx + Q\,dy$ является полным дифференциалом однозначной функции $F(x, y)$ (n° 55). Итак, в области R, интеграл зависит лишь от его пределов, так что он равен нулю вдоль замкнутого контура (концы которого совпадают), в частности, и вдоль треугольника. Столь же просто обнаруживается и необходимость указанного условия.

65. Распространение на случай любого числа переменных. Предшествующий анализ сам собою распространяется на случай любого числа независимых переменных. Мы ограничимся указанием результатов для трех переменных.

Пусть P, Q, R будут три однозначные и непрерывные функции от x, y, z, имеющие непрерывные же первые частные производные в некоторой области D. Эта область D может быть ограничена одной или несколькими поверхностями, но мы предполагаем их такими, чтобы каждый проведенный в D замкнутый контур мог быть сведен к точке непрерывной деформацией, не выходя за пределы D. (В случае двух переменных, выполнение этого условия вытекало из простоты контура области.)

Тогда имеет место следующая теорема:

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы выражение $P dx + Q\,dy + R\,dz$ было полным дифференциалом однозначной функции $F(x, y, z)$ в D, или чтобы криволинейный интеграл

$$\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

зависел лишь от его пределов в D, является выполнение в D равенств

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

При наличии их, функция $F(x, y, z)$, с точностью до постоянного слагаемого, выразится криволинейным интегралом

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

взятым по любому пути между постоянной точкой и переменной точкой области D.

Примеры для упражнений.

1. Каково необходимое и достаточное условие для того, чтобы интеграл по поверхности

$$\iint_S A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy \tag{1}$$

зависел лишь от контура L поверхности, но не от формы последней?

Отв. Нужно, чтобы интеграл был нулем вдоль любой замкнутой поверхности S. Пусть V будет областью, ограниченной замкнутой поверхностью S; интеграл по поверхности, по формуле Green'а, сведется к тройному интегралу

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

Так как этот интеграл должен быть нулем, каково бы ни было V, то искомым условием будет равенство

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

2. Показать, что, если интеграл по поверхности (1) зависит лишь от контура L этой поверхности, то он приводится к криволинейному интегралу вдоль L.

Отв. Если условие (2) выполняется, то можно определить три функции P, Q, R соотношениями

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C.$$

Им можно удовлетворить, например, полагая

$$P = \int_{z_0}^{z} B\,dz - \int C(x, y, z_0)\,dy, \quad Q = -\int_{z_0}^{z} A\,dz, \quad R = 0.$$

Интеграл по поверхности преобразуется тогда по формуле Stokes'а (n^0 38) в криволинейный интеграл

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{3}$$

Этот результат позволяет обобщить понятие о точном дифференциале. Говорят (следуя Poincaré), что уравнение (2) выражает условие того, чтобы (1) было интегралом от точного дифференциала. При выполнении его, действительно, *двойной* интеграл (1) приводится к *простому* (3). Это обобщение может быть распространено на случай любого числа переменных.

ГЛАВА III.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ RIEMANN'А и LEBESGUE'А.

§ 1. Кратные интегралы Riemann'а.

66. Прямоугольная область n измерений. Пусть $x, y, \ldots$ будет система n независимых переменных, которые могут принимать все значения, содержащиеся соответственно в промежутках (a, A), (b, B), ..., включая и крайние значения. Область изменения этих переменных геометрически представляется в виде прямоугольника в случае двух переменных, в виде прямоугольного параллелепипеда — в случае трех. Но для большего числа переменных геометрическое истолкование уже не может быть дано. Тем не менее мы будем говорить еще, по аналогии, что переменные изменяются в некоторой *призматической прямоугольной области* или, короче, в некоторой *прямоугольной области.*

Каждая система значений, $x, y, \ldots$, содержащихся в указанных пределах, есть точка области; величины $x, y, \ldots$ являются координатами этой точки. Разности $A - a$, $B - b$, ... суть *измерения* прямоугольной области. *Протяжением* (l'étendue) R области, по определению, называется произведение всех ее измерений $(A - a)(B - b) \ldots$

67. Теорема Darboux. Пусть $x, y, \ldots$ будут переменные, изменяющиеся, соответственно, в промежутках (a, A), (b, B), ..., которыми определяется некоторая прямоугольная область R. Разложим каждый из этих промежутков на последовательные части с помощью промежуточных точек. Пусть $\delta_1, \delta_2, \ldots$ будут элементы промежутка (a, A), $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — элементы промежутка (b, B), и т. д. Одновременно и область R разложится на элементы $\rho_1, \rho_2, \ldots$, причем каждая область ρ определяется одним элементарным промежутком значений каждой переменной.

Пусть $f(x, y, \ldots)$ будет ограниченная функция от $x, y, \ldots$, M и m — ее точные верхняя и нижняя границы в R, а M_n и m_n — аналогичные границы в ρ_n. Составим две суммы, распространенные на все элементы ρ_n области R

$$S = \sum M_n \rho_n, \quad s = \sum m_n \rho_n.$$

Относительно них имеет место следующая теорема Darboux*):

Если все промежутки $\delta_i, \gamma_k, \ldots$ бесконечно убывают, то суммы S и s стремятся, соответственно, к двум определенным пределам L и l, не зависящим от выбора точек деления в каждом промежутке (a, A), (b, B) ...

Очевидно, достаточно выполнить доказательство по отношению к суммам S, так как, при замене f на $-f$, S заменяется через $-s$. Затем,

*) В томе I, n° 250, эта теорема доказана для случая одной переменной.

можно предположить, что $f > 0$, ибо теорема будет справедлива для функции f, если она имеет место для $f + A$, где A означает постоянную; эту постоянную можно взять достаточно большой, чтобы $f + A$ было > 0.

В этом предположении можно сделать следующее предварительное замечание: если разложить элемент ρ_n на несколько других $\rho', \rho'', \ldots$, в которых f имеет верхними границами $M', M'', \ldots$, то произведение $M_n \rho_n$ превзойдет сумму $M' \rho' + M'' \rho'' + \ldots$, распространенную на все части элемента ρ_n, и тем более (в виду положительности членов) всякую сумму этого рода, распространенную лишь на некоторые из упомянутых частей.

Мы можем теперь перейти к доказательству теоремы Darboux для S. Так как суммы S не могут быть меньше mR, то для них существует конечная точная нижняя граница L; я утверждаю, что *S имеет пределом L, когда все элементы ρ_n стремятся к 0 по всем измерениям.*

Действительно, пусть ε будет любое положительное число; по определению L, можно найти некоторую сумму $S' < L + \varepsilon$; пусть эта сумма S' соответствует некоторому разложению области R на определенные элементы $\rho_1', \rho_2', \ldots$

Для того чтобы доказать теперь, что S стремится к L, достаточно показать, что сумма S (которая $\geqslant L$) становится $< L + \varepsilon$, когда элементы ρ_n стремятся к нулю.

Можно разложить элементы ρ_n на два класса: элементы, содержащиеся целиком в некоторых из ρ', и элементы, захватывающие каждый несколько ρ'. В то же время S разлагается на две соответствующих частных суммы $S_1 + S_2$. Сумма S_1, относящаяся к элементам первого класса, меньше S', ибо, согласно нашему предварительному замечанию, каждый член S' заменен меньшей его суммой членов. Сумма S_2 стремится к нулю, потому что сумма элементов ρ_n второго класса, очевидно, стремится к нулю*). Итак, сумма S, которая бесконечно сближается с S_1 (которая $< S'$), также становится $< L + \varepsilon$.

Предложение доказано.

Путем сведения к предыдущему доказательству (см. выше) можно доказать, что сумма s стремится к ее верхней границе l.

68. Верхний и нижний интегралы. Функции интегрируемые (R); их свойства. *Предел L называется верхним интегралом от f в области R*; предел *l — ее нижним интегралом* (Jordan). Мы будем их обозначать через

---

*) Это место, быть может, нуждается в пояснении. Разложение области R на элементы $\rho_1', \rho_2', \ldots$ определяется разложением промежутка (a, A) значений x на $(p+1)$ частей (a, a_1'), (a_1', a_2'), $\ldots$, (a_p', A), промежутка (b, B) значений y на $q+1$ частей (b, b_1'), (b_1', b_2'), $\ldots$, (b_q', B), и т. д. Элемент ρ_n лишь в том случае может захватывать несколько ρ', если одно из p чисел a_i' попадет внутрь соответствующего ρ_n промежутка значений x, или если одно из q чисел b_j' попадет внутрь соответствующего ρ_n промежутка значений y, и т. д.

Допустим, что все измерения элементов ρ_n меньше δ. Тогда сумма протяжений тех из них, для которых осуществляется первая из указанных только что возможностей, меньше $p\delta(B-b)\ldots$; сумма протяжений тех, для которых осуществляется вторая возможность, меньше $q\delta(A-a)\ldots$, и т. д. Остальное ясно.

Прим. ред.

$$
\left.\begin{aligned}
L &= \overline{\int_R} f(x, y, \ldots)\, dR \text{ или } \overline{\int_R} f(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots \\
l &= \underline{\int_R} f(x, y, \ldots)\, dR \text{ или } \underline{\int_R} f(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (1)
$$

Порядок кратности интеграла равен числу измерений области R, т. е. числу переменных $x, y, \ldots$ или дифференциалов $dx, dy, \ldots$

Если это не представляет трудностей, то в обозначении интеграла, вместо единственного знака $\int$, фигурирующего в формулах (1), пишут подряд несколько этих знаков, в числе, равном порядку кратности интеграла.

Если пределы L и l равны, то функция называется *интегрируемой в смысле Riemann'а или интегрируемой* (R); их общее значение I называют *интегралом* от f в R и пишут просто

$$
I = \int_R f(x, y, \ldots)\, dR = \int_R f(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots \qquad (2)
$$

Если функция f не интегрируема (R), мы все же не считаем интеграла от f в R или выражение (2) лишенным всякого смысла; мы придаем лишь ему неопределенное значение, содержащееся между верхним и нижним интегралами.

Свойства интегрируемых R функций от одной переменной (том I, n° 252) легко обобщаются. Таким образом:

Суммы и произведения интегрируемых (R) функций также интегрируемы (R). Сверх того, интеграл от суммы равен сумме интегралов от отдельных слагаемых.

Частное двух функций, интегрируемых (R), также интегрируемо (R), если только функция, служащая делителем, имеет нижнюю и верхнюю границы одного знака.

69. Выражение разности между верхним и нижним интегралами. Обозначим через $\text{Osc.}\, f\ (x_0, y_0, \ldots)$ колебание функции f в точке $(x_0, y_0, \ldots)$, т. е. предел колебания f в области, определяемой промежутками $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $(y_0 - \eta, y_0 + \eta), \ldots$, когда $\varepsilon, \eta, \ldots$ стремятся к нулю. Лемма n° 255 тома I непосредственно обобщается следующим образом:

Как бы мало ни было данное положительное число ε, прямоугольную область R можно разложить на сколь угодно малые прямоугольные элементы ρ_n так, чтобы для каждого из них выполнялось неравенство

$$
M_n - m_n < \Delta_n + \varepsilon,
$$

где $M_n - m_n$ есть колебание f в области ρ_n, а Δ_n есть точная верхняя граница колебаний f в различных точках этой области.

Следовательно формула того же n° 255, выражающая разность между верхним и нижним интегралами в виде интеграла, также обобщается, и мы имеем

$$
\overline{\int_R} f\, dR - \underline{\int_R} f\, dR = \int_R (\text{Osc.}\, f)\, dR. \qquad (3)
$$

70. Приведение двойных интегралов к простым. *Пусть $f(x, y)$ будет функция от двух переменных, интегрируемая (R) в прямоугольнике, определяемом промежутком (a, A) значений x и (b, B) значений y. Двойной интеграл*

$$\int\int_R f(x, y)\,dx\,dy$$

приводится к двум простым интегралам, взятым последовательно по отношению к каждой из переменных в указанных промежутках.

Разложим промежуток (a, A) на m частей $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ с помощью точек $x_1 = a, x_2, \ldots, x_{m+1} = A$; промежуток (b, B) на n частей $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ с помощью точек $y_1 = b, y_2, \ldots, y_{n+1} = B$. Область R разложится на mn прямоугольников, площади которых будут $\delta_i \gamma_k$.

Путем разложения повторных интегралов получим

$$\int_b^{\overline{B}} dy \int_a^{\overline{A}} f(x, y)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \int_{y_k}^{\overline{y}_{k+1}} dy \int_{x_i}^{\overline{x}_{i+1}} f(x, y)\,dx$$

Обозначим через M_{ik} и m_{ik} точные верхнюю и нижнюю границы f в прямоугольнике $\delta_i \gamma_k$. В общем члене суммы, написанной во второй части предшествующего равенства, функция f содержится между M_{ik} и m_{ik}. Поэтому

$$M_{ik}\delta_i\gamma_k \geqslant \int_{y_k}^{\overline{y}_{k+1}} dy \int_{x_i}^{\overline{x}_{i+1}} f(x, y)\,dx \geqslant m_{ik}\delta_i\gamma_k.$$

Складывая аналогичные неравенства, получим

$$\sum\sum M_{ik}\delta_i\gamma_k \geqslant \int_b^{\overline{B}} dy \int_a^{\overline{A}} f(x, y)\,dx \geqslant \sum\sum m_{ik}\delta_i\gamma_k.$$

Предположим теперь все δ_i и все γ_k стремящимися к нулю. Два крайних выражения, по определению, стремятся к двойному интегралу, существование которого предположено. Следовательно,

$$\int\int_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_b^{\overline{B}} dy \int_a^{\overline{A}} f(x, y)\,dx.$$

С помощью аналогичного рассуждения получим

$$\int\int_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\underline{b}}^{B} dy \int_{\underline{a}}^{A} f(x, y)\,dx.$$

Но, согласно данному в томе I (n° 251) определению интеграла от функции, имеющей точки неопределенности, в которых она принимает значения, колеблющиеся между определенными для каждой точки границами, вторые части двух предшествующих равенств содержат между собой интеграл

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx,$$

и, следовательно, равны оба этому интегралу, имеющему, таким образом, вполне определенное значение.

Наконец, так как в предыдущем рассуждении можно переставить x и y, то мы получаем следующую теорему:

71. Теорема. *Если функция $f(x, y)$ интегрируема (R) в прямоугольнике R, то два простых интеграла*

$$\int_a^A f(x, y)\, dx, \quad \int_b^B f(x, y)\, dy$$

представляют собою интегрируемые (R) функции *), *соответственно от y в промежутке (b, B) и от x в промежутке (a, A); при этом,*

$$\int\int_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\, dy.$$

72. Приведение тройных и, вообще, кратных интегралов. Аналогичное рассуждение применяется и к тройным интегралам. Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в области, определяемой промежутками (a, A) значений x, (b, B) значений y, (c, C) значений z, то тройной интеграл сводится к трем простым, последовательно взятым по каждой переменной между указанными пределами, и притом в произвольном порядке. В частности, можно последовательно проинтегрировать по x, y, z, что даст

$$\int\int\int_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_c^C dz \int_b^B dy \int_a^A f(x, y, z)\, dx.$$

73. Протяжение совокупности. Различные теоремы. Первые определения, относящиеся к совокупностям точек, даны во введении (том I, n° 54 и след.). Пусть E будет ограниченная совокупность, содержащаяся в некоторой прямоугольной области R. Обозначим через $e(x, y, \ldots)$ функцию, равную 1 в каждой точке E и 0 в прочих точках. Образуем два интеграла

$$\overline{\int_R} e(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots, \quad \underline{\int_R} e(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots \tag{4}$$

*) Так как интегрируемая (R) функция почти везде непрерывна (том I, n° 257, IV), то каждый из этих интегралов может оказаться не имеющим определенного значения, разве лишь для совокупности значений, соответственно y или x с мерой нуль.

Прим. ред.

Первый, по определению, есть *внешнее протяжение*, а второй — *внутреннее протяжение* совокупности E *в смысле Jordan'а*. Когда они равны, совокупность E измерима (J) и имеет своим *протяжением*

$$E=\int_R e(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots$$

Применим к этим интегралам соотношение (3) n° 69 и заметим еще, что $\operatorname{Osc}. e(x, y, \ldots)$ равна 1 в каждой точке границы E и 0 в прочих точках. Мы получим следующие две теоремы:

I. *Разность между внешним и внутренним протяжениями* (J) *совокупности точек равна внешнему протяжению ее границы.*

II. *Для того чтобы совокупность была измерима* (J), *необходимо и достаточно, чтобы протяжение ее границы было равно нулю.*

Пусть (a, A), $(b, B), \ldots$ будут промежутки, определяющие область R. Разложим их, соответственно, на части $\delta_i, \gamma_k, \ldots$ и, следовательно, R на элементы $\rho_n=\delta_i \gamma_k \ldots$, которые предположим бесконечно убывающими. Вспомнив определение интегралов (4), мы получим следующую теорему.

III. *Внутреннее протяжение E есть предел суммы протяжений элементов ρ_n, содержащихся в E, внешнее же протяжение есть предел суммы протяжений элементов ρ_n, содержащих хоть одну точку E.*

Далее, имеем теорему:

IV. *Если в области R содержится конечное число измеримых* (J) *совокупностей E', E'', ... без общих точек, то совокупность E, составленная из точек всех этих совокупностей, также измерима* (J), *причем протяжение ее равно сумме протяжений составляющих совокупностей.*

Доказательство—такое же, как и в случае линейных совокупностей (см. том I, n° 256).

74. Интегралы, распространенные на совокупности. Пусть E будет совокупность, содержащаяся в прямоугольной области (R), а $f(x, y, \ldots)$— ограниченная функция в этой совокупности. Обозначим через f_1 функцию, равную f в каждой точке E и 0 в прочих точках. Верхний и нижний интегралы от функции f в E, обозначаемые символами

$$\overline{\int_E} f\, dx\, dy \ldots, \quad \int_{\underline{E}} f\, dx\, dy \ldots,$$

по определению, равны соответствующим интегралам f_1 в R

$$\overline{\int_R} f_1\, dx\, dy \ldots, \quad \int_{\underline{R}} f_1\, dx\, dy \ldots$$

Если последние равны, то f интегрируема (R) в совокупности E.

Случай, когда совокупность E не измерима (J), лишен интереса. Предположим, что эта совокупность измерима (J) и имеет своим протяжением E. Тогда интегралы функции f обладают следующими свойствами:

I. *Если обозначить через M и m верхнюю и нижнюю границы f*

в E, то верхний и нижний интегралы f в E содержатся между ME и mE.

Пусть $e(x, y, \ldots)$ будет функция, равная 1 в E и 0 вне E; имеем $Me \geqslant f_1 \geqslant me$, откуда

$$\overline{\int_R} f_1\, dx\, dy \ldots \leqslant M \overline{\int_R} e\, dx\, dy \ldots = ME,$$

и, подобно этому, нижний интеграл $\geqslant mE$.

Эта теорема носит название **теоремы о среднем**.

II. *Если функция f интегрируема (R) в измеримой (J) совокупности E, то она интегрируема (R) и в любой содержащейся в E измеримой (J) совокупности E'.*

III. *Если функция f интегрируема (R) в каждой из конечного числа измеримых (J) совокупностей $E', E'', \ldots$ без общих точек, то эта функция интегрируема (R) и в совокупности E, составленной из точек всех совокупностей $E', E'', \ldots$, причем*

$$\int_E f\, dx\, dy \ldots = \int_{E'} f\, dx\, dy + \int_{E''} f\, dx\, dy + \ldots$$

Доказательства те же, что и для случая линейных совокупностей (том I, n° 258).

75. Обобщение определения интеграла. *Если измеримую совокупность E разложить на бесконечно возрастающее число измеримых совокупностей $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, диаметры которых стремятся к нулю, и если обозначить через M_i и m_i верхнюю и нижнюю границы f в ρ_i, то две суммы $\sum M_i \rho_i$ и $\sum m_i \rho_i$ имеют своими пределами, соответственно, верхний и нижний интегралы f в E (и, следовательно, стремятся оба к интегралу f, если f интегрируема).*

Для доказательства нужно лишь воспроизвести рассуждения, приведенные в n° 67 по теореме Darboux, заменяя лишь разложение на прямоугольные элементы произвольным разложением. Доказательство сохраняет силу, так как границы измеримых совокупностей имеют протяжение, равное нулю и, следовательно, если они содержатся внутри некоторой системы элементов ρ_n с бесконечно малыми диаметрами, то сумма протяжений этих элементов стремится к нулю.

§ 2. Меры совокупностей нескольких измерений по Borel'ю и Lebesgue'у. Измеримые функции.

Учение о мерах линейных совокупностей было подробным образом изложено в томе I (Введение, § 11). Распространение на случай совокупностей нескольких измерений столь естественно, что достаточно лишь указать результаты, не возвращаясь к доказательствам.

76. Внутренняя и внешняя меры совокупности. Измеримые совокупности. Пусть E будет ограниченной совокупностью, содержащейся в некоторой прямоугольной области R, протяжение или **меру** которой мы также обозначим через R (n° 66). Точки совокупности E можно заключить в исчислимое множество прямоугольных областей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Пусть $\sum \alpha$ будет сумма мер этих областей. По определению, *внешняя мера* $m_e E$ есть точная нижняя граница всех возможных сумм $\sum \alpha$.

Пусть теперь CE будет дополнением к E (относительно R) и $m_e\,(CE)$— внешней мерой этой совокупности. *Внутренняя мера* E есть разность (большая или равная 0, но меньшая $m_e E$).

$$m_i E = R - m_e\,(CE).$$

Когда внутренняя и внешняя меры E равны, эта совокупность измерима (в смысле Borel'я и Lebesgue'а), и мерой mE называется общее значение $m_i E$ и $m_e\ E$.

77. Операции над совокупностями. Их свойства. Если даны совокупности $E_1, E_2, \ldots$, то три операции

$$E_1 + E_2 + \ldots,\ E_1 - E_2, E_1\ E_2 \ldots,$$

уже определенные в томе I (Введ. n° 76), состоят соответственно: в объединении всех точек, принадлежащих совокупностям $E_1, E_2, \ldots$; в удалении из E_1 точек E_2; в выделении точек, общих всем совокупностям $E_1, E_2, \ldots$

Если совокупности $E_1, E_2, \ldots$ измеримы, содержатся в одной и той же прямоугольной области R, то предшествующие операции также приводят к измеримым совокупностям.

В частности, если совокупности $E_1, E_2, \ldots$ без общих точек (том I, n° 78)

$$m\ (E_1 + E_2 + \ldots) = m\,E_1 + m\,E_2 + \ldots$$

Далее, если E_2 содержится в E_1,

$$m(E_1 - E_2) = mE_1 - mE_2.$$

Совокупности, которые можно построить с помощью исчислимого ряда этих операций, исходя из прямоугольных областей, суть *совокупности измеримые* (B); только их и рассматривал E. Borel.

Предельные совокупности (в широком или узком смысле) для исчислимого можества совокупностей $E_1, E_2, \ldots$ определяются, как и в томе I (n° 81). Они измеримы, если измеримы все совокупности последовательности. По поводу них уместно вспомнить следующую теорему:

Теорема. *Если между совокупностями $E_1, E_2, \ldots$, содержащимися в R, найдется бесконечное множество имеющих внутреннюю меру $\geqslant k$, то и предельная совокупность в широком смысле также будет иметь внутреннюю меру $\geqslant k$; если же найдется бесконечное множество имеющих внешнюю меру $\leqslant k$, то предельная совокупность в узком смысле будет иметь внешнюю меру $\leqslant k$.*

Из нее, как и в томе I n° 85, можно вывести следующую теорему о сходимости:

Теорема. *Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ будет последовательность функций от $x, y, \ldots$, сходящаяся к конечному пределу $f(x, y, \ldots)$ в некоторой совокупности E; взяв, далее, произвольное положительное число ε, обозначим через E_n совокупность точек E, в которых $(f - f_n) \geqslant \varepsilon$.*

Тогда $m_i E_n$ стремится к нулю с возрастанием n до бесконечности.

78. Замкнутые совокупности. Рассмотрим, для большей определенности, *плоскую совокупность*, т. е. совокупность точек на плоскости. Пусть E будет ограниченная (следовательно, содержащаяся в некотором прямоугольнике R) и замкнутая плоская совокупность и CE — ее дополнение (относительно R).

Каждая данная точка CE, находясь на конечном расстоянии от замкнутой совокупности E, падает *внутрь* некоторого квадрата, состоящего исключительно из точек CE. Отсюда следует, что можно рассматривать CE как полученную из объединения исчислимого множества взаимно не налегающих квадратов*).

Совокупность E получается путем удаления из R точек, принадлежащих этому исчислимому множеству квадратов. Поэтому *замкнутая совокупность измерима* (B).

Отсюда вытекает одно следствие, заслуживающее быть отмеченным:

Замкнутая совокупность меры 0 *имеет и протяжение* (J) *равное* 0.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ будут квадраты (и их меры), взаимно не налегающие и составляющие CE. Сумма мер этих квадратов равна мере CE, т. е. R, ибо мера E равна нулю. Покроем R прямоугольной сеткой с бесконечно малыми петлями; сумма мер тех петель, которые попадут в n квадратов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, будет стремиться к пределу

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Но эта сумма отличается от R сколь угодно мало. Следовательно, R является протяжением (J) совокупности CE, так что протяжение E равно нулю.

Если рассмотреть совокупности трех и более измерений, то в предшествующих рассуждениях нужно было бы лишь заменить квадраты кубами и т. д.

79. Измеримые функции. Функции $f(x, y, \ldots)$ от нескольких переменных измеримы при тех же условиях, что и функции от одной переменной (том I, п° 82). Именно, функция f называется *измеримой* в совокупности E точек $(x, y, \ldots)$, если совокупность

$$E(f > A)$$

точек E, в которых $f > A$, измерима.

В случае одной переменной говорят, что функция л и н е й н о измерима; в случае двух — она измерима *поверхностно* (superficiellement).

Суммы, произведения, частные измеримых функций измеримы, как и в случае одной переменной. Подобным же образом *предел, а также*

---

*) Для пояснения этого, рассмотрим конкретный способ выделения таких квадратов. Пусть и R — квадрат; разделяя его на 2^{2n} ($n = 1, 2, 3, \ldots$) равных квадратов, будем всякий раз удерживать лишь те, которые состоят исключительно из точек CE (и не содержатся в уже раннее удержанных квадратах, отвечающих меньшему n). Очевидно, каждая точка CE окажется содержащейся в одном из таких квадратов.

Прим. ред.

наибольший (наименьший) предел последовательности измеримых функций представляет измеримую функцию (том I, nn° 83, 84).

Далее, непрерывные функции, функции, интегрируемые в смысле Riemann'а, производные и обобщенные производные непрерывных функций — суть измеримые функции (том I, nn° 82, 261, 267).

80. Общее свойство измеримых функций. *Если конечная функция $f(x, y, \ldots)$ измерима в ограниченной совокупности F, то каково бы ни было положительное число ω, можно выделить из F часть ее с мерой $< \omega$ так, чтобы вдоль остальной части функция f была непрерывна* *).

Так как доказательство в случае многих переменных проводится так же, как и в случае одной переменной, мы, для простоты, ограничимся последним случаем.

Допустим, что совокупность F представляет собою промежуток (a, b), ибо другие случаи сведутся к этому, если рассмотреть вспомогательную функцию, равную f в F и 0 вне F.

Если функция f принимает лишь два значения: l в совокупности E и 0 в совокупности CE, то разложим E, согласно n° 77 тома I,

$$E = \mathcal{E} + e' - e'',$$

предполагая, что совокупности e', e'' имеют меры $< \frac{\omega}{2}$. Исключив из системы промежутков $\mathcal{E}$ их концы и точки e'', а из дополнительной системы промежутков $C\mathcal{E}$ точки e', получим совокупность, вдоль которой функция f непрерывна.

Далее, если функция f принимает конечное число значений $l_1, l_2, \ldots, l_k$, соответственно, в совокупностях $E_1, E_2, \ldots, E_k$, то, вводя функцию f_i $(i = 1, \ldots, k)$, равную l_i в E_i и 0 в CE_i, будем иметь

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_k,$$

что приводит к уже рассмотренному случаю.

Наконец, пусть f будет произвольная конечная измеримая функция Определим функцию f_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, полагая $f_n = -n$, если $f < -n$, $f_n = n$, если $f \geqslant n$, $f_n = \frac{\nu}{n}$, если $\frac{\nu}{n} \leqslant f < \frac{\nu + 1}{n}$ $(\nu = -n^2, -n^2 + 1, \ldots, 0, 1, \ldots, n^2 - 1)$. Тогда, очевидно,

$$f = \lim f_n.$$

В силу уже доказанного, а также на основании теоремы n° 85 тома I, каковы бы ни были два положительных числа ε и δ, можно найти такое n и выделить из промежутка F совокупность e меры $< \delta$ так, чтобы вдоль остальной части функция f_n была непрерывна и отличалась от f меньше, чем на ε. Тогда колебание функции f в каждой точке совокупности $F-e$ (вдоль этой совокупности) не может превзойти — 2ε. Возьмем теперь две, последовательности стремящихся к нулю положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$

*) В оригинале помещена менее общая теорема. Приведенное предложение принадлежит акад. Н. Н. Лузину.

Прим. ред.

$\varepsilon_n, \ldots$ и $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, выбирая вторую из них так, чтобы ряд $\sum_1^\infty \delta_i$ сходился. Каждой паре ε_i, δ_i будет соответствовать число n_i и совокупность e_i меры $< \delta_i$. Пусть k настолько велико, что $\sum_{i=k}^\infty \delta_i < \omega$; если исключить из F совокупность $E = \sum_{i=k}^\infty e_i$ с мерой $< \omega$, то в каждой точке оставшейся совокупности $F - E$ колебание функции f (вдоль этой совокупности) будет равно нулю, т. е. функция f будет непрерывна.

Обратно, если конечная функция f в измеримой совокупности F обладает указанным в теореме свойством, то она измерима в F. В самом деле, тогда нетрудно представить совокупность F в виде суммы исчислимого множества совокупностей, вдоль каждой из которых функция непрерывна и, следовательно, измерима, да еще, быть может, некоторой совокупности меры нуль.

§ 3. Кратные интегралы Lebesgue'а

81. Интегралы от ограниченных функций. Они определяются так же, как и простые интегралы, без какого-либо изменения в рассуждениях (том I, n⁰ 259).

Пусть $x, y, \ldots$ будут координаты точки P в пространстве нескольких измерений, $f(x, y, \ldots)$ или, короче, $f(P)$ — ограниченная и измеримая функция в ограниченной и измеримой совокупности E. Далее, пусть μ и M будут точные нижняя и верхняя границы функции f, A и B — два постоянных числа, из которых $A \leqslant \mu$, а $B > M$. Разложим промежуток (A, B) с помощью точек $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ и положим $t_0 = A$, $t_n = B$. Обозначим через e_i меру совокупности $E(t_{i-1} \leqslant f < t_i)$, содержащейся в E. Наконец, составим две суммы

$$S = \sum_{i=1}^n e_i t_i, \quad s = \sum_{i=1}^n e_i t_{i-1}.$$

Эти две суммы стремятся к общему пределу, не зависящему от способа подразделения промежутка (A, B), если все разности $t_i - t_{i-1}$ стремятся к 0. Этот предел есть интеграл Lebesgue'а; мы его будем обозначать через

$$\int_E f(P)\, dP.$$

Число измерений совокупности E (или число координат $x, y, \ldots$ точки P) есть *порядок кратности* интеграла.

Этот интеграл обладает следующими свойствами.

I. *Если функция f измерима в E и ограниченна числами μ и M, то интеграл f в E содержится между $\mu \cdot mE$ и $M \cdot mE$* ***(теорема о среднем)***.

II. *Если совокупность E является суммой конечного числа или исчислимого множества совокупностей E_1, $E_2, \ldots$, измеримых и не имеющих попарно общих точек, то интеграл в совокупности E есть сумма интегралов, распространенных на совокупности E_1, $E_2, \ldots$*

Это свойство выражают, говоря, что *интеграл, распространенный на измеримую совокупность, есть аддитивная функция от нее.*

III. *Если f есть сумма ограниченных измеримых функций f_1, $f_2, \ldots$, то интеграл от f есть сумма интегралов от f_1, $f_2, \ldots$*

IV. *Если через e обозначить произвольную измеримую часть E, то интеграл от f в e стремится к нулю вместе с мерой me.*

Это свойство выражают, говоря, что *интеграл есть абсолютно непрерывная функция от совокупности, на которую он распространен* (Vitali).

V. *Если последовательность измеримых функций f_1, $f_2, \ldots$, $f_n, \ldots$, ограниченных в их совокупности, стремится к предельной функции f, интеграл от f есть предел интеграла от f_n, когда n стремится к бесконечности.*

82. Интегралы от неограниченных функций. Суммируемые функции. 1°. Пусть сначала f будет ***не отрицательна.*** Предположим ее измеримой, но не ограниченной в измеримой совокупности E. Определим функцию f_n, положив ее равной f в каждой точке, в которой $f \leqslant n$, и равной n, если $f > n$. Интеграл от f в E, по определению, есть конечный или бесконечный предел интеграла от f_n, когда n стремится к бесконечности.

Если этот интеграл конечен, то функция f суммируема в совокупности E. Если функция f не суммируема, то ее интеграл в E равен положительной бесконечности.

Суммируемая в совокупности E функция может обращатся в бесконечность разве лишь в совокупности точек меры 0 (ср. том I, n° 262). Но определение приложимо и к функциям, обращающимся в бесконечность в совокупности точек с отличной от нуля мерой.

Если функция f конечна или, по крайней мере, почти везде конечна, то непосредственно ясно, что определение интеграла не изменилось бы, если положить $f_n = 0$ (а не $= n$) там, где $f > n$.

Мы предполагали до сих пор совокупность E ограниченной. Если совокупность не ограничена, ее называют измеримой, если совокупность ее точек, координаты которых не превосходят любого постоянного числа, измерима. В этом случае интеграл от f в E есть предел (конечный или нет) интеграла от f в ограниченной измеримой совокупности, которая постепенно охватывает все точки E. Если этот предел конечен, функция называется суммируемой в неограниченной совокупности E.

Все эти определения распространяются и на неотрицательные функции простой переменой знака.

2°. Рассмотрим теперь функцию f ***произвольного знака***; она является разностью двух неотрицательных функций f_1 и f_2, если положить $f_1 = f$ и $f_2 = 0$, когда $f \geqslant 0$ и $f_1 = 0$, $f_2 = -f$, когда $f < 0$.

Функция f называется *суммируемой* в совокупности E, ограниченной или нет, если обе функции f_1, f_2 суммируемы в E и тогда интеграл f есть, по определению, разность интегралов от f_1 и f_2.

Если функция f не является разностью двух суммируемых функций, мы не приписываем никакого смысла ее интегралу.

Замечания. Простой переход к пределу непосредственно показывает, что свойства II, III предшествующего n^0 имеют место и для интегралов от неограниченных суммируемых функций.

Свойство IV *абсолютной непрерывности* также распространяется на эти интегралы. Доказательства — те же, что и для случая одной переменной (см. том I, n^0 263).

§ 4. Неопределенный интеграл. Его производная.

83. Функции от измеримой совокупности. Пусть $f(P)$ будет суммируемая функция в данной совокупности E, затем пусть e означает переменную измеримую совокупность. Если Ee есть совокупность точек, общих E и e, мы можем положить

$$F(e) = \int_{Ee} f(P)\, dP,$$

ибо рассмотрение этого интеграла связывает число $F(e)$ с совокупностью e. Это соответствие определяет то, что Lebesgue называет *функцией от измеримой совокупности*.

Когда функция f определена лишь в совокупности E, мы условимся определять f и повсюду вне E, полагая ее там равной 0. При этом условии упомянутый интеграл может быть переписан просто в виде

$$F(e) = \int_{e} f(P)\, dP.$$

Функция совокупности $F(e)$, которую интеграл позволяет связать таким образом с функцией f, есть *неопределенный интеграл* от f (Lebesgue).

Эта функция совокупности обладает следующими основными свойствами, которые мы установили в предшествующем параграфе:

1^0. *Она абсолютно непрерывна*, т. е. $F(e)$ бесконечно мала одновременно с me.

2^0. *Она аддитивна*, т. е. если дана конечная или бесконечная последовательность e_1, $e_2, \ldots$ совокупностей без общих точек, то

$$F(e_1) + F(e_2) + \ldots = F(e_1 + e_2 + \ldots).$$

Предмет настоящего параграфа — это установить, что указанные два свойства неопределенного интеграла *его характеризуют*.

Теория, которую мы изложим, приложима к совокупностям любого числа измерений *). Но для определенности мы будем вести рассуждения применительно к совокупностям двух измерений. Распространение на общий случай производится легко.

84. Производная (в узком смысле) аддитивной и абсолютно непрерывной функции от совокупности. Если дана функция $F(e)$ от (плоской) совокупности, мы будем называть п р о и з в о д н о й этой функции в точке P предел (если он существует) отношения $F(\gamma) : m\gamma$ значения функции $F(\gamma)$ к мере круга γ с центром в P, когда радиус круга стремится

*) В частности, и для линейных совокупностей, что впрочем, вытекает из теоремы n^0 279 тома I.

к нулю. Если этот предел не существует, то наибольший и наименьший пределы упомянутого отношения рассматриваются как *верхняя и нижняя* (обобщенные) *производные* функции F в точке P. Мы будем их обозначать соответственно через $\overline{D}F$ и $\underline{D}F$. Если нет надобности их различать, мы будем пользоваться и символом DF.

Эти обобщенные производные измеримы. На самом деле, рассмотрим, для определенности, верхнюю производную. Пусть φ (P, α, β) будет минимум отношения $F(\gamma) : m\gamma$, когда радиус круга γ (с центром в P) содержится между α и β. Это есть непрерывная функция от α и β, и верхняя производная является ее пределом, когда сначала α, а затем β стремится к нулю.

Свойства обобщенных производных функций от одной переменной не распространяются на случай совокупностей нескольких измерений. Обобщение становится возможным лишь при ограничении класса изучаемых функций, которое мы и установили, рассматривая лишь абсолютно непрерывные и аддитивные функции.

Для изложения этой теориии удобно предварительно установить одну основную теорему геометрического характера, принадлежащую G. Vitali.

85. Теорема Vitali. *Предположим, что даны измеримая совокупность E (ограниченная или нет) и такое семейство $\mathfrak{F}$ кругов *), что каждая точка совокупности является центром бесконечного множества кругов этого семейства с сколь угодно малым радиусом. Тогда можно выделить из этого семейства конечное или исчислимое множество кругов без общих точек, которые покрывают всю совокупность E, с точностью до совокупности точек с мерой нуль, и сумма мер которых превосходит mE меньше, чем на произвольно малую величину ε.*

Заключим E в систему A взаимно не налегающих квадратов так, чтобы каждая точка E содержалась в н у т р и A в узком смысле и чтобы было $mA < mE + \varepsilon$.

Исключим затем из семейства $\mathfrak{F}$ все круги, выходящие за пределы A. Пусть $\mathfrak{F}_1$ будет система оставшихся кругов; она обладает по *отношению* к E теми же свойствами, что и $\mathfrak{F}$.

Мы прежде всего покажем, что *с помощью ограниченного числа кругов семейства $\mathfrak{F}_1$, не касающихся друг друга, можно покрыть часть E с мерой, большей чем k (mE), где k есть некоторый постоянный коэффициент, меньший чем $\frac{1}{9}$*.

С этой целью рассмотрим последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ положительных чисел, стремящихся к нулю, и обозначим через E_n совокупность точек E, которые служат центрами для кругов семейства $\mathfrak{F}_1$ радиуса $> \varepsilon_n$. Когда n стремится к бесконечности, $m_i E_n$ стремится к mE **); следова-

---

*) Круги должны быть замещены сферами или гипер-сферами при переходе к совокупностям с большим двух числом измерений, и промежутком — если речь идет о линейной совокупности. Граница, которую можно установить для коэффициента k, фигурирующего в доказательстве, зависит от этих предположений.

**) В самом деле, очевидно, $m_e E_n \leqslant m_e E$, так что, с возрастанием n, $m_e E_n$ стремится к пределу $\mu \leqslant m_e E$. Взяв произвольное положительное число σ, мы можем заключить E_n в систему прямоугольников D_n так, чтобы D_{n-1} содержалось в D_n

тельно, можно взять n достаточно большим для того, чтобы разность между этими величинами была $< \varepsilon$. Если совокупность E_n не ограничена, то мы ограничим ее таким образом, чтобы это условие все же выполнялось.

Но, если допустить взаимное налегание кругов, совокупность E_n (по предположению, ограниченная) может быть целиком покрыта ограниченным числом кругов радиуса $> \varepsilon_n$. Для достижения этого достаточно покрыть E_n сетью квадратов, с диагоналями $< \varepsilon_n$, выбрать в каждом квадрате, содержащем вообще точки E_n, по одной такой точке и провести один из кругов с центром в этой точке и радиуса $> \varepsilon_n$. Всего получится ограниченное число кругов.

Так как эти круги покрывают всю совокупность E_n, то сумма их мер $> mE_n$; но они при этом могут и взаимно налегать. Для устранения этого сначала опустим все круги, встречающие наибольший из неизолированных кругов, затем те, которые остаются неизолированными после первой операции, и так далее — до тех пор, пока останутся лишь изолированные круги. Сохраненные круги покрывают по меньшей мере $\frac{1}{9}$ площади, первоначально покрытой, следовательно, сумма их мер $> \frac{1}{9} m_e E_n$, и подавно $> \frac{1}{9} mE - \varepsilon$.

Часть E, не покрытая этими кругами, целиком содержится в части A, лежащей вне сохраненных кругов; ее мера поэтому меньше $mA - \frac{1}{9} mE + \varepsilon$ и наверное меньше $\frac{8}{9} mE + 2\varepsilon$; в конце концов мы видим, что мера части E, покрытой упомянутыми кругами, превосходит $\frac{1}{9} mE - 2\varepsilon$, что и доказывает наше предварительное утверждение.

Доказательство теоремы Vitali получается путем повторного применения того же процесса.

Пусть e_1 будет часть E, покрытая кругами после предшествующей операции.

Освободим $\mathfrak{F}_1$ от всех кругов, встречающих те круги, которые были выделены для покрытия e_1 (чем не нарушаются свойства семейства кругов по отношению к остающейся совокупности $E - e_1$) и пусть $\mathfrak{F}_2$ будет семейство сохраненных кругов. Мы можем теперь покрыть часть e_2 совокупности $E - e_1$ с мерой $> k\,m(E - e_1)$ ограниченным же числом кругов из $\mathfrak{F}_2$.

Мы освободим затем $\mathfrak{F}_2$ от всех кругов, встречающих те, которыми мы только что воспользовались, и продолжаем так поступать, в случае необходимости, до бесконечности. Таким образом мы действительно произведем выбор, требуемый теоремой Vitali, ибо после h операций мы будем иметь

$$me_h > k(mE - me_1 - me_2 - \ldots - me_{h-1}).$$

и выполнялось неравенство $mD_n < m_e E_n + \sigma$. Обозначая через D сумму всех D_n и переходя в этом неравенстве к пределу, получим $mD \leqslant \mu + \sigma$; в то же время E содержится в D, так что $m_e E \leqslant mD$. Отсюда $m_e E - \mu \leqslant \sigma$ и $\mu = m_e E$.

Прим. ред.

Выражение в скобках не отрицательно, поэтому, если операции продолжаются безгранично, ряд $\sum me_h$ будет сходящимся, следовательно, me_h стремится к нулю и, в силу предшествующего неравенства, сумма $me_1 + me_2 \ldots + me_{h-1}$ стремится к mE.

Итак, в пределе совокупность E оказывается покрытой с точностью до совокупности с мерой нуль; кроме того, так как все использованные круги изолированы и содержатся в A, то сумма их мер $\leqslant mA$, следовательно, $< mE + \varepsilon$, что и завершает доказательство.

Замечание. Если какое-либо условие выполняется с точностью до совокупности точек меры 0, мы говорим, вместе с Lebesgue'ом, что оно почти выполняется. Таким образом, в настоящем случае можно сказать, что совокупность E почти покрыта. Подобно этому, если условие выполняется для всех точек некоторой совокупности E, исключая разве лишь совокупность точек меры 0, мы говорим, что оно выполняется почти везде в E.

86. Свойства обобщенных производных. 1^0. *Если аддитивная и абсолютно непрерывная функция совокупности, $F(e)$, имеет верхнюю (нижнюю) производную DF, положительную почти везде в совокупности e (с отличной от нуля мерой), то $F(e)$ положительна.*

Пусть ε будет не отрицательное число и e' — совокупность точек e, в которых $DF > \varepsilon$ С каждой из точек e' можно связать семейство кругов γ, сколь угодно малых, так, чтобы всегда было

$$F(\gamma) > \varepsilon \cdot m\gamma.$$

Но, по предшествующей теореме, можно почти всю совокупность e' покрыть с помощью взаимно не налегающих кругов γ, сумма мер которых сколь угодно близка к me'.

Складывая неравенства, аналогичные предшествующему и соответствующие всем этим кругам γ, мы получим отсюда, переходя к пределу и пользуясь абсолютной непрерывностью функции F,

$$F(e') \geqslant \varepsilon(me').$$

Пусть $\varepsilon = 0$; мы видим, что $F(e'') \geqslant 0$ в каждой части e'' совокупности e, ибо $DF > 0$ в совокупности e', состоящей почти из всех точек e'', и $F(e'') = F(e') \geqslant 0$.

Взяв теперь ε положительным, но настолько малым, чтобы DF была $> \varepsilon$ в части e' совокупности e с отличной от нуля мерой, имеем

$$F(e) = F(e') + F(e - e') \geqslant F(e') \geqslant \varepsilon \cdot me' > 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

2^0. *При тех же условиях, если $DF < 0$ почти везде в e, то $F(e) < 0$.*

3^0. *Если $DF = 0$ почти везде в e, $F(e) = 0$.*

Действительно, если ε есть произвольная постоянная, отличная от нуля, то функция $F(e) + \varepsilon e$, имеющая почти везде производную ε, в силу предшествующих предложений, имеет тот же знак, что и ε; в виду произвольности ε, отсюда следует, что $F(e) = 0$.

4°. *Если $F(e')=0$ в каждой части e' некоторой совокупности e, то $DF=0$ почти везде в e.*

В самом деле, в противном случае, в e должна была бы существовать совокупность e' с отличной от нуля мерой, в которой DF имела бы один и тот же знак, но тогда $F(e')$ не могла бы быть нулем.

5°. *Пусть даны две аддитивные и абсолютно непрерывные функции F и Φ; если их верхние (нижние) производные почти везде в e удовлетворяют неравенству $DF \geqslant D\Phi$ или $DF \leqslant D\Phi$, то тогда, соответственно,*

$$F(e) \geqslant \Phi(e) \text{ или } F(e) \leqslant \Phi(e).$$

Для доказательстаа первого соотношения достаточно заметить, что $\bar{D}(F-\Phi)$ не может быть меньше ни $\bar{D}F-\bar{D}\Phi$, ни $\underline{D}F-\underline{D}\Phi$ *) и следовательно, почти везде положительна или равна нулю; отсюда и $F-\Phi \geqslant 0$. Второе соотношение приводится к первому путем изменения знаков.

6°. *При тех же условиях, если $DF=D\Phi$ почти везде, имеем $F(e)=\Phi(e)$.*

Действительно, при любом $\varepsilon \gtrless 0$, функция $(F(e)+\varepsilon e)-\Phi(e)$ имеет тот же знак, что и ε, в силу теоремы 5°; отсюда $F(e)-\Phi(e)=0$.

87. Определение производных (в широком смысле). В более широком смысле, обобщенные производные функции F от совокупности в точке P определяются, как наибольший и наименьший предел отношения $F(\omega):m\omega$, где ω означает совокупность с мерой, стремящейся к нулю, но *подчиненную условию — принадлежать к некоторому регулярному семейству*. По определению, для этого нужно, чтобы отношение меры ω к мере наименьшего содержащего ω круга γ с центром в P не стремилось к нулю вместе с $m\omega$, если ω принадлежит к указанному семейству.

Мы увидим ниже, что выбор семейства совокупности ω может повлиять на значение производной разве лишь в совокупности точек меры нуль. Отсюда уже будет следовать, что все свойства предшествующего n° (равно как и измеримость) остаются в силе и для производной в широком смысле.

Это заключение имеет своим основанием следующее замечание, непосредственно вытекающее из условия регулярности семейства совокупностей ω; *если производная положительной функции равна нулю при узком определении, то она остается нулем и при широком определении.*

Действительно, если $\dfrac{F(\gamma)}{m\gamma}$ стремится к нулю, а $\dfrac{m\gamma}{m\omega}$ остается ограниченным, то и $\dfrac{F(\gamma)}{m\omega}=\dfrac{F(\gamma)}{m\gamma}\cdot\dfrac{m\gamma}{m\omega}$ стремится к нулю, а следовательно и подавно $\dfrac{F(\omega)}{m\omega}$, ибо $F(\omega)\leqslant F(\gamma)$.

Важность этого замечания тотчас же обнаружится при изучении одной особенно простой функции от совокупности, с которой связано определение *плотности* (Lebesgue).

88. Плотность совокупности E в точке. Пусть E будет некоторая постоянная совокупность, e — переменная совокупность, Ee — совокупность общих им точек. Рассмотрим функцию совокупности

$$F(e)=m(Ee).$$

*) Ср. прим. ред. к n° 271 тома I.

Обобщенные производные от $F(e)$ в точке P называются, соответственно, ***верхней и нижней плотностью*** совокупности E в точке P. Если они равны, то общее их значение есть плотность в точке P, которая в этом случае является *определенной*. Эти числа мы будем изображать, соответственно, через $\overline{D}E$, $\underline{D}E$ и DE.

Плотность, подобно производной, может быть определена *в узком или широком смысле*. В узком смысле, плотность в точке P есть предел отношения меры части E, содержащейся в круге γ с центром в P, к мере γ, когда радиус круга стремится к нулю. К общему определению мы перейдем, если заместим семейство кругов γ каким-либо регулярным семейством совокупностей ω (n^0 87). Таким образом, значение производной или обобщенной производной может изменяться лишь в пределах от 0 до 1.

Рассмотрим две дополнительных совокупности E и CE. Между их плотностями существует основное соотношение. Именно, какова бы ни была совокупность ω, всегда

$$\frac{m(E\omega)}{m\omega}+\frac{m(CE\cdot\omega)}{m\omega}=1.$$

Таким образом, если первое отношение стремится к своему наибольшему пределу, то второе стремится к наименьшему пределу, и обратно. Следовательно,

$$\overline{D}E+\underline{D}CE=\underline{D}E+\overline{D}CE=1.$$

Итак, если в какой-либо точке плотность некоторой совокупности является определенной, то определенной будет и плотность дополнительной совокупности, причем обе плотности взаимно дополняют до единицы.

В силу замечания, которым заканчивается предшествующий n^0, *если плотность равна нулю при узком определении, то она равна нулю и при обобщенном определении*; следовательно, *то же имеет место, если плотность равна единице* (для доказательства достаточно ввести в рассмотрение дополнительную совокупность).

Наконец, мы имеем еще следующее основное предложение (которое, в виду предшествующего, достаточно доказать для плотности в узком смысле):

Плотность (в широком смысле) совокупности E равна 1 почти везде в E и 0 почти везде вне E.

Действительно, так как функция $m(e\cdot CE)$ от переменной совокупности e равна нулю в каждой части e совокупности E, то ее производная (в узком смысле) равна нулю почти везде в E (n^0 86, 4^0). Другими словами, почти везде в E плотность CE равна нулю, следовательно, плотность E равна единице.

89. Производная неопределенного интеграла. *Неопределенный интеграл суммируемой функции $f(P)$ почти везде имеет производной $f(P)$.*

Достаточно рассмотреть неопределенный интеграл от неотрицательной функции

$$F(e)=\int_e f(P)\,dP.$$

Пусть ε будет произвольное положительное число; зададим себе ряд чисел $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots, k\varepsilon, \ldots$ и пусть e_k будет совокупность точек, в которых $k\varepsilon \leqslant f < (k+1)\varepsilon$.

Можно представить $F(e)$ в виде суммы двух функций совокупности e:

$$F(e) = F(e e_k) + F(e \cdot Ce_k).$$

Но $F(e \cdot Ce_k)$ будет нулем в каждой части e совокупности e_k, так что ее производная в узком смысле (n⁰ 86), а следовательно и производная в широком смысле (n⁰ 87) равна нулю почти везде в e_k. Итак, почти везде в e_k $DF(e) = DF(ee_k)$.

Но, по теореме о среднем (n⁰ 81)

$$F(ee_k) = (k + \theta)\varepsilon \cdot m(ee_k), \quad (0 < \theta < 1)$$

так что в каждой точке, в которой плотность e_k есть единица, т. е. почти везде в e_k, верхняя и нижняя производные функции $F(ee_k)$ имеют вид $(k+\theta')\varepsilon$ $(0 \leqslant \theta' \leqslant 1)$ и отличаются от f меньше, чем на ε.

Так как каждая точка P принадлежит одной из совокупностей e_k, отсюда следует, что функция F имеет почти везде обобщенные производные, разнящиеся от f меньше, чем на ε. Заставляя теперь ε стремиться к нулю, мы получим доказательство теоремы.

Замечание. Для предшествующей теоремы можно получить следующее обобщение, которое часто оказывается полезным:

Если $f(P)$ суммируется, то выражение $|f(P) - c|$ является почти везде производной от его неопределенного интеграла, какова бы ни была произвольная постоянная c (Lebesgue).

В самом деле, если c дано, эта теорема приводится к предшествующей. Следовательно, предложение верно для рациональных значений c, ибо совокупность их исчислима *). Но мы покажем, что, если в некоторой точка P выражение $|f(P) - c|$ является производной от своего неопределенного интеграла при любом рациональном c, то это будет иметь место и при любом иррациональном c.

С этой целью, предположим, что рациональное c стремится к иррациональному γ; имеем

$$|f(P) - \gamma| = |f(P) - c| + \theta(c - \gamma) \quad (-1 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

Следовательно,

$$\int |f(P) - \gamma|\, dP = \int |f(P) - c|\, dP + \theta'(c - \gamma) \int dP$$

и

$$\underline{\overline{D}} \int |f(P) - \gamma|\, dP = |f(P) - c| + \theta''(c - \gamma).$$

Переходя справа к пределу при $c = \gamma$, убеждаемся, что обе обобщенные производные имеют одно и то же значение $|f(P) - \gamma|$.

---

*) При каждом рациональном $c = c_n$ выражение $|f(P) - c|$ является производной от своего неопределенного интеграла повсюду, исключая разве лишь совокупность E_n меры нулю. Вне совокупности $\sum E_n$, также с мерой нуль, имеет место доказываемое утверждение для любого рационального c.

Прим. ред.

90. Теорема I. *Аддитивная и абсолютно непрерывная функция совокупности есть разность двух неотрицательных функций того же типа.*

Рассмотрим функцию $F(e)$ и одну из ее обобщенных производных (в узком смысле) DE. Пусть E_1 будет совокупность точек, в которых $DF \geqslant 0$, E_2 — совокупность точек, в которых $DF < 0$.

В виду аддитивности функции, она следующим образом представляется в виде суммы двух функций совокупности e:

$$F(e) = F(eE_1) + F(eE_2).$$

Но, так как функция $F(eE_2)$ равна нулю в каждой части e совокупности E_1, ее производная в E_1 почти везде есть нуль (n^0 86) и обобщенная производная $F(e)$ (неотрицательная) почти везде в E_1 совпадает с одноименной производной $F(eE_1)$. Таким образом, $F(eE_1)$ почти везде в E_1 имеет неотрицательную обобщенную производную, а в E_2 эта производная почти везде есть нуль, так что $F(eE_1)$ представляет собою неотрицательную функцию (n^0 86). Подобно этому, $F(eE_2)$ оказывается неположительной функцией, что и доказывает теорему.

91. Теорема II. *Аддитивная и абсолютно непрерывная функция совокупности имеет почти везде конечную и определенную производную и является неопределенным интегралом от этой производной.*

В силу предшествующей теоремы достаточно рассмотреть неотрицательную функцию $F(e)$.

Пусть DF будет какая-либо из ее обобщенных производных. Я утверждаю, что она почти везда конечна и суммируема. В самом деле, определим $(DF)_n$, положив ее равной DF или n в зависимости от того, будет ли $DF \leqslant n$ или $> n$. Следует доказать, что интеграл от $(DF)_n$ будет ограничен постоянным числом, не зависящим от n. Но это достаточно очевидно, так как этот интеграл, имея почти везде производную $(DF)_n$, не превосходящую аналогичной производной DF функции F, сам не может превзойти F (n^0 86).

Далее, имеем $F = \int DF\, dP$, так как обе части имеют почти везде ту же производную (n^0 99).

Таким образом мы доказали тождественность аддитивных и абсолютно непрерывных функций совокупности и неопределенных интегралов.

§ 5. Приведение двойных интегралов *).

92. Интеграл ограниченной функции в прямоугольной области. Пусть $f(x, y)$ или $f(P)$ будет функция от двух переменных, измеримая и ограниченная в прямоугольной области R. Предположим (исключительно для упрощения письма), что этот прямоугольник имеет меру 1 и ограничен прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Теорема. Функция $f(x, y)$ является измеримой (линейно) функцией от одной переменной y, при каждом значении x между 0 и 1, исключая

*) Вся эта теория сама собою распространяется на интегралы любого порядка кратности.

разве лишь значения, образующие совокупность меры нуль. Если отвлечься от этих значений, интеграл

$$\int_0^1 f(x, y)\, dy$$

есть измеримая функция от x и

$$\int_R f(P)\, dP = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy.$$

Другими словами, второй член вычисляется путем замены $\int f\, dy$, например, нулем для тех значений x, для которых этот интеграл не имеет смысла; эти значения образуют линейную совокупность меры нуль.

Мы докажем эту теорему: 1) для функции, принимающей лишь два значения, 2) для функции, принимающей конечное число значений, и 3) для произвольной функции.

Первый случай. Пусть прежде всего $\theta(x, y)$ или $\theta(P)$ будет функция, принимающая в прямоугольнике R лишь два значения; всегда можно допустить, что этими значениями будут 0 и 1 *). Предположим, что θ равна 1 в E и 0 в дополнительной (относительно R) совокупности CE.

Заключим E в исчислимое множество взаимно не налегающих прямоугольников $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, содержащихся в R. Обозначим через $\Theta_n(x, y)$ функцию, равную 0 вне α_n и на контурах элементов α с меньшими значками, и 1 в прочих точках α_n. Если α_n означает и меру прямоугольника α_n, будем иметь

$$\alpha_n = \int_0^1 dx \int_0^1 \Theta_n(x, y)\, dy.$$

Просуммируем эти равенства по n; так как функция $\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_n$, равная либо 0, либо 1, существенно ограничена, каковы бы ни были x, y, n, и ее интеграл по y также ограничен, то можно суммирование произвести под знаками интегралов (том I, n^0 264, I). Мы получим

$$\sum \alpha_n = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\sum \Theta_n\right) dy.$$

Заставим теперь меру $\sum \alpha_n$ системы α стремиться, убывая, к мере mE, заменяя всякий раз одну систему прямоугольников другой, в ней содержащейся и с меньшей мерой. Функция $\sum \Theta_n$, которая равна 1 в точках

---

*) Действительно, если f принимает значения l_1 и l_2, то функция

$$\frac{f - l_1}{l_2 - l_1}$$

принимает лишь значения 0 и 1; если же теорема верна для последней функции, то она верна и для исходной.

системы α и 0 вне ее (и, следовательно, всегда $\geqslant \theta$), будет в каждой точке, не убывая, стремиться к некоторому пределу Θ', также равному либо 0, либо 1, но всегда $\geqslant \theta$. Так как функции под знаками интегралов в последнем равенстве существенно ограничены, то можно в нем перейти к пределу под знаком одного и другого интеграла, что дает нам

$$mE = \int_0^1 dx \int_0^1 \Theta' \, dy, \quad (\Theta' \geqslant \theta).$$

Аналогично можно доказать, что существует такая функция Θ'', принимающая также лишь значения 0 и 1, что

$$m(CE) = \int_0^1 dx \int_0^1 (1 - \Theta'') \, dy, \quad (1 - \Theta'' \geqslant 1 - \theta).$$

Складывая эти два равенства и отнимая от обеих частей по единице, получим

$$0 = \int_0^1 dx \int_0^1 (\Theta' - \Theta'') \, dy \quad \Theta' \geqslant \theta \geqslant \Theta''.$$

Таким образом, 1) существенно не отрицательная функция от x, $\int (\Theta' - \Theta'') \, dy$, имея равный нулю интеграл, сама должна быть равна нулю везде, исключая разве лишь совокупность X значений x меры нуль; 2) при значении x, не принадлежащем X, существенно не отрицательная функция от y, $\Theta' - \Theta''$, имея равный нулю интеграл, сама почти везде равна нулю, так что почти везде $\Theta' = \Theta'' = \theta$ и θ является измеримой функцией от y, вместе с Θ' и Θ'' (которые измеримы B).

Отвлекаясь от значений x, содержащихся в совокупности X меры нуль, имеем

$$\int_0^1 \Theta' \, dy = \int_0^1 \theta \, dy;$$

пренебрегая же этими значениями x, при интегрировании, получим

$$mE = \int_0^1 dx \int_0^1 \Theta' \, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \theta \, dy$$

Но mE равна $\int_R \theta(P) \, dP$ по определению, что и устанавливает в рассматриваемом случае доказываемую формулу

$$\int_R \theta(P) \, dP = \int_0^1 dx \int_0^1 \theta(x, y) \, dy.$$

Второй случай. Рассмотрим функцию $f(x, y)$, принимающую лишь конечное число значений $l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots, l_n$ в прямоугольнике R. Можно тогда рассматривать f, как сумму n функций $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots, f_n$, из которых каждая принимает лишь два значения, именно, f_k — значение 0 и l_k. Теорема верна для каждой функции f_k, следовательно, она будет верна и для их суммы.

Третий случай. Рассмотрим, наконец, общий случай, когда функция $f(x, y)$ есть какая-либо ограниченная измеримая функция. Мы можем построить измеримую функцию $F(x, y)$, принимающую лишь ограниченное число значений и отличающуюся от f меньше, чем на ε. Для этого достаточно, взяв ряд возрастающих чисел $\ldots, l_i, l_{i+1}, \ldots$, отличающихся последовательно друг от друга меньше чем на ε, положить $F = l_i$ в совокупности $E(l_i \leqslant f < l_{i+1})$, при каждом i.

Тогда, согласно предшествующему,

$$\int_R F(P)\,dP = \int_0^1 dx \int_0^1 F(x, y)\,dy.$$

Пусть ε теперь пробегает последовательность значений, стремящихся к нулю; функция F будет равномерно стремиться к f, так что в первой части двойной интеграл будет иметь пределом двойной же интеграл от $f(P)\,dP$.

Во второй же части, при каждом ε, $F(x\ y)$ будет измеримой функцией от y, исключая разве лишь совокупность E_ε значений x меры нуль; следовательно, каково бы ни было ε, $F(x, y)$ будет измеримой функцией от y, исключая совокупность $E = \sum E_\varepsilon$ значений x меры нуль. В совокупности CE, в виду равномерного приближения F к f, без труда получим

$$\lim \int_{CE} dx \int_0^1 F(x, y)\,dy = \int_{CE} dx \int_0^1 f(x, y)\,dy.$$

Наконец, пренебрегая этой совокупностью E меры нуль, можем написать

$$\int_R f(P)\,dP = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\,dy.$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме:

93. Теорема Lebesgue'a—Fubini. *Если $f(x, y) = f(P)$ есть измеримая (поверхностно) и ограниченная функция в ограниченной совокупности E, то*

$$\int_E f(P)\,dP = \int dx \int f(x, y)\,dy = \int dy \int f(x, y)\,dx,$$

причем внутренние интегралы берутся соответственно, по сечениям E прямыми $X = x$ и $Y = y$.

Как и всегда, мы пренебрегаем здесь тем обстоятельством, что для некоторых сечений, соответствующих совокупностям значений x или y меры нуль, внутренние интегралы могут не иметь смысла. Если угодно, можно положить функцию f в точках этих сечений равной нулю, что изменит значения этой функции в общем лишь в плоской совокупности также меры нуль.

Теорема эта приводится к предыдущей. Предположим E содержащейся в прямоугольнике R, ограниченном прямыми $X=a$, $X=b$, $Y=a$, $Y=b$ и пусть $f_1=f$ в E и $f_1=0$ вне E. Тогда, на основании предыдущего, имеем

$$\int\limits_R f_1(P)\,dP=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f_1(x,\ y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_c^b f_1(x,\ y)\,dx,$$

что равносильно доказываемой формуле.

Перейдем теперь к рассмотрению неограниченных функций и совокупностей.

94. Теорема. *Если неотрицательная функция $f(x,\ y)$ измерима (поверхностно) в совокупности E (ограниченной или нет), то всегда*

$$\int\limits_E f(P)\,dP=\int dx\int f\,dy=\int dy\int f\,dx.$$

Внутренние интегралы взяты по сечениям области E параллелями осям. Они могут не иметь смысла для совокупностей значений x и y меры нуль, которыми мы пренебрегаем.

Равенства имеют место всегда в том смысле, что если один из трех интегралов конечен, то все три конечны и равны, если же один из них бесконечен, то все три бесконечны.

Для доказательства нужно было бы буквально воспроизвести рассуждения n⁰ 41, опуская лишь условия существования F, которое здесь выполняется, и заменяя теорему n⁰ 40, на которой основывалось доказательство, более общей теоремой III n⁰ 264 тома I.

Важно заметить, что последняя теорема имеет место и в том случае, если условия ее выполняются везде, исключая некоторую совокупность значений x меры нуль, которыми можно пренебречь.

95. Теорема Fubini. *Если функция $f(x,\ y)$ произвольного знака суммируема в совокупности E, то*

$$\int\limits_E f(P)\,dP=\int dx\int f\,dy=\int dy\int f\,dx.$$

Эта теорема приводится к предыдущей, ибо каждая суммируемая функция f есть разность двух неубывающих суммируемых функций f_1 и f_2.

Каждая из этих последних удовлетворяет условиям предыдущей теоремы; почленное вычитание дает нам доказываемую формулу.

Замечание. В равенствах, составляющих содержание предыдущей теоремы, существование первого члена влечет за собою существование двух других. Но легко видеть, что обратное не верно.

96. Частные производные от неопределенных интегралов. Пусть $f(x,\ y)$ будет суммируемая функция. Мы можем положить

$$F(x,\ y)=\int\limits_0^x dx\int\limits_0^y f\,dy=\int\limits_0^y dy\int\limits_0^x f\,dx,$$

изменяя, в случае надобности, f в точках совокупности с мерой нуль.

Функция $F(x,\ y)$ есть неопределенный интеграл от $f(x, y)$, выраженный с помощью переменных $x,\ y$.

Для каждого значения y мы имеем, почти для всех значений x,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^y f\,dy$$

и, для каждого значения x, почти для всех значений y,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^x f\,dx.$$

Совокупность всех исключительных точек (x, y), для которых первая (вторая) из этих формул не имеет места, измерима (поверхностно), ибо это есть совокупность точек, в которых хоть одна из разностей $\bar{D}_x F - \int_0^y f\,dy$, $D_x F - \int_0^y f\,dy$ поверхностно измеримых функций отлична от нуля. Следовательно, эта плоская совокупность имеет меру нуль.

Отбрасывая эту совокупность меры нуль, мы получим таким образом совокупность точек, в которых F дифференцируема как по отношению к x, так и по отношению y, причем производные выражаются двумя предшествующими формулами.

Дифференцируя теперь по отношению к y и к x, мы получим, аналогичным образом, что почти везде.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = f.$$

Эти результаты сами собою распространяются на интеграл n-ой кратности от суммируемой фукции f от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_0^{x_1} dx_1 \int_0^{x_2} dx_2 \ldots \int_0^{x_n} f\,dx_n.$$

Эта функция F *почти везде* обладает следующими свойствами: она имеет частные производные по каждой переменной; если взять от нее последовательно производную по нескольких различным переменным, то результат будет независим от порядка, в котором произведены дифференцирования, и получается путем отбрасывания во второй части предшествующего равенства всех интегрирований по тем переменным, по которым взяты производные (Lebesgue).

§ 6. Приложение к дифференцированию под знаком интеграла и к криволинейным интегралам.

97. Обобщение правила Leibnitz'a. Пусть $f(x, \alpha)$ будет суммируемая функция от x в промежутке (a, b), для каждого значения α между α_0 и α_1. Рассмотрим функцию от α, определяемую для этих значений α равенством

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx.$$

Относительно дифференцирования под знаком интеграла можно высказать следующую теорему:

Теорема. *Если*: 1) $f(x, \alpha)$ *есть абсолютно непрерывная функция от* α, *для каждого частного значения* x *между* a *и* b, 2) $f'_\alpha(x, \alpha)$ (*если пренебречь точками, в которых она не существует*) *поверхностно суммируема в прямоугольнике* R, *ограниченном прямыми* $x=a$, $x=b$, $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$, *тогда, почти для всех значений* α *между* α_0 *и* α_1,

$$\varphi'(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

В частности, это соотношение имеет место в каждой точке α, *в которой второй его член представляет производную от его же неопределенного интеграла.*

Заметим прежде всего, что $f(x, \alpha)$, в виду предположения об ее абсолютной непрерывности, есть по отношению к α неопределенный интеграл, так что при данном x производная f'_α существует почти для всех значений α. Так как эта производная предположена поверхностно измеримой, то совокупность точек (x, α), в которых она не существует, измерима и имеет меру нуль, ибо сечения ее прямыми, параллельными оси α, все имеют меру нуль.

Положим теперь

$$\psi(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

Между α_0 и α_1, функция $\psi(\alpha)$ может не иметь смысла разве лишь для совокупности значений α меры нуль, и, если пренебречь этими значениями, $\psi(\alpha)$ суммируема в промежутке (α_0, α_1). Произведем интегрирование между α_0 и α $(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1)$; изменив порядок интегрирований (n^0 95) и заметив, что абсолютно непрерывная функция f является неопределенным интегралом от f'_α по α, получим

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}\psi(\alpha)\,d\alpha=\int_a^b [f(x, \alpha)-f(x, \alpha_0)]\,dx=\varphi(\alpha)-\varphi(\alpha_0).$$

Итак, $\varphi'(\alpha)=\psi(\alpha)$ в каждой точке, в которой $\psi(\alpha)$ является производной от своего неопределенного интеграла, т. е. почти везде, что и доказывает предложение.

Замечание. Условие 1) предшествующей теоремы наверное выполняется, если f'_α везде в R конечна, ибо тогда f служит ее неопределенным интегралом (том I, n^0 271).

Далее, если условия теоремы выполнены, правило Leibnitz'а будет применимо для всех значений α, если интеграл $\psi(\alpha)$, к которому оно приводит, оказывается непрерывной функцией от α (ибо тогда функция ψ везде будет производной от своего неопределенного интеграла).

98. Обобщение формулы Green'а. Пусть P и Q будут две непрерывные функции от x и y. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy,$$

взятый по простому замкнутому контуру C, ограничивающему плоскую область D. Предположим для простоты, что этот контур пересекается прямой, параллельной оси x, в двух точках с абсциссами x_1 и x_2, а прямой параллельной оси y, в двух точках с ординатами y_1 и y_2.

Предположим, что внутри области D функция P будет абсолютно непрерывной функцией от y, при постоянном значении x, а функция Q будет абсолютно непрерывной функцией от x, при постоянном значении y; тогда P'_y и Q'_x существуют почти для всех значений, соответственно, y или x, если значение другой переменной дано, и имеют своими неопределенными интегралами, по отношению к этим переменным, соответственно, P и Q.

Предположим, что P'_y и Q'_x суммируемы в области D (в которой почти везде они существуют). Применяя к ним теорему Fubini (n^0 95), получим

$$\iint\limits_D P'_y\,dx\,dy = \int dx \int P'_y\,dy = \int [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\,dx = -\int\limits_C P\,dx$$

и, подобно этому,

$$\iint\limits_D Q'_x\,dx\,dy = \int dy \int Q'_x\,dx = \int [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)]\,dy = \int\limits_C Q\,dy$$

вычитая эти равенства почленно, придем к результату

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy.$$

Во втором члене мы пренебрегаем точками, в которых существуют не обе производные Q'_x, P'_y. Отсюда следующая теорема:

Теорема. *Формула Green'a, приводящая интеграл по контуру к двойному интегралу, имеет место, без всяких предположений о существовании и непрерывности производных, при наличии следующих условий:* 1) *функции P и Q непрерывны в области, ограниченной контуром,* 2) *P есть функция абсолютно непрерывная от y, а Q—абсолютно непрерывная функция от x,* 3) *P'_y и Q'_x суммируемы в области, ограниченной контуром, если пренебречь точками, в которых они не существуют.*

Следует заметить, что требование абсолютной непрерывности, наложенное на P и Q, само собою выполняется, если одна из обобщенных производных P по y и одна из обобщенных производных Q по x будут во всей области конечны, ибо тогда P и Q будут неопределенными интегралами от этих производных.

Предшествующая теорема непосредственно приводит к двум другим:

99. Теоремы о криволинейных интегралах. I. *Интеграл от $P dx + Q dy$, взятый по замкнутому контуру C, ограничивающему* *область D, будет нулем, если в этой области выполняются три условия, указанные в предшествующей теореме, и, сверх того, $P'_y = Q'_x$, по крайней мере, почти везде в D.*

II. *Если в области D выполнены все эти условия, то интеграл $P\,dx + Q\,dy$, взятый по любой спрямляемой кривой, проведенной в области D, оказывается зависящим лишь от своих пределов* (ср. n° 64).

ГЛАВА IV.

ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ. РЯДЫ ПОЛИНОМОВ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ.

§ 1. Приближенное представление непрерывных функций одной переменной с помощью полиномов.

100. Предварительные замечания. Задача о разложении функции $f(x)$ в ряд полиномов совпадает с задачей о приближенном и при том сколь угодно точном представлении ее с помощью полиномов, ибо, если полином $P_n(x)$, определенный для каждого n, стремится (или равномерно стремится) к $f(x)$, когда n бесконечно возрастает, то ряд

$$P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \ldots$$

сходится (или равномерно сходится) и имеет суммой $f(x)$.

Мы сначала рассмотрим именно задачу о приближенном представлении функций с помощью полиномов. Мы будем называть полиномы, служащие для этой цели, *приближенными полиномами*. Вспомним прежде всего один уже известный нам интеграл (том I, n° 247), который будет играть важную роль в нашем исследовании,

$$\int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^n \, dt = 2 \int_0^1 (1 - t^2)^n \, dt = k_n,$$

где k_n есть рациональное число (том I, n° 247)

$$k_n = 2 \frac{2 \cdot 4 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}.$$

Когда n стремится к бесконечности, асимптотическое выражение для k_n получается из формулы Wallis'а (том I, n° 248)

$$\frac{\pi}{2} = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+\theta}$$

откуда следует, что k_n содержится между $\sqrt{\dfrac{\pi}{n+1}}$ и $\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

Присовокупим еще одно замечание, которое нам понадобится. Выражение $(1 - t^2)^n$, где $0 < t < 1$, является бесконечно малым при бесконечно большом n, равно как и его производные. Но $D^r(1-t^2)^n$ *будет бесконечно малой порядка величины* $n^r(1 - t^2)^n$. Действительно, имеем

$$D(1 - t^2)^n = -2nt(1 - t^2)^{n-1}$$

и, применяя к вычислению $(r-1)$-ой производной отсюда правило Leibnitz'a,

$$D^r(1-t^2)^n = -2ntD^{r-1}(1-t^2)^{n-1} - 2(r-1)nD^{r-2}(1-t^2)^{n-1}.$$

На основании этого, если теорема верна для порядков $r-1$ и $r-2$, то она сохраняет силу и для порядка r; она является общей, ибо непосредственно проверяется ее справедливость для $r=0$ и $r=1$.

101. Определение приближенного полинома P_n. Пусть требуется найти в конечном промежутке (a, b) приближенное выражение для функции $f(x)$, *непрерывной в этом промежутке.*

Всегда можно предположить, что этот промежуток содержится внутри промежутка $(0, 1)$, т. е. что

$$0 < a < b < 1,$$

ибо достаточно подвергнуть переменную x линейному преобразованию, чтобы какой угодно конечный промежуток свести к упомянутому. Это преобразование заменяет один полином другим и вводит постоянных множителей при дифференцированиях, что не изменит наших заключений. Как мы покажем, приближенный полином для $f(x)$ определяется формулой

$$P_n = \frac{1}{k_n}\int_a^b f(u)\,[1-(u-x)^2]^n du. \tag{1}$$

Разлагая степень под знаком интеграла, мы непосредственно убеждаемся, что P_n есть полином степени $2n$ относительно x, коэффициентами которого служат определенные интегралы.

Если заменить переменную интегрирования u на $u+x$, то можно представить P_n в виде

$$P_n = \int_{a-x}^{b-x} f(u+x)\,\frac{(1-u^2)^n}{k_n}\,du. \tag{2}$$

102. Свойства полинома P_n. Исследуем сначала, имеет ли P_n при $n=\infty$ предел и каков этот предел. Зададим себе промежуток (a', b'), внутри промежутка (a, b) и возьмем положительное число ε, меньшее обеих разностей $a'-a$ и $b-b'$. Можно P_n разложить на три интеграла

$$P_n = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{a-x}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{b-x} f(u+x)\,\frac{(1-u^2)^n}{k_n}\,du.$$

В виду сделанного относительно ε предположения, два последних интеграла по абсолютной величине меньше, чем

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^n}{k_n}\left[\int_{a-x}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{b-x} |f(u+x)|\,du\right],$$

и следовательно стремятся равномерно к нулю при бесконечном возрастании n, ибо

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^n}{k_n} < \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}(1-\varepsilon^2)^n < \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, e^{-n\varepsilon^2}.$$

Итак, предел P_n будет тот же, что и для первого интеграла

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\frac{(1-u^2)^n}{k_n}\,du. \tag{3}$$

По теореме о среднем, если θ есть некоторое число между -1 и $+1$, имеем

$$\lim P_n = \lim f(x+\theta\varepsilon)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{(1-u^2)^n}{k_n}\,du.$$

Не изменяя этого предела, можно распространить этот интеграл на промежуток от -1 до $+1$, ибо (как мы только что видели) этим мы присоединяем лишь элементы, *равномерно* стремящиеся к нулю. Таким образом, применяя значение интеграла, вычисленное в n⁰ 100, получим

$$\lim P_n = \lim f(x+\theta\varepsilon).$$

Но, так как ε произвольно мало, второй член не может отличаться от $f(x)$. Кроме того, когда ε стремится к 0, $f(x+\theta\varepsilon)$ равномерно стремится к $f(x)$, для всех x в промежутке (a', b'). Итак, $P_n(x)$ равномерно стремится к $f(x)$ в этом промежутке. Отсюда следующая теорема:

Теорема I. *Если n стремится к бесконечности, интеграл* (3) *и полином P_n равномерно стремятся к $f(x)$ в каждом промежутке (a', b'), содержащемся внутри промежутка (a, b).*

Перейдем теперь к исследованию производных. Предположим, как и раньше, что x изменяется в промежутке (a', b'), содержащемся внутри (a, b). Дифференцируя равенство (1), мы без труда (ибо второй член есть полином, лишь коэффициенты которого суть интегралы) получим

$$D^p P_n = \frac{1}{k_n}\int_a^b f(u)\, D_x^p\,[1-(u-x)^2]^n\,du. \tag{4}$$

Можно здесь заменить D_x на $-D_u$, а после того подставить, вместо переменной u сумму $u+x$. Тогда получится

$$D^p P_n = (-1)^p\int_{a-x}^{b-x} f(u+x)\frac{D^p(1-u^2)^n}{k_n}\,du. \tag{5}$$

Но, при бесконечно большом n, $D^p(1-u^2)^n$ будет бесконечно малой порядка величины $n^p(1-u^2)^n$ (n⁰ 100). Следовательно, каково бы ни было положительное ε, предел интеграла (5) при $n=\infty$, подобно предыдущему, будет таков же, как и для

$$(-1)^p \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x) \frac{D^p (1-u^2)^n}{k_n} du. \tag{6}$$

Предположим теперь, что промежуток (a', b') содержится и внутри промежутка (a'', b''), в котором производная порядка p от $f(x)$ непрерывна. Возьмем $\varepsilon < a' - a''$ и $< b'' - b'$), тогда, в последнем интеграле, $f(u+x)$ и ее p первых производных будут непрерывными функциями от u (поскольку x содержится между a' и b'). При этих условиях мы можем выполнить последовательно p интегрирований по частям, относящихся к производным от $(1-u^2)^n$. Все члены вне интеграла равномерно стремятся к нулю при бесконечном возрастании n. Поэтому имеем

$$\lim D^p P_n = \lim \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^{(p)}(u+x) \frac{(1-u^2)^n}{k_n} du.$$

Этот интеграл имеет форму (3), изученную выше; следовательно, он стремится к пределу $f^{(p)}(x)$ и притом равномерно. Отсюда следующая теорема:

Теорема II. *Если производная от $f(x)$ порядка p непрерывна в некотором промежутке (a'', b''), содержащемся в (a, b), то интеграл* (6) *и полином $D^p P_n$ стремятся, при безграничном возрастании n, к $D^p f(x)$, равномерно в каждом промежутке, содержащемся внутри (a'', b'').*

103. Замечание. В предшествующих рассуждениях доказательство *равномерности приближения* P_n или интегралов (1), (2), (3) к пределу основывалось на предположении, что функция $f(x)$ *равномерно* непрерывна; доказательство же равномерности приближения производных P_n или интегралов (4), (5), (6) к пределу — на аналогичном свойстве производных того же порядка от f. Поэтому, если функция $f(x)$ заменена функцией $f(x, y, \ldots)$, зависящей от x и от некоторого числа переменных параметров $y, \ldots$, то *приближение P_n и его производных* или интегралов от (1) до (6) к их пределам *будет все же происходить равномерно, даже если параметры будут изменяться в определенной области,* под условием, что $f(x, y, \ldots)$ и — в соответствующем случае — ее производные представляются непрерывными функциями от x и этих параметров (при изменении x в пределах, требуемых в доказательствах). При этих предположениях, действительно, f остается функцией, *равномерно* непрерывной относительно x.

Это замечание позволяет непосредственно распространить приведенное исследование на функции многих переменных (n° 108).

104. Обобщение на случай суммируемых функций. Пусть $f(x)$ будет суммируемая функция в промежутке $(0, 1)$, а x — *внутренняя* точка этого промежутка. Рассмотрим полином относительно x

$$P_n = \frac{1}{k_n} \int_0^1 f(u) [1-(u-x)^2]^n du.$$

Если n стремится к бесконечности, этот полином будет обладать следующими свойствами:

Теорема I. *Производная P_n' стремится к $f'(x)$ в каждой точке, в которой эта производная существует*

Действительно, с помощью такого же рассуждения, как и выше (n⁰ 102), убеждаемся, что предел P_n' таков же, как и для интеграла

$$-\frac{1}{k_n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\, D\,(1-u^2)^n\, du.$$

Если $f'(x)$ существует, то имеем в этом интеграле

$$f(u+x)=f(x)+uf'(x)+\omega u,$$

где ω есть величина бесконечно малая вместе с u, следовательно, и вместе с ε. Но, так как $f(x)+uf(x)$ есть полином $\varphi(u)$, к которому применимо вычисление, произведенное в n⁰ 102, то интеграл

$$-\frac{1}{k_n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(u)\, D\,(1-u^2)^n\, du$$

стремится к $\varphi'(0)=f'(x)$. Поэтому достаточно доказать, что остающийся интеграл

$$-\frac{1}{k_n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega\, uD\,(1-u^2)^n\, du$$

сколь угодно мал вместе с ε, каково бы ни было n. Но в этом легко убедиться, ибо, если $|\omega|$ меньше постоянного ω', то этот интеграл по абсолютной величине меньше, чем

$$\frac{\omega'}{k_n}\int_{-1}^{1} |uD\,(1-u^2)^n|\, du=-\frac{2\omega'}{k_n}\int_{0}^{1} uD\,(1-u^2)^n\, du=\omega'.$$

II. Теорема F. Riesz'a. *Полином P_n стремится к $f(x)$ в каждой точке, в которой $f(x)$ является производной от своего неопределенного интеграла, следовательно, почти везде.*

С помощью такого же рассуждения, как и в n⁰ 102, мы убеждаемся, что предел P_n таков же, как и для интеграла

$$\frac{1}{k_n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\,(1-u^2)^n\, du.$$

Проинтегрируем по частям и введем интеграл от f, который мы обозначим через F. Так как члены вне интегралов стремятся к нулю, предел предшествующего интеграла совпадает с пределом интеграла

$$-\frac{1}{k_n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F(u+x)\, D\,(1-u^2)^n\, du.$$

Но это — интеграл, уже рассмотренный в предшествующем доказательстве, он имеет пределом $F'(x) = f(x)$ в каждой точке, в которой f есть производная от F.

Теорема III. *Производная любого порядка $D^r P_n$ стремится к производной того же порядка от функции $f(x)$ в каждой точке, в которой последняя существует.*

Как выше (n⁰ 102), предел $D^r P_n$ совпадает с пределом

$$\frac{(-1)^r}{k_n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u + x)\, D^r (1 - u^2)^n\, du.$$

Если в точке x существует производная $D^r f(x)$, то $D^{r-1} f$ ограничена и (следовательно) $D^{r-2} f$ *абсолютно непрерывна* в достаточно малом промежутке $(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon)$. Все интегрирования по частям, которыми мы пользовались в доказательстве n⁰ 102, допустимы и в настоящем случае, кроме последнего. Предел будет равен пределу интеграла

$$-\frac{1}{k_n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^{(r-1)}(u + x)\, D (1 - u^2)^n\, du,$$

а этот предел равен производной $f^r(x)$, существование которой предположено в силу доказательства теоремы I.

Замечание. Можно показать, сверх того, как и выше, что приближение к пределу происходит равномерно в каждом промежутке, содержащемся внутри промежутка непрерывности функции $f(x)$ и рассматриваемых ее производных.

105. Приближенное выражение непрерывных функций одной переменной с помощью полиномов. Свойства полинома P_n, изученные в n⁰ 102, уже доказывают, что можно построить полином, который, при безграничном возрастании n, равномерно стремится к функции $f(x)$, в то время как производные его равномерно стремятся к производным же $f(x)$ в каждом промежутке, содержащемся внутри промежутка непрерывности $f(x)$ и ее производных. Можно пойти дальше и распространить равномерность приближения к пределу на весь промежуток непрерывности, что мы сейчас и покажем.

Предположим, что $f(x)$, вместе со своими p первыми производными, непрерывна в промежутке (a', b'). Определим $f_1(x)$, положив ее равной $f(x)$ в промежутке (a', b'), между тем как для $x < a'$ и $x > b'$ положим $f_1(x)$ равной, соответственно, тому или другому из полиномов

$$f(a') + \frac{x - a'}{1} f'(a') + \ldots + \frac{(x - a')^p}{p!} f^{(p)}(a'),$$

$$f(b') + \frac{x - b'}{1} f'(b') + \ldots + \frac{(x - b')^p}{p!} f^{(p)}(b').$$

Эта функция f_1 и ее первых p производных непрерывны в любом промежутке (a, b), который мы можем выбрать так, чтобы внутри него содержался (a', b').

Построим полином P_n, который приближенно представляет f_1 в (a, b) и применим две теоремы n° 102. Если n стремится к бесконечности, то полином P_n и его p производных, соответственно, стремятся к функции f и ее p производным равномерно во всем промежутке (a', b') непрерывности f и ее производных.

Предположим, наконец, что $f(x)$ и все ее производные непрерывны в промежутке (a, b). Возьмем последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, стремящихся к нулю. Мы только что доказали, что при любом n можно определить полином Q_n так, чтобы разность $Q_n - f$ и первые n ее производных были по абсолютной величине меньше ε_n в промежутке (a, b). Отсюда следующее заключение:

Теорема. *Если функция f непрерывна в конечном промежутке (a, b), можно построить полином Q_n, который при бесконечном возрастании n стремится к f равномерно во всем промежутке и производные которого также равномерно стремятся к производным от f, поскольку эти последние непрерывны в промежутке (a, b).*

106. Ряды полиномов. Если воспользоваться замечанием, сделанным в n° 100, предшествующая теорема приводит к следующей:

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна в конечном промежутке (a, b), то можно построить такой ряд полиномов, чтобы он сходился равномерно в этом промежутке и имел суммой f, и, кроме того, ряды, составленные из производных любого порядка от его членов, также равномерно сходились и имели суммами соответствующие производные от f, поскольку эти последние непрерывны в промежутке (a, b).*

§ 2. Приближенное представление с помощью полиномов непрерывных функций от многих переменных.

Мы ограничимся функциями $f(x, y)$ от двух переменных, но заключения наши сами собой распространяются и на общий случай.

107. Определение приближенного полинома. Пусть $f(x, y)$ будет непрерывная функция от x и y в области D, ограниченной кривой C (n° 1). Мы предположим эту область содержащейся внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$. Если бы это условие не имело места, то мы могли бы его все же осуществить, преобразовав сначала x, и затем y с помощью линейной подстановки, от чего наши заключения не изменились бы.

Мы определим приближенный полином [относительно $f(x, y)$] степени $4n$ с помощью двойного интеграла, причем k_n имеет то же значение, что и выше (n° 100),

$$P_n = \frac{1}{k_n^2} \int\int_D f(u, v) \, [1 - (u - x)^2]^n \, [1 - (v - y)^2]^n \, du \, dv. \tag{7}$$

Можно представить его в другом виде. Подставим вместо u, v переменные $u + x$ и $v + y$, благодаря чему область D заменится другой областью D_1 (которая из первой получается путем простого переноса). Мы получим

$$P_n = \int\int_{D_1} f(u+x, v+y) \frac{(1-u^2)^n (1-v^2)^n}{k_n^2} du\,dv. \qquad (8)$$

108. Свойства полинома P_n. Теорема I. *Если x, y изменяются в области D', содержащейся целиком внутри области D* *), *то полином P_n равномерно стремится к $f(x, y)$, когда n стремится к бесконечности.*

Пусть ε будет положительным числом, меньшим кратчайшего расстояния между контурами областей D и D'. Если u или v изменяются вне промежутка $(-\varepsilon, \varepsilon)$, то

$$\frac{(1-u^2)^n (1-v^2)^n}{k_n^2} < \frac{(1-\varepsilon^2)^n}{k_n^2}.$$

Как в случае одной переменной, соответствующие части интеграла (8) равномерно стремятся к нулю. Для P_n предел будет тот же, что и для остающегося интеграла

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} du \frac{(1-u^2)^n}{k_n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x, v+y) \frac{(1-v^2)^n}{k_n} dv,$$

все элементы которого действительно принадлежат P_n, в виду наложенного на ε условия.

Но, по теореме I n° 102, которая применима к интегралу (3) указанного n°, как и к P_n, внутренний интеграл, имеющий тот же вид, что и (3), есть выражение вида $f(u+x, y)+\omega_n$, где ω_n *равномерно* стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности. Если подставить это выражение в двойной интеграл, то он разложится на два члена, из которых второй равномерно стремится к нулю, вместе с ω_n, в силу теоремы о среднем. Поэтому имеем

$$\lim P_n = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x, y) \frac{(1-u^2)^n}{k_n} du.$$

Наконец, применяя снова к этому интегралу типа (3) теорему I n° 102, мы видим, что этот предел есть $f(x, y)$. При этом приближение к пределу происходит равномерно, в силу замечания к n° 103.

Теорема II. *Последовательные частные производные от P_n равномерно стремятся к соответствующим производным от f в каждой области D', содержащейся внутри области D, равно как и внутри области, в которой все эти производные непрерывны.*

Предположим, что $D_x^p D_y^q f$ непрерывна в области D'' (содержащейся в D и содержащей внутри себя D') и обозначим через ε

---

*) Так что их границы не соприкасаются

кратчайшее расстояние контуров D' и D''. Дифференцируя формулу (7), без труда получим

$$\frac{\partial^{p+q} P_n}{\partial x^p \partial y^q} = \int\int_D f(u,v) \frac{D_x^p [1-(u-x)^2]^n D_y^q [1-(v-y)^2]^n}{k_n^2} du\, dv.$$

Но можно заменить D_x через $-D_u$ и D_y через $-D_v$, затем подставить $u+x$, $v+y$ вместо u, v, что перенесет область интегрирования в D_1. Предшествующий интеграл примет вид

$$(-1)^{p+q} \int\int_{D_1} f(u+x,\, v+y) \frac{D^p (1-u^2)^n D^q (1-v^2)^n}{k_n^2} du\, dv.$$

Еще раз заметим, что, если e и u изменяются вне промежутка $(-\varepsilon, \varepsilon)$, то множитель

$$\frac{D^p (1-u^2)^n D^q (1-v^2)^n}{k_n^2}$$

равномерно стремится к нулю. Соответствующие части двойного интеграла могут быть отброшены; предел для рассматриваемой частной производной P_n будет тот же, что и для остающегося интеграла

$$(-1)^p \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{D^p (1-u^2)^n}{k_n} du\, (-1)^q \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x,\, v+y) \frac{D^q (1-v^2)^n}{k_n} dv.$$

Остается лишь дважды применить теорему II n° 102, чтобы получить

$$\lim D_x^p D_y^q P_n = D_x^p D_y^q f;$$

при этом приближение к пределу происходит равномерно, в силу замечания к n° 103.

109. Приближенное аналитическое представление функций.

Теорема I. *Если дана функция $f(x, y)$, непрерывная в некоторой области D, то можно построить, для каждого n, полином $P_n(x, y)$ относительно x, y, который, при бесконечном возрастании n, равномерно стремится к $f(x, y)$ в каждой области, содержащейся внутри D, и частные производные которого также равномерно стремятся к производным от f в каждой области, содержащейся внутри D и внутри области, в которой эти производные от f непрерывны.*

Теорема II. *При тех же условиях можно построить ряд полиномов, равномерно сходящийся и имеющий суммой $f(x, y)$, в то время как ряды производных равномерно же сходятся и имеют суммами производные от $f(x, y)$.*

110. Обобщение на суммируемые функции. Теорема L. Tonelli *). *Пусть $f(x, y)$ будет суммируемой функцией в квадрате,*

*) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIX. Интеграл, рассматриваемый L. Tonelli, не совпадает с введенными в тексте, но равносилен ему. Хотя там получался полином с вдвое меньшей степенью, но от нас потребовались бы новые выкладки, что представляет неудобство.

ограниченном прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$; полином относительно x, y

$$P_n = \frac{1}{k_n^2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(u, v)\,[1-(u-x)^2]^n\,[1-(v-y)^2]^n\,du\,dv$$

стремится к $f(x, y)$, когда n стремится к бесконечности, почти для всех точек квадрата.

Пусть точка (x, y) лежит внутри квадрата. Как и выше, разыскание предела сведется к пределу интеграла

$$\frac{1}{k_n^2}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x, v+y)\,(1-u^2)^n\,(1-v^2)^n\,du\,dv.$$

Так как интеграл

$$\frac{1}{k_n^2}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x,y)\,(1-u^2)^n\,(1-v^2)^n\,du\,dv$$

стремится к $f(x, y)$, достаточно показать, что разность этих двух интегралов стремится к нулю. Положим, для простоты,

$$\varphi(u, v) = f(x+u, y+v) - f(x, y);$$

разность упомянутых интегралов может быть следующим образом представлена в виде суммы четырех интегралов, соответствующих четырем комбинациям знаков $\pm$:

$$\sum \frac{1}{k_n^2}\int\limits_0^{\varepsilon}\int\limits_0^{\varepsilon} \varphi(\pm u, \pm v)\,(1-u^2)^n\,(1-v^2)^n\,du\,dv.$$

Мы покажем, что *эта сумма стремится к нулю, так что P_n стремится к f, в каждой точке (x, y), для которой производная неопределенного интеграла (выраженного в функции от u, v)*

$$\int\int |\varphi(u, v)|\,du\,dv$$

была нулем при $u=0$, $v=0$. Так как это условие осуществляется в каждой точке, в которой $|f(x, y)-c|$ является производной от своего неопределенного интеграла, т. е. *почти везде* (n^0 89), то теорема L. Tonelli этим будет доказана.

Для того чтобы производная, о которой идет речь, была нулем при $u=v=0$, нужно, чтобы каждое из четырех отношений

$$\frac{1}{u^2}\int\limits_0^u\int\limits_0^u |\varphi(\pm u, \pm v)|\,du\,dv$$

стремилось к нулю вместе с u. Предположим, что это в действительности имеет место.

Достаточно доказать, что первый из членов суммы Σ стремится к нулю, ибо для трех остальных доказательство проводится аналогично. Абсолютная величина этого члена меньше, чем выражение

$$\frac{1}{k_n^2}\int_0^\varepsilon (1-u^2)^n\,du\int_0^\varepsilon |\varphi(u,v)|\,(1-v^2)^n\,dv.$$

Выполним по отношению к внутреннему интегралу интегрирование по частям; полагая для простоты,

$$\Phi_1(u,v)=\int_0^v |\varphi(u,v)|\,dv,$$

получим

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^n}{k_n^2}\int_0^\varepsilon \Phi_1(u,\varepsilon)\,(1-u^2)^n\,du-$$

$$-\frac{1}{k_n^2}\int_0^\varepsilon (1-u^2)^n\,du\int_0^\varepsilon \Phi_1(u,v)\,D(1-v^2)^n\,dv.$$

Мы видим, что первый член стремится к нулю вместе с предшествующим интегралу множителем. Достаточно доказать, что второй стремится к нулю. Если переставить интегрирования, то с точностью до знака он примет вид

$$\frac{1}{k_n^2}\int_0^\varepsilon D(1-v^2)^n dv\int_0^\varepsilon \Phi_1(u,v)\,(1-u^2)^n\,du.$$

Выполним снова интегрирование по частям, полагая, для простоты,

$$\Phi_2(u,v)=\int_0^u \Phi_1(u,v)\,du=\int_0^u du\int_0^v |\varphi(u,v)|\,dv,$$

получим

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^n}{k_n^2}\int_0^\varepsilon \Phi_2(\varepsilon,v)\,D(1-v^2)^n\,dv-$$

$$-\frac{1}{k_n^2}\int_0^\varepsilon\int_0^\varepsilon \Phi_2(u,v)\,D(1-u^2)^n\,D(1-v^2)^n\,du\,dv.$$

Как и выше, первый член имеет пределом нуль. Во втором же имеем

$$\Phi_2(u,v)<\int_0^{\sqrt{u^2+v^2}}\int_0^{\sqrt{u^2+v^2}} |\varphi|\,du\,dv<\omega(u^2+v^2),$$

где ω сколь угодно мала вместе с u и v (следовательно, и с ε), так как производная интеграла равна нулю. Таким образом, этот второй член сколь угодно мал вместе с ω, каково бы ни было n, ибо он меньше, чем

$$\frac{\omega}{k_n^2}\int_0^1\int_0^1 (u^2+v^2)\,|D(1-v^2)^n\,D(1-u^2)^n|\,du\,dv,$$

т. е. (принимая во внимание, что эти производные отрицательны и выполняя после разложения одно из интегрирований)

$$-\frac{2\omega}{k_n^2}\int_0^1 u^2D(1-u^2)^n\,du = \frac{2\omega}{nk_n^2} < \frac{2\omega}{\pi}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Предложение доказано.

§ 3. Ряды Fourier. Необходимые и достаточные условия сходимости.

111. Тригонометрические ряды. Формулы Euler'а. *Тригонометрическим рядом* называют ряд вида

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx), \tag{1}$$

где x означает переменную, а a, b — постоянные коэффициенты. Если этот ряд сходится, он представляет функцию с периодом 2π.

Euler в 1753 г. поставил вопрос о разложении произвольно заданной функции с периодом 2π в ряд этого вида, и он же нашел классические формулы для определения коэффициентов. Вот, приблизительно, как он поступал для того, чтобы выполнить разложение данной функции $f(x)$.

Положим наперед

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum(a_m\cos mx+b_m\sin mx) \tag{2}$$

и зададимся целью определить коэффициенты. Для этого умножим обе части равенства на $\cos nx\,dx$ и почленно проинтегрируем от 0 до 2π; далее, сделаем то же по умножении на $\sin nx\,dx$; мы найдем *формулы Euler'a-Fourier*:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx\quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{3}$$

Действительно, интегралы от $\cos mx\cos nx$, $\sin mx\sin nx$, $\cos mx\sin nx$ от 0 до 2π все равны нулю, если m отлично от n, в то время как при $m=n$ лишь последний будет нулем, а первые два равны π (том I, n⁰ 245) Но важно тотчас же отметить, что это рассуждение предполагает: 1) возможность разложения, 2) законность почленного интегрирования. Поэтому оно ничего не доказывает, поскольку не выполнены доказательства этих двух пунктов. Важно было бы сначала точно указать и сформулировать те вопросы, которыми мы будем заниматься.

112. Ряды и постоянные Fourier. Задачи, которые возникают в связи с ними. Пусть $f(x)$ будет интегрируемая функция. Постоянные a_m и b_m, определяемые формулами (3), называются постоянными Fourier для функции $f(x)$. Тригонометрический ряд (1), в котором эти именно постоянные взяты в качестве коэффициентов, рассматриваемый с чисто формальной точки зрения (независимо от того, сходится ли он, или нет), называется *рядом Fourier функции* $f(x)$.

Тогда возникают следующие вопросы:

Сходится ли ряд Fourier функции $f(x)$?

Если сходится, то имеет ли он суммой $f(x)$?

Сходится ли он равномерно?

Может ли функция $f(x)$ иметь тригонометрическое разложение, отличное от разложения в ряд Fourier?

Эти вопросы вызвали огромное количество интересных работ, главные результаты которых мы изложим. Ни один из них, однако, не может считаться разрешенным до конца.

113. Предположения относительно $f(x)$. Функция $f(x)$, разложением которой мы будем заниматься, до конца главы будет подчинена следующим двум условиям: 1) это функция *периодическая* с периодом 2π, 2) она *абсолютно интегрируема*. Можно, ограничиваясь чтением только крупного шрифта, разуметь под этим, что f и $|f|$ имеют интеграл (или несобственный интеграл) в элементарном смысле. Но вся теория предполагает только, что f *суммируема* в смысле Lebesgue'а, и необходимые для оправдания этого дополнения будут приведены петитом.

114. Суммирование ряда Fourier функции $f(x)$ с помощью интеграла Dirichlet. Итак, пусть $f(x)$ будет *абсолютно интегрируемая* *) функция периода 2π. Ее постоянные Fourier вполне определяются имеющими смысл интегралами

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha. \tag{4}$$

В виду периодичности подинтегральной функции, промежуток интегрирования можно заменить любым промежутком с длиною 2π. Таким образом, в частности,

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha.$$

Пусть S_m будет сумма

$$S_m = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^m (a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

*) Или, вообще, суммируемая.

первых $m+1$ членов ряда Fourier. После подстановки предшествующих значений коэффициентов она примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{1}^{m}\cos k(\alpha-x)\right]f(\alpha)\,d\alpha;$$

или, заменяя переменную интегрирования α через $k+x$, получим

$$S_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{1}^{m}\cos k\alpha\right]f(\alpha+x)\,d\alpha.$$

С другой стороны, складывая m равенств

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha=2\cos k\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha,$$

для $k=1, 2, \ldots, m$, и деля затем на $2\sin\frac{1}{2}\alpha$, найдем

$$\frac{1}{2}+\sum_{1}^{m}\cos k\alpha=\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{5}$$

Наконец, подставляя этот результат в выражение для S_m, мы представим S_m в виде следующего интеграла, известного под названием *интеграла Dirichlet*,

$$S_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+\alpha)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha. \tag{6}$$

Сходимость ряда Fourier приводится, таким образом, к вопросу о пределе этого интеграла, когда натуральное число m стремится к бесконечности.

В исследовании этого вопроса основную роль играет следующая теорема, общее доказательство которой принадлежит Lebesgue'у.

115. Предел $\int\limits^{b}F(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha$ при $k=\infty$. Теорема. *Если функция $F(\alpha)$ абсолютно интегрируема*), то оба интеграла*

$$\int\limits_{a}^{b}F(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha,\qquad \int\limits_{a}^{b}F(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha,$$

стремятся к нулю, когда k произвольным образом стремится к бесконечности.

*) Или, вообще, суммируема (n° 113).

В частности, постоянные Fourier a_m и b_m функции $f(x)$ стремятся к нулю, когда m стремится к бесконечности.

Достаточно доказать теорему для первого из двух интегралов, так как для второго доказательство такое же.

Первый случай. Если $F(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), этот первый интеграл отличается от двух следующих:

$$\int_{a+\frac{\pi}{k}}^{b} \quad \text{и} \quad \int_{a}^{b-\frac{\pi}{k}} F(\alpha) \sin k\alpha\, d\alpha$$

лишь интегралами, бесконечно малыми вместе с промежутками интегрирования. Поэтому достаточно показать, что сумма предшествующих интегралов стремится к нулю. Но эта сумма, после замены в первом интеграле переменной α на $\alpha + \frac{\pi}{k}$, перепишется так:

$$\int_{a}^{b-\frac{\pi}{k}} \left[F(\alpha) - F\left(\alpha + \frac{\pi}{k}\right)\right] \sin k\alpha\, d\alpha.$$

Когда k стремится к бесконечности, разность в скобках равномерно стремится к нулю, следовательно, и интеграл стремится к нулю.

Второй случай. Если $F(\alpha)$ имеет разрывы в конечном числе точек, то можно допустить, что такими точками являются лишь a и b, ибо рассматриваемый интеграл можно было бы разложить на несколько других, удовлетворяющих этому условию.

Но два интеграла

$$\int_{a}^{b} F(\alpha) \sin k\alpha\, d\alpha, \quad \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} F(\alpha) \sin k\alpha\, d\alpha$$

разнятся на величину, меньшую суммы двух интегралов от $|F|\, d\alpha$, взятых от a до $a+\varepsilon$ и от $b-\varepsilon$ до b, и сколь угодно малую вместе с ε; второй же интеграл приводит нас к первому случаю.

Третий случай. Пусть $F(\alpha)$ будет суммируема (в смысле Lebesgue'a). Достаточно доказать теорему для *положительной и ограниченной* функции F. Действительно, каждая суммируемая функция есть разность двух положительных суммируемых функций. Затем, если F положительна и не ограничена, то интеграл от F, по определению, есть предел интеграла от ограниченной функции $F_n \leqslant F$. Но разность интегралов

$$\int F \sin k\alpha\, d\alpha, \qquad \int F_n \sin k\alpha\, d\alpha$$

меньше, чем $\int (F - F_n)\, d\alpha$, следовательно, может быть сделана сколь угодно малой, независимо от k; таким образом, достаточно доказать теорему для второго интеграла.

Пусть же F будет положительной функцией, ограниченной числом M. Этот случай приводится к первому случаю, когда функция предположена непрерывной, при помощи теоремы n° 80. Действительно, так как, за исключением из промежутка (a, b) системы промежутков Δ с мерой $<\omega$, функция F вдоль остающейся замкнутой совокупности непрерывна, то, заменяя F в каждом из промежутков Δ соответствующей линейной функцией, принимающей те же значения, что и F, на концах промежутка, мы построим непрерывную во всем промежутке фунцию φ, положительную и ограниченную тем же числом M, от которой F может отличаться (и притом меньше, чем на M) разве лишь в промежутках системы Δ. Разность между двумя интегралами

$$\int_a^b F \sin k\alpha\, d\alpha, \qquad \int_a^b \varphi \sin k\alpha\, d\alpha$$

меньше, чем $M\omega$, следовательно, вместе с ω сколь угодно мала. Доказательство приводится к рассмотрению лишь второго интеграла, который входит в первый случай.

116. Равномерное приближение к пределу предшествующего интеграла. 1°. Станем рассматривать пределы a и b интеграла предшествующей тео емы как переменные, но изменяющиеся лишь в постоянном промежутке (A, B), в котором $|F|$ интегрируема. Тогда изменение интересующего нас интеграла вместе с a, b меньше соответствующего изменения интеграла

$$\int_a^b |F|\, d\alpha,$$

не зависящего от k и представляющего собою непрерывную функцию от a, b. Следовательно, наш интеграл есть функция *равномерно непрерывная от a, b, при всех значениях k, и равномерно стремится к нулю, когда k стремится к бесконечности,* ибо он стремится к 0 для каждой частной системы значений a, b *).

2°. Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_a^b F(\alpha + x) \sin k\alpha\, d\alpha,$$

зависящий и от переменной x, которая однако изменяется так, что переменная $t = \alpha + x$, если $a \leqslant \alpha \leqslant b$, не выходит за пределы промежутка (A, B), где $|F|$ интегрируема. Подставляя вместо α

*) В пояснение заметим следующее. Если разложить промежуток (A, B) на конечное число частей и придавать a, b лишь значения, совпадающие с точками деления, то получим конечное число интегралов, каждый из которых при достаточно большом k будет сколь угодно мал. Взяв теперь a и b произвольно, мы видим, однако, что в виду именно равномерной непрерывности нашего интеграла относительно a и b интеграл этот будет отличаться от одного из рассмотренных только-что сколь угодно мало (независимо от k), если только промежуток (A, B) предварительно был разделен на достаточно малые части. *Прим. ред.*

разность $\alpha-x$, мы разложим интеграл на сумму двух других, умноженных на множителей, меньших единицы,

$$\cos kx \int_{a+x}^{b+x} F(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha - \sin kx \int_{a+x}^{b+x} F(\alpha)\cos k\alpha\, d\alpha;$$

к этим же интегралам приложимо предыдущее рассуждение. Следовательно, и в этом случае *интеграл равномерно стремится к нулю, при $k=\infty$.*

3. Рассмотрим, наконец, интеграл более общего вида

$$\int_a^b F(\alpha+x)\,\omega(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha,$$

где мы предполагаем, что $\omega(\alpha)$ имеет непрерывную производную $\omega'(\alpha)$.

При тех же условиях, что и выше, *этот интеграл равномерно стремится к нулю, когда k стремится к бесконечности.*

В самом деле, положим

$$\Phi(\alpha) = \int_a^\alpha F(\alpha+x)\sin k\alpha\, d\alpha;$$

с помощью интегрирования по частям наш интеграл преобразуется к виду

$$\Phi(b)\,\omega(b) - \int_a^b \Phi(\alpha)\,\omega'(\alpha)\, d\alpha$$

и равномерно стремится к нулю вместе с Φ, к которому уже применимо предшествующее доказательство.

Может случиться, что $\omega(\alpha)$ зависит от k. Изложенное доказательство сохранит силу и в этом случае, если только ω и ω' имеют конечные верхние границы, не зависящие от k.

117. Теорема Riemann'a. *Поведение ряда Fourier функции $f(x)$ в точке α зависит лишь от природы этой функции в (сколь угодно малой) окрестности точки x.*

Действительно, если мы через $\omega(\alpha)$ обозначим функцию $1 : 2\sin\frac{\alpha}{2}$, которая непрерывна вместе со своею производною в промежутках $(-\pi, -\varepsilon)$, (ε, π), сколь бы мало ни было положительное число ε то интеграл (6), выражающий сумму S_m, примет вид

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\,\omega(\alpha)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha\, d\alpha.$$

Итак, пренебрегая двумя частями этого интеграла, которые равномерно стремятся к нулю, когда m стремится к бесконечности (n⁰ 116), мы видим, что этот интеграл стремится к тому же пределу и таким же образом (равномерно или нет), что и интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+\alpha)\frac{\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

118. Предварительная форма необходимого и достаточного условия сходимости. Мы станем искать условия для того, чтобы ряд Fourier сходился и имел своей суммой определенное число S. Таким образом, S не зависит от m, но есть функция от x. Умножим на S почленно равенство

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha,$$

которое получится, если проинтегрировать обе части формулы (5) n⁰114; затем вычтем результат из равенства (6) того же n⁰. Мы получим

$$S_m-S=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-S]\,\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha. \tag{7}$$

Итак, *для того, чтобы ряд Fourier имел своей суммой S, необходимо и достаточно, чтобы, при возрастании m, интеграл* (7) *становился в конце концов по абсолютной величине меньшим произвольного наперед заданного положительного числа* ω, *начиная с некоторого достаточно большого значения $m=M$. Это последнее должно быть, сверх того, независимым от x, для того чтобы сходимость была равномерна.*

Но, в этой формулировке, мы последовательно станем замещать интеграл (7) другими более простыми. Прежде всего, заменим его таким:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-S]\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha\,\frac{d\alpha}{\alpha}, \tag{8}$$

что допустимо, так как разность обоих интегралов равномерно стремится к нулю, в силу заключений n⁰ 116 *). Действительно, эта разность имеет вид

---

*) Следует еще оговорить ограниченность S, как функции от x. В противном случае нельзя говорить о равномерности.

Прим. ред.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x+\alpha)\ \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha\left[\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\alpha}\right]d\alpha,$$

причем выражение в скобках есть функция $\omega(\alpha)$, непрерывная вместе с ее производной. Затем, интеграл (8) можно заменить следующим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [f(x+\alpha)-S]\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}, \tag{9}$$

где ε означает произвольно малое положительное число, не зависящее от m; при этом мы пренебрегаем двумя частями интеграла (8), которые равномерно стремятся к нулю, когда m стремится к бесконечности.

Разложим интеграл (9) на два других, с пределами $-\varepsilon, 0$ и $0, \varepsilon$; приведем первый из них к тем же пределам, что и у второго, изменяя знак α, тогда интеграл (9) заменится интегралом (10), фигурирующим в следующем правиле, которое мы теперь в праве высказать.

119. **Правило сходимости.** *Для того чтобы ряд Fourier функции $f(x)$ сходился (равномерно) и имел своей суммой S, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было данное положительное число ω, можно было поставить ему в соответствие два числа ε и M (не зависящих от x) так, чтобы интеграл*

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\varepsilon}\varphi(\alpha)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}, \tag{10}$$

где положено, для краткости,

$$\varphi(\alpha)=f(x+\alpha)+f(x-\alpha)-2S, \tag{11}$$

был по модулю $<\omega$ для любого целого значения $m>M$.

Замечание. В этом правиле *можно опустить условие, чтобы m было целым.* В самом деле, если заменить m через $m+\theta$ $(0<\theta<1)$ в предшествующем интеграле и вычислить разность обоих интегралов, то, после преобразования разности $\sin\left(m+\theta+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha$ в произведение, найдем

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\varepsilon}\varphi(\alpha)\frac{\sin\frac{\theta\alpha}{2}}{\alpha}\cos\left(m+\frac{\theta+1}{2}\right)\alpha\, d\alpha.$$

Следовательно, эта разность равномерно стремится к 0 при $m=\infty$, в силу заключений n⁰ 116.

Положим, для упрощения письма, $m + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{\delta}$, причем δ стремится к нулю, когда m стремится к бесконечности; тогда можно будет представить предшествующее правило еще в следующей форме:

Вторая формулировка правила. *Для того, чтобы ряд Fourier функции $f(x)$ сходился (равномерно) и имел своей суммой S, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было положительное число ω, можно было поставить ему в соответствие два положительных числа ε и δ_1 (не зависящие от x) так, чтобы интеграл*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon} \varphi(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{\delta}\frac{d\alpha}{\alpha} \tag{12}$$

по модулю был $< \omega$ для каждого положительного значения $\delta < \delta_1$.

120. Видоизменение этого правила в случае, когда $\Phi'(0) = 0$. Положим

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\alpha} |\varphi(\alpha)|\, d\alpha,$$

и предположим, что $\Phi(\alpha) : \alpha$ стремится (равномерно) к нулю, следовательно, что $\Phi'(0) = 0$. Это условие всегда выполняется в точке (в промежутке, содержащемся целиком внутри другого), где $f(x)$ непрерывна, ибо в этом случае полагают $S = f(x)$, как об этом будет сказано ниже (n^0 122).

Теорема. *При этом условии и предполагая $\delta < \varepsilon$, можно заменить во второй формулировке предшествующего правила интеграл* (12) *одним из следующих двух*:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon} \varphi(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{\delta}\frac{d\alpha}{\alpha}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\alpha+\delta)-\varphi(\alpha)}{\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{\delta}\,d\alpha. \tag{14}$$

Действительно, от (12) к (13) перейдем, пренебрегая интегралом, меньшим следующего:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \varphi(\alpha)\,\frac{\pi}{\delta}\,d\alpha = \frac{\Phi(\delta)}{\delta},$$

который, по предположению, стремится (равномерно) к нулю вместе с δ.

Поэтому достаточно оправдать переход от (13) к (14). Заменим в (13) α на $\alpha + \delta$ и разложим (13) на три других интеграла; последовательно получим

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon-\delta} \frac{\varphi(\alpha+\delta)}{\alpha+\delta}\sin\frac{\pi\alpha}{\delta}\,d\alpha = -\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon-\delta}^{\varepsilon} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}.$$

Последний интеграл, распространенный на промежуток $(0, \delta)$, имеет элемент, по модулю меньший, чем $|\varphi(\alpha+\delta)| : \delta$, следовательно самый интеграл по модулю меньше $\Phi(2\delta) : \delta$ и стремится (равномерно) к нулю вместе с δ. Второй интеграл также стремится к нулю в силу теорем пп⁰ 115—116. Если пренебречь этими двумя интегралами, то интеграл (13) приведется к первому из трех. Можно поэтому прибавить его к интегралу (13), заменяя последний интегралом

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\left(\frac{\varphi(\alpha+\delta)}{\alpha+\delta}-\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Остается показать, что можно этот интеграл, в свою очередь, заменить интегралом (14); для этого мы докажем, что сумма обоих интегралов удовлетворяет условиям, налагаемым на (12) в формулировке правила, о котором идет речь.

Эта сумма по абсолютной величине меньше, чем

$$\frac{\delta}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}|\varphi(\alpha+\delta)|\,\frac{d\alpha}{\alpha(\alpha+\delta)}<\frac{\delta}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}|\varphi(\alpha+\delta)|\,\frac{d\alpha}{\alpha^2},$$

и подавно меньше следующего предела, полученного путем интегрирования по частям и отбрасывания одного отрицательного члена вне интеграла;

$$\frac{\delta}{\pi}\,\frac{\Phi(\varepsilon+\delta)}{\varepsilon^2}+\frac{2\delta}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\Phi(\alpha+\delta)\,\frac{d\alpha}{\alpha^3}.$$

Член вне интеграла равномерно стремится к нулю вместе с δ. С другой стороны, в последнем интеграле, так как $\alpha>\delta$, можно положить

$$\Phi(\alpha+\delta)<\omega(\alpha+\delta)<2\omega\alpha,$$

где ω стремится (равномерно) к нулю вместе с ε.

Итак, этот интеграл меньше, чем выражение

$$\frac{4\omega\delta}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\frac{d\alpha}{\alpha^2}<4\frac{\omega}{\pi},$$

которое становится сколь угодно малым вместе с ω (следовательно, и вместе с ε), каково бы ни было δ.

Обобщение предшествующей теоремы. *Всегда при тех же условиях можно также во второй формулировке правила предыдущего* n⁰ *заменить интеграл* (12) *любым из следующих*:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\Delta^n\varphi(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{\delta}\frac{d\alpha}{\alpha}\qquad(n=1,2,3,\ldots)$$

Здесь $\Delta^n \varphi$ означает n-ную разность $\varphi(\alpha)$, если α придается ряд приращений δ. Таким образом:

$$\Delta\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha+\delta) - \varphi(\alpha), \ldots, \Delta^n\varphi(\alpha) = \Delta^{n-1}\varphi(\alpha+\delta) - \Delta^{n-1}\varphi(\alpha), \ldots$$

Действительно, мы перешли от (13) к (14), доказав, что можно в интеграле (15) заменить $\varphi(\alpha)$ через ее разность. Но с помощью такого же рассуждения можно показать, что дозволительно от разности любого порядка перейти к следующей. С этой целью заметим, что $\Delta^n\varphi(\alpha)$ есть сумма членов вида $\varphi(\alpha+k\delta)$ и (так как $\alpha > \delta$) обладает теми свойствами φ, которыми мы и пользовались при упомянутом переходе.

§ 4. Классические признаки сходимости рядов Fourier.

Дадим прежде всего некоторые общие определения:

121. Точки разрыва I рода. Регулярные точки. Функции ограниченной вариации. Мы будем говорить, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет *разрыв I рода*, если эта функция имеет конечный предел $f(x_0-0)$, когда x стремится к x_0 возрастая, и конечный же предел $f(x_0+0)$, когда x стремится к x_0 убывая. Если оба эти предела равны значению $f(x_0)$ функции в точке x_0, то функция в этой точке будет непрерывна.

Мы будем говорить также (вместе с Lebesgue'ом), что точка x_0 есть *регулярная точка*, если $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ существуют и $f(x_0)$ является их полусуммой. В частности, каждая точка, в которой функция непрерывна, будет регулярной.

Точки разрыва ограниченной функции, не убывающей (или не возрастающей), все будут первого рода, в силу общего принципа теории пределов (том I, n° 16).

Функцию ограниченной вариации *) можно определить как разность двух не убывающих ограниченных функций. Она поэтому может иметь лишь разрывы первого рода.

Непрерывная функция ограниченной вариации в промежутке (a, b) является в этом промежутке разностью двух *непрерывных* же не убывающих функций φ и ψ **). В самом деле, если бы φ и ψ не были непрерывны, их колебания в каждой точке разрыва были бы одинаковы. Обозначим тогда через ω сумму всех колебаний в точках разрыва от a до x, справа от a и слева от x, ***) функции $\varphi-\omega$ и $\psi-\omega$ будут непрерывными и не убывающими. Этими функциями и можно заменить φ и ψ, не меняя тем их разности.

Dirichlet, впервые строго изложивший теорию рядов Fourier, рассматривал ограниченные функции, имеющие лишь конечное

---

*) Функции ограниченной вариации были подробно изучены во Введении (том I, nn° 86—88).

**) Ср. том I, n° 88, теорема I.

***) Для монотонной функции φ (или ψ) число точек, в которых колебание превосходит любое число (сколь бы мало оно ни было) всегда **конечно**. Отсюда вытекает возможность расположить и перенумеровать все точки разрыва, лежащие между a и x, например по величине соответствующих им скачков (колебаний), так что та **сумма колебаний**, о которой идет речь в тексте, в крайнем случае, является лишь суммой бесконечного ряда (с положительными членами).

Прим. ред.

число максимумов и минимумов. Эти требования и известны под именем *условий Dirichlet*. Функции, им удовлетворяющие, очевидно будут ограниченной вариации.

122. Выбор S. Для функций, о которых мы только что говорили, можно дать такое определение величине S, фигурирующей в выражении функции $\varphi(\alpha)$:

$$\varphi(\alpha)=f(x+\alpha)+f(x-\alpha)-2S,$$

чтобы $\varphi(\alpha)$ стремилось к нулю вместе с α. Следует подразумевать впредь, что S имеет именно это значение.

Итак, если функция *непрерывна* в точке или, вообще, эта точка является регулярной точкой функции, полагаем $S=f(x)$; если x есть точка разрыва первого рода, полагают

$$S=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

123. Первый признак сходимости (Dini). *Ряд Fourier функции $f(x)$ сходится и имеет суммой $f(x)$ в каждой точке, для которой интеграл*

$$\int_0^{\varepsilon}|\varphi(\alpha)|\frac{d\alpha}{\alpha}$$

существует.

Это — следствие правила n° 119. Каково бы ни было положительное ω, можно взять ε настолько малым, чтобы этот интеграл был меньше ω, а тогда интеграл (11) и подавно будет меньше ω, при любом m. Если это условие выполняется при ε, не зависящем от x, то сходимость будет равномерна.

Этот признак имеет столько же частных случаев, сколько существует признаков существования интеграла. В частности, интеграл существует, если $\varphi(\alpha)$ будет бесконечно малой порядка $r>0$, когда α стремится к нулю.

Итак, ряд Fourier сходится в каждой точке x, для которой $f(x+\alpha)-f(x)$ будет бесконечно малой порядка $r>0$ при $\alpha=0$. В частности, каждая дифференцируемая функция разлагается в ряд Fourier.

124. Второй признак сходимости (C. Jordan). *Ряд Fourier функции $f(x)$ сходится в каждом промежутке, в котором функция будет ограниченной вариации. Сверх того, сходимость будет равномерна в каждом промежутке, содержащемся внутри промежутка непрерывности. Сумма S ряда будет $f(x)$ в каждой регулярной точке; в прочих точках разрыва она будет равна*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Заметим, что, если $f(x)$ будет ограниченной вариации, то и φ также. Но если условие правила n° 119 выполняется для двух функций, то оно выполняется и для их разности. Поэтому достаточно проверить приложимость правила, в предположении, что φ положительно и не убывает. В этом случае, заменяя $m+\frac{1}{2}$ через k и воспользовавшись второй теоремой о среднем, будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi(\alpha)\sin k\alpha\,\frac{d\alpha}{\alpha}=\frac{\varphi(\varepsilon)}{\pi}\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon}\frac{\sin k\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Это выражение по абсолютной величине меньше, чем

$$\frac{1}{\pi}|\varphi(\varepsilon)|\int_0^{\pi}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha<\;\varphi(\varepsilon)\,|.$$

Действительно,

$$\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon}\frac{\sin k\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

приводится к разности

$$\int_0^{k\varepsilon}-\int_0^{k\varepsilon'}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

двух положительных интегралов, из которых каждый меньше интеграла $\int_\pi^0$, измеряющего площадь первой арки кривой $y=\sin\alpha:\alpha$, образованной убывающими арками, попеременно расположенными по разные стороны оси α.

Для того, чтобы теперь удовлетворить требованию правила, нужно лишь, при данном ω, взять ε настолько малым, чтобы было

$$|\varphi(\varepsilon)|=|f(x+\varepsilon)-f(x+0)+f(x-\varepsilon)-f(x-0)|<\omega.$$

Наконец, внутри промежутка непрерывности f это условие может быть осуществлено выбором ε независимо от x, что и завершает доказательство.

125. Третий признак сходимости *). *Ряд Fourier сходится и имеет своей суммой предел при* $\alpha=0$ *функции*

$$\frac{1}{2\alpha}\int_0^{\alpha}[f(x+\alpha)+f(x-\alpha)]\,d\alpha$$

в каждой точке x, *для которой эта функция от* α *будет ограниченной вариации в промежутке* $(0,\varepsilon)$.

Пусть S будет этот предел, который, при наших предположениях, существует. Подставим его в выражение для $\varphi(\alpha)$; функция *ограниченной вариации*

*) Мы опубликовали его в Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, в 1911 г.

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \varphi(\alpha)d\alpha = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha [f(x+\alpha)+f(x-\alpha)-2S]\,d\alpha$$

стремится к 0 вместе с α, и я утверждаю, что правило n°119 применимо.

Действительно, напишем k вместо $m+\frac{1}{2}$ и проинтегрируем по частям интеграл, фигурирующий в формулировке этого правила. Мы получим:

$$\int_0^\varepsilon \varphi(\alpha)\sin k\alpha \frac{d\alpha}{\alpha} = \Psi(\varepsilon)\sin k\varepsilon - \int_0^\varepsilon \Psi(\alpha)\,\alpha\,d\,\frac{\sin k\alpha}{\alpha}.$$

Пусть дано положительное число ω. Можно взять ε достаточно малым, чтобы член вне интеграла был $< \omega$ при любом k (или m), ибо $\Psi(\varepsilon)$ стремится к 0 вместе с ε. Остается показать, что то же условие можно осуществить и по отношению к интегралу.

Так как Ψ ограниченной вариации, то можно, как и в предыдущем n°, предположить Ψ положительной не убывающей функцией. Тогда, по второй теореме о среднем, интеграл приведется к

$$\Psi(\varepsilon)\int_{\varepsilon'}^\varepsilon \alpha\,d\,\frac{\sin k\alpha}{\alpha} = \Psi(\varepsilon)\,[\sin k\alpha]_{\varepsilon'}^{\varepsilon} - \Psi(\varepsilon)\int_{\varepsilon'}^\varepsilon \frac{\sin k\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Итак, взяв ε, а с ним и $\Psi(\varepsilon)$, достаточно малым, можно сделать абсолютную величину этого выражения $< \omega$, при любом k.

Если $\Psi(\varepsilon)$ равномерно стремится к 0, при изменении x, сходимость будет *равномерной же*.

Довольно легко видеть, что этот признак содержит два предшествующих. Наоборот, как это заметил Lebesgue, он является частным случаем следующего:

126. Четвертый признак сходимости (Lebesgue). *Ряд Fourier сходится (равномерно) и имеет суммой $f(x)$ в каждой точке (в каждом промежутке, содержащемся в другом), где $f(x)$ непрерывна, если, каково бы ни было положительное число ω, можно поставить ему в соответствие два положительных числа ε и δ_1 так, чтобы, при $\delta < \delta_1$, было*

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\varepsilon \left|\frac{\varphi(\alpha+\delta)-\varphi(\alpha)}{\alpha}\right| d\alpha < \omega.$$

Мы воспользуемся условиями n°120. Если f непрерывна, $\Phi'(0) = 0$ и $\Phi(\alpha) : \alpha$ стремится (равномерно) к нулю.

Интеграл (14) по модулю меньше только что написанного, чем и оправдывается наше утверждение.

Обобщение. Если применить вторую теорему n°120, вместо первой, го можно обобщить признак Lebesgue'а. А именно, можно заменить интеграл, фигурирующий в этом признаке, более общим интегралом

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon} |\Delta^n \varphi(\alpha)| \frac{d\alpha}{\alpha},$$

который приводится к прежнему при $n=1$.

127. Пятый признак сходимости (Dini). *Ряд Fourier сходится равномерно и имеет суммой $f(x)$ в каждом промежутке, содержащемся внутри другого, в котором $f(x)$ непрерывна и в котором произведение*

$$\operatorname{Log}\delta\ |\varphi(\alpha+\delta)-\varphi(\alpha)|$$

равномерно стремится к 0 вместе с δ.

Это—следствие признака Lebesgue'а (n^0 126). Каждому положительному ω соответствует такое δ_1, что при $\delta<\delta_1$ и любом α.

$$|\operatorname{Log}\delta|\cdot|\varphi(\alpha+\delta)-\varphi(\alpha)|<\omega,$$

в каковом случае

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\left|\frac{\varphi(\alpha+\delta)-\varphi(\alpha)}{\alpha}\right| d\alpha<\frac{\omega}{\pi\,|\operatorname{Log}\delta|}\int_{\delta}^{\varepsilon}\frac{d\alpha}{\alpha}<\frac{\omega}{\pi},$$

так что условие, упоминаемое в этом признаке, выполняется.

Обобщение. *Ряд Fourier равномерно сходится и имеет своей суммой $f(x)$ в каждом промежутке, содержащемся внутри другого, в котором $f(x)$ непрерывна и произведение*

$$\operatorname{Log}\delta\cdot\Delta^n\varphi(\alpha)$$

равномерно стремится к 0 вместе с δ.

Доказательство—такое же, как и в предшествующем случае, но исходной точкой служит обобщение признака Lebesgue'а (n^0 126).

§ 5. Примеры разложений в ряды Fourier.

128. Случай непериодических функций. Ряды синусов и ряды косинусов. Может встретиться надобность в разложении непериодической функции в некотором промежутке длины 2π, например, в промежутке $(-\pi,\pi)$. Тогда переходят к случаю периодической функции с помощью следующего приема:

Пусть $F(x)$ будет предложенная функция. Заменим ее функцией $f(x)$ с периодом 2π, определенной условием быть равной $F(x)$ в промежутке $(-\pi+0,\pi)$, т. е. с исключением его левого конца. Разложение $f(x)$ в ряд Fourier будет и разложением $F(x)$.

Свойства $f(x)$ позволяют установить поведение ряда на концах промежутка. Предположим $F(x)$, а следовательно, и $f(x)$—ограниченной вариации. При $x=\pi$, сумма ряда будет

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\frac{F(\pi-0)+F(-\pi+0)}{2}.$$

Итак, если F непрерывна, но не периодична, то на концах промежутка ряд будет вести себя так же, как в точках разрыва. Наоборот, если F непрерывна и принимает одинаковые значения в точках $x = \pm\pi$, сходимость будет равномерной во всем промежутке, согласно признаку Jordan'а (n° 124).

Можно также предложить себе разложить $F(x)$ в ряд косинусов (или синусов) в промежутке длины π, например, в $(0, \pi)$. Тогда вместо $F(x)$ подставляют функцию $f(x)$, четную (или нечетную), периода 2π, определяемую условием быть равной $F(x)$ в промежутке от 0 до π. Разложение $f(x)$ и будет искомым, ибо оно содержит лишь косинусы, если f четная функция, и одни лишь синусы, если f нечетная.

129. Примеры на ряды синусов. Коэффициенты b_m разложения в ряд синусов, так как f нечетная функция, могут быть представлены в виде

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha\right],$$

откуда, заменяя α на $\pi - \alpha$ в последнем интеграле,

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\alpha) - (-1)^m f(\pi - \alpha)]\sin m\alpha\, d\alpha.$$

Первый пример. Пусть предложено разложить $\frac{\pi}{4}$ в промежутке $(0, \pi)$; имеем $f(\alpha) = f(\pi - \alpha)$, так что $b_{2k} = 0$ и

$$b_{2k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2k+1}.$$

Следовательно, между 0 и π (исключая пределы)

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots$$

Между $-\pi$ и 0 этот ряд имеет суммой $-\frac{\pi}{4}$. При $x = 0$ его сумма обращается в нуль, среднее арифметическое предельных значений с одной и с другой стороны, согласно общей теории.

Второй пример. Пусть предложено разложить $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в промежутке $(0, \pi)$. Имеем $f(\alpha) = -f(\pi-\alpha)$, так что $b_{2k+1}=0$ и, интегрируя по частям,

$$b_{2k} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{2\alpha}{\pi}\right) \sin 2k\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2k\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2k}$$

Следовательно, между 0 и π (пределы исключаются)

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} + \dots$$

и ряд также имеет разрыв при $x=0$.

Вычитая это разложение из предыдущего, получим

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots;$$

так как обе части равенства суть нечетные функции, обращающиеся в нуль при $x=0$, то эта формула имеет место между $-\pi$ и π (пределы исключаются).

Подобным же образом, складывая, найдем

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

и эта формула справедлива от 0 до 2π (пределы исключаются), ибо обе ее части лишь меняют знак, если x заменить на $2\pi - x$.

130. Примеры на ряды косинусов. Коэффициенты a_m разложения в ряд косинусов, в виду четности f, могут быть представлены в виде

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha\right],$$

откуда, заменяя в последнем интеграле α на $\pi-\alpha$,

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\alpha) + (-1)^m f(\pi-\alpha)] \cos m\alpha\, d\alpha.$$

Пример 1. Пусть предложено разложить $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в промежутке $(0, \pi)$. Так как $f(\alpha) = -f(\pi-\alpha)$, то $a_{2k}=0$ и, интегрируя по частям,

$$a_{2k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{2\alpha}{\pi}\right) \cos(2k+1)\alpha\, d\alpha = \frac{2}{(2k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)\alpha\, d\alpha,$$

откуда $a_{2k+1} = 2 : (2k+1)^2\pi$. Следовательно,

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right].$$

Это равенство имеет место между 0 и π, включая пределы.

Пример 2. Пусть предложено разложить $\sin px$ (p — целое) в промежутке $(0, \pi)$.

Если p четное, $f(\alpha) = -f(\pi - \alpha)$, так что $a_{2k} = 0$ и

$$a_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin p\alpha \cos(2k+1)\alpha\, d\alpha = \frac{4p}{\pi}\,\frac{1}{p^2 - (2k+1)^2}.$$

Если же p — нечетное, $f(\alpha) = f(\pi - \alpha)$, так что $a_{2k+1} = 0$ и

$$a_{2k} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin p\alpha \cos 2k\alpha\, d\alpha = \frac{4p}{\pi}\cdot\frac{1}{p^2 - (2k)^2}.$$

Окончательно получаем, между 0 и π,

$$\sin px = \begin{cases} \dfrac{4p}{\pi}\left[\dfrac{\cos x}{p^2 - 1} + \dfrac{\cos 3x}{p^2 - 3^2} + \dfrac{\cos 5x}{p^2 - 5^2} + \dots\right] & (p \text{ четное}) \\ \dfrac{4p}{\pi}\left[\dfrac{1}{2p^2} + \dfrac{\cos 2x}{p^2 - 2^2} + \dfrac{\cos 4x}{p^2 - 4^2} + \dots\right] & (p \text{ нечетное}) \end{cases}$$

Пример 3. Пусть предложено разложить $\operatorname{Log}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$ в ряд косинусов в промежутке $(0, \pi)$. Прежде всего, имеем (том I, n° 249, III),

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{Log}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = 2\operatorname{Log} 2 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{Log}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = 0.$$

Затем, интегрируя по частям и воспользовавшись формулой (5) n° 114, будет иметь

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos m\alpha \operatorname{Log}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = -\frac{1}{m\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin m\alpha \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha =$$

$$= -\frac{1}{m\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha - \frac{1}{m\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(m - \frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha =$$

$$= -\frac{1}{m}.$$

Итак, между 0 и π,

$$-\operatorname{Log}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\ldots$$

Если левую часть написать в виде $-\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right)$, то обе части будут четными функциями с периодом 2π, так что равенство будет иметь место при любом x. Рассматриваемая в этом случае функция уже не является ограниченной, она обращается в бесконечность при $x=k\pi$.

§ 6. Произвольные ряды Fourier. Суммирование. Особенности.

131. Интегрирование рядов Fourier. Теорема. *Ряд Fourier (даже расходящийся) абсолютно интегрируемой функции* (n^0 113) *всегда можно почленно проинтегрировать в любом промежутке. Если концы промежутка меняются, сходимость ряда интегралов оказывается равномерной* (Lebesgue).

Рассмотрим формальное разложение

$$f(x)-\frac{1}{2}a_0 \backsim \sum_1^\infty(a_m\cos mx+b_m\sin mx), \qquad (1)$$

причем знак $\backsim$ означает лишь, что правая часть есть ряд Fourier для функции в левой части, т. е. что a_m, b_m суть постоянные Fourier функции $f(x)$.

Обозначим через $F(x)$ интеграл левой части в пределах от 0 до x; имеем

$$F(2\pi)=\int_0^{2\pi}\left|f(x)-\frac{a_0}{2}\right|dx=0. \qquad (2$$

Так как $F(x)$ непрерывна, ограниченной вариации *) и, сверх того, обращается в нуль при $x=0$ и при $x=2\pi$, то она может быть (n^0 124) разложена между 0 и 2π в равномерно сходящийся ряд Fourier вида

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_1^\infty(A_m\cos mx+B_m\sin mx). \qquad (3$$

Коэффициенты Fourier функции F приводятся к коэффициентам Fourier функции f при помощи интегрирования по частям (том I см. nn^0 231, 243, 254, 280, в зависимости от того, идет ли речь

*) Это вытекает из общей теоремы о неопределенных интегралах Lebesgue'а (том I, n^0 265), но может быть и независимо от нее вполне аналогично получено и непосредственно для функций, имеющих элементарный интеграл.

Прим. ред.

о функциях, имеющих элементарный интеграл, интегрируемых в смысле Riemann'a или суммируемых в смысле Lebesgue'a). Так как члены вне интегралов обращаются в нуль, мы получим

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos mx\,dx = -\frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx = -\frac{b_m}{m}$$

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_0 F(x)\sin mx\,dx = \frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_m}{m}.$$

Подставим эти значения в разложение (3) и исключим A_0, вычитая из равенства (3) то, которое из него же получается при $x = 0$. Мы найдем для x между 0 и 2π следующее равномерно сходящееся разложение:

$$F(x) = \sum_1^{\infty} \frac{b_m(1-\cos mx) + a_m \sin mx}{m}.$$

Этот результат в точности совпадает с тем, что получилось бы при почленном интегрировании правой части разложения (1). Итак, почленное интегрирование допустимо в любом промежутке, содержащемся между 0 и 2π; в виду периодичности функции f, оно допустимо и в каком угодно промежутке вообще *).

132. Суммирование расходящихся рядов Fourier. *Суммировать расходящийся ряд Fourier это значит, зная этот ряд, определить производящую функцию, или, другими словами, определить $f(x)$ по ее постоянным Fourier.*

Предшествующая теорема указывает первый способ для решения этого вопроса, ибо она позволяет определить неопределенный интеграл от $f(x)$, а следовательно, и самое функцию $f(x)$ в тех точках, в которых она является производной от своего интеграла **), в частности, всегда, где она непрерывна.

---

*) Полагая в (3) $x = 0$ и $A_m = -\frac{b_m}{m}$, приходим к заключению, что если ряд $\sum (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$ есть ряд Fourier абсолютно интегрируемой функции, то необходимо ряд $\sum \frac{b_m}{m}$ сходится. Это дает возможность легко построить заведомо сходящийся тригонометрический ряд, который однако не будет рядом Fourier от абсолютно интегрируемой функции. Вот пример такого ряда (Fatou): $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin mx}{\operatorname{Log} m}$. Ряд этот при любом x сходится (см. том I, 1-ый пример для упражнений, стр. 456); в то же время ряд $\sum \frac{1}{m \operatorname{Log} m}$, как мы знаем (том I, n° 377, 3°), расходится.

Прим. ред.

**) Т. е. почти везде, если стать на точку зрения Lebesgue'a.

Этот способ, однако, не прямой. Можно воспользоваться применительно к тригонометрическим рядам и общими приемами суммирования расходящихся рядов, изученных E. Borel'ем (*Leçons sur les séries divergentes*). Мы укажем сейчас, в чем они состоят.

133. Общий прием суммирования расходящихся рядов. Прием E. Borel'я состоит в умножении членов предложенного расходящегося ряда

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

последовательно на множителей, зависящих от параметра r,

$$a_0(r),\ a_1(r),\ \ldots,\ a_n(r),\ \ldots,$$

причем предполагается, что множители $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, с возрастанием n не возрастают и стремятся к 1, когда параметр r стремится к некоторому пределу r_0. Множителей подбирают так, чтобы вспомогательный ряд

$$\sum a_n(r)\, u_n$$

сходился, покуда r не достигает своего предела. Тогда, если сумма этого вспомогательного ряда, зависящего от r, стремится к определенному пределу, когда r стремится к r_0, то этот предел, по определению, и будет суммой (в обобщенном смысле) предложенного расходящегося ряда.

Это обобщение понятия о сумме ряда было бы, очевидно, бесполезно, если бы не имела место теорема:

Теорема. *Сумма ряда в обобщенном смысле совпадает с суммой ряда в обычном смысле всякий раз, когда ряд сходится.*

Члены вспомогательного ряда стремятся к соответствующим членам предложенного ряда. Остается лишь показать, что можно в первом из них почленно перейти к пределу при $r=r_0$; с этой целью достаточно установить, что из сходимости предложенного ряда вытекает р а в н о м е р н а я сходимость вспомогательного ряда при переменном r.

Пусть ε будет положительное число. Положим

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \ldots$$

Так как ряд сходится, то можно определить такое число N, что $|R_n| < \varepsilon$ при $n > N$. Остаток ρ_n вспомогательного ряда может быть представлен в виде

$$\rho_n = a_n(R_n - R_{n+1}) + a_{n+1}(R_{n+1} - R_{n+2}) + a_{n+2}(R_{n+2} - R_{n+3}) + \ldots =$$
$$= a_n R_n + (a_{n+1} - a_n) R_{n+1} + (a_{n+2} - a_{n+1}) R_{n+2} + \ldots$$

Все R по модулю $< \varepsilon$, все выражения в скобках отрицательны, так что, при $n > N$, имеем также

$$|\rho_n| < \varepsilon\,[a_n + (a_n - a_{n+1}) + \ldots] < 2\varepsilon a_n < 2\varepsilon.$$

Итак, сходимость равномерна, ибо N не зависит от r.

134. Способ среднего арифметического. Указанный выше прием суммирования был применен к тригонометрическим рядам еще Poisson'**ом**, у которого $a_n = r^n$ и r, будучи меньше единицы, стремится к $r_0 = 1$. Мы также в свое время *) нашли новый прием того же типа. Оставляя эти методы в стороне, мы займемся подробнее *способом среднего арифметического*, который к рядам Fourier с большим успехом применил L. Fejèr. Этот способ (входящий, как частный случай, в общий метод, указанный E. Borel'ем) состоит в том, что рассматриваемому ряду в качестве суммы приписывается предел (если он существует) среднего арифметического σ_n его первых n частных сумм, т. е. предел выражения

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,u_k, \tag{4}$$

где S_i означает сумму $i+1$ членов данного ряда.

Множители a, фигурирующие в общем методе E. Borel'я, здесь имеют вид $\left(1-\frac{k}{n}\right)$ и стремятся к 1, когда параметр n (вместо r) стремится к бесконечности. Но, начиная с определенного места, все коэффициенты a становятся нулями, что может быть рассматриваемо как преимущество, ибо, благодаря этому, суммы σ_n определяют *конечные тригонометрические последовательности.*

Если ряд сходится, то способ среднего арифметического приводит к тому же результату, что и обычное суммирование ряда. Обратное утверждение не всегда верно; оно, однако, имеет место в одном важном случае, как показывает следующая теорема:

135. Теорема Hardy-Landau. *Если члены ряда $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ положительны или, по крайней мере, произведение mu_m остается большим некоторого постоянного отрицательного числа, то, коль скоро ряд суммируем по способу среднего арифметического, он оказывается сходящимся, так что та же сумма может быть получена и обычным процессом суммирования.*

Пусть, как и выше,

$$S_m = \sum_0^m u_i, \quad \sum_0^{m-1} S_i = m\sigma_m.$$

Отсюда выводим, для любого целого $p < m$,

$$\sum_{m-p}^{m-1} S_k = m\sigma_m - (m-p)\,\sigma_{m-p} = p\sigma_{m-p} + m(\sigma_m - \sigma_{m-p}),$$

$$\sum_{m}^{m+p-1} S_l = (m+p)\,\sigma_{m+p} - m\sigma_m = p\sigma_{m+p} + m\,(\sigma_{m+p} - \sigma_m).$$

*) Bulletins de l'Académie Royale de Belgique, n⁰ 3, 1908.

Но если k содержится между $m-p$ и m, а l — между m и $m+p$, то

$$S_k = S_m - (u_{k+1} + \ldots + u_m) < S_m + p\frac{A}{m-p}$$

$$S_l = S_m + (u_{m+1} + \ldots + u_l) > S_m - p\frac{A}{m},$$

так как выражения в скобках содержат не более p членов.

Подставляя эти пределы в предшествующие равенства и разделяя на p, выводим отсюда

$$S_m + \frac{p}{m-p}A > \sigma_{m-p} + \frac{m}{p}(\sigma_m - \sigma_{m-p}),$$

$$S_m - \frac{p}{m}A < \sigma_{m+p} - \frac{m}{p}(\sigma_{m+p} - \sigma_m).$$

Пусть S будет предел σ_m. Заставим m и p одновременно стремиться к бесконечности так, чтобы и разность $m-p$ бесконечно возрастала, а отношение $p:m$ стремилось к данному положительному числу ε, которое может быть произвольно малым. Из предшествующих соотношений мы получим

$$\underline{\lim}\, S_m \geqslant S - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}A, \quad \overline{\lim}\, S_m \leqslant S + \varepsilon A.$$

В виду произвольной малости ε, отсюда следует, что $\lim S_m = S$.

136. Интеграл Fejèr'a. В случае рядов Fourier σ_m выражается замечательным интегралом, который следует поставить рядом с интегралом Dirichlet и который мы будем называть *интегралом Fejèr'a*.

Так как сумма S_m выражается интегралом Dirichlet (n⁰ 114), то мы для σ_m получаем выражение

$$\sigma_m = \frac{1}{m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\frac{\sum\limits_{0}^{m-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha;$$

и, применяя следующую формулу суммирования

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sum_{0}^{m-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha = \sum_{0}^{m-1}\frac{\cos k\alpha - \cos(k+1)\alpha}{2} = \frac{1-\cos m\alpha}{2},$$

приходим к интегралу Fejèr'a:

$$\sigma_m = \frac{1}{m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\frac{1-\cos m\alpha}{\left(2\sin\frac{1}{2}\alpha\right)^2}\,d\alpha. \tag{5}$$

Если заменить в нем $1-\cos m\alpha$ через $2\sin^2 m\frac{\alpha}{2}$ и переменную интегрирования α через 2α, то он приведется к виду

$$\sigma_m = \frac{1}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2\alpha)+f(x-2\alpha)]\left(\frac{\sin m\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 d\alpha. \tag{6}$$

Интеграл Fejèr'а имеет, по сравнению с интегралом Dirichlet ценное преимущество: множитель при f является существенно положительным, что делает возможным применение к нему теоремы о среднем значении. Мы тотчас же этим воспользуемся.

137. Теорема, получаемая применением теоремы о среднем к интегралу Fejèr'а. *Если через L и l обозначить верхнюю и нижнюю границы функции f, предполагая ее ограниченной, то все суммы σ_m Fejèr'а также будут содержаться между l и L.*

Действительно, применяя теорему о среднем к интегралv Fejèr'а, мы получаем, что σ_m содержится между

$$\frac{2l}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ и } \frac{2L}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin m\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 d\alpha,$$

т. е. между l и L, ибо, при $m \geqslant 1$, имеем

$$\frac{2}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin m\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = 1, \tag{7}$$

к чему и приводится интеграл Fejèr'а, когда f сводится к 1.

Отсюда L. Fejèr вывел весьма изящный результат:

Если $f(x)$, как и выше, ограничена числами l и L и если модули произведений ma_m и mb_m постоянных Fourier на значки при них не превосходят, при любом m, двух постоянных чисел A и B, то любая сумма S_m ряда Fourier содержится между

$$l-(A+B) \text{ и } L+(A+B).$$

В самом деле, равенство (4) n⁰ 134 может быть переписанс в виде

$$\sigma_n = S_{n-1} - \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} ku_k.$$

При нашем предположении

$$|ku_k| = |k(a_k\cos kx + b_k\sin kx)| < A+B.$$

Следовательно, $\sigma_n - S_{n-1}$ содержится между $\pm(A+B)$. Так как σ_n содержится между l и L, то отсюда и вытекает приведенное предложение.

Замечание. Предшествующая теорема всегда применима к функциям ограниченной вариации во всяком промежутке длины 2π. Действительно, *произведения* ma_m *и* mb_m *существенно ограничены, если функция ограниченной вариации.*

Достаточно доказать это для неубывающей функции. В этом случае, по второй теореме о среднем, имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{f(-\pi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\xi} + \frac{f(\pi)}{\pi}\int_{\xi}^{\pi}\cos mx\,dx,$$

следовательно,

$$a_m = \frac{f(-\pi)-f(\pi)}{\pi}\,\frac{\sin m\xi}{m};$$

аналогичная формула имеет место и для b_m, что и доказывает наше утверждение.

Применение. Имеем, между 0 и 2π (n^0 129)

$$\frac{\pi-x}{2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$$

В этом случае $l = -\frac{\pi}{2}$, $L = +\frac{\pi}{2}$, $A = 0$, $B = 1$, поэтому, каково бы ни было n, сумма

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n}$$

содержится между $\pm\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$.

138. Условие сходимости процесса Fejèr'а. Найдем условие для того, чтобы σ_m стремилась к определенному пределу S. С этой целью, вычтем из равенства (6) равенство (7) предыдущего n^0, умноженное на S. Полагая

$$\varphi(\alpha) = f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha) - 2S, \tag{8}$$

получим

$$\sigma_m - S = \frac{1}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

Условие того, чтобы σ_m стремилась (равномерно) к S, состоит в том, чтобы этот интеграл стремился (равномерно) к 0. Далее, сколь бы мало ни было положительное число ε, можно последовательно заменить в этом условии предшествующий интеграл двумя следующими:

$$\frac{1}{m\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha,\quad \frac{1}{m\pi}\int\limits_0^{\varepsilon} \varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha,$$

так как разности между каждым из них и предшествующим выражаются интегралами

$$\frac{1}{m\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\sin^2 m\alpha\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)d\alpha,\quad \frac{1}{m\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right) d\alpha,$$

которые по абсолютной величине, соответственно, меньше

$$\frac{1}{m\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(\alpha)|\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)d\alpha,\quad \frac{1}{m\pi\varepsilon^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(\alpha)|\, d\alpha,$$

и, следовательно, равномерно стремятся к 0, когда m стремится к бесконечности. Отсюда — следующее правило:

Правило. *Для того чтобы σ_m стремилась (равномерно) к S, необходимо и достаточно, чтобы каждому положительному числу ω можно было поставить в соответствие два числа ε и M (не зависящие от x) так, чтобы интеграл*

$$\frac{1}{m\pi}\int\limits_0^{\varepsilon} \varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha$$

был по модулю $< \omega$ для каждого целого $m > M$.

Это условие, очевидно, выполняется, если $\varphi(\alpha)$ стремится к 0 вместе с α, ибо тогда можно взять ε достаточно малым для того, чтобы, при $\alpha < \varepsilon$, $|\varphi(\alpha)|$ была $< \omega$, вместе с чем предшествующий интеграл становится по модулю меньше, чем

$$\frac{\omega}{m\pi}\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha < \frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha = \frac{\omega}{2}.$$

последний интеграл вычислен в n° 50.

Указанное обстоятельство имеет место: 1) в каждой точке непрерывности, если положить $S=f$; 2) в каждой точке разрыва I рода, если положить $2S=f(x+0)+f(x-0)$. Кроме того, приближение интеграла Fejèr'а к пределу f будет *равномерным* в каждом промежутке, содержащемся внутри промежутка непрерывности. Отсюда вытекает следующая теорема (впоследствии обобщенная Lebesgue'ом):

139. Теорема Fejèr'а. *Способ среднего арифметического позволяет суммировать ряд Fourier в каждой точке непрерывности* *функции $f(x)$ или в каждой точке разрыва I рода. Сумма, приписываемая при этом ряду, будет соответственно равна*

$$f(x) \text{ или } \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Следствие I. Если ряд Fourier сходится в точке непрерывности или разрыва первого ряда, то его суммой *необходимо* будут числа, указанные в предыдущей теореме. Это — частный случай теоремы, установленной в n⁰ 149.

Следствие II. Если произведения ma_m и mb_m ограничены, то произведение mu_m, где u_m есть общий член ряда Fourier, также ограничено. Можно применить теорему Hardy—Landau. Итак,

Если произведения ma_m и mb_m ограничены, ряд Fourier сходится и имеет суммой $f(x)$ в каждой точке непрерывности и $\frac{1}{2}[f(x-0)+$ $+f(x+0)]$ в каждой точке разрыва I рода.

Это обстоятельство имеет место для функций ограниченной вариации во всем промежутке, в силу замечания к n⁰ 137. Мы, таким образом, вновь находим, в частном случае, признак C. Jordan'a (n⁰ 134).

140. Теорема Lebesgue. *Ряд Fourier, суммируемый по способу среднего арифметического, имеет своей суммой $f(x)$ почти везде.*

Положим $S=f(x)$; мы покажем, что σ_m *стремится к $f(x)$ в каждой точке x, в которой $|\varphi(\alpha)|$, при $\alpha=0$, является производной от своего неопределенного интеграла.*

Интеграл правила n⁰ 138 по модулю меньше существенно положительного интеграла

$$\frac{1}{m\pi}\int_0^\varepsilon |\varphi(\alpha)|\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

Для доказательства применимости правила, очевидно, достаточно разложить этот интеграл на слагаемые, либо отрицательные, либо бесконечно малые вместе с $\frac{1}{m}$ (при постоянном ε), либо сколь угодно малые вместе с ε (при любом m).

Положим

$$\Phi(\alpha)=\int_0^\alpha |\varphi|\,d\alpha, \quad \Psi(\alpha)=\frac{\Phi}{\alpha^2}, \quad \Psi'=\frac{\Phi'}{\alpha^2}-\frac{2\Phi}{\alpha^3},$$

причем обе функции Ψ и Φ от α абсолютно непрерывны везде, исключая только точку $\alpha=0$, чем и оправдываются дальнейшие интегрирования по частям (том I, n⁰ 280).

Заметим, что в каждой точке x указанного рода (в которой $\Phi'(\alpha)=0$), отношение $\Phi(\alpha):\alpha$ стремится к нулю вместе с α.

Первое интегрирование по частям приводит интеграл, подлежащий разложению, к виду

$$\frac{\Phi(\varepsilon)\sin^2 m\varepsilon}{m\pi\varepsilon}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\Psi(\alpha)\sin 2m\alpha\,d\alpha+\frac{2}{m\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha}\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

Член вне интеграла бесконечно мал вместе с $\frac{1}{m}$, последний интеграл также, ибо этот интеграл (поскольку $\Phi(\alpha):\alpha$ стремится к нулю) имеет тот же вид, что и интеграл, который только что был рассмотрен при доказательстве теоремы Fejèr'a. Что касается среднего члена, то, если отбросить отрицательный член, он приводится к

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\varepsilon}\Psi(\alpha)\sin 2m\alpha\,d\alpha=\frac{\Psi(\varepsilon)\cos 2m\varepsilon}{2m\pi}-\frac{1}{2m\pi}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\varepsilon}\Psi'(\alpha)\cos 2m\alpha\,d\alpha.$$

Член вне интеграла бесконечно мал вместе с $\frac{1}{m}$. Следующий за ним интеграл меньше, чем

$$\frac{1}{2m\pi}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\varepsilon}|\Psi'|\,d\alpha<\frac{1}{2m\pi}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\varepsilon}\left(\frac{\Phi'}{\alpha^2}+\frac{2\Phi}{\alpha^3}\right)d\alpha.$$

Выполним еще одно интегрирование по частям по отношению к Φ' и оставим в стороне отрицательный член вне интеграла; это выражение меньше, чем

$$\frac{1}{2m\pi}\frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon^2}+\frac{2}{m\pi}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\varepsilon}\frac{\Phi}{\alpha^3}\,d\alpha.$$

Член вне интеграла бесконечно мал вместе с $\frac{1}{m}$. Под знаком интеграла имеем $\Phi<\omega\alpha$, где ω может быть предположено сколь угодно малым вместе с ε. Следовательно, интеграл меньше, чем

$$\frac{2\omega}{m\pi}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\varepsilon}\frac{d\alpha}{\alpha^2}<\frac{8\omega}{\pi^2}<\omega,$$

и, следовательно, сколь угодно мал вместе с ε.

Для доказательства утверждения Lebesgue'a остается еще показать, что $\Phi'(0)=0$ почти везде. Имеем

$$|\varphi(\alpha)|\leqslant|f(x+2\alpha)-f(x)|+|f(x-2\alpha)-f(x)|.$$

Следовательно, это условие осуществляется в каждой точке x, в которой

$$\int_0^{\alpha}|f(x+\alpha)-f(x)|\,d\alpha$$

имеет производную, равную нулю при $\alpha=0$; в частности же, в каждой точке x, в которой $|f(x)-c|$ будет производной от своего неопределенного интеграла, каково бы ни было c, т. е. почти везде (n⁰ 89).

141. Теорема. *Если $\varphi(x)$ и $f(x)$ суммируемы и, кроме того, f ограничена, интеграл*

$$F(u)=\int_a^b \varphi(x) f(x+u)\,dx$$

есть непрерывная функция от u. Если f не ограничена, то заключение остается в силе, если только φ^2 и f^2 суммируемы.

Предположим, что u изменяется так, что $x+u$ не выходит за пределы некоторого промежутка (A, B), в котором указанные условия имеют место. Сверх того, всегда можно допустить, что f и φ *не отрицательны*; мы и сделаем это предположение.

1⁰. *Если $f(u)$ непрерывна*, то можно придать u настолько малое приращение, чтобы приращение $f(x+u)$ было $<\varepsilon$ при любом x; тогда приращение $F(u)$ будет меньше, чем

$$\varepsilon\int_a^b |\varphi(x)|\,dx,$$

т. е. сколь угодно мало, так что $F(u)$ непрерывна.

2⁰. *Если f суммируема и, кроме того, ограничена*, например числом M, то, как мы знаем (n⁰ 80), за выключением внутренних точек некоторой системы D промежутков, сумма длин которых может быть предположена меньшей ε, в остающейся замкнутой совокупности функция f непрерывна; линейно интерполируя f в промежутках D, построим непрерывную функцию $\psi(x)$, так что

$$f(\alpha)=\psi(x)+\Omega(x),$$

причем $\Omega(x)$ равна 0 вне D, а в D по абсолютной величине не превосходит M. Мы получим

$$F(u)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x+u)\,dx+\int_a^b \varphi(x)\,\Omega(x+u)\,dx.$$

Итак, $F(u)$ непрерывна, ибо первый интеграл есть непрерывная функция от u, а второй интеграл меньше, чем

$$M\int_D \varphi(x-u)\,dx,$$

и, следовательно, в виду абсолютной непрерывности функции $\int \varphi\,dx$, сколь угодно мал вместе с mD, т. е. с ε.

3⁰. Наконец, *если f^2 и φ^2 суммируемы*, мы определим функцию f_n, равную f, если $f<n$, и n — в противном случае. Сколь бы мало ни было ω, мы можем взять n настолько большим, чтобы разность $f-f_n$

была нулем, за исключением разве лишь некоторой совокупности e точек с мерой $< \omega$. Тогда будем иметь

$$F(u) = \int_a^b \varphi(x) f_n(x+u)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,[f(x+u) - f_n(x+u)]\,dx.$$

Итак, $F(u)$ есть непрерывная функция от u, так как первый интеграл представляет собою такую функцию, а второй — сколь угодно мал вместе с ω, каково бы ни было u. Действительно, он меньше, чем

$$\int_e \varphi(x-u) f(x)\,dx < \int_e \varphi(x-u)^2\,dx + \int_e f(x)^2\,dx;$$

эти же интегралы сколь угодно малы вместе с me, в виду абсолютной непрерывности интегралов $\int \varphi^2\,dx$ и $\int f^2\,dx$.

142. Формулы Parseval'я. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ будут две функции с периодом 2π, квадраты которых суммируемы. Обозначим буквами a, b и α, β, соответственно, их коэффициенты Fourier. Суммируя ряд Fourier функции $f(x)$ по методу Fejèr'а (n⁰ 136), мы получим следующие два выражения для σ_m.

$$\frac{1}{m\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{1-\cos mu}{\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^2}\,du = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Умножим на $\varphi(x)\,dx : \pi$ и проинтегрируем от $-\pi$ до π, что можно в первом члене произвести под знаком $\int$. Полагая

$$F(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) f(x+u)\,dx,$$

получим

$$\frac{1}{m\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \frac{1-\cos mu}{\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^2}\,du = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_1^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right)(a_k\alpha_k + b_k\beta_k).$$

Новый интеграл является интегралом Fejèr'а для функции F. Но, в силу предшествующей теоремы, $F(u)$ непрерывна при $u = 0$. Следовательно, когда m стремится к бесконечности, этот интеграл, по теореме Fejèr'а (n⁰ 139), стремится k

$$F(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) f(x)\,dx.$$

Что касается второй части равенства, то ее предел будет

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_1^{\infty}(a_k\alpha_k+b_k\beta_k),$$

если только этот ряд сходится (n^0 133). Для доказательства сходимости, положим $\varphi(x)=f(x)$; мы будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\lim_{m=\infty}\sum_1^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)(a_k^2+b_k^2)$$

Итак, ряды $\sum a_k^2$ и $\sum b_k^2$ сходятся, ибо, если бы эти ряды имели бесконечные суммы, предел второй части не мог бы быть конечным, так как он превосходит сумму любого конечного числа членов этих рядов.

Теперь, так как

$$|a_k\alpha_k|<\frac{a_k^2+\alpha_k^2}{2},\quad |b_k\beta_k|<\frac{b_k^2+\beta_k^2}{2},$$

ряды $\sum a_k\alpha_k$ и $\sum b_k\beta_k$ *абсолютно сходятся*, что мы и желали доказать.

Окончательно, мы таким образом установили формулы Parseval'я:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi(x)\,dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_1^{\infty}(a_k\alpha_k+b_k\beta_k),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_1^{\infty}(a_k^2+b_k^2),$$

при единственном условии, чтобы f^2 и φ^2 были суммируемы.

143. Особенности рядов Fourier непрерывных функций. Ряд Fourier может представить два рода особенностей, которые заслуживают внимания. Прежде всего он может расходиться, без того, однако, чтобы функция переставала быть непрерывной. Это — особенность P. du Bois-Reymond'а, которую он указал в 1876 г. Затем он может представлять непрерывную функцию, но не сходясь равномерно в промежутке непрерывности. Это — особенность Lebesgue'а, которая была им указана в 1905 г.

L. Fejèr указал систематический прием для построения этих особенностей. Излагаемый нами прием, построенный впрочем по образцу Fejèr'а, проливает свет на этот вопрос.

Положим

$$\varphi(n,x)=2\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}\right).$$

Мы знаем (n^0 137), что эта функция не превосходит по абсолютной величине постоянного числа A, каковы бы ни были n и x.

Пусть теперь m будет целое число $> n$; две функции

$$\varphi(n, x) \sin mx, \quad -\varphi(n, x) \cos mx,$$

ограничены по абсолютной величине числом A. Их разложения Fourier, написанные в натуральном порядке членов, представляются конечными суммами косинусов и синусов

$$\sum_{r=n}^{1} \frac{\cos(m-r)x}{r} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\cos(m+r)x}{r}, \tag{1}$$

$$\sum_{r=n}^{1} \frac{\sin(m-r)x}{r} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\sin(m+r)x}{r}. \tag{2}$$

Мы воспользуемся свойствами *частных сумм* этих двух разложений (при этом *частными суммами* разложения Fourier, члены которого расположены в естественном порядке, мы будем называть сумму какой-нибудь группы *последовательных членов* этого разложения).

Первое свойство. *Когда x изменяется от $2k\pi + \varepsilon$ до $2k\pi + (2\pi - \varepsilon)$, для абсолютных величин частных сумм разложений (1) и (2) можно указать границу $L(\varepsilon)$, зависящую лишь от ε.*

Очевидно, достаточно доказать это для сумм двух следующих типов простыми линейными сочетаниями (которых и являются рассматриваемые частные суммы)

$$\sum_{r=1}^{s} \frac{\cos(m \pm r)x}{r}, \quad \sum_{r=1}^{s} \frac{\sin(m \pm r)x}{r}, \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

Модуль каждой из этих сумм меньше модуля выражения, которое получится, если мы к первой сумме прибавим вторую, умноженную на i (или на $\sqrt{-1}$), т. е. выражения

$$e^{mix} \sum_{r=1}^{s} \frac{e^{\pm rix}}{r}.$$

Но, так как множитель $1:r$ положителен и убывает, модуль этого выражения, в силу теоремы Abel'я (том I, n⁰ 387), имеет ту же границу, что и модули выражений

$$\sum_{1}^{s} e^{\pm rix} = \frac{e^{\pm ix}(e^{\pm six} - 1)}{e^{\pm ix} - 1} = \pm \frac{e^{\pm \frac{ix}{2}}(e^{\pm six} - 1)}{2i \sin \frac{x}{2}}.$$

Эти все выражения по модулю $< 1 : \left|\sin \frac{x}{2}\right|$ и, следовательно, имеют границей $1 : \sin \frac{\varepsilon}{2}$.

Второе свойство. Если x может стремиться к $2k\pi$, то первое свойство пропадает, и в разложениях (1) и (2), соответственно, проявляются зародыши особенностей du Bois Reymond'a и Lebesgue'a.

Действительно, при $x=2k\pi$ разложение (1) содержит частную сумму, бесконечно возрастающую вместе с n, именно

$$\sum_1^n \frac{1}{r} > \int_1^{n+1} \frac{dr}{r} > \operatorname{Log} n.$$

При $x=\pi:2m+2k\pi$, разложение (2) также содержит частную сумму, бесконечно возрастающую вместе с n, именно (так как $m>n$)

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{m-r}{m}\frac{\pi}{2}\right)}{r} > \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\frac{m-r}{m}\right)}{r} = \sum_1^n \frac{1}{r} - \frac{n}{m} > \operatorname{Log} n - 1.$$

Построение особенностей. Пусть теперь $a_1+a_2+\ldots$ будет сходящийся бесконечный ряд с положительными членами. Зададим две последовательности возрастающих целых чисел b_n, c_n ($b_n<c_n$), определяемых их значками, и построим два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(b_n, x) \sin(c_n x) = \Phi(x), \tag{I}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(b_n, x) \cos(c_n x) = \Psi(x). \tag{II}$$

Эти два ряда абсолютно и равномерно сходятся, так как их члены по абсолютной величине меньше соответствующих членов положительного ряда $A\sum a_n$. Итак, эти два ряда имеют суммами *непрерывные функции*.

Предположим, что b_n возрастает настолько быстро, что произведение $a_n \operatorname{Log} b_n$ бесконечно возрастает вместе с n. Тогда, согласно второму из указанных выше свойств, разложение Fourier общего члена (I) содержит частную сумму, бесконечно возрастающую вместе с n при $x=2k\pi$; разложение же общего члена (II) содержит частную сумму, бесконечно возрастающую вместе с n в окрестности точки $x=2k\pi$.

Предположим далее, что c_n возрастает настолько быстро вместе с n, что разложения Fourier двух последовательных членов ряда (I) или ряда (II) не содержат членов, соответствующих одинаковым кратным x. Для этого достаточно распорядиться так, чтобы было *)

$$c_n > c_{n-1} + b_{n-1} + b_n.$$

Тогда ряды Fourier функций Φ и Ψ получатся, если просто написать одно вслед за другим разложения Fourier последовательных членов рядов

*) Всем этим условиям можно удовлетворить, напр., полагая

$$a_n = \frac{1}{2^n}, \quad b^n = 2^{n^3}, \quad c_n = 2^{(n+1)^3}.$$

(I) и (II)*). Частные суммы разложений общих членов этих рядов в то же время будут и частными суммами разложений Fourier и самих функций Φ и Ψ.

Итак, *ряд Fourier функции Φ расходится при $x = 2k\pi$; ряд же Fourier функции Ψ не может сходиться равномерно в окрестности $x = 2k\pi$.*

Наоборот, сколь бы мало ни было ε, оба ряда Fourier сходятся равномерно в промежутке от $2k\pi + \varepsilon$ до $2k\pi + (2\pi - \varepsilon)$. Докажем это относительно первого ряда, ибо для второго рассуждение вполне аналогично. Сумма S_m первых членов ряда Fourier функции Φ слагается из некоторой суммы S_{n-1} первых членов ряда (I) и из некоторой частной суммы разложения Fourier следующего члена ряда (I), т. е. члена

$$a_n \varphi(b_n x) \sin(c_n, x).$$

Но последняя частная сумма по модулю меньше, чем $a_n L(\varepsilon)$ (по первому из указанных выше свойств), и равномерно стремится к нулю, когда n (или m) стремится к бесконечности. Поэтому она не оказывает влияния на сходимость и ряд Fourier функции Φ сходится так же, как и ряд (I).

Итак, ряды Fourier функций Φ и Ψ могут перестать сходиться лишь для значений $2k\pi$. Мы видели уже, что ряд для Φ расходится; следовательно, *он представляет в точках $x = 2k\pi$ особенность P. du Bois Reymond'a.* Ряд же для Ψ, наоборот, сходится и для $x = 2k\pi$, ибо все его члены обращаются в нуль; но мы сейчас видели, что в окрестности этих точек он не может сходиться *равномерно*; следовательно, *он представляет в окрестности точек $x = 2k\pi$ особенность H. Lebesgue'a.*

Ряды Fourier функций Φ и Ψ содержат, соответственно, одни лишь косинусы или синусы, но *имеют одни и те же коэффициенты*. Говорят в этом случае, что ряды *взаимно сопряжены*. Таким образом функции Φ и Ψ дают пример сопряженных рядов Fourier, представляющих один — особенность du Bois Reymond'a, а другой—особенность Lebesgue'a. Первым, давшим пример, осуществляющий эти условия, был L. Fejèr.

Замечание. Если видоизменить определения функций Φ и Ψ, заменяя x через nx в общем члене рядов (I) и (II), то функции Φ и Ψ не перестанут быть непрерывными. Ряд Fourier функции Φ станет расходящимся для каждого значения x, соизмеримого с π, но мы не знаем его поведения для прочих значений x; ряд Fourier для Ψ не сможет сходиться равномерно ни в каком промежутке, но мы не можем быть уверены в его сходимости вообще.

§ 7. Произвольные тригонометрические ряды. Единственность разложения.

144. Теорема G. Cantor'a. Мы начнем с упоминания о важной теореме, принадлежащей G. Cantor'у.

---

*) В этом легко убедиться, если, имитируя процесс Euler - Fourier (n° 111), умножить обе части равенства (I) [или (II)] на $\cos mx$ [или $\sin mx$] и проинтегрировать между 0 и 2π, что по отношению к ряду, сходящемуся равномерно, может быть выполнено почленно. Затем лишь, заменяя каждый член ряда (I) или (II)] его конечным тригонометрическим разложением, увидим, что все интегралы, кроме одного, будут нулями и что член разложения Fourier функции Φ [или Ψ], содержащий $\cos mx$ [или $\sin mx$], действительно, тождествен с соответствующим членом разложения одного из членов ряда (I) [(II)]. *Прим. ред.*

Если тригонометрический ряд сходится для всех точек некоторого промежутка, то коэффициенты его стремятся к нулю.

Это предложение могло бы сократить доказательство в n⁰ 140, но, как мы увидим, без него все же можно обойтись. Так как доказательство этой теоремы немного отвлеченно, то мы укажем его лишь петитом.

Оно является частным случаем следующей теоремы:

Теорема. *Тригонометрический ряд, общий член которого есть* $\rho_m \cos m(x-\alpha_m)$, *почти везде расходится, если* ρ_m *не стремится к нулю* (Lebesgue).

Если ρ_m (которое мы предположим положительным) не стремится к нулю, то найдется такое положительное число δ, что бесконечное множество ρ_m будет больше δ. Обозначим их значки через $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ Пусть ε будет произвольно малое положительное число. Если m есть одно из значений указанной последовательности, то совокупность E_m точек x между 0 и 2π, в которых

$$\rho_m |\cos m(x-\alpha_m)| < \varepsilon\delta,$$

очевидно, имеет ту же меру, как и совокупность точек x, в которых

$$\rho_m |\cos mx| < \varepsilon\delta,$$

и меньшую меру, чем совокупность точек, в которых $|\cos mx| < \varepsilon$. Но последняя совокупность состоит из $2m$ промежутков, сумма длин которых остается тою же при любом m (ибо длина каждого будет при $m=n$ в n раз меньше длины промежутка, соответствующего $m=1$). Обозначим эту сумму длин через ω; ω будет бесконечно мала вместе с ε, как это непосредственно видно для случая $m=1$.

Рассмотрим теперь последовательность совокупностей

$$E_{m1}, E_{m2}, E_{m3}, \ldots$$

Все эти совокупности имеют меру $<\omega$, поэтому (том I, n⁰ 81) и их предельная совокупность в узком смысле имеет меру $<\omega$. Вне этой совокупности ряд будет иметь неограниченное множество членов $>\varepsilon\delta$ и, следовательно, расходится. Итак, ряд будет расходящимся между 0 и 2π, исключая точек некоторой совокупности с мерой $<\omega$, где ω бесконечно мало вместе с ε, следовательно, ряд расходится почти везде.

Вот другая теорема, аналогичная предшествующей теореме Lebesgue'а:

Теорема. *Для тригонометрического ряда, общий член которого есть* $\rho_m \cos m(x-\alpha_m)$, *хоть одна из границ неопределенности его частных сумм будет почти везде бесконечна, если* ρ_m *не ограничено* *).

Пусть s_m будет сумма m первых членов ряда. Если бы s_m была ограничена при любом m, то и общий член (который является разностью двух последовательных s_m) также был бы ограничен. Поэтому достаточно показать, что *если* ρ_m *не ограничено, то и общий член* $\rho_m \cos m(x-\alpha_m)$ *может оказаться ограниченным разве лишь для значений* x, *совокупность которых имеет меру нуль.*

---

*) C. de Vallée Poussin, *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique.* (Classe des Sciences), 1913, n⁰ 1, pp. 9—14.

Если ρ_m не ограничено, то можно из положительной последовательности $\rho_1, \rho_2, \ldots$ выделить частичную последовательность, члены которой, постоянно возрастая, стремятся к бесконечности. Так как достаточно было бы доказать теорему для этой последовательности, то мы можем предположить, что такова уже и исходная последовательность.

Пусть E_m будет совокупность точек промежутка $(0, 2\pi)$, для которых

$$|\rho_m \cos m(x-\alpha_m)| > \sqrt{\rho_m} \text{ или } |\cos m(x-\alpha_m)| > \frac{1}{\sqrt{\rho_m}}.$$

Мера E_m, очевидно, стремится к 2π, когда m и вместе с ним ρ_m стремятся к бесконечности.

Но $\rho_m \cos m(x-\alpha_m)$ не может быть ограничено при любом m, если x принадлежит бесконечному множеству совокупностей $E_1, E_2, \ldots$, т. е. содержится в предельной совокупности E (в широком смысле) для этой последовательности. Но, сколь бы мало ни было ε, эта последовательность содержится бесконечное множество совокупностей с мерой $> 2\pi - \varepsilon$, следовательно, и мера $E > 2\pi - \varepsilon$ (том I, n°81), т. е. — в виду произвольности ε, равна 2π. Поэтому дополнение к E, содержащее все точки, в которых $\rho_m \cos m(x-\alpha_m)$ ограничено, имеет меру нуль, что и требовалось доказать.

145. Обобщенная вторая производная. Теоремы Lebesgue'a и Schwarz'a. Мы будем называть, вместе с Lebesgue'ом, *обобщенной второй производной* $f(x)$ предел при $h=0$ (когда он существует) отношения *)-

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} = \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

Этот предел равен обыкновенной второй производной, если последняя существует в точке x (так что первая производная существует в окрестности x). Действительно, по формуле Cauchy (том I, n° 108) предшествующее отношение можно представить в виде $(0<\theta<1)$

$$\frac{f'(x+\theta h)-f'(x-\theta h)}{2\theta h},$$

это же выражение, когда h стремится к нулю, стремится к $f''(x)$, в предположении ее существования. Мы условимся обозначать символом $f''(x)$ не только обыкновенную вторую производную, но и обобщенную вторую производную в случаях, когда обыкновенная не существует.

Теорема Н. Lebesgue'a. *Если непрерывная функция $f(x)$ имеет обобщенную вторую производную в каждой точке промежутка (a,b), то отношение $\Delta^2 f(x_0):h^2$ содержится между верхней и нижней границами $f''(x)$ в промежутке (x_0-h, x_0+h), в предположении, что последний содержится в промежутке (a, b).*

Действительно, выражение для отношения $\Delta^2 f(x):h^2$ показывает, что обобщенная вторая производная не отрицательна в той точке,

*) Следует заметить, что $\Delta^2 f$ не означает здесь второй разности f в обычном смысле.

в которой $f(x)$ достигает минимума, и не положительна в точке, где $f(x)$ имеет максимум. Положим

$$\psi(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}+\frac{(x-x_0)^2}{2}\cdot\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}.$$

Этот полином второй степени относительно x принимает одинаковые с $f(x)$ значения в трех точках x_0-h, x_0, x_0+h. Следовательно, разность $f(x)-\psi(x)$ обращается в нуль в этих трех точках. Так как она непрерывна, то она имеет по меньшей мере один максимум и один минимум между x_0-h и x_0+h, скажем в точках x_1 и x_2 (одна из которых может совпасть с x_0).

Итак, вторые обобщенные производные в этих двух точках удовлетворяют неравенствам

$$f''(x_1)-\psi''(x_1)\leqslant 0,\quad f''(x_2)-\psi''(x_2)\geqslant 0.$$

Но ψ'', для полинома ψ, есть обыкновенная вторая производная, именно $\Delta^2 f(x_0):h^2$, так что предшествующие неравенства перепишутся

$$f''(x_1)\leqslant\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}\leqslant f''(x_2),$$

что и доказывает предложение.

Теорема Schwarz'a. *Непрерывная функция, вторая обобщенная производная которой постоянно равна нулю в промежутке, представляет собою линейную функцию в этом промежутке.*

В этом случае, $\Delta^2 f(x)$ есть нуль, каковы бы ни были h и x, согласно предшествующей теореме. Другими словами, сумма значений функции в двух точках вдвое больше ее значения в середине промежутка между ними. Таким образом,

$$f(x+h)+f(x_1)=f(x_1+h)+f(x)=2f\left(\frac{x+x_1+h}{2}\right),$$

так что

$$f(x+h)-f(x)=f(x_1+h)-f(x_1).$$

Равным приращениям x соответствуют равные же приращения f, откуда следует, что приращения f и x пропорциональны и что f имеет производную, сводящуюся к постоянной. Итак, f есть линейная функция.

Следствие. Эта теорема устанавливает степень неопределенности функции, которой известна вторая обобщенная производная. *Две функции, имеющие одну и ту же вторую обобщенную производную, могут отличаться лишь линейной функцией.*

146. Метод Riemann'a суммирования тригонометрических рядов. Рассмотрим произвольный тригонометрический ряд (коэффициенты которого могут и не быть коэффициентами Fourier)

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty(a_m\cos mx+b_m\sin mx), \tag{1}$$

или, если для краткости положить

$$A_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad A_m = a_m \cos mx + b_m \sin mx,$$

ряд

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_m + \ldots \tag{1 bis}$$

Предположим, что a_m и b_m ограничены (это всегда выполняется, если коэффициенты стремятся к нулю), и образуем ряд

$$F(x) = A_0 \frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{2^2} - \ldots - \frac{A_m}{m^2} - \ldots, \tag{2}$$

который можно вывести из первого, пронитегрировав дважды каждый его член. Этот ряд равномерно сходится в каждом промежутке, ибо A_m по абсолютной величине не превосходят постоянного числа A, так что члены ряда по абсолютной величине оказываются меньшими соответствующих членов сходящегося положительного ряда $A \Sigma m^{-2}$. Итак, ряд (2) имеет своей суммой функцию $F(x)$, непрерывную для всех значений x.

Метод суммирования Riemann'а состоит в том, что ряду (1), в качестве суммы, приписывается вторая обобщенная производная функции $F(x)$ (если она существует), т. е. предел при $\alpha = 0$ отношения

$$\frac{F(x + 2\alpha) + F(x - 2\alpha) - 2F(x)}{4\alpha^2}.$$

147. Основная теорема Riemann'а. *Всякий раз, когда тригонометрический ряд сходится, метод суммирования Riemann'а дает* ***тот*** *же результат, что и обыкновенный метод суммирования. Иначе говоря, если ряд сходится и имеет суммой $f(x)$, то и предшествующее отношение имеет пределом $f(x)$.*

Заметим соотношения

$$\cos n(x + 2\alpha) + \cos n(x - 2\alpha) - 2\cos nx = 2\cos nx(\cos 2n\alpha - 1),$$

$$\sin n(x + 2\alpha) + \sin n(x - 2\alpha) - 2\sin nx = 2\sin nx(\cos 2n\alpha - 1);$$

заменив здесь $\cos 2n\alpha - 1$ через $-2\sin^2 n\alpha$, мы будем иметь

$$\frac{F(x + 2\alpha) + F(x - 2\alpha) - 2F(x)}{4\alpha^2} =$$

$$= A_0 + A_1 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 + \ldots + A_n \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 + \ldots \tag{3}$$

Пусть s_n будет сумма n первых членов ряда (1) и $f(x)$ — сумма всего ряда, который мы предположим сходящимся в точке x. Положим

$$f(x) = s_n + R_n, \text{ откуда } A_n = R_n - R_{n+1}.$$

Зададим себе произвольно малое положительное число ε и возьмем n настолько большим, чтобы R_n, $R_{n+1}, \ldots$, все по модулю были $<\varepsilon$. Тогда, если α стремится к нулю, сумма n первых членов ряда (3) стремится к s_n, т. е. к $f(x)$ с точностью до ε. Покажем что можно сделать, вместе с ε, сколь угодно малой сумму всех прочих членов, именно

$$(R_n - R_{n+1})\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 + (R_{n+1} - R_{n+2})\left(\frac{\sin(n+1)\alpha}{(n+1)\alpha}\right)^2 + \ldots =$$

$$= R_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 - R_{n+1}\left[\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n+1)\alpha}{(n+1)\alpha}\right)^2\right] - \ldots$$

С этой целью заметим, что эта сумма по модулю меньше, чем

$$\varepsilon + \varepsilon\left|\int\limits_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right| + \varepsilon\left|\int\limits_{(n+1)\alpha}^{(n+2)\alpha} d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right| + \ldots < \varepsilon +$$

$$+ \varepsilon\int\limits_0^\infty \left|d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right|.$$

Следовательно, она сколь угодно мала, вместе с ε, ибо подинтегральная функция непрерывна и, при $\alpha=\infty$, становится бесконечно малого порядка 2, так что этот последний интеграл существует.

Замечание. Подобным же образом доказывается следующее предложение:

Если, для данного значения x, сумма s_n n первых членов ряда (1) *ограничена при любом n, то и выражение* (3), *при приближении α к нулю, также останется ограниченным и его границы неопределенности не превзойдут по абсолютной величине выражения kS, где k есть числовой множитель, не зависящий от x, а S — наибольший предел $|s_n|$.*

Действительно, подставляя $s_{n+1} - s_n$ вместо A_n, приведем выражение (3) к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right].$$

Для того, чтобы установить границы неопределенности этой суммы, можно пренебречь любым числом начальных членов, ибо все они стремятся к нулю. Поэтому можно рассуждать так, как если бы все $|s_n|$ лишь бесконечно мало превосходили S. Итак, границы неопределенности по абсолютной величине не превзойдут

$$\sum_1^\infty S\left|\int\limits_{(n-1)\alpha}^{n\alpha} d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right| < S\int\limits_0^\infty \left|d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right|,$$

что и доказывает предложение.

148. Вторая теорема Riemann'а. *Если коэффициенты a_n, b_n бесконечно малы, вместе с $\frac{1}{n}$, отношение*

$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$$

стремится к нулю вместе с α, даже для тех значений x, при которых ряд расходится.

Действительно, это отношение есть произведение ряда (3) на 2α. Сколь бы мало ни было положительное число ε, сумма членов (в конечном числе), для которых $|A_n|>\varepsilon$, стремится к 0 вместе с α. Заменим же в ряде (3) все A через ε; достаточно показать, что предел s при $\alpha=0$ выражения

$$2\alpha\left[\varepsilon+\varepsilon\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2+\ldots+\varepsilon\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2+\ldots\right]=2\varepsilon\sum_0^\infty\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\alpha$$

может быть предположен сколь угодно малым, вместе с ε.

Но для этого достаточно заметить, что (n° 50)

$$\lim\sum_0^\infty\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)\alpha=\int_0^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt=\frac{\pi}{2}.$$

Действительно, сколь бы ни велико было p, сумма членов, для которых $n\alpha<p$, стремится, по определению, к интегралу от 0 до p, в то время как сумма членов, для которых $n\alpha>p$ бесконечно мала вместе с $\frac{1}{p}$; она меньше, чем соответствующая часть ряда,

$$\sum\left[\frac{1}{(n-1)\alpha}-\frac{1}{n\alpha}\right]$$

и, следовательно, меньше $1:p-\alpha$.

149. Теорема Heine — Cantor'а: единственность разложения. *Функция $f(x)$, имеющая период 2π, не может допускать двух различных тригонометрических разложений, которые сходились бы и имели бы своей суммой $f(x)$ псвсюду, исключая разве лишь изолированные значения.*

Если одна и та же функция имеет два разложения указанного типа, то, вычитая одно из другого, мы получим тригонометрическое разложение нуля в сходящийся ряд, исключая некоторые изолированные точки. Теорема, таким образом, приводится к утверждению, что *подобное разложение нуля может иметь место лишь при условии, что все коэффициенты равны нулю.*

Рассмотрим же это разложение нуля в ряд:

$$0=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \quad (4)$$

Пусть x будет *не особенным* значением, так что соответствующий ему ряд сходится и имеет суммой нуль. Заменим x через $x+\delta$, затем, через $x-\delta$ и сложим; мы получим

$$0=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\cos n\delta;$$

это разложение имеет место для всех значений δ, исключая некоторые изолированные значения. Это есть тригонометрический ряд относительно δ; существенной его особенностью является то, что коэффициент при $\cos n\delta$ стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$ (так как x отлично от особенного значения). Поэтому при доказательстве мы можем ограничиться случаем, когда коэффициенты стремятся к нулю. В самом деле, доказанное для этого случая наше предложение может быть тогда применено к тригонометрическому ряду относительно δ, так что за исключением особенных значений x *) будем иметь

$$a_n\cos nx+b_n\sin nx=0,\ \text{откуда}\ a_n=0,\quad b_n=0.$$

Таким образом, достаточно доказать теорему в предположении, что a_n и b_n стремятся к нулю, что мы и сделаем.

Просуммируем ряд по методу Riemann'а; функция $F(x)$ будет иметь, исключая особенные значения, обобщенную вторую производную, равную нулю (n^0 147). Следовательно, в промежутке между двумя особенными значениями, по теореме Schwarz'а (n^0 145), $F(x)$ будет линейной функцией.

Итак, непрерывная кривая $y=F(x)$ представляет собой либо прямую, либо ломаную, вершины которой соответствуют особенным значениям. Но второе предположение невозможно, ибо ломаная не может в нашем случае иметь изолированной вершины. В самом деле, если бы x_0 было абсциссой такой изолированной вершины, мы имели бы

$$\lim_{\alpha=0}\frac{F(x_0+\alpha)+F(x_0-\alpha)-2F(x_0)}{\alpha}=0;$$

но, при достаточно малом α, два отношения

$$\frac{F(x_0+\alpha)-F(x_0)}{\alpha}\quad\text{и}\quad\frac{F(x_0-\alpha)-F(x_0)}{-\alpha}$$

служат угловыми коэффициентами двух сторон, примыкающих к этой вершине. Отсюда следует, что эти коэффициенты равны и обе стороны, в действительности, образуют о д н у сторону. Итак, $F(x)$ оказывается везде линейной функцией $c+c'x$. Поэтому, для всех значений x, имеем

$$c+c'x=a_0\frac{x^2}{2}-\sum_{1}^{\infty}\frac{a_m\cos mx+b_m\sin mx}{m^2}$$

*) В силу же непрерывности синуса и косинуса, и для в с е х без исключен значений x. *Прим. ред*

откуда

$$a_0\frac{x^2}{2}-c'x=c+\sum_1^\infty\frac{a_m\cos mx+b_m\sin mx}{m^2}.$$

Вторая часть равенства допускает период 2π, следовательно, первая — также, что влечет за собою равенства $a_0=c'=0$. Таким образом, предшествующее равенство дает разложение нуля в *равномерно сходящийся* тригонометрический ряд. Но в таком случае коэффициенты вполне строго могут быть определены по формулам Euler-Fourier, которые дадут нам $c=a_m=b_m=0$.

Замечание. *С большей общностью, можно утверждать единственность тригонометрического разложения $f(x)$, даже в том случае, если тригонометрический ряд перестает сходиться или представлять $f(x)$ в точках некоторой приводимой совокупности, т. е. такой, производная которой исчислима* *) (Cantor).

Назовем особенными такие значения x, которые не лежат внутри промежутка, в коем $F(x)$ является линейной функцией. Эти значения, если существуют, образуют необходимо замкнутую совокупность. Мы только что доказали, что они не могут быть изолированными, так что совокупность, образованная ими, будет совершенной. Но эта совокупность должна содержаться в производной от совокупности точек, в которых ряд (4) перестает сходиться и иметь суммой 0. Следовательно, она вовсе не может существовать, если эта последняя совокупность исчислима.

150. Теоремы P. du Bois Reymond'a и Lebesgue'a. *Если ограниченная функция $f(x)$ с периодом 2π допускает тригонометрическое разложение, то это разложение может быть только разложением Fourier.*

Заметим, прежде всего, что $f(x)$ будет суммируема, как предел непрерывных функций. Вспомним теперь равенство (3) n° 147. Если определить $\Delta^2F(x)$, как в n° 145, но полагая $h=2\alpha$, можно переписать это равенство в виде

$$\frac{\Delta^2F(x)}{4\alpha^2}=\frac{a_0}{2}+\sum(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2.$$

В виду теоремы n° 144, это есть тригонометрический ряд относительно x, *равномерно сходящийся,* так что коэффициенты его определяются формулами Euler'a. В частности, коэффициент при $\cos mx$ есть

$$a_m\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta^2F}{4\alpha^2}\cos mx\,dx.$$

Предположим, что α стремится к нулю. Выражение $\Delta^2F:4\alpha^2$ стремится к обобщенной второй производной $f(x)$ функции F, *оставаясь ограниченным,* в виду ограниченности f (теорема Lebesgue'a, n° 145). Следова-

*) Приводимую совокупность можно также определить условием, чтобы какая-либо из ее последовательных производных (конечного или трансфинитного порядка) было пустой.

тельно, можно перейти к пределу под знаком $\int$ (том I, n° 264, I), откуда

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx;$$

аналогичная формула получается и для b_m.

Доказательство этой теоремы Lebesgue'а естественно вытекает из принципов, изложенных в предшествующих n°. Но можно пойти гораздо дальше, если воспользоваться более общими теоремами относительно обобщенной второй производной, изложенными в томе I (глава VIII, § 4). Мы имеем следующую теорему:

Теорема. *Если конечная и суммируемая функция $f(x)$ с периодом 2π допускает тригонометрическое разложение, то последнее может быть только разложением Fourier.*

Так как $f(x)$ есть вторая обобщенная производная функции $F(x)$, определенной равенством (2), в каждой точке сходимости ряда (1) (n° 147), то предшествующая теорема представляет лишь частный случай следующей более общей теоремы:

Теорема. *Пусть всегда s_n будет суммой первых n членов произвольного тригонометрического ряда* (1), *сходящегося или нет. Если, при стремлении n к бесконечности, наибольший и наименьший пределы s_n будут конечными суммируемыми функциями от x, то тригонометрический ряд* (1) *есть ряд Fourier каждой из двух обобщенных вторых производных (верхней и нижней) функции $F(x)$.*

Пусть $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ будут границы неопределенности (зависящие от x) суммы s_n, когда n стремится к бесконечности. Они, по предположению конечны и суммируемы.

Функция $F(x)$, определяемая формулой (2), будет непрерывна, так как коэффициенты a_n, b_n будут по предположению ограниченными (в силу второй теоремы n° 144), так что ряд (2) будет равномерно сходящимся.

Рассмотрим, для определенности, верхнюю вторую обобщенную производную функции $F(x)$. Эта функция $\varphi_1(x)$ есть наибольший предел отношения $\Delta^2 F(x) : 4\alpha^2$, когда α стремится к нулю; следовательно, она *конечна и суммируема,* потому, что она не может превзойти суммируемой функции $k|\psi_1| + k|\psi_2|$, в силу замечания в конце n° 147.

Первообразная функция для $\varphi_1(x)$ строится по теореме V n° 290 тома I (заменяя там f через φ_1); таким образом мы получаем

$$F(x) = \int_a^x dx \int_a^x \varphi_1(x)\,dx + px + q.$$

$$F'(x) = \int_a^x \varphi_1(x)\,dx + p.$$

Пусть α_m, β_m будут постоянные Fourier для $\varphi_1(x)$, так что

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(x)\cos mx\,dx, \quad \beta_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(x)\sin mx\,dx.$$

Умножим на $\frac{1}{\pi}\cos mx$ тождества

$$\Delta^2 F(x) = \int_0^{2\alpha} [F'(x+t) - F'(x-t)]\,dt = \int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{t} \varphi_1(x+u)\,du;$$

затем проинтегрируем два крайных члена по x от 0 до 2π. Заметим, что интегрирование можно произвести под знаком $\int$ и что, в виду периодичности φ_1, будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(x+u)\cos mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(x)\cos m(x-u)\,dx =$$

$$= \alpha_m \cos mu + \beta_m \sin mu;$$

таким образом, мы находим (так как интеграл от синуса равен нулю)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^2 F(x)\cos mx\,dx = \alpha_m \int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{t} \cos mu\,du = 4\alpha_m \frac{\sin^2 m\alpha}{m^2}.$$

С другой стороны, заменяя $\Delta^2 F(x)$ его равномерно сходящимся разложением, получающимся из (3), именно

$$\Delta^2 F(x) = 4\sum_0^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2,$$

мы получим в качестве значения того же интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^2 F(x)\cos mx\,dx = 4a_m \frac{\sin^2 m\alpha}{m^2}.$$

Сравнивая оба результата, получим, что $a_m = \alpha_m$, подобно этому и $b_m = \beta_m$. Итак, ряд (1) есть ряд Fourier функции $\varphi_1(x)$, что и требовалось доказать.

Предшествующая теорема может еще быть обобщена следующим образом:

Теорема. *Рассмотрим тригонометрический ряд* (1), *коэффициенты которого стремятся к нулю. Если наибольший и наименьший пределы s_n при $n = \infty$ представляют собою суммируемые функции от x, конечные повсюду, исключая некоторой совокупности E, то тригонометрический ряд будет рядом Fourier каждой из обобщенных вторых производных $F(x)$, при условии, что совокупность E исчислима.*

Эта теорема доказывается подобно предыдущей, с заменой лишь ссылки на теорему V n⁰ 290 тома I — ссылкой на следующую теорему VI n⁰ 291.

Заметим, что, так как a_n и b_n, по предположению, стремятся к нулю, $F(x)$ удовлетворяет условию (K), упоминаемому в этой теореме, в силу второй теоремы Riemann'a (n^0 148).

Эта теорема, в частности, дает следующее обобщение теоремы Heine-Cantor'a об единственности (n^0 149):

Следствие. *Периодическая функция $f(x)$, с периодом 2π, не может иметь двух различных тригонометрических разложений, которые сходятся и имеют суммой $f(x)$ повсюду, исключая разве лишь исчислимую совокупность точек.*

Таким образом, как видим, можно освободиться от требования *приводимости,* установленного в n^0 149.

ГЛАВА V

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ: КРУГОВЫЕ ФУНКЦИИ И EULER'ОВЫ ИНТЕГРАЛЫ.

§ 1. Разложение круговых и гиперболических функций в бесконечные произведения и в ряды дробей.

151. Разложение $\sin m\theta$ на множителей. Мы рассмотрим только тот случай, когда m есть целое число вида $2n+1$.

Выражение для $\sin m\theta$ получается из *формулы Moivre'a*

$$\cos m\theta + i \sin m\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^m,$$

если приравнять коэффициенты при i в обеих ее частях. Таким образом, для каждого *вещественного или мнимого* значения θ получаем

$$\sin m\theta = m \cos^{m-1}\theta \sin\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cos^{m-3}\theta \sin^3\theta + \ldots$$

Следовательно, так как $m=2n+1$,

$$\frac{\sin m\theta}{\sin\theta} = m \cos^{2n}\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cos^{2n-2}\theta \sin^2\theta + \ldots$$

В правой части все показатели четные, так что, если заменить $\cos^2\theta$ через $1-\sin^2\theta$, справа получится полином степени n относительно $\sin^2\theta$.

Положим, для краткости, $z=\sin^2\theta$ и обозначим через $F_n(z)$ этот полином степени n; если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ суть корни $F_n(z)$, то можно написать

$$\frac{\sin m\theta}{m \sin\theta} = \left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right), \qquad (z=\sin^2\theta), \quad (1)$$

ибо обе части имеют один и тот же предел 1, когда θ, а с ним и z, стремится к нулю.

Но корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ полинома $F_n(z)$ получаются легко. Действительно, $\sin m\theta$ обращается в нуль для значений $\theta = \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \ldots, \frac{n\pi}{m}$, меньших $\frac{\pi}{2}$ (ибо $m=2n+1$); им соответствуют возрастающие следовательно, различные) значения z:

$$\alpha_1 = \sin^2\frac{\pi}{m}, \quad \alpha_2 = \sin^2\frac{2\pi}{m}, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \sin^2\frac{n\pi}{m}, \qquad (2)$$

которые и являются корнями $F_1(z)$, так как $\sin\theta$ при этом не обращается в нуль.

Подставляя значения (2) в равенство (1), мы и получим искомую формулу разложения.

152. Разложение $\operatorname{sh} x$ и $\sin x$ в бесконечные произведения. Пусть x будет вещественная переменная; заменим в формуле (1) θ на $\frac{xi}{m}$. Тогда $\sin\theta$ нужно будет заменить через $i \operatorname{sh}\frac{x}{m}$, а $\sin m\theta$ через $i \operatorname{sh} x$. Мы получим

$$\frac{\operatorname{sh} x}{m \operatorname{sh}\frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\operatorname{sh}^2\frac{x}{m}}{\alpha_k}\right) \qquad (m=2n+1).$$

Во второй части этой формулы все множители положительны; взяв логарифмы, мы произведение заменим суммой. Если p есть целое число $< n$, мы будем иметь

$$\operatorname{Log}\frac{\operatorname{sh} x}{m \operatorname{sh}\frac{x}{m}} = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Log}\left(1+\frac{\operatorname{sh}^2\frac{x}{m}}{\alpha_k}\right)+R_p, \tag{3}$$

обозначая через R_p сумму ненаписанных логарифмов, кототорые все положительны. Но, если α положительно, то $e^\alpha > 1+\alpha$, следовательно, $\alpha > \operatorname{Log}(1+\alpha)$; поэтому

$$0 < R_p < \sum_{p+1}^{n} \frac{\operatorname{sh}^2\frac{x}{m}}{\alpha_k} = \left(\operatorname{sh}^2\frac{x}{m}\right)\sum_{p+1}^{n}\frac{1}{\alpha_k}.$$

Когда k изменяется от 1 до $n=\frac{m-1}{2}$, отношение $\left(\sin\frac{k\pi}{m}\right):\frac{k\pi}{m}$, т. е. отношение синуса к его дуге, постоянно убывает, не достигая минимума, равного $\left(\sin\frac{\pi}{2}\right):\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\pi}$. Отсюда

$$\frac{1}{\alpha_k}=\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}} < \frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\frac{k\pi}{m}\right)^2} = \frac{m^2}{4k^2} < \frac{m^2}{4}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right]$$

и, следовательно, тем более

$$R_p < \frac{m^2}{4}\left(\operatorname{sh}^2\frac{x}{m}\right)\sum_{p+1}^{\infty}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right] = \frac{m^2}{4p}\operatorname{sh}^2\frac{x}{m}.$$

Заставим теперь m в формуле (3) стремиться к бесконечности и заметим, что

$$\lim m \operatorname{sh} \frac{x}{m} = x, \quad \lim m^2 \alpha_k = \lim m^2 \sin^2 \frac{k\pi}{m} = k^2 \pi^2;$$

мы получим

$$\operatorname{Log} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \sum_1^p \operatorname{Log}\left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right) + \lim R_p$$

$$0 < \lim R_p < \frac{x^2}{4p}.$$

Если теперь предположить, что p стремится к бесконечности, то $\lim R_p$ будет стремиться к нулю, и мы найдем

$$\operatorname{Log} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \operatorname{Log} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \sum_1^\infty \operatorname{Log}\left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right). \tag{4}$$

Наконец, возвращаясь от логарифмов к числам, мы получим $\operatorname{sh} x$ в виде *бесконечного произведения*, т. е. в виде предела произведения бесконечно возрастающего числа множителей:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right). \tag{5}$$

Разложение $\sin x$ можно получить непосредственно с помощью аналогичного рассуждения. Но можно его вывести и из предшествующей формулы. Достаточно заметить, что *формула* (5) *сохраняет силу, если заменить x мнимой переменной z.*

Действительно, произведение, составляющее правую часть этой формулы, с помощью последовательных умножений, разлагается в сумму положительных степеней x. Так как порядок, в котором размещаются слагаемые, в этом случае безразличен, то эта правая часть может быть расположена по возрастающим степеням x, что необходимо приведет к степенному ряду, определяющему $\operatorname{sh} x$.

Это сведение к ряду, определяющему гиперболический синус, остается в силе и при замене x комплексным числом z модуля x, ибо тогда лишь сумма степеней x заменится абсолютно сходящимся рядом степеней z, и порядок членов попрежнему будет безразличен.

Итак, можно в формуле (5) заменить x на ix; мы получим

$$\sin x = x \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right). \tag{6}$$

Отсюда выводим аналогичное разложение

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x} = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2}\right).$$

153. Ряды дробей. Если продифференцировать формулу (4), то, для каждого вещественного значения x, получим

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}-\frac{1}{x}=2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}\pi^{2}+x^{2}}. \tag{7}$$

Этот ряд, члены которого меньше членов положительного сходящегося ряда $\sum k^{-2}$, сходится *равномерно*, когда x изменяется произвольным образом; этим и оправдывается почленное дифференцирование (том I, n° 393).

Подобным же образом заменим в разложении (6) $\sin x$ и всех множителей их абсолютными величинами; возьмем затем логарифмы обеих частей и продифференцируем. Мы получим

$$\operatorname{cotg} x=\frac{1}{x}-2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}\pi^{2}-x^{2}}. \tag{8}$$

Действительно, этот ряд еще сходится абсолютно и *равномерно* в каждом промежутке, в котором знаменатели не обращаются в нуль, ибо отношение его общего члена к общему члену ряда $\sum k^{-2}$ стремится к конечному пределу, когда k бесконечно возрастает.

Если заметить, что

$$\frac{2x}{x^{2}-k^{2}\pi^{2}}=\frac{1}{x-k\pi}+\frac{1}{x+k\pi},$$

то видим, что формулу (8) можо просто написать в виде

$$\operatorname{cotg} x=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-k\pi}, \tag{9}$$

при условии объединять при складывании члены, соответствующие $+k$ и $-k$.

Разложение $\operatorname{cotg} x$ дает нам другие:

$$\operatorname{tg} x=-\operatorname{cotg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-2k\pi}-\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-(2k+1)\pi},$$

или проще,

$$\frac{1}{\sin x}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{k}}{x-k\pi}=\frac{1}{x}+2x\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{x^{2}-k^{2}\pi^{2}}. \tag{10}$$

Замечание. Часто бывает полезно иметь формулу (7) в другом виде. Замечая, что

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{e^{2x} - 1} + 1,$$

подставим это значение в левую часть формулы (7) и заменим x на $x : 2$. Формула примет вид

$$\frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2} = 2x^2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{4k^2 \pi^2 + x^2}. \tag{11}$$

154. Вычисление одного интеграла Euler'а. Пусть x будет число, содержащееся между 0 и 1; имеем:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_0^{n-1} (-x)^k + (-1)^n \theta x^n,$$

где θ содержится между 0 и 1, ибо $\theta = 1 : (1+x)$.

Итак, если a означает *положительное* число, умножая предшествующее соотношение на $x^{a-1}\,dx$ и интегрируя, и замечая, наконец, что θ можно вынести за знак интеграла, сохраняя его смысл, как обозначение некоторого числа, содержащегося между 0 и 1 *), мы получим

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \sum_0^{n-1} \frac{(-1)^k}{a+k} + \frac{(-1)^n \theta}{a+n}.$$

Наконец, заставляя n стремиться к бесконечности, мы получим

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+k}.$$

Предположим теперь, что a содержится между 0 и 1; тогда в этом интеграле можно заменить a через $1-a$, затем x через $\frac{1}{x}$: мы получим

$$\int_0^1 \frac{x^{-a}\,dx}{1+x} = \int_1^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{a-k}.$$

*) Мы подчеркиваем, что под знаком интеграла θ означает некоторую функцию от x, а вне знака интеграла — постоянное число. Автор постоянно пользуется символом θ для типического обозначения числа между 0 и 1, не стесняясь тем, что он может иметь различные значения в разных местах рассуждения. Это все время нужно иметь в виду. *Прим. ред.*

Складывая эти два соотношения, мы, на основании (10), найдем

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a\pi - k\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \tag{12}$$

Этот важный интеграл принадлежит Euler'у, который вычислил его с помощью приема, совершенно отличного от предыдущего.

§ 2. Числа и полиномы Bernoulli.

155. Разложение $\frac{x}{e^x-1}$. Пусть x будет положительное число; имеем $(0<\theta<1)$:

$$\frac{x}{1+x} = -\sum_{1}^{n-1}(-x)^p - \frac{(-x)^n}{1+x} = -\sum_{1}^{n-1}(-x)^p - \theta(-x)^n.$$

Заменяя x на $x^2 : 4k^2\pi^2$ и предполагая x лишь вещественным, получим

$$\frac{x^2}{4k^2\pi^2+x^2} = -\sum_{p=1}^{n-1}\left(-\frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)^p - \theta\left(-\frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right).$$

Подставим эти разложения в правую часть формулы (11) предшествующего n°; полагая, для краткости,

$$s_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots,$$

найдем $(0<\theta<1)$

$$\frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} = -2\sum_{p=1}^{n-1} s_{2p}\left(-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)^p - 2\theta s_{2n}\left(-\frac{x^2}{(2\pi^2)}\right)^n. \tag{1}$$

Если n стремится к бесконечности, s_{2n} стремится к 1 и последний член стремится к нулю, если только $|x|<2\pi$. Итак, коль скоро $|x|<2\pi$, имеем разложение в степенной ряд

$$\frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} = 2\left[\frac{s_2x^2}{(2\pi)^2} - \frac{s_4x^4}{(2\pi)^4} + \frac{s_6x^6}{(2\pi)^6} - \ldots\right].$$

Замечание. Легко установить, что 2π и будет радиусом сходимости этого степенного ряда. Действительно, согласно общей теории степенных рядов [том I, n° 398],

$$R = \lim \sqrt[2n]{\frac{(2\pi)^{2n}}{s_{2n}}} = 2\pi.$$

156. Числа Bernoulli. Числа Bernoulli суть коэффициенты B_1, B_2, ..., B_n, ... разложения в ряд Maclaurin'а:

$$\frac{x}{e^x-1}=1+\frac{B_1x}{1}+\frac{B_2x^2}{2!}+\ldots+\frac{B_nx^n}{n!}+\cdots, \tag{2}$$

которое, как мы видели, сходится, коль скоро $|x|<2\pi$. Функцию в левой части равенства называют **производящей функцией** чисел Bernoulli.

Сравнивая эту формулу с предыдущей, мы заключаем, что все числа B с нечетными значками равны нулю, кроме B_1, равного $-\frac{1}{2}$, и что числа с четными значками B_2, B_4, ... попеременно положительны и отрицательны. Действительно, имеем

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}s_{2n}. \tag{3}$$

При больших значениях n, s_{2n} мало отличается от 1; эта формула показывает, что числа Bernoulli очень быстро возрастают с возрастанием n.

Если обозначение чисел Bernoulli ввести в формулу (1), то получим, считая x вещественным, а θ содержащимся между 0 и 1,

$$\frac{x}{e^x-1}-1+\frac{x}{2}=\frac{B_2x^2}{2!}+\frac{B_4x^4}{4!}+\ldots+\frac{B_{2n-2}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\theta\frac{B_{2n}x^{2n}}{(2n)!}. \tag{4}$$

157. Вычисление чисел Bernoulli. Для обнаружения свойств чисел Bernoulli удобно пользоваться следующим символическим обозначением:

Условимся заменять в разложении e^{Bx} в степенной ряд B^n на B_n; формулу (2) можно будет переписать в символическом виде так:

$$\frac{x}{e^x-1}=e^{Bx}. \tag{5}$$

Польза этого обозначения выясняется из следующего свойства. Если разложение e^{Bx} умножим на другую показательную функциию $e^{\alpha x}$, имеем символически:

$$e^{Bx}e^{\alpha x}=e^{(B+\alpha)x}.$$

Другими словами, разложение в ряд Maclaurin'а функции в левой части имеет вид

$$\frac{xe^{\alpha x}}{e^x-1}=1+\frac{B+\alpha}{1}x+\frac{(B+\alpha)^2}{2!}x^2+\ldots$$

при условии, что по раскрытии степеней $B+\alpha$ в правой части B^n заменяется на B_n.

В самом деле, правая часть этой формулы в силу правила об умножении рядов есть произведение разложений e^{Bx} и $e^{\alpha x}$. С другой стороны, разложение в ряд Maclaurin'а произведения двух функций получаем по тому же правилу, взяв произведение разложений множителей, ибо правильность коэффициентов, получаемых таким путем, вытекает из правила Leibniz'а для дифференцирования произведения.

Возвратимся теперь к уравнению (5). Если в нем освободиться от знаменателя, то, в силу сделанного замечания, получим:

$$x = e^{(B+1)x} - e^{Bx}. \tag{6}$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при x^n в обеих частях этого равенства, при $n > 1$, приходим к символическому равенству

$$(B+1)^n - B^n = 0. \tag{7}$$

Полагая в нем $n = 2, 3, 4, \ldots$, получаем ряд рекуррентных уравнений с целыми коэффициентами:

$$2B_1 + 1 = 0,\ 3B_2 + 3B_1 + 1 = 0, \ldots$$

из которых последовательно и определим числа $B_1, B_2, \ldots$ Итак, *числа Bernoulli все рациональны.*

Мы знаем уже, что все B с нечетными значками, кроме $B_1 = -\frac{1}{2}$, равны 0. Числа же B с четными значками имеют следующие значения:

$$B_2 = \frac{1}{6};\ B_4 = -\frac{1}{30};\ B_6 = \frac{1}{42};\ B_8 = -\frac{1}{30};\ B_{10} = \frac{5}{66};\ B_{12} = -\frac{691}{2730};$$

$$B_{14} = \frac{7}{6};\ B_{16} = -\frac{3617}{510};\ B_{18} = \frac{43\,867}{798};\ B_{20} = -\frac{174\,611}{330};$$

$$B_{22} = \frac{854\,513}{138} \ldots$$

158. Свойства чисел Bernoulli. Помножив (6) на e^{yx}, находим

$$xe^{yx} = e^{(B+1+y)x} - e^{(B+y)x},$$

откуда, приравнивая коэффициенты при x^n в обеих частях:

$$ny^{n-1} = (B+1+y)^n - (B+y)^n. \tag{8}$$

Обозначая через $f(y)$ любой целый полином, можно утверждать, что имеет место такое тождество

$$f(y+B+1) - f(y+B) = f'(y); \tag{9}$$

действительно, соотношение (8) показывает, что это тождество справедливо для каждого члена полинома в отдельности. Тождество (9) является основным тождеством, которому удовлетворяют числа Bernoulli.

Можно даже распространить формулу (9) на некоторые другие функции, отличные от полиномов. Так, если $f(y)$ есть сходящийся степенной ряд

$\sum a_n y^n$ и ряды $\sum a_n (y+B+1)^n$ и $\sum a_n (y+B)^n$ сходятся, формула (9) будет иметь смысл и останется верной.

Вот некоторые частные случаи:

1) Положив в (8), $y = -\frac{1}{2}$, находим:

$$\left(B+\frac{1}{2}\right)^n - \left(B-\frac{1}{2}\right)^n = n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Полагая здесь последовательно $n = 2, 4, \ldots$, мы покажем, что все числа B с нечетными значками, начиная с B_3, равны 0.

2) Пусть $f(y) = y(y+1)\ldots(y+p)$; формула (9) дает для $y=0$

$$(p+1)(B+1)(B+2)\cdots(B+p) = p!$$

3) Пусть $1 < q \leqslant p$; положив $f(y) = (y-1)^p y^q$, при $y = 0$ имеем:

$$B^p(B+1)^q - B^q(B-1)^p = 0.$$

Эта последняя формула, принадлежащая Stern'у, быть может, наиболее удобна для вычисления чисел Bernoulli, потому что она не содержит всех чисел B, но лишь те из них, у которых значки лежат между q и $p+q$.

159. Полиномы Bernoulli. Это суть полиномы $\varphi_1(v), \varphi_2(v), \ldots$ которые определяются из разложения Maclaurin'a:

$$\frac{e^{vx}-1}{e^x-1} = v + \varphi_1(v)\frac{x}{1} + \varphi_2(v)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \varphi_n(v)\frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{10}$$

Эти полиномы зависят от чисел Bernoulli, и символическое выражение их мы получим, представив производящую функцию в виде

$$(e^{vx}-1)\frac{e^{Bx}}{x} = \frac{e^{(B+v)x} - e^{Bx}}{x}.$$

Коэффициент при $\frac{x^n}{n!}$ будет здесь

$$\varphi_n(v) = \frac{(B+v)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1}. \tag{11}$$

Полиномы Bernoulli дают общее выражение суммы одинаковых степеней целых чисел. В самом деле, имеем:

$$1 + e^x + \ldots + e^{(v-1)x} = \frac{e^{vx}-1}{e^x-1},$$

откуда, приравнивая коэффициенты при $\frac{x^n}{n!}$:

$$1 + 2^n + 3^n + \ldots + (v-1)^n = \varphi_n(v).$$

160. Свойства полиномов Bernoulli. 1°. *Полиномы Bernoulli обращаются в* 0 *при* $v=0$ *и* $v=1$. Это есть непосредственное следствие формул (11) и (7).

2^0. Для определения $\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right)$ рассмотрим соотношения:

$$e^{\left(B+\frac{1}{2}\right)x}+e^{Bx}=e^{Bx}\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right)=\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}-1}=2e^{\frac{Bx}{2}}$$

и приравняем коэффициенты при x^{n+1} в крайних членах; находим

$$\left(B+\frac{1}{2}\right)^{n+1}+B^{n+1}=2\left(\frac{B}{2}\right)^{n+1},$$

откуда, в силу (11), выводим:

$$\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right)=-2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{B_{n+1}}{n+1}. \tag{12}$$

Стало быть, *полиномы с четными значками обращаются* в 0 *при* $v=\frac{1}{2}$.

3^0. Дифференцируя формулу (11), находим:

$$\varphi_n'(v)=(B+v)^n=n\varphi_{n-1}(v)+B_n.$$

Здесь нужно рассмотреть два случая: смотря по тому, будет ли $n=2k$ или $2k+1$, имеем:

$$\varphi'_{2k}(v)=2k\varphi_{2k-1}(v)+B_{2k}, \tag{13}$$

$$\varphi'_{2k+1}(v)=(2k+1)\varphi_{2k}(v).$$

Дифференцируя еще раз, выводим отсюда

$$\varphi''_{2k}(v)=2k(2k-1)\varphi_{2k-2}(v). \tag{14}$$

4^0. *Полином* $\varphi_{2k+1}(v)$ *с нечетным значком, когда* v *изменяется от* 0 *до* 1, ***не может принимать никакого значения больше двух раз.***

В самом деле, если бы он принимал одно и то же значение три раза, то, по теореме Rolle'я (n^0 103), его производная $(2k+1)\varphi_{2k}$ обращалась бы в 0 при значениях $x=0,1$ и по крайней мере еще при двух значениях внутри промежутка $(0,1)$, т. е. всего по крайней мере четыре раза в промежутке $(0,1)$. Но тогда ее производная

$$(2k+1)[2k\varphi_{2k-1}+B_{2k}]$$

обращалась бы в 0 по крайней мере три раза и функция φ_{2k-1} принимала бы по крайней мере три раза одно и то же значение в промежутке $(0,1)$. То же самое мы покажем и для φ_{2k-3}, φ_{2k-5}, ... φ_1, что невозможно, так как φ_1 — полином второй степени. В частности полином φ_n с нечетным значком не может обращаться в 0 при $v=\frac{1}{2}$, а потому, в силу формулы (12), *все числа Bernoulli с четными значками отличны от* 0. [Этот результат уже нам известен, см. формулу (3)].

5^0. *Полином с нечетным значком не меняет знака, когда v изменяется в промежутке* $(0,1)$. В самом деле, изменить знак он может только обратившись в 0, и так как он обращается в 0 и при $v=0,1$, то всего он обращался бы в 0 три раза, что невозможно.

6^0. *Полином* $\varphi_{2k}(v)$ *с четным значком обращается в* 0 *при* $v=0,1,\frac{1}{2}$ (см. 1^0 и 2^0), *при всех же остальных значениях v в промежутке* $(0, 1)$ *он наверно отличен от* 0. В самом деле, если бы полином обращался в 0 четыре раза, полином φ_{2k-1} принимал бы одно и то же значение по крайней мере три раза, что невозможно в силу 4^0. Отсюда заключаем, что полиномы с нечетными значками принимают наибольшее по абсолютной величине значение в промежутке $(0, 1)$ при $v=\frac{1}{2}$, так как это есть единственный корень его производной внутри этого промежутка.

7^0. *Два последовательных полинома с четными значками при всех значениях v в промежутке* $(0, 1)$ *имеют разные знаки.*

В самом деле, так как полином φ_{2k} обращается в 0 при $v=0,\frac{1}{2}$, его производная обращается в 0 при значениях v_0 внутри промежутка $\left(0,\frac{1}{2}\right)$; по формуле Taylor'а имеем:

$$\varphi_{2k}(v_0+t)=\varphi_{2k}(v_0)+\frac{t^2}{2}\varphi''_{2k}(v_0+\theta t),$$

откуда, при $t=-v_0$, в силу (14):

$$0=\varphi_{2k}(v_0)+\frac{v_0^2}{2}2k(2k-1)\varphi_{2k-2}(\theta v_0).\text{*)}$$

Стало быть, φ_{2k} и φ_{2k-2}, сохраняющие знак в промежутке $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, имеют разные знаки. То же относится и к промежутку $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

8^0. *Два последовательных полинома с нечетными значками также имеют разные знаки в промежутке* $(0, 1)$.

В самом деле $\varphi_{2k+1}(v)$ обращается в 0 при $v=0$, а потому при $v>0$ и достаточно малом имеет знак своей производной $(2k+1)\varphi_{2k}(v)$. Стало быть, φ_{2k+1} во всем промежутке $(0, 1)$ имеет тот же знак, что и φ_{2k} в промежутке $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, после чего остается только применить свойство 7^0. Так как полином

$$\varphi_1(v)=\frac{1}{2}v(v-1)$$

при $0<v<1$, очевидно, имеет отрицательный знак, то ясно, что знак φ_{2k} между 0 и $\frac{1}{2}$, или знак φ_{2k+1} между 0 и 1 есть $(-1)^{k+1}$.

---

*) Число θ здесь и в предыдущей формуле не одно и то же: одно является дополнением другого до 1. См. прим. на стр. 173. *Прим. ред.*

Это, в силу (12), есть знак B_{2k+2}, а потому, *последовательные числа B с четными значками имеют разные знаки.* [См. формулу (3).]

9°. *Функция $\varphi_n\left(\frac{1}{2}+u\right)$ есть четная функция от переменной „u“ при нечетном n, и нечетная функция — при четном n.*

В самом деле, производящая функция разложения

$$\sum\left[\varphi_n\left(\frac{1}{2}+u\right)-\varphi_n\left(\frac{1}{2}-u\right)\right]\frac{x^n}{n!}$$

есть четная функция от x:

$$\frac{e^{\left(\frac{1}{2}+u\right)x}-e^{\left(\frac{1}{2}-u\right)x}}{e^x-1}=\frac{e^{ux}-e^{-ux}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}.$$

Стало быть, так как нечетные степени x должны пропасть, $\varphi_{2k+1}\left(\frac{1}{2}+u\right)$ есть четная функция. Но тогда $\varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}+u\right)$, которая постоянным множителем отличается от φ'_{2k+1}, есть нечетная функция.

161. Разложение полиномов Bernoulli в тригонометрические ряды. Эти разложения в промежутке $(0, 1)$ даются следующими двумя формулами:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{2k-1}(x)&=(-1)^k 2\cdot\frac{(2k-1)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2n\pi x}{n^{2k}},\\ \varphi_{2k}(x)&=(-1)^{k-1}2\cdot\frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n^{2k+1}}.\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Обозначим через $\Phi_p(x)$ первую или вторую из двух сумм

$$\sum_n\frac{\sin 2n\pi x}{n^p},\quad\sum_n\frac{\cos 2n\pi x}{n^p},$$

смотря по тому, будет ли p нечетное или четное. В обоих случаях имеем:

$$\Phi_p'(x)=(-1)^{p-1}2\pi\Phi_{p-1}(x).$$

Но обе формулы (15) содержатся в общей формуле

$$\varphi_n=K_n\left[\Phi_{n+1}(x)-\Phi_{n+1}(0)\right],\qquad(16)$$

где K_n — некоторая постоянная. Мы сперва покажем, что соотношение этого вида существует при всяком n. Для этого мы покажем, что это верно при $n=1$, а затем, предположив, что такое соотношение существует при некотором значке n, выведем из него аналогичное соотношение для значка $n+1$.

Прежде всего, при $n=1$, покажем, что

$$\varphi_1 = K_1 [\Phi_2(x) - \Phi_2(0)].$$

В самом деле, обе части этого равенства обращаются в 0 при $x=0$ и остается только показать, что они имеют одинаковые производные. Но между $(0, 1)$ имеем (см. n⁰ 129):

$$\varphi_1' = D\frac{x^2-x}{2} = x - \frac{1}{2};\ \Phi_2' = -2\pi\Phi_1 = -2\pi\sum\frac{\sin 2n\pi x}{n} =$$
$$= 2\pi^2\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

и обе эти производные будут равны, если $K_1 = \frac{1}{2\pi^2}$.

Пусть теперь соотношение (16) верно при некотором значке n. Для получения аналогичного соотношения для значка $n+1$ достаточно его проинтегрировать. В самом деле, φ_n и Φ_{n+1} суть, соответственно, производные от φ_{n+1} и Φ_{n+2}, если не считать постоянных множителя и слагаемого. Стало быть, интегрируя и обозначая через K_{n+1}, A, B надлежащие постоянные, имеем:

$$\varphi_{n+1} = K_{n+1}[\Phi_{n+2}(x) - \Phi_{n+2}(0)] + Ax + B.$$

Но $A=0$, так как φ и Φ имеют одинаковые значения при 0 и 1; B также $=0$, так как φ обращается в 0 при $x=0$. Итак, уравнение (16) всегда имеет место. Для определения K_n дифференцируем n раз уравнение (16), что даст

$$n!\cdot\varphi_1' = K_n(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(2\pi)^n\Phi_1.$$

Кроме того, значения φ_1' и Φ_1, написанные выше, дают:

$$\frac{\Phi_1}{\varphi_1'} = -\pi,$$

что и приводит к тем значениям K_n, которые фигурируют в уравнениях (15).

Замечание. Свойства 1⁰, 5⁰, 7⁰, 8⁰ и 9⁰ — очевидны непосредственно из формул (15).

§ 3. Euler'овы интегралы I и II рода.

162. Определения и первые свойства. Legendre назвал *Euler'овыми интегралами I и II рода, соответственно, выражения*

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\quad \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx, \tag{1}$$

Первая есть функция *Бета*, а вторая — функция *Гамма*.

Эти интегралы абсолютно сходятся, если a и b положительны том I, n⁰ 235 и 238, III). Они перестают существовать, если a или b

(в случае функции B) <0. Поэтому во всей этой главе подразумевается, что a и b суть вещественные положительные числа.

Пусть a и b, изменяясь, остаются большими некоторого положительного числа ε; тогда все элементы интеграла B получают наибольшие по абсолютной величине значения именно при $a = b = \varepsilon$, причем интеграл продолжает существовать. Следовательно, интеграл B сходится равномерно (n° 47) и представляет непрерывную функцию от a и b (n° 48).

Предположим теперь, что a изменяется в положительном промежутке (ε, A). Представим $\Gamma(a)$ в виде суммы

$$\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x}\, dx + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx;$$

оба эти интеграла сходятся равномерно, ибо их элементы не превосходят, соответственно, элементов сходящихся интегралов

$$\int_0^1 x^{\varepsilon-1}\, dx, \quad \int_1^\infty x^{A-1} e^{-x}\, dx.$$

Итак, Γ есть непрерывная функция от a.

Приведем некоторые свойства, которые непосредственно вытекают из определений:

1°. Если в выражении (1) для B подставить $1-x$ вместо переменной x, то дело сведется к перестановке a и b. Следовательно,

$$B(a, b) = B(b, a). \tag{2}$$

2°. *Если a или b — целые числа, то легко получить $B(a, b)$ в конечном виде.*

Действительно, пусть b будет целым: если $b = 1$

$$B(a, 1) = \int_0^1 x^{a-1}\, dx = \frac{1}{a}.$$

Затем, если b есть целое число $n > 1$, то, интегрируя по частям, получим

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a} \int_0^1 x^a (1-x)^{n-2}\, dx = \frac{n-1}{a} B(a+1, n-1)$$

и, таким образом, последовательно придем к результату

$$B(a, n) = \frac{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}. \tag{3}$$

3°. Далее, имеет место соотношение, часто находящее себе применение,

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a), \tag{4}$$

которое доказывается с помощью интегрирования по частям:

$$\Gamma(a+1)=\int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx=\left[-x^a e^{-x}\right]_0^\infty+a\int_0^\infty x^{a-1}\,e^{-x}\,dx,$$

причем член вне интеграла оказывается нулем.

Если n — целое число, то, применяя формулу (4) последовательно, получим

$$\Gamma(a+n)=a(a+1)\ldots(a+n-1)\,\Gamma(a). \tag{5}$$

Эта формула позволяет привести к (0,1) промежуток, в котором необходимо вычислить значения $\Gamma(a)$.

4⁰. Из формулы (1) непосредственно усматриваем, что $\Gamma(1)=1$. Поэтому, при целом n, с помощью формулы (5), $\Gamma(n+1)$ получается в конечном виде

$$\Gamma(n+1)=n!$$

Заметим, что, в частности, $\Gamma(2)=1$.

5⁰. Помножим на $\Gamma(a)$ числителя и знаменателя дроби в правой части формулы (3); в силу (5), так как $(n)!=\Gamma(n)$, получим

$$B(a,\ n)=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(n)}{\Gamma(a+n)}. \tag{6}$$

Эта формула установлена лишь в предположении, что n — целое число, но в следующем n⁰ мы убедимся в ее общности.

6⁰. Пусть y будет положительное число; если заменить переменную интегрирования x в выражении (1) для Γ через yx, то получится важная формула

$$\frac{\Gamma(a)}{y^a}=\int_0^\infty x^{a-1}\,e^{-yx}\,dx. \tag{7}$$

163. Новое выражение для B. Окончательное сведение B к Г. В выражении (1) для B произведем замену переменной

$$x=\frac{y}{1+y},\quad 1-x=\frac{1}{1+y},\quad dx=\frac{dy}{(1+y)^2}.$$

Новые пределы будут 0 и ∞; мы получим

$$B(a,\ b)=\int_0^\infty\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\,dy. \tag{8}$$

На этой формуле основывается общее доказательство формулы (6). Действительно, по формуле (7)

$$\int_0^\infty x^{a+b-1}\,e^{-(1+y)x}\,dx=\frac{\Gamma(a+b)}{(1+y)^{a+b}}$$

Умножим на $y^{b-1}\,dy$ и проинтегрируем от 0 до ∞. В первой части можно переставить два интегрирования, потому что подинтегральная функция положительна и результаты получаются имеющими смысл, как мы сейчас это установим (n⁰ 42); таким образом получается

$$\int_0^{\infty} x^{a+b-1} e^{-x}\,dx \int_0^{\infty} y^{b-1} e^{-yx}\,dy = \Gamma(a+b) \int_0^{\infty} \frac{y^{b-1}\,dy}{(1+y)^{a+b}},$$

или, в силу (7) и (8),

$$\Gamma(b) \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\,dx = \Gamma(a+b)\,\mathrm{B}(a, b),$$

$$\mathrm{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{9}$$

Эта формула сводит изучение функции B к функции Г, зависящей только от одного параметра. Приведенное доказательство принадлежит Jacobi.

З а м е ч а н и е. Вернемся к интегралу (8). Можно разложить промежуток интегрирования на два — от 0 до 1 и от 1 до ∞. Если в интеграле, распространенном на последний промежуток, заменим y на $1:y$, то в конце концов получим формулу

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^1 \frac{y^{a-1} + y^{b-1}}{(1+y)^{a+b}}\,dy, \tag{10}$$

в которой явно обнаруживается симметричность по отношению к a и b.

164. Формула дополнения. На основании формул (9) и (8) имеем

$$\mathrm{B}(a, 1-a) = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}.$$

Значение этого интеграла вычислено в n⁰ 154. Отсюда вытекает важное соотношение, найденное Euler'ом и известное под названием *формулы дополнения*,

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \tag{11}$$

В частности, если $a = \frac{1}{2}$, отсюда получается

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi, \text{ так что } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ ^{*)}$$

---

*) Этот же результат можно получить, заменяя x на $\sqrt{x}$ в интеграле n⁰ 49.

Соотношение (11) приводит вычисление $\Gamma(a)$ к вычислению $\Gamma(1-a)$ и, следовательно, позволяет свести к $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ тот промежуток, в котором необходимо вычислить значения $\Gamma(a)$.

165. Формула Legendre'а. Из формулы (9) и (10) выводим

$$B(a, a)=\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)}=2\int_0^1 \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{2a}}\,dy.$$

Произведем замену переменной $y=\frac{1-z}{1+z}$; мы получим

$$B(a, a)=\frac{1}{2^{2a-2}}\int_0^1 (1-z^2)^{a-1}\,dz$$

или, заменяя еще z на $\sqrt{z}$,

$$B(a, a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 (1-z)^{a-1}\,z^{-\frac{1}{2}}\,dz=\frac{B\left(a, \frac{1}{2}\right)}{2^{2a-1}}.$$

Заменим $B(a, a)$ и $B\left(a, \frac{1}{2}\right)$ их выражениями через Γ, вытекающими из (9), затем вместо $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ подставим $\sqrt{\pi}$; предшествующее соотношение даст

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Gamma(2a). \qquad (12)$$

Это соотношение было найдено Legendre'ом.

Заменяя в нем a на $\frac{a}{2}$, можно написать

$$\Gamma(a)=\frac{2^{a-1}}{\sqrt{\pi}}\;\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

Если принять во внимание (11), это равенство позволяет свести к $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ промежуток, в котором необходимо вычислить значения Γ.

166. Произведение Euler'а. Положим в соотношении (11) последовательно $a=\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ и перемножим результаты; получится

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]^2=\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\,\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{n-1}{n}\pi}.$$

Для вычисления произведения синусов рассмотрим разложение на множителей

$$x^n - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x - e^{-\frac{2k\pi i}{n}}\right).$$

Предполагая x стремящимся к 1, отсюда получаем

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{-\frac{2k\pi i}{n}}\right) = \lim \frac{x^n-1}{x-1} = n.$$

Умножим это соотношение почленно на следующее

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{e^{\frac{k\pi i}{n}}}{2i} = \frac{e^{\frac{(n-1)\pi i}{2}}}{(2i)^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

сочетая соответствующие множители обоих произведений; мы получим, принимая во внимание выражение синуса через показательную функцию,

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Следовательно,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}. \tag{13}$$

Это соотношение было найдено Euler'ом и обобщено Gauss'ом (n⁰ 170).

167. Интеграл Raabe. Из предшествующего соотношения, переходя к логарифмам и разделяя на n, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Log}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\operatorname{Log}2\pi - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{Log}n}{n}.$$

Пусть n стремится к бесконечности; в сумме левой части можно положить $\frac{k}{n} = x$, а $\frac{1}{n} = dx$, и пределом этой суммы будет определенный интеграл; мы получим

$$\int_0^1 \operatorname{Log}\Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Log}2\pi = \operatorname{Log}\sqrt{2\pi} \text{ *)}.$$

*) Так как $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ стремится к бесконечности при $x = 0$, то рассмотренный в тексте интеграл представляется несобственным; тем не менее изящный прием вычисления его с помощью сумм может быть легко оправдан

Этот результат позволяет легко вычислить интеграл Raabe:

$$I=\int_0^1 \operatorname{Log}\Gamma(a+x)\,dx=\int_a^{a+1}\operatorname{Log}\Gamma(x)\,dx.$$

Действительно, производные от $\Gamma(a+x)$ по a и по x одинаковы; поэтому

$$D_a I=\int_0^1 \frac{\Gamma'(a+x)}{\Gamma(a+x)}\,dx=\operatorname{Log}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}=\operatorname{Log} a,$$

ибо $\Gamma(a+1)=a\,\Gamma(a)$, в силу (4). Следовательно,

$$I=\int \operatorname{Log} a\,da=a(\operatorname{Log} a-1)\quad C.$$

Постоянная C определится, если положить $a=0$; мы найдем как доказано в начале этого n^0, $C=I_0=\operatorname{Log}\sqrt{2\pi}$. Окончательно, интеграл Raabe вычисляется по формуле

$$I=\int_0^1 \operatorname{Log}\Gamma(a+x)\,dx=a(\operatorname{Log} a-1)+\operatorname{Log}\sqrt{2\pi}. \tag{14}$$

Этот интеграл играет важную роль в теории функции Г; ниже (n^0 179), мы увидим, что он играет роль асимптотического выражения для $\operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)$.

(ср. n^0 154), если знать, что $\Gamma(x)$ с возрастанием x от 0 до 1 возрастает (см. ниже, прим. ред. на стр. 192). В самом деле, та часть суммы

$$\sum \operatorname{Log}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n},$$

которая соответствует значениям k, для коих $\frac{k}{n}\geqslant\alpha$, по определению, стремится к интегралу от α до 1, сколь угодно мало отличающемуся от интересующего нас интеграла; остальная же часть, по абсолютной величине, меньше $\int_0^\alpha(-\operatorname{Log}\Gamma(x))\,dx$, также сколь угодно малого вместе с α.

Можно, впрочем, вычислить этот интеграл и иначе: взяв логарифмы обеих частей в формуле дополнения и проинтегрировав от 0 до 1, найдем, что

$$\int_0^1 \operatorname{Log}\Gamma(x)\,dx+\int_0^1 \operatorname{Log}\Gamma(1-x)\,dx=\operatorname{Log}\pi-\int_0^1 \operatorname{Log}(\sin\pi x)\,dx=\operatorname{Log}2\pi$$

(см. том I, n^0 249, III).

Так как первые два интеграла приводятся один к другому заменой x на $1-x$, то отсюда и вытекает искомый результат.

Прим. ред.

§ 4. Функции $D \operatorname{Log} \Gamma(a)$ и $D^2 \operatorname{Log} \Gamma(a)$. Разложения Euler'овых функций в ряды и в бесконечные произведения.

168. Вычисление $D \operatorname{Log} \Gamma(a)$. Формула Cauchy. Дифференцируя по a под знаком интеграла, определяющего Γ, получим

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \operatorname{Log} x \, dx = \int_0^1 + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} \operatorname{Log} x \, dx. \tag{15}$$

Это дифференцирование законно, так как каждый из двух интегралов от 0 до 1 и от 1 до ∞ сходится равномерно, когда a изменяется в произвольном положительном промежутке (ε, A); действительно, их элементы по абсолютной величине меньше, соответственно, элементов следующих интегралов:

$$\int_0^1 x^{\varepsilon-1} |\operatorname{Log} x| dx, \quad \int_1^\infty x^A e^{-x} dx,$$

ибо

$$e^{-x} < 1 \text{ и (при } x > 1) \operatorname{Log} x > 0 \text{ и } < x.$$

Мы преобразуем сейчас формулу (15). Пусть y будет положительный параметр; рассмотрим соотношение

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y} dx = \frac{e^{-y}}{y} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx -$$

$$- \frac{1}{y} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-(1+y)x} dx,$$

которое, в силу (1) и (7), может быть написано в виде

$$\int_0^1 + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y} dx = \frac{\Gamma(a)}{y} \left[e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a} \right].$$

Помножим на dy и проинтегрируем от 0 до ∞. В левой части можно переместить знаки интеграла (n⁰ 42), так как подинтегральная функция всегда отрицательна под знаком $\int_0^1$ и всегда положительна под знаком $\int_1^\infty$; вспоминая (n⁰ 53), что

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y} dy = \operatorname{Log} x,$$

мы получаем *определенный* *) результат

$$\int_0^1 + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} \operatorname{Log} x \, dx = \Gamma'(a) = \Gamma(a) \int_0^\infty \left[e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a} \right] \frac{dy}{y}.$$

Отсюда вытекает *формула Cauchy*:

$$D \operatorname{Log} \Gamma(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a} \right] \frac{dy}{y}. \tag{16}$$

169. Формула Gauss'а. Постоянная Euler'а. Полагая $a = 1$ в формуле Cauchy, мы получим следующее соотношение, которое определяет постоянную Euler'а C

$$-C = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int_0^\infty \left[e^{-y} - \frac{1}{1+y} \right] \frac{dy}{y}. \tag{17}$$

Вычтем это равенство из (16); мы получим

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{(1+y)^a} \right) \frac{dy}{y}$$

и, полагая $1 + y = 1 : x$, приходим к *формуле Gauss'а*

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^1 \frac{1 - x^{a-1}}{1 - x} \, dx. \tag{18}$$

---

*) Так как теорему n⁰ 42 приходится применять в промежутках значений x от 0 до 1 и от 1 до ∞ п о р о з н ь, то надлежит еще удостовериться в существовании одного из интегралов (существование другого отсюда уже будет вытекать)

$$\int_0^\infty dy \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y} \, dx, \quad \int_0^\infty dy \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y} \, dx,$$

напр., первого из них.

Не трудно убедиться, что внутренний интеграл представляет собою н е п р е р ы в н у ю функцию от y, к тому же меньшую по абсолютной величине, чем функция от y

$$\frac{1}{y} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x-xy} \, dx = \frac{\Gamma(a)}{y(1+y)^a},$$

интегрируемая по y от $a > 0$ до ∞. Отсюда и следует существование внешнего интеграла.

Прим. ред.

Если a рационально, то интеграл берется в конечном виде; в частности, если a есть целое число n, имеем

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}+C=\int_0^1(1+x+\ldots+x^{n-2})\,dx=1+\frac{1}{2}+$$
$$+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

Этой формулой пользуются для вычисления C, применяя те формулы для приближенного вычисления $\Gamma'(n):\Gamma(n)$, которые будут указаны нами ниже (n^0 178). Значение C таково:

$$C=0{,}5772\ 1566\ 4901\ 5328\ldots$$

170. Произведение Gauss'а. Это есть обобщение формулы Euler'а (n^0 166). Заменим в формуле (18) a на $a+\frac{k}{n}$, где k, n — целые числа, и x на x^n; будем иметь

$$\frac{\Gamma'\left(a+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)}+C=\int_0^1 dx\,\frac{1-x^{a+\frac{k}{n}-1}}{1-x}=n\int_0^1 dx\,\frac{x^{n-1}-x^{na-1+k}}{1-x^n}.$$

Положим здесь $k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1$ и сложим; получится

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)}+nC=n\int_0^1 dx\,\frac{nx^{n-1}-x^{na-1}\sum x^k}{1-x^n}=$$

$$=n\int_0^1 dx\left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}-\frac{x^{na-1}}{1-x}\right).$$

Вычтем из этого равенства следующее соотношение, выведенное из (18),

$$\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}+C=\int_0^1 dx\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x^{na-1}}{1-x}\right),$$

умножив предварительно последнее на n; мы получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right)}-n\,\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}=n\int_0^1 dx\left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right).$$

Вторая часть равенства приводится к интегралу Frullani (n^0 53) с помощью подстановки $x=e^{-z}$; таким образом, она принимает вид

$$n\int_0^\infty\left(\frac{nze^{-nz}}{1-e^{-nz}}-\frac{ze^{-z}}{1-e^{-z}}\right)\frac{dz}{z}=n\int_0^\infty\frac{f(nz)-f(z)}{z}\,dz=-n\operatorname{Log} n.$$

Заменив вторую часть предшествующего равенства через $-n\operatorname{Log} n$, проинтегрируем; мы получим

$$\operatorname{Log}\frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}=-an\operatorname{Log} n+\operatorname{Log} C.$$

Постоянную интегрирования можно определить, если положить $a=\frac{1}{n}$, благодаря чему произведение под знаком логарифма приведется к произведению Euler'a (n^0 166), значение которого есть $(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}:\sqrt{n}$. Итак, для определения C имеем

$$\operatorname{Log}\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}=\operatorname{Log}\frac{C}{n},\quad\text{откуда}\quad C=\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Таким образом получаем *соотношение Gauss'a*

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\,\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=$$

$$=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma(na)}{n^{na-\frac{1}{2}}}. \qquad (19)$$

В частности, при $n=2$, мы вновь приходим к формуле Legendre'a (12). С помощью формулы (19), придавая n последовательно значение 3, 5, 7, 11, ..., можно все более сужать тот промежуток, в котором необходимо произвести непосредственное вычисление значений $\Gamma(a)$.

171. Разложение $D^2\operatorname{Log}\Gamma(a)$ в ряд дробей. Заменим x на e^{-x} в формуле Gauss'a (18); мы получим

$$D\operatorname{Log}\Gamma(a)+C=\int_0^\infty\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx;$$

произведем еще раз дифференцирование под знаком интеграла (n^0 48)

$$D^2\operatorname{Log}\Gamma(a)=\int_0^\infty\frac{xe^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx.$$

В этом интеграле подставим разложение

$$\frac{1}{1-e^{-x}}=\sum_{0}^{n-1} e^{-kx}+\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}=\sum_{0}^{n-1} e^{-kx}+\theta\,\frac{e^{-(n-1)x}}{x},$$

где $\theta=\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ содержится между 0 и 1, ибо знаменатель $1-e^{-x}=$ $=e^{-x}\,(e^{x}-1)$ больше xe^{-x}. Мы получим

$$D^2 \operatorname{Log}\Gamma(a)=\sum_{0}^{n-1}\int_{0}^{\infty} xe^{-(k+a)x}\,dx+\theta'\int_{0}^{\infty} e^{-(a+n-1)x}\,dx=$$

$$=\sum_{0}^{n-1}\frac{1}{(a+k)^2}+\frac{\theta'}{a+n-1}.$$

Предполагая n стремящимся к бесконечности, мы получим абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$D^2 \operatorname{Log}\Gamma(a)=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(a+k)^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\ldots \qquad (20)$$

172. Формула Weierstrass'а: разложение 1: $\Gamma(a)$ на первоначальных множителей. Проинтегрируем равенство (20) от 1 до a; принимая во внимание, что постоянная Euler'а $C=-\Gamma'(1)$, мы получим

$$D\log\Gamma(a)+C=\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+n}-\frac{1}{a+n}\right)\ ^{*});$$

интегрируя вторично от 1 до a, найдем

$$\operatorname{Log}\Gamma(a)+C(a-1)=\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{a-1}{1+n}-\operatorname{Log}\frac{a+n}{1+n}\right). \qquad (21)$$

Если заменить a через $a+1$, то можно проще написать

$$\operatorname{Log}\Gamma(a+1)+Ca=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{a}{n}-\operatorname{Log}\frac{a+n}{n}\right).$$

---

*) Исходя из этой формулы для $D\operatorname{Log}\Gamma(a)$, равно как и из выражений этой производной в виде интеграла (18), легко убедиться в том, что $D\operatorname{Log}\Gamma(a)$ с возрастанием a от 0 до $+\infty$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ и, таким образом (будучи непрерывной), однажды лишь проходит через нулевое значение, меняя знак с $-$ на $+$; последнее справедливо, очевидно, и для $D\Gamma(a)$; далее, так как $\Gamma(1)=$ $=\Gamma(2)=1$, то, по теореме Rolle'я, единственный корень производной $D\Gamma(a)$ содержится между 1 и 2; он приближенно равен 1,4616, в этой точке $\Gamma(a)$ достигает своего наименьшего значения 0,8856.

Прим. ред.

Возвращаясь от логарифмов к числам, мы получим формулу Weierstrass'а

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)}=e^{Ca}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}. \qquad (22)$$

Множители этого бесконечного произведения и есть то, что Weierstrass называет *первоначальными множителями*. Это произведение может служить отправной точкой для распространения определения $\Gamma(a)$ на мнимые значения параметра. Мы не будем этим заниматься. Указанное распространение можно также выполнить с помощью разложения $\Gamma(a)$ в бесконечное произведение, которое было установлено Euler'ом и вновь найдено Gauss'ом; мы его ниже выведем.

173. Формула Euler'а: разложение $\Gamma(a)$ в бесконечное произведение. Освободим формулу (21) от C, полагая в ней $a=2$ и вычитая из равенства (21) полученную таким образом формулу, умножив ее предварительно на $a-1$; мы получим

$$\operatorname{Log}\Gamma(a)=\sum_{0}^{\infty}\left[(a-1)\operatorname{Log}\frac{2+n}{1+n}-\operatorname{Log}\frac{a+n}{1+n}\right].$$

Выполним суммирование членов от $n=0$ до $n=m-2$; предшествующее соотношение может быть переписано в виде

$$\log\Gamma(a)=\lim_{m=\infty}\left[(a-1)\operatorname{Log}m+\sum_{0}^{m-2}\operatorname{Log}\frac{1+n}{a+n}\right];$$

переходя от логарифмов к числам, получим

$$\Gamma(a)=\lim_{m=\infty}m^{a-1}\frac{1\cdot 2\ldots(m-1)}{a(a+1)\ldots(a+m-2)}.$$

Умножим еще на множителя $m:(a+m-1)$, который стремится к единице; мы получим более удобное выражение

$$\Gamma(a)=\lim_{m=\infty}m^{a}\frac{1\cdot 2\ldots(m-1)}{a(a+1)\ldots(a+m-1)}. \qquad (23)$$

Это и есть формула, найденная Euler'ом.

§ 5. Функции $\operatorname{Log}\Gamma(a)$ и $\operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)$. Асимптотические формулы.

174. Выражение $\operatorname{Log}\Gamma(a)$ в виде определенного интеграла. Вспомним формулу Cauchy (16), которую мы перепишем

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\int_{0}^{1}+\int_{1}^{\infty}\left[e^{-y}-(1+y)^{-a}\right]\frac{dy}{y}.$$

Правая часть разложена на два интеграла, из которых лишь второй является *несобственным.* Но этот интеграл сходится равномерно, покуда a остается большим некоторого положительного числа ε, ибо он представляет собою разность двух других

$$\int_1^\infty e^{-y}\frac{dy}{y}-\int_1^\infty \frac{dy}{(1+y)^a y},$$

из которых первый не зависит от a, а второй *сходится равномерно* (ибо его элементы убывают с возрастанием a).

Умножим формулу Cauchy на da и проинтегрируем от 1 до a ($a>0$); в виду равномерной сходимости интеграла, эту операцию можно произвести под знаком интеграла; в результате получится равномерно же сходящийся интеграл (n^0 48, V)

$$\operatorname{Log}\Gamma(a)=\int_0^\infty\left[(a-1)\,e^{-y}-\frac{(1+y)^{-1}-(1+y)^{-a}}{\operatorname{Log}(1+y)}\right]\frac{dy}{y}.$$

Если $a=2$, в частности, будем иметь

$$0=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-y}}{y}-\frac{(1+y)^{-2}}{\operatorname{Log}(1+y)}\right]dy.$$

Умножим это равенство на $(a-1)$ и вычтем из предшествующего соотношения; тогда

$$\operatorname{Log}\Gamma(a)=\int_0^\infty\left[\frac{a-1}{(1+y)^2}-\frac{(1+y)^{-1}-(1+y)^{-a}}{y}\right]\frac{dy}{\operatorname{Log}(1+y)};$$

если положить здесь $\operatorname{Log}(1+y)=x$, откуда $y=e^x-1$, то получим

$$\int_0^\infty\left[(a-1)\,e^{-x}-\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}.$$

Наконец, заменяя x на $-x$, придем к искомому интегралу

$$\operatorname{Log}\Gamma(a)=\int_{-\infty}^0\frac{dx}{x}\left[\frac{e^{ax}-e^x}{e^x-1}-(a-1)\,e^x\right],\tag{24}$$

причем все замены переменной не нарушили равномерной сходимости интеграла для $a>\varepsilon$.

Замечание. Умножая это равенство на da и проинтегрировав от a до $a+1$ (под знаком интеграла, что дозволительно, в виду равномерной сходимости), мы получим полезное выражение для интеграла Raabe

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x}\left[\frac{e^{ax}}{x} - \frac{e^x}{e^x - 1} - \left(a - \frac{1}{2}\right)e^x\right]. \tag{25}$$

Кроме того, как мы знаем, он выражается и в конечном виде (n^0 167)

$$I = \int_{a}^{a+1} \operatorname{Log}\Gamma(x)\,dx = a\,(\operatorname{Log} a - 1) + \operatorname{Log}\sqrt{2\pi}.$$

175. Функция Binet. Вычтем из формулы (24) формулу (25) и сложим почленно с равенством

$$\frac{1}{2}\operatorname{Log} a = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{2}\,\frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax} - e^{x}}{2}\,\frac{dx}{x};$$

все члены, не содержащие множителя e^{ax}, взаимно уничтожатся под знаком $\int$ и получится

$$\operatorname{Log}\Gamma(a) - I + \frac{\operatorname{Log} a}{2} = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,e^{ax}\,dx, \tag{26}$$

где

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right).$$

Интеграл в правой части этой формулы есть функция от a; ее называют *функцией Binet* и обозначают символом $\omega(a)$. Итак,

$$\omega(a) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,e^{ax}\,dx. \tag{27}$$

Заменяя в формуле (26) интеграл I его выражением, упомянутым в конце предыдущего n^0, получим формулу

$$\operatorname{Log}\Gamma(a) = \operatorname{Log}\sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} a - a + \omega(a). \tag{28}$$

Когда a стремится к бесконечности, $\omega(a)$ стремится к нулю, так что, пренебрегая членом $\omega(a)$ в предыдущей формуле, мы получаем асимптотическое выражение для $\operatorname{Log}\Gamma(a)$. Но в следующем n^0 мы установим для $\omega(a)$ приближенные формулы.

176. Ряд и формула Stirling'а. В интеграле (27) заменим $f(x)$ разложением, найденным в n^0 156 (формула 4)

$$f(x) = \frac{B_2}{2!} + \frac{B_4}{4!}x^2 + \cdots + \frac{B_{2n-2}\,x^{2n-4}}{(2n-2)!} + \theta\,\frac{B_{2n}x^{2n-2}}{(2n)!},\quad (0<\theta<1); \tag{29}$$

заметим, что каждый член (по умножении на e^{ax}) интегрируется по формуле

$$\int_{-\infty}^{0} x^{2k}\ e^{ax} dx = \int_{0}^{\infty} x^{2k}\, e^{-ax}\, dx = \frac{\Gamma(2k+1)}{a^{2k+1}} = \frac{(2k)!}{a^{2k+1}}$$

и что, не меняя общего смысла обозначения θ, по теореме о среднем, можно вынести θ за знак интеграла; в результате получим *ряд Stirling'a* с выражением для дополнительного члена R,

$$\left.\begin{aligned} \omega(a) &= \frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{a} - \frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{a^3} + \ldots + \\ &\quad + \frac{B_{2n-2}}{(2n-1)(2n-2)}\cdot\frac{1}{a^{2n-3}} + R, \\ R &= \theta\frac{B_{2n}}{(2n-1)\,2n}\cdot\frac{1}{a^{2n-1}} \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

В частности, полагая $n = 1$, сведем весь ряд к R и получим $\left(\text{так как } B_2 = \frac{1}{6}\right)$

$$\omega(a) = \theta\,\frac{B_2}{2a} = \frac{\theta}{12a}. \tag{31}$$

Если заменить этим выражением $\omega(a)$ в формуле (28), то получится *формула Stirling'a*

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Log}\Gamma(a) &= \operatorname{Log}\sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} a - a + \frac{\theta}{12a}, \\ \Gamma(a) &= \sqrt{2\pi}\ \ a^{a-\frac{1}{2}}\ e^{-a+\frac{\theta}{12a}}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Если a равно целому числу m, то эта формула, умноженная на m, перепишется в виде

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots m = \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m e^{\frac{\theta}{12m}};$$

этот результат играет важную роль в исчислении вероятностей.

177. Замечания относительно ряда Stirling'a. Ряд (30) носит имя Stirling'a, который первый его рассматривал, но не устанавливал выражения для дополнительного члена. Последнее принадлежит Cauchy. Бесконечно продолженный ряд Stirling'a *расходится*, каково бы ни было положительное число a, ибо, если вернуться к выражению (3) для чисел Bernoulli, данному в n° 156, то легко видеть, что общий член этого ряда бесконечно возрастает вместе с n.

Однако весьма замечательно, что ряд Stirling'a, несмотря на свою расходимость, доставляет очень точный и удобный метод для вычисления $\omega(a)$; точность, которая может быть достигнута этим путем, тем больше, чем более значительно a. Действительно, этот ряд представляет собой так называемый *псевдо-сходящийся* ряд. Если a имеет большое значение, то члены ряда по началу очень быстро убывают, и формула (30) показывает, что ошибка, получающаяся, если прервать ряд на каком-нибудь члене, имеет знак первого отбрасываемого члена, а по абсолютной величине меньше его. Таким образом наилучшее приближение получится, если прервать ряд на члене, предшествующем наименьшему члену, а этот последний и будет пределом допущенной ошибки.

178. Асимптотическое выражение для D Log $\Gamma(a)$. Если продифференцировать формулы (27) и (28), то получим

$$\left.\begin{aligned} D\operatorname{Log}\Gamma(a) &= \operatorname{Log}(a) - \frac{1}{2a} + \omega'(a), \\ \omega'(a) &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\cdot x e^{ax}\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Заменяя в этом интеграле $f(x)$ ее разложением (29), найдем, как и выше (причем θ содержится между 0 и 1)

$$\omega'(a) = -\frac{B_2}{2a^2} - \frac{B_4}{4a^4} - \ldots - \frac{B_{2n-2}}{(2n-2)\,a^{2n-2}} - \frac{\theta B_{2n}}{2n\,a^{2n}}.$$

Этот результат совпадает с тем, который можно было бы получить, прямо дифференцируя ряд Stirling'а. Этот новый ряд также является *псевдо-сходящимся*, подобно ряду Stirling'а, и с таким же удобством служит для вычисления $\omega'(a)$, при больших значениях a.

Предшествующие формулы доставляют простейший способ для вычисления Euler'овой постоянной C. Из формулы, установленной в n⁰ 169, для целого m, имеем

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m-1} - D\operatorname{Log}\Gamma(m).$$

Если взять m достаточно большим и вычислить $D \operatorname{Log}\Gamma(m)$ по предшествующим формулам, то получится значение C с сколь угодно большой точностью. Например, полагая $m = 10$ и взяв шесть первых членов в разложении $\omega'(m)$, получим C уже с пятнадцатью точными знаками после запятой *).

179. Асимптотическое выражение для Log $\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)$. Если заменить в формуле (24) a через $a + \frac{1}{2}$ и полученное равенство вычесть из (25), то все члены, не содержащие множителем e^{ax}, снова взаимно уничтожатся и получится

*) Serret. Cours de calcul differentiel et intégral, t. II. 1877, p. 228.

$$\left.\begin{aligned} I - \operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) &= \int_{-\infty}^{0} F(x)\, e^{ax}\, dx, \\ \text{где} \qquad F(x) &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{x}-1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Мы положим

$$\omega_1(a) = \int_{-\infty}^{0} F(x)\, e^{ax}\, dx;$$

тогда, заменяя I его значением, получим

$$\operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = a(\operatorname{Log} a - 1) + \operatorname{Log}\sqrt{2\pi} - \omega_1(a). \tag{35}$$

Если a бесконечно возрастает, то $\omega_1(a)$ стремится к нулю, так что *интеграл Raabe представляет собою асимптотическое выражение для* $\operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)$.

180. Соотношение между $\omega(a)$ и $\omega_1(a)$. Это соотношение получается из формулы Legendre'а (n^0 165)

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Gamma(2a),$$

откуда

$$\operatorname{Log}\Gamma(a) + \operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \operatorname{Log}\sqrt{\pi} - (2a-1)\operatorname{Log} 2 + \operatorname{Log}\Gamma(2a).$$

Заменим $\operatorname{Log}\Gamma(a)$ и $\operatorname{Log}\Gamma(2a)$ их выражениями, по формуле (28), а $\log\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)$ его выражением (35). После отбрасывания взаимно уничтожающихся членов останется

$$\omega_1(a) = \omega(a) - \omega(2a). \tag{36}$$

181. Интегралы Schaar'а. Функции $\omega(a)$ и $\omega_1(a)$ могут быть выражены интегралами от дифференциалов, рациональных относительно a. Эти весьма замечательные формулы принадлежат Schaar'у; мы их выведем ниже.

Рассмотрим сначала $\omega(a)$. Функция $f(x)$ в формуле (26) была разложена в ряд дробей (n^0 153) и мы нашли

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{x^2 + 4k^2\pi^2}.$$

Если подставить это разложение $f(x)$ в выражение (27) для $\omega(a)$ и переставить знаки $\int$ и $\sum$, то найдем

$$\omega(a) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{ax}\, dx = \sum_{1}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{2e^{ax}\, dx}{x^2 + 4k^2\pi^2}. \tag{37}$$

Заменим в каждом интеграле x на $\dfrac{2k\pi x}{a}$ и снова переместим знаки $\sum$ и $\int$; тогда получится

$$\omega(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{2k\pi x}}{k} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{-\infty} \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} \operatorname{Log}(1 - e^{2\pi x}). \tag{38}$$

Это — первая формула Schaar'a.

Для вывода ее мы дважды переставляли знаки $\sum$ и $\int$, что дозволительно, так как рассматриваемые ряды имеют положительные члены и результаты получаются определенные. Это, в сущности, та же теорема, что и относительно изменения порядка двух интегрирований (n° 42)*).

Второй интеграл Schaar'a получается из соотношения (36):

$$\omega_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{-\infty} \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} \operatorname{Log}(1 - e^{2\pi x}) - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{-\infty} \frac{2a\, dx}{4a^2 + x^2} \operatorname{Log}(1 - e^{2\pi x}).$$

Заменяя x на $2x$ во втором интеграле, получим вторую формулу Schaar'a в виде

$$\left.\begin{aligned} \omega_1(a) &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{-\infty} \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} \operatorname{Log} \frac{1 - e^{2\pi x}}{1 - e^{4\pi x}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} \operatorname{Log}(1 + e^{2\pi x}). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

182. Разложение $\omega_1(a)$ по отрицательным степеням a. Асимптотические формулы Gauss'a. Если в интегралы Schaar'a подставить разложение ($0 < \theta < 1$)

$$\frac{a}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 - \ldots \left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^{n-1} + \theta\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^{n}\right],$$

---

*) Достаточно заметить, что сходящийся ряд $\Sigma\, u_n$ может быть заменен интегралом с бесконечным пределом. Действительно, определим функции $u(x)$, полагая ее равной u_n между $n-1$ и n; тогда

$$\sum u_n = \int_{0}^{\infty} u(x)\, dx.$$

и почленно проинтегрировать, замечая, что θ в известном смысле можно вынести за знак интеграла, по теореме о среднем, то получатся разложения $\omega(a)$ и $\omega_1(a)$ по отрицательным степеням a с выражениями для дополнительных членов. Очевидно (без того, чтобы было необходимо все это выписать), что *этот дополнительный член будет одного знака с первым отбрасываемым членом и меньше его по абсолютной величине.*

Коэффициенты этих разложений выражаются также интегралами, но было бы бесполезно рассматривать эти интегралы, ибо коэффициенты разложения $\omega(a)$ уже были вычислены (30):

$$\omega(a)=\frac{B_2}{1\cdot 2}\,\frac{1}{a}+\frac{B_4}{3\cdot 4}\,\frac{1}{a^3}+\frac{B_6}{5\cdot 6}\,\frac{1}{a^5}+\ldots$$

а коэффициенты разложения $\omega_1(a)$ получаются отсюда, в силу (36),

$$\omega_1(a)=\frac{B_2}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{a}+\frac{B_4}{3\cdot 4}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\frac{1}{a^3}+$$
$$+\frac{B_6}{5\cdot 6}\left(1-\frac{1}{2^5}\right)\frac{1}{a^5}+\ldots$$

Этот ряд, хотя расходящийся, является *псевдо-сходящимся* подобно ряду Stirling'a; он также удобен для приближенного вычисления, причем ошибка равна дроби от первого отбрасываемого члена. Таким образом, в частности, ограничиваясь одним дополнительным членом, имеем

$$\omega_1(a)=\theta\,\frac{B_2}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{a}=\frac{\theta}{24a}\qquad(0<\theta<1).$$

Если подставить это выражение в формулу (35), то получится ф о р м у л а Gaus s'a, аналогичная формуле Stirling'a, но более удобная,

$$\operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=a(\operatorname{Log}a-1)+\operatorname{Log}\sqrt{2\pi}-\frac{\theta}{24a}\,. \tag{40}$$

Пусть n будет целое число; полагая $a=n+\frac{1}{2}$, получим для вычисления факториала следующую формулу, дающую лучшее приближение, чем формула Stirling'a:

$$n!=\sqrt{2\pi}\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\theta}{24n+12}}\qquad(0<\theta<1). \tag{41}$$

ГЛАВА VI

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОБЩИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

§ 1. Образование дифференциальных уравнений.

183. Определения. Порядок уравнения. Дифференциальным уравнением называется соотношение, которое связывает переменные и их дифференциалы (или производные). Соотношения, содержащие только одну независимую переменную и производные зависимых переменных, называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями*. По началу мы будем заниматься только такими уравнениями.

Самый простой случай, это тот, когда уравнение содержит только независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее первую производную y'. Такое уравнение имеет вид

$$f(x, y, y') = 0$$

и называется уравнением *первого порядка*.

Вообще, дифференциальное уравнение порядка n содержит независимую переменную x, функцию y и ее производные до порядка n включительно.

Происхождение дифференциальных уравнений можно представить таким способом, который позволит предвидеть природу их интегралов.

184. Образование уравнений 1-го порядка. Пусть дано уравнение

$$F(x, y, C) = 0 \tag{1}$$

между двумя переменными x и y и произвольной постоянной C. Дифференцируя его, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0. \tag{2}$$

Вообще говоря, это уравнение содержит еще C; но величину эту можно исключить из уравнений (1) и (2), что дает соотношение

$$f(x, y, y') = 0 \tag{3}$$

которое имеет по меньшей мере ту же общность, но связывает между собой только x, y, y', каково бы ни было значение C.

Это и есть дифференциальное уравнение. Оно выражает, например, геометрическое свойство, общее всем кривым, представляемым уравнением (1), при произвольном значении C.

Уравнение (1), содержащее произвольную постоянную, называется *общим интегралом* уравнения (3). Мы видим таким образом, что интегрирование уравнения 1-го порядка вводит одну произвольную постоянную. Общность этого результата будет установлена в следующем отделе.

185. Пример. Пусть дано *уравнение софокусных кривых 2-го порядка*

$$\frac{x^2}{a+C}+\frac{y^2}{b+C}=1.$$

Из него выводим дифференцированием:

$$\frac{x}{a+C}+\frac{yy'}{b+C}=0,$$

и, разрешая эту систему относительно

$$\frac{1}{a+C} \text{ и } \frac{1}{b+C},$$

находим:

$$\frac{1}{a+C}=\frac{y'}{x^2y'-xy}, \qquad \frac{1}{b+C}=\frac{1}{y^2-xyy'}.$$

Исключая отсюда C, получаем дифференциальное уравнение этих кривых:

$$y'^2+\frac{x^2-y^2-a+b}{xy}y'-1=0.$$

186. Образование уравнений 2-го порядка. Рассмотрим теперь уравнение с двумя произвольными постоянными

$$F(x,\ y,\ C_1,\ C_2)=0. \tag{4}$$

Дифференцируя его один раз, получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0. \tag{5}$$

Вообще говоря, невозможно исключить обе постоянные C_1 и C_2 из уравнений (4) и (5), так как в этом случае не существует никакого соотношения между x, y, y', не содержащего произвольной постоянной. Тогда говорят, что две произвольные постоянные *различны*, и для исключения их нужно дифференцировать еще один раз, что введет y''. Исключение произвольных постоянных приведет таким образом к дифференциальному уравнению второго порядка.

Для образования этого уравнения можно также произвести исключение постепенно. Сперва исключаем одну из постоянных, например C_2, из уравнений (4) и (5), причем предполагается, что

(5) содержит еще обе постоянные, ибо в противном случае исключение было бы уже закончено. Таким путем получаем соотношение:

$$f_1(x, y, y', C_1) = 0, \tag{6}$$

которое содержит еще произвольную постоянную.

Теперь можно исключить C_1 из уравнения (6) и уравнения, которое получается от его дифференцирования, что дает искомое соотношение

$$f_2(x, y, y', y'') = 0. \tag{7}$$

Это соотношение, которое не заключает больше произвольных постоянных, имеет по крайней мере ту же общность, что и предыдущие.

Соотношение (7) есть единственное, не содержащее произвольных постоянных (предполагаемых различными), которое может существовать между x, y, y', y'', так как если бы существовало еще другое соотношение, то, исключив y'' из этих двух соотношений, получили бы соотношение между x, y, y', не содержащее произвольных постоянных, что противоречит предположению.

Уравнение (7) есть дифференциальное уравнение 2-го порядка, уравнение (6) — 1-го порядка, но оно содержит произвольную постоянную: это есть *первый интеграл* уравнения (7). Наконец, уравнение (4), содержащее две произвольные постоянные, есть *общий интеграл* уравнения (7).

На основании этого можно предвидеть, что интегрирование уравнения 2-го порядка должно вводить две произвольные постоянные, что и будет доказано строго в следующем отделе.

187. Образование уравнений любого порядка. Эти результаты легко обобщаются. Пусть дано уравнение с n произвольными постоянными:

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \tag{8}$$

Дифференцируя его последовательно $(n-1)$ раз, образуем $(n-1)$ новых уравнений и получим всего n уравнений между $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ и n постоянными. Говорят, что постоянные эти *различны*, если невозможно исключить n постоянных из этих n уравнений, или, если не существует соотношения между $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, не содержащего произвольных постоянных. Но если продифференцируем еще один раз, получим $n+1$ уравнений, из которых можно исключить n постоянных, что приведет к соотношению между $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Для образования этого соотношения можно производить исключение постепенно. Исключая C_n из уравнения $F=0$ и его производной, находим

$$f_1(x, y, y', C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0.$$

Точно также, исключая C_{n-1} из уравнения $f_1=0$ и его производной, находим

$$f_2(x, y, y', y'', C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}) = 0.$$

После n аналогичных операций получим

$$f_n(x, y, y', \ldots, y^n) = 0. \tag{9}$$

Это соотношение есть единственное, не содержащее произвольной постоянной, которое может существовать между $x, y, y', \ldots, y^n$, так как, если бы были два различных таких соотношения, из них можно было бы вывести соотношение только между $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ и постоянные не были бы различны.

Уравнение (9) есть дифференциальное уравнение n-го порядка. Последовательные уравнения $f_{n-1} = 0$, $f_{n-2} = 0, \ldots, f_1 = 0$, каждое из которых содержит одной производной меньше и одной произвольной постоянной больше, чем предыдущее, называются *первым, вторым, ... $(n-1)$-м интегралами* уравнения (9). Наконец, уравнение $F = 0$, связывающее только x и y и заключающее n произвольных постоянных, называется *общим интегралом* уравнения (9).

Отсюда видим, что интегрирование уравнения порядка n, вообще говоря, вводит n произвольных постоянных, что и будет доказано строго в следующем отделе.

188. Примеры. *1. Общее уравнение окружностей*

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

содержит три произвольные постоянные. Их дифференциальное уравнение должно быть поэтому 3-го порядка. Для того чтобы получить его, дифференцируем сперва два раза, что дает:

$$1 + y'^2 + yy'' + by'' = 0.$$

Разделив на y'' и дифференцируя еще один раз, находим:

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)' + y' = 0,$$

откуда

$$3y'y''^2 = (1 + y'^2)\, y'''.$$

2. Общее уравнение кривых 2-го порядка есть

$$y = ax + b + \sqrt{px^2 + 2qx + r}.$$

Их дифференциальное уравнение было получено Halphen'ом следующим образом: дифференцируя два раза, имеем:

$$y' = a + \frac{px + q}{\sqrt{px^2 + 2qx + r}}; \quad y'' = \frac{pr - q^2}{(px^2 + 2qx + r)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = \frac{px^2 + 2qx + r}{(pr - q^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0.$$

В случае параболы $p = 0$. Уравнение приводится к 4-му порядку

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = 0.$$

Проделав указанные дифференцирования и освобождаясь от знаменателей, получаем для кривых 2-го порядка общего вида дифференциальное уравнение

$$40y'''^3 - 45y''y'''y^{IV} + 9y''^2 y^{V} = 0,$$

а для парабол—

$$5y'''^2 - 3y'' y^{IV} = 0,$$

§ 2. Общие предложения об интегралах дифференциальных уравнений. Теоремы существования.

189. Предварительные рассуждения. Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Интегрировать это уравнение—значит найти все функции y от x, которые ему удовлетворяют. С точки зрения геометрической это значит найти все кривые, касательная которых в каждой точке (x, y) имеет направление, определяемое этим уравнением (1).

Первый вопрос, который при этом возникает,—это узнать, имеет ли поставленная задача решение и сколько решений она имеет. Геометрическое истолкование позволяет предвидеть ответ на этот вопрос.

В самом деле, допустим, что движущаяся точка описывает *интегральную кривую*, т. е. кривую, удовлетворяющую уравнению $y' = f(x, y)$. В каждом из своих последовательных положений эта точка движется в направлении, указываемом этим уравнением. Легко понять, что движение ее таким образом постепенно определится, но исходное положение остается произвольным. Существует, стало быть, бесчисленное множество кривых, представляющих решение задачи, каждая из которых определяется одной из своих точек, рассматриваемой как *начальная*. А потому существует также бесчисленное множество интегралов или функций y, удовлетворяющих уравнению. Всякий интеграл определяется заданием его начального значения y_0 при $x = x_0$, но значение это остается произвольным.

Рассмотрим теперь два совокупных уравнения с двумя функциями y и z от x:

$$y' = f_1(x, y, z), \qquad z' = f_2(x, y, z). \tag{2}$$

С точки зрения геометрической, интегрировать эту систему значит найти все кривые в пространстве, касательная которых в каждой точке (x, y, z) кривой имеет направление, указываемое этими уравнениями. Движущаяся точка, описывающая *интегральную кривую*, движется поэтому в направлении, которое в каждый данный момент определяется положением точки, что вообще определяет и все движение, причем только начальное положение точки остается произвольным. Понятно, стало быть, что существует бесчисленное множество кривых, представляющих решение задачи, каждая из которых определяется одной из своих точек. Поэтому, с аналитической точки зрения, существует бесчисленное множество интегралов или пар функций y, z, удовлетворяющих данным уравнениям; каждый интеграл определяется заданиями своих *начальных* значений y_0 и z_0 при $x = x_0$, которые остаются произвольными.

Если рассматривать систему большего чем два числа совокупных уравнений, то геометрическое истолкование уже не годится, но результаты обобщаются сами собой.

Предыдущие рассуждения не имеют силы доказательств, но позволяют отчетливо выяснить сущность задачи. Они облегчают понимание строгих доказательств, которые следуют ниже и которые выяснят те условия, при которых предыдущие заключения справедливы.

190. Существование интеграла одного дифференциального уравнения 1-го порядка. Рассмотрим дифференциальное уравнение 1-го порядка в *нормальной форме*, т. е. разрешенное относительно производной искомой функции:

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Для того чтобы доказать, что оно имеет интеграл, определяемый единственным образом заданием своего начального значения y_0, необходимо допустить некоторые условия. Для этой цели мы введем условия большой общности, известные под названием условий Lipschitz'a.

Условия Lipschitz'a. Пусть $f(x, y, \ldots)$ есть функция от x, y (и в случае надобности и от других еще переменных), которые изменяются в некоторой области D; говорят, что *функция f удовлетворяет условию* Lipschitz'a *относительно y*, если можно указать такую положительную постоянную M, чтобы для всяких двух точек $x, y, \ldots; x, Y, \ldots$ области D, отличающихся только ординатой y, имело место соотношение

$$|f(x, Y, \ldots) - f(x, y, \ldots)| < M |Y - y|.$$

Это условие*), в частности, наверно выполнено, если функция f имеет частную производную f'_y, ограниченную в области D, причем граница этой области пересекается только в двух точках прямой, параллельной оси y-ков. Это есть непосредственное следствие формулы конечных приращений, при этом M можно принять верхнюю границу (f'_y).

Основная теорема. Предположим, что *функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию* Lipschitz'a *относительно y в области D; если x_0, y_0 означает внутреннюю точку этой области, то уравнение* (2) *имеет один и только один интеграл $y = F(x_0, y_0)$, принимающий начальное значение y_0 при $x = x_0$, причем интеграл этот есть непрерывная функция от y_0 (при закрепленном x_0).*

Пусть L есть maximum $|f|$ в области D; пусть далее a и b суть

*) Оно равносильно предположению, что все обобщенные производные от f по y ограничены.

такие два положительных числа, что прямоугольник R, имеющий вершины в точках $x_0 \pm a$, $y_0 \pm b$, находится внутри D. Задаем положительное число δ, меньшее каждой из трех величин a, $\frac{b}{L}$ и $\frac{1}{M}$, где M есть постоянная из условия Lipschitz'a, и будем впредь предполагать, что x изменяется в промежутке $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Мы установим следующий ряд предложений, из которых и вытекает теорема:

I. *Пусть y есть непрерывная функция от x, имеющая начальное значение y_0. Если эта функция имеет непрерывную производную y' и удовлетворяет дифференциальному уравнению с ошибкою ω, по абсолютной величине $< \varepsilon$, т. е. если имеем:*

$$y' = f(x, y) + \omega, \qquad |\omega| < \varepsilon, \tag{2}$$

(причем эти условия могут и не быть выполнены для некоторой конечной совокупности значений x), то точка (x, y) остается внутри прямоугольника R, лишь только ε достаточно мало.

В самом деле, даже если имеются исключительные точки, уравнение (2) можно интегрировать от x_0 до x, что дает

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} [f(x, y) + \omega]\, dx. \tag{3}$$

Коль скоро точка (x, y) находится внутри D, $|f| < L$; из равенства (3) выводим поэтому

$$|y - y_0| < \int_{x_0}^{x_0+\delta} (L + \varepsilon)\, dx = L\delta + \varepsilon\delta.$$

Так как $L\delta$ меньше b, $L\delta + \varepsilon\delta$ также будет меньше b при достаточно малом ε. Тогда $|y - y_0| < b$ и так как сверх того

$$|x - x_0| \leqslant \delta < a,$$

точка (x, y) не может достигнуть границы R, следовательно, и подавно не может выйти из R.

II. *Если две непрерывные функции y и Y, имеющие производные, за исключением разве лишь конечного числа точек, имеют одинаковое начальное значение y_0, и в тех точках, где производная существует, удовлетворяют с ошибкой, по абсолютной величине, меньшей ε, одному и тому же дифференциальному уравнению, их разность $(Y - y)$ при достаточном уменьшении ε может быть сделана сколь угодно малой, причем отношение $\frac{(Y-y)}{\varepsilon}$ остается ограниченным, когда ε стремится к 0.*

Пусть ω и ω' суть ошибки, соответствующие y и Y. Вычитая уравнения, аналогичные (3), одно из другого, находим:

$$Y - y = \int_{x_0}^{x} [f(x, Y) - f(x, y) + \omega' - \omega]\, dx.$$

Но в силу условия Lipschitz'а

$$|f(x, Y)-f(x, y)| < M\,|Y-y|,$$

а потому, обозначив через μ maximum $|Y-y|$ в промежутке

$$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$$

и помня, что $M\delta < 1$, из предыдущего уравнения находим:

$$\mu < \int_{x_0}^{x_0+\delta}(M\mu+2\varepsilon)\,dx = M\mu\delta+2\varepsilon\delta,$$

откуда

$$\frac{\mu}{\varepsilon} < \frac{2\delta}{1-\delta M},$$

что и доказывает высказанное предложение.

III. *Сколь мало ни было бы положительное число* ε, *можно найти непрерывную функцию* $\varphi(x)$, *имеющую непрерывную производную, за исключением разве конечного числа точек, и в тех точках, где производная существует, удовлетворяющую данному дифференциальному уравнению с ошибкой* ω, *по абсолютной величине* $< \varepsilon$.

В самом деле, разобьем прямоугольник R на прямоугольные элементы α, настолько малые, чтобы в каждом из них колебание функции $f(x, y)$ было меньше ε. Исходя из точки (x_0, y_0) с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$, опишем ломаную линию, направление которой меняется только лишь при пересечении с границами прямоугольников α, причем при каждом пересечении угловой коэффициент делается равным значению $f(x, y)$ в точке пересечения. Таким способом мы действительно построим вполне определенную ломаную линию, вершины которой все лежат на границах прямоугольников α, и ордината $y=\varphi(x)$ есть функция, удовлетворяющая предложению III.

IV. *Если* ε *стремится к* 0, $\varphi(x)$ *стремится равномерно к интегралу* $F(x)$ *данного дифференциального уравнения, имеющему начальное значение* y_0.

В самом деле, когда ε стремится к 0, соответствующие функции $\varphi(x)$ сближаются одна с другой и, в силу II, стремятся равномерно к пределу F. Но, по предположению, для каждой функции φ имеем

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[f(x, \varphi)+\omega]\,dx \qquad |\omega| < \varepsilon.$$

Пусть ε стремится к 0 и, стало быть, φ **равномерно** стремится к F; в пределе получим:

$$F(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, F)\,dx.$$

Эта формула показывает, что F есть непрерывная функция, которая имеет начальное значение y_0; дифференцируя, убеждаемся, что F есть интеграл данного уравнения. *)

V. *Если функция y удовлетворяет дифференциальному уравнению с ошибкою $< \varepsilon$, разность $F-y$ между ней и интегралом этого дифференциального уравнения, принимающего то же начальное значение y_0, при достаточном уменьшении ε сколь угодно мала, причем отношение $\frac{|F-y|}{\varepsilon}$ остается ограниченным, когда ε стремится к* 0.

Это предложение, из которого очевидно вытекает единственность интеграла, есть частный случай II, так как интеграл можно рассматривать как функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению с ошибкою, равною нулю.

VI. *Интеграл уравнения* (1) *есть непрерывная функция $F(x, y_0)$ от своего начального значения y_0 при $x = x_0$. Сверх того, отношение соответственных приращений, $\frac{\Delta F}{\Delta y}$, остается ограниченным, когда Δy_0 стремится к* 0.

Пусть y и Y суть интегралы $F(x, y_0)$ и $F(x, y_0+\Delta y_0)$. Тогда $Y-\Delta y_0$ есть непрерывная функция от x, имеющая начальное значение y_0 и удовлетворяющая дифференциальному уравнению с ошибкою

$$f(x, Y) - f(x, Y-\Delta y_0)$$

по абсолютной величине меньшей $M|\Delta y_0|$, в силу условия Lipschitz'a. Эта ошибка есть бесконечно малая по меньшей мере того же порядка, что и Δy_0. Стало быть, в силу предложения V, $Y-\Delta y_0$, а потому и Y будут бесконечно близки к y; наконец, в силу того же предложения, разность $Y-y=\Delta F$ есть бесконечно малая, отношение которой к Δy_0 остается ограниченным.

Замечание. Предложения IV, V и VI установлены пока только для промежутка $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, но они остаются верными вообще до тех пор, пока рассматриваемые интегральные кривые не приближаются к границе области D. Для доказательства этого нужно дополнить предложение II следующим образом **):

IIa. *Пусть даны две непрерывные функции y и Y, имеющие производные, за исключением конечного числа точек, при $x=x_0$ принимающие одно и то же начальное значение y_0 и удовлетворяющее там, где производная существует, данному дифференциальному уравнению, с ошибкой, меньшей ε по абсолютной величине. Для любого промежутка значений x, заключающего точку x_0, для*

---

*) Построение функции $\varphi(x)$, о которой была речь в предложении III, может быть выполнено для *всего* промежутка $(x_0-\delta, x_0+\delta)$; действительно, единственным препятствием для этого могло бы быть достижение кривой φ *границ* прямоугольника R раньше, чем x достигнет *концов* упомянутого промежутка, а это невозможно в силу I. Таким образом, и существование интеграла $F(x)$ доказано *по крайней мере* для промежутка $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. *Прим. ред.*

**) Нижеследующее представляет собой развитие кратких замечаний автора. *Прим. ред.*

которого точка (x, y) [или (x, Y)] лежит внутри области D, разность $Y-y$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточном уменьшении ε, причем отношение $\frac{|Y-y|}{\varepsilon}$ остается ограниченным при стремлении ε к 0.

Для определенности допустим, что рассматривается промежуток, для которого точка (x, y) лежит внутри D. Пусть X любое значение из этого промежутка. Разобьем промежуток (x_0, X) *) на элементарные промежутки (x_0, x_1), $(x_1, x_2)\ldots$ $(x_{n+1}, x_n = X)$ так, чтобы длина каждого из них была не больше δ. Положим $u = Y-y$ и обозначим $\max |u|$ в промежутке (x_{k-1}, x_k) через μ_k, а $\max |u|$ во всем промежутке (x_0, X) через μ. Покажем, что при достаточно малом ε существует такая постоянная N (не зависящая от ε), что $|Y-y| = |u| < 2N\varepsilon\delta$ во всем промежутке (x_0, X). В самом деле, в силу предложения II, это доказано для промежутка (x_0, x_1), и мы имеем в этом промежутке

$$|u| \leqslant \mu_1 \leqslant \frac{2\varepsilon\delta}{l},$$

где $l = 1 - M\delta$.

Допустим, что для всех промежутков $(x_0, x_1)\ldots(x_{k-1}, x_k)$ уже показано

$$\mu_i < 2\varepsilon\delta N_i \qquad (i = 1, 2, \ldots k), \tag{4}$$

где N_i — постоянная, и покажем, что то же имеет место и для промежутка (x_k, x_{k+1}). В самом деле, в этом промежутке имеем:

$$u = u_k + \int_{x_k}^{x} [f(x, Y) - f(x, y) + \omega' - \omega]\, dx.$$

В силу сделанного предположения и неравенства (4) при достаточно малом ε, обе кривые y и Y остаются целиком внутри D, когда x изменяется в промежутке (x_0, x_k). То же будет иметь место и в соседстве с точкой x_k, при значениях $x > x_k$. Ограничиваясь пока только этими значениями x и полагая $\mu' = \max |u|$ для этих значений, имеем в силу условия Lipschitz'а:

$$\mu' \leqslant \mu_k + M\int_{x_k}^{x} |u|\, dx + 2\varepsilon\delta \leqslant \mu_k + M\mu'\delta + 2\varepsilon\delta,$$

откуда

$$\mu' \leqslant \frac{\mu_k + 2\varepsilon\delta}{l}$$

или, в силу (4),

$$\mu' \leqslant \frac{2\varepsilon\delta\,(N_k + 1)}{l}.$$

---

*) Мы предполагаем здесь, что $X > x_0$, но те же рассуждения применимы и в случае, когда $X < x_0$. *Прим. ред.*

Это показывает, что, при достаточно малом ε, μ' будет сколь угодно мало, независимо от значения x в промежутке (x_k, x_{k+1}), и потому обе кривые y и Y будут лежать целиком внутри D, когда x изменяется во всем промежутке (x_k, x_{k+1}), а не только в соседстве с точкой x_k.

Отсюда же заключаем, что

$$\mu_{k+1} \leqslant \frac{2\varepsilon\delta\,(N_k+1)}{l}$$

или, полагая

$$\frac{N_k+1}{l} = N_{k+1}$$

$$\mu_{k+1} \leqslant 2\varepsilon\delta\, N_{k+1}.$$

Полагая последовательно $k=1, 2, \ldots n$, без труда можно найти выражение для постоянных N_k в зависимости от k, но это нас сейчас не интересует, и мы можем воспользоваться только тем обстоятельством, что, обозначив через N наибольшую из всех постоянных N_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, получаем

$$\mu < 2\varepsilon\delta N,$$

что и требовалось доказать.

Все утверждения предложения IIa являются непосредственными следствиями этого основного неравенства, так что IIa может также считаться доказанным.

Доказательства предложений IV, V, VI в их более общей формулировке, упомянутой выше, также непосредственно вытекают из предложения IIa, подобно тому как эти предложения вытекали из II.

Аналогичное замечание нужно будет сделать и для дополнения доказательств следующего n°. Мы к этому более возвращаться не будем.

191. Свойства интеграла, рассматриваемого как функция различных параметров. Пусть вообще

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \alpha, \beta, \ldots)$$

есть дифференциальное уравнение, зависящее от одного или нескольких параметров α, β, ... Начальное значение y_0 будем также рассматривать как непрерывную функцию параметров α, β, ...; разумеется, некоторые из этих параметров могут *фактически* входить только в функцию f или только в y_0. Интеграл сам также будет функцией $F(x, \alpha, \beta, \ldots)$ от x и параметров. Мы изучим его свойства как функции от параметров.

Теорема I. *Пока точка $x, y, \alpha, \beta, \ldots$ не выходит из области, в которой функция $f(x, y, \alpha, \beta, \ldots)$ остается непрерывной относительно $x, y, \alpha, \beta, \ldots$, а удовлетворяет условию Lipschitz'а относительно y, интеграл $F(x, \alpha, \beta, \ldots)$ есть непрерывная функция от $x, \alpha, \beta, \ldots$*

Зададим систему значений параметров, что определит начальное значение y_0, и будем изменять x в промежутке $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ рассмотренном в предыдущем n°.

Пусть y и Y суть интегралы

$$F(x, \alpha, \beta, \ldots) \text{ и } F(x, \alpha + \Delta\alpha), \beta + \Delta\beta, \ldots),$$

где $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, ... — бесконечно малые приращения. Пусть Δy_0 — соответствующее приращение y_0. Тогда $Y - \Delta y_0$ есть непрерывная функция от x, имеющая начальное значение y_0 и удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$y' = f(x, y, \alpha, \beta, \ldots)$$

с ошибкою

$$f(x, Y, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta, \ldots) - f(x, Y - \Delta y_0, \alpha, \beta, \ldots),$$

которая бесконечно мала, в силу нашего предположения. Стало быть, в силу предложения V предыдущего n°, $Y - \Delta y_0$, а потому Y бесконечно близки к y.

Теорема II. *Если, сверх того,* y_0 *и* $f(x, y, \alpha, \beta, \ldots)$ *допускают ограниченные первые производные по одному из параметров, например* α, *то при изменении одного только* α *отношение соответствующих приращений* $\dfrac{\Delta F}{\Delta\alpha}$ *остается ограниченным, когда* $\Delta\alpha$ *стремится к* 0.

В самом деле, при этом предположении, отношение приведенной выше ошибки к $\Delta\alpha$ остается ограниченным, и достаточно будет применить предложение V предыдущего n°.

Теорема III. *Если, сверх того, эти первые производные от* f *и* y_0 *по* α, *непрерывны, интеграл* $F(x, \alpha, \beta, \ldots)$ *имеет первую производную по* α, *непрерывную относительно* $x, \alpha, \beta, \ldots$

В самом деле, пусть F и $F + \Delta F$ — интегралы, соответствующие значениям α и $\alpha + \Delta\alpha$, причем другие параметры не меняются. Вычитая почленно уравнения, которым удовлетворяют F и $F + \Delta F$, и применяя формулу Taylor'а, находим:

$$(\Delta F)' = f(x, F + \Delta F, \alpha + \Delta\alpha, \ldots) - f(x, F, \alpha, \ldots) =$$
$$= \Delta F\, f_y'(x, F + \theta\Delta F, \alpha + \theta\Delta\alpha, \ldots) + \Delta\alpha f_\alpha'(x, F + \theta\Delta F, \alpha + \theta\Delta\alpha)$$
$$(0 < \theta < 1),$$

откуда

$$\left(\frac{\Delta F}{\Delta\alpha}\right)' = \frac{\Delta F}{\Delta\alpha} f_y'(x, F + \theta\Delta F, \alpha + \theta\Delta\alpha, \ldots) +$$
$$+ f_\alpha'(x, F + \theta\Delta F, \alpha + \theta\Delta\alpha, \ldots).$$

Но если $\Delta\alpha$ бесконечно мало, ΔF также бесконечно мало, и отношение $\dfrac{\Delta F}{\Delta\alpha}$ остается ограниченным, в силу предыдущей теоремы. Стало быть, $\dfrac{\Delta F}{\Delta\alpha}$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению между u и x:

$$u' = u\, f_y'(x, F, \alpha, \beta, \ldots) + f_\alpha'(x, F, \alpha, \beta, \ldots)$$

с бесконечно малой ошибкой, и потому стремится к интегралу этого уравнения, который имеет начальное значение $\frac{\partial y_0}{\partial \alpha}$ (предел начального значения отношения $\frac{\Delta F}{\Delta \alpha}$), в силу предложений V и VI предыдущего n°. Так как, наконец, интеграл этот есть, по теореме I, непрерывная функция от x, α, β, ..., высказанное предложение может считаться доказанным.

Теорема IV. *Если при выполнении условий теоремы I производные от f и y_0 до n-го порядка включительно по y и некоторым параметрам α, β, ... существуют и непрерывны, интеграл $F(x, \alpha, \beta, \ldots)$ также имеет по этим параметрам непрерывные производные до n-го порядка включительно.*

Допустим для определенности, что дифференцирование совершается по α; при $n=1$ теорема приводится к предыдущей. Для того чтобы доказать ее вообще, допустим, что она верна для порядка $n-1$ и покажем, что она верна и для порядка n.

При этом предположении мы считаем уже доказанным, что, при выполнении условий теоремы IV, $F(x, \alpha, \beta \ldots)$ имеет производные по рассматриваемым параметрам α, β... до порядка $(n-1)$ включительно. Но тогда условия, аналогичные условиям теоремы IV, имеют место до порядка $n-1$ включительно, для уравнения между x и u

$$u' = u f'_y(x, \alpha, \beta, \ldots) + f'_\alpha(x, \alpha, \beta, \ldots),$$

интеграл которого F'_α, имеет начальное значение $\frac{\partial y_0}{\partial \alpha}$, имеющее по предположению производные по α, β, ... до порядка $n-1$ включительно. Стало быть, так как по предположению теорема верна для порядка $n-1$, этот интеграл F'_α допускает по этим параметрам α, β, ... — непрерывные частные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, что и требовалось доказать.

В частности можно предположить, что α, β, ... не входят в y_0 и принять само y_0 за параметр. Так как этот параметр в f не входит, получаем следующую теорему.

Теорема V. *Если при выполнении условий теоремы I существуют непрерывные частные производные по y от функции $f(x, y, \alpha, \ldots)$ до порядка n включительно, то существуют также и непрерывные частные производные по y_0 до порядка n включительно от интеграла $F(x, y_0, \alpha, \ldots)$.*

192. Существование интеграла системы дифференциальных уравнений в нормальной форме. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n неизвестных функций от независимой переменной t; пусть

$$f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ или короче } f_i(t, x)$$

— n данных функций от этих переменных $(i=1, 2, \ldots n)$. Система уравнений

$$x'_i = f_i(t, x) \qquad (i=1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

разрешенных относительно неизвестных функций, называется *системой совокупных дифференциальных уравнений 1-го порядка в нормальной форме.*

Условия Lipschitz'а. Допустим, что переменные t и x изменяются в некоторой области D. Мы будем говорить, что функция $f_i(t, x)$ удовлетворяет условию Lipschiz'а относительно переменных x, если можно указать такую положительную постоянную M_i, что, если заданы две какие угодно точки $t, x_1, x_2, \ldots x_n$; $t, X_1, X_2, \ldots X_n$ в области D, имеем:

$$|f_i(t, X) - f_i(t, x)| < M_i \sum_{k=1}^{n} |X_k - x_k|.$$

Это условие в частности будет выполнено во всякой области, в которой функция f_i имеет ограниченные частные производные по x, при дополнительном условии, что эта область конвексна, т. е. такова, что если она содержит две точки, то содержит целиком и весь отрезок прямой пространства n измерений, их соединяющий.

Основная теорема. *Пусть t_0, x_{i0} (или проще t_0, x_0) есть точка, взятая внутри D; если функции f_i непрерывны и однозначны в этой области D и если, кроме того, они удовлетворяют условиям* Lipschitz'а *относительно переменных x, система уравнений* (5) *допускает в этой области одну и только одну систему интегралов $x_i = F_i(t, x_{i0})$, имеющих начальные значения x_{i0} при $t = t_0$; эти интегралы будут непрерывными функциями от начальных значений x_{i0} при закрепленном t_0.*

Эта теорема является следствием ряда предложений, обобщающих предложения n° 190, мы удовольствуемся только формулировкой, когда обобщение непосредственно очевидно.

Пусть L есть maximum величины $|f_i|$ в области D; M — наибольшая из постоянных M_i, входящих в условия Lipschitz'а. Пусть далее a и b суть два положительные числа такие, что область R, ограниченная значениями $t_0 \pm a$ переменной t и $x_{i0} \pm b$ переменных x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, заключена внутри D. Выберем положительное число δ, меньшее всех трех величин a, $\frac{b}{L}$ и $\frac{1}{nM}$. Будем изменять t между $t_0 - \delta$ и $t_0 + \delta$. Мы можем высказать следующие предложения.

I. *Если система функций x_i от t, имеющих начальные значения x_{i0}, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений с ошибкой $< \varepsilon$ (за исключением разве конечного числа точек для каждого уравнения), при достаточно малом ε, точка (t, x) не выходит из области R.*

II. *Если две системы функций x_i и X_i, имеющих одинаковые начальные значения x_{i0}, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с ошибкой $< \varepsilon$ (за исключением разве конечного числа точек), разности $X_i - x_i$ при достаточном уменьшении ε сами сколь угодно малы, причем отношения $\frac{|X_i - x_i|}{\varepsilon}$ остаются меньше постоянного числа $\frac{2\delta}{1 - n\delta M}$, когда ε стремится к 0.*

Пусть ω_i и ω_i' ошибки в i-ом уравнении, соответствующие системам функций x_i и X_i; имеем:

$$X_i - x_i = \int_{t_0}^{t} [f_i(t, X) - f_i(t, x) + \omega_i' - \omega_i]\, dt.$$

Пусть μ есть maximum всех разностей $|X - x|$ в промежутке $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$; в силу условий Lipschitz'а имеем:

$$|f_i(t, X) - f_i(t, x)| < M \sum_i |X_i - x_i| < Mn\mu.$$

Стало быть, так как $|t - t_0|$ остается $< \delta$ и $nM\delta < 1$, из предыдущего уравнения выводим

$$\mu < \int_{t_0}^{t+\delta} (Mn\mu + 2\varepsilon)\, dt = Mn\mu\delta + 2\varepsilon\delta,$$

откуда

$$\frac{\mu}{\varepsilon} < \frac{2\delta}{1 - nM\delta}$$

III. *Сколь мало бы ни было положительное число ε, можно определить систему функций $x_i = \varphi_i(t)$, имеющих производные, за исключением конечного числа точек, принимающих начальные значения x_{i0} и в тех точках, где производные существуют, удовлетворяющие данной системе дифференциальных уравнений, с ошибкой для каждого уравнения $< \varepsilon$.*

В самом деле, разобьем область R на „прямоугольные" элементы α, настолько малые, чтобы колебания функций f_i в каждом из этих элементов были меньше ε. Тогда, исходя из точки (t_0, x_{i0}) с направлением, коэффициенты которого суть $f_i(t_0, x_0)$, проведем в области R ломаную линию, направление которой изменяется лишь при пересечении с границами элементов α, причем коэффициенты направления, после каждого пересечения, принимают значения функций $f(t, x)$ в точке пересечения. Вдоль этой ломаной линии координаты $x_i = \varphi_i(t)$ и будут функциями, удовлетворяющими предложению III.

IV. *Если ε стремится к 0, функции $\varphi_i(t)$ равномерно стремятся к системе интегралов $F_i(t)$, имеющих начальные значения x_{i0}.*

V. *Всякая система функций x_i от t, имеющих начальные значения x_{i0}, и удовлетворяющих данной системе дифференциальных уравнений с ошибкою $< \varepsilon$ для каждого уравнения, при достаточно малом ε сколь угодно мало отличается от системы интегралов F_i. Наконец, отношения $\frac{(F_i - x_i)}{\varepsilon}$ остаются ограниченными, когда ε стремится к 0.*

VI. *Интегралы $F_i(t, x_0)$ суть непрерывные функции от начальных значений x_{i0} и если изменяется одно только из них, x_{i0}, отношение соответствующих приращений $\frac{\Delta F}{\Delta x_{i0}}$ остается ограниченным, когда Δx_{i0} стремится к 0.*

193. Свойства интегралов, рассматриваемых как функции от некоторых параметров. Иследования пп° 190—191 были изложены в форме, которая сама собою обобщается. Таким образом, вместо предложений IV и V п° 191 получаем следующие две теоремы:

I. *Если начальные значения x_{i0} и функции $f_i(t, x)$ зависят еще от параметров α, β, . . . и их частные производные по некоторым из этих параметров и по переменным x до порядка n включительно существуют и непрерывны, интегралы $F_i(t, \alpha, \beta, \ldots)$ также имеют непрерывные производные до того же порядка и по этим параметрам.*

В частности, приняв начальные значения за параметры, из этой теоремы выводим:

II. *Если частные производные функций $f_i(t, x)$ по переменным x до порядка n включительно существуют и непрерывны, то и частные производные интегралов $F_i(t, x_{i0})$ по начальным значениям x_{i0} до того же порядка n также существуют и непрерывны.*

194. Разделение интегралов на общие, частные, особые. 1°. *Пусть сперва дано одно уравнение первого порядка.*

$$y' = f(x, y),$$

где f — однозначная функция.

Мы видели, что можно задать произвольно значение y_0 функции y при $x = x_0$. Стало быть, решение должно зависеть от одной произвольной постоянной (которая в частности может совпадать с y_0). Функция y от x (или уравнение, определяющее y), удовлетворяющая дифференциальному уравнению и зависящая от произвольной постоянной C, называется *общим интегралом* уравнения. Но для этого необходимо, чтобы постоянная C давала возможность приписать y произвольное значение y_0 при $x = x_0$. Всякий интеграл, который получается из общего интеграла при частном выборе произвольной постоянной, называется *частным интегралом.*

Во всякой области, в которой выполняются условия непрерывности теоремы существования (п° 190), в частности, в области, где f и f_y' непрерывны, *общий интеграл дает полное решение задачи*, так как через каждую точку (x_0, y_0) может пройти лишь одна интегральная кривая, и она по необходимости совпадает с частным интегралом, проходящим через эту точку.

Но в области, где условия непрерывности не выполняются, уравнение может, в виде исключения, иметь интегралы, не получающиеся из общего интеграла, которые называются *особыми интегралами.*

2°. Пусть дана система *n совокупных дифференциальных уравнений* между независимой переменной t и n функциями $x_1, x_2, \ldots x_n$;

$$x_i' = f_i\ (t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Так как можно по произволу задать начальные значения функций x при $t = t_0$, решение должно зависеть от n произвольных постоянных. *Общим интегралом* называется решение (т. е. система n функций x или соотношений, из которых их можно определить), которое зависит от n *различных* постоянных, понимая под этим, что постоянные позволяют функциям x принимать произвольные начальные значения при $t=t_0$.

Интегралы, которые получаются из общего интеграла при частном выборе произвольных постоянных, называются *частными интегралами*.

Общий интеграл дает полное решение задачи интегрирования во всякой области, в которой выполнены условия основной теоремы. Но в области, где эти условия не выполнены, могут, в виде исключения, существовать и *особые интегралы*, не содержащиеся в общем интеграле.

3^0. Пусть наконец, дано *одно уравнение n-го порядка*,

$$y^n = f(x, y, y', \ldots y^{n-1}),$$

разрешенное относительно производной высшего порядка. Оно приводится к системе уравнений 1-го порядка, если обозначить $n-1$ первых производных y через $p_1, \ldots, p_{n-1}$ и рассматривать их как неизвестные функции. Эта система будет:

$$\begin{cases} y' = p_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ p'_i = p_{i+1} & (i = 1, 2, \ldots, n-2). \\ \ldots\ldots\ldots \\ p'_{n-1} = f(x, y, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}) \end{cases}$$

Можно, стало быть, задать по произволу значения функции y ее $n-1$ первых производных при $x=x_0$. *Общий интеграл* есть решение, зависящее от *n различных* произвольных постоянных, т. е. таких, которые позволяют $y, y', \ldots, y^{n-1}$ принимать произвольные начальные значения при $x=x_0$. Число постоянных равно таким образом порядку уравнения. Придавая им частные значения, получаем *частные интегралы*.

Общий интеграл дает полное решение задачи интегрирования во всякой области, в которой выполнены условия основной теоремы (в частности, во всякой области, в которой функция f и ее производные по $y, y', \ldots, y^{n-1}$ непрерывны). Если эти условия не выполнены, могут существовать *особые интегралы*, не заключающиеся в общем.

Изучение особых интегралов можно произвести удовлетворительным образом лишь с точки зрения аналитических функций. Мы ими пока заниматься не будем.

§ 3. Уравнения 1-го порядка и 1-й степени. Интегрирующий множитель.

195. Уравнения, интегрируемые в квадратурах. Обыкновенно говорят, что *умеют интегрировать* уравнение, когда интегрирование его приведено в квадратурам. С этой точки зрения существует лишь небольшое число уравнений, которые умеют интегрировать. Мы изучим главные из них и начнем с тех, которые содержат производную неизвестной функции в первой степени. Мы предположим, что эта функция есть y; но ясно, что можно также рассматривать x как функцию от y, что часто приходится делать на практике для того, чтобы привести уравнение к одному из типов, которые мы изучим.

196. Уравнения, которые представляются в виде полных дифференциалов (или интегрируемые непосредственно). Если уравнение первой степени относительно $\frac{dy}{dx}$, его можно написать в виде

$$P\,dx + Q\,dy = 0, \tag{1}$$

где P и Q — данные функции от x и y. Говорят, что уравнение *интегрируется непосредственно*, если его левая часть есть полный дифференциал. Необходимое и достаточное условие этого заключается в равенстве

$$P'_y = Q'_x$$

(n^0 54). Если оно выполнено, левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $F(x, y)$. Уравнение приводится тогда к виду: $dF = 0$, и его интеграл будет $F = \text{const}$, или, раскрывая (n^0 54)

$$\int_a^x P(x, y)\,dx + \int Q(a, y)\,dy = C.$$

Это есть общий интеграл и особого решения не существует.

Примеры. Вот три уравнения с их общими интегралами:

$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0;$	$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C;$
$\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0;$	$\dfrac{y}{x} = \operatorname{ctg}\left(C - \sqrt{1 + x^2 + y^2}\right);$
$\dfrac{dx}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\dfrac{dy}{y} = 0;$	$y^2 = C^2 - 2Cx.$

197. Отделение переменных. Уравнение (1) интегрируется непосредственно, если *отделены переменные*, т. е. если P есть функция X только от x, Q есть функция Y только от y, ибо в этом случае $X_y' = Y_x' = 0$. Уравнение принимает тогда вид

$$X\,dx + Y\,dy = 0 \tag{2}$$

и имеет общий интеграл

$$\int X\,dx + \int Y\,dy = C.$$

Рассмотрим теперь уравнения вида

$$XY\,dx + X_1Y_1\,dy = 0, \tag{3}$$

где X, X_1 суть функции от x, Y, Y_1 — функции от y.

Говорят, что они интегрируются *отделением переменных*. Действительно, достаточно умножить уравнение на $\frac{1}{X_1 Y}$ чтобы привести его к виду

$$\frac{X}{X_1} dx + \frac{Y_1}{Y} dy = 0,$$

где переменные отделены.

Интегрируя это уравнение, получим общий интеграл уравнения (3). Однако остается еще исследовать, не потеряли ли мы решение, обращающее в 0 множитель X_1 или Y.

Решение уравнений $X_1 = 0$ или $Y = 0$ суть постоянные значения $x = \alpha$ и $y = \beta$. Они будут также решениями уравнения (3), так как обращают левую часть его в 0 и могут быть допущены и с геометрической точки зрения, так как соответствуют прямым, параллельным координатным осям.

Примеры. Вот три уравнения с их интегралами:

$(1 + x^2) y^3 dx + (1 - y^2) x^3 dy = 0;$	$x^{-2} + y^{-2} = 2 \operatorname{Log}(Cx : y)$
$(a^2 - y^2) dx = 2x\sqrt{ax - a^2}\, dy;$	$y - \sqrt{ax - a^2} = C(a^2 + y\sqrt{ax - a^2})$
$\sec^2 x \operatorname{tg} y\, dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x\, dy = 0;$	$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = C.$

198. Уравнения однородные. Если функции P и Q от x и y однородны и одинаковой степени, уравнение

$$P dx + Q dy = 0$$

называется *однородным*. В этом случае частное $\frac{P}{Q}$ зависит только от отношения $\frac{y}{x}$, а потому уравнение, если разрешить его относительно y', приводится к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (4)$$

Переменные можно отделить, если ввести новую неизвестную, положив

$$y = ux, \text{ откуда } y' = u + xu'.$$

Уравнение между u и x будет тогда

$$xu' = \varphi(u) - u; \qquad (5)$$

откуда, разделив на $x[\varphi(u) - u]$ и умножив на dx:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}; \quad \operatorname{Log} x = \int \frac{du}{\varphi(u) - u} + C.$$

Общий интеграл уравнения (4) получим, заменив здесь u на $\frac{y}{x}$.

Мы находим также решения, обращающие в 0 отброшенный множитель $\varphi(u)-u$, что дает для u, вообще говоря, некоторое число постоянных значений: $u=u_1$, $u=u_2$, ... Эти значения u также удовлетворяют уравнению (5), так как обращают его в тождество. Следовательно, функции

$$y=u_1x; \quad y=u_2x, \ \ldots$$

являются решениями уравнения (4). Это будут *особые решения*, если они не заключаются уже в общем интеграле.

Однородные уравнения можно также интегрировать, приводя их к полным дифференциалам. Это мы сделаем в следующем n°

Примеры. Вот три однородных уравнения с их интегралами:

$$x\,dy-y\,dx=dx\sqrt{x^2+y^2}; \qquad x^2=C^2+2Cy;$$

$$(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0; \qquad \operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{Log}(C\sqrt{x^2+y^2});$$

$$xy\,dy-y^2\,dx=dx\,(x+y)^2e^{-\frac{y}{x}}; \qquad (x+y)\operatorname{Log}Cx=xe^{\frac{y}{x}}.$$

199. Замечания об уравнениях, представляющихся одновременно в виде однородных и полного дифференциала. 1°. Когда уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$ обладает сразу этими обоими свойствами, оно интегрируется непосредственно *без квадратуры*, если только показатель однородности n не есть -1.

В самом деле, положим

$$F(x, y)=Px+Qy.$$

В силу тождества $P'_y=Q'_x$ и свойства однородных функций (т. I, n° 163) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial x}=P+\left(x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}\right)=(n+1)P,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q+x\frac{\partial P}{\partial y}+y\frac{\partial Q}{\partial y}=Q+\left(x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}\right)=(n+1)Q.$$

Откуда следует

$$d(Px+Qy)=(n+1)(P\,dx+Q\,dy) \tag{6}$$

и, стало быть, если $n+1\neq0$, общий интеграл уравнения $P\,dx+$ $+Q\,dy=0$ будет

$$Px+Qy=C.$$

Примеры. Вот три таких уравнения с их интегралами:

$$(x^2-4xy-2y^2)\,dx+(y^2-4xy-2x^2)\,dy=0,$$
$$x^3-6x^2y-6y^2x+y^3=C;$$

$$(x^3+3xy^2)\,dx+(y^3+3x^2y)\,dy=0, \quad y^4+6x^2y^2+y^4=C;$$

$$(1+e^{\frac{x}{y}})\,dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0: \quad x+ye^{\frac{x}{y}}=C.$$

2^0. Допустим опять, что $P\,dx + Q\,dy$ есть полный дифференциал. Если P и Q — однородные функции степени (-1), имеем $n+1=0$. Так как тогда, в силу (6), функция $Px+Qy$ имеет полный дифференциал, равный 0, имеем тождественно:

$$Px + Qy = k,$$

где k — определенная постоянная. Поэтому интеграл наперед здесь уже неизвестен, и приходится прибегнуть к общему методу интегрирования.

3^0. Обратно, если P и Q — однородные функции степени (-1) и $Px+Qy$ приводится тождественно к постоянной k, $P\,dx+Q\,dy$ будет полным дифференциалом. В самом деле, это тождество позволяет выразить P через Q, причем окажется:

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{k-Qy}{x}\,dx + Q\,dy = k\,\frac{dx}{x} + (Qx)\,d\,\frac{y}{x}.$$

Но Qx, будучи степени 0, есть функция $\varphi(u)$ отношения $u = \frac{y}{x}$. Следовательно, имеем:

$$P\,dx + Q\,dy = k\,\frac{dx}{x} + \varphi(u)\,du,$$

что представляет полный дифференциал.

Если, в частности, $k=0$, уравнение приводится к $\varphi(u)\,du = 0$; оно имеет единственный интеграл $u = \text{const}$ или $y = Cx$.

4^0. Всякое однородное уравнение $P\,dx + Q\,dy = 0$ можно привести к типу полного дифференциала. Для этого достаточно разделить его на $Px+Qy$. В самом деле, однородное уравнение

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{Px + Qy} = 0 \qquad (7)$$

степени (-1), в силу замечания 3^0, интегрируется непосредственно (причем число $k=1$). Но показатель однородности этого уравнения есть (-1), что представляет как раз случай, когда не приложимо замечание 1^0. Не будь этого обстоятельства, все однородные уравнения интегрировались бы без квадратур.

Множитель $\frac{1}{Px+Qy}$, на который нужно умножить уравнение, чтобы сделать его непосредственно интегрируемым, называется *интегрирующим множителем* уравнения. Мы возвратимся к нему в следующем n^0.

Однако случай, когда $Px+Qy$ приводится к 0, представляет исключение, так как это выражение не может быть величиной, обратной интегрирующему множителю. Тогда уравнение можно привести к полному дифференциалу, разделив его на Px или Qy, что приводит его степень к (-1), и мы получаем случай 3^0 при $k=0$. Общий интеграл будет $y = Cx$.

200. Уравнения, приводящиеся к однородным. Это уравнения вида

$$y' = \varphi\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right), \tag{8}$$

где $A, \ldots a, \ldots$ суть постоянные.

1°. Если $Ab - aB \neq 0$, производим замену переменных, полагая

$$\eta = Ax + By + C$$
$$\xi = ax + by + c,$$

откуда

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{A\,dx + B\,dy}{a\,dx + b\,dy} = \frac{A + By'}{a + by'}.$$

При нашем предположении отношение это содержит y', так что уравнение (8) приводится к однородному уравнению между η и ξ:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{A + B\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}{a + b\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}. \tag{9}$$

2°. Если $Ab - aB = 0$, заменяем только неизвестную функцию, полагая,

$$\eta = \frac{Ax + By}{A} = \frac{ax + by}{a},$$

откуда

$$\eta' = 1 + \frac{b}{a}y'.$$

Уравнение (8) приводится уже не к однородному, а к уравнению

$$\eta' = 1 + \frac{b}{a}\varphi\left(\frac{A\eta + C}{a\eta + c}\right), \tag{10}$$

в котором переменные η и x разделяются.

Итак, дело приводится к интегрированию (9) или (10), после чего заменяем η и ξ, или только η их выражениями и получаем общий интеграл уравнения (8).

201. Линейные уравнения. Это уравнения, линейные относительно y и y', т. е. вида

$$y' + Xy = X_1, \tag{11}$$

где X и X_1 означают функции только от x. X_1 называется свободным членом; если он равен 0, говорят, что уравнение *без свободного члена.*

1°. *Линейное уравнение без свободного члена интегрируется одной квадратурой.* В самом деле, оно приводится к

$$y' + Xy = 0, \text{ откуда } \frac{y'}{y} = -X.$$

Переменные здесь разделены и интеграл будет

$$\operatorname{Log} y = -\int X\,dx + \operatorname{Log} C, \text{ или } y = Ce^{-\int X dx}.$$

2⁰. *Для интегрирования линейного уравнения с свободным членом* обозначим через u частный интеграл уравнения без свободного члена, например

$$u = e^{-\int X dx}$$

и заменим неизвестную функцию, положив

$$y = uz, \text{ откуда } y' = uz' + u'z.$$

Так как по предположению $u' + Xu = 0$, уравнение (11) приводится к

$$uz' = X_1, \text{ откуда } z' = \frac{X_1}{u}, \ z = C + \int \frac{X_1}{u}\,dx.$$

Заменим теперь в соотношении $y = uz$ оба множителя полученными для них выражениями. Общий интеграл уравнения (11) дается формулой (содержащей две квадратуры):

$$y = e^{-\int X dx}\left[C + \int X_1 d\,x e^{\int X dx}\right]; \tag{12}$$

особого интеграла здесь не существует.

Замечания. 1⁰. Если известен частный интеграл y_1 уравнения (11), его общий интеграл получается при помощи *одной квадратуры*. В самом деле, вычитая из уравнения (11) то, которое получим, заменив y на y_1, находим:

$$(y - y_1)' = -X(y - y_1).$$

Это есть уравнение без свободного члена относительно $(y - y_1)$; его интеграл будет

$$y - y_1 = Ce^{-\int X dx}. \tag{13}$$

2⁰. Если известны два частные интеграла y_1 и y_2 уравнения (11) то общий интеграл можно получить без квадратур; это будет

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = C. \tag{14}$$

В самом деле, так как y_2 удовлетворяет уравнению (13) при надлежащем выборе C, отношение $(y - y_1)$ к $(y_2 - y_1)$ должно оставаться постоянным.

Примеры. Вот несколько линейных уравнений с их интегралами:

$y' + ay = e^{mx}$;	$y = Ce^{-ax} + \dfrac{e^{mx}}{m + a}$;
$y' - \dfrac{ny}{x + 1} = e^x (x + 1)^n$;	$y = (x + 1)^n (e^x + C)$;
$y' + y \cos x = \sin x \cos x$;	$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$.
$y' + y\dfrac{d\varphi}{dx} = \varphi(x)\dfrac{d\varphi}{dx}$;	$y = Ce^{-\varphi} + \varphi - 1$.

202. Уравнение Bernoulli. Умножая правую часть линейного уравнения на y^n, получаем уравнение Bernoulli

$$y' + Xy = X_1 y^n. \tag{15}$$

Это уравнение, по разделении на y^n, представляется в виде

$$\frac{y'}{y^n} + X\frac{1}{y^{n-1}} = X_1.$$

Примем за неизвестную функцию z, положив

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}; \quad z' = -(n-1)\frac{y'}{y^n}.$$

Уравнение приводится к *линейному*:

$$z' - (n-1)Xz = -(n-1)X_1.$$

Выражение для z или $\frac{1}{y^{n-1}}$ будет поэтому:

$$\frac{1}{y^{n-1}} = e^{(n-1)\int X dx}\left[C - (n-1)\int X_1 dx\, e^{-(n-1)\int X dx}\right]. \tag{16}$$

Эта формула не годится при $n = 1$; но в этом случее уравнение Bernoulli приводится к линейному без свободного члена:

$$y' + (X - X_1)y = 0.$$

Примеры. Вот несколько уравнений Bernoulli с их интегралами:

$$\begin{array}{r|l}
(1-x^2)y' - xy = axy^2; & y^{-1} = C\sqrt{1-x^2} - a \\
y' + 2xy = 2ax^3y^3; & 2y^{-2} = a(1+2x^2) - Ce^{2x^2} \\
y^{n-1}(ay' + y) = x; & y^n = Ce^{-\frac{nx}{a}} + nx - a; \\
y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}; & 3\sqrt{y} = C(1-x^2)^{\frac{1}{4}} - (1-x^2); \\
xy^2(xy' + y) = a^2; & 2(xy)^3 = 3a^2x^2 + C
\end{array}$$

203. Уравнение Riccati. Так называется вообще уравнение вида

$$y' + Xy^2 + X_1 y + X_2 = 0,$$

где буквы X означают функции только от x. Это уравнение можно интегрировать, когда известно одно частное решение y_1

В самом деле, положив

$$y = y_1 + z,$$

приводим уравнение к

$$z' + (y_1' + Xy_1^2 + X_1 y_1 + X_2) + Xz^2 + 2Xy_1 z + X_1 z = 0$$

и так как y_1 есть частный интеграл, оно приводится к

$$z' + z(2Xy_1 + X_1) = -Xz^2.$$

Это есть *уравнение Bernoulli*, которое легко привести к линейному, полагая $z = 1 : u$. Таким образом, можно и сразу привести данное уравнение к *линейному*, полагая

$$y = y_1 + \frac{1}{u}.$$

Если известны три частные интеграла y_1, y_2, y_3 уравнения Riccati, общий интеграл получается без квадратур.

В самом деле, тогда известны два частные интеграла

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}; \quad u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}$$

линейного уравнения относительно u. Стало быть, общий интеграл уравнения относительно u есть (n°201)

$$\frac{u - u_1}{u_1 - u_2} = \text{const}.$$

Интеграл уравнения Riccati получим, исключив буквы u; это будет

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = \text{const}.$$

Формула эта выражает, что *ангармоническое отношение четырех интегралов уравнения Riccati есть величина постоянная.*

Замечание. Можно считать, что в рассматриваемом уравнении $X \neq 0$, так как в противном случае оно было бы линейным. Тогда подстановкой $y = \frac{z}{X}$ оно приводится к виду

$$z' + z^2 + \left(X_1 - \frac{X'}{X}\right) z + X X_2 = 0$$

или короче

$$z' + z^2 + Pz + Q = 0, \tag{17}$$

где P и Q суть функции только от x.

Подстановкой $z = \frac{u'}{u}$ это последнее уравнение приводится к уравнению 2-го порядка

$$u'' + Pu' + Qu = 0. \tag{18}$$

Это новое уравнение, которое мы подробно изучим в следующей главе, есть *линейное уравнение без свободного члена.*

Частный случай интегрируемости уравнения Riccati. Уравнение

$$y' + ay^2 = bx^m \tag{19}$$

есть частный случай уравнения Riccati; *оно интегрируется в конечном виде, если только $\frac{2}{m+2}$ есть нечетное целое число (положитель-*

ное или отрицательное) или, что то же самое, если $\frac{m}{m+2}$ *есть четное число (положительное или отрицательное).*

В самом деле, подстановкой $y=\frac{u'}{au}$ оно приводится к

$$u''-abux^m=0. \tag{20}$$

Это преобразованное уравнение получено Euler'ом. В следующей главе мы покажем, что оно интегрируется в конечном виде при указанных значениях m.

204. Теория интегрирующего множителя. Пусть дано уравнение

$$P\,dx+Q\,dy=0. \tag{21}$$

Интегрирующим множителем (или просто *множителем*) называют множитель μ, вообще говоря, зависящий от x и y, такой, что выражение

$$\mu\,(P\,dx+Q\,dy)$$

есть полный дифференциал.

I. Интегрирующий множитель всегда существует.

В самом деле, уравнение (21) всегда имеет общий интеграл, содержащий произвольную постоянную, который, будучи разрешен относительно этой последней, принимает вид:

$$F(x, y)=C.$$

Зная этот общий интеграл, из него можно вывести интегрирующий множитель μ. В самом деле, продифференцируем полным образом это уравнение, а затем исключим dx и dy из полученного уравнения и уравнения (21); последовательно будем иметь:

$$F'_x dx+F'_y dy=0; \qquad \frac{F'_x}{P}=\frac{F'_y}{Q}.$$

Это уравнение не заключает больше C и должно быть выполнено во всякой точке, лежащей на интегральной кривой, т. е. вообще во всякой точке, так как через каждую точку можно провести интегральную кривую. Следовательно, это тождество, и обе его части суть лишь различные выражения одной и той же функции от x, y, которую мы обозначим через μ. Итак, имеем *тождественно*:

$$F'_x=\mu P; \quad F'_y=\mu Q,$$

откуда

$$\mu\,(P\,dx+Q\,dy)=dF(x, y),$$

т. е. μ есть интегрирующий множитель, причем известно и его выражение: $\frac{F'_x}{P}$.

II. *Если* $F(x, y)=C$ и $F_1(x, y)=C_1$ *суть две различных формы общего интеграла уравнения* (21), *имеем*

$$F_1=\varphi(F).$$

Действительно, пусть μ и μ_1 — два интегрирующих множителя, соответствующих F и F_1. Имеем

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = dF; \quad \mu_1(P\,dx + Q\,dy) = dF_1,$$

откуда

$$dF_1 = \frac{\mu}{\mu_1}\,dF.$$

Это соотношение имеет место, когда x и y — независимые переменные. Оно сохраняется, если эти независимые переменные заменяются другими *). Так как F содержит по крайней мере одну из букв x, y, допустим, что F содержит y. Примем x и F за независимые переменные; тогда это соотношение показывает, что

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial F_1}{\partial F} = \frac{\mu_1}{\mu}.$$

Следовательно, F_1 зависит только от F и

$$F_1 = \varphi(F); \quad \frac{\mu_1}{\mu} = \varphi'(F).$$

III. *Существует бесчисленное множество интегрирующих множителей, и если μ один из них, все они заключаются в общей формуле $\mu\psi(F)$, где функция ψ произвольна.*

Всякий интегрирующий множитель имеет этот вид, так как, если $\mu_1(P\,dx + Q\,dy) = dF_1$, μ_1 удовлетворяет предыдущему уравнению. Обратно, всякий множитель такого вида есть интегрирующий, ибо имеем:

$$\mu\psi(F)(P\,dx + Q\,dy) = \psi(F)\,dF = d\int \psi(F)\,dF,$$

что представляет полный дифференциал.

IV. *Если известен интегрирующий множитель, можно определить с помощью квадратур общий интеграл и найти вместе с тем и особое решение, если оно существует.*

В самом деле, дифференциальное уравнение можно переписать так:

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{1}{\mu}\,dF = 0.$$

Оно распадается на два других: $dF = 0$, что дает общий интеграл, и $\frac{1}{\mu} = 0$, что дает особое решение. Особое решение обладает таким образом замечательным свойством. Оно обращает в бесконечность интегрирующий множитель.

V. *Если известны два интегрирующих множителя, отношение которых не приводится тождественно к постоянной, то полу-*

*) Здесь и в следующем пункте важно помнить замечательное свойство полного дифференциала: форму его можно сохранить даже при переходе от одних независимых переменных к другим (см. конец п° 159). *Прим. ред.*

чим общий интеграл, приравняв это отношение произвольной постоянной.

В самом деле, пусть μ и $\mu\psi(F)$ суть два такие множителя; приравняв их отношение постоянной, имеем $\psi(F)=C$. Но ψ по предположению содержит F; стало быть, соотношение это приводится к $F=C$ и дает общий интеграл.

VI. *В частности, если известен интегрирующий множитель, отличный от постоянной, дифференциального уравнения типа полного дифференциала, то получим общий интеграл, приравняв этот множитель постоянной.*

205. Разыскание интегрирующего множителя. Случай линейного уравнения. Среди уравнений, изученных выше, имеются такие, которые мы интегрировали способом интегрирующего множителя. Это прежде всего уравнения, интегрирующиеся разделением переменных (n⁰ 197), так как разделение это производится как раз умножением на интегрирующий множитель, который не трудно указать. Далее, это—однородные уравнения, которые делаем интегрируемыми непосредственно, деля на $Px+Qy$—величину, обратную интегрирующему множителю.

Кроме этих двух случаев, разыскание интегрирующего множителя представляет мало практичный способ интегрирования, и скорее, наоборот, интегрирование уравнения приводит к нахождению интегрирующего множителя путем, указанным в предыдущем n⁰.

Найдем аналитические условия, которым должен удовлетворять интегрирующий множитель. Для упрощения, перепишем уравнение в виде

$$dy+P\,dx=0. \tag{22}$$

Условие для того, чтобы выражение $\mu(dy+P\,dx)$ было полным дифференциалом, есть

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}. \tag{23}$$

Это есть уравнение в частных производных, интегрирование которого должно считаться задачей, более трудной, чем интегрирование уравнения (22).

В виде приложения найдем, какому условию удовлетворяет множитель μ, если он есть функция только от x. Уравнение (23) приводится при этом предположении к

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{24}$$

Стало быть, необходимо, чтобы функция P_y' зависела только от x, т. е. чтобы P была линейной функцией от y. Итак, среди уравнений вида $dy+P\,dx=0$ только линейные имеют интегрирующий множитель, зависящий только от x. Для них P имеет вид

$$Xy-X_1 \quad \text{и} \quad P_y'=X.$$

Итак, пусть дано линейное уравнение

$$dy+yX\,dx=X_1\,dx; \tag{25}$$

его интегрирующий множитель определяется из уравнения (24), которое приводится к

$$\frac{\mu'}{\mu}=X, \quad \text{откуда } \mu=e^{\int X dx} \tag{26}$$

Умножив уравнение (25) на интегрирующий множитель μ и заметив, что

$$\mu\, dy=d(\mu y)-y\, d\mu,$$

найдем

$$d(\mu y)-y(\mu'-\mu X)\, dx=\mu X_1 dx.$$

Член, содержащий y, пропадает в силу уравнения (26), и потому непосредственно получаем

$$y=\frac{1}{\mu}\int \mu X_1 dx. \tag{27}$$

Это и есть формула интегрирования линейного уравнения (n^0 201). Множитель μ есть величина, обратная решению уравнения без свободного члена.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ.

1. Приняв $y-\frac{X_1}{X}$ за неизвестную функцию, показать, что интеграл линейного уравнения можно написать в виде

$$y=\frac{X_1}{X}-e^{-\int X dx}\left[C+\int e^{\int X dx}\, d\,\frac{X_1}{X}\right].$$

2. Показать, что можно интегрировать уравнение

$$P(x\, dy-y\, dx)=Q\, dy-R\, dx,$$

где P, Q, R — однородные функции от x и y, причем Q и R — одинаковой степени.

Отв. Положив $y=ux$, получаем для определения x в функции от u уравнение Bernoulli.

3. Проинтегрировать уравнение предыдущего примера, предполагая, что P, Q, R — линейные функции от x, y, но уже неоднородные (уравнение Jacobi).

Отв. Если P, Q, R однородны, получаем частный случай предыдущего примера. Если это условие не имеет места, придем к нему заменой переменных:

$$x=\xi+\alpha; \quad y=\eta+\beta,$$

определив постоянные α, β равенствами:

$$\frac{P(\alpha, \beta)}{1}=\frac{Q(\alpha, \beta)}{\alpha}=\frac{R(\alpha, \beta)}{\beta}.$$

Приравнивая каждое отношение одной и той же неизвестной λ, получаем три линейных уравнения относительно α и β, и исключение из них α и β приводит к уравнению третьей степени для определения λ

4. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы выражение $\frac{1}{Px+Qy}$ было интегрирующим множителем уравнения $P\,dx+Q\,dy=0$ заключается в том, чтобы отношение $\frac{P}{Q}$ было однородной функцией степени 0 $\left(\text{т. е. было функцией от отношения } \frac{y}{x}\right)$. *)

5. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы выражение $\frac{1}{Px-Qy}$ было интегрирующим множителем уравнения $P\,dx+Q\,dy=0$, заключается в том, чтобы отношение $\frac{Px^2}{Q}$ было функцией от xy.

6. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы выражение $P\,dx+Q\,dy$ допускало интегрирующий множитель, однородный степени n, заключается в том, чтобы функция

$$\frac{x^2(P'_y-Q'_x)-nQx}{Px+Qy}$$

была однородной и степени 0.

---

*) Умножив наше уравнение на указанное выражение, получим

$$\frac{P\,dx+Q\,dy}{Px+Qy}=0$$

или, вводя отношение $\mu=\frac{P}{Q}$:

$$\frac{\mu\,dx+dy}{\mu x+y}=0.$$

Для того, чтобы леаая часть этого уравнения была полным дифференциалом, необходнмо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mu x+y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu x+y}\right) \quad \text{или} \quad x\frac{\partial\mu}{\partial x}+y\frac{\partial\mu}{\partial y}=0,$$

а это как раз и есть условие того, чтобы μ зависело лишь от отношения $t=\frac{y}{x}$. Действительно, подставляя в μ, вместо y, выражение tx, мы можем рассматривать μ, как функции от x и t. Тогда полная производная от μ по x (x теперь входит и в один, и в другой аргументы прежнего выражения для μ) будет

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial x}+t\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{1}{x}\left(x\frac{\partial\mu}{\partial x}+y\frac{\partial\mu}{\partial y}\right),$$

так что при выполнении указанного условия (и только тогда) μ фактически не содержит x и зависит только от $t=\frac{y}{x}$.

Аналогично исчерпывается и задача 5, только там нужно ввести

$$\mu=\frac{Px^2}{Q} \quad \text{и} \quad t=xy.$$

Прим. ред.

§ 4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно y'.

206. Определение общего интеграла. Пусть дано уравнение

$$f(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Из этого уравнения, вообще говоря, можно найти несколько и даже, быть может, бесчисленное множество выражений для y':

$$y' = f_1(x, y); \quad y' = f_2(x, y), \ldots \tag{2}$$

Каждое из уравнений, которые имеют вид, исследованный в предыдущем отделе, имеет свой общий интеграл, соответственно

$$F_1(x, y, C) = 0; \quad F_2(x, y, C) = 0, \ldots \tag{3}$$

Все они являются также интегралами и уравнения (1), а *общим интегралом* этого уравнения называется такое решение, которое заключает в себе все предыдущие.

Когда имеется лишь конечное число n уравнений (2) и, следовательно, уравнений (3), этот общий интеграл можно получить, перемножив между собой все соотношения (3), что дает:

$$F_1(x, y, C)\, F_2(x, y, C), \ldots, F\,(x, y, C) = 0. \tag{4}$$

Часто случается, что все уравнения (3) можно заключить в одном, содержащем многозначные функции. Это одно соотношение и будет тогда общим интегралом. Если многозна ные функции суть радикалы, их можно, вообще говоря, исключить возвышением в степень, но ясно, что это приводит к образованию уравнения (4). Нужно заметить, что эта операция была уже проделана для многих из уравнений, предложенных в предыдущем отделе. Приведем еще один пример:

$$y'^2 = 1 + y^2, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{\pm\sqrt{1 + y^2}} = dx.$$

Интегрируя, получаем общий интеграл в двух видах:

$$\operatorname{Log}\left(\frac{y \pm \sqrt{1 + y^2}}{C}\right) = \operatorname{Log} e^x, \quad 1 + y^2 = (Ce^x - y)^2.$$

Примеры. Три уравнения:

$$y'^3 - (x^2 + xy + y^2)y'^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)\,y' - x^3y^3 = 0,$$

$$(a^2 - x^2)\,y'^3 + bx(a^2 - x^2)\,y'^2 - y' - bx = 0,$$

$1 - \ldots x^2$ [illegible],

приводятся к следующим, общий интеграл которых выписываем здесь же:

$(y' - x^2)(y' - xy)(y' - y^2) = 0;$ | $\left(y - \frac{x^3}{3} - C\right)\left(y - Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)\left(y - \frac{1}{C - x}\right) = 0$

$[(a^2 - x^2)\,y'^2 - 1]\,(y' + bx) = 0;$ | $\left[(y + C)^2 - \arcsin^2\frac{x}{a}\right]\left[(y - C) + \frac{bx^2}{2}\right] = 0;$

$(xy' - y)^2 = [yy'(x^2 + y^2)]^2;$ | $x = y\,\mathrm{tg}\left(C \pm \frac{y^2}{2}\right).$

207. Уравнения, в которых отсутствует одна из переменных. Они имеют один из следующих двух видов

$$f(x,\ y')=0;\quad f(y,\ y')=0$$

(причем второй приводится к первому, если за неизвестную принять x).

Интегрирование приводится непосредственно к квадратуре, если разрешить уравнения относительно y'. Но часто случается, что легче решить уравнение относительно x (или y), чем относительно y'. В этом случае, разрешая и заменяя y' на p, имеем:

$$\begin{cases} x=\varphi(p) \\ y-C=\displaystyle\int p\,dx=\int p\varphi'(p)\,dp \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=\varphi(p) \\ x-C=\displaystyle\int \frac{dy}{p}=\int \frac{\varphi'(p)dp}{p}. \end{cases}$$

Это дает *параметрическое представление* интеграла: x и y выражены в функции p. Исключив p из этих двух соотношений, представим интеграл в обычной форме.

Примеры. I. $x=p^3+1$;

$$y=\int p\,dx=3\int p^3dp=\frac{3}{4}\,p^4+C.$$

Исключив p, находим:

$$(x-1)^4=\left[\frac{4}{3}\,(y-C)\right]^3.$$

II.
$$x=\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}};$$

$$y-C=\int p\,dx=px-\int x\,dp=px-a\int\frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}}=px-a\sqrt{1+p^2}.$$

Исключив p, находим:

$$x^2+(y-C)^2=a^2.$$

208. Однородные уравнения. Обозначая опять y' через p, предположим, что дано уравнение $f(x,\ y,\ p)=0$, однородное относительно переменных x и y. Разделив на надлежащую степень x и положив $y=ux$, приводим уравнение к виду $F(u,\ p)=0$. Если его можно решить относительно p, оно приводится к виду, рассмотренному в n⁰ 198; этот случай оставим в стороне. Если же уравнение можно решить относительно u, то получим

$$u=\varphi(p).$$

Найдем теперь соотношение между x и p. Дифференцируя соотношение $y=ux$, находим:

$$dy=p\,dx=u\,dx+x\,du,$$

откуда

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=\frac{\varphi'(p)\,dp}{p-\varphi(p)}.$$

В этом дифференциальном уравнении между x и p переменные разделены и x получается в функции от p с помощью квадратуры. Затем получаем y в функции от p из соотношения $y=ux=x\varphi(p)$. Таким образом находим параметрическое представление интеграла.

Примеры. Для нижеследующих трех уравнений указываем либо выражение x в функции от p, либо общий интеграл:

$y-px=nx\sqrt{1+p^2};$	$x=\dfrac{C}{\sqrt{1+p^2}}\left[\,[\sqrt{1+p^2}-p]\,\right]^{\frac{1}{n}};$
$y\sqrt{1+p^2}=n(x+py);$	$(x-C)^2+y^2=(nC)^2;$
$y=yp^2+2px;$	$y^2=2Cx+C^2.$

209. Уравнения, которые интегрируются с помощью дифференцирования. Пусть дано уравнение, разрешенное относительно y:

$$y=f(x,\ y'). \tag{5}$$

Заменяя y' на p, перепишем его в виде

$$y=f(x,\ p). \tag{6}$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение общего интеграла, если заменить в нем p такою функцией от x, чтобы оказалось $y'=p$. Продифференцировав с этой целью уравнение, мы видим, что p должно удовлетворять необходимому и достаточному условию:

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}. \tag{7}$$

Это уравнение 1-го порядка между p и x. Умея его интегрировать, найдем:

$$F(x,\ p,\ C)=0,$$

откуда

$$p=\varphi(x,\ C). \tag{8}$$

Подставив это выражение p в уравнение (6), находим интеграл

$$y=f(x,\ \varphi).$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (5) получается исключением p из (6) и (8), и если мы будем иметь в виду все решения уравнения (7), то, употребляя этот способ, не пропустим ни одного интеграла уравнения (5). Можно было бы также разрешить уравнение (8) относительно x и затем подставить найденное выражение в (6); тогда x и y были бы выражены в функции от p, что дало бы параметрическое представление интеграла.

Уравнения, исследуемые в следующих двух n^0, представляют примеры этого способа.

210. Уравнение, линейное относительно x и y. Оно имеет вид

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \tag{9}$$

где p означает y' *). Дифференцируя его, находим

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}. \tag{10}$$

Этому уравнению можно удовлетворить, обращая одновременно $p - \varphi(p)$ и $\frac{dp}{dx}$ в 0; к этому мы сейчас вернемся, пока же предположим, что ни одна из этих величин не равна 0. Уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Это — линейное уравнение, если рассматривать x как функцию, p — как независимую переменную. Интегрировать его мы умеем причем находим x в функции от p и произвольной постоянной. Исключая p из этого соотношения и уравнения (9), получаем общий интеграл. Если, вместо этого, подставим выражение для x в (9), получим выражения x и y в функции от p, т. е. параметрическое представление интеграла

Пусть теперь $p - \varphi(p) = 0$. Это дает, вообще говоря, некоторое число постоянных значений $p_1, p_2, \ldots$, удовлетворяющих уравнению (10), ибо тогда и $\frac{dp}{dx} = 0$. Подставляя эти значения p в уравнение (9), получаем оттуда некоторое число особых решений, которые, геометрически, представляют прямые.

Примеры. Однородные уравнения, исследованные в n° 208, можно решать также и этим способом. Вот другие примеры уравнений неоднородных, для которых приводим соответственные выражения x в функции от p:

$$y = x(1+p) + p^2; \qquad x = Ce^{-p} - 2(p-1),$$

$$y = 2px + \sqrt{1+p^2}; \qquad p^2x = C - \int\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}};$$

$$y = 2px - p^2; \qquad p^2x = C + \frac{2}{3}p^3.$$

211. Уравнение Clairaut. Способ предыдущего n° не годится, если $\varphi(p)$ приводится тождественно к p. В этом случае получаем *уравнение Clairaut*:

$$y = px + \psi(p). \tag{11}$$

Дифференцируя его, находим:

$$y' = p = p + [x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx};$$

* Уравнения этого типа обычно связывают с именем *Lagrange*'а.

Прим. ред.

и, для того, чтобы было $y' = p$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{dp}{dx}[x + \psi'(p)] = 0$. Этому уравнению можно удовлетворить двумя способами:

1°. Положив $\frac{dp}{dx} = 0$, откуда $p = C$.

Подставляя это значение в (11), находим общий интеграл

$$y = Cx + \psi(C),$$

который, с точки зрения геометрической, представляет семейство прямых.

2°. Положив $x + \psi'(p) = 0$.

Исключая p из этого уравнения и (11), получаем решение, не содержащее произвольной постоянной. Это будет особый интеграл, так как он не может заключаться в общем интеграле (ведь p здесь уже функция от x). Особое решение представляет, стало быть, некоторую кривую.

Общий интеграл выражает семейство всех касательных к кривой, представляемой особым решением.

В самом деле, всякое частное решение получается по формуле $y = px + \psi(p)$, где p — постоянное. Эта прямая проходит через точку кривой с абсциссой $x = -\psi'(p)$. Так как угловой коэффициент y' кривой в этой точке, как мы видели выше, равен p, прямая касается кривой в этой точке.

Обратно, дифференциальное уравнение семейства касательных к некоторой кривой приводится к уравнению Clairaut.

В самом деле, так как уравнение произвольной прямой есть $y = px + q$ для того, чтобы выразить, что она касается кривой $\beta = f(\alpha)$, нужно написать:

$$f(\alpha) = p\alpha + q; \quad p = f'(\alpha).$$

Исключив α из этих двух уравнений, получим соотношение вида $q = \psi(p)$. Общее уравнение касательных будет поэтому

$$y = px + \psi(p)$$

и оно зависит от произвольной постоянной p. Для образования дифференциального уравнения касательных нужно исключить p из этого уравнения и его производной $y' = p$, что и даст уравнение Clairaut.

Примеры. Вот несколько уравнений Clairaut с соответственными особыми их интегралами:

$y = px + p - p^2;$	$4y = (x + 1)^2$
$y = px + \sqrt{a^2 - b^2p^2};$	$by = a\sqrt{x^2 + b^2}$
$y = px + \sqrt{1 + p^2};$	$x^2 + y^2 = 1.$

Примеры для упражнений.

1. Проинтегрировать уравнения:

$$ayy'^2 + (2x - b)y' - y = 0$$
$$(4x^2 - a^2)y'^2 - 4xyy' + y^2 - a^2 = 0$$
$$(y - x)\sqrt{1 + x^2}\,dy = n(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Отв. Первое приводится к уравнению Clairaut подстановкой $y^2 = u$, второе — к линейному относительно x, y, если решить его относительно y. Для интегрирования третьего полагаем $x = \operatorname{tg} u$, $y = \operatorname{tg} v$, что приводит его к уравнению $\sin(v-u)\,dv = n\,du$, в котором переменные разделяются, если положить $v - u = z$.

2. Уравнение Clairaut — единственное, которое интегрируется, полагая $p = C$ (Mansion).

3. *Преобразование Legendre'а.* Оно заключается в том, что за новые переменные принимаются

$$X = y'; \quad Y = xy' - y.$$

Дифференцируя эти соотношения, без труда находим:

$$x = \frac{dY}{dX}; \quad y = X\frac{dY}{dX} - Y; \quad y' = X.$$

Этой подстановкой приводим одно к другому уравнения

$$f(x, y, y') = 0 \quad \text{и} \quad f\left(\frac{dY}{dx}, \quad X\frac{dY}{dx} - Y, \ X\right) = 0;$$

зная интеграл одного, получим и интеграл другого.

Например, уравнение $\Phi(xy' - y) = x\varphi(y')$ приводится к $\Phi(Y) = \frac{dY}{dX}\varphi(X)$, в котором переменные разделяются.

Эта подстановка во всяком случае предполагает, что $y' \neq 0$. Если применим ее к уравнению Clairaut, найдем только особое решение.

§ 5. Геометрические приложения уравнений 1-го порядка.

212. Задача о траекториях. *Пусть $F(x, y, \alpha) = 0$ есть уравнение, содержащее произвольный параметр α и представляющее семейство плоских кривых (F), отнесенных к прямоугольным осям; требуется определить кривые, пересекающие все кривые данного семейства под одним и тем же углом* ω (эти кривые и называются траекториями).

Пусть (x, y) — точка плоскости. Рассмотрим кривую семейства (F) и траекторию, проходящие через эту точку. Пусть φ есть наклонение к оси x касательной и кривой, $\varphi' = \varphi + \omega$ — наклонение касательной к траектории в этой точке. Имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi' - \omega) = \frac{\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\omega}{1 + \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{tg}\omega}. \tag{1}$$

Образуем теперь дифференциальное уравнение кривых семейства (F), что можно сделать, исключая α из уравнения $F = 0$ и его полной производной по x. Получим уравнение вида

$$f(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

В этом уравнении $y' = \operatorname{tg}\varphi$. Если мы пожелаем вывести отсюда дифференциальное уравнение траекторий, нужно образовать уравнение, в котором y' представляет собою $\operatorname{tg}\varphi'$. В силу соотношения (1) для этой цели достаточно заменить в уравнении (2) y' выражением

$$\frac{y' - \operatorname{tg}\omega}{1 + y' \operatorname{tg}\omega}. \tag{3}$$

Отсюда правило: *дифференциальное уравнение траекторий получим, образовав дифференциальное уравнение кривых* (F) *и заменив там* y' *на* $\frac{y' - \operatorname{tg}\omega}{1 + y' \operatorname{tg}\omega}$.

Траектории будут *ортогональными* или *неортогональными*, смотря по тому, будет ли угол ω прямым или нет. В случае ортогональных траекторий $\operatorname{tg}\omega$ обращается в бесконечность и выражение (3) приводится к $-\frac{1}{y'}$. Стало быть, *уравнение ортогональных траекторий получим, заменив в дифференциальном уравнении кривых* (F) y' *на* $-\frac{1}{y'}$.

Если угол $\omega = 0$, искомая кривая касается всех кривых семейства (F). Задачу нахождения такой кривой можно рассматривать как предельный случай задачи о траекториях. Выражение (3) приводится к y' и уравнение траекторий совпадает с дифференциальным уравнением кривых (F). Решением задачи может быть особый интеграл уравнения (2).

213. Примеры неортогональных траекторий. Найдем траектории прямых $y = \alpha x$.

Дифференциальное уравнение этих прямых есть $xy' = y$. В силу предыдущего правила, дифференциальное уравнение траекторий будет

$$x(y' - \operatorname{tg}\omega) = y(1 + y' \operatorname{tg}\omega),$$

откуда:

$$x\,dy - y\,dx = \operatorname{tg}\omega\,(x\,dx + y\,dy).$$

Это однородное уравнение интегрируется непосредственно, если разделить его на $(x^2 + y^2)$. Получаем:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\omega\left[\frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2 + y^2) - \operatorname{Log} C\right].$$

Или, проще, в полярных координатах:

$$r = Ce^{\theta \operatorname{ctg}\omega}.$$

Итак, траектории суть *логарифмические спирали.*

Замечание. Если рассмотрим прямой круговой конус, основание которого лежит в плоскости xy, то предыдущие траектории будут проекциями на эту плоскость кривых на конусе, пересекающими все образующие под одним и тем же углом; эти кривые называются *цилиндро-коническими гелисами*. Мы видим, что проекция цилиндро-конической гелисы на плоскость основания конуса есть логарифмическая спираль.

214. Примеры ортогональных траекторий. Семейство кривых и их ортогональных траекторий образуют то, что называется *ортогональной системой*. Мы приведем несколько простых примеров таких систем:

I. Рассмотрим параболические кривые

$$y = \alpha x^a.$$

Их дифференциальное уравнение есть $xy' = ay$ и потому дифференциальное уравнение их траекторий будет

$$ayy' + x = 0,$$

откуда

$$ay^2 + x^2 = C.$$

Траектории будут кривыми второго порядка, имеющими центр в начале координат. В частности при $a = -1$, получаем *ортогональную систему*

$$xy = \alpha; \quad x^2 - y^2 = C,$$

состоящую из двух семейств равносторонних гипербол. Координатные оси будут асимптотами кривых первого семейства и осями симметрии кривых второго.

II. Рассмотрим семейство софокусных кривых 2-го порядка

$$\frac{x^2}{a+C} + \frac{y^2}{b+C} = 1.$$

Их дифференциальное уравнение есть

$$y'^2 + \frac{x^2 - y^2 - a + b}{xy} y' - 1 = 0.$$

То же уравнение получим, заменив y' на $-\frac{1}{y'}$. Стало быть, семейство софокусных кривых 2-го порядка содержит свои ортогональные траектории и представляет само по себе ортогональную систему. Действительно, через каждую точку плоскости проходят две кривые семейства, один эллипс и одна гипербола, пересекающиеся под прямым углом.

215 Линии уровня и наибольшего уклона поверхности. Пусть $F(x, y, z) = 0$ есть уравнение поверхности, отнесенной к прямоугольным осям.

Мы предположим, что ось z направлена вертикально кверху, и, стало быть, плоскость xy горизонтальна.

Линии уровня поверхности суть кривые пересечения поверхности с горизонтальными плоскостями.

Линии наибольшего уклона суть те, касательная к которым в каждой точке образует наибольший возможный угол с горизонтальной плоскостью. Эта касательная таким образом перпендикулярна к горизонтальной касательной линии уровня, а потому линии наибольшего уклона суть ортогональные траектории линий уровня на поверхности.

Образуем дифференциальные уравнения проекций на плоскость xy линий того и другого семейства.

Линию уровня получаем, пересекая поверхность плоскостью $z=\alpha$. Проекция этой кривой на плоскость xy имеет уравнение

$$F(x, y, \alpha)=0.$$

Для образования дифференциального уравнения этих проекций нужно дифференцировать полным образом это уравнение и исключить α.

Перейдем к линиям наибольшего уклона. Они будут ортогональными траекториями линий уровня на поверхности. Но ортогональность сохранится и для проекций на горизонтальную плоскость, так как линии уровня горизонтальны. Стало быть, проекции на плоскость xy линий наибольшего уклона будут ортогональными траекториями проекций линий уровня; их дифференциальное уравнение получится заменой y' на $-\frac{1}{y'}$ в дифференциальном уравнении проекций линий уровня.

Применим эту теорию к поверхностям второго порядка, имеющим центр:

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1.$$

Заменяя z на α и дифференцируя, получаем дифференциальное уравнение проекций линий уровня;

$$Ax+Byy'=0.$$

Дифференциальное уравнение проекций линий наибольшего уклона будет

$$Axy'-By=0.$$

Переменные здесь разделяются, и мы имеем интеграл

$$y^A=\alpha x^B.$$

Если $A=B$, поверхность будет поверхностью вращения, проекции линий наибольшего уклона — прямые, а сами эти линии — меридианы поверхности.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ.

1. Найти кривую, для которой расстояния от начала координат точек пересечения касательной с осью y и нормали с осью x, находятся в постоянном отношении.

Отв. Дифференциальное уравнение есть $y\,dx-x\,dy=a\,(x\,dx+y\,dy)$. Искомая кривая есть логарифмическая спираль.

2. Найти кривую, для которой ордината точки пересечения касательной с осью ординат есть $kx^m y^n$.

Отв. Получаем уравнение Bernoulli.

3. Найти кривую, для которой проекция на радиус-вектор отрезка нормали между кривой и осью x есть постоянная величина.

Отв. Коническое сечение: $r=a:(1-C\cos\theta)$.

4. Ортогональные траектории парабол $y^2 = 2p\,(x - \alpha)$.

Отв. $\operatorname{Log} y = -\frac{x}{p} + C$.

5. Ортогональные траектории циссоид $y^2\,(2a - x) = x^3$.

Отв. $r^2 = C\,(1 + \cos^2\theta)$.

6. Ортогональные траектории окружностей $x^2 + y^2 = \alpha x$.

Отв. $x^2 + y^2 = Cy$.

7. Ортогональные траектории кривых $r^2 = a^2 \operatorname{Log}\,(\operatorname{tg}\theta : \alpha)$.

Отв $2y^2 - a^2 = C\,(2x^2 + a^2)$.

8. Найти кривую, для которой произведение отрезков, отсекаемых касательной на осях, есть постоянная величина k^2.

Отв. Получаем дифференциальное уравнение Clairaut $y = px \pm k\sqrt{-p}$. Особое решение есть $4xy = k$. Это и будет искомая кривая.

9. Найти кривые, касательная которых находится на постоянном расстоянии a от начала координат.

Отв. Уравнение Clairaut: $y = px + a\sqrt{1 + p^2}$. Особое решение $x^2 + y^2 = a^2$.

10. Найти кривую, отрезок касательной которой, заключенный между осями, есть постоянная величина a.

Отв. Уравнение Clairaut: $y = px + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$. Особое решение:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

11. Найти кривую такую, что площадь S, заключенная между кривой, осью x и двумя любыми ординатами, пропорциональна длине дуги s между теми же ординатами.

Отв. Цепная линия, основание которой есть ось x.

12. Найти эвольвенту (ортогональную траекторию касательных) цепной линии $y = \frac{1}{2m}(e^{mx} + e^{-mx})$, приняв за начало этой эвольвенты низшую точку цепной линии. Искомая кривая называется *трактриссой*; она есть в то же время кривая: 1) для которой длина касательной постоянна; 2) которая есть ортогональная траектория семейства кругов одинакового радиуса, с центрами, лежащими на одной прямой.

13. Найти путь луча света, проходящего через среду, показатель преломления которой изменяется пропорционально глубине.

ГЛАВА VII.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА ВЫШЕ ПЕРВОГО. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ.

§ 1. Уравнения линейные без свободного члена.

216. Обозначения. Основные свойства линейных уравнений без свободного члена. *Однородным линейным уравнением или линейным уравнением без свободного члена* называется уравнение, линейное и однородное относительно функции y и ее последовательных производных.

Мы предположим, что коэффициент при высшей производной отличен от нуля. Так как тогда можно разделить все уравнение на этот коэффициент, то допустим наперед, что он равен 1. Уравнение n-го порядка имеет тогда следующий вид

$$y^{(n)}+X_1y^{(n-1)}+\ldots+X_{n-1}y'+X_ny=0 \tag{1}$$

где буквы X означают функции только от x, которые мы предположим непрерывными.

Уравнение это удовлетворяет условиям непрерывности, при которых общий интеграл существует и определяется единственным образом (п⁰ 194), откуда вытекает следующее предложение:

I. *Во всяком промежутке, в котором коэффициенты непрерывны, линейное уравнение без свободного члена имеет общий интеграл и не может иметь особое решение.*

Левую часть уравнения (1) можно представить, как символический полином n-ой степени от y. Положим для сокращения

$$f(y)=y^n+X_1y^{n-1}+\ldots X_ny, \tag{2}$$

понимая под показателями показатели не степени, а порядка производных, и перепишем уравнение (1) в виде

$$f(y)=0. \tag{3}$$

Обозначая через $u_1, u_2,\ldots$ функции от x, через $C_1, C_2,\ldots$ — постоянные и применяя правила дифференцирования, замечаем непосредственно, что символический полином $f(y)$ обладает следующим свойством:

$$f(C_1u_1+C_2u_2+\ldots)=C_1f(u_1)+C_2f(u_2)+\ldots \tag{4}$$

Отсюда выводим следующую теорему, которая, как увидим ниже (n° 218, 219, 220), приводит к интегрированию уравнения.

II. *Если* u_1, $u_2 \ldots$ *суть какие-угодно частные интегралы линейного уравнения без свободного члена, функция* $y = C_1u_1 + C_2u_2 + \ldots$ *есть новый интеграл, более общий.*

Естественно задать себе вопрос, нельзя ли надлежащим преобразованием упростить уравнение, обратив в 0 некоторые его коэффициенты. С этой точки зрения можно высказать следующее предложение:

III. *При помощи квадратуры можно обратить в* 0 *коэффициент при* y^{n-1} *в уравнении порядка* n.

В самом деле, обозначим через u вспомогательную функцию, которую потом определим, и через z — новую неизвестную функцию. Преобразуем уравнение (1) подстановкой $y = uz$. Применяя правило дифференцирования произведения, имеем:

$$y^n = uz^n + nu'z^{n-1} + \ldots; \ y^{n-1} = uz^{n-1} + \ldots$$

Подставив эти выражения в уравнение (1), увидим, что коэффициент при z^n есть u, коэффициент при z^{n-1} есть $(nu' + uX_1)$. Стало быть, если определим u из уравнения

$$nu' + uX_1 = 0, \text{ откуда } u = e^{-\frac{1}{n}\int X\,dx}$$

и разделим уравнение (1) на u, преобразованное уравнение относительно z будет вида

$$z^n + Z_2z^{n-2} + \ldots + Z_n = 0,$$

где буквы Z означают функции от x.

Преобразование это, требующее определения u, требует, таким образом, одной квадратуры.

217. Определения и свойства вронскианов. Изучение линейных уравнений тесным образом связано с изучением некоторых определителей, которые называются *вронскианами*, или *определителями Вронского* (по имени польского математика Wronsky'ого). Пусть u_1, $u_2, \ldots, u_n$ суть функции от x. *Вронскианом* функций u_1, $u_2, \ldots, u_n$ называется следующий определитель, образованный из этих функций и их производных:

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & \ldots & u_n \\ u_1', & u_2', & \ldots & u_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{n-1}, & u_2^{n-1}, & \ldots & u_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Мы будем обозначать его через W или $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

При этом очевидно предполагается, что функции u_1, $u_2, \ldots, u_n$ имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно, что и выполняется, если u_1, $u_2, \ldots, u_n$ суть интегралы уравнения (1).

Вронскианы обладают некоторыми весьма простыми свойствами

1°. Вронскиан W обращается в 0, если две входящих в его состав функции u равны между собой.

2°. Для дифференцирования вронскиана достаточно заменить элементы последней строки их производными.

Это правило есть частный случай следующего общего правила: *Производная от определителя равна сумме определителей, которые получаются из данного, если в нем заменить последовательно сперва элементы первой строки, затем элементы второй строки, ..., наконец элементы последней строки их производными* *).

В самом деле, если применить это правило к вронскиану, все определители, полученные из данного таким путем, кроме последнего, обращаются в 0, так как содержат две одинаковые строки.

218. Теорема I. *Линейное уравнение порядка n без свободного члена $f(y)=0$: 1° имеет всегда n частных интегралов $u_1, u_2, \ldots, u_n$, вронскиан которых отличен от 0; 2° если $u_1, u_2, \ldots, u_n$ суть n частных интегралов, обладающих этим свойством, общий интеграл будет*

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n. \tag{5}$$

Решения, отличного от этого, не существует (п° 216).

Докажем сперва первое утверждение. Если u_1 есть частный интеграл уравнения, отличный от 0, его вронскиан приводится к u_1 и также отличен от 0. Допустим теперь, что можно найти p частных интегралов $(0 < p < n)$ $u_1, u_2, \ldots, u_p$ вронскиан которых отличен от 0, но что невозможно присоединить к ним еще частный интеграл так, чтобы полученная таким образом система функций обладала тем же свойством. В таком случае всякий интеграл уравнения $f(y)=0$, а потому и общий его интеграл, удовлетворяет соотношению:

$$W(u_1, u_2, \ldots, u_p, y) = 0.$$

Это есть линейное уравнение относительно величин $y, y', \ldots, y^p$, которым можно придать произвольные значения при любом значении x, так как $p < n$, а общий интеграл содержит по крайней мере один частный интеграл, который удовлетворяет этим *начальным* условиям. Стало быть, соотношение это может иметь место, только если коэффициенты при $y, y', \ldots$ равны 0 в отдельности, что невозможно, так как коэффициент при y^p есть вронскиан

$$W(u_1, u_2, \ldots, u_p),$$

который по предположению отличен от 0. Итак, допущение наше невозможно, что и доказывает первую часть нашего предложения.

*) Правило это легко можно доказать. Если переменными оказываются элементы только одной строки, разлагая определитель по элементам этой строки, непосредственно убеждаемся, что его производная получится, если заменить каждый элемент этой строки его производной. Производная же какого-угодно определителя, по правилу дифференцирования сложных функций, будет равна сумме определителей, которые получим таким путем, предполагая последовательно, что изменяются только элементы первой, второй, ...строки, что и приводит к высказанному правилу.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим интеграл

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n \text{ или } y = \sum Cu,$$

образованный из n частных интегралов, вронскиан которых отличен от 0.

Для того чтобы доказать, что это есть общий интеграл, нужно показать, что n постоянных, в него входящих, различны, т. е. что можно выбрать их так, чтобы $y, y', \ldots, y^{n-1}$ имели произвольные значения при данном частном значении x.

Для этого достаточно, чтобы система уравнений

$$y = \sum Cu, \ y' = \sum Cu', \ldots, y^{n-1} = \sum Cu^{n-1}$$

могла быть разрешена относительно постоянных C. Условие же это действительно выполнено, так как определитель этой системы есть вронскиан W, который по предположению отличен от 0.

219. Теорема II. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вронскиан $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ был отличен от 0, заключается в том, чтобы n интегралов $u_1, u_2, \ldots, u_n$) были линейно независимы.*

Говорят, что функции u линейно независимы, если тождество

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0 \text{ или } \sum \alpha u = 0, \tag{6}$$

где α — постоянные, может иметь место лишь, когда все коэффициенты α равны 0. Функции u линейно зависимы, если тождество (6) может иметь место в рассматриваемом промежутке, когда по крайней мере одна из постоянных отлична от 0.

Если функции u линейно зависимы, то, дифференцируя последовательно тождество (6), образуем систему n уравнений:

$$\sum \alpha u = 0, \quad \sum \alpha u' = 0; \ \ldots \sum \alpha u^{n-1} = 0,$$

и так как эти соотношения выполнены, когда не все величины α равны 0, получаем отсюда $W(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$.

Обратно, допустим, что интегралы $u_1, u_2 \ldots, u_n$ линейно независимы, и покажем, что наверно вронскиан $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ отличен от 0 при всех значениях x, лежащих в области непрерывности коэффициентов уравнения (1). В самом деле, пусть при некотором частном значении $x = x_0$, вронскиан W обращается в 0. Это показывает, что система n уравнений 1-й степени относительно n постоянных C:

$$\sum Cx_0 = 0; \ \sum Cx_0' = 0; \ \ldots \sum Cx_0^{n-1} = 0$$

(где значок 0 означает, что берутся значения функций при $x = x_0$) допускает решение, в котором по крайней мере одна из постоянных C отлична от 0. Обозначим это решение через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и положим

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

Функция u есть частный интеграл уравнения (1), который при $x = x_0$, в силу предыдущей системы, обращается в 0 вместе с своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно. Но такой интеграл может быть только один, в силу теоремы единственности, и так как наперед ясно, что функция $y = 0$ есть также частный интеграл, обладающий теми же свойствами, то имеем:

$$0 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n,$$

т. е. функции $u_1, u_2 \ldots u_n$ линейно зависимы, что противоречит предположению *).

Из этой теоремы и из предыдущей вытекает следующее заключение.

220. Интегрирование линейного уравнения без свободного члена.

Полное интегрирование линейного уравнения без свободного члена приводится к нахождению n частных интегралов $u_1, u_2, \ldots, u_n$ линейно независимых; общий интеграл имеет вид

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n$$

и особое решение не существует.

221. Теорема III. *Если два линейных уравнения без свободного члена:*

$$y^n + X_1 y^{n-1} + \ldots + X_n y = 0; \quad y^n + \xi_1 y^{n-1} + \ldots + \xi_n y = 0$$

имеют одинаковый общий интеграл, то они тождественны между собой.

В самом деле разности их

$$(X_1 - \xi_2)\, y^{n-1} + \ldots + (X_n - \xi_n) y = 0$$

удовлетворяет тот же общий интеграл, т. е. предыдущее соотношение имеет место при произвольных значениях $y, y', \ldots, y^{n-1}$, что возможно лишь если

$$X_1 = \xi_1, \ldots, X_2 = \xi_2, \ldots, X_n = \xi_n.$$

---

*) Это рассуждение проведено иначе, чем у автора. Обращаем внимание читателя на то, что, лишь только вронскиан W равен нулю при *одном* значении $x = x_0$, он обращается в нуль *тождественно* (это вытекает из линейной зависимости между функциями $u_1, u_2, \ldots, u_n$). Следовательно и наоборот, если W отличен от нуля при $x = x_0$, он никогда не обращается в нуль.

Это замечание позволяет уточнить и доказательство первой части предшествующей теоремы. Согласно теореме существования [п° 192 и 194 (3°)] существуют такие решения $u_1, u_2, \ldots, u_n$, для которых при $x = x_0$ вронскиан имеет, напр., такой вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Тогда $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ будет отличен от нуля для всех значений x, не выходящих из области непрерывности коэффициентов уравнения (1).

Прим. ред.

Эта теорема позволяет просто показать, что левая часть линейного уравнения, приведенная к виду

$$f(y) = y^{n} + X_1 y^{n-1} + \dots + X_n y,$$

выражается различными способами через вронскианы, если известны n частных линейно независимых интегралов $u_1, u_2, \dots, u_n$ или общий интеграл уравнения $f(y) = 0$. Это мы сейчас и сделаем.

222. Первое выражение $f(y)$ через вронскианы. Образуем линейное уравнение порядка n:

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n, y) = 0. \tag{7}$$

Оно приводится к $f(y) = 0$, так как, имея те же частные интегралы $u_1, u_2, \dots, u_n$, оно имеет и тот же общий интеграл. Чтобы привести его левую часть к $f(y)$, достаточно, стало быть, разделить ее на коэффициент при y^{n}, откуда вытекает тождество

$$f(y) = \frac{W(u_1, u_2, \dots, u_n, y)}{W(u_1, u_2, \dots, u_n)}. \tag{8}$$

223. Формула Liouville'я. Первый интеграл уравнения без свободного члена. Если напишем $W(u_1, u_2, \dots, u_n, y)$ в виде определителя, замечаем, что в силу правила дифференцирования вронскиана (п°, 217) минор, соответствующий y^{n-1} есть

$$-W'(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

а потому, отождествляя коэффициенты при y^{n-1} в обеих частях соотношения (8) и обозначая для краткости вронскиан функций u_1, $u_2, \dots, u_n$ просто через W, имеем:

$$\frac{W'}{W} = -X_1, \text{ откуда } W = Ce^{-\int X_1 dx}. \tag{9}$$

Эта формула принадлежит Liouville'ю. Из нее вытекает важное следствие:

Первый интеграл уравнения $f(y) = 0$ получается непосредственно, если известны его $(n-1)$ линейно независимых частных интегралов $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$.

В самом деле, заменяя в выражении вронскиана

$$W(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, y)$$

y — общим интегралом $C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n$, то по формуле Liouville'я получим

$$W(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, y) = C_n W = Ce^{-\int X_1 dx}.$$

Следовательно, уравнению $(n-1)$-го порядка

$$W(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, y) = Ce^{-\int X_1 dx} \tag{10}$$

удовлетворяет общий интеграл уравнения $f(y)=0$, а потому это будет *первый интеграл уравнения* $f(y)=0$, и мы увидим (n° 230), что интегрирование приводится к квадратурам.

224. Второе выражение $f(y)$ через вронскианы. Множители. Обозначим, как и в предыдущем n°, вронскиан $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ через W. Через $W_i(y)$ — тот же вронскиан, в котором одна только из функций u, функция u_i, заменена через y. Образуем линейное уравнение порядка n (D означает производную).

$$D\frac{W_i(y)}{W}=0. \tag{11}$$

Это уравнение имеет n частных интегралов $u_1, u_2, \ldots, u_n$, так как отношение, стоящее под знаком производной, обращается в 1, если $y=u_i$, и в 0, если y равна одной из остальных функций u. Стало быть, левая часть этого уравнения, по разделении на коэффициент при y^n, приводится к $f(y)$.

Пусть вообще w_i^k есть минор W, соответствующий элементу u_i^k. Имеем:

$$W_i(y)=w_i^{n-1}y^{n-1}+w_i^{n-2}y^{n-2}+\ldots+w_iy,$$

а потому коэффициент при y^n в уравнении (11) есть $\frac{w_i^{n-1}}{W}$. Отсюда заключаем, что при $i=1, 2, \ldots, n$, имеет место тождество

$$D\frac{W_i(y)}{W}=D\frac{w_i^{n-1}y^{n-1}+\ldots+w_iy}{W}=\frac{w_i^{n-1}}{W}f(y). \tag{12}$$

Это показывает, что выражение $f(y)$, если умножить его на одну из величин $\frac{w_i^{n-1}}{W}$, превращается в полную производную некоторой функции.

Величины эти называются *множителями* уравнения, и мы изложим теорию этих множителей в § 3.

225. Символическое деление. I. *Если даны два символических полинома порядков m и n ($m \geqslant n$):*

$$A(y)=A_0y^m+\ldots+A_my;\quad B(y)=B_0y^n+\ldots+B_ny,$$

где $A_0,\ldots A_m, B_0\ldots B_n$ означают известные функции от x, всегда можно определить два новых символических полинома Q и R так, чтобы при всяком y было

$$A(y)=Q\,[B(y)]+R(y),$$

причем Q порядка $m-n$, R — порядка $< n$.

Эту операцию можно назвать *делением* A на B, причем Q есть *частное* и R *остаток*. Если R обращается тождественно в 0, говорят, что A делится на B.

Для доказательства этой теоремы, представим второе из данных уравнений в виде

$$y^n = \frac{1}{B_0}(B - B_1 y^{n-1} - B_2 y^{n-2} - \ldots)$$

Дифференцируем полученное уравнение $(m-n)$ раз и каждый раз заменяем в правой части $y^n, y^{n+1}, \ldots, y^{m-1}$ их выражениями, найденнымм при предыдущих дифференцированиях; мы получим y^n, $y^{n+1} \ldots, y^m$, в виде линейных функций от $B, B', \ldots, B^{m-n}$ и $y, y', \ldots, y^{n-1}$. Подставив эти выражения в полином $A(y)$, найдем:

$$A(y) = Q(B) + R(y),$$

где $Q(B)$ означает символический полином от $B, B', \ldots, B^{m-n}$ и R символический полином от $y, y', \ldots, y^{n-1}$. Это и есть соотношение, которое нужно было доказать.

II. *При указанных условиях полиномы Q и R определяются единственным способом.*

В самом деле, пусть Q_1 и R_1 два других полинома, удовлетворяющих тем же условиям. При произвольном y имеем:

$$Q\,[B(y)] - Q_1\,[B(y)] = R_1\,(y) - R\,(y).$$

Отсюда следует, что символический полином $R_1(y) - R(y)$ порядка $(n-1)$ обращается в 0, когда y есть любой интеграл уравнения $B(y) = 0$, порядка n, т. е. при произвольных значениях $y, y', \ldots, y^{n-1}$ *). Стало быть, все коэффициенты этого полинома обращаются в 0 и имеем тождественно $R_1 = R$.

Предыдущее соотношение приводится тогда к $Q[B(y)] = Q_1[B(y)]$. Но так как оно имеет место при произвольном $B(y)$, то тождественно $Q = Q_1$.

Замечание. Вычисления при символическом делении можно располагать так же, как и при делении алгебраическом, определяя последовательно каждый член частного. Образуем сперва разность

$$A(y) - \frac{A_0}{B_0} B^{m-n}(y) = C\,(y) = C_0 y^p + C_1 y^{p-1} + \ldots$$

Это будет полином порядка $p < m$, так как член, содержащий y^m, сокращается. Если $C\,(y)$ порядка $< n$, то деление закончено, и полином этот и будет остатком. В противном случае образуем новую разность, порядка $q < p$:

$$C\,(y) - \frac{C_0}{B_0} B^{p-n}(y) = D_0 y^q + D_1 y^{q-1} + \ldots$$

---

*) Напоминаем, что, согласно теореме существования, можно взять такой интеграл y уравнения $B(y) = 0$, чтобы $y, y', \ldots, y^{n-1}$ имели любые наперед заданные значения при любом наперед взятом значении x.

Прим. ред.

и будем продолжать эти действия до тех пор, пока не придем к разности $R(y)$ порядка $< n$. Это и будет остаток. Частное же будет дано формулой

$$Q(B) = \frac{A_0}{B_0} B^{m-n} + \frac{C_0}{B_0} B^{p-n} + \frac{D_0}{B_0} B^{q-n} + \dots$$

226. Решения, общие двум уравнениям. *Интегралы, общие двум уравнениям $A(y)=0$ и $B(y)=0$ соответственно порядков m и n ($m > n$) будут вместе с тем интегралами и линейного уравнения без свободного члена, порядка $\leqslant n$, которое можно образовать с помощью алгорифма, аналогичного алгорифму общего наибольшего делителя двух алгебраических полиномов.*

В самом деле, разделим A на B и рассмотрим тождество

$$A(y) = Q[B(y)] + R(y).$$

Отсюда заключаем, что пары уравнения $A=0$ и $B=0$, с одной стороны, и $B=0$ и $R=0$ — с другой, имеют те же общие интегралы.

Если уравнение $A=0$ имеет все интегралы уравнения $B=0$, необходимо, чтобы R обращалось тождественно в 0 (или чтобы A делилось на B, так как в противном случае R, будучи порядка $< n$, не может обращаться в 0 для любого интеграла уравнения $B=0$, порядка n). Обратно, если R обращается тождественно в 0, все решения, общие $A=0$ и $B=0$, будут даны общим интегралом уравнения $B=0$.

Если R не равно тождественно 0, мы приходим к отысканию интегралов, общих $B=0$ и $R=0$. Разделим B на R, что дает новый остаток R_1 и так далее. Так как порядки последовательных остатков идут убывая, операции эти не могут продолжаться неопределенно, и мы придем наконец к первому остатку R_n, на который делится предыдущий остаток R_{n-1}, а потому и все прочие делятся в точности. Этот остаток R_n есть символический полином наивысшего порядка, который делит одновременно A и B и может быть назван *общим наибольшим делителем* A и B. Решения, общие уравнениям $A=0$ и $B=0$, будут даны общим интегралом уравнения $R_n=0$.

Интеграл $y=0$ всегда удовлетворяет общим уравнениям $A=0$ и $B=0$; другими словами, полиномы A и B всегда делятся на y, и, если они не имеют никакого другого общего делителя, можно сказать, что они *взаимно простые*. В этом случае уравнения $A=0$ и $B=0$ не имеют других общих решений, кроме $y=0$.

§ 2. Линейные уравнения со свободным членом. Понижение порядка линейных уравнений.

227. Уравнения со свободным членом. Вид общего интеграла. Линейное уравнение *не однородное*, или *со свободным членом*, или *полное*, содержит член X, не зависящий от y и ее производных. Уравнение порядка n приводится таким образом к виду

$$f(y) = X, \tag{1}$$

где $f(y)$, как и раньше, означает символический полином

$$f(y) = y^n + X_1 y^{n-1} + \dots + X_n y.$$

Имеем следующую теорему:

Общий интеграл уравнения со свободным членом есть сумма любого частного интеграла этого уравнения и общего интеграла уравнения без свободного члена. Особое решение не существует.

В самом деле, пусть y_1 есть частный интеграл уравнения (1), имеем $f(y_1)=X$. Введем вместо y новую неизвестную функцию z, положив $y=y_1+z$. Уравнение (1) перейдет в

$$f(y_1+z)=f(y_1)+f(z)=X$$

и приведется к $f(z)=0$. Стало быть, z есть общий интеграл уравнения без свободного члена. Так как это последнее не имеет особого решения, то и уравнение (1) не имеет такового.

Предыдущая теорема дает вид общего интеграла уравнения с свободным членом. Она приводит нахождение этого интеграла к интегрированию уравнения без свободного члена и к разысканию частного интеграла уравнения со свободным членом. Это и дает способ интегрирования, которым можно пользоваться в частных случаях. Мы увидим примеры этого в отделе V. Общая же теорема относительно интегрирования уравнения с свободным членом — следующая:

228. Интегрирование линейного уравнения со свободным членом. *Интегрирование полного линейного уравнения n-го порядка приводится к интегрированию уравнения без свободного члена и к n квадратурам.* Этот результат получается непосредственно, если вспомнить формулы n° 224. Пусть дано уравнение $f(y)=X$. Умножив на множитель $\frac{w_i^{n-1}}{W}$, в силу тождества (12) этого n°, имеем:

$$D\,\frac{w_i^{n-1}y^{n-1}+w_i^{n-2}y^{n-2}+\ldots+w_i(y)}{W}=\frac{w_i^{n-1}}{W}X,$$

и интегрируя

$$w_i^{n-1}y^{n-1}+w_i^{n-2}y^{n-2}+\ldots+w_iy=W\int\frac{w_i^{n-1}}{W}X\,dx.$$

Умножим это соотношение на u_i и просуммируем при $i=1,2,\ldots,n$. Так как w_i^k $(i=1,2,\ldots,n)$ суть миноры $(k+1)$-ой строки определителя W, коэффициент при y будет W, остальные же члены обратятся в 0. Сократив на общий множитель W, отличный от 0, найдем отсюда

$$y=\sum_{i=1}^{n}u_i\int\frac{w_i^{n-1}}{W}X\,dx. \tag{2}$$

Это общая формула интегрирования уравнения со свободным членом. Так как она содержит только n постоянных интегрирования, постоянные эти произвольны и различны. Когда функции u, а потому и W и w известны, общий интеграл, как видим, получается с помощью n квадратур.

Замечание I. Теорему предыдущего n° можно вывести из этой формулы, так как, если выделим в каждом члене произвольную постоянную интегрирования C_i, содержащуюся в неопределенном интеграле, совокупность членов, содержащих произвольные постоянные, будет $\sum C_i u_i$, что представляет общий интеграл уравнения без свободного члена. Формула приводится к оставшимся членам, если обратить в 0 постоянные C_i; сумма этих членов и образует частный интеграл полного уравнения.

Замечание II. Если бы, вместо того чтобы умножать уравнения на $u_1, \ldots, u_n$ мы умножили бы их на $u_i^{k}, \ldots, u_n^{k}$, то при $k=1, 2, \ldots n-1$ получили бы

$$y^k = \sum_{i=1}^{n} u_i^{(k)} \int \frac{\omega_i^{n-1}}{W} X dx.$$

229. Способ Lagrange'а (изменение произвольных постоянных) и способ Cauchy. Вычисления, необходимые для получения общего интеграла полного уравнения, когда известен общий интеграл уравнения без свободного члена, можно представить в различных видах. Существует два способа, которые особенно заслуживают упоминания здесь: это способ изменения произвольных постоянных (Lagrange'а) и способ Cauchy. Рассуждения здесь не те, что в предыдущем n°, но вычисления по существу те же самые.

В этом n° мы обозначим свободный член уравнения через $\varphi(x)$ вместо X. Итак, пусть нужно интегрировать полное уравнение порядка n:

$$f(y) = \varphi(x), \tag{3}$$

когда известен общий интеграл

$$y = C_1 u_1 + \ldots + C_n u_n = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i \tag{4}$$

уравнения без свободного члена.

1. Способ изменения произвольных постоянных. Пусть y есть интеграл уравнения (3) и $C_1, C_2, \ldots C_n$ — функции от x, определяемые из системы уравнений 1-й степени

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i,\ y' = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i', \ldots, y^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i^{n-1}, \tag{5}$$

причем производные y имеют тот же вид, как если бы C были постоянными.

Выразим сперва, что y есть интеграл уравнения (3). Для этого нужно дифференцировать последнее из уравнений (5), что дает

$$y^n = \sum C_i u_i^n + \sum u_i^{n-1} \frac{dC_i}{dx},$$

и затем, подставить значения $y, y', \ldots y^n$ в (3); так как $f(u_i)=0$ при $i=1, 2, 3, \ldots n$, находим:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{n-1} \frac{dC_i}{dx} = \varphi(x). \tag{6}$$

Стало быть, искомый интеграл y и функции $C_1, C_2, \ldots C_n$ определяются из уравнений (5) и (6).

С другой стороны, систему (5) можно заменить первым уравнением $y=\sum Cu$ этой системы, с присоединением к нему системы

$$\sum_i u_i \frac{dC_i}{dx}=0, \sum_i u_i' \frac{dC_i}{dx}=0; \ldots \sum_i u_i^{n-2} \frac{dC_i}{dx}=0, \tag{7}$$

в силу чего последовательные производные y и будут иметь вид (5).

Но уравнения (6) и (7) образуют систему уравнений первой степени, разрешимых относительно производных функций C. Отсюда находим выражения этих производных в функции от x, а затем выражения самых функций C с помощью n квадратур. Искомый общий интеграл получим, подставив эти выражения в равенство

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i.$$

2. Способ Cauchy. Пусть α есть произвольный параметр. Заменим в общем интеграле (4) уравнения $f(y)=0$ x на α и определим постоянные C измененного таким образом общего интеграла y из системы уравнений первой степени относительно C.

$$y=0, y'=0, \ldots, y^{n-2}=0, y^{n-1}=\varphi(\alpha),$$

откуда получим выражения постоянных C в функции от α. Подставим эти выражения в общий интеграл $y=\sum Cu$, где u уже функции от x, мы получим $y=\psi(x, \alpha)$. Покажем, что *определенный интеграл*:

$$I=\int_{x_0}^{x} \psi(x, \alpha)\, d\alpha$$

есть частный интеграл уравнения $f(y)=\varphi(x)$.

В самом деле, по предположению, имеем:

$$\psi(\alpha, \alpha)=0, \psi'_x(\alpha, \alpha)=0, \ldots, \psi_x^{n-2}(\alpha, \alpha)=0, \psi_x^{n-1}(\alpha, \alpha)=\varphi(\alpha).$$

Но α, будучи произвольной, может быть заменена любой другой буквой, а потому имеем также

$$\psi(x, x)=0, \psi_x'(x, x)=0, \ldots, \psi_x^{n-2}(x, x)=0, \psi_x^{n-1}(x, x)=\varphi(x).$$

Дифференцируя интеграл I $(n-1)$ раз и принимая во внимание эти соотношения, находим:

$$I' = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} d\alpha, \ldots, I^{n-1} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^{n-1}\psi}{\partial x^{n-1}} d\alpha; \quad I^n = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} d\alpha + \varphi(x).$$

Подставив эти выражения в $f(I)$ и заметив, что $\psi(x, \alpha)$ есть интеграл равнения $f(y) = 0$, т. е. $f(\psi) = 0$, найдем:

$$f(I) = \int_{x_0}^{x} f(\psi)\, d\alpha + \varphi(x) = \varphi(x),$$

что и требовалось доказать.

Общий интеграл полного уравнения получим, прибавив к I общий интеграл уравнения $f(y) = 0$. Найдем:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i + \int_{x_0} \psi(x, \alpha)\, d\alpha.$$

230. Общий случай, когда уравнение без свободного члена интегрируется в квадратурах *). *Если известны n независимых частных интеграла $u_1, u_2, \ldots, u_n$ линейного уравнения без свободного члена порядка $n+1$:*

$$y^{n+1} + X_1 y^n + \ldots + X_{n+1} y = 0,$$

интегрирование его приводится к n квадратурам.

В самом деле, теорема Loiuville'я дает первый интеграл с помощью одной квадратуры. Заменяя n на $n+1$ в формуле n° 223, имеем

$$W(u_1, u_2, \ldots, u_n, y) = e^{-\int X_1 dx}.$$

Это есть уравнение n-го порядка со свободным членом. Для того чтобы свести коэффициент при y^n к единице, достаточно разделить его на $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, что мы обозначим просто через W. Общий интеграл получится тогда по формуле (2) n° 228, которая дает

$$y = \sum_{i=1}^{n} u_i \int \frac{w_i^{n-1} dx}{W^2} e^{-\int X\, dx} \tag{8}$$

(где смысл обозначений w_i^{n-1} остался прежний), что и заключает n новых квадратур.

231. Приложение к уравнению второго порядка. *Линейное уравнение без свободного члена второго порядка интегрируется двумя квадратурами, если известен один его частный интеграл.*

---

*) Заметим, что полное уравнение всегда интегрируется в квадратурах одновременно с уравнением без свободного члена (n° 228).

Пусть u_1 есть частный интеграл уравнения

$$y'' + X_1 y' + X_2 y = 0.$$

Первый интеграл Liouvill'я (nº 223) есть

$$W(u_1, y) = u_1^2 D \frac{y}{u_1} = Ce^{-\int X_1 dx}$$

откуда вытекает, с помощью новой квадратуры,

$$y = Cu_1 \int \frac{dx}{u_1^2} e^{-\int X_1 dx} \tag{9}$$

В частности, если $X_1 = 0$, показательная функция приводится к постоянной.

Следовательно, если u_1 есть частный интеграл уравнения $y'' + Xy = 0$, его общий интеграл будет

$$y = Cu_1 \int \frac{dx}{u_1^2}. \tag{10}$$

232. Способ понижения порядка d'Alembert'a. I. *Если известен частный интеграл u_1, отличный от 0, линейного уравнения n-го порядка без свободного члена, $f(y) = 0$, интегрирование приводится к интегрированию уравнения $(n-1)$-го порядка такого же вида и к одной квадратуре.*

В самом деле, введем новую неизвестную функцию z, полагая

$$y = u_1 z.$$

Производные y', y'', ... вычисляются по формуле Leibniz'a

$$y^p = zu_1^p + pz'u_1^{p-1} + \ldots + z^p u_1 \qquad (p = 1, 2, \ldots n).$$

Подставим эти выражения $y, y', \ldots, y^n$ в уравнение $f(y) = 0$. Коэффициент при z^n будет u_1, коэффициент при z будет $f(u_1) = 0$, так что член, содержащий z, пропадает. Стало быть, уравнение относительно z будет

$$u_1 z^n + Z_1 z^{n-1} + \ldots + Z_{n-1} z' = 0, \tag{11}$$

где буквы Z означают известные функции от x.

Но это линейное уравнение без свободного члена приводится к $(n-1)$-му порядку, если принять за неизвестную z'. Зная z', найдем z квадратурой, и искомый интеграл будет $y = u_1 z$.

II. *Если известны p $(p < n)$ частных линейно независимых интеграла уравнения $f(y) = 0$ порядка n, из них получаются $(p-1)$ частных линейно независимых интеграла уравнения* (11) *относительно z'.*

В самом деле, функции $\left(\frac{u_2}{u_1}\right)', \ldots, \left(\frac{u_p}{u_1}\right)'$ *) суть интегралы этого уравнения, между которыми не существует никакого линейного соотношения с постоянными коэффициентами (не равными сплошь нулю) вида:

$$\alpha_2\left(\frac{u_2}{u_1}\right)' + \ldots + \alpha_p\left(\frac{u_p}{u_1}\right)' = 0.$$

Действительно, если бы подобное соотношение существовало, интегрируя и обозначая через α_1 новую постоянную, из него вывели бы:

$$\alpha_2\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + \ldots + \alpha_p\left(\frac{u_p}{u_1}\right) = -\alpha_1 \text{ или } \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p = 0,$$

т. е. данные интегралы уравнения $f(y) = 0$ не были бы линейно независимыми.

Таким образом, применяя предложение I к уравнению (11) относительно z', можно понизить его порядок на единицу, и в силу (11) найти $(p-2)$ линейно независимых интеграла полученного таким образом уравнения $(n-2)$-го порядка. Это последнее в свою очередь приводится к уравнению порядка $(n-3)$, $(p-3)$ линейно-независимых интеграла которого известны. Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока не придем к уравнению порядка $n-p$, откуда вытекает следующее предложение:

III. *Если известны $p\,(p<n)$ линейно-независимых частных интеграла уравнения $f(y)$ порядка n, интегрирование его приводится к интегрированию линейного уравнения без свободного члена порядка $(n-p)$ и к квадратурам.*

В следующем n⁰ мы формулируем эту теорему более точно, и вместе с тем дадим другое доказательство, более глубоко проникающее в суть дела.

233. Общая теорема о понижении порядка линейных уравнений. *Если известны $p\,(p<n)$ линейно независимых интеграла уравнения порядка n, без свободного члена, интегрирование его приводится к интегрированию линейного уравнения без свободного члена порядка $(n-p)$ и к $p\,(n-p)$ различным квадратурам.*

Пусть $f(y) = 0$ есть это уравнение порядка n; обозначим через $u_1, u_2, \ldots, u_p$ данные p интегралов и образуем дифференциальное уравнение порядка p:

$$\varphi(y) = 0,$$

которое имеет общий интеграл $C_1 u_1 + \ldots + C_p u_p$. Символический полином $\varphi(y)$ отличается от вронскиана $W(u_1, u_2, \ldots, u_p, y)$ лишь множителем, зависящим только от x, который можно выбрать произвольно. Так как

*) Если решения $u_1, u_2, \ldots, u_p$ линейно не зависимы, то ни одно из них не сводится тождественно к нулю (ибо, напр., соотношение $u_1 = 0$ было бы как раз таким линейным соотношением, возможность которого наперед отвергается по предположению). Таким образом деление на u_1 вполне допустимо и подстановка $y = u_1 z$ имеет смысл.

Прим. ред.

уравнение $f(y)=0$ имеет все интегралы $\varphi(y)=0$, полином $f(y)$ делится на φ (nº 225), и если обозначим через $Q(\varphi)$ полином порядка $(n-p)$, который получается в частном, имеем тождество

$$f(y)=Q\cdot[\varphi(y)].$$

Уравнение $f(y)=0$ распадается поэтому на два других:

$$\varphi(y)=z;\quad Q(z)=0,$$

из коих второе есть линейное уравнение без свободного члена порядка $(n-p)$, которое определяет z через $(n-p)$ произвольных постоянных. Первое есть линейное уравнение порядка p со свободным членом, причем известен общий интеграл уравнения без свободного члена; когда z известно, оно определяет y при помощи p квадратур. Во всяком случае, так как z входит множителем в каждой из p функций, которые нужно интегрировать, и вместе с тем z линейно содержит $(n-p)$ произвольных постоянных, каждый интеграл распадется на $(n-p)$ других, умноженных на эти постоянные, которые придется определять отдельно. Всего придется, стало быть, выполнить $p(n-p)$ различных квадратур.

Замечания: I. Если известны $(n-1)$ линейно независимых интеграла уравнения порядка n без свободного члена, так что $(n-p)$ приводится к 1, то и интегрирование сводится к квадратурам, что уже известно.

II. Если известны $p(p<n)$ *независимых* интеграла уравнения без свободного члена порядка n, интегрирование полного уравнения приводится к интегрированию уравнения порядка $(n-p)$ и к $p(n-p)+n$ квадратурам. В самом деле, после того как проинтегрировано уравнение без свободного члена, остается еще n квадратур.

III. Числа квадратур, указываемые в этих предложениях, относятся к уравнениям самого общего вида. Если рассматривается уравнение частного вида, в котором например $X_1=0$, некоторые из этих квадратур выполняются непосредственно, и число их может быть уменьшено. Мы отметили уже это для уравнения 2-го порядка (nº 231).

§ 3. Множители линейных уравнений.

234. Множитель. Рассмотрим символический полином

$$f(y)=y^n+X_1y^{n-1}+\ldots+X_ny. \tag{1}$$

Множителем $f(y)$ или *множителем уравнения* $f(y)=X$ называется такой множитель μ, зависящий только от x, что произведение $\mu f(y)$ при любом y есть производная некоторой функции от $x, y, y', \ldots, y^{n-1}$.

Множители всегда существуют; они оказываются интегралами некоторого линейного уравнения без свободного члена порядка n.

В самом деле рассмотрим неопределенный интеграл

$$\int \mu f(y)\,dx=\int \mu\,(y^n+X_1y^{n-1}+\ldots+X_ny)\,dx.$$

Интегрируя по частям, преобразуем его так, чтобы под знаком интеграла не оставалось больше производных от y. Имеем:

$$\int \mu X_{n-1} y' dx = \mu X_{n-1}\, y - \int (\mu X_{n-1})' y dx;$$

$$\int \mu X_{n-2}\, y'' dx = \mu X_{n-2}\, y' - (\mu X_{n-2})'\, y + \int (\mu X_{n-2})'' y\, dx.$$

. . . .

Подставив эти значения, находим:

$$\int \mu f(y)\, dx = \Omega + \int y\, [\mu X_n - (\mu X_{n-1})' + \ldots + (-1)^n\, \mu^{n}]\, dx,$$

где

$$\Omega = \mu y^{n-1} + (\mu X_1 - \mu')\, y^{n-2} + \ldots \qquad (2)$$

Итак, для того, чтобы μ было множителем, достаточно, чтобы μ удовлетворяло линейному уравнению порядка n:

$$\mu^{n} - (\mu X_1)^{n-1} + \ldots + (-1)^n\, \mu X_n = 0. \qquad (3)$$

Обратно, всякий множитель должен удовлетворять этому уравнению, ибо, в противном случае, как легко видеть дифференцируя уравнение (2), выражение

$$y \cdot [\mu X^{n} - (\mu X_{n-1})' + \ldots],$$

стоящее под знаком интеграла в правой его части было бы производной от функции, содержащей x, y, y', ..., что невозможно, так как оно не содержит вовсе производных от y.

235. Сопряженное уравнение. Уравнение (3) множителей называется *уравнением, сопряженным* с $f(y) = 0$. Между этими двумя уравнениями существует полная взаимность. *Уравнение $f(y) = 0$ в свою очередь есть сопряженное с уравнением* (3), *т. е. с уравнением своих множителей.*

В самом деле, если y есть интеграл уравнения $f(y) = 0$, соотношение (2) дает:

$$\int y\, [\mu X_n - (\mu X_{n-1})' + \ldots]\, dx = -\Omega,$$

причем Ω явным образом содержит μ, μ', ... Стало быть, y есть множитель полинома $\mu X_n - (\mu X_{n-1})' + \ldots$, что и требовалось доказать.

236. Теорема. *Интегрирование одного из сопряженных уравнений представляет задачу, вполне эквивалентную задаче интегрирования другого.*

В самом деле, предположим, что известны n линейно независимых интегралов u_1, u_2, ... u_n уравнения $f(y) = 0$. Мы получим n множителей, т. е. n интегралов сопряженного уравнения по формулам (n° 224)

$$\mu_1 = \frac{w_1^{\,n-1}}{W}, \; \ldots, \; \mu_n = \frac{w_n^{\,n-1}}{W}.$$

Остается только показать, что эти множители *линейно независимы*. Допустим противное, т. е. что эти множители линейно зависимы; тогда имеем тождество вида $\sum \alpha_i w_i^{\,n-1} = 0$, где α_i — постоянные, из которых хоть одна отлична от 0.

Сложим почленно все тождества (12) n° 224, помножив предварительно каждое из них на α_i. При любом y окажется

$$D\frac{y^{n-2}\sum\alpha_i w_i^{\,n-2}+\ldots+y\sum\alpha_i w_i}{W}=0,$$

что может иметь место лишь в том случае, когда все суммы $\sum$ равны 0. Это дает систему уравнений

$$\sum\alpha_i w_i=0;\quad \sum\alpha_i w_i'=0;\quad \ldots\sum\alpha_i w_i^{\,n-1}=0,$$

которой удовлетворяют α_i, причем не все они равны 0, что невозможно, так как определитель этой системы, сопряженный с W, равен W^{n-1} и отличен от 0 (ибо и $W\neq 0$).

237. Теорема. *Если известны $p\,(p<n)$ линейно независимых множителей линейного уравнения порядка n, со свободным членом или без него, можно понизить порядок уравнения на p единиц, не нарушая линейности уравнения.*

Рассмотрим уравнение порядка n:

$$y^n+X_1y^{n-1}+\ldots+X_n y=X. \tag{4}$$

Умножим его на множитель μ_i и проинтегрируем. Левая часть интегрируется точно, и мы получим первый интеграл этого уравнения вида

$$a_iy^{n-1}+b_iy^{n-2}+c_iy^{n-3}+\ldots=\int\mu_i X\,dx. \tag{5}$$

Левая часть уравнения (5) есть не что иное как выражение Ω n° 234. Буквы a_i, b_i, $c_i,\ldots$ суть известные функции от x, выражения коих, в силу формулы (2) n° 234, будут:

$$a_i=\mu_i,\ b_i=\mu_i X_1-\mu_i',\ c_i=\mu_i X_2-(\mu_i X_2)'+\mu_i'',\ldots$$

Если известны p множителей $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_p$, мы получаем таким образом p первых интегралов, заключенных в уравнении (5) при $i=1,\ 2,\ldots p$. Эти первые интегралы различны, т. е. их можно разрешить относительно

$$y^{n-1},\ y^{n-2},\ldots,y^{n-p}.$$

В самом деле, определитель коэффициентов при этих неизвестных в этой системе уравнений есть

$$\begin{vmatrix}\mu_1 & \mu_1X_1-\mu_1' & \ldots\\ \mu_2 & \mu_2X_1-\mu_2' & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix}\mu_1 & \mu_1' & \mu_1''\ldots\\ \mu_2 & \mu_2' & \mu_2''\ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{vmatrix}$$

и приводится к вронскиану функций $\mu_1,\ldots,\mu_p$, который отличен от 0, так как по предположению функции эти линейно независимы.

Разрешая эту систему относительно y^{n-p}, получаем линейное уравнение относительно y порядка $(n-p)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Предыдущая теория дает новое доказательство теоремы n° 232 относительно понижения порядка линейного уравнения без свободного члена порядка n, когда известны p его линейно независимых интегралов. Эти p интегралов суть множители сопряженного уравнения; стало быть, порядок его можно понизить на p единиц. После этого интегрирование сопряженного уравнения, а потому и данного (n° 236) зависит только от интегрирования уравнения порядка $n-p$.

§ 4. Интегрирование линейных уравнений с постоянными коэффициентами и без свободного члена.

238. Алгебраический характер задачи. Интегрирование линейных уравнений с постоянными коэффициентами, со свободным членом или без него тесно связано с двумя задачами алгебры: 1) нахождением корней полинома и 2) разложением рациональной дроби на простейшие. Чтобы обнаружить вполне эту зависимость, надлежит определить и изучить символы операций с знаком дифференцирования D.

239. Операции, определяемые полиномами относительно D. Суммы и произведения операций. Пусть a_1, $a_2, \ldots$ — постоянные коэффициенты, D — знак дифференцирования по x. Положим

$$f(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_{n-1}D+a_n \tag{1}$$

Выражение $f(D)$ есть символ операции, смысл которой выясняется непосредственно, если условиться обозначать

$$f(D)y=D^ny+a_1D^{n-1}y+\ldots+a_{n-1}Dy+a_ny,$$

где y есть функция от x.

Заметим, что в частном случае, когда $f(D)=1$, имеем $f(D)y=y$. Стало быть, в этом случае $f(D)$ означает *тождественную операцию*.

Символы операций с постоянными коэффициентами вида (1) обладают свойствами, сближающими их с алгебраическими полиномами.

1°. Суммы операций. Если $f(D)$ и $f_1(D)$ — два символических полинома и если $f(D)+f_1(D)$ — полином, получающийся при их сложении, то в силу свойств производных имеем

$$f(D)y+f_1(D)y=[f(D)+f_1(D)]y.$$

Стало быть, операцию $f(D)+f_1(D)$ можно назвать *суммой операций* $f(D)$ и $f_1(D)$ и суммы, определенные таким образом, обладают всеми свойствами алгебраических сумм. В частности операция $f(D)$ есть сумма операций, определяемых каждым из членов полинома $f(D)$.

2°. Произведения операций. Рассмотрим сперва некоторое число линейных операций $D+a$, $D+b, \ldots$ и $D+l$. Мы можем определить операцию

$$(D+l)\ldots(D+b)(D+a), \tag{2}$$

условившись произвести сперва операцию $(D+a)$, затем над результатом — операцию $(D+b)$ и так далее. Но, проделав все эти операции, нетрудно убедиться, что результат будет тот же, как если бы мы произвели одну операцию, определяемую алгебраическим произведением $(D+l)\ldots(D+b)\,(D+a)$, если в нем раскрыть скобки до производства операции.

Операцию (2) можно поэтому назвать *произведением* операций, определенных каждым из множителей в отдельности, и произведение это независимо от порядка множителей. Если произведение состоит из m равных множителей $(D+a)$, его можно представить, как и в алгебре, через $(D+a)^m$.

Аналогичным образом можно определить и операцию

$$f(D)f_1(D)f_2(D)\ldots,$$

составленную из множителей каких угодно степеней. Опять-таки увидим, что она не зависит от порядка множителей. Это свойство вытекает также и из того обстоятельства, что каждый полином $f(D)$ можно разложить по правилам алгебры на линейные множители и таким путем привести этот случай к предыдущему *). К этому разложению мы возвратимся в следующем n°.

240. Разложение полиномов на множители и рациональных дробей на простейшие. Символические формулы, отсюда вытекающие. 1. Разложение на множители. Рассмотрим алгебраическое уравнение степени n:

$$f(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_{n-1}D+a=0,$$

где D рассматривается как величина.

Это уравнение имеет всегда n корней, которые могут быть различными или совпадающими, вещественными или мнимыми. Различные корни мы обозначим через $r, s, t\ldots$, их кратности соответственно через $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ Зная эти корни, можем написать и разложение полинома $f(D)$ на линейные множители. Имеем

$$f(D)=(D-r)^\lambda(D-s)^\mu(D-t)^\nu\ldots \tag{3}$$

Будем рассматривать теперь $f(D)$ как символ операции и вспомним результаты предыдущего n°. Мы видим, что операцию $f(D)$ можно разложить на ряд последовательных операций, определяемых каждая одним из символов $(D-r)$, $(D-s), \ldots$ и производимых в каком угодно порядке.

2. Разложение на простейшие дроби. В то время как разложение $f(D)$ на множители дано формулой (3), разложение $\frac{1}{f(D)}$ на простейшие дроби дается формулой

$$\frac{1}{f(D)}=\frac{A_1}{D-r}+\frac{A_2}{(D-r)^2}+\ldots+\frac{A_\lambda}{(D-r)^\lambda}+\frac{B_1}{D-s}+\ldots, \tag{4}$$

---

*) Легко вывести эти результаты из простого соотношения:

$$D^k(D^l y)=D^{k+l}y,$$

пользуясь пунктом 10 *Прим. ред.*

где $A_1, A_2, \ldots, B_1, \ldots$ — постоянные, вещественные или мнимые, которые мы умеем вычислять (том I, пп⁰ 143—145).

Обозначим через $\frac{f(D)}{D-r}, \frac{f(D)}{(D-r)^2}, \ldots \frac{f(D)}{(D-s)}, \ldots$ *полиномы*, которые получим, если вычеркнуть в выражении $f(D)$ один, два... из множителей $(D-r)$, один,... из множителей $(D-s)$ и т. д. и перепишем тождество (4) в виде

$$1 = A_1 \frac{f(D)}{D-r} + A_2 \frac{f(D)}{(D-r)^2} + \ldots + A_\lambda \frac{f(D)}{(D-r)^\lambda} + B_1 \frac{f(D)}{D-s} + \ldots \quad (5)$$

В этом новом соотношении каждый член в правой части есть полином, который можно рассматривать как символ операции. Формула (5) показывает, что сумма операций, представляемых соответственно каждым членом правой части, есть тождественная операция. Эта формула будет нам весьма полезной.

241. Соотношение между символами D и $(D-r)$. Пусть r есть постоянная и y — функция от x; имеем:

$$D \cdot e^{-rx} y = e^{-rx} Dy - e^{-rx} ry = e^{-rx}(D-r)y.$$

Заменив в этом тождестве y на $(D-r)y$, найдем:

$$D \cdot e^{-rx}(D-r)y = e^{-rx}(D-r)^2 y,$$

и, в силу предыдущего соотношения,

$$D^2 \cdot e^{-rx} y = e^{-rx}(D-r)^2 y.$$

Заменив опять y на $(D-r)y$ и продолжая таким же образом, после λ операций получим

$$D^\lambda \cdot e^{-rx} y = e^{-rx}(D-r)^\lambda y. \quad (6)$$

242. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Простое уравнение. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(D) y = \varphi(x),$$

где, как и выше (n⁰ 239)

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n,$$

и a суть постоянные.

Если $\varphi(x) \neq 0$, уравнение называется *полным*, или *со свободным членом*; если $\varphi(x) = 0$, то уравнение — *без свободного члена*. *Характеристическим уравнением* называется алгебраическое уравнение

$$f(D) = 0.$$

Если характеристическое уравнение имеет только один корень, простой или кратный, дифференциальное уравнение принимает форму

$$(D-r)^\lambda y = \varphi(x),$$

и мы будем называть уравнение такого вида — *простым*.

243. Интегрирование простых уравнений без свободного члена. Пусть дано уравнение порядка λ,

$$(D-r)^{\lambda} y=0. \tag{7}$$

Умножив его на множитель e^{-rx}, отличный от 0 и ∞, и преобразовав по формуле (6), приведем его к виду

$$D^{\lambda} e^{-rx} y=0.$$

Интегрирование выполняется здесь непосредственно и $e^{-rx} y$ оказывается произвольным полиномом степени $(\lambda-1)$. Обозначим его через $P_{\lambda-1}$; он содержит λ произвольных постоянных (эту роль играют его коэффициенты)

$$P_{\lambda-1}=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_{\lambda-1}x^{\lambda-1}.$$

Общий интеграл уравнения (7) будет

$$y=P_{\lambda-1} e^{rx}.$$

Он действительно равен сумме λ частных интегралов, умноженных соответственно на произвольные постоянные C.

244. Интегрирование линейного уравнения с постоянными коэффициентами и без свободного члена в общем случае. Это уравнение имеет вид

$$f(D)y=0. \tag{8}$$

Его интегрирование приводится к решению характеристического уравнения

$$f(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_{n-1}D+a_n=0,$$

или, что то же самое, к разложению $f(D)$ на линейные множители:

$$f(D)=(D-r)^{\lambda}(D-s)^{\mu}\ldots(D-t)^{\nu}$$

Общий интеграл будет равен сумме общих интегралов каждого из простых уравнений

$$(D-r)^{\lambda}y=0; \quad (D-s)^{\mu}y=0, \ldots (D-t)^{\nu}y=0, \tag{9}$$

и его можно написать непосредственно:

$$y=P_{\lambda-1}e^{rx}+Q_{\mu-1}e^{sx}+R_{\nu-1}e^{tx}+\ldots \tag{10}$$

где P, Q, R — полиномы, степени которых обозначены их значками и коэффициенты которых служат произвольными постоянными интеграла.

Доказательство. Так как порядок, в каком входят множители $(D-r)^{\lambda}(D-s)^{\mu}\ldots$ в $f(D)$, безразличен, уравнение $f(D)y=0$ можно переписать, выделив непосредственно перед y любой из этих множителей. Стало быть, интегралы каждого из уравнений (9) будут частными интегралами уравнения (8), и сумма их (10) также интегралом этого уравнения. Но более того, это будет общий интеграл, так как мы покажем, что, обратно, каждый интеграл уравнения (8) имеет вид (10).

Для этого выделим последовательно в $f(D)$ различные множители $(D-r)$, $(D-r)^2, \ldots (D-s)\ldots$ Уравнение (8) можно будет переписать в любом из видов:

$$(D-r)\left[\frac{f(D)}{D-r}y\right]=0;\quad (D-r)^2\left[\frac{f(D)}{(D-r)^2}y\right]=0,\ldots$$
$$(D-s)\left[\frac{f(D)}{D-s}y\right]=0,\ldots$$

Каждое из этих уравнений превращается в простое уравнение без свободного члена, если принять выражение в прямых скобках за неизвестную. Интегрируя их, получаем:

$$\frac{f(D)}{D-r}y=P_0e^{rx};\quad \frac{f(D)}{(D-r)^2}y=P_1e^{rx};\quad \ldots\quad \frac{f(D)}{D-s}y=Q_0e^{sx},\ldots;$$

где полиномы P будут степеней $<\lambda$, полиномы Q — степеней $<\mu,\ldots$ и т. д. Помножим эти уравнения соответственно на постоянные A_1, $A_2,\ldots B_1,\ldots$ разложения $\dfrac{1}{f(D)}$ на простейшие дроби, и сложим. В силу тождества (5) n⁰ 241 получим:

$$y=e^{rx}\sum AP+e^{sx}\sum BQ+\ldots$$

Так как $\sum AP$, $\sum BQ,\ldots$ суть полиномы, степени коих соответственно $<\lambda$, $<\mu,\ldots$, выражение это имеет как раз вид (10).

Замечание. Выражение (10) содержит $\lambda+\mu+\nu+\ldots=n$ произвольных постоянных, которые являются коэффициентами полиномов P, $Q,\ldots$ Таким образом, в согласии с общими теоремами, находим, что общий интеграл равен сумме частных интегралов, помноженных на произвольные постоянные.

Эти частные интегралы должны по необходимости быть линейно независимы, так как в противном случае из них нельзя было бы составить общий интеграл. Отсюда заключаем, что *если r, $s\ldots$ — различные постоянные (вещественные или нет), тождество*

$$P_{\lambda-1}e^{rx}+Q_{\mu-1}e^{sx}+\ldots=0$$

может иметь место лишь в случае, когда все полиномы $P_{\lambda-1}$, $Q_{\mu-1}$ тождественно равны 0 *).

---

*) Эту теорему можно легко доказать и непосредственно. Допустим противное, т. е. что тождество это имеет место при вещественных значениях x, причем по крайней мере один из коэффициентов каждого полинома отличен от 0. Тождество будет существовать и при мнимых значениях x (так как его левая часть есть сумма степенных рядов, все члены которой сокращаются). Пусть r есть та из величин $r, s,\ldots$, абсолютное значение которой наибольшее, — или одна из них, если таких

245. Случай мнимых корней. Когда не все корни $r, s\ldots$ вещественны, найденный выше интеграл содержит мнимые величины, но годен, так как правила для дифференцирования показательных функций с мнимыми показателями остаются без изменения. Надлежащим преобразованием можно привести его к вещественному виду.

Мы предполагаем здесь, что коэффициенты полинома $f(D)$ вещественны, и тогда корни его будут попарно сопряженными. Пусть $r=\alpha+\beta i$ и $s=\alpha-\beta i$ — пара сопряженных корней, кратности λ, Соответствующие члены в формуле (10) можно написать в виде

$$Pe^{rx}+Qe^{sx}=e^{\alpha x}(Pe^{\beta ix}+Qe^{-\beta ix}),$$

где P и Q — произвольные полиномы степени $(\lambda-1)$. Заменив $e^{\beta ix}$ на $\cos\beta x+i\sin\beta x$, $e^{-\beta ix}$ на $\cos\beta x-i\sin\beta x$, можем представить рассматриваемые члены в виде

$$e^{\alpha x}[(P+Q)\cos\beta x+i(P-Q)\sin\beta x],$$

или проще:

$$e^{\alpha x}[P_{\lambda-1}\cos\beta x+Q_{\lambda-1}\sin\beta x], \tag{11}$$

так как $(P+Q)$ и $i(P-Q)$ можно рассматривать как два вещественных *) произвольных полинома степени $(\lambda-1)$.

Итак, члены интеграла, соответствующие сопряженным корням r и s, можно переписать в виде (11); то же самое можно сделать и с другими парами сопряженных корней, если таковые имеются.

В частности, если сопряженные корни r и s простые, соответствующие члены общего интеграла будут

$$e^{\alpha x}[C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x], \tag{12}$$

или, что то же самое,

$$Ce^{\alpha x}\cos(\beta x+C'),$$

где C и C' — две новые постоянные, связанные с предыдущими соотношениями

$$C_1=C\cos C' \text{ и } C_2=-C\sin C'.$$

имеется несколько. Заменим x на $\frac{x}{r}$ и будем приближать x к $+\infty$. После этой подстановки (не нарушающей наших предположений относительно полиномов P, $Q,\ldots$) тождество примет вид:

$$Pe^{x}+Qe^{\frac{s}{r}x}+\ldots=0.$$

Но показатели $\frac{s}{r},\ldots$ все отличны от 1 и по абсолютному значению $\leqslant 1$; отсюда следует, что их вещественные части все <1. Стало быть, при $\lim x=+\infty$ первый член Pe^{x} будет порядка высшего, чем остальные, и тождество оказывается невозможным.

*) Для этого достаточно считать, что P и Q — сопряженные полиномы.

246. Примеры. I. Два уравнения

$$(D^2+5D+6)y=0; \quad (D^2-2D+1)y=0$$

имеют соответственно характеристические уравнения

$$(D+2)(D+3)=0; \quad (D-1)^2=0,$$

и общие интегралы

$$y=Ce^{-2x}+C_1e^{-3x}, \ y=(C+C_1x)e^x.$$

II. Уравнение

$$(D^4+8D^2+16)y=0$$

имеет характеристическое уравнение $(D^2+4)^2=0$, с двукратными мнимыми корнями $\pm 2i$; общий интеграл будет

$$y=(C+C_1x)\cos 2x+(C_2+C_3x)\sin 2x.$$

III. Уравнение

$$(D^4+4a^4)y=0$$

имеет характеристическое уравнение

$$D^4+4a^4=(D^2+2a^2)^2-(2aD)^2=0,$$

корни коего:

$$\pm a(1\pm i);$$

общий интеграл будет

$$y=Ce^{ax}\cos(ax+C')+C_1e^{-ax}\cos(ax+C_1').$$

§ 5. Интегрирование линейных уравнений с постоянными коэффициентами и со свободным членом.

247. Интегрирование простых уравнений. Пусть дано простое уравнение

$$(D-r)^\lambda y=\varphi(x). \tag{1}$$

Помножив его на e^{-rx} и преобразовав по формуле (6) n⁰ 240, получим:

$$D^\lambda \cdot e^{-rx}y=e^{-rx}\varphi(x).$$

Отсюда находим, интегрируя последовательно сперва $e^{-rx}y$, а затем и y по формуле:

$$y=e^{rx}\int\int\dots\int e^{-rx}\varphi(x)\,dx^\lambda. \tag{2}$$

Это выражение равно сумме частного решения полного уравнения и общего интеграла $P_{\lambda-1}e^{rx}$ уравнения без свободного члена. На практике для вычисления y можно выполнить квадратуры, не вводя произвольных постоянных, что дает частный интеграл, а затем к нему уже прибавить общий интеграл уравнения без свободного члена.

Приведение нескольких последовательных квадратур к одному определенному интегралу. Рассмотрим сперва дифференциальное уравнение

$$D^{\lambda} u = \psi(x), \tag{3}$$

откуда

$$u = \int\int \ldots \int \psi(x)\, dx^{\lambda}. \tag{4}$$

Можно доказать непосредственно, что *частный интеграл получается по формуле* *).

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \psi(t)\, dt, \tag{5}$$

где x_0 — произвольная постоянная.

В самом деле, дифференцируя последовательно $(\lambda-1)$ раз по дополненной формуле Leibnitz'a (n^0 45), увидим, что при каждом дифференцировании будет сокращаться член, происходящий от изменения верхнего предела (так как подинтегральная функция обращается в 0 при этом пределе), так что достаточно дифференцировать только под знаком интеграла, что дает

$$D^{\lambda-1} u = \int_{x_0}^{x} \psi(t)\, dt;$$

поэтому, дифференцируя еще один раз, получим $D^{\lambda} u = \psi(x)$.

Полагая теперь $\psi(x) = e^{-rx} \varphi(x)$, находим частное решение

$$\int\int \ldots \int e^{-rx} \varphi(x)\, dx^{\lambda} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} e^{-rt} \varphi(t)\, dt.$$

Таким образом, для частного интеграла полного уравнения (1) получаем удобную формулу

$$y = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} e^{r(x-t)} \varphi(t)\, dt. \tag{6}$$

Символическое представление интеграла. Общий интеграл уравнения

$$(D-r)^{\lambda} y = \varphi(x)$$

удобно обозначить символом

$$y = \frac{\varphi(x)}{(D-r)^{\lambda}},$$

*) Это есть частный случай способа Cauchy (n^0 229, 2°).

который получим, решая уравнение относительно y, как если бы $D-r$ было обыкновенной величиной. Пользу такого обозначения мы увидим в следующем n°.

248. **Интегрирование полных линейных уравнений с постоянными коэффициентами в общем случае.** Так как общий интеграл уравнения без свободного члена известен, интегрирование это приводится к квадратурам, в силу общей теоремы n° 228.

Итак, пусть дано уравнение

$$f(D)y=\varphi(x). \tag{7}$$

Покажем, что *задача интегрирования этого уравнения в квадратурах приводит к разложению* $\frac{1}{f(D)}$ *на простейшие дроби.*

В самом деле, пусть известно разложение $f(D)$ на множители

$$f(D)=(D-r)^{\lambda}(D-s)^{\mu}\ldots$$

и разложение $\frac{1}{f(D)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{f(D)}=\frac{A_1}{D-r}+\frac{A_2}{(D-r)^2}+\ldots+\frac{A_\lambda}{(D-r)^\lambda}+\frac{B_1}{D-s}+\ldots$$

Выделим последовательно в $f(D)$ различные множители $(D-r)$, $(D-r)^2,\ldots,(D-s)\ldots$ Уравнению можно придать один из следующих видов:

$$(D-r)\left[\frac{f(D)}{(D-r)}y\right]=\varphi;\quad (D-r)^2\left[\frac{f(D)}{(D-r)^2}y\right]=\varphi,\ldots;$$

$$(D-s)\left[\frac{f(D)}{(D-s)}y\right]=\varphi,\ldots$$

Каждое из этих уравнений превращается в простое, со свободным членом, если за неизвестную принять выражение в прямых скобках. А потому, интегрируя и пользуясь символическим обозначением, указанным в конце предыдущего n°, находим:

$$\frac{f(D)}{D-r}y=\frac{\varphi}{D-r};\quad \frac{f(D)}{(D-r)^2}y=\frac{\varphi}{(D-r)^2},\ldots,\frac{f(D)}{D-s}y=\frac{\varphi}{D-s},\ldots$$

Помножив эти уравнения соответственно на коэффициенты A_1, $A_2,\ldots,B_1,\ldots$ разложения $\frac{1}{f(D)}$ на простейшие дроби и сложив, получим в силу тождества (5) n° 240:

$$y=\frac{A_1\varphi}{D-r}+\frac{A_2\varphi}{(D-r)^2}+\ldots+\frac{A_\lambda\varphi}{(D-r)^\lambda}+\frac{B_1\varphi}{D-s}+\ldots \tag{8}$$

Эта же формула получается, если просто в соотношении

$$y=\frac{1}{f(D)}\varphi(x)$$

заменить множитель $\frac{1}{f(D)}$ его разложением на сумму простейших дробей. Это и есть формула, приводящая искомый интеграл к интегралам простых уравнений, т. е. к квадратурам.

В силу нашего рассуждения, всякий интеграл y заключается в предыдущей формуле. Но постоянные интегрирования остаются произвольными, так как, собрав все члены, содержащие эти постоянные, получим общий интеграл уравнения без свободного члена (n° 244).

На практике, для получения общего интеграла y достаточно заменить каждый член в формуле (8) соответствующим частным интегралом по формуле (6), а затем прибавить общий интеграл уравнения без свободного члена.

Если корни r, s,... не все вещественны, решение по внешнему виду будет содержать мнимые коэффициенты и показатели, но эти мнимые выражения сокращаются сами собой, если сложить сопряженные члены, как это было сделано для уравнения без свободного члена.

Частный случай. *Если все корни полинома $f(D)$ простые* разложение на простейшие дроби можно произвести по известной формуле (т. I, n° 145), и формула для интеграла примет вид

$$y = \frac{\varphi(x)}{f(D)} = \frac{1}{f'(r)} \frac{\varphi}{D-r} + \frac{1}{f'(s)} \frac{\varphi}{D-s} + \ldots$$

Заменяя каждый член в этой формуле частным интегралом (6) n° 247 и прибавляя общий интеграл Y уравнения без свободного члена, получаем интеграл

$$y = Y + \int_{x_0}^{x} \left[\frac{e^{r(x-t)}}{f'(r)} + \frac{e^{s(x-t)}}{f'(s)} + \ldots \right] \varphi(t)\, dt. \tag{9}$$

Пример. Проинтегрировать уравнение

$$(D^2 + a^2)\, y = (D + ai)\,(D - ai)\, y = \varphi(x).$$

Корни характеристического уравнения здесь будут $r = ai$ и $s = -ai$ и $f'(D) = 2D$. Полагая в формуле (9) $x_0 = 0$, получаем:

$$y = Y + \int_0^x \frac{e^{ai(x-t)} - e^{-ai(x-t)}}{2ai} \varphi(t)\, dt.$$

Заменяя наконец Y его выражением, получаем интеграл

$$y = A \cos ax + B \sin ax + \frac{1}{a} \int_0^x \varphi(t) \sin a(x-t)\, dt.$$

249. Интегрирование полного уравнения с помощью непосредственного нахождения частного интеграла. В тех случаях, когда можно легко найти частный интеграл полного уравнения

$$f(D)\, y = \varphi(x),$$

его общий интеграл проще всего получить, прибавив к этому частному интегралу общий интеграл уравнения без свободного члена. Мы исследуем главнейшие виды функции $\varphi(x)$, для которых частный интеграл находится непосредственно.

Первый случай: *$\varphi(x)$ есть полином P_k степени k.* Уравнение имеет вид

$$f(D)\,y = P_k.$$

Если $f(D)$ не имеет корня, равного 0, уравнение допускает частный интеграл в виде определенного полинома степени k; если $f(D)$ имеет λ корней, равных 0, уравнение допускает частный интеграл вида $x^\lambda Q_k$, где Q_k есть определенный полином степени k.

Эти полиномы можно получить способом неопределенных коэффициентов, а также и следующим способом, который послужит вместе с тем и доказательством.

Прежде всего, если $f(D)$ не имеет корня, равного 0, можно разложить $\frac{1}{f(D)}$ по степеням D по формуле Maclaurin'а. Остановившись на члене степени k, получим:

$$\frac{1}{f(D)} = b_0 + b_1 D + \ldots + b_k D^k + D^{k+1}\frac{M}{f(D)},$$

где M — полином (т. I, n⁰ 172), откуда

$$1 = f(D)\,(b_0 + b_1 D + \ldots + b_k D^k) + MD^{k+1}$$

Итак, правая часть дает тождественную операцию; проделав ее над P_k и замечая, что $D^{k+1} P_k = 0$, находим

$$f(D)\,[(b_0 + b_1 D + \ldots + b_k D^k)\,P_k] = P_k.$$

Итак, в случае когда $f(D)$ не имеет корня, равного 0, получим частный интеграл, взяв сумму членов степени $\leqslant k$ в разложении $\frac{1}{f(D)}$ по степеням D и проделав над P_k операцию, представляемую этой суммой. Результат будет полиномом степени k.

В случае, когда $f(D)$ имеет λ корней, равных 0, заметив, что $f(D) = D^\lambda f_1(D)$, представим уравнение в виде

$$f_1(D)\,[D^\lambda y] = P_k$$

и примем за неизвестную $D^\lambda y$; мы придем к предыдущему случаю. Стало быть, $D^\lambda y$ есть полином степени k, который можно вычислить с помощью разложения $\frac{1}{f_1(D)}$ по формуле Maclaurin'а. Зная $D^\lambda y$, получим оттуда интеграл y с помощью λ квадратур, не вводя произвольных постоянных; этот интеграл будет вида

$$x^\lambda Q_k.$$

Всякий раз, когда разложение Maclaurin'а, на котором основываются все предыдущие рассуждения, получается просто, этот способ оказывается наиболее удобным и практичным, и в частных случаях позволяет даже сразу написать частный интеграл данного уравнения. Но если необходимое разложение получается лишь с помощью длинных вычислений, вообще говоря, более удобно употреблять способ неопределенных коэффициентов. В данное уравнение подставляем выражение указанного вида, оставляя неопределенными коэффициенты полинома Q_k. Отождествляя обе части, получаем систему уравнений первой степени, откуда все неизвестные коэффициенты и определяются, так как ни один член искомого частного интеграла не входит в состав общего интеграла, и ни один из коэффициентов не может остаться произвольным.

Второй случай: $\varphi(x)$ *равно произведению полинома на показательную функцию*. Уравнение имеет вид

$$f(D)y = P_k e^{ax}.$$

Этот случай приводится к предыдущему подстановкой

$$y = e^{ax}z.$$

В самом деле, заменяя в формуле (6) n° 241 r на $(-a)$ находим:

$$D^\lambda e^{ax}z = e^{ax}(D+a)^\lambda z.$$

Применяя эту формулу к каждому из членов $f(D)$, получаем общую формулу

$$f(D)e^{ax}z = e^{ax}f(D+a)z. \tag{10}$$

Итак, по сокращении на общий множитель e^{ax}, получим преобразованное уравнение в виде

$$f(D+a)z = P_k.$$

Зная частный интеграл его z, получим оттуда и частный интеграл y.

Третий случай: $\varphi(x)$ *есть сумма членов предыдущих двух типов*. Уравнение имеет вид

$$f(D)y = P_k + Q_l e^{ax} + \ldots$$

Отыскиваем в отдельности частные интегралы u, v,... различных уравнений

$$f(D)u = P_k, \quad f(D)v = Q_l e^{ax}, \ldots$$

Сумма $u+v+\ldots$ даст частный интеграл данного уравнения в чем можно убедиться, сложив все эти уравнения.

Четвертый случай: *уравнение имеет один из двух видов*

$$f(D)y = P_k e^{ax}\cos bx; \quad f(D)z = P_k e^{ax}\sin bx.$$

Этот случай можно привести к предыдущим, заменив тригонометрические функции мнимыми показательными; но если все данные вещественны, проще получить частный интеграл, взяв для y и z соответственно вещественную и мнимую части решения u уравнения

$$f(D)u = P_k e^{(a+bi)x},$$

так как это уравнение подстановкой $u=y+iz$ приводится к двум предыдущим.

250. Пример. Проинтегрировать уравнения:

$$(D^2+1)\,y=\cos x;\ \ (D^2+1)\,z=\sin x.$$

Интегрируем сперва $(D^2+1)\,u=e^{ix}$. Подставляя $u=te^{ix}$, находим

$$[(D+i)^2+1]\,t=1,$$

откуда

$$(D+2i)\,Dt=1.$$

Член степени 0 в разложении $\frac{1}{D+2i}$ есть $\frac{1}{2i}$, а потому

$$Dt=\frac{1}{2i}\quad\text{и}\quad t=\frac{x}{2i},\quad u=\frac{xe^{ix}}{2i}.$$

Искомые частные интегралы y и z будут

$$y=\frac{x\sin x}{2},\ z=\frac{-x\cos x}{2}.$$

251. Уравнения Euler'а, приводящиеся к уравнениям с постоянными коэффициентами. Они имеют вид:

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=\varphi(x),\tag{11}$$

и приводятся к уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимой переменной подстановкой

$$x=e^t,\quad dx=e^t\,dt.$$

В самом деле, принимая во внимание формулу $D\cdot e^{ax}u=e^{ax}(D+a)\,u$, находим последовательно (где D означает уже знак дифференцирования по t):

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}Dy;\ \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-t}D(e^{-t}Dy)=e^{-2t}D(D-1)\,y,\ldots,$$

т. е.

$$x\frac{dy}{dx}=Dy,\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2}=D(D-1)\,y,\ldots$$

Подставив эти значения в уравнение (11), преобразуем его в уравнение с постоянными коэффициентами, которые можно написать непосредственно.

Замечание. Более общее уравнение

$$(px+q)^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(px+q)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_ny=\varphi(x)$$

приводится к предыдущему, если принять $px+q$ за независимую переменную.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ.

1. Интегрировать уравнения (по способу n⁰ 249):

$$(D^2+D+1)\,y=\sin 2x;$$

$$(D^4+2D^2+1)\,y=x^2\cos ax;$$

$$(D^2+4)\,y=x\sin^2 x;$$

$$(D+1)^3\,y=e^{-x}+x^2;$$

$$(D+c)^n\,y=\cos ax.$$

2. Привести к квадратурам предыдущие уравнения, заменив в них предварительно правые части произвольной функцией $\varphi(x)$. Рассмотреть в частности случаи $\varphi(x)=x^{-1}$, $\operatorname{tg} x$ и т. д.

§ 6. Интегрирование рядами некоторых линейных уравнений второго порядка. Уравнения Bessel'я и Riccati.

252. Функция и уравнение Bessel'я. Пусть n есть какое угодно число (отличное от целого отрицательного). *Функция* I_n *Бесселя* определяется степенным рядом, сходящимся при всех значениях x

$$I_n=\sum^{\infty} a_p\,x^p\,, \tag{1}$$

где

$$a_p=\frac{1}{p!\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+p)}\,,$$

а при $p=0$, $0!=1$, $a_0=1$.

Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое мы и установим. Имеем:

$$\frac{d}{dx}\cdot x^n I_n=\sum\,(n+p)\,a_p\,x^{n+p-1}$$

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\,\frac{d}{dx}x^n I_n=\sum p\,(n+p)\,a_p\,x^{p-1}=\sum a_{p-1}\,x^{p-1}=I_n.$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение, которое после всех приведений можно написать в виде

$$x\,\frac{d^2 I_n}{dx^2}+(1+n)\,\frac{dI_n}{dx}-I_n=0.$$

Итак, I_n есть частный интеграл уравнения.

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2}+(1+n)\,\frac{dy}{dx}-y=0, \tag{2}$$

которое мы назовем *уравнением Bessel'я.* *)

---

*) Часто принимают за каноническую форму уравнения Bessel'я уравнения (11) n⁰ 258, а иногда и другие виды уравнений, которые здесь нам не встретятся.

253. Теорема. *Уравнение Bessel'я не изменяет своего вида при подстановке*

$$y = \frac{z}{x^n},$$

при этом только n меняет знак на обратный.

Мы имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^n}\frac{dz}{dx} - \frac{nz}{x^{n+1}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^n}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{2n}{x^{n+1}}\frac{dz}{dx} + \frac{n(n+1)z}{x^{n+1}};$$

подставляя эти выражения, приводим уравнение Bessel'я к виду

$$x\frac{d^2z}{dx^2} + (1-n)\frac{dz}{dx} - z = 0. \tag{3}$$

Замечания. I. Если x огрицательно, предыдущая подстановка может оказаться мнимой, но тогда подстановка

$$y = \frac{z}{(-x)^n}$$

будет вещественной и приводит к тому же уравнению (3), так как новое выражение z отличается от предыдущего лишь постоянным множителем. Таким образом всегда можно избежать введения мнимых величин.

II. Из предыдущей теоремы вытекает, что при изучении уравнения Bessel'я всегда можно предполагать n положительным или равным 0, так как случай отрицательного n приводится к положительному предыдущей подстановкой.

254. Интегрирование уравнения Bessel'я, когда n не целое число. В этом случае *общий интеграл выражается через функции Bessel'я.*

В самом деле, I_n есть один частный интеграл уравнения (2); I_{-n} есть частный интеграл уравнения (3); стало быть, $\frac{I_{-n}}{x^n}$ есть второй частный интеграл уравнения (2) и притом очевидно отличный от первого, так как содержит дробные степени x. Общий интеграл уравнения (2) будет поэтому

$$y = CI_n + C_1\frac{I_{-n}}{x^n}. \tag{4}$$

Если x отрицательно, то, чтобы избежать введения мнимых выражений, можно в знаменателе заменить x^n на $(-x)^n$.

Замечание. Если n есть целое, один из рядов I_n, I_{-n} теряет смысл. так как все коэффициенты, начиная с некоторого, обращаются в бесконечность. Но один из двух рядов, и, следовательно, один из двух частных интегралов всегда будет существовать. В этом случае, в силу общих теорем (n^0 231) интегрирование приводится к квадратурам.

Пусть n положительно; тогда существует частный интеграл I_n, и формула интегрирования будет (n^0 231, формула 8)

$$y = CI_n + C_1 I_n\int\frac{dx}{x^{n+1}I_n^2}.$$

Этот интеграл также можно выразить через степенные ряды, только менее простые, чем ряды Bessel'я. Мы их сейчас выведем.

255. Новые ряды, связанные с рядами Bessel'я. Дифференцируя I_n по n, образуем новый степенной ряд, сходящийся при всех значениях x и с рациональными (относительно n) коэффициентами. Мы обозначим его через I'_n и будем иметь:

$$I'_n = \sum_{p=1}^{\infty} a'_p x^p, \quad a'_p = -a_p \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{\lambda}, \tag{5}$$

где a_p определяется по формуле (1).

С другой стороны, рассмотрим степенной ряд, зависящий от двух параметров ε и n:

$$\varphi(x, n, \varepsilon) = 1 + \frac{x}{(n+1)(\varepsilon+1)} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} + \ldots,$$

который приводится к I_n при $\varepsilon = 0$.

Его можно дифференцировать по ε и при $\varepsilon = 0$ мы получаем степенной ряд с рациональными коэффициентами:

$$\varphi'_\varepsilon (x, n, 0) = \sum_{1}^{\infty} b_p x^p, \quad b_p = -a_p \sum_{1}^{p} \frac{1}{\lambda}. \tag{6}$$

Мы покажем, что, когда n целое, интегрирование уравнения Bessel'я можно выполнить с помощью рядов (1), (5) и (6).

256. Интегрирование уравнения Bessel'я, когда $n = 0$. В этом случае оба ряда I_n и I_{-n} совпадают. Мы, таким образом, имеем один частный интеграл I_0. Требуется получить еще один.

Для этого рассмотрим сперва уравнение, в котором n есть бесконечно малое положительное число ε. Мы имеем два различных интеграла I_ε $\frac{I_{-\varepsilon}}{x^\varepsilon}$. Но мы можем заменить второй интеграл линейной комбинацией

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[I_\varepsilon - \frac{I_{-\varepsilon}}{x^\varepsilon}\right] = \frac{x^\varepsilon I_\varepsilon - I_{-\varepsilon}}{x^\varepsilon \varepsilon}.$$

Когда ε стремится к 0, выражение это стремится к конечному пределу Y_0, который может быть получен по правилу L'Hospitale'я

$$Y_0 = \lim_{\varepsilon=0} \frac{D_\varepsilon [x^\varepsilon I_\varepsilon - I_{-\varepsilon}]}{D_\varepsilon [x^\varepsilon \varepsilon]} = I_0 \operatorname{Log} x + 2 I'_0. \tag{7}$$

Этот новый интеграл Y_0 выражается таким образом через функцию Bessel'я I_0 и через функцию I'_0, представляемую рядом (5) при $n = 0$. Он очевидно отличен от I_0, так как содержит логарифм. Общий интеграл будет

$$y = C I_0 + C_1 Y_0.$$

Замечание. **При этом доказательстве было допущено, что предел интеграла уравнения Bessel'я, когда n стремится к 0, есть интеграл этого** уравнения при $n=0$. Это утверждение есть следствие обобщенного предложения I n⁰ 191. В следующем n⁰ мы будем пользоваться аналогичным утверждением, основанным на том же предложении.

257. Интегрирование уравнения Bessel'я, когда n есть целое и >0. Если n есть число целое, отличное от 0, можно считать его положительным (n⁰ 253). В этом случае ряд I_{-n} теряет смысл, но частный интеграл I_n во всяком случае существует. Нужно найти второй частный интеграл.

Заменим сперва n на $n-\varepsilon$, где ε — бесконечно мало. Первые n членов разложения $I_{-n+\varepsilon}$ не содержат ε в знаменателе и будут поэтому конечными; сумму их мы обозначим через N_ε. Напротив, все следующие члены обращаются в бесконечность и содержат общий множитель, не зависящий от x, который мы обозначим через $\frac{A_\varepsilon}{\varepsilon}$, положив

$$A_\varepsilon=\frac{(-1)^{n-1}}{n!(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)\dots(n-1-\varepsilon)}.$$

Рассмотрим теперь произведение $\varepsilon I_{-n+\varepsilon}$; в силу определения (n⁰ 255) ряда $\varphi(x, n, \varepsilon)$ его можно представить в виде

$$\varepsilon I_{-n+\varepsilon}=\varepsilon N_\varepsilon+x^n A_\varepsilon \varphi(x, n, \varepsilon). \tag{8}$$

Поэтому, в пределе, когда ε стремится к 0 и φ стремится к I_n, мы получим:

$$\lim_{\varepsilon=0}[\varepsilon I_{n-\varepsilon}]=x^n A_0 I_n;\quad A_0=\frac{(-1)^{n-1}}{n!(n-1)!}. \tag{9}$$

Пока ε отлично от 0, $I_{n-\varepsilon}$ и $\frac{\varepsilon I_{-n+\varepsilon}}{x^{n-\varepsilon}}$ суть два независимых частных интеграла уравнения Bessel'я, но при $\varepsilon=0$, в силу уравнения (9), они перестают быть различными. Чтобы получить из них новый интеграл, рассмотрим их линейную комбинацию (которая тоже есть интеграл):

$$\frac{\varepsilon I_{-n+\varepsilon}-A_0 x^{n-\varepsilon} I_{n-\varepsilon}}{\varepsilon x^{n-\varepsilon}}$$

и найдем предел этого выражения при $\varepsilon=0$. Это будет неопределенное выражение вида $\frac{0}{0}$, и, в силу правила L'Hospital'я, его предел при $\varepsilon=0$ совпадает с пределом выражения

$$\frac{1}{x^n}D_\varepsilon[\varepsilon I_{-n+\varepsilon}-A_0 x^{n-\varepsilon} I_{n-\varepsilon}].$$

Но при $\varepsilon=0$ уравнение (8) дает

$$D_\varepsilon(\varepsilon I_{-n+\varepsilon})=N_0+x^n A_0 \varphi_\varepsilon'(x, n, 0)+x^n A_0' I_n,$$

так что искомый предел будет именно выражение

$$\frac{N^0}{x^n}+A_0\,[\varphi_\varepsilon'(x,n,0)+I_n'+I_n\,\mathrm{Log}\,x]+A_0'\,I_n.$$

Отбрасывая последний член, который множителем отличается от I_n, мы образуем наш второй частный интеграл Y_n, а именно

$$Y_n=\frac{N_0}{x^n}+A_0\,[\varphi_\varepsilon'(x,n,0)+I_n'+I_n\,\mathrm{Log}\,x]. \qquad (10)$$

Он выражается, следовательно, через три степенных ряда I_n, I_n' и $\varphi_\varepsilon'(x,n,0)$, из которых первый есть функция Bessel'я, а два других определяются формулами (5) и (6). Коэффициент A_0 есть постоянная (9), и, наконец, по определению N_ε, N_0 есть совокупность n первых членов разложения I_{-n}, так что

$$\frac{N_0}{x^n}=\frac{1}{x^n}+\frac{c_1}{x^{n-1}}+\ldots+\frac{c_{n-1}}{x},\quad c_p=\frac{(-1)^p}{p!(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}.$$

Общий интеграл уравнения Bessel'я в этом случае будет

$$y=CI_n+C_1Y_n.$$

258. Преобразование уравнения Bessel'я. Уравнение Riccati.

Введем новую независимую переменную по формуле $x=\varphi(t)$. Обозначая значками наверху производные по t, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'y''-x''y'}{x'^3};$$

уравнение Bessel'я

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2}+(1+n)\,\frac{dy}{dx}-y=0,$$

по умножении на x', превращается таким образом в

$$\frac{x}{x'}\,y''+\left(1+n-\frac{x}{x'}\,\frac{x''}{x'}\right)y'-x'y=0.$$

Приведем некоторые частные случаи этого общего преобразования:

1°. Каков бы ни был знак x, не вводя мнимых величин, можно сделать одну из двух постановок

$$x=\pm\frac{t^2}{4},$$

откуда

$$x'=\pm\frac{t}{2},\quad \frac{x}{x'}=\frac{t}{2},\quad \frac{x''}{x'}=\frac{1}{t}.$$

Преобразованное уравнение будет

$$y''+\frac{2n+1}{t}\,y'\mp y=0. \qquad (11)$$

2°. Сделаем теперь подстановку более общего вида

$$x = \alpha t^{\beta},$$

откуда

$$x' = \alpha\beta t^{\beta-1}, \qquad \frac{x''}{x'} = \frac{\beta - 1}{t}.$$

Преобразованное уравнение будет:

$$t^2 y'' + (\beta n + 1)\, ty' - \alpha\beta^2 t^{\beta} y = 0$$

и постоянные α, β и n можно выбрать так, чтобы отождествить это уравнение со всяким уравнением вида

$$t^2 y'' + at\, y' + bt^m y = 0,$$

если только b и m отличны от 0, так как в подстановке предполагается, что α и $\beta \neq 0$. Но если $m = 0$ или $b = 0$, это последнее уравнение превращается в уравнение Euler'а (n^0 251).

Уравнения этого последнего вида часто встречаются в приложениях. Все они интегрируются по формулам предыдущих нумеров, в которых x следует заменить соответствующим выражением вида αt^{β}.

3°. *Преобразование Euler'а уравнения Riccati* (частного вида) (n^0 203) получается как частный случай предыдущего преобразования.

Полагая $n = -\frac{1}{\beta}$ и заменяя α на $\frac{\alpha}{\beta^2}$, мы видим, что уравнение Bessel'я приводится к

$$t^2 y'' - \alpha t^{\beta} y = 0, \quad \text{подстановкой} \quad x = \frac{\alpha t^{\beta}}{\beta^2}.$$

Положим $\beta = m + 2$. Тогда *уравнение Bessel'я, в котором* $n = \frac{-1}{m+2}$, приводится *к преобразованному уравнению Riccati* (n^0 203)

$$y'' - \alpha t^m y = 0, \quad \text{подстановкой} \quad x = \frac{\alpha t^{m+2}}{(m+2)^2}. \tag{12}$$

Отсюда вытекают следующие заключения:

Если $m + 2$ не есть число, обратное целому, уравнение (12) интегрируется с помощью трансцендентных функций I_n, I_{-n}, в которых полагают $n = \frac{1}{m+2}$, и заменяют x предыдущим выражением в функции от t.

Если $m+2$ есть число, обратное целому, при интегрировании войдут более сложные ряды n^0 255.

Если $m + 2 = 0$, уравнение (12) приводится к уравнению Euler'а (n^0 251) и интегрируется без всякого труда.

В следующем n^0 мы увидим, что если $\frac{m}{m+2}$ есть число четное, уравнение (12) интегрируется в конечном виде.

259. Интегрирование уравнения Bessel'я в конечном виде *).

Уравнение Bessel'я интегрируется в конечном виде, если $n+\frac{1}{2}$ есть число целое (положительное, равное 0 *или отрицательное).*

Прежде всего, не нарушая общности, можем считать $n > 0$ (n⁰ 253). Если $n+\frac{1}{2}$ есть число целое, то это будет целое положительное число p.

Тогда одной из подстановок $x=\pm\frac{t^2}{4}$ уравнение Bessel'я приводится к одному из двух уравнений (11):

$$y''+\frac{2p}{t}y'\pm y=0. \tag{13}$$

Следует, стало быть, показать, что это уравнение интегрируется в конечном виде, когда p есть число целое и положительное.

Для этого заметим, что, рассматривая t как параметр, интегрируя по частям, имеем:

$$\int e^{tu}(u^2\pm 1)^{p-1}u\,du=\frac{e^{tu}}{2p}(u^2\pm 1)^p-\frac{t}{2p}\int e^{tu}(u^2\pm 1)^p\,du.$$

Из этого соотношения, преобразуя входящие туда неопределенные интегралы по символической формуле тома I (n⁰ 211),

$$\int e^{tu}E(u)\,du=E(D_t)\frac{e^{tu}}{t}+C,$$

где $E(u)$ — полином, мы получим решение уравнения Bessel'я. Эта формула применяется к обоим интегралам, если p — целое положительное число, так как тогда $u\,(u^2\pm 1)^{p-1}$ и $(u^2\pm 1)^p$ суть целые полиномы. Обозначая через D производные по t, мы получаем таким путем постоянное относительно u слагаемое:

$$D(D^2\pm 1)^{p-1}\frac{e^{tu}}{t}=\frac{e^{tu}}{2p}(u^2\pm 1)^p-\frac{t}{2p}(D^2\pm 1)^p\frac{e^{tu}}{t}.$$

Но слагаемое это приводится к 0, так как при положительном t обе части этого соотношения обращаются в 0 при $u=-\infty$. Стало быть, соотношение это есть тождество, которое имеет место при всех значениях t и u, вещественных или комплексных, так как производные от показательных функций вычисляются всегда по одним и тем же правилам.

Умножим предыдущее тождество на $\frac{2p}{t}$ и положим в обеих частях

$$y=(D^2\pm 1)^{p-1}\frac{e^{tu}}{t}; \tag{14}$$

оно примет вид

$$(D^2\pm 1)\,y+\frac{2p}{t}Dy=\frac{e^{tu}}{t}(u^2\pm 1)^p.$$

*) Автор изложил этот способ в Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 1905.

Левая часть здесь совпадает в точности с левой частью уравнения (13). Стало быть, так как $p > 0$, достаточно выбрать u так, чтобы $u^2 \pm 1$ обратилось в 0, для того чтобы выражение (14) дало решение уравнения (13). Рассмотрим эти решения при обоих выборах двойного знака.

Первый случай. Уравнение имеет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2p}{t}\frac{dy}{dt} - y = 0.$$

Следует обратить в 0 выражение $(u^2 - 1)$, что дает для u два значения $+1$ и -1, которым соответствуют два различных интеграла

$$(D^2 - 1)^{p-1}\frac{e^t}{t}, \quad (D^2 - 1)^{p-1}\frac{e^{-t}}{t},$$

или, применяя формулу (10) n° 249:

$$e^t(D+2)^{p-1}D^{p-1}\frac{1}{t}, \quad e^{-t}(D-2)^{p-1}D^{p-1}\frac{1}{t}.$$

Умножая каждое из этих выражений на соответствующий постоянный множитель, получаем два частных интеграла в более удобной форме:

$$y_1 = e^t\left(1 + \frac{D}{2}\right)^{p-1}\frac{1}{t^p}; \quad y_2 = e^{-t}\left(1 - \frac{D}{2}\right)^{p-1}\frac{1}{t^p},$$

которые вычисляются просто. Общий интеграл будет

$$y = Cy_1 + C_1y_2.$$

Второй случай. Уравнение имеет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2p}{t}\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Тогда следует обратить в 0 выражение $(u^2 + 1)$. Полагая $u = i$, получаем комплексное решение

$$y = (D^2 + 1)^{p-1}\frac{e^{it}}{t},$$

оторое само разлагается на сумму двух различных вещественных решений:

$$y_1 = (D^2 + 1)^{p-1}\frac{\cos t}{t}; \quad y_2 = (D^2 + 1)^{p-1}\frac{\sin t}{t},$$

которые могут служить для образования общего интеграла.

Если мы желаем провести все вычисления, то будем поступать как и в первом случае. Представив комплексный интеграл в виде

$$y = e^{it}(D + 2i)^{p-1}D^{p-1}\frac{1}{t}$$

и отбрасывая постоянный множитель, получаем новый комплексный интеграл

$$y = e^{it}\left(1 + \frac{D}{2i}\right)^{p-1}\frac{1}{t^p}.$$

Этот же последний непосредственно выражается в явной форме, и мы получим из него два различных вещественных интеграла, отделив вещественную и мнимую части. Выписывать его мы не будем. Если бы мы не заботились о том, чтобы получить интеграл непременно в вещественном виде, мы могли бы непосредственно получить второй комплексный интеграл, отличный от предыдущего, заменяя **в нем** i на $-i$.

Случай интегрируемости уравнения Riccati. Уравнение $y'' - a t^m y = 0$ приводится (n^0 258) к уравнению Bessel'я в случае $n = \frac{-1}{m+2}$.

Для того чтобы $n + \frac{1}{2}$ было числом целым, надо чтобы $-\frac{1}{m+2} + \frac{1}{2}$ было числом целым $\left(\text{или } \frac{m}{m+2} \text{ — числом четным.}\right)$

Итак, для того чтобы это уравнение (к которому Euler преобразовал уравнение Riccati) могло привестись к только что проинтегрированным уравнениям, достаточно, чтобы $\frac{m}{m+2}$ было числом четным. Условие интегрируемости в конечном виде непреобразованного уравнения Riccati частного вида (n^0 203) $y' + ay^2 = bx^m$ будет то же самое.

§ 7. Интегрирование или приведение дифференциальных уравнений с помощью частных приемов.

260. Уравнения, не содержащие y. Когда неизвестная функция y не входит в уравнение, *его порядок понижается на единицу*, если положить $p = \frac{dy}{dx}$ и принять p за новую неизвестную.

В самом деле, данное уравнение

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{1}$$

таким путем приводится к

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1} p}{dx^{n-1}}\right) = 0. \tag{2}$$

Интегрирование уравнения (2) приводит к соотношению

$$F(p, x) = 0. \tag{3}$$

После этого интегрирование данного уравнения можно закончить следующими двумя способами:

1°. Уравнение (3) решаем относительно p, что дает $p = \varphi(x)$ и общий интеграл y уравнения (1) выводится тогда квадратурой

$$y = \int p\, dx = \int \varphi(x)\, dx.$$

2°. Если легче разрешить уравнение (3) относительно x, находим $x = \psi(p)$. Затем находим также и выражение y в функции от p квадратурой:

$$y = \int p\,dx = \int p\psi'(p)\,dp = p\psi(p) - \int \psi(p)\,dp.$$

Таким образом получаем x и y в функции от p, что дает *параметрическое представление* интеграла. Достаточно исключить отсюда p, чтобы получить обычное представление.

Пример. Уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X\frac{dy}{dx} = X_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

(где X и X_1 зависят только от x) приводится к уравнению Bernoulli (n° 202)

$$\frac{dp}{dx} + Xp = X_1p^2.$$

Следовательно p, а затем и y получаются квадратурой в функции от x.

В общем случае, *если функция y и ее первые $(k-1)$ производные не входят в уравнение, порядок его понижается на k единиц*, если положить $\frac{d^ky}{dx^k} = u$ и принять u за новую неизвестную.

В самом деле, уравнение порядка n приводится к уравнению порядка $(n-k)$:

$$f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots \frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\right) = 0.$$

Пусть интеграл его есть

$$F(u, x) = 0. \tag{4}$$

Как и выше, интегрирование можно будет произвести двумя способами.

1°. Решаем уравнение (4) относительно u, что дает $u = \varphi(x)$, и выводим общий интеграл y отсюда с помощью k квадратур

$$y = \int\int \ldots \int \varphi(x)\,dx^k. \tag{5}$$

2°. Решаем уравнение (4) относительно x, что дает $x = \psi(u)$, и получаем y в функции от u с помощью k квадратур:

$$y = \int\int \ldots \int u\,dx^k = \int\int \ldots \int u\,[\psi'(u)\,du]^k, \tag{6}$$

где множитель $\psi'(u)\,du$ вводится *по одному разу* при каждом интегрировании.

Таким путем получаем *параметрическое представление* интеграла.

Последовательные квадратуры формулы (5) можно привести к одной с помощью формулы (5) n° 247. Предыдущая формула (5) заменится тогда следующей:

$$y = P_{k-1} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi(t)\,dt,$$

где P_{k-1} — произвольный полином от x степени $< k$.

Примеры. Нижеследующие уравнения интегрируются в конечном виде:

$$(1-x^2)y'' - xy' = 2; \quad 1 + y'^2 + xy'y'' = ay''\sqrt{1+y'^2}.$$

Полагаем $y' = p$. Тогда первое уравнение будет линейным относительно p; второе — приводится к типу полного дифференциала (n° 204), если разделить его на $\sqrt{1+p^2}$.

261. Частный случай. Уравнения, содержащие только две последовательные производные. *Такие уравнения интегрируются в квадратурах.*

В самом деле, уравнения эти имеют вид

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right);$$

стало быть, подстановкой $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = u$, они приводятся к уравнению первого порядка с отделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx} = f(u),$$

откуда

$$x = \int \frac{du}{f(u)} = \psi(u).$$

y выводится отсюда с помощью $(n-1)$ квадратур по одному из двух способов предыдущего n°. Способ 2° предпочтительнее, так как мы знаем уже соотношения $x = \psi(u)$ и выражение y в функции от u дается непосредственно формулой (6). Для применения способа 1° необходимо сперва получить $u = \varphi(x)$ из соотношения $x = \psi(u)$, а затем y будет дано в функции от x по формуле (5).

Примеры. Приведем примеры уравнений, в которых квадратуры легко выполняются в конечном виде:

$$ay'' = (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}, \quad ay'' = \sqrt{1+y'^2}; \quad y^{\mathrm{IV}} = \sqrt{y''}; \quad ay'' = y'(1+y'^2).$$

Первые два уравнения суть уравнения круга и цепной линии.

262. Уравнения, не содержащие x. Когда в уравнении отсутствует независимая переменная x, оно имеет вид

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \tag{7}$$

Его порядок можно понизить на единицу.

В самом деле, этот случай приводится к тому, когда уравнение не содержит неизвестной функции (n^0 260), если рассматривать x как функцию от y. Но для этого нужно заменить производные y по x их выражениями через производные x по y. Обозначая их значками наверху, по формулам (2) n^0 177 тома I, в которых нужно для этого случая положить $y' = 1$, $y'' = y''' = 0$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x''}{x'^3}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \ \ldots \tag{8}$$

Подставив эти выражения в данное уравнение и приняв x' за новую неизвестную, понизим порядок уравнения на единицу. Но на практике этого преобразования делать не нужно. Удобнее принять за новую неизвестную $p = \frac{dy}{dx}$ и рассматривать ее как функцию от y. Это дает уравнение между y и p, порядка на единицу ниже, так как производные y по x выражаются через производные p по y порядка на единицу ниже. Формулы преобразования будут здесь

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right), \ldots$$

Таким образом, данное уравнение, порядка n, приводится к уравнению порядка $(n-1)$ между y и p. Пусть это уравнение будет

$$f\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Допустим, что интегрировать его мы умеем, и интеграл есть

$$F(y, p) = 0. \tag{9}$$

Интегрирование данного уравнения можно произвести двумя способами:

1^0. Решаем уравнение (9) относительно p, что дает $p = \varphi(y)$, и выражение для x получается квадратурой:

$$x = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{dy}{\varphi(y)}.$$

Это и дает общий интеграл данного уравнения.

2^0. Если проще разрешить уравнение (9) относительно y, находим $y = \psi(p)$, после чего x получается в функции от p также квадратурой

$$x = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{\psi'(p)\,dp}{p} = \frac{\psi(p)}{p} + \int \frac{\psi(p)\,dp}{p^2}.$$

Таким образом x и y выражаются в функции от p, что дает *параметрическое представление* интеграла.

Для примера рассмотрим важное уравнен

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(y). \tag{10}$$

Предыдущее преобразование дает:

$$p\frac{dp}{dy}=f(y),$$

откуда

$$p^2=2\int f(y)\,dy,\quad x=\int\left[2\int f(y)\,dy\right]^{-\frac{1}{2}}dy.$$

Это и есть общий интеграл уравнения (10), который, как видим содержит две квадратуры.

Примеры. Два уравнения:

$$y'''+Yy'^2=Y_1y';\quad y''+Yy'^2=Y_1,$$

в которых Y и Y_1 зависят только от y, приводятся соответственно к уравнению, линейному относительно p или p^2.

$$\frac{dp}{dy}+Yp=Y_1;\quad \frac{dp^2}{dy}+2Yp^2=2Y_1.$$

Стало быть, p, а затем и x выражаются с помощью квадратур в функции от y.

Для двух нижеследующих уравнений (второго типа) квадратуры эти выполняются в конечном виде:

$$2(2a-y)y''=1+y'^2;$$
$$yy''-y'^2=y^2\operatorname{Log}y.$$

Первое приводится к уравнению с отделенными переменными

$$\frac{2p\,dp}{1+p^2}=\frac{dy}{2a-y}.$$

Второе интегрируется проще, если представить его в виде

$$(D^2-1)\operatorname{Log}y=0,$$

откуда

$$\operatorname{Log}y=Ce^x+C_1e^{-x}.$$

263. Уравнения, содержащие только две производные, порядки которых отличаются на две единицы. *Они интегрируются в квадратурах.* Это новый частный случай способа n⁰ 260. Уравнение

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$$

подстановкой

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=u$$

приводится к уравнению

$$\frac{d^2u}{dx^2}=f(u),$$

которое было проинтегрировано в предыдущем n⁰ и имеет интеграл

$$x=\int[2\int f(u)\,du]^{-\frac{1}{2}}\,du=\psi(u).$$

Выражение для y выводим отсюда с помощью $(n-2)$ новых квадратур, применяя один из двух способов n⁰ 260. По формуле (6) (способ 2⁰) получаем y непосредственно в функции от u. Для того же, чтобы получить y в функции от x по формуле (5) (способ 1⁰), нужно предварительно из уравнения $x=\psi(u)$ найти $u=\varphi(x)$.

Примеры. Этим способом (или способом n⁰ 251) можно проинтегрировать следующие два уравнения, для которых квадратуры выполняются в конечном виде:

$$x^2y'''=\lambda y',\quad x^2y^{\text{IV}}=\lambda y''.$$

264. Уравнения в точных производных. Рассмотрим уравнение

$$f(x,y,y',\ldots y^{n})=0.$$

Если его левая часть есть полная производная некоторой функции $F(x,y,y',\ldots y^{n-1})$ при произвольном y, то тогда его называют *уравнением в точных производных* или — коротко — *точным уравнением*. Первый интеграл такого уравнения можно написать непосредственно

$$F(x,y,y',\ldots,y^{n-1})=C.$$

Ниже мы приведем правило, по которому можно узнать, будет ли данное уравнение принадлежать указанному типу, и найти функцию F, когда она существует; но правило это имеет довольно ограниченное применение на практике.

В некоторых простых случаях уравнение можно сделать точным, умножив его на множитель, который легко можно подобрать, и понизить таким образом порядок уравнения на единицу. Общего правила дать здесь нельзя, так как этот способ зависит от ловкости вычисляющего. Рассмотрим пример:

Возьмем уравнение, разрешенное (другим путем) Liouville'ем,

$$y''+Xy'=Yy'^2,$$

где X зависит только от x, Y — только от y. По разделении на y' все члены становятся полным производным, и мы имеем:

$$\frac{y''}{y'}=Yy'-X,$$

откуда, интегрируя, находим

$$\operatorname{Log} y'=\int Y\,dy-\int X\,dx \text{ и } y'=e^{\int Y\,dy-\int X\,dx}.$$

Переменные здесь разделяются, и общий интеграл находим в виде

$$\int e^{-\int Y\,dy}\,dy = \int e^{-\int X\,dx}\,dx.$$

Заметим, что уравнение

$$y'' + Py' = Qy'^2$$

интегрируется в квадратурах в следующих трех случаях: 1) если P и Q зависят только от x (n^0 260); 2) если P и Q зависят только от y (n^0 262); 3) если P зависят только от x, Q только от y (показано сейчас).

Общее правило для интегрирования точных производных. Пусть $f(x, y, y', \ldots, y^n)$ есть данная функция. Для того чтобы она была полной производной функции $F(x, y, y', \ldots y^{n-1})$, необходимо, чтобы существовало тождество

$$f(x, y, y', \ldots, y^n) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \ldots \frac{\partial F}{\partial y^{n-1}}y^n.$$

Отсюда выводим следующее правило, для того чтобы судить, существует ли функция F, и в то же время определить эту функцию. Необходимо прежде всего, чтобы высшая производная y^n входила в уравнение в первой степени. Затем коэффициент при y^n интегрируем *частным образом* по y^{n-1}, т. е. как будто бы единственною переменной была y^{n-1}. Пусть u_1 есть полученный таким путем интеграл; $f - \frac{du_1}{dx}$ не содержит больше y^n; пусть высшая производная, которая туда входит, есть y^{n-p} ($p \geqslant 1$). Так как разность эта должна быть полной производной одновременно с f, необходимо, чтобы y^{n-p} входила туда в первой степени. Интегрируем тогда коэффициент при y^{n-p} частным образом по y^{n-p-1}, что даст интеграл u_2. Разность $f - \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx}$ будет содержать уже только члены порядка $< n-p$ и так же должна быть точной производной. Продолжая таким же образом, если f есть полная производная, мы придем в конце концов к разности

$$f - \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx} - \ldots - \frac{du_2}{dx} = X,$$

которая более не содержит производных y. Для того, чтобы она была точной производной, необходимо, чтобы она содержала только x. Если это условие выполнено, имеем

$$F = u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \int X\,dx.$$

Если же это условие не выполнено или если при предыдущих вычислениях мы пришли бы к разности, в которую высшая производная входит в степени выше первой, способ этот применяться не может, и данная функция не есть полная производная.

Пусть например

$$f = y + 3xy' + 2y'^3 + (x^2 + 2y^2 y')y''.$$

Находим последовательно:

$$u_1 = x^2 y' + y^2 y'^2; \quad f - \frac{du_1}{dx} = y + xy';$$

$$u_2 = xy: \quad f - \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx} = X = 0;$$

следовательно

$$F = x^2 y' + y^2 y'^2 + xy + C.$$

265. Однородные уравнения. Существует несколько видов однородных уравнений; мы изучим различные случаи, не исключающие, впрочем, друг друга.

Первый случай. *Уравнение однородно по отношению к функции y и ее последовательным производным* (или по отношению к y, dy, $d^2y, \ldots$), т. е. уравнение умножается на некоторую степень λ, когда мы, оставляя x без изменения, заменяем в нем y на λy, где λ — постоянная. *Порядок такого уравнения можно понизить на единицу.*

В самом деле, сделаем подстановку

$$y = e^z,$$

откуда

$$y' = e^z z', \; y'' = e^z (z'' + z'^2), \ldots$$

Подставив эти выражения в уравнение, в силу однородности, сможем вынести как общий множитель e^z в некоторой степени. По сокращении на этот общий множитель, функция z пропадет из уравнения, и порядок уравнения понизится на единицу, если принять z' за новую неизвестную (nº 260).

Замечание. Способ этот можно применять к линейному уравнению без свободного члена, но, вообще говоря, без особой выгоды, так как при этом пропадает свойство линейности.

Так, этой подстановкой уравнение второго порядка

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

приводится к уравнению Riccati первого порядка относительно z':

$$\frac{dz'}{dx} + (z'^2 + Pz' + Q) = 0,$$

как это мы уже заметили и раньше (nº 203).

Примеры. Применить этот способ к уравнениям

$$ayy'' + by'^2 = yy'(c^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$xyy'' - xy'^2 = yy' + bxy'^2(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Уравнения относительно z' суть уравнения Bernoulli и интегралы вычисляются в конечном виде. Первое уравнение однако интегрируется проще, если заметить, что по разделении на yy' все его члены становятся полными производными (n^0 264).

Второй случай. *Уравнение однородно относительно x и dx*, т. е. умножается на некоторую степень λ, когда x заменяем на λx, оставляя без изменения y. *Порядок и здесь можно понизить на единицу.*

Этот случай приводится к предыдущему, если рассматривать y как независимую переменную, а x как неизвестную функцию. Нужно будет заменить производные y по x их выражениями через производные x по y (n^0 262), после чего мы придем к предыдущему случаю.

На практике часто предпочтительнее поступать иначе. Вводим новую независимую переменную подстановкой $x = e^t$.

Пользуясь формулой $De^{-ax} z = e^{-ax} (D - a) z$, последовательно найдем (если D обозначает уже производную по t):

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t} Dy; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-t} D(e^{-t} Dy) = e^{-2t} D(D-1)y, \ldots$$

и вообще

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{-nt} D(D-1)\ldots(D-n+1)y.$$

Таким образом показатель у e^t в выражении $\frac{d^ny}{dx^n}$ равен как раз степени однородности $(-n)$ этой производной. Следовательно, если подставим в уравнение эти выражения для x, $\frac{dy}{dx}, \ldots$ то e^t войдет общим множителем в степени, равной степени однородности. По сокращении на этот общий множитель, независимая переменная t исключится из уравнения, и порядок его можно будет понизить на единицу (n^0 262).

Следует заметить, что *на практике*, при подстановке в данное уравнение выражений для $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$, приведенных выше, полезно сразу отбрасывать показательные множители e^{-t}, $e^{-2t}, \ldots$ которые все равно пропадают в окончательном результате; вместе с тем x можно заменить просто единицей.

Пример. Однородное уравнение (степени 0):

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \left[mx^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ny^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Полагая $x = e^t$, имеем:

$$D(D-1)y = (m Dy^2 + ny^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Приняв $Dy = p$ за новую неизвестную, имеем: $D^2y = p\dfrac{dp}{dy}$, откуда

$$p\frac{dp}{dy} - p = (mp^2 + ny^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Это есть однородное уравнение первого порядка, которое интегрируется в квадратурах.

Третий случай. *Уравнение однородно относительно x, y и дифференциалов dx, dy, $d^2y, \ldots$,* т. е. умножается на некоторую степень λ, когда заменяем одновременно x на λx, y — на λy, где λ — постоянная. И в этом случае *порядок можно понизить на единицу.*

Этот случай приводится к предыдущему подстановкой $y = ux$ причем u рассматривается как новая неизвестная.

В самом деле, если заменим x на λx, оставив без изменения u, то одновременно с этим и y заменится на λy и уравнение между u и x умножится на некоторую степень λ, т. е. будет однородно относительно x и dx.

На практике вычисления производят следующим образом: заменяем сразу функцию и независимую переменную по формулам

$$x = e^t; \quad y = e^t u,$$

где t — новая независимая переменная. Тогда, в силу формулы предыдущего n⁰, а затем по формуле (10) n⁰ 249, имеем:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{-nt} D(D-1)\ldots(D-n+1)e^t u =$$

$$= e^{-(n-1)t} (D+1) D \ldots (D-n+2) u.$$

Подставив эти выражения в данное уравнение, получим уравнение между t и u, в котором отсутствует независимая переменная t, и порядок уравнения, следовательно, можно понизить на единицу.

Примеры. Два нижеследующие уравнения:

$$mx^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2, \quad x^4 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^3$$

приводятся к уравнениям Bernoulli относительно Du и имеют соответственно интегралы

$$C_1 + C_2 x = xe^{-\frac{y}{mx}}; \quad y = x\left(C - \arcsin\frac{C_1}{x}\right).$$

Четвертый случай. *Уравнение однородно относительно x, dx (которые считаются первой степени)* и y, dy, $d^2y, \ldots$ (которые считаются n-й степени), т. е. уравнение умножается на некоторую степень λ, когда x заменяем на λx, y на $\lambda^n y$. Этот случай приводится к предыдущему, полагая $y = z^n$. Но можно обойтись и без подстановки и непосредственно заменить функцию и независимую переменную по формулам:

$$x = e^t, \quad y = ue^{nt}.$$

Если D означает дифференцирование по t, имеем вообще, применяя опять формулу $(10)^0$ n 249:

$$\frac{d^p y}{dx^p} = e^{-pt} D(D-1)\ldots(D-p+1)\, ue^{nt} =$$

$$= e^{(n-p)t}(D+n)(D+n-1)\ldots(D+n-p+1)\, u.$$

Показатель e^t здесь равен степени однородности $\frac{d^p y}{dx^p}$, а потому, если подставим эти выражения для x, y, $\frac{dy}{dx}, \ldots$ в уравнение, то та же показательная функция будет общим множителем, и по сокращении на него переменная t пропадет из уравнения.

Пример. Уравнение:

$$x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} = (x^3 + 2xy)\frac{dy}{dx} - 4y^2.$$

(однородное 4-й степени, если y считать 2-й степени). Подстановками

$$x = e^t, \; y = ue^{2t}$$

находим уравнение относительно u:

$$D^2 u + 2(1-u)\, Du = 0,$$

левая часть которого есть полная производная, что дает первый интеграл.

$$Du - (1-u)^2 = C.$$

Затем переменные разделяются, и интегрирование завершается без труда.

266. Уравнение второго порядка, не содержащее $\frac{dy}{dx}$ (уравнение *Jacobi*). Jacobi показал, что если известен первый интеграл уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y), \tag{11}$$

интегрирование завершается в квадратурах. В самом деле, пусть известный первый интеграл (содержащий произвольную постоянную C) есть

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, C). \tag{12}$$

Мы утверждаем, что $\frac{\partial \varphi}{\partial C}$ *есть интегрирующий множитель* (n^0 204) *уравнения*

$$dy - \varphi\, dx = 0,$$

так что общий интеграл уравнения (11) *будет*

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial C}(dy - \varphi\, dx) = C_1.$$

Для доказательства этого предложения заметим, что всякий интеграл уравнения (11), удовлетворяющий уравнению (12), удовлетворяет также и обоим уравнениям.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx},\quad f(x, y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi(x, y, C),$$

которые получаем, дифференцируя уравнение (12) и исключая производные y. Но второе уравнение, куда входят только x, y и C, должно быть *тождеством*, так как оно удовлетворяется при произвольных значениях x, y, y' (а потому и C, которое можно считать произвольным, если y' произвольно). Стало быть, можно дифференцировать его частным образом по C, что дает новое тождество:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial C}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial C}\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial C}=0,\text{ т. е. }\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right).$$

Это и есть как раз условие, выражающее, что $\frac{\partial\varphi}{\partial C}(dy-\varphi\,dx)$ есть полный дифференциал.

Пример. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y\,\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

зная его первый интеграл

$$\frac{dy}{dx}=y\operatorname{tg}x+C\cos x.$$

Здесь $\frac{\partial\varphi}{\partial C}=\cos x$, а потому общий интеграл будет

$$\int\cos x\,[dy-(y\operatorname{tg}x+C\cos x)\,dx]=y\cos x-\frac{C}{2}(x+\sin x\cos x)=C_1.$$

Замечание. Более общее уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+\varphi(x, y)=0$$

также интегрируется в квадратурах, когда известен его первый интеграл. В самом деле, с помощью одной квадратуры можно уничтожить член, содержащий первую производную. Для этого достаточно ввести новую неизвестную функцию z, по формуле

$$y=ze^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}$$

(уже рассмотренной выше, n° 162, II).

Уравнение между z и x будет уравнением Jacobi, первый интеграл которого известен.

§ 8. Геометрические приложения.

267. Задача. *Найти плоскую кривую, радиус кривизны которой R есть данная функция от абсциссы.*

Если X — величина, обратная этой функции, уравнение кривой будет

$$\frac{1}{R}=X. \tag{1}$$

Но $\frac{1}{R}$ есть полная производная по x, так как

$$\frac{1}{R}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{y''}{y'^3}}{\left(1+\frac{1}{y'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{y'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

а потому, интегрируя (1), находим

$$\left(1+\frac{1}{y'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\int X\,dx,$$

откуда

$$y'=\frac{\int X\,dx}{\sqrt{1-\left(\int X\,dx\right)^2}}.$$

Итак, уравнение искомой кривой будет

$$y=\int dx\frac{\int X\,dx}{\sqrt{1-\left(\int X\,dx\right)^2}}. \tag{3}$$

Радикал может иметь здесь двойной знак, который соответствует двум направлениям вогнутости кривой.

268. Частный случай (упругая кривая). *Найти кривую, радиус кривизны которой обратно пропорционален абсциссе.*

Пусть $\frac{a^2}{2}$ есть постоянный коэффициент пропорциональности, так что

$$R=\frac{a^2}{2x};\quad \frac{1}{R}=\frac{2x}{a^2}. \tag{4}$$

В уравнении (3) нужно положить $X=\frac{2x}{a^2}$. Введя постоянные интегрирования C и C_1, находим:

$$\int X\,dx=\frac{x^2+C}{a^2};$$

$$y-C_1=\int\frac{(x^2+C)\,dx}{\sqrt{a^4-(x^2+C)^2}}. \tag{5}$$

Это и есть уравнение искомой кривой; оно содержит интеграл, который не может быть выражен в конечном виде и зависит от эллиптических функций. Кривая называется *упругой кривой*, так как представляет фигуру равновесия упругого стержня, один конец которого закреплен, а другой загружен какой-нибудь тяжестью.

269. Задача. *Найти кривые, радиус кривизны которых пропорционален нормали.*

Пусть a есть коэффициент пропорциональности ($a > 0$). Имеем (т. I, n° 311):

$$\frac{N}{R} = -\frac{yy''}{1+y'^2} = \pm a.$$

Верхний знак нужно взять здесь, когда R и N расположены по одну сторону кривой, нижний — в противоположном случае.

Уравнение это не содержит x (n° 262). Положив $y' = p$, получим:

$$yp\frac{dp}{dy} = \mp a(1+p^2),$$

откуда

$$\frac{2p\,dp}{1+p^2} = \pm\frac{2a\,dy}{y},$$

или, интегрируя:

$$1+p^2 = Cy^{\mp 2a}; \quad p = \sqrt{Cy^{\mp 2a} - 1}.$$

Выражение для x получим отсюда квадратурой:

$$x - C_1 = \int\frac{dy}{p} = \int\frac{dy}{\sqrt{Cy^{\mp 2a} - 1}}.$$

Но квадратура эта берется в конечном виде лишь в некоторых частных случаях, например при $a = 1$. Исследуем этот случай.

1°. Если R и N расположены по одну сторону от кривой, нужно взять верхний знак: искомая кривая будет *кругом*

$$x - C_1 = \int\frac{y\,dy}{\sqrt{C-y^2}} = -\sqrt{C-y^2},$$

откуда

$$(x-C_1)^2 + y^2 = C.$$

2°. Если R и N расположены по разные стороны от кривой, получаем *цепную линию*. В самом деле, взяв нижний знак и заменяя $C = \frac{1}{\alpha^2}$, получим:

$$x - C_1 = \int\frac{\alpha\,dy}{\sqrt{y^2-\alpha^2}} = \alpha\,\mathrm{Log}\frac{y+\sqrt{y^2-\alpha^2}}{\alpha}$$

$$y = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x-C_1}{\alpha}} + e^{-\frac{x-C_1}{\alpha}}\right).$$

270. Задача. *Найти кривую, радиус кривизны которой R пропорционален радиусу-вектору r.*

Введем полярные координаты r и θ. Дифференциальное уравнение кривой $R = nr$, в силу известного выражения R (т. I, n⁰ 316) напишется в виде

$$\mp (r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}} = nr(r^2 + 2r'^2 - rr''). \tag{6}$$

(где производные берутся по θ).

Знак $+$ или $-$ нужно взять, смотря по тому, будет ли кривая вогнута или выпукла по направлению к полюсу, или смотря по тому, будут ли R и r расположены по одну или по разные стороны от кривой. *)

Уравнение (6) — однородно относительно r и его производных. Подстановкой $r = e^z$ оно преобразуется в следующие:

$$\mp(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}} = n(1 + z'^2 - z''),$$

откуда

$$\frac{z''}{1 + z'^2} = 1 \pm \frac{1}{n}\sqrt{1 + z'^2}.$$

Этому уравнению можно удовлетворить (взяв нижний знак) постоянным значением z', если только $n > 1$. Для этого надо, чтобы правая часть обращалась в 0, что дает

$$z' = \sqrt{n^2 - 1},$$

откуда

$$z = \theta\sqrt{n^2 - 1} + \text{const}.$$

Соответствующая кривая есть логарифмическая спираль $r = Ce^{\theta\sqrt{n^2-1}}$ и представляет *частное решение* задачи, так как вид уравнения (6) исключает возможность особенного решения (n⁰ 192, 3).

Будем теперь искать кривые, у которых z' изменяется. Примем за новую независимую переменную угол α, определяемый по формулам

$$z' = \operatorname{tg}\alpha; \qquad \pm\sqrt{1 + z'^2} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

так что промежуток, в котором изменяется α, зависит от выбора двойного знака и обратно. Уравнение принимает вид:

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{1}{n\cos\alpha},$$

откуда

$$d\theta = \frac{n\cos\alpha\, d\alpha}{1 + n\cos\alpha}.$$

*) В самом деле, знак $+$ или $-$ нужно брать, смотря по тому, будет ли $r^2 + 2r'^2 - rr'' > $ или < 0; стало быть, в силу формулы (20) n⁰ 316, т. I, смотря по тому, будет ли производная α' наклонения α отрезка R к полярной оси $>$ или < 0; или же, наконец, — смотря по тому, изменяются ли α и θ в одном и том же, или в разных направлениях, т. е. вращаются ли R и r в одном и том же или в противоположных направлениях, когда мы описываем кривую, что и дает высказанное выше правило.

Получаем тогда

$$z = \int \operatorname{tg} \alpha \, d\theta = \int \frac{n \sin \alpha \, d\alpha}{1 + n \cos \alpha} = -\operatorname{Log}(1 + n \cos \alpha) + \text{const}.$$

Таким образом получаем *параметрическое представление* искомой кривой

$$r = e^z = \frac{C}{1 + n \cos \alpha}; \quad \theta = \int \frac{n \cos \alpha \, d\alpha}{1 + n \cos \alpha} = \alpha - \int \frac{d\alpha}{1 + n \cos \alpha}. \qquad (7)$$

Квадратура выполняется здесь без труда.

Доведем решение до конца только в случае $n = 1$, т. е. когда *радиус кривизны равен радиус-вектору*.

Решение, соответствующее логарифмической спирали, есть окружность $r = C$. Изучим решение, определяемое формулами (7).

Направим полярную ось так, чтобы θ обращалось в 0 вместе с α, и пусть r_0 есть значение r при $\theta = \alpha = 0$. Уравнения (7) приводятся к простому виду

$$r = \frac{r_0}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \theta = \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \qquad (8)$$

Это и будут уравнения искомой кривой.

Непосредственно видно, что при увеличении α на 2π приходим к той же точке плоскости; таким образом получим всю кривую, если будем изменять α только в промежутке $(-\pi, +\pi)$. Кроме того, часть кривой, соответствующая промежутку $(-\pi, 0)$, симметрична (по отношению к полярной оси) с частью, описанной в промежутке $(0, \pi)$.

Итак, будем изменять α от 0 до π. Мы видим, что кривая есть спираль, состоящая из бесчисленного множества витков, разворачивающихся до бесконечности. Эта кривая удовлетворяет уравнению (6) при $n = 1$. Но, как было уже сказано выше, в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, где $\cos \alpha > 0$ и кривая выпукла по направлению к полюсу, нужно взять верхний знак; в промежутке же $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, где $\cos \alpha < 0$, кривая вогнута по направлению к полюсу — нужно взять нижний знак. Стало быть, около полюса не заворачивается лишь первый виток.

271. Натуральное уравнение плоской кривой. *Натуральным (или внутренним) уравнением* плоской кривой называется соотношение, связывающее радиус кривизны с длиной дуги. Мы сейчас уясним смысл этого наименования.

Пусть координаты прямоугольны и

$$\frac{1}{R} = f(s) \qquad (9)$$

есть данное соотношение. Это есть дифференциальное уравнение второго порядка.

Пусть φ есть наклонение касательной к оси x-ов; имеем известные формулы

$$\frac{dx}{ds}=\cos\varphi;\quad \frac{dy}{ds}=\sin\varphi;\quad \frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{R}. \tag{10}$$

Для большей общности в этих формулах нужно считать, что R может иметь оба знака. В самом деле, если считать ds положительным, $d\varphi$ будет положительно или отрицательно, смотря по тому, в каком направлении поворачивается касательная. Стало быть, когда мы проходим через точку перегиба, R меняет знак.

Из последнего уравнения (10) выводим

$$\varphi=\varphi_0+\int_0^s\frac{ds}{R}=\varphi_0+\int_0^s f(s)\,ds=\varphi_0+F(s),$$

понимая под φ_0 значение φ в начале отсчета дуг.

Затем, интегрируя два первых уравнения (10), находим:

$$x=x_0+\int_0^s\cos(\varphi_0+F)\,ds;\quad y=y_0+\int_0^s\sin(\varphi_0+F)\,ds.$$

Это есть параметрическое представление искомой кривой.

Если перенесем начало координат в начало отсчета дуг, x_0 и y_0 обращаются в 0. Если затем примем за ось x-ов касательную в начале, φ_0 также обратится в 0; предыдущие уравнения приводятся тогда к уравнениям:

$$x=\int_0^s\cos(F)\,ds;\quad y=\int_0^s\sin(F)\,ds, \tag{11}$$

и так как они не содержат больше произвольных постоянных, то они представляют вполне определенную кривую. Таким образом уравнение (9) соответствует кривым, *вполне определенным по форме*, которые получаются произвольным передвижением построенной кривой в ее плоскости. Вот почему уравнение (9) и называется натуральным (или внутренним). Из него можно вывести все свойства кривой, если рассматривать ее самое по себе, отвлекаясь от расположения ее по отношению к какой-нибудь другой линии.

Заметим еще, что при интегрировании натурального уравнения бесполезно вводить произвольные постоянные. Их всегда можно ввести после интегрирования, передвигая произвольным образом оси координат.

Приведем несколько примеров.

I. Проинтегрировать уравнение $R=a$. Не вводя произвольных постоянных, находим

$$\varphi=\int\frac{ds}{R}=\frac{s}{a};\quad x=\int\cos\frac{s}{a}\,ds=a\sin\frac{s}{a},\quad y=\int\sin\frac{s}{a}\,ds=-a\cos\frac{s}{a}$$

Исключив s, видим, что искомая кривая есть *круг*: $x^2+y^2=a^2$.

II. Проинтегрировать уравнение $R = \frac{s^2+a^2}{a}$. Имеем

$$\varphi = \int \frac{a\,ds}{s^2+a^2} = \operatorname{arctg}\frac{s}{a}$$

$$x = \int \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{s}{a}\right) ds = \int \frac{ds}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}} = a \operatorname{Log}\frac{s+\sqrt{s^2+a^2}}{a}$$

$$y = \int \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{s}{a}\right) ds = \int \frac{s\,ds}{\sqrt{s^2+a^2}} = \sqrt{s^2+a^2}.$$

Искомая кривая есть *цепная линия*:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

III. Проинтегрировать уравнение $R^2+s^2=16a^2$.
Взяв φ за независимую переменную, имеем:

$$\varphi = \int \frac{ds}{\sqrt{16a^2-s^2}} = \arcsin\frac{s}{4a}, \quad s = 4a\sin\varphi.$$

$$x = \int \cos\varphi\, ds = 4a\int \cos^2\varphi\, d\varphi = a(2\varphi+\sin 2\varphi).$$

$$y = \int \sin\varphi\, ds = 2a\int \sin 2\varphi\, d\varphi = -a\cos 2\varphi.$$

Полагая $2\varphi = \pi + u$, перепишем два последних уравнения в виде

$$x - a\pi = a(u-\sin u),\quad y - a = -a(1-\cos u);$$

или, преобразуя координаты: $x - a\pi = \xi$; $y - a = -\eta$:

$$\xi = a(u-\sin u);\quad \eta = a(1-\cos u),$$

что дает *циклоиду*.

Замечание. Задача об определении кривой, когда дано соотношение $R = F(\varphi)$ между радиусом кривизны и наклонением касательной, приводится к предыдущей, в силу соотношения $ds = R\,d\varphi$. Мы получим

$$x = \int F(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi;\quad y = \int F(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

§ 9. Системы дифференциальных уравнений. Линейные системы.

272. Канонические системы. Мы говорим, что система дифференциальных уравнений с несколькими неизвестными функциями x, y,... независимой переменной t, — каноническая, если число уравнений равно числу неизвестных функций и если система решена относительно производных высшего порядка каждой неизвестной.

На практике встречаются или канонические системы или системы, легко приводящиеся к канонической форме.

Каноническая система уравнений первого порядка, т. е. разрешенная относительно производных неизвестных функций, называется *нормальной системой.*

Выше мы доказали существование интегралов нормальной системы и показали, что число произвольных постоянных, входящих в ее общий интеграл, равно числу неизвестных функций или числу уравнений системы.

273. Теорема I. *Всякая каноническая система уравнений высшего порядка приводится к нормальной системе, содержащей только производные первого порядка, если рассматривать все производные, за исключением производных высшего порядка каждой неизвестной, как вспомогательные неизвестные и присоединить к данной системе уравнения, определяющие эти неизвестные.*

Так например, каноническая система

$$x''=f(t, x, x', y, y', y''); \quad y'''=f_2(t, x, x', y, y', y'')$$

приводится к нормальной системе пяти уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dx'}{dt}=f_1(t, x, x', y, y', y''),$$

$$\frac{dy}{dt}=y'; \quad \frac{dy'}{dt}=y''; \quad \frac{dy''}{dt}=f_2(t, x, x', y, y', y'')$$

между t и пятью неизвестными функциями x, x', y, y', y''.

Отсюда следует, что для получения числа неизвестных (или уравнений) нормальной системы, к которой приводится каноническая система, нужно сложить порядки высших производных каждой неизвестной.

Это число дает число произвольных постоянных в общем интеграле; его можно рассматривать поэтому как характеризующее *порядок* канонической системы.

274. Теорема II. *Интегрирование нормальной системы n уравнений с n неизвестными приводится к интегрированию одного уравнения порядка n с одной неизвестной, или же к последовательному интегрированию нескольких таких уравнений, причем сумма порядков их равна n.*

Для одного уравнения теорема верна, а потому достаточно показать, что она будет верна для нормальной системы n уравнений, если она верна для нормальной системы низшего порядка.

Для определенности рассмотрим нижеследующую систему трех уравнений с тремя неизвестными функциями x, y, z, причем рассуждение справедливо и в общем случае:

$$x'=f_1(t, x, y, z); \quad y'=f_2(t, x, y, z); \quad z'=f_3(t, x, y, z). \tag{I}$$

Если f_1 содержит только одну неизвестную функцию x, первое уравнение будет *первого порядка* с одной неизвестной функцией и определяет x. Поставив выражение для x в два остальных уравнения, приходим к интегрированию нормальной системы только двух уравнений. В этом первом случае предложение может считаться доказанным.

Пусть теперь f_1 содержит другую неизвестную, отличную от x, например y. Разрешив уравнение $f_1 = x'$ относительно y, получим:

$$y = \varphi(t, x, x', z). \qquad (1)$$

Подставим это выражение в другие уравнения системы (I). Подставив в уравнение $y' = f_2$, мы вводим x'' и z', но можем решить систему относительно x'' и z', в результате чего мы получим систему с двумя неизвестными функциями x и z

$$x'' = \varphi_2(t, x, x', z); \quad z' = \varphi_3(t, x, x', z). \qquad (II)$$

Если φ_2 не содержит z, уравнение $x'' = \varphi_2$ будет *второго порядка* с одной неизвестной функцией и определяет x. Подставив выражение x в последнее уравнение, мы должны будем проинтегрировать уравнение *первого порядка.* Затем получаем без интегрирования y из уравнения (1). Таким образом в этом втором случае теорема также доказана.

Предположим наконец, как это и бывает обыкновенно, что φ_2 содержит z. Разрешив уравнение $x'' = \varphi_2$ относительно z, находим:

$$z = \psi(t, x, x', x''). \qquad (2)$$

Подставив это выражение в последнее из уравнений системы (II), мы вводим x''' и, разрешив относительно x''', найдем:

$$x''' = \psi_3(t, x, x', x''). \qquad (III)$$

Уравнение (III) будет *третьего порядка* с одной неизвестной. Интегрирование системы (I) приводится таким образом к интегрированию одного уравнения (III), ибо, найдя x, находим y и z без интегрирования по формулам (2) и (1). Таким образом и в этом третьем и последнем случае наше предложение доказано.

275. Замечание. Так как всякая каноническая система какого угодно порядка приводится к нормальной системе присоединением вспомогательных неизвестных, то и ее интегрирование приводится также к интегрированию одного или нескольких уравнений с одной неизвестной функцией.

Когда приведение к одному уравнению возможно, его очевидно можно выполнить без промежуточного перехода к нормальной системе. Достаточно дифференцировать уравнения системы некоторое число раз так, чтобы получилось число уравнений, достаточное для исключения всех неизвестных функций, кроме одной.

Пусть, например, дана каноническая система

$$x''' = y + y'; \quad y'' = x' + x''.$$

Уравнение, которому удовлетворяет x, мы образуем, дифференцируя два раза первое уравнение и заменяя два раза y'' его выражением $x' + x''$. Последовательно находим

$$x^{IV} = y' + x' + x'', \quad x^{V} = x' + 2x'' + x'''.$$

Интегрирование данной системы зависит от интегрирования этого последнего уравнения, линейного пятого порядка. Проинтегрировав его, найдем x, после чего y, y' и y'' получатся без интегрирования из предыдущих уравнений.

276. Различные виды линейных систем. Их интегрирование с помощью приведения к уравнениям с одной неизвестной. *Линейными системами* называют такие, которые линейны относительно неизвестных функций и их производных, *линейными однородными* системами (или *без последних членов*) — те, которые линейны и однородны по отношению к этим величинам; системами *с постоянными* коэффициентами — те, в которых коэффициенты при неизвестных и их производных постоянны.

Всякая каноническая система совокупных дифференциальных уравнений приводится к нормальной присоединением вспомогательных неизвестных. Непосредственно можно убедиться в том, что это приведение сохраняет: 1) свойство линейности, 2) свойство однородности и 3) постоянство коэффициентов, если этими свойствами обладала данная система.

С другой стороны, интегрирование нормальной системы приводится к интегрированию одного или нескольких уравнений с одним неизвестным. Это приведение также сохраняет свойства линейности и постоянства коэффициентов, если они имелись у предложенной системы.

Стало быть, интегрирование линейных систем, в силу общих принципов, приводится к интегрированию одного линейного уравнения.

Равным образом, интегрирование системы с постоянными коэффициентами приводится к интегрированию одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

Однако для систем с постоянными коэффициентами без свободных членов этот способ на практике не является наиболее удобным. Предпочтительнее второй способ, указанный в следующем n°. Он имеет, кроме того, то преимущество, что с равной легкостью применяется как к каноническим системам, так и к системам какого угодно вида. Наконец, для систем с свободными членами нужно ближе изучить способ приведения, что и будет сделано в n° 278.

277. Интегрирование линейных систем с постоянными коэффициентами и без последних членов. Для определенности рассмотрим систему (каноническую или нет) трех уравнений с тремя неизвестными функциями x, y, z от t, вида

$$\left.\begin{aligned} Lx+My+Nz&=0,\\ L_1x+M_1y+N_1z&=0,\\ L_2x+M_2y+N_2z&=0,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где L, M, N означают символические полиномы от D с постоянными коэффициентами вида

$$a_0D^m+a_1D^{m-1}+\ldots+a_{m-1}D+a_m.$$

Мы назовем *определителем системы определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix}$$

и обозначим его миноры через

$$\begin{matrix} l, & m, & n, \\ l_1, & m_1, & n_1, \\ l_2, & m_2, & n_2. \end{matrix}$$

Этот определитель Δ имеет существенное значение при интегрировании системы (1). В этом n⁰ мы предположим, что он не равен тождественно 0.

Теорема. *Все три неизвестные x, y, z удовлетворяют одному и тому же линейному уравнению с постоянными коэффициентами без свободного члена*: $\Delta u = 0$.

В самом деле, помножим уравнения (2) соответственно на l, l_1, l_2 и сложим; в силу свойств миноров, получим $\Delta x = 0$; также покажем, что и $\Delta y = 0$ и $\Delta z = 0$.

Эта теорема приводит к более удобному способу интегрирования системы. Это — *способ неопределенных коэффициентов.*

В самом деле, решим *характеристическое уравнение* $\Delta = 0$ и пусть r, $s, \cdots$ его корни, соответственно кратностей λ, $\mu, \cdots$ Необходимо будем иметь

$$\begin{cases} x = Pe^{rt} + Qe^{st} + \cdots, \\ y = P_1 e^{rt} + Q_1 e^{st} + \cdots, \\ z = P_2 e^{rt} + Q_2 e^{st} + \cdots, \end{cases}$$

где полиномы P степени $\lambda - 1$, Q — степени $\mu - 1, \cdots$

Подставив эти выражения в уравнения (3) и приравняв результаты нулю, получим некоторое число линейных соотношений в отдельности между коэффициентами полиномов P, полиномов Q и т. д., так как не может произойти приведения между членами, содержащими различные показательные множители. Решение будет содержать столько произвольных постоянных, сколько останется неопределенных коэффициентов. Мы покажем в следующем n⁰, что число это равно степени Δ, которую называют *порядком системы.*

Это исследование не приложимо, если Δ приводится к постоянной. Если эта постоянная отлична от 0, система разрешается без интегрирования: уравнения $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ приводятся просто к $x = y = z = 0$. Эти значения удовлетворяют системе (3), и других решений не существует.

Если $\Delta = 0$, предыдущий способ не применим; нужно воспользоваться общим способом, изложенным в следующем n⁰.

Случай нормальной системы. Предыдущий способ применяют на практике для интегрирования *нормальной системы.*

Она имеет вид:

$$\begin{cases} (D+a)x+ \quad by+ \quad cz=0 \\ a_1x+(D+b_1)y+ \quad c_1z=0 \\ a_2x+ \quad b_2y+(D+c_2)z=0. \end{cases}$$

Ее интегрирование требует решения характеристического уравнения третьей степени

$$\begin{vmatrix} D+a & b & c \\ a_1 & D+b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & D+c_2 \end{vmatrix}=0$$

и общий интеграл будет содержать три произвольные постоянные, что вытекает и из общей теории.

Пример. Проинтегрировать нормальную систему

$$(D+1)x-y=0; \quad x+(D-1)y=0.$$

Здесь имеем: $\Delta=D^2$. Стало быть, x и y нужно искать в виде

$$x=C+C't; \quad y=C_1+C_1't,$$

что приводит к соотношениям:

$$C_1=C+C'; \quad C_1'=C'.$$

Интегралы содержат две произвольные постоянные:

$$x=C+C't; \quad y=C+C'(1+t).$$

278. Системы с постоянными коэффициентами полные, или со свободными членами. Возьмем опять систему (3) предыдущего n°, но в которой правые части заменены тремя функциями T, T_1, T_2 независимой переменной t. Мы получим полную систему

$$\left.\begin{aligned} Lx+My+Nz&=T \\ L_1x+M_1y+N_1z&=T_1 \\ L_2x+M_2y+N_2z&=T_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Общий способ интегрирования системы (4), применимый также и к системе (3), есть способ приведения к последовательному интегрированию одного или нескольких уравнений с одной неизвестной (n°). Но в рассматриваемом случае способ этот представляет некоторые особенности, которые заслуживают внимания.

Он состоит в применении следующей теоремы:

Теорема. *Систему* (4) *можно привести к другой, эквивалентной ей и с тем же определителем* Δ, *но в которой два коэффициента при* x *равны* 0.

В самом деле, предположим, что L и L_1 отличны от 0, и что степень L не меньше степени L_1. Разделив L на L_1, находим:

$$L=\lambda L_1+R,$$

и если полином $R=L-\lambda L_1\neq 0$, степень его меньше степеней L и L

Заметив это, умножим второе из уравнений (4) на λ и вычтем из первого. Мы образуем систему, эквивалентную (4) и с тем же определением Δ:

$$\left.\begin{array}{l}(L-\lambda L_1)x+(M-\lambda M_1)y+(N-\lambda N_1)z=T-\lambda T_1\\ \quad L_1x+\quad M_1y+\quad N_1z=T_1\\ \quad L_2x+\quad M_2y+\quad N_2z=T_2\end{array}\right| \qquad (5)$$

в которой сумма степеней коэффициентов при x уменьшена. Если какие-либо два из коэффициентов при x в системе (5) отличны от 0, аналогичным преобразованием можно опять уменьшить сумму степеней коэффициентов при x.

Так как уменьшение не может повторяться неопределенно, мы приведем в конце концов систему (4) к другой, ей эквивалентной, с тем же определителем Δ, в которой два коэффициента при x равны 0. Пусть эта система есть

$$\left|\begin{array}{l}\delta x+By+Cz=\tau\\ \quad B_1y+C_1z=T_3\\ \quad B_2y+C_2z=T_4,\end{array}\right.$$

где буквы δ, B, C—символические полиномы от D, а правые части—известные функции от t.

Интегрирование новой системы зависит от интегрирования системы с двумя неизвестными функциями y и z, представляемой двумя последними уравнениями. Но очевидно, что и для этой системы двух уравнений справедлива теорема, аналогичная той, которую мы доказали для системы (4). Таким образом ее можно привести к эквивалентной системе, в которой один из коэффициентов при y есть 0.

В результате, после конечного числа операций (из которых каждая соответствует делению) система (4) будет приведена к другой системе, ей эквивалентной, с тем же определителем Δ, но вида

$$\left.\begin{array}{l}\delta x+By+Cz=\tau\\ \quad \delta_1y+C_1z=\tau_1\\ \quad\quad \delta_2z=\tau_2\end{array}\right\} \quad (\Delta=\delta\delta_1\delta_2). \qquad (6)$$

А эта система вполне готова к интегрированию.

С л у ч а й, к о г д а $\Delta\neq 0$. Так как тогда ни один из символических множителей δ, δ_1, δ_2 не обращается в 0, интегрирование системы (6) приводится к интегрированию только уравнений с одной неизвестной функцией: третье уравнение определяет z, затем второе дает y и наконец первое—x. Число постоянных интегрирования равно сумме порядков интегрируемых уравнений, т. е. сумме степеней полиномов δ_2, δ_1 и δ, которая равна степени Δ. Это—основное заключение, уже высказанное в предыдущем n°.

На практике чаще всего случается, что δ и δ_1 приводятся просто к постоянным. Тогда интегрирование системы (6) приводится к интегрированию только последнего уравнения:

$$\delta_2 z=\tau_2 \text{ или } \Delta z=\delta\delta_1\tau_2,$$

после чего x и y определяются без интегрирования из двух предыдущих уравнений.

При интегрировании системы (4) или (6) часто бывает полезна следующая теорема, которая доказывается, как и в случае одного уравнения (n⁰ 227):

Общие интегралы полной системы получим, прибавив соответственно к общим интегралам X, Y, Z системы без свободных членов частные решения ξ, η, ζ полной системы.

В частности выводим отсюда следующую теорему:

Интегрирование системы с свободными членами, определитель которой Δ степени n, приводится к n квадратурам.

В самом деле, общие интегралы системы без свободных членов получаются без интегрирования по способу предыдущего n⁰. Остается прибавить к ним частные интегралы полной системы, которые можно найти следующим образом:

Рассмотрим систему (6). Пусть p, q, r степени δ, δ_1, δ_2. Частный интеграл z (третьего уравнения) получим с помощью r квадратур, не вводя произвольных постоянных (n⁰ 228); соответствующее значение y (второе уравнение) с помощью q квадратур, не вводя произвольных постоянных; наконец, соответствующее значение r— с помощью p квадратур; в общем потребуется $p+q+r=n$ квадратур.

Если мы знаем или легко находим частное решение полной системы, то излишне производить квадратуры, указанные в предыдущей теореме.

Случай $\Delta=0$. *Система тогда либо неопределенна, либо несовместна.* Этот случай не имеет практического значения. Ограничимся только рассмотрением одного примера. Для того чтобы Δ приводилось к 0, необходимо, чтобы по крайней мере один из множителей δ, δ_1, δ_2 обращался в 0: 1) если $\delta_2=0$, причем $\tau_2 \neq 0$ система невозможна, 2) если δ_2 и τ_2 равны 0 (причем δ и $\delta_1 \neq 0$), значение z остается произвольным и система неопределенна.

279. Общие теоремы о линейных нормальных системах. Рассмотрим сперва систему n уравнений без свободных членов с n неизвестными функциями x, y, $\cdots v$ независимой переменной t, вида

$$\left.\begin{aligned} x'+ax+by+\ldots&=0\\ y'+a_1x+b_1y+\ldots&=0,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где a, $b, \ldots a_1, \ldots$ означают данные функции от t.

Теорема I. *Если $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$, $\ldots$ суть частные решения системы, то выражения*

$$x=C_1x_1+C_2x_2+\ldots; \; y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots,$$

где C_1, $C_2\ldots$ произвольные постоянные, также составляют решение.

Действительно, подставив эти выражения хотя бы в первое уравнение, находим:

$$C_1(x_1'+ax_1+by_1+\ldots)+C_2(x_2'+ax_2+by_2+\ldots)+\ldots=0.$$

Определение. Говорят, что p ($p \leqslant n$) *решений* $(x_1, y_1, \ldots, v_1), \ldots (x_p, y_p, \ldots, v_p)$ системы (7) *независимы*, если по крайней мере один из определителей порядка p, образованный из p строк таблицы

$$\begin{matrix} x_1, & x_2 \ldots x_p \\ y_1, & y_2 \ldots y_p \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_1, & v_2 \ldots v_p, \end{matrix}$$

отличен от 0.

По аналогии будем говорить, что один интеграл $(x_1, y_1, \ldots)$ *независим*, если по крайней мере одна из функций $x_1, y_1, \ldots$ отлична от 0.

Теорема II. *Система (7) имеет n независимых решений и если $(x_1, y_1, \ldots), \ldots (x_n, y_n \ldots)$ суть n независимых решений, общий интеграл будет*

$$x = C_1x_1 + \ldots + C_nx_n;\ y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n, \ldots \tag{8}$$

и содержит n произвольных постоянных C.

Докажем сперва существование n независимых интегралов. Допустим противное, т. е. что нельзя найти больше p ($<n$) независимых решений

$$(x_1, y_1, \ldots) \ldots (x_p, y_p, \ldots).$$

Тогда всякий интеграл обращает в 0 все определители $(p+1)$-го порядка вида

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & \ldots x_p \\ y & y_1 & y_2 & \ldots y_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix}$$

Соотношения, которые получаются при этом, не будут все тождественно удовлетворяться, ибо среди миноров элементов $x, y \ldots$ найдется по крайней мере один определитель порядка p, который по предположению отличен от 0. В таком случае общие интегралы $x, y, \ldots$ были бы связаны по крайней мере одним соотношением, и их начальные значения не были бы произвольными, чего не может быть.

Итак, существует n независимых интегралов, с помощью которых можно образовать выражения (8). Эти выражения будут интегралами в силу теоремы I. Более того, они будут общими интегралами, так как уравнения (8) могут быть разрешены относительно постоянных C (так как определитель их отличен от 0), и, стало быть, можно распорядиться постоянными $C_1, C_2, \ldots$ так, чтобы $x, y, \ldots$ получили произвольные значения (причем соответствующие значения $C_1, C_2, \ldots$ получатся решением системы).

Теорема III. *Общие интегралы системы с свободными членами получаются прибавлением к общим интегралам $X, Y, \ldots$ системы без свободных членов соответствующих частных интегралов $\xi, \eta, \ldots$ полной системы.*

Доказательство то же, что и для одного уравнения (n° 227).

Теорема IV. *Интегрирование нормальной системы n уравнений со свободными членами приводится к интегрированию системы без свободных членов и к n квадратурам.*

Рассмотрим полную систему

$$\left.\begin{matrix} x' + ax + by + \ldots = T \\ y' + a_1x + b_1y + \ldots = T_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}\right\} \tag{9}$$

и предположим, что общий интеграл системы (7) известен:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots \\ y &= C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

В уравнениях (10) $x, y, \ldots$ можно рассматривать как интегралы системы (9) при условии, что $C_1, C_2, \ldots$ суть функции от t, определяемые этими уравнениями. Но тогда $C_1, C_2, \ldots$ должны удовлетворять другой системе уравнений, которую получим, подставив (10) в (9). Подставив эти выражения и заметив, что: 1) C имеют теперь производные по t (которые мы обозначим значками наверху) и 2) $x_1, y_1, \ldots$ суть интегралы уравнений без свободных членов, найдем

$$\left\{\begin{aligned} x_1C_1' + x_2C_2' + \ldots &= T \\ y_1C_1' + y_2C_2' + \ldots &= T_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Это есть система n уравнений, разрешаемых относительно n производных C'. Стало быть, n неизвестных C найдем отсюда с помощью n квадратур.

Теорема V. *Если известны p частных интегралов линейной нормальной системы без свободных членов с n неизвестными ($n>p$), интегрирование системы с свободными членами или без них приводится к интегрированию нормальной системы с $(n-p)$ неизвестными и к квадратурам.*

Для определенности рассмотрим систему четырех уравнений

$$\left.\begin{aligned} x' + ax + by + cz + du &= T \\ y' + a_1x + b_1y + c_1z + d_1u &= T_1 \\ z' + a_2x + b_2y + c_2z + d_2u &= T_2 \\ u' + a_3x + b_3y + c_3z + d_3u &= T_3 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и предположим, что известны два независимых интеграла $(x_1, y_1, \ldots u_1)$, $(x_2, y_2, \ldots u_2)$ системы без свободных членов, причем можно считать, что определитель $x_1y_2 - x_2y_1$ отличен от 0.

Для интегрирования системы (11) обозначим через $C_1, C_2, \zeta, \upsilon$ новые неизвестные и сделаем подстановку:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2, \\ y &= C_1y_1 + C_2y_2, \\ z &= C_1z_1 + C_2z_2 + \zeta, \\ u &= C_1u_1 + C_2u_2 + \upsilon. \end{aligned}\right\}$$

Система (11) преобразуется к следующей (где значками попрежнему обозначаются производные по t):

$$\begin{aligned} x_1C_1' + x_2C_2' + c\zeta + d\upsilon &= T \\ y_1C_1' + y_2C_2' + c_1\zeta + d_1\upsilon &= T_1 \\ z_1C_1' + z_2C_2' + \zeta' + c_2\zeta + d_2\upsilon &= T_2 \\ u_1C_1' + u_2C_2' + \upsilon' + c_3\zeta + d_3\upsilon &= T_3. \end{aligned}$$

Так как по предположению определитель $x_1y_2 - x_2y_1$ отличен от 0, то два первые уравнения можно разрешить относительно C_1', C_2' и подставить в два следующие; система приводится тогда к нормальной форме:

$$C_1' = A\zeta + B\upsilon + \tau, \quad \zeta' = A_2\zeta + B_2\upsilon + \tau_2,$$
$$C_2' = A_1\zeta + B_1\upsilon + \tau_1, \quad \upsilon' = A_3\zeta + B_3\upsilon + \tau_3.$$

Стало быть, ζ и υ определятся интегрированием нормальной системы с двумя неизвестными функциями, после чего C_1 и C_2 получатся из двух первых уравнений с помощью квадратур.

280. Сопряженные системы. Рассмотрим две нормальные системы с n неизвестными.

$$\left.\begin{array}{l} x' + ax + by + \ldots = 0, \\ y' + a_1x + b_1y + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (12) \qquad \left.\begin{array}{l} -X' + aX + a_1Y + \ldots = 0, \\ -Y' + bX + b_1Y + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (13)$$

Эти две системы находятся во взаимной связи и каждая называется *сопряженной с другой*.

Для того, чтобы обнаружить связь между этими системами, помножим их соответственно на X, $Y, \ldots, -x, -y, \ldots$ и сложим.

Производя приведение, получим:

$$Xx' + Yy' + \ldots + xX' + yY' + \ldots = \frac{d}{dt}(Xx + Yy + \ldots) = 0,$$

откуда

$$xX + yY + \ldots = \text{const}.$$

Теорема. *Полное интегрирование одной из сопряженных систем приводит к полному интегрированию другой.*

В самом деле, если мы знаем n независимых интегралов системы (12), например

$$(x_1, y_1, \ldots) \ldots (x_n, y_n, \ldots),$$

то можем составить n уравнений

$$x_iX + y_iY + \ldots = C_i, \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{14}$$

откуда и извлекаем выражения для X, $Y, \ldots$ с n произвольными постоянными.

Если бы мы знали только p независимых интегралов первой системы, то получили бы p соотношений вида (14), которые позволят исключить p неизвестных сопряженной системы и привести таким образом интегрирование ее, а стало быть и интегрирование первой системы, к интегрированию системы порядка $(n-p)$, но со свободными членами. Это дает новое доказательство теоремы V предыдущего n°.

281. Замечание. Большинство предложений, высказанных в трех первых отделах этой главы относительно одного линейного уравнения n-го порядка, можно вывести из предложений nn° 279 и 280, приведя уравнение n-го порядка к системе уравнений первого порядка. Отсюда следует новое доказательство этих предложений, которое мы предоставляем читателям в качестве прекрасного примера для упражнения.

ГЛАВА VIII.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ.

§ 1. Образование уравнений с частными производными.

282. Определение. Уравнением с частными производными называется всякое соотношение между одной или несколькими функциями от нескольких независимых переменных, их частными производными первого или высших порядков, и, наконец, самими независимыми переменными. Когда частные производные, входящие в уравнение, все первого порядка, говорят, что уравнение первого порядка. Для того чтобы составить себе представление о происхождении этих уравнений и, следовательно, о природе функций, ими определяемых, мы сперва займемся отысканием уравнений в частных производных некоторых поверхностей.

283. Уравнение цилиндрических поверхностей. Цилиндрическая поверхность описывается бесконечной прямой MN, которая называется образующей и которая движется, оставаясь все время параллельной данной прямой и пересекая данную кривую AB, называемую направляющей.

Пусть

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \tag{1}$$

суть уравнения образующей MN; a и b—постоянные коэффициенты, выражающие, что MN остается параллельной данному направлению, α и β — параметры, которые зависят от положения образующей и должны быть еще связаны соотношением, выражающим, что MN пересекает AB.

В самом деле, пусть

$$F(x,y,z) = 0, \quad F_1(x,y,z) = 0 \tag{2}$$

суть уравнения направляющей AB; условие пересечения AB и MN мы получим, исключив x, y, z из (2) и (1), что дает соотношение

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

откуда

$$\beta = \Phi(\alpha). \tag{3}$$

Для того чтобы получить уравнение геометрического места MN, достаточно исключить параметры α и β из (1) и (3), что даст

$$y - bz = \Phi(x - az). \tag{4}$$

Это уравнение, в котором Φ означает произвольную функцию, выражает всякую цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны данной прямой, какова бы ни была направляющая; оно является конечным уравнением цилиндрических поверхностей.

Мы покажем, что уравнение (4) эквивалентно некоторому уравнению в частных производных, которое никаких произвольных величин больше не содержит. С этой целью дифференцируем уравнение (4) по x и по y, считая z функцией от двух независимых переменных x, y, частные производные которой суть

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q;$$

мы найдем:

$$-bp = \Phi'(x - az)(1 - ap); \quad 1 - bq = \Phi'(x - az)(-aq),$$

откуда, исключив Φ', находим:

$$ap + bq = 1. \tag{5}$$

Это уравнение, которое не содержит произвольной функции Φ и имеет по крайней мере такую же степень общности, что и уравнение (4), есть дифференциальное уравнение в частных производных цилиндрических поверхностей, образующие которой имеют данное направление. Оно выражает геометрическое свойство этих поверхностей, а именно, что нормаль в точке (x, y, z) перпендикулярна к образующей, проходящей через эту точку. В самом деле, направляющие косинусы этих двух прямых пропорциональны соответственно величинам

$$p, q, -1 \text{ и } a, b, 1.$$

Уравнение (5) есть линейное уравнение в частных производных первого порядка. В следующем отделе мы изложим способ интегрирования таких уравнений и покажем тогда, что, обратно, всякая поверхность, координата z которой (рассматриваемая как функция от двух других координат x и y) удовлетворяет уравнению (5), есть цилиндрическая поверхность.

284. Уравнения конических поверхностей. Коническая поверхность описывается бесконечной прямой MN, которая называется образующей и которая проходит через неподвижную точку (a, b, c), называемую вершиной, и пересекает данную кривую AB, называемую направляющей.

Пусть

$$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c) \tag{1}$$

суть уравнения образующей; α и β—параметры, зависящие от ее положения. Условие пересечения образующей и направляющей мы выразим, исключив x, y, z из уравнений образующей и направляющей, что даст соотношение

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0, \quad \text{откуда } \beta = \Phi(\alpha). \tag{2}$$

Уравнение геометрического места мы получим, исключив α и β из (1) и (2), что даст

$$\frac{y-b}{z-c}=\Phi\left(\frac{x-a}{z-c}\right). \tag{3}$$

Это уравнение, в котором Φ остается произвольной, годится для всех конических поверхностей, вершина которых в точке (a, b, c). Для нахождения уравнения в частных производных этих поверхностей дифференцируем уравнение (3) по x и по y, рассматривая z как функцию этих двух независимых переменных; получим:

$$\frac{-(y-b)\,p}{(z-c)^2}=\Phi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\frac{z-c-p\,(x-a)}{(z-c)^2};$$

$$\frac{z-c-q\,(y-b)}{(z-c)^2}=\Phi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\frac{-(x-a)\,q}{(z-c)^2},$$

или, исключая Φ':

$$(x-a)\,p+(y-b)\,q=(z-c). \tag{4}$$

Это уравнение, которое не содержит более произвольных величин и имеет по крайней мере ту же степень общности, что и уравнение (3), и есть дифференциальное уравнение в частных производных конических поверхностей. Оно выражает геометрическое свойство этих поверхностей, а именно, что нормаль в точке (x, y, z) перпендикулярна к образующей, проходящей через эту точку, направляющие косинусы которой пропорциональны $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$. Ниже мы докажем, что, обратно, всякая поверхность, удовлетворяющая уравнению (4), есть коническая поверхность.

285. Уравнения коноидных поверхностей. Коноид есть поверхность, описываемая прямолинейной образующей, которая движется, оставаясь параллельной данной направляющей плоскости, и постоянно пересекает неподвижную прямую и неподвижную кривую, которые называются *направляющими* поверхности.

Примем плоскость, параллельную направляющей плоскости, за плоскость xy, прямолинейную направляющую — за ось z. В таком случае уравнения образующей будут

$$z=\alpha,\quad y=\beta x, \tag{1}$$

где α и β — параметры, зависящие от положения образующей. Прямые, выражаемые уравнениями (1), пересекают уже ось z, но нужно написать еще условие, что они пересекают криволинейную направляющую. Для этого исключаем x, y, z из уравнений (1) и уравнений криволинейной направляющей, что дает соотношение

$$\varphi(\alpha,\beta)=0,\quad \text{откуда } \alpha=\Phi(\beta). \tag{2}$$

Уравнение геометрического места получим, исключив α и β из уравнений (1) и (2), что дает

$$z=\Phi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3}$$

Это уравнение, в котором Ф остается произвольной является уравнением всех коноидов, имеющих одну и ту же направляющую плоскость и одну и ту же прямолинейную направляющую. Для нахождения соответствующего уравнения в частных производных дифференцируем (3) по x и по y, что дает

$$p = \Phi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right); \quad q = \Phi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x},$$

откуда

$$px + qy = 0. \tag{4}$$

Это уравнение в частных производных имеет по крайней мере ту же степень общности, что и уравнение (3). Мы покажем ниже, что оно эквивалентно уравнению (3) и является таким образом дифференциальным уравнением коноидных поверхностей.

286. Уравнение поверхностей вращения. Эти поверхности образуются при вращении кривой AB, называемой образующей, около неподвижной прямой OR.

Поместим начало координат на неподвижной прямой OR, называемой *осью вращения*. Каждая точка M образующей AB описывает окружность, центр которой лежит на OR и плоскость перпендикулярна OR; поверхность можно рассматривать как геометрическое место этих окружностей.

Пусть

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \tag{1}$$

будут уравнения оси OR; уравнение плоскости, нормальной к ней. будет

$$ax + by + cz = \alpha,$$

а потому уравнения переменного круга будут

$$ax + by + cz = \alpha, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \beta, \tag{2}$$

так как его можно рассматривать как пересечение плоскости, нормальной к OR, с сферой, имеющей центр в точке O. Для того чтобы выразить, что этот круг пересекает AB, нужно исключить x, y, z из уравнений (2) и уравнений AB, что приводит к соотношению

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

откуда

$$\alpha = \Phi(\beta). \tag{3}$$

Уравнение поверхности вращения получим, исключив α, β из (2) и (3), что дает

$$ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2). \tag{4}$$

Это и есть общее конечное уравнение поверхностей вращения вокруг прямой $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$; функция Ф остается произвольной и соответствует выбору направляющей.

Для получения уравнения в частных производных этих поверхностей дифференцируем уравнение (4) по x и по y, рассматривая z как функцию. Находим:

$$a+cp=\Phi'(x^2+y^2+z^2)\,(2x+2zp),$$
$$b+cq=\Phi'(x^2+y^2+z^2)\,(2y+2zq)$$

и, исключая Φ':

$$(cy-bz)\,p+(az-cx)\,q=bx-ay. \tag{5}$$

Это и есть искомое уравнение в частных производных, причем произвольная функция исчезла.

287. Замечание. Если мы проинтегрируем дифференциальные уравнения в частных производных предыдущих поверхностей, интегрирование это должно ввести обратно произвольную функцию, которую мы исключили. Таким образом можно предвидеть, что интегрирование уравнений в частных производных должно вводить произвольные функции. Теоремы, которые мы изложим ниже, подтвердят эту догадку.

§ 2. Свойства функциональных определителей.

288. Определение. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — функции от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеющие непрерывные частные производные первого порядка. *Функциональным определителем или якобианом* называется, как известно (n° 15), определитель

$$J=\frac{d(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{d(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

289. Теорема I. *Если одна из названных функций u есть постоянная или если существует тождественное соотношение между двумя или несколькими из этих функций, не содержащее независимых переменных x, функциональный определитель тождественно обращается в* 0.

1°. Если одна из функций u есть постоянная, все элементы соответствующей строки определителя обращаются в 0, так что и $J=0$.

2°. Если существует соотношение между некоторыми из функций u, например, если u_1 есть функция от $u_2, u_3, \ldots$, имеем:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\ldots$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=\frac{\partial u_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

откуда следует, что элементы первой строки определителя J суть суммы произведений соответствующих элементов остальных строк на множители $\frac{\partial u_1}{\partial u_2}$, $\frac{\partial u_1}{\partial u_3}, \ldots$, т. е. определитель J опять тождественно равен 0.

290. **Теорема II.** *Пусть даны m функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$ от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant m)$. Если определитель порядка p $(p < m)$*

$$J_1 = \frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_p)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_p)} \tag{1}$$

отличен от 0, в то время как все определители порядка $(p+1)$, которые содержат еще одну функцию и еще одну переменную x:

$$J_{k,l} = \frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_p, u_{p+k})}{d(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_l)} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots, m-p, \\ l = p+1, p+2, \ldots, n \end{array} \right. \tag{2}$$

равны тождественно 0, функции $u_1, u_2, \ldots, u_p$ будут независимы, остальные же функции все выражаются через $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Независимость функций $u_1, \ldots, u_p$ устанавливается непосредственно, так как если бы между ними существовало соотношение, оно сохранилось бы, если считать переменными только $x_1, x_2, \ldots, x_p$, и в силу предыдущей теоремы определитель J_1 обращался бы в 0. Вторая же часть теоремы требует некоторых предварительных замечаний. Заметим прежде всего, что определители $J_{k,l}$, которые по предположению обращаются в 0, когда $l = p+1, p+2, \ldots, n$, обращаются в 0 также и при других меньших значениях l, так как тогда они будут содержать равные строки.

Разложив $J_{k,l}$ по элементам последнего столбца, получим:

$$J_{k,l} = A_k \frac{\partial u_1}{\partial x_l} + B_k \frac{\partial u_2}{\partial x_l} + \ldots +$$
$$+ P_k \frac{\partial u_p}{\partial x_l} + J_1 \frac{\partial u_{p+k}}{\partial x_l} = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots n).$$

Существенно отметить здесь, что миноры $A_k, B_k, \ldots P_k$ зависят только от значка k, но не от l.

Установив это, рассмотрим $p+1$ уравнений, дающих $du_1, du_2, \ldots, du_p$ и, сверх того, полный дифференциал du_{p+k}:

$$du_1 = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_1}{\partial x_l} dx_l, \ldots, du_p = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_p}{\partial x_l} dx_l;$$

$$du_{p+k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_{p+k}}{\partial x_l} dx_l.$$

Помножив их соответственно на миноры $A_k, B_k, \ldots, P_k$ и J_1 и сложив, в силу того, что $J_{k,l}$ тождественно $=0$, получим:

$$A_k\, du_1 + B_k du_2 + \ldots + P_k\, du_p + J_1\, du_{p+k} = \sum_{l=1}^{n} J_{k,l}\, dx_l = 0.$$

Это тождество без труда приводит к доказательству теоремы.

Присоединим к независимым функциям $u_1, u_2, \ldots, u_p$ новые функции $v_{p+1}, v_{p+2}, \ldots, v_n$, так, чтобы получилась система n независимых функций, и примем их за независимые переменные вместо x. Из предыдущего соотношения, так как $J_1 \neq 0$, находим:

$$du_{p+k} = -\frac{A_k\, du_1 + \ldots + P_k\, du_p}{J_1},$$

причем это соотношение между первыми дифференциалами, которое не зависит от выбора переменных (т. I, n⁰ 159), сохранится и при новых независимых переменных $u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_n$. Сравнив его с общим выражением du_{p+k}:

$$du_{p+k} = \frac{\partial u_{p+k}}{\partial u_1}\, du_1 + \ldots + \frac{\partial u_{p+k}}{\partial u_p}\, du_p + \frac{\partial u_{p+k}}{\partial v_{p+k}}\, dv_{p+1} + \ldots +$$
$$+ \frac{\partial u_{p+k}}{\partial v_n}\, dv_n,$$

мы получим тождества:

$$\frac{\partial u_{p+k}}{\partial v_{p+1}} = \frac{\partial u_{p+k}}{\partial v_{p+2}} = \ldots = 0,$$

которые показывают, что u_{p+k} зависит только от $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Точно также мы видим, что если один или несколько из коэффициентов $A_k, B_k, \ldots$ обращаются в 0, u_{p+k} зависит только от части этих функций.

291. Замечания. I. В предыдущем доказательстве за v можно принять в частности $x_{p+1}, \ldots, x_n$, так как определитель

$$\frac{d\,(u_1, u_2, \ldots, u_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)}{d\,(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)} = \frac{d\,(u_1, \ldots, u_p)}{d\,(x_1, \ldots, x_p)}$$

отличен от 0 и переменные $u_1, \ldots, u_p, x_{p+1}, x_n$ независимы.

II. При условиях предыдущей теоремы, так как любые $(p+1)$ из функций $u_1, \ldots, u_m$ не независимы, их определитель по каким угодно $(p+1)$ из переменных x тождественно равен 0. Следует отметить, что определители $J_{k,l}$, указанные в формулировке теоремы II, составляют лишь часть всех определителей, которые можно образовать таким путем. Стало быть, обращение в 0 определителей $J_{k,l}$ влечет за собой обращение в 0 всех остальных.

292. Теорема III. *Пусть даны m функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$ от n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant m)$. Условие, необходимое и до-*

статочное для того, чтобы эти функции были независимы между собой, т. е. чтобы ни одна из них не приводилась к постоянной и чтобы они не удовлетворяли соотношению, не содержащему независимых переменных x, заключается в том, чтобы по крайней мере один из функциональных определителей, которые можно образовать из m столбцов таблицы

$$\begin{array}{cccc}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\
\ldots & \ldots & & \ldots \\
\frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_m}{\partial x_n},
\end{array}$$

не приводился тождественно к 0. *В частности, если число функций u и переменных x одинаково (и равно n), это условие приводится к тому, чтобы функциональный определитель J от n функций по n переменным x не был тождественно равен* 0.

Условие достаточно, так как если один из этих определителей, например

$$\frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_m)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_m)},$$

отличен от 0, между u никакого соотношения не существует, так как в противном случае он приводился бы к 0 (n° 289).

Условие необходимо, т. е. если все эти определители равны 0, между функциями u существует соотношение.

В самом деле: 1) если все частные производные u равны 0, функции u приводятся к постоянным; 2) в противном случае пусть p $(1 \leqslant p < m)$ есть наибольший порядок определителей, отличных от 0, которые можно образовать из элементов предыдущей таблицы; пусть например

$$\frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_p)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_p)}$$

есть определитель наивысшего порядка, отличный от 0; тогда $u_{p+1}, \ldots, u_n$ будут функциями от $u_1, u_2, \ldots, u_p$ в силу теоремы II (n° 290).

§ 3. Линейные однородные уравнения в частных производных.

293. Предварительное замечание. При изучении уравнений в частных производных прежде всего имеют в виду привести задачу к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Поставленная таким образом задача разрешена вполне для уравнений первого порядка вообще, но мы здесь будем заниматься только уравнениями линейными.

294. Теория линейных однородных уравнений. Рассмотрим сперва линейное однородное уравнение

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0. \tag{1}$$

При этом предполагается, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ суть данные функции, z—неизвестная функция от n независимых переменных, которая не входит ни в один из коэффициентов X, и что по крайней мере один из них не приводится тождественно к 0. Мы допустим, что это как раз есть X_1.

Если введем символ X по формуле

$$X=X_1\frac{\partial}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

то уравнение (1) можно переписать в сокращенной форме, часто весьма удобной:

$$X(z)=0.$$

Напишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n} \tag{2}$$

и рассмотрим область, в которой отношения $\frac{X_2}{X_1}, \frac{X_3}{X_1}, \ldots$ и их частные производные первого порядка остаются непрерывными. Примем x_1 за независимую переменную; уравнения (2) допускают систему интегралов, содержащих $n-1$ *различных* произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, вида (n⁰ 194, 2⁰):

$$x_2=\varphi_2(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}),\ x_3=\varphi_3\ (x_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), \ldots x_n=\varphi_n(x_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Разрешив эти уравнения относительно произвольных постоянных, мы найдем

$$u_1=\alpha_1,\quad u_2=\alpha_2,\quad \ldots u_{n-1}=\alpha_{n-1}, \tag{3}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ означают известные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Мы покажем, что, зная эти функции, можно непосредственно вывести все интегралы уравнения (1) и что интегрирование системы (2) или уравнения (1) суть задачи эквивалентные.

Прежде всего мы дадим определение, которое облегчит терминологию:

Определение. В силу формул (3), каждая из функций $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ остается постоянной, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ изменяются так, что удовлетворены уравнения (2). Функция, которая обладает этим свойством и не приводится *тождественно* к постоянной, называется *интегралом* уравнений (2). Два интеграла *различны*, когда между ними не существует соотношения. Стало быть, проинтегрировав систему (2), мы знаем $(n-1)$ различных интегралов $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ этих уравнений, ибо, приравняв их $(n-1)$ произвольным постоянным, мы видим, что между ними не может существовать никаких соотношений.

Теорема I. *Всякий интеграл системы* (2) *в предыдущем смысле есть интеграл уравнения* (1).

В самом деле, пусть u есть интеграл уравнений (2); когда $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют уравнениям (2), по определению имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n = 0, \tag{4}$$

откуда, исключая dx с помощью уравнений (2), выводим

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} X_n = 0. \tag{5}$$

Это равенство есть *тождество*, так как оно имеет место при какой угодно системе значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих (2), стало быть, вообще и при какой угодно системе частных значений, так как таковая всегда может быть выбрана в качестве системы начальных значений. Значит, u есть интеграл уравнения (1).

Теорема II. *Обратно, всякий интеграл уравнения* (1) *есть интеграл системы* (2).

В самом деле, пусть функция u есть интеграл (1); она удовлетворяет уравнению (5) и если x изменяется так, что удовлетворены уравнения (2), можно заменить в уравнении (5) величины X пропорциональными им dx, после чего получим уравнение (4). Стало быть, u остается постоянной, так как $du = 0$, и представляет интеграл системы (2).

Теорема III. *Уравнение* (1) *или система* (2) *допускают* $n-1$ *различных интегралов* $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$; *все остальные интегралы заключены в формуле* $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$, *где функция* φ *произвольна.*

В самом деле, пусть $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ суть $n-1$ различных интегралов, полученных интегрированием системы (2). Присоединив к ним какой угодно новый интеграл u_n, будем иметь n тождеств:

$$X_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда исключив X (которые не все равны 0), находим

$$\frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0.$$

Это тождество показывает (n^0 290), что существует по крайней мере одно соотношение между u; но так как не может быть никакого соотношения между $u_1, \ldots, u_{n-1}$, необходимо окажется

$$u_n = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}).$$

Обратно, какова бы ни была функция φ, имеющая производные, всякое выражение этого вида, сохраняя постоянное значение, когда $u_1, \ldots, u_{n-1}$ постоянны, будет интегралом системы (2), а потому и (1).

Таким образом, написанное выражение представляет собой *общий интеграл* уравнения (1).

Отсюда вытекает следующее правило для интегрирования уравнения (1):

Правило. *Для интегрирования уравнения* (1) *интегрируем вспомогательную систему* (2) *обыкновенных дифференциальных уравнений. Проинтегрировав ее, получаем* ($n-1$) *соотношений, которые мы решаем относительно* ($n-1$) *постоянных интегрирования.* ($n-1$) *функций* $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, *которые остаются постоянными в силу уравнений* (2), *будут интегралами уравнения* (1) *и общий его интеграл будет*

$$z = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}),$$

где функция φ *(имющая производные) произвольна. Других решений уравнение* (1) *не имеет.*

Например, для интегрирования дифференциального уравнения коноидов $px+qy=0$ пишем вспомогательную систему

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \text{ откуда } \frac{y}{x} = \alpha.$$

Искомый общий интеграл будет

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Теорема IV. *Если известны* k *различных интегралов линейного уравнения с* n *независимыми переменными* ($k<n$)

$$X(z) = X_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

то интегрирование его приводится к интегрированию линейного уравнения с $n-k$ *независимыми переменными.*

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_k$ известные интегралы. Присоединим к ним $n-k$ новых функций $y_{k+1}, \ldots, y_n$, образующих вместе с ними систему n независимых функций, и примем их за новые переменные вместо x. Так как, по правилу дифференцирования сложных функций, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y_n},$$

то преобразованное уравнение будет

$$X(z) = X(y_1)\frac{\partial z}{\partial y_1} + X(y_2)\frac{\partial z}{\partial y_2} + \ldots + X(y_n)\frac{\partial z}{\partial y_n} = 0.$$

Для вычисления $X(y)$ сперва предполагаем, что y выражено в функции от x, для производства операции X, а затем возвращаемся к переменным y.

Но в данном случае, так как $y_1, y_2, \ldots, y_k$ суть интегралы уравнения $X(z)=0$, преобразованное уравнение приводится к

$$X(y_{k+1})\frac{\partial z}{\partial y_{k+1}}+\ldots+X(y_n)\frac{\partial z}{\partial y_n}=0.$$

Это уравнение не содержит больше производных по $y_1, \ldots, y_k$, а потому переменные эти можно рассматривать как произвольные параметры, а само уравнение — как уравнение с $(n-k)$ независимыми переменными. Его интегрирование приводится к интегрированию системы $(n-k-1)$ совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_{k+1}}{X(y_{k+1})}=\frac{dy_{k+2}}{X(y_{k+2})}=\ldots=\frac{dy_n}{X(y_n)},$$

которая содержит k параметров $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

295. Теория множителей. Определение. Обозначим опять через $X(z)$ левую часть уравнения (1) предыдущего n⁰. Jacobi называет *множителем* уравнения $X(z)=0$ или множителем $X(z)$ такое выражение M, зависящее от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что произведение $MX(z)$ представляется в виде функционального определителя, т. е. что имеет место тождество

$$MX(z)=\frac{d(z, u_1, \ldots, u_{n-1})}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

причем $(n-1)$ функций и от переменных x — известны.

Теорема I. *Всякое линейное и однородное уравнение $X(z)=0$ допускает множитель M.*

В самом деле, пусть $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ есть система $(n-1)$ различных интегралов уравнения $X(z)=0$. Так как $X_1 \neq 0$ и потому x_1 не есть интеграл уравнения $X(z)=0$ (левая часть которого приводится к X_1 при $z=x_1$), функции $x_1, u_1, \ldots, u_{n-1}$ независимы и функциональный определитель

$$\delta_1=\frac{d(x_1, u_1, \ldots, u_{n-1})}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\frac{d(u_1, \ldots, u_{n-1})}{d(x_1, \ldots, x_n)}$$

не равен тождественно нулю.

Рассмотрим систему n тождеств, линейных относительно $X_1, X_2, \ldots, X_n$,

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots,+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=X(z),$$

$$X_1\frac{\partial u_i}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u_i}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial u_i}{\partial x_n}=0, \quad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

из которых первое является определением $X(z)$, а остальные выражают, что u_i суть интегралы уравнения (1). Помножив их соответственно на миноры $\delta_1, \delta_2, \ldots$ элементов первого столбца определителя системы, который есть не что иное, как функциональный определитель

$$\frac{d(z, u_1, \ldots, u_{n-1})}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

и сложив, получим тождество

$$X_1 \frac{d(z, u_1, \ldots, u_{n-1})}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \delta_1 X(z).$$

Так как сверх того $\delta_1 \neq 0$ и функциональный определитель не может обращаться тождественно в 0, то функция $\frac{\delta_1}{X_1}$, не содержащая z, есть множитель M уравнения $X(z) = 0$.

Теорема II. *Если выражение*

$$X(z) = X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots, + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

само по себе есть функциональный определитель, а именно равно

$$\frac{d(z, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

то имеем тождественно

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0, \tag{6}$$

В самом деле, мы имеем

$$X_1 = \frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{d(x_2, x_3, \ldots, x_n)}; \quad X_2 = -\frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{d(x_1, x_3, \ldots, x_n)} \ldots$$

Стало быть, выражение (6) будет линейным и однородным относительно вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ функций u. Мы утверждаем, что коэффициенты всех этих производных равны 0; достаточно установить это для одной из них, например $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}$. Она входит только в первые два члена (6), а именно в

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{d(u_2, \ldots, u_{n-1})}{d(x_3, \ldots, x_n)} + \ldots\right],$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{d(u_2, \ldots, u_{n-1})}{d(x_3, \ldots, x_n)} - \ldots\right].$$

Стало быть, оба коэффициента при $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}$ сокращаются.

Теорема III. *Обратно, если имеет место тождество*

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0, \tag{6}$$

$X(z)$ *есть функциональный определитель.*

В самом деле, пусть $M=\frac{\delta_1}{X_1}$ есть множитель $X(z)$, полученный при доказательстве теоремы I; $MX(z)$ будет функциональным определителем:

$$MX(z)=\frac{d(z,u_1,\ldots,u_{n-1})}{d(x_1,x_2,\ldots,x_n)}. \tag{7}$$

В силу теоремы II мы имеем

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n}=0.$$

Но, в силу (6), тождество это приводится к

$$X_1\frac{\partial M}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial M}{\partial x_n}=X(M)=0.$$

Таким образом M есть интеграл уравнения $X(z)=0$, и можно положить

$$M=\varphi(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1}).$$

Определим квадратурой функцию U_{n-1} от $u_1,u_2,\ldots,u_{n-1}$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial U_{n-1}}{\partial u_{n-1}}=\frac{1}{M}=\frac{1}{\varphi(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1})}.$$

Рассматривая z, как переменную, не зависящую от u, можем переписать это уравнение в виде

$$\frac{1}{M}=\frac{d(z,u_1,u_2,\ldots,u_{n-2}U_{n-1})}{d(z,u_1,u_2,\ldots u_{n-2}\,u_{n-1})}$$

и тогда соотношение (7) в силу свойств якобианов (n° 15) дает

$$X(z)=\frac{d(z,u_1,u_2,\ldots,u_{n-2}U_{n-1})}{d(x_1,x_2,\ldots,x_n)},$$

т. е. $X(z)$ есть функциональный определитель.

Теоремы II и III приводят к следующему заключению:

Теорема IV. *Множители уравнения $X(z)=0$ суть интегралы уравнения*

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n}=0.$$

Теорема V. *Если известен какой-нибудь множитель μ уравнения $X(z)=0$, все остальные множители получим, умножив μ на общий интеграл уравнения $X(z)=0$.*

В самом деле, подставив $M=\mu z$ в предыдущее уравнение для множителей, получим уравнение для определения z:

$$z\left[\frac{\partial(\mu X_1)}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial(\mu X_n)}{\partial x_n}\right]+\mu\left[X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}\right]=0,$$

которое приводится к $X(z)=0$, так как первое слагаемое обращается в 0.

296. Присоединение новой независимой переменной. Часто для большей симметрии систему уравнений (1) и (2) n⁰ 294 заменяют соответствующей системой, которая содержит лишнюю независимую переменную t:

$$\frac{\partial z}{\partial t}+X(z)=0, \tag{I}$$

$$dt=\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}. \tag{II}$$

Уравнение (I) приводится к (1), когда z не зависит от t, а потому интегралы $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ уравнения (1) будут $(n-1)$ различными интегралами новой системы, которые не зависят от t, и других таких интегралов не будет. Для завершения интегрирования остается найти последний интеграл, содержащий t; *это можно сделать с помощью одной квадратуры.*

В самом деле, из (II) находим:

$$t-t_0=\int_{x_0}^{x}\frac{dx_1}{X_1}:$$

Интегрирование здесь производим, заменив сперва в X_1 переменные $x_2, x_3, \ldots, x_n$ выражениями в функции от x_1, которые получаются при интегрировании системы (2), т. е. извлеченными из равенств

$$u_i=a_i \quad (i=1, 2, \ldots, n-1);$$

затем после интегрирования заменяем постоянные a_i их выражениями u_i, что дает окончательно

$$t-t_0=u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Таким образом получаем искомый последний интеграл u_n-t. Когда $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ известны, определение u_n, как видим, требует лишь одной квадратуры.

Теорема. *Когда вычислен интеграл u_n, получаем множитель уравнения $X(z)$ в виде функционального определителя.*

$$M=\frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

В самом деле, образуем множитель M уравнения (1) по способу, указанному для уравнения (I) в доказательстве теоремы n⁰ 295, причем роль x_1 играет теперь t. Мы должны будем заменить X_1 на единицу, δ_1 — определителем

$$\frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_n-t)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

и мы получим таким образом множитель M, не зависящий от t:

$$M=\frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

который удовлетворяет тождеству

$$M\left[\frac{dz}{dt}+X(z)\right]=\frac{d(z_1, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n-t)}{d(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Для того чтобы перейти отсюда к уравнению (I), допустим, что z не зависит от t. Тогда, так как t не входит ни в z, ни в u, все элементы первого столбца этого определителя, кроме последнего, обращаются в 0, последний же — в (-1). Это дает:

$$MX(z)=\pm\frac{d(z_1, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\frac{d(z, \pm u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

т. е. M есть множитель $X(z)$. Заметим, что полученное выражение, если отвлечься от знака, совпадает с тем, которое мы определили при доказательстве теоремы I n⁰ 295.

297. Замена переменных. *Если при замене переменных мы заменяем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $y_1 y_2, \ldots, y_n$ и если известен множитель M уравнения $X(z)=0$, из него можно вывести множитель M' преобразованного к y уравнения, которое мы обозначим через $Y(z)=0$.*

В самом деле, функции $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n-t$, выраженные через x или y, суть соответственно интегралы уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial t}+X(z)=0 \text{ или } \frac{\partial z}{\partial t}+Y(z)=0.$$

Множители этих двух уравнений, не зависящие от t, имеют соответственно общие выражения (n⁰ 296 и 295, V):

$$M=\frac{d(u_1, \ldots, u_n)}{d(x, \ldots, x_n)}\varphi(u_1, \ldots, u_{n-1}); \; M'=\frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{d(y_1, \ldots, y_n)}\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}).$$

Вместе с тем это будут общие выражения множителей уравнений $X(z)=0$ и $Y(z)=0$. Рассмотрим те из них, которые соответствуют одной и той же функции φ; разделив почленно и пользуясь свойствами функциональных определителей, находим:

$$M'=M\frac{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{d(y_1, y_2, \ldots, y_n)};$$

таким образом, зная M, можем вычислить и M'.

298. Принцип последнего множителя Jacobi. *Если известны $(n-2)$ различных интегралов уравнения $X(z)=0$ и множитель его, интегрирование уравнения приводится к квадратурам.*

В самом деле, приняв за новые переменные независимые $(n-2)$ интеграла $u_1, \ldots, u_{n-2}$ и отличные от них переменные y_1 и y_2, преобразуем систему (2) к следующей:

$$\frac{du_1}{0}=\frac{du_2}{0}=\ldots\frac{du_{n-2}}{0}=\frac{dy_1}{Y_1}=\frac{dy_2}{Y_2},$$

которой соответствует уравнение в частных производных:

$$Y(z) = Y_1 \frac{\partial z}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial z}{\partial y_2} = 0.$$

По предположению и в силу предыдущей теоремы мы знаем его множитель M, причем

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(MY_1) + \frac{\partial}{\partial y_2}(MY_2) = 0;$$

но это выражает, что M есть интегрирующий множитель последнего уравнения, которое нужно проинтегрировать:

$$Y_2 dy_1 - Y_1 dy_2 = 0;$$

интегрирование приводится поэтому к квадратурам.

Замечание. В приложениях часто случается, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0;$$

тогда $M = 1$ будет множителем и можно применять предыдущую теорему. Уравнение Jacobi $y'' = f(x, y)$ является примером этого. Оно приводится к системе:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{f},$$

причем

$$\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial (1)}{\partial x} = 0.$$

Стало быть, система интегрируется в квадратурах, если известен ее первый интеграл, как это мы уже и видели (n⁰ 266).

§ 4. Линейные уравнения общего вида.

299. Линейное уравнение с частными производными общего вида. Пусть z есть неизвестная функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ее частные производные по каждой из этих переменных. Пусть наконец, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, Z данные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, непрерывные со своими производными первого порядка, причем по крайней мере одна из функций X, например X_1, не обращается тождественно в 0.

Наиболее общее линейное уравнение имеет вид

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = Z$$

или, что то же самое:

$$Z - X_1 p_1 - \ldots - X_n p_n = 0 \tag{1}$$

Правило интегрирования *Для интегрирования этого уравнения пишем вспомогательную систему обыкновенных уравнений:*

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dz}{Z}. \tag{2}$$

Проинтегрировав эту систему и разрешив интегралы относительно произвольных постоянных, получаем систему ее n различных интегралов

$$\varphi_i(x_1, x_2,\ldots, x_n, z)=a_i \quad (i=1, 2,\ldots, n).$$

Общий интеграл уравнения (1) *есть неявная функция z, которая определяется из соотношения*

$$F(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)=0,$$

где F означает произвольную функцию (имеющую производные). В виде исключения может оказаться особое решение, не получающееся из предыдущего, но оно никаких произвольных величин не содержит.

Доказательство. Мы докажем эту теорему, следуя в общем если не считать некоторых изменений, способу Gilbert'а, при котором не может потеряться никакого решения. Способ этот заключается в том, что левая часть данного уравнения (1) представляется в виде функционального определителя.

Обозначим для краткости через R левую часть уравнения (1) и рассмотрим систему линейных относительно $X_1, X_2,\ldots, X_n, Z$ соотношений:

$$\left.\begin{aligned} R&=Z-X_1p_1-X_2p_2-\ldots-X_np_n\\ 0&=Z\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}+X_1\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}\\ &(i=1, 2,\ldots n).\end{aligned}\right| \tag{3}$$

Это суть тождества относительно букв z, x, p, причем первое является определением R, остальные же выражают, что φ суть интегралы (2). Определитель Δ системы (3) не равен тождественно 0, так как, разлагая его по элементам первой строки, имеем:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -p_1 & \ldots & -p_n\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}=\delta-p_1\delta_1-p_2\delta_2-\ldots-p_n\delta_n,$$

причем миноры δ, δ_1, $\delta_2,\ldots\delta_n$ суть явные функции от x_1, $x_2,\ldots, x_n$, z и один из них по крайней мере отличен от 0, так как и функции φ независимы (n^0 290, теорема III).

С другой стороны, мы утверждаем, что Δ можно представить в виде функционального определителя

$$\Delta = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

если условиться при вычислении частных производных функций φ рассматривать z как функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В самом деле, помножим элементы первого столбца на P_1 и прибавим к элементам второго; затем помножим их на p_2 и прибавим к элементам третьего и т. д. Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + p \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} + p \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \end{vmatrix}$$

и следовательно:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} + p \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \end{vmatrix},$$

что и представляет собою функциональный определитель, вычисленный в предположении, что z есть функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если желаем найти X_1 из системы (3), нужно умножить уравнения ее на миноры Δ, соответствующие коэффициентам при X_1, и сложить. Так как первый из этих миноров есть δ_1, мы получим $R\delta_1 = X_1\Delta$. Но X_1 и Δ не равны тождественно 0, а потому и δ_1 не равно тождественно 0, и мы получаем тождество:

$$R = \frac{X_1}{\delta_1}\Delta = \frac{X_1}{\delta_1} \cdot \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Итак, данное уравнение $R = 0$, с точностью до множителя, тождественно с

$$\frac{d(\varphi, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0.$$

В этом виде оно выражает, что функция z от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ должна быть выбрана так, чтобы между функциями φ существовало соотношение, не содержащее переменных x. Следовательно, для того чтобы функция z удовлетворяла уравнению (1), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношению $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$.

Не войти в это соотношение могут только решения, обращающие в 0 отброшенный множитель $\frac{X_1}{\delta_1}$, который представляет собой явную функцию от $x_1, \ldots, x_n, z$. Стало быть, если можно найти выражение z из соотношения $\frac{X_1}{\delta_1}=0$, мы получим решение, не содержащее произвольных величин; его называют *особенным решением*.

Особенное решение, если оно существует, может быть найдено без интегрирования. В самом деле, мы показали, что оно должно обращать в 0 всякий коэффициент X_1, если он не равен тождественно 0. Стало быть, оно обращает в 0 все коэффициенты $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z$ уравнения (1), и если существует функция z, удовлетворяющая этим условиям, она очевидно будет интегралом и может быть найдена без интегрирования.

300. Уравнения с тремя переменными. Геометрическое истолкование. Характеристика. Когда неизвестная функция z зависит только от двух независимых переменных x, y, уравнение (1) приводится к

$$Pp+Qq=R, \tag{I}$$

где p, q означают частные производные z по x и y, а P, Q, R — данные функции от x, y, z. В этом случае общий способ интегрирования имеет важное геометрическое истолкование.

Всякий интеграл $z=\varphi(x, y)$ определяет *интегральную поверхность* S, касательная плоскость которой имеет уравнение

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y).$$

Уравнение (I) выражает, что эта касательная плоскость содержит прямую D, уравнение которой:

$$\frac{\xi-x}{P}=\frac{\eta-y}{Q}=\frac{\zeta-z}{R}. \tag{D}$$

Каждой точке $M(x, y, z)$ пространства соответствует прямая D, через нее проходящая, которую мы назовем *прямою точки* M. Задачу интегрирования уравнения (I) можно тогда сформулировать так: *определить поверхность S так, чтобы касательная плоскость в каждой ее точке содержала прямую D точки касания.*

Назовем *характеристикой* кривую, которая во всякой своей точке касается прямой D этой точки. Характеристики определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей системе (2) в общем случае

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}. \tag{II}$$

Характеристики суть *интегральные кривые* этой системы. Стало быть, в конечном виде они определяются из двух различных интегралов системы (II):

$$\varphi(x, y, z)=a; \ \psi(x, y, z)=b. \tag{III}$$

Эти уравнения представляют семейство кривых, зависящих от двух произвольных параметров a и b; подобное семейство называют *конгруэнцией кривых*.

Прежде всего ясно, что всякая поверхность, представляющая собою геометрическое место характеристик, есть интеграл уравнения (I), ибо касательная плоскость к ней содержит касательную к характеристике, проходящую через точку касания, т. е. прямую D.

Но и обратно, всякая интегральная поверхность есть геометрическое место характеристик. В самом деле, правило интегрирования приводит к тому, что между параметрами a, b устанавливается произвольное соотношение

$$F(a, b) = 0,$$

а затем их исключают из этого соотношения и уравнений (III). Но таким именно путем и получается геометрическое место характеристик.

Исключение может представить лишь тот случай, когда P, Q, R обращаются в 0 во всех точках интегральной поверхности; но в таких точках не существует и прямая D.

Задача Cauchy. Задача Cauchy состоит в том, что требуется определить интегральную поверхность, проходящую через данную кривую C. Предыдущие исследования позволяют доказать, что задача эта допускает одно и только одно решение, если кривая C не есть характеристика.

Пусть x_0, y_0, z_0 суть координаты переменной точки кривой C, заданной уравнениями

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0; \quad F_1(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Искомая интегральная поверхность будет геометрическим местом характеристик, проходящих через точки (x_0, y_0, z_0). По формулам (III) уравнения этих характеристик будут

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0); \quad \psi(x, y, z) = \psi(x_0, y_0, z_0). \tag{IV}$$

Уравнение интегральной поверхности получим, исключив x_0, y_0, z_0 из четырех предыдущих уравнений.

В частности, если мы предположим, что кривая C лежит в плоскости yz, задача заключается в нахождении интеграла z, который приводится к произвольной заданной функции $f(y)$ при $x = 0$. Его мы получим, исключив z_0 и y_0 из трех уравнений:

$$z_0 = f(y_0); \quad \varphi(x, y, z) = \varphi(0, y_0, z_0); \quad \psi(x, y, z) = \psi(0, y_0, z_0).$$

Замечание. В случае какого угодно числа $(n+1)$ переменных $z, x_1, \ldots, x_n$, вышеприведенное геометрическое истолкование не годится, но предыдущую терминологию распространяют и на общий случай.

Говорят, что система общих интегралов уравнений (2) определяет семейство *интегральных кривых*, зависящих от n произвольных параметров. Эти кривые называются *характеристиками* уравнения (1). Всякий интеграл (1) есть геометрическое место характеристик, и нахождение этих интегралов приводится к нахождению характеристик.

Задача Cauchy заключается в нахождении интеграла, проходящего через данное многообразие ($n-1$) измерений, т. е. определенное двумя соотношениями между переменными z и x. Эта задача допускает одно и только одно решение, если только это многообразие не представляет геометрическое место характеристик. В частности, можно искать интеграл z, который приводится к произвольной заданной функции $f(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ при $x_1 = 0$, причем предполагается, что плоскость $x_1 = 0$ не есть сама по себе геометрическое место характеристик. Эти задачи трактуются совершенно так же, как и в предыдущем случае.

301. Примеры. *I. Уравнение цилиндрических поверхностей* (n^0 283) есть

$$ap + bq = 1.$$

Дифференциальные уравнения характеристик будут

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1},$$

откуда

$$x - az = \alpha,$$
$$y - bz = \beta.$$

Итак, характеристики суть параллельные прямые. Общий интеграл будет

$$F(x - az,\ y - bz) = 0.$$

II. Уравнение конических поверхностей (n^0 284) есть

$$(x-a)\,p + (y-b)\,q = z - c.$$

Уравнения характеристик:

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c},$$

откуда

$$\frac{x-a}{z-c} = \alpha,$$

$$\frac{y-b}{z-c} = \beta.$$

Это будут прямые, проходящие через точку (a, b, c). Общий интеграл будет

$$F\left(\frac{x-a}{z-c};\ \frac{y-b}{z-c}\right) = 0.$$

III. Уравнение поверхностей вращения есть (n^0 286):

$$(cy - bz)\,p + (az - cx)\,q = bx - ay.$$

Система уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay}$$

Ее мы приводим к линейной системе, приравняв эти отношения дифференциалу dt новой переменной, что даст

$$dx = (cy - bz)\,dt; \quad dy = (az - cx)\,dt; \quad dz = (bx - ay)\,dt.$$

Отсюда выводим две комбинации, которые интегрируются непосредственно:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$
$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha,$$
$$ax + by + cz = \beta.$$

Характеристики оказываются окружностями, определяемыми двумя последними уравнениями. Общий интеграл уравнения в частных производных будет:

$$F(x^2 + y^2 + z^2,\ ax + by + cz) = 0.$$

§ 5. Интегрирование одного уравнения в полных дифференциалах.

302. Полная интегрируемость. Рассмотрим сперва уравнение с тремя переменными

$$dz = X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dx, \tag{1}$$

в котором x, y суть независимые переменные, z — неизвестная функция от них, наконец X и Y — известные *непрерывные* функции от x, y, z.

Уравнение (1) называется уравнением в *полных дифференциалах*. Говорят, что оно *вполне интегрируемо*, если оно имеет интеграл, содержащий произвольную постоянную, другими словами, если существует единственное соотношение

$$z = \varphi(x, y, \alpha), \tag{2}$$

содержащее произвольную постоянную α, следствием которого является уравнение (1).

303. Теорема I. *Необходимое и достаточное условие полной интегрируемости уравнения* (1) *состоит в том, чтобы при произвольных x, y, z:*

$$\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} + X\frac{\partial Y}{\partial z}. \tag{3}$$

При этом предполагается только существование и непрерывность четырех частных производных, которые входят в эту формулу *).

Чтобы показать необходимость этого условия, подставим в (1) вместо z его выражение (2); правая часть становится точным полным дифферен-

*) Таким образом мы не предполагаем существования производных

$$\frac{\partial X}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

циалом по двум переменным x, y. Следовательно, при произвольных x и y имеем:

$$\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Но так как по предположению $\varphi(x, y, \alpha)$ есть интеграл уравнения (1), его частные производные суть $X(x, y, \varphi)$ и $Y(x, y, \varphi)$. Стало быть, соотношение (3) удовлетворяется тождественно для всех значений x, y, если только там z заменено на $\varphi(x, y, \alpha)$. Отсюда заключаем, что оно выполняется и до этой подстановки, *т. е. при произвольных значениях* x, y, z, так как при данных x, y можно выбрать произвольную постоянную α так, чтобы φ (т. е. z) получило произвольное значение. Итак, условие необходимо.

Оно также и достаточно, так как, если оно выполнено, нижеследующая теорема показывает, что существует интеграл, содержащий произвольную постоянную.

304. Теорема II. *Предположим, что тождество* (3) *имеет место и пусть* x_0, y_0, z_0 *система произвольных начальных значений переменных; если* X, Y *и четыре частные производные, входящие в формулу* (3), *непрерывны в соседстве с этими значениями, уравнение* (1) *допускает один и только один интеграл* $z=\varphi(x, y)$, *приводящийся к* z_0 *в точке* (x_0, y_0). *При этом* z *и его частная производная по* z_0 *суть непрерывные функции от* x, y, z_0.

В самом деле, мы покажем, что этот интеграл можно получить последовательным интегрированием двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dx}=X, \quad \frac{dz}{dy}=Y,$$

причем y в первом и x во втором уравнении рассматриваются как параметры.

Интегрируем сперва уравнение между ζ и x:

$$\frac{d\zeta}{dx}=X(x, y_0, \zeta) \tag{4}$$

и определим его интеграл ζ, который приводится к z_0 при $x=x_0$. Так как X и $\dfrac{\partial X}{\partial z}$ непрерывны, то интеграл этот существует и определяется единственным образом. При этом он будет непрерывной функцией от z_0 и допускает непрерывную частную производную по z_0 (n$_0$ 190—191). Затем интегрируем уравнение между z и y:

$$\frac{dz}{dy}=Y(x, y, z) \tag{5}$$

(где x рассматривается как параметр) и определим его интеграл $z=\varphi(x, y)$, приводящийся к ζ при $y=y_0$, так что $\zeta=\varphi(x, y_0)$. Так как Y, $\dfrac{\partial Y}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Y}{\partial z}$ непрерывны, интеграл этот существует и определяется единственным образом

Притом он будет непрерывной функцией от x, y, ζ и относительно ζ допускает частную производную, также непрерывную (n^0 190—191). Стало быть, он будет непрерывной функцией и относительно x, y, z_0 и относительно z_0 будет допускать частную производную, непрерывную по переменным x, y, z_0.

Мы утверждаем, что функция $z = \varphi(x, y)$ есть искомый интеграл уравнения (1).

В самом деле, $\varphi(x, y)$ приводится к ζ при $y = y_0$ и следовательно к z, в точке (x_0, y_0). С другой стороны, так как $\varphi(x, y)$ есть интеграл уравнения (5), имеем

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = Y(x, y, \varphi). \tag{6}$$

Остается показать, что

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = X(x, y, \varphi).$$

Соотношение это имеет место при $y = y_0$, так как оно приводится тогда к уравнению (4); нужно показать, что оно сохраняется и при других значениях y.

Заметим сперва, что, в силу условий непрерывности, наложенных на уравнение (5), $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ существует и непрерывна (n^0 191, III); таким образом, достаточно установить еще лишь, что если мы положим

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = X(x, y, \varphi) + u, \tag{7}$$

то непрерывная функция u, которая превращается в 0 при $y = y_0$, остается равной 0 при произвольном y.

Для этого вычислим ее производную по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z} Y,$$

если только непрерывна производная $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$, как требуется теоремой Schwarz'a о перестановке дифференцирований (т. I, n^0 153). Но это действительно имеет место, так как в силу (6)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}(X + u).$$

Подставив это выражение в предыдущее равенство, в силу (3) находим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}(X + u) - \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z} Y = u\frac{\partial Y}{\partial z}.$$

Стало быть, u, рассматриваемая как функция от y, удовлетворяет линейному уравнению $\frac{du}{dy} = u\frac{\partial Y}{\partial z}$ (где z заменено на φ) и обращается в 0 при $y = y_0$. Но частный интеграл, удовлетворяющий этому начальному условию, есть $u=0$, и он — единственный, так как $\frac{\partial Y}{\partial z}$ непрерывна; значит, u все время равно 0.

Обратно, всякий интеграл (2), имеющий начальное значение z_0, должен удовлетворять уравнениям (4) и (5) (с соответствующими начальными условиями), а потому интеграл этот определяется единственным образом.

Отсюда мы заключаем, что общий интеграл уравнения (1) должен зависеть от произвольной постоянной, выбирая которую, можно придать z произвольное значение z_0 в точке (x_0, y_0).

305. Теорема и способ интегрирования Mayer'a. *Если уравнение* (1) *вполне интегрируемо, его интегрирование зависит от интегрирования одного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего произвольный параметр.*

Пусть z_0 есть произвольное значение z в точке x_0, y_0, причем выполнены все условия непрерывности в соседстве с этими начальными значениями: во всякой точке x, y интеграл будет вполне определен заданием его начального значения z_0.

Таким образом, для того, чтобы найти его значение, достаточно передвигать точку x, y по прямой линии, соединяющей начало x_0, y_0 с этой точкой.

Для упрощения письма мы предположим, что точка x_0, y_0 принята за начало координат; для того чтобы привести общий случай к этому, достаточно заменить в уравнении x на x_0+x и y на y_0+y, что соответствует перенесению осей в плоскости x, y.

Для определения значения в точке x, y интеграла, значение которого в начале есть z_0, соединим начало координат с этой точкой отрезком прямой. На этом отрезке мы имеем:

$$y=\lambda x; \quad dy=\lambda\, dx,$$

где λ — постоянный параметр; подставив эти выражения в уравнение (1), имеем:

$$dz=(X+\lambda Y)\, dx. \tag{8}$$

Для нахождения интеграла уравнения (1) достаточно интегрировать это соотношение между z и x. В самом деле, пусть

$$F(x, z, \lambda)=\text{const.}$$

есть общий интеграл уравнения (8), разрешенный относительно постоянной интегрирования; частный интеграл z, имеющий начальное значение z_0, есть неявная функция, определяемая из уравнения

$$F(x, z, \lambda)=F(0, z_0, \lambda).$$

Заменяя λ на $\frac{y}{x}$, получаем соотношение между x, y, z. т. е. интеграл уравнения (1); это будет

$$F\left(x, z, \frac{y}{x}\right)=F\left(0, z_0, \frac{y}{x}\right) \tag{9}$$

и он зависит от произвольной постоянной z_0.

Замечание. В принципе способ Mayer'a дает интеграл, имеющий начальное значение z_0 только в области, в которой выполняются условия непрерывности, предположенные в предыдущих теоремах. Но в большинстве случаев на практике вычисления приводят к определению интеграла с помощью соотношения между буквенными выражениями, которые выводятся по одним и тем же правилам, независимо от значения букв, так что формула, доказанная в ограниченной области, остается верной в какой угодно области. Однако замечание это можно обосновать со всей строгостью, лишь опираясь на общие свойства аналитических функций.

В приложениях, которые встречаются, проще всего, вообще говоря, за начальную точку в плоскости x, y выбирать начало координат $x_0=0$, $y_0=0$. Но это не всегда возможно, так как условия непрерывности могут и не выполняться в этой точке.

Тогда предварительно делают преобразование координатных осей, указанное в предыдущем доказательстве.

Пример. Вполне интегрируемое дифференциальное уравнение

$$dz=\frac{2\,xz\,dx+2\,yz^2\,dy}{1-x^2-2\,y^2z}$$

удовлетворяет условиям непрерывности в соседстве с точкой $x=y=0$. Будем искать интеграл z, принимающий значение z_0 в начале координат.

Положив $y=\lambda x$, $dy=\lambda dx$ и освободившись от знаменателя, найдем

$$dz\,(1-x^2)-2\,xz\,dx=2\,\lambda^2\,(x^2z\,dz+xz^2\,dx).$$

Обе части здесь точные дифференциалы, а потому интеграл этого обыкновенного дифференциального уравнения будет

$$z\,(1-x^2)-\lambda^2x^2z^2=\text{const.}=z_0;$$

интеграл же уравнения в полных дифференциалах:

$$z\,(1-x^2)-y^2z^2=z_0.$$

306. Симметричная форма уравнения. Более симметричное уравнение

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0, \tag{10}$$

где A, B, C суть данные функции от x, y, z и $C\neq0$, приводится к предыдущему, если его разрешить относительно dz. Условие полной интегрируемости будет поэтому

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A}{C}\right)-\frac{B}{C}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A}{C}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{C}\right)-\frac{A}{C}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B}{C}\right)$$

или, выполнив все вычисления, в более симметричной форме:

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)=0. \tag{11}$$

Когда это тождество выполнено, интегрирование уравнения (10) можно произвести по способу Mayer'a. Но здесь можно по желанию разрешить уравнение относительно dx, dy, dz и считать неизвестной соответственно x, y или z, смотря по тому, какую из этих переменных проще определить.

307. Интегрирующий множитель. *Когда условие полной интегрируемости* (11) *выполнено, существует такой множитель* μ, *зависящий от* x, y, z, *что выражение*

$$\mu\,(A\,dx+B\,dy+C\,dz)$$

есть полный дифференциал.

В самом деле, уравнение (10) допускает интеграл, содержащий произвольную постоянную, который, будучи разрешен относительно этой постоянной, имеет вид

$$F(x, y, z)=\alpha. \tag{12}$$

Дифференцируя, находим отсюда

$$F_x'\,dx+F_y'\,dy+F_z'\,dz=0,$$

или, отождествляя выражение dz, которое получается отсюда, с тем, которое дано уравнением (10):

$$\frac{F_x'}{A}=\frac{F_y'}{B}=\frac{F_z'}{C}. \tag{13}$$

Эти соотношения не содержат больше α и имеют место для всякой системы значений x, y, z, удовлетворяющих уравнению (12), т. е. для произвольной системы x_0, y_0, z_0, так как при данных x_0, y_0 всегда можно сделать $\alpha=F(x_0, y_0, z_0)$. Таким образом соотношеиия эти суть тождества. Обозначив через μ функцию от x, y, z, определяемую одним из этих отношений, имеем тождественно:

$$\mu\,(A\,dx+B\,dy+C\,dz)=F_x'dx+F_y'dy+F_z'dz=dF(x, y, z),$$

что и доказывает теорему.

308. Особое решение. Когда уравнение (10) вполне интегрируемо, оно может допускать, кроме интеграла, содержащего произвольную постоянную и называемого *общим интегралом*, еще и *особое решение*, не содержащее произвольных величин. Это новое решение можно получить непосредственно, когда известен общий интеграл.

В самом деле, пусть известен интеграл (12); образуя одно из отношений (13), получаем из него интегрирующий множитель μ; тогда

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=\frac{1}{\mu}\,dF(x, y, z).$$

Стало быть, нашему уравнению можно удовлетворить только двумя способами:

1) полагая $F=\alpha$; это даст общий интеграл;

2) полагая $\frac{1}{\mu}=0$. Если можно отсюда найти выражение для z, получим особое решение.

309. Замечание. Способ Mayer'а есть наиболее простой способ интегрирования *с точки зрения теоретической*. Но на *практике* часто встречаются простые примеры, для которых интегрирующий множитель легко подмечается. Например, пусть дано вполне интегрируемое уравнение

$$2z\,(dx-dy)+(x-y)\,dz=0.$$

Переменную z отделяем от x, y, разделив уравнение на выражение $z(x-y)$, которое оказывается таким образом величиной, обратной интегрирующему множителю. Мы имеем:

$$\frac{2(dx-dy)}{x-y}+\frac{dz}{z}=0,$$

откуда

$$(x-y)^2 z=\alpha.$$

Это — общий интеграл. Имеется частное решение $z=0$, обращающее в ∞ множитель $\frac{1}{z(x-y)}$, но оно выводится из общего интеграла при $\alpha=0$.

310. Неполная интегрируемость. Если уравнение

$$dz=X\,dx+Y\,dy \tag{14}$$

не удовлетворяет условию полной интегрируемости, то нельзя найти удовлетворяющую ему функцию z от двух переменных x, y, которая содержит произвольную постоянную. Но это может оказаться возможным для функции $z=\varphi(x,y)$, не содержащей произвольной постоянной. Из доказательства теоремы I следует, что функция эта должна отождествлять равенство

$$\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial z}Y=\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial z}X. \tag{15}$$

Стало быть, функция $z=\varphi(x, y)$, если она существует, необходимо определяется из этого соотношения.

Таким образом, для того чтобы узнать, существует ли решение, и чтобы его найти, достаточно разрешить уравнение (15) относительно z и подставить полученное выражение в соотношение (14). Если оно будет удовлетворено, что возможно лишь в исключительных случаях, найденное выражение будет интегралом, но мы будем говорить, что в этом случае интегрируемость (14) *не полная*.

Вот пример этому: уравнение

$$dz=z(dx+x\,dy).$$

Соотношение (15) дает:

$$xz=z+xz,$$

откуда

$$z=0.$$

Это выражение z удовлетворяет дифференциальному уравнению и будет единственным его интегралом.

311. Распространение на какое угодно число переменных. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — данные непрерывные функции от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и неизвестной z. Рассмотрим уравнение в полных дифференциалах с $(n+1)$ переменными:

$$dz=\sum_{i=1}^{n} X_i\,dx_i. \tag{1}$$

Говорят, что уравнение (1) вполне интегрируемо, если существует единственное соотношение между $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, содержащее произвольную постоянную, следствием которого является уравнение (1).

Теорема I. *Необходимое и достаточное условие полной интегрируемости уравнения* (1) *выражается* $\frac{n(n-1)}{2}$ *тождествами*

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k}+X_k\frac{\partial X_i}{\partial z}=\frac{\partial X_k}{\partial x_i}+X_i\frac{\partial X_k}{\partial z}\quad (i,\ k=1,2,\dots n). \tag{2}$$

При этом предполагается существование и непрерывность всех частных производных, входящих в эти формулы *).

В самом деле, уравнение (1) должно быть вполне интегрируемо, когда изменяются только две переменных x_i, x_k, откуда и вытекает необходимость предыдущих условий. С другой стороны, эти условия достаточны в силу следующей теоремы:

Теорема II. *Если тождества* (2) *имеют место при указанных выше условиях непрерывности и если обозначим через* x_i^0, z_0 *произвольную систему начальных значений* $(n+1)$ *переменных* x_i, z, *уравнение* (1) *допускает один и только один интеграл,* $z=\varphi(x_1,\dots,x_n)$, *приводящийся к* z_0 *в точке* $(x_1^0,\dots,x_n^0)$.

Теорема верна для двух независимых переменных (n^0 304). Допустив, что она уже доказана для $(n-1)$ переменных, покажем, что она верна и для n.

Для ясности обозначим переменную x_n через y, коэффициент X_n через Y. Уравнение (1) примет вид

$$dz=\sum_{i=1}^{n-1}X_i\,dx_i+Y\,dy; \tag{3}$$

тождества же (2) при $k=n$ заменяются следующими:

$$\frac{\partial X_i}{\partial y}+Y\frac{\partial X_i}{\partial z}=\frac{\partial Y}{\partial x_i}+X_i\frac{\partial Y}{\partial z}. \tag{4}$$

Придадим сперва y постоянное значение $y_0=x_n^0$. При допущенных условиях существует один и только один интеграл ζ уравнения

$$d\zeta=\sum_{i=1}^{n-1}X_i\,(x_1,\ x_2,\dots,x_{n-1},\ y_0,\ \zeta)\,dx_i, \tag{5}$$

который принимает значение z_0 в точке $(x_1^0,\dots,x_{n-1}^0,\ y_0)$. Определив этот интеграл, будем изменять только y и найдем единственный и вполне определенный интеграл уравнения

$$\frac{dz}{dy}=Y, \tag{6}$$

который приводится к ζ при $y=y_0$. Мы утверждаем, что этот интеграл $z=\varphi(x_i,y)$, и есть искомый интеграл уравнения (3).

*) Таким образом не предполагается существование производных $\frac{\partial X_i}{\partial x_i}$.

В самом деле, этот интеграл приводится к z_0 в точке (x_i^0, y_0), причем имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Y(x_1, x_2, \ldots, y, \varphi),$$

так как φ есть интеграл уравнения (6).

Остается только доказать, что и при всех значениях i

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = X_i(x_1, x_2, \ldots y, \varphi).$$

В силу равенства (5) соотношение это имеет место при $y = y_0$. Для того чтобы показать, что оно существует при всех значениях y, достаточно только воспроизвести доказательство n⁰ 304, снабдив значком i буквы x и X в этом доказательстве. Теорема таким образом доказана.

Теорема и способ интегрирования Mayer'a. *Интегрирование уравнения в полных дифференциалах с $(n+1)$ переменными, вполне интегрируемого, приводится к интегрированию одного обыкновенного уравнения с $(n-1)$ параметрами.*

Рассмотрим уравнение (1) и предположим, что выполнены условия непрерывности для системы начальных значений $x_i^0 = 0$, z_0. В случае надобности, это условие можно выполнить, перенося координатные оси в пространстве x_i. Рассмотрим интеграл z, принимающий значение z_0 в начале координат. Для вычисления значения z в точке x_i можно передвигаться по прямой, соединяющей начало координат с этой точкой, и интегрировать уравнение вдоль этой прямой. Но при этом предположении мы имеем:

$$x_2 = \lambda_2 x_1;\ x_3 = \lambda_3 x_1;\ \ldots\ x_n = \lambda_n x_1,$$

где λ — постоянные и, подставляя в уравнение (1):

$$dz = (X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n)\,dx_1.$$

Это — обыкновенное дифференциальное уравнение между z и x_1. Разрешим его интеграл относительно постоянной интегрирования и выберем ее так, чтобы z принимало начальное значение z_0.

Получим:

$$F(z, x_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \text{const.} = F(z_0, 0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Значение z в точке x_i выводится отсюда, исключив λ, таким образом получаем интеграл уравнения (1) в виде:

$$F\left(z, x_1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) = F\left(z_0, 0, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Симметричная форма уравнения. Более симметричное уравнение

$$X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n = 0$$

можно привести к предыдущей формуле, разрешая его относительно одного из дифференциалов, которые оно содержит, и считая неизвестной соответствующую переменную. Условие полной интегрируемости устанавливается как и в случае трех переменных. Необходимо, чтобы при всех комбинациях значков i, k, l имели место тождества:

$$X_i\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_l}-\frac{\partial X_l}{\partial x_k}\right)+X_k\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i}-\frac{\partial X_i}{\partial x_l}\right)+X_l\cdot\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)=0.$$

Но уравнения эти не независимы. Если X_i отлично от 0, то достаточно, чтобы тождества эти имели место при всех комбинациях значков k, l, отличных от i, ибо эти последние условия достаточны для того, чтобы уравнение, разрешенное относительно dx_i, было вполне интегрируемо.

Когда уравнение вполне интегрируемо, оно допускает *интегрирующий множитель*. Если существует общий интеграл, из него можно вывести этот множитель; зная же множитель, можно получить *особое решение*, совершенно так же, как и в случаях трех переменных.

§ 6. Системы уравнений в полных дифференциалах.

312. Система вполне интегрируемая. Для упрощения письма мы рассмотрим сперва систему только трех уравнений, но формулы, доказательства и теоремы сами собою распространяются и на случай какого угодно числа уравнений.

Итак, рассмотрим систему трех совокупных уравнений с тремя неизвестными функциями x, y, z от n независимых переменных t_1, $t_2, \ldots, t_n$:

$$dx=\sum_{i=1}^{n} X_i\,dt_i;\quad dy=\sum_{i=1}^{n} Y_i\,dt_i;\quad dz=\sum_{i=1}^{n} Z_i dt_i, \tag{1}$$

где X, Y, Z означают данные непрерывные функции от x, y, z и t.

Определим символ операции $\frac{\delta}{\delta t_i}$, положив

$$\frac{\delta}{\delta t_i}=\frac{\partial}{\partial t_i}+X_i\frac{\partial}{\partial x}+Y_i\frac{\partial}{\partial y}+Z_i\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2}$$

Операция эта заключается в дифференцировании по t_i, причем x, y, z рассматриваются как функции от t_i, и производные x, y, z по t_i заменяются их выражениями, вытекающими из формул (1).

Говорят, что система (1) *вполне интегрируема*, если она допускает систему интегралов, содержащих три различные произвольные постоянные, т. е. такие, что, выбирая их, можно придать x, y, z произвольные начальные значения.

313. Теорема I. *Необходимое и достаточное условие полной интегрируемости системы* (1) *выражается тождествами*

$$\frac{\delta X_k}{\delta t_i}=\frac{\delta X_i}{\delta t_k},\quad \frac{\delta Y_k}{\delta t_i}=\frac{\delta Y_i}{\delta t_k};\quad \frac{\delta Z_k}{\delta t_i}=\frac{\delta Z_i}{\delta t_k}, \tag{3}$$

которые должны выполняться при всех комбинациях значков i, k. При этом предполагается непрерывность всех частных производ-

ных, которые входят в эти формулы, если их раскрыть с помощью (2).

Условие необходимо. В самом деле, если допустить существование интегралов, соотношения эти будут выполнены, если x, y, z заменить их выражениями в функции от t и произвольных постоянных, так как правые части уравнений (1) должны быть тогда полными дифференциалами. Но так как x, y, z можно считать произвольными одновременно с произвольными постоянными, соотношения эти будут удовлетворены при всех значениях t, x, y, z.

Достаточность условия вытекает из следующей теоремы:

314. Теорема II. *Пусть* $t_1^0, \ldots, t_n^0$ и x_0, y_0, z_0 *есть система начальных значений переменных, в соседстве с которыми выполняются предыдущие условия непрерывности. Если имеют место тождества* (3), *существует одна и только одна система функций* x, y, z, *принимающая начальные значения* x_0, y_0, z_0 *в точке* $(t_1^0, \ldots, t_n^0)$. *При этом функции* x, y, z *и их частные производные первого порядка по* x_0, y_0, z_0 *будут непрерывными функциями от* x_0, y_0, z_0 и t.

Когда переменные t приводятся к одной, уравнения (1) образуют систему совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае условия (3) исчезают, существование и непрерывность интегралов и их производных уже установлена (n° 193). Стало быть, в случае одной переменной t теорема верна. Для доказательства того, что она верна вообще, допустим, что она доказана для $(n-1)$ переменных, и покажем, что она верна и для n.

Придадим пока t_n постоянное значение t_n^0, заменим x, y, z на ξ, η, ζ и определим интегралы ξ, η, ζ системы

$$d\xi = \sum_{i=1}^{n-1} X_i dt_i; \quad d\eta = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i dt_i; \quad d\zeta = \sum_{i=1}^{n-1} Z_i dt_i, \tag{4}$$

которые приводятся к x_0, y_0, z_0 в точке $(t_1^0, \ldots t_{n-1}^0)$.

Найдя их, будем изменять только t_n и определим интегралы x, y, z системы

$$\frac{dx}{dt_n} = X_n; \quad \frac{dy}{dt_n} = Y_n; \quad \frac{dz}{dt_n} = Z_n, \tag{5}$$

которые в точке t_n^0 обращаются в ξ, η, ζ. В силу теорем n° 193 x, y, z и их производные будут непрерывными функциями от x_0, y_0, z_0 и t.

Мы утверждаем, что эти интегралы x, y, z, рассматриваемые как функции от всех переменных t, и будут искомыми интегралами системы (1).

В самом деле, в точке $(t_1^0, \ldots, t_n^0)$ они принимают значение x_0, y_0, z_0. С другой стороны, так как это интегралы системы (5), мы уже имеем

$$\frac{\partial x}{\partial t_n} = X_n; \quad \frac{\partial y}{\partial t_n} = Y_n; \quad \frac{\partial z}{\partial t_n} = Z_n. \tag{6}$$

Остается только показать, что и при значениях $i \neq n$, имеем

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = X_i; \quad \frac{\partial y}{\partial t_i} = Y_i, \quad \frac{\partial z}{\partial t_i} = Z_i,$$

причем частные производные x, y, z по t_i непрерывны в силу теоремы I n⁰ 193.

Эти соотношения выполнены при $t_n = t_n^0$, когда (x, y, z) приводятся к (ξ, η, ζ), и вытекают из (4). Для того чтобы показать, что они выполняются и при других значениях t_n, положим

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = X_i + u; \quad \frac{\partial y}{\partial t_i} = Y_i + v; \quad \frac{\partial z}{\partial t_i} = Z_i + w, \tag{7}$$

и покажем, что непрерывные функции u, v, w, которые обращаются в 0 при $t_n = t_n^0$, остаются равными 0, когда t_n изменяется.

С этой целью вычислим производные u, v, w, когда изменяется только t_n. Имеем:

$$\frac{du}{dt_n} = \frac{\partial}{\partial t_n}\left(\frac{\partial x}{\partial t_i}\right) - \frac{\partial X_i}{\partial t_n} - \frac{\partial X_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_n} - \frac{\partial X_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_n} - \frac{\partial X_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t_n}$$

или, короче, приняв во внимание (6) и (2) и допустив, что можно изменять порядок дифференцирования:

$$\frac{du}{dt_n} = \frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial x}{\partial t_n}\right) - \frac{\delta X}{\delta t_n}.$$

В силу теоремы Schwarz'а изменять порядок дифференцирования здесь можно, так как рассматриваемая частная производная второго порядка непрерывна. В самом деле, так как $\frac{\partial x}{\partial t_n} = X_n$, в виду (7) находим:

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial x}{\partial t_n}\right) = \frac{\partial X_n}{\partial t_i} + \frac{\partial X_n}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_i} + \frac{\partial X_n}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_i} + \frac{\partial X_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t_i} =$$

$$= \frac{\delta X_n}{\delta t_i} + u\frac{\partial X_n}{\partial x} + v\frac{\partial X_n}{\partial y} + w\frac{\partial X_n}{\partial z}.$$

Подставив эти выражения в предыдущее уравнение, получим, в силу уравнения (3), первое из трех уравнений нижеследующей системы:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt_n} = u\dfrac{\partial X_n}{\partial x} + v\dfrac{\partial X_n}{\partial y} + w\dfrac{\partial X_n}{\partial z}, \\ \dfrac{dv}{dt_n} = u\dfrac{\partial Y_n}{\partial x} + v\dfrac{\partial Y_n}{\partial y} + w\dfrac{\partial Y_n}{\partial z}, \\ \dfrac{dw}{dt_n} = u\dfrac{\partial Z_n}{\partial x} + v\dfrac{\partial Z_n}{\partial y} + w\dfrac{\partial Z_n}{\partial z}, \end{cases}$$

причем два остальных выводятся аналогичным образом.

Это есть система обыкновенных линейных уравнений между u, v, w и t_n^0. Система интегралов, обращающихся в 0 при $t = t_n^0$, дана равенствами $u = v = w = 0$ и так как других систем, удовлетворяющих тем же условиям, не существует, то u, v, w тождественно равны 0.

315. Способ интегрирования Mayer'a. *Интегрирование вполне интегрируемой системы* (1) *с n независимыми переменными приво-*

дится к интегрированию системы обыкновенных уравнений, содержащей $(n-1)$ произвольных параметров.

В самом деле, пусть условия непрерывности выполнены для начальных значений t, равных 0, и значений x_0, y_0, z_0 независимых функций. В случае надобности, этому условию можно удовлетворить, перенося оси координат. Рассмотрим систему интегралов x, y, z, принимающих эти значения в начале координат t. Переходя по прямой линии из начала координат в любую точку $t_1, \ldots, t_n$, проинтегрируем уравнения (1) вдоль этой прямой. Мы имеем:

$$t_2 = \lambda_2 t_1, \ldots, t_n = \lambda_n t_1,$$

где λ — постоянны; подставив это в уравнение (1), находим:

$$\frac{dx}{dt_1} = \sum_1^n \lambda_i X_i; \quad \frac{dy}{dt_1} = \sum_1^n \lambda_i Y_i; \quad \frac{dz}{dt_1} = \sum_1^n \lambda_i Z_i.$$

Это есть система обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегралы ее, разрешенные относительно постоянных интегрирования, будут

$$F_1(x, y, z, t_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \alpha; \quad F_2 = \beta; \quad F_3 = \gamma.$$

Постоянные определим так, чтобы x, y, z принимали начальные значения x_0, y_0, z_0 при $t_1 = 0$, это дает:

$$F_k(x, y, z, t_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = F_k(x_0, y_0, z_0, 0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Значения x, y, z в любой точке $t_1, \ldots, t_n$ получатся отсюда, если исключить λ. Это будут неявные функции, определяемые из системы уравнения

$$F_k\left(x, y, z, t_1, \frac{t_2}{t_1}, \ldots, \frac{t_n}{t_1}\right) = F_k\left(x_0, y_0, z_0, 0, \frac{t_2}{t_1}, \ldots, \frac{t_n}{t_1}\right) (k = 1, 2, 3).$$

Уравнения эти и дают искомые интегралы.

316. Общий случай. Система n совокупных уравнений в полных дифференциалах с n неизвестными функциями x_h от m независимых переменных y_i имеет вид

$$dx_h = \sum_{i=1}^m a_{hi}\, dy_i \quad \begin{cases} h = 1, 2, \ldots, n, \\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

где a данные непрерывные функции от x и y. Система эта называется *вполне интегрируемой*, если она допускает систему интегралов, содержащих n различных постоянных. Вводим операцию

$$\frac{\delta}{\delta y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} + \sum_{h=1}^n a_h^k \frac{\partial}{\partial x_h};$$

система будет вполне интегрируемой, если выполняются тождества,

$$\frac{\delta a_h^i}{\delta y_k} = \frac{\delta a_h^k}{\delta y_i} \quad \begin{cases} i, k = 1, 2, \ldots, m. \\ h = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Весь предыдущий анализ сам собой распространяется на общий случай, если только предположить непрерывность всех частных производных, входящих в эти формулы. В частности по способу Mayer'a интегрировани системы (8) приводится к интегрированию системы n обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот способ мы используем в n° 323.

§ 7. Системы уравнений линейных и однородных относительно частных производных одной и той же неизвестной функции.

317. Системы независимых уравнений. Рассмотрим систему уравнений, линейных и однородных относительно частных производных неизвестной функции f по n независимым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$X_i f = a_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + a_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Здесь X означает символ операции

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

a — данные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Операция X, которая представляет собою линейную комбинацию производных, подчиняется общим правилам дифференцирования. Например, имеем

$$X(u + v + \ldots) = Xu + Xv \qquad \ldots,$$

$$Xuv = uXv + vXu$$

$$XF(u, v, \ldots) = \frac{\partial F}{\partial u} Xu + \frac{\partial F}{\partial v} Xv + \ldots$$

Мы будем говорить, что q уравнений $X_i f = 0$ *независимы*, если не существует *тождественного* соотношения между ними вида

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \ldots + \lambda_q X_q f = 0,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ — функции от $x_1, \ldots, x_n$, не обращающиеся все тождественно в 0; мы будем говорить, что соотношение это *тождественно*, когда коэффициенты всех частных производных обращаются тождественно в 0, т. е. когда имеем n следующих тождеств:

$$\lambda_1 a_i^1 + \lambda_2 a_i^2 + \ldots + \lambda_q a_i^q = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если уравнения системы не независимы, то всегда можно исключить те уравнения, которые вытекают из остальных, и заменить данную систему другой, ей эквивалентной и состоящей из независимых уравнений. Поэтому впредь мы будем предполагать уравнения независимыми.

Легко видеть, что линейная система с n независимыми переменными не может содержать больше чем n независимых уравнений.

В самом деле, если бы мы имели $q > n$, система уравнений первой степени относительно λ, написанная выше, имела бы всегда решение $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$, не состоящее сплошь из нулей, которое обращало бы ее в тождество, и уравнения $X_i f = 0$ не были бы независимыми.

Итак, $q \leqslant n$. Если $q = n$, т. е. в системе имеется n независимых уравнений, это значит, что система

$$\lambda_1 a_i^1 + \ldots + \lambda_n a_i^n = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

может быть удовлетворена, только когда все λ равны 0, откуда следует, что определитель коэффициентов a_i^h системы отличен от 0. Следовательно, система уравнений $X_i f = 0$ имеет только очевидное решение

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

откуда

$$f = \text{const}.$$

Исключая этот случай, мы будем предполагать, что $q < n$.

318. Приведение какой угодно системы к полной системе. Пусть данная система состоит из $q < n$ уравнений $X_i f = 0$. Мы докажем следующее предложение:

Всегда можно образовать новые линейные уравнения, которым удовлетворяют все решения данной системы.

В самом деле, пусть f есть решение; имеем тождественно

$$X_i f = 0, \quad X_k f = 0,$$

а потому и

$$X_k (X_i f) = X_k X_i f = 0; \qquad X_i (X_k f) = X_i X_k f = 0,$$

откуда

$$X_i X_k f - X_k X_i f = (X_i X_k - X_k X_i) f = 0.$$

Итак, решения f удовлетворяют всем уравнениям этого вида, и мы покажем, что они также линейны и первого порядка. Для этого достаточно показать, что частные производные второго порядка в левых частях сокращаются. Произведя вычисления, мы имеем:

$$X_k X_i f = \sum_h X_k \left(a_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h}\right) = \sum_h (X_k a_h^i) \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_h a_h^i X_k \frac{\partial f}{\partial x_h} =$$

$$= \sum_h (X_k a_h^i) \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{h,\, l} a_h^i a_l^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_l}.$$

Последняя сумма симметрична относительно h, l, а потому она не изменяется при перестановке значков i, k, так как это приводится к перемещению значков h, l. Итак, переставляя в этом уравнении значки i, k и вычитая почленно, мы получаем *формулу разложения*:

$$(X_i X_k - X_k X_i) f = \sum_{h=1}^{n} (X_i a_h^k - X_k a_h^i) \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

которая и показывает, что рассматриваемые уравнения также линейны и первого порядка.

Образуем теперь уравнения $(X_i X_k - X_k X_i) f = 0$ для всех комбинаций значков i, k. Присоединим к данной системе все те из этих уравнений, которые независимы между собой и образуют вместе с данной системой систему независимых уравнений. Мы получим новую систему независимых уравнений

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \ldots X_{q+s} f = 0.$$

Если $q + s = n$, эта система, а потому и данная имеют только очевидное решение $f = \text{const}$. Если $q + s < n$, проделаем с новой системой ту же операцию, что и с данной, и т. д. Мы придем таким образом либо к системе n независимых уравнений, в каковом случае данная система имеет лишь очевидное решение $f = \text{const}$., либо же к системе r независимых уравнений $(r < n)$, таких, что все операции $(X_i X_k - X_k X_i) f$ суть линейные комбинации $X_1 f, X_2 f, \ldots X_r f$. В этом случае применение предыдущего способа не дает уже новых уравнений. Такие системы называют *полными системами*.

Теория полных систем основывается на следующем предложении.

319. Преобразование полных систем. Теорема. *Если заменим полную систему*

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \ldots X_r f = 0$$

другою

$$Z_1 f = 0; \quad Z_2 f = 0; \quad Z_r f = 0,$$

ей эквивалентной, т. е. такою, что

$$Z_i f = \lambda_1^i X_1 f + \ldots + \lambda_r^i X_r f \quad (i = 1, 2, \ldots r),$$

причем λ означает функции от x, определитель которых не равен 0, то новая система также будет полной.

В самом деле из двух соотношений

$$Z_i = \sum_h \lambda_h^i X_h; \quad Z_k f = \sum_l \lambda_l^k X_l f,$$

находим

$$Z_i Z_k f = \sum_{h, l} \lambda_h^i (X_h \lambda_l^k) X_l f + \sum_{h, l} \lambda_h^i \lambda_l^k X_h X_l f.$$

Последняя сумма симметрична относительно h, l, и потому не изменится, если переставить значки i, k, что приведет к перестановке h, l. Переставив значки i, k в предыдущем равенстве, вычтем его из первоначального; получим

$$(Z_i Z_k - Z_k Z_i) f = \sum_{h, l} [\lambda_h^i (X_h \lambda_l^k) - \lambda_h^k (X_h \lambda_l^i)] X_l f +$$

$$+ \sum_{h, l} \lambda_h^i \lambda_l^k (X_h X_l - X_l X_h) f.$$

Так как данная система была полной, правая часть этой формулы есть линейная комбинация выражений Xf; следовательно, если из последних соотношений в тексте теоремы выразим Xf в функции от Zf, правая часть будет линейной комбинацией Zf, что и доказывает полноту новой системы.

320. Приведение полной системы к якобиевой. Рассмотрим теперь полную систему m линейных уравнений с $m+n$ независимыми переменными. Для симметричности в выкладках обозначим эти переменные через $y_1, y_2, \dots y_m$, и $x_1, x_2, \dots x_n$. Разрешим систему относительно m частных производных, выбранных так, чтобы определитель их коэффициентов был отличен от 0, что возможно, так как уравнения независимы. Предположим, что это как раз производные по переменным y; данная система заменится другой следующего вида:

$$Z_i f = \frac{\partial f}{\partial y_i} + a_1^i \frac{df}{dx_1} + a_2^i \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots m),$$

которая также будет полной (n^0 319). Полную систему такого вида называют *якобиевой*. Якобиева система есть не что иное, как полная система, разрешенная относительно стольких производных, сколько есть уравнений. Эти системы обладают следующим основным свойством:

Теорема. *Во всякой якобиевой системе выражения*

$$(Z_i Z_k - Z_k Z_i) f$$

обращаются тождественно в 0.

В самом деле, так как система полная, имеем тождественно:

$$(Z_i Z_k - Z_k Z_i) f = \lambda_1 Z_1 f + \lambda_2 Z_2 f + \dots + \lambda_m Z_m f.$$

Но производные по y в левых частях исчезают, как это показывает формула разложения n^0 318; с другой стороны эти производные имеют коэффициентами в правых частях как раз $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$. Стало быть, все λ обращаются в 0, что и доказывает теорему.

Следствие. *Если φ есть интеграл одного из уравнений якобиевой системы, например $Z_1 f = 0$, то выражения $Z_2 \varphi$, $Z_3 \varphi, \dots Z_m \varphi$ будут также интегралами (различными или нет) того же уравнения.*

Действительно, по предположению $Z_1 \varphi = 0$, а потому и $Z_2 Z_1 \varphi = 0$; так как система якобиева, то имеет тождественно:

$$Z_1 Z_2 \varphi = Z_2 Z_1 \varphi = 0.$$

321. Эквивалентность якобиевой системы и системы уравнений в полных дифференциалах. Известно, что интегрирование одного уравнения, линейного и однородного, в частных производных эквивалентно интегрированию системы обыкновенных уравнений. Как увидим ниже, это частный случай соответствия, которое существует между якобиевыми системами уравнений в частных производных и вполне интегрируемыми системами в полных дифференциалах, так что мы здесь обобщим теорию n^0 294.

Рассмотрим якобиеву систему

$$Z_i f = \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{h=1}^{n} a_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0 \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ h = 1, 2, \dots, n \end{cases} \tag{1}$$

Имеем ряд тождеств вида

$$(Z_i Z_k - Z_k Z_i) f = 0,$$

каждое из которых распадается на n других по формуле n⁰ 318.

Эти тождества, выражающие, что система (1) якобиева, будут

$$Z_k a_h^i = Z_i a_h^k \qquad \begin{cases} i, k = 1, 2, \ldots, m, \\ h = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{2}$$

Помножим уравнения (1) на $dy_1, dy_2, \ldots dy_m$, рассматриваемые как независимые дифференциалы, и сложим почленно. Так как dy произвольны, то получим одно уравнение, равносильное системе (1):

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_h} \sum_{i=1}^{m} a_h^i dy_i = 0. \tag{3}$$

Напишем систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx_h = \sum_{i=1}^{m} a_h^i dy_i \qquad (h = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

Прежде всего мы заметим, что *условия* (2), *выражающие, что система* (1) — *якобиева, совпадают с условиями полной интегрируемости системы* (4), а именно (n⁰ 316):

$$\frac{\delta a_h^i}{\delta y_k} = \frac{\delta a_h^k}{\delta y_i} \qquad \begin{cases} i, k = 1, 2, \ldots, m, \\ h = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{5}$$

так как

$$\frac{\delta}{\delta y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} + \sum_{h=1}^{n} a_h^k \frac{\partial}{\partial x_h} = Z_k$$

и тождества (5) имеют тот же вид, что и (2).

Но мы должны еще предположить, что выполнены *условия непрерывности*, которые послужили основанием теории уравнений в полных дифференциалах вида (4), а именно, непрерывности коэффициентов a и их частных производных, которые входят в формулу (5), или, что то же самое, в формулы (2). Мы допустим поэтому, что условия эти выполнены.

Покажем теперь, что интегрирование якобиевой системы (1) и соответствующей вполне интегрируемой системы (4) — задачи, вполне эквивалентные.

Назовем интегралом системы (1) всякую функцию f от x и y, удовлетворяющую уравнению (1); интегралом системы (4) — всякую функцию f от x и y, которая остается постоянной в силу уравнений (4). Мы утверждаем, что системы (1) и (4) имеют одинаковые интегралы.

1⁰. *Всякий интеграл системы* (1) *есть интеграл системы*

В самом деле, всякий интеграл f системы (1) удовлетворяет уравнени которое, в силу (4), приводится к

$$df = 0 \text{ или } f = \text{const}$$

Следовательно, всякий интеграл системы (1) сохраняет постоянное значение в силу уравнений (4).

2°. *Всякий интеграл системы* (4) *есть интеграл системы* (1).

В самом деле, пусть f — функция, сохраняющая постоянное значение в силу (4). Возьмем систему dx, dy, удовлетворяющую соотношениям (4); мы получим:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i + \sum_h \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_h = 0.$$

Заменив dx их выражениями, полученными из (4), преобразуем это соотношение в (3), а (3) разобьется на систему уравнений (1), так как dy произвольны.

322. Теорема. *Всякая якобиева система, а потому и всякая полная система m линейных уравнений с $(m+n)$ независимыми переменными допускает n различных интегралов, причем всякий другой интеграл есть функция от этих n интегралов.*

В самом деле, проинтегрируем систему (4); интегралы содержат n произвольных постоянных, которые можно выбрать так, чтобы x получили произвольные значения при данной произвольной системе значений y (n° 316). Эта система интегралов, разрешенная относительно произвольных постоянных, имеет вид

$$\varphi_r(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Мы получили таким образом n интегралов φ_r системы (4), а потому и системы (1), причем интегралы эти будут различны, так как, в силу произвольности α_r, между функциями φ_r не может существовать никакого соотношения.

Покажем теперь, что всякий другой интеграл есть функция от интегралов φ_r.

Для этого заметим, что имеем тождественно

$$\frac{d(y_1, y_2, \ldots, y_m, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{d(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Второй функциональный определитель отличен от 0, так как система (6) может быть разрешена относительно x; так как, в силу этого, и первый определитель отличен от 0, величины y и φ независимы между собой и их можно принять за новые независимые переменные вместо x, y.

Уравнения (1), преобразованные к этим новым переменным, будут (n° 294, IV):

$$Z_i f = \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{h=1}^{n} (Z_i \varphi_h) \frac{\partial f}{\partial \varphi_h} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

и так как φ суть интегралы, они приводят к

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0.$$

Эти уравнения выражают, что всякий интеграл f, будучи независимым от $y_1, \ldots, y_m$, есть функция только от φ, что и требовалось доказать.

Обратно, *всякая функция от φ есть интеграл*, так как сохраняет постоянное значение одновременно с φ.

323. Способ интегрирования Mayer'a. Теорема. *Интегрирование якобиевой системы m линейных уравнений с $(m+n)$ независимыми переменными приводится к интегрированию одного линейного уравнения с $(n+1)$ переменными.*

В самом деле, построение интегралов φ, предыдущего n⁰ или интегрирование системы (4) в полных дифференциалах по способу Mayer'a (n⁰ 315) приводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих произвольные параметры λ.

Мы предположим, что *условия непрерывности*, указанные в n⁰ 321, выполнены в окрестности значений x^0 переменных x и нулей — для переменных y, ибо к этому всегда можно придти преобразованием координатных осей. В этом случае соответствующая система уравнений Mayer'a будет

$$\frac{dx_h}{a_h^1+\sum\limits_i \lambda_i a_h^i}=dy_1 \qquad \left\{\begin{array}{l} h=1,2,\ldots,n,\\ i=2,3,\ldots,m.\end{array}\right. \tag{7}$$

Она имеет n интегралов

$$\psi_r(y_1, x_1, \ldots, x_n, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)=\text{const.} \qquad (r=1,2,\ldots,n). \tag{8}$$

Зная их, получаем интегралы системы (4) по формулам (n⁰ 315):

$$\psi_r\left(y_1, x_1, \ldots, x_n, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_m}{y_1}\right)=\psi_r\left(0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_m}{y_1}\right)$$
$$(r=1,2,\ldots,n),$$

где x^0 — начальные значения x при $y=0$, и это будут постоянные интегрирования. Интегралы φ_r предыдущего n⁰, которые будут интегралами якобиевой системы, получим, разрешая предыдущую систему относительно этих постоянных. Другими словами, функции φ определяются из системы уравнений

$$\psi_r\left(y_1, x_1, \ldots, x_n, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_m}{y_1}\right)=\psi_r\left(0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{y_m}{y_1}\right) \tag{9}$$
$$(r=1,2,\ldots,n)$$

и приводятся соответственно к $x_1, x_2, \ldots, x_n$, когда все y обращаются в нуль.

Мы видим таким образом, что задача приводится к интегрированию системы (7) обыкновенных дифференциальных уравнений или к интегрированию одного линейного уравнения в частных производных, а именно:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}+\sum_{h=1}^{n}\left(a_h^1+\sum_{i=2}^{m}\lambda_i a_h^i\right)\frac{\partial f}{\partial x_h}=0. \tag{10}$$

Оно содержит $(n+1)$ независимых переменных, что и доказывает теорему.

Следствие. *Существует один и только один интеграл якобиевой системы, приводящийся к произвольной функции* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n$ *перeменных* x, *когда все* y *обращаются в* 0.

В самом деле, пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ суть предыдущие интегралы, приводящиеся соответственно к $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при $y=0$. Интеграл $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ приводится при тех же условиях к $F(x_1, \ldots, x_n)$. Всякий другой интеграл $\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, обладающий тем же свойством, должен совпадать с предыдущим, так как, когда все $y=0$, имеем:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

т. е., в силу произвольности x, функции Φ и F тождественны.

Это заключение предполагает, что выполнены *условия непрерывности* в рассматриваемой области значений x и в окрестности нулевых значений y.

324. Другое доказательство способа Mayer'a. Если установить предварительно существование интегралов, способ Mayer'a можно доказать без помощи системы уравнений в полных дифференциалах.

Поставим себе задачу определить интегралы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ системы (1), приводящиеся к $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при $y=0$. Для этого сделаем замену переменных

$$y_1 = t; \quad y_2 = tz_2, \ldots, y_m = tz_m$$

Преобразованную из (1) систему мы составим, подставив вместо $\frac{\partial f}{\partial y}$ их выражения, полученные из (1), в следующие уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial t} + \ldots = \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial z_i} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial z_i} + \ldots = t\frac{\partial t}{\partial y_i}$$

Первое уравнение дает:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n}\left(a_h^1 + \sum_{i=2}^{m} z_i a_h^i\right)\frac{\partial f}{\partial x_h} = 0,$$

как раз то уравнение, которое мы проинтегрировали в предыдущем n°.

Замена переменных преобразует интегралы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ предыдущего n° к функциям $\omega_1, \ldots, \omega_n$ от t и z, которые будут интегралами этого уравнения, приводящимися к $x_1, \ldots, x_n$ при значении $t=0$, обращающем в 0 все y. Но этого условия достаточно для определения этих интегралов. В самом деле, уравнение это можно интегрировать, рассматривая z как параметры. Пусть

$$\psi_r(t, x_1, \ldots, x_n, z_2, \ldots, z_m) \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

есть система его n различных интегралов; интегралы, приводящиеся к $x_1, \ldots, x_n$ при $t=0$, получатся из системы уравнений

$$\psi_r(t, x_1, \ldots, x_n, z_2, \ldots, z_m) = \psi_r(0, \omega_1, \ldots, \omega\ , z_2, \ldots, z_m);$$

интегралы же φ данной системы — из системы уравнений

$$\psi_r\left((y_1, x_1, \ldots, x_n, \frac{y_2}{y_1} \ldots \frac{y_m}{y_1}\right) = \psi_r\left(0, \varphi_1, \ldots \varphi, \frac{y_2}{y_1}, \ldots \frac{}{y_1}\right),$$

которые совпадают с рассмотренными выше.

325. Вторая теорема Mayer'а. *Определение одного интеграла якобиевой системы приводится к определению одного интеграла соответствующего ей линейного уравнения.*

В самом деле, пусть известен один интеграл ψ_r уравнения (10) или эквивалентной системы (7). Неизвестные интегралы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ якобиевой системы удовлетворяют соотношению (9). Разрешая его относительно φ_1, находим:

$$\varphi_1 = \theta_1(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n, \varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

Выполним над этим тождеством операцию Z_h; так как φ суть интегралы получим:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y_h} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} Z_h x_1 + \ldots + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_n} Z_h x_n = 0.$$

Левая часть, вообще говоря, зависит от переменных x, y и φ, причем, однако, φ_1 исчезло. Если и остальные φ исчезают, уравнение должно привести к тождеству, так как между переменными x, y соотношения быть не может. Если подобное обстоятельство имеет место при всех h, то из θ_1 может быть получен интеграл, общий всем уравнениям якобиевой системы, если в нем $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$ заменить постоянными, и задача решена.

Но допустим, что φ_2 входит еще в предыдущее соотношение при каком-нибудь значении h; разрешая его относительно φ_2, имеем:

$$\varphi_2 = \theta_2(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n, \varphi_3, \ldots, \varphi_n).$$

Над этим тождеством выполним опять операцию Z_h. Если $Z_h \theta_2$ обращается тождественно в 0 при всех h, θ_2 представляет искомый интеграл, если φ заменить там постоянными.

В противном случае получаем по крайней мере одно соотношение $Z_h \theta_2 = 0$ не тождественное, но содержащее по крайней мере одну из функций φ, например φ_3, откуда найдем:

$$\varphi_3 = \theta_3(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n, \varphi_4, \ldots, \varphi_n).$$

Продолжая таким же образом, мы либо найдем интеграл, общий всем уравнениям, меньше чем n операциями, либо же, после n операций все прочие φ исключатся и $\varphi_n = \theta_n(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$ будет искомый интеграл.

326. Порядок интегрирования. *Операцией порядка n называют отыскание интеграла линейного уравнения с $(n+1)$ независимыми переменными, или соответствующей системы совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений.*

В силу теоремы IV n⁰ 294 полное интегрирование линейного уравнения с $(n-1)$ независимыми переменными или соответствующей ему системы обыкновенных уравнений требует, чтобы последовательно были произведены операции порядков n, $(n-1)$, ..., 2, 1. Если мы уже знаем k интегралов, определение нового интеграла будет операцией порядка $n-k$.

Поэтому разыскание одного интеграла якобиевой системы m уравнений с $(m+n)$ переменными, в силу второй теоремы Mayer'а (n⁰ 325), есть операция n-го порядка. Полное интегрирование системы требует последовательных операций порядков n, $(n-1)$, ..., 2, 1.

ГЛАВА IX.

НАЧАЛА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ИСЧИСЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.

§ 1. Вариационное исчисление.

327. **Вариация определенного интеграла.** Пусть y есть функция $f(x)$ и y' ее производная, $F(x, y, y')$ — данная функция, непрерывная со своими частными производными различных порядков; рассмотрим интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx. \qquad (1)$$

Для изучения изменений, которые испытывает этот интеграл, когда меняется функция y и пределы интегрирования x_0 и x_1, допустим, что эти изменения обусловливаются изменением одного или нескольких параметров, которые вводятся следующим образом:

Уравнение $y = f(x)$ есть уравнение некоторой кривой и интеграл (1) взят по дуге AB кривой, соответствующей пределам x_0, x_1. Когда мы изменяем y и пределы x_0, x_1, это сводится к тому, что дуга AB заменяется дугою A_1B_1. Для изучения изменений, которые претерпевает интеграл, когда мы переходим от одной дуги к другой, делаем замену переменных и рассматриваем параметрическое представление дуги: обозначая через t новую независимую переменную и через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — параметры, от которых зависят вид и положение концов дуги, полагаем:

$$x = \varphi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots); \quad y = \psi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots). \qquad (2)$$

Пусть эти выражения для x и y приводятся при $t = 0$ и при $t = 1$ соответственно к (x_0, y_0), (x_1, y_1); затем пусть дуга, определяемая уравнениями (2), приводится к дуге AB при частных значениях параметров (например, когда они обращаются в 0). Тогда, при изменении этих параметров, дуга будет деформироваться и перемещаться. Ниже мы увидим, что, вообще говоря, бесполезно давать явные выражения функций φ и ψ и что для вычислений имеет значение только установленная выше *точка зрения*. Установив эту точку зрения, выскажем следующие определения:

Вариация интеграла I есть его полный дифференциал относительно параметров α.

Вариация какой угодно функции от $x, y, y', y'', \ldots$ есть ее полный дифференциал относительно параметров α.

Вариации мы будем обозначать символом δ, чтобы отличать их от дифференциалов по t, которые будем называть просто *дифференциалами* и обозначать их попрежнему буквой d. Отсюда вытекает следующее правило:

Символы d и δ, обозначающие дифференциалы по независимым переменным, можно всегда переставлять между собой.

Переходим теперь к вычислению вариации δI интеграла. Это вычисление можно провести по общим правилам. Приняв t за переменную интегрирования, имеем:

$$I = \int_0^1 F(x, y, y') \frac{dx}{dt}\, dt,$$

и так как пределы постоянны, δI вычисляется по правилу Leibniz'а

$$\delta I = \int_0^1 \frac{\delta (F\, dx)}{dt}\, dt = \int_0^1 \frac{\delta F \cdot dx + F\, \delta\, dx}{dt}\, dt.$$

Подставив $\delta\, dx = d\, \delta x$, можем второе слагаемое в интеграле проинтегрировать по частям, после чего, возвратясь к старой переменной x, получим:

$$\delta I = [F\, \delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(\delta F - \frac{dF}{dx}\, \delta x \right) dx. \tag{3}$$

Это выражение нужно преобразовать. Полагая для краткости:

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial F}{\partial y}; \qquad Y' = \frac{\partial F}{\partial y'}, \tag{4}$$

будем иметь:

$$\delta F = X\, \delta x + Y\, \delta y + Y'\, \delta y'; \qquad \frac{dF}{dx} = X + Yy' + Y'y'',$$

откуда

$$\delta I = [F\, \delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} dx\, [Y (\delta y - y'\, \delta x) + Y' (\delta y' - y''\, \delta x)].$$

Для упрощения введем величину ω (иногда называемую *деформирующим элементом*) по формуле

$$\omega = \delta y - y'\, \delta x; \tag{5}$$

дифференцируя по t, находим:

$$d\,\omega = \delta\, dy - y'\, \delta\, dx - dy'\, \delta\, x,$$

или, заменяя δdy на $\delta(y'dx) = \delta y' dx + y' \delta\, dx$:

$$d\,\omega = \delta y'\, dx - dy'\, \delta\, x,$$

откуда

$$\omega' = \delta y' - y''\, \delta\, x, \tag{6}$$

где ω' означает производную по x. Итак, имеем:

$$\delta I = [F\,\delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} (Y\omega + Y'\omega')\,dx.$$

Этот интеграл можно преобразовать, интегрируя по частям второе слагаемое, окончательно получим:

$$\delta I = [F\,\delta x + Y'\omega]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(Y - \frac{dY'}{dx}\right)\omega\,dx. \tag{7}$$

328. Случай, когда F содержит две функции. Пусть z будет вторая функция от x и z' ее производная. Вариацию интеграла I мы определяем и вычисляем, рассматривая и z как функцию от t и α. Таким образом, получаем δI, присоединяя к выражениям предыдущего n^0 аналогичные члены, происходящие от изменения z: Пусть $Z = \frac{\partial F}{\partial z}$, $Z' = \frac{\partial F}{\partial z'}$ — выражения, соответствующие Y и Y', введем вспомогательную величину $\bar{\omega}$, аналогичную ω;

$$\bar{\omega} = \delta z - z'\,\delta x,$$

откуда

$$\bar{\omega}' = \delta z' - z''\,\delta x;$$

выражение (7) вариации δI нужно дополнить следующим образом.

$$\delta I = [F\,\delta x + Y'\omega + Z''\bar{\omega}]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1}\left[\left(Y - \frac{dY'}{dx}\right)\omega + \left(Z - \frac{dZ'}{dx}\right)\bar{\omega}\right]dx. \tag{8}$$

329. Случай, когда F содержит производные высших порядков. Вычисления n⁰ 327 легко распространяются на интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots)\,dx,$$

в котором F содержит производные y высших порядков. В самом деле, формула (3) остается в силе, и мы имеем:

$$\delta I = [F\,\delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1}\left(\delta F - \frac{dF}{dx}\,\delta x\right)dx.$$

Если положим для краткости

$$X = \frac{\partial F}{\partial x};\quad Y = \frac{\partial F}{\partial y};\quad Y' = \frac{\partial F}{\partial y'};\quad Y'' = \frac{\partial F}{\partial y''}, \ldots,$$

то подинтегральная функция примет вид

$$Y(\delta y - y'\,\delta x) + Y'(\delta y' - y''\,\delta x) + Y''(\delta y'' - y'''\,\delta x) + \ldots$$

Но мы положили

$$\omega = \delta y - y' \delta x,$$

откуда

$$\omega' = \delta y' - y'' \delta x,$$

откуда заключаем, заменяя последовательно y на y', y'', ...

$$\omega'' = \delta y'' - y''' \delta x, \quad \omega''' = \delta y''' - y^{IV} \delta x, \ldots$$

Итак, оказывается:

$$\delta I = [F \delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} dx [Y \omega + Y' \omega' + Y'' \omega'' + \ldots].$$

Применяя интегрирование по частям достаточное число раз, исключим все производные от ω по x, которые фигурируют под знаком интеграла, и таким образом находим окончательно:

$$\delta I = \left[F \delta x + Y' \omega + Y'' \omega' - \frac{dY''}{dx} \omega + \ldots\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} - \ldots\right) \omega \, dx.$$

Если F содержит вторую функцию z от x, нужно дополнить это выражение для δI членами, соответствующими z, как в n⁰ 328.

330. Случай, когда F зависит от предельных значений x, y; z. Если F содержит еще и величины x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, то нужно прибавить к полученным уже членам в δI совокупность членов, проистекающих от изменения этих величин, а именно:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left| \frac{\partial F}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial y_0} \delta y_0 + \frac{\partial F}{\partial y_1} \delta y_1 + \ldots \right| dx.$$

331. Необходимое условие maximum'а или minimum'а определенного интеграла. Главная цель вариационного исчисления заключается в определении maxima и minima определенных интегралов, элементы которых зависят от одной или нескольких неизвестных функций.

В самом общем случае рассматривается интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, z, z', \ldots) \, dx.$$

Функция F дана, но функции y, z от x неизвестны. Что же касается пределов x_0, x_1 и соответствующих значений y, z, y', z', ..., они могут быть либо данными, либо совершенно произвольными, либо же связанными одним или несколькими уравнениями. Условного же соотношения между самими переменными и их предельными значениями быть не должно. Требуется определить y, z и то, что остается неопределенным из предельных значений так, чтобы интеграл I был maximum или minimum.

Отыскание условий, необходимых и достаточных для этого, представляет задачу весьма трудную, в исследование которой мы входить не будем. Но нижеследующая теорема, которая дает только необходимое условие, достаточна для практического нахождения maximum'а или minimum'а, если таковые существуют.

Теорема. *Система значений $y, z, \ldots$ и предельных значений, которые дают maximum или minimum интеграла I, должна обращать в 0 его вариацию δI для всякой совокупности вариаций $x, y, z, \ldots$ и предельных значений, которые совместимы с данными условиями.*

В самом деле, пусть $y\ z, \ldots x_0, x_1, \ldots$ суть значения, дающие искомый maximum или minimum. Изменим бесконечно мало эти значения, не нарушая данных условий, с помощью изменения одного или нескольких параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; интеграл, рассматриваемый в функции от этих параметров, должен быть maximum или minimum. Стало быть, его полный дифференциал δI должен обращаться в 0 (исключая случаи разрыва, которых мы не будем рассматривать).

332. **Расчленение условия $\delta I = 0$.** Первый случай. Рассмотрим интеграл, зависящий только от одной неизвестной функции y:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx.$$

Его вариация по формуле (7) имеет вид:

$$\delta I = A + \int_{x_0}^{x_1} B\,\omega\, dx, \tag{9}$$

где A есть линейная и однородная функция от вариаций предельных значений и

$$B = Y - \frac{dY'}{dx}.$$

Так как нет соотношения между переменными и их предельными значениями, уравнение $\delta I = 0$ распадается на два других.

В самом деле, прежде всего можно закрепить предельные величины, тогда $A = 0$ и остается

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} B\,\omega\, dx = 0.$$

Но $\omega = \delta y - y'\delta x$ при каждом значении x остается произвольным, вместе с δy и δx. Предыдущее соотношение может поэтому существовать при каком угодно ω лишь при условии, что при всех значениях x

$$B = Y - \frac{dY'}{dx} = 0.$$

Уравнение $B=0$ есть дифференциальное уравнение, которое называется *главным уравнением* и служит для определения вида неизвестной функции y.

Теперь, когда $B=0$, уравнение $\delta \dot{I}=0$ приводится к

$$A=[F\delta x+Y'\omega]_0^1=0.$$

Уравнение $A=0$ есть ***уравнение в предельных значениях***. Оно служит, как мы покажем в приводимых ниже примерах, для определения постоянных, которые вводятся при интегрировании главного уравнения.

Второй случай. Когда F содержит две неизвестные функции y и z и их первые производные, вариация интеграла

$$\dot{I}=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\,dx,$$

вычисляется по формуле (8) и имеет поэтому вид:

$$\delta \dot{I}=A+\int_{x_0}^{x} (B\omega+C\tilde{\omega})\,dx, \tag{10}$$

где A означает совокупность членов, относящихся к пределам, и

$$B=Y-\frac{dY'}{dx};\ C=Z-\frac{dZ'}{dx}.$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (B\omega+C\tilde{\omega})\,dx=0.$$

Это условие требует, чтобы $B\omega+C\tilde{\omega}=0$ при всех x, так как в противном случае, изменяя в случае надобности знаки вариации, можно сделать $B\omega+C\tilde{\omega}$ везде положительным, и интеграл не обращался бы в 0.

Уравнение $\delta \dot{I}=0$ распадается, стало быть, как и в предыдущем случае, на два других: *главное уравнение*

$$B\omega+C\tilde{\omega}=0$$

и ***уравнение в предельных значениях*** $A=0$. Это последнее также служит для определения постоянных, которые вводятся при интегрировании главного уравнения, но здесь нужно исследовать две возможности:

1°. Если не задано никакого соотношения между x, y и z, то величины $\omega=\delta y-y'\delta x$ и $\tilde{\omega}=\delta z-z'\delta x$ будут одновременно с δx, δy и δz, независимыми и произвольными, и главное уравнение распадается на два других: $B=0$ и $C=0$. Это суть два совокупные дифференциальные уравнения, определяющие вид неизвестных функций y и z.

2^0. Если задано соотношение $\Phi(x, y, z)=0$, вариации связаны условием

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta x+\frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y+\frac{\partial \Phi}{\partial z} \delta z=0.$$

Но дифференцируя полным образом уравнение $\Phi=0$ по x, находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y} y'+\frac{\partial \Phi}{\partial z} z'=0;$$

умножив это соотношение на δx и вычтя из предыдущего, получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(\delta y-y' \delta x)+\frac{\partial \Phi}{\partial z}(\delta z-z' \delta x)=\frac{\partial \Phi}{\partial y} \omega+\frac{\partial \Phi}{\partial z} \bar{\omega}=0.$$

Стало быть, в этом случае между ω и $\bar{\omega}$ существует соотношение, и нельзя больше обратить в 0 в отдельности оба члена B и C главного уравнения. Оно дает после исключения ω и $\bar{\omega}$ соотношение

$$C \frac{\partial \Phi}{\partial y}-B \frac{\partial \Phi}{\partial z}=0,$$

которое, в соединении с $\Phi(x, y, z)=0$, определит вид неизвестных функций y и z.

Замечание. Мы предполагали, что F содержит только первые производные, что упрощает выражения A, B и C, но рассуждение само собой распространяется на случай, когда имеются производные высших порядков. Впрочем, этот последний случай не встречается при решении задач, которые мы ниже поставим.

333. Практический способ вычисления. На практике удобнее проводить вычисления иначе, чем в предыдущем исследовании. Вернемся к двум случаям, разобранным выше.

Первый случай. Рассмотрим интеграл

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx.$$

Примем опять t за независимую переменную и заменим y' на $\frac{dy}{dx}$. Интеграл приведется к виду

$$I=\int_0^1 F(x, y, dx, dy).$$

Пусть X, Y, X', Y' означают частные производные F соответственно по x, y, dx, dy, получим:

$$\delta I=\int_0^1 \delta F=\int_0^1 (X \delta x+Y \delta y+X' d\, \delta x+Y' d\, \delta y).$$

Интегрируя по частям, исключаем из-под знака интеграла дифференциалы вариаций, что приводит к результату вида

$$\delta \dot{I} = A + \int_0^1 (P\delta x + Q\,\delta y), \tag{11}$$

если обозначить через A совокупность членов вне знака интеграла, которая зависит только от вариаций в пределах, через P и Q — коэффициенты, не зависящие от вариаций.

Изучим теперь условие $\delta \dot{I} = 0$ maximum'а или minimum'а. *Главное уравнение* будет: $P\delta x + Q\,\delta y = 0$, *уравнение в предельных значениях*: $A = 0$. Но так как δx и δy суть независимые произвольные величины, главное уравнение распадается на два других $P = 0$ и $Q = 0$. Таким образом, получается лишнее уравнение для определения одной неизвестной функции, и можно предвидеть, что одно из этих уравнений есть следствие другого. Покажем это.

Для этого сравним два выражения (9) и (11) для $\delta \dot{I}$, они должны привестись одно к другому после того, как в (9) ω заменено на $\delta y - y'\,\delta x$. Так как δx и δy произвольны, коэффициенты их под знаком интеграла в том и в другом выражении должны быть одни и те же, а потому

$$P = -By'\,dx = -B\,dy; \quad Q = B\,dx,$$

Таким образом оба уравнения $P = 0$ и $Q = 0$ приводятся к уравнению $B = 0$ предыдущего n^0 и ничего нового не дают. Достаточно будет интегрировать одно из них.

Вот еще замечание, часто оказывающееся полезным. Предположим, что изменяется только y, а x и предельные значения закреплены (не зависят от параметров), так как все вариации кроме δy обращаются в 0, формула (11) приводится к

$$\delta I = \int_0^1 Q\,\delta y,$$

и условие $\delta I = 0$ дает $Q = 0$. Точно также, если изменяется только x, а y и предельные значения закреплены, условие $\delta I = 0$ приводит к уравнению $P = 0$. Итак, если ограничиться только отысканием главного уравнения, мы его получим, варируя по выбору только x или y и полагая равными 0 все вариации в пределах.

Второй случай. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\,dx.$$

Примем t за переменную интегрирования и заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$, z' на $\dfrac{dz}{dx}$; интеграл приведется к виду

$$I = \int_0^1 F(x, y, z, dx, dy, dz).$$

Применяя обозначения, аналогичные предыдущим, находим отсюда

$$\delta I = \int_0^1 \delta F = \int_0^1 (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + X'\,d\,\delta x + Y'\,d\,\delta y + Z'\,d\,\delta z)$$

и, интегрируя по частям, приводим δI к виду

$$\delta I = A + \int_0^1 (P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z), \tag{12}$$

где A опять означает совокупность членов вне интеграла, которые зависят только от вариаций в пределах.

Условие $\delta I = 0$ распадается на *уравнение в предельных значениях* $A = 0$ *и главное уравнение* $P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z = 0$. Как и в предыдущем случае, нужно исследовать два предположения.

1°. Если между x, y, z не существует никакого соотношения, вариации δx, δy и δz произвольны и главное уравнение распадается на три: $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Но, отожествляя выражения (10) и (12) для δI, легко можно заметить, что эти три уравнения приводятся к двум различным: $B = 0$, $C = 0$. Однако, одновременное рассмотрение трех уравнений часто вводит больше симметрии в вычисления.

2°. Если существует соотношение $\Phi(x, y, z) = 0$, оно дает

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\delta z = 0. \tag{13}$$

В этом случае можно с пользой применять *способ множителей*. Умножив предыдущее уравнение на λ и сложив с $P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z = 0$, получаем:

$$\left(P + \lambda\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\delta x + \left(Q + \lambda\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\delta y + \left(R + \lambda\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\delta z = 0.$$

В силу (13) здесь входят лишь две независимые между собой вариации. Выбрав λ так, чтобы обратился в 0 коэффициент при зависимой вариации, мы видим, что коэффициенты при независимых вариациях также должны обратиться в 0. Таким путем получаем:

$$P + \lambda\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0;\quad Q + \lambda\,\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0;\quad R + \lambda\,\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0.$$

Эти три уравнения вместе с $\Phi = 0$ дают систему четырех уравнений (приводящихся только к трем различным) для определения y, z и λ в функции от x.

Замечание. Предыдущие способы вычисления можно распространить на тот случай, когда F содержит производные высших порядков $y'', \ldots$, тогда нужно будет сделать более сложную подстановку

$$y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}, \ldots,$$

и последовательным интегрированием по частям исключить все дифференциалы от вариаций. Вычисления становятся трудными и в этом случае способы n⁰ 332 предпочтительнее.

334. Задача. Наименьшая поверхность вращения. *Заданы две точки A, B и прямая в одной плоскости. Требуется соединить эти две точки такою кривою, чтобы при вращении ее около этой прямой получилась поверхность вращения, площадь которой наименьшая.*

Примем ось вращения за ось x, перпендикуляр к ней — за ось y. Пусть x_0, y_0 и x_1, y_1 — координаты точек A и B. Применим способ предыдущего n⁰. Будем рассматривать x и y как функции переменной t, которая изменяется от 0 до 1, когда точка (x, y) описывает дугу AB. Интеграл, для которого ищется minimum, будет:

$$I = \int_0^1 y\,ds, \text{ где } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Вычислим δI. Находим последовательно:

$$\delta I = \int_0^1 (\delta y\,ds + y\delta\,ds) = \int_0^1 \left(\delta y\,ds + y\frac{dx}{ds}\,d\delta x + y\frac{dy}{ds}\,d\delta y\right) =$$

$$= \left[\frac{y(dx\,\delta x + dy\,\delta y)}{ds}\right]_0^1 + \int_0^1 \left[d\left(s - \frac{y\,dy}{ds}\right)\delta y - d\left(y\frac{dx}{ds}\right)\delta x\right].$$

Уравнение в предельных значениях будет здесь:

$$\left[y\frac{(dx\,\delta x + dy\,\delta y)}{ds}\right]_0^1 = 0.$$

Главное уравнение распадается на два:

$$d\left(s - \frac{y\,dy}{ds}\right) = 0;\quad d\left(y\frac{dx}{ds}\right) = 0.$$

Мы знаем, что эти два уравнения эквивалентны и что можно ограничиться рассмотрением только второго. Интегрируя, разделяя переменные и интегрируя еще раз, находим:

$$y\,dx = C\,ds = C\sqrt{dx^2 + dy^2};\quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1};$$

$$\frac{d\frac{y}{C}}{\sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}} = d\frac{x}{C};\ \mathrm{Log}\left(\frac{y}{C} + \sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}\right) = \frac{x - C_1}{C}$$

$$y = \frac{C}{2}\left(e^{\frac{x - C_1}{C}} + e^{-\frac{x - C_1}{C}}\right).$$

Стало быть, искомая кривая есть *цепная линия,* основание которой есть ось вращения.

Если точки A, B даны, их координаты не варьируются, и уравнение в предельных значениях исчезает. Две постоянные интегрирования C и C_1 определяются из условия, что кривая проходит через две точки A, B.

Предположим теперь, что A, B не даны, а подчинены лишь тому условию, что должны находиться на двух кривых MN и PQ. Так как перемещения точек A и B по каждой из этих кривых совершенно не зависят друг от друга, вариации при пределе 0 не зависят от вариаций при пределе 1, и уравнение в предельных значениях распадается на два других:

$$dx_0\,\delta x_0+dy_0\,\delta y_0=0;\quad dx_1\,\delta x_1+dy_1\,\delta y_1=0.$$

Эти соотношения служат для определения постоянных интегрирования. Они выражают геометрическое свойство кривой, дающей minimum. Первое показывает, что перемещение $(\delta x_0,\ \delta y_0)$ точки A по кривой MN перпендикулярно к перемещению $(dx_0,\ dy_0)$ по кривой AB. Второе соотношение истолковывается аналогичным образом. Итак, *кривая, соединяющая две данные кривые MN, PQ и дающая постоянную поверхность вращения, есть цепная линия, пересекающая нормально эти две кривые.*

Это свойство цепной линии было открыто Meusnier в 1776 г.

335. Задача. **Кратчайшая кривая в пространстве.** *Пусть требуется найти кратчайшую кривую между двумя точками A $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и B $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ в пространстве.* Будем поступать, как и в n° 333 (1° второго случая). Станем рассматривать x, y, z, как функции параметра t, изменяющегося между 0 и 1. Интеграл, который нужно обратить в minimum, будет:

$$I=\int_0^1 ds=\int_0^1\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Вычисляя δI, находим:

$$\delta I=\int_0^1\delta\,ds=\int_0^1\frac{dx\,d\,\delta x+dy\,d\,\delta y+dz\,d\,\delta z}{ds}=$$

$$=\left[\frac{dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z}{ds}\right]_0^1-\int_0^1\left(\delta x\,d\,\frac{dx}{ds}+\delta y\,d\,\frac{dy}{ds}+\delta z\,d\,\frac{dz}{ds}\right).$$

Так как функции x, y, z независимы, то вариации δx, δy, δz произвольны и главное уравнение

$$\delta x\,d\,\frac{dx}{ds}+\delta y\,d\,\frac{dy}{ds}+\delta z\,d\,\frac{dz}{ds}=0$$

распадается на три (приводящиеся к двум различным между собой):

$$d\frac{dx}{ds}=d\frac{dy}{ds}=d\frac{dz}{ds}=0,$$

откуда

$$\frac{dx}{ds}=\alpha;\ \frac{dy}{ds}=\beta;\ \frac{dz}{ds}=\gamma,$$

где α, β, γ — постоянные. Это суть cosinus'ы направления касательной к искомой кривой, а потому кратчайшая кривая есть прямая.

Если точки A, B даны, вариации в пределах равны 0 и уравнение в предельных значениях исчезает. Прямая определяется тем условием, что проходит через эти две точки.

Если точки A, B подчинены лишь тому условию, что находятся на двух поверхностях S и S', уравнения которых соответственно суть

$$\varphi(x_0, y_0, z_0)=0;\ \psi(x_1, y_1, z_1)=0$$

то уравнение в предельных значениях будет

$$\left[-\frac{dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z}{ds}\right]_0^1=0.$$

Но так как перемещения точек A и B по поверхностям S и S независимы между собой, уравнение это распадается на два:

$$dx_0\,\delta x_0+dy_0\,\delta y_0+dz_0\,\delta z_0=0;\ dx_1\,\delta x_1+dy_1\,\delta y_1+dz_1\,\delta z_1=0.$$

Они выражают, что прямая кратчайшего расстояния между двумя поверхностями есть их общая нормаль.

336. Кратчайшая кривая на поверхности. *Пусть $F(x, y, z)=0$ есть уравнение поверхности S; требуется провести на этой поверхности, между двумя ее точками A (x_0, y_0, z_0) и B (x_1, y_1, z_1) кратчайшую кривую.*

Нужно обратить в 0 ту же вариацию δI, что и в предыдущем n^0, но, так как искомая кривая должна лежать на данной поверхности, вариации δx, δy, δz связаны соотношением

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z=0.$$

Следовательно, главное уравнение

$$\delta x\,d\frac{dx}{ds}+\delta y\,d\frac{dy}{ds}+\delta z\,d\frac{dz}{ds}=0$$

не распадается уже на три. Применим способ множителей (n^0 333). Умножив предыдущее уравнение на λ и сложив с вышенаписанным главным, мы приходим к трем уравнениям:

$$d\frac{dx}{ds}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}=0;\ d\frac{dy}{ds}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}=0;\ d\frac{dz}{ds}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

Эти три уравнения в соединении с $F=0$ и суть дифференциальные уравнения искомой кривой. Уравнение в предельных значениях будет:

$$\left[\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{ds}\right]_0^1 = 0.$$

Кратчайшие кривые на поверхности называются *геодезическими*. Из предыдущих уравнений вытекает геометрическое свойство этих кривых. В самом деле, мы находим:

$$\frac{d\,\dfrac{dx}{ds}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} = \frac{d\,\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{d\,\dfrac{dz}{ds}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Числители этих отношений суть коэффициенты направления главной нормали к искомой кривой, знаменатели — нормали к поверхности S. Отсюда вытекает следующая теорема:

Главная нормаль к геодезической кривой совпадает в каждой ее точке с нормалью к поверхности, по которой проведена эта кривая.

Если точки A, B даны, геодезическая кривая определяется тем условием, что проходит через эти точки.

Если точки A, B должны только находиться на двух кривых L и L', проведенных на S, уравнение в предельных значениях распадается на два уравнения, написанные в конце предыдущего n° и выражающие, что геодезическая кривая пересекает нормально кривые L и L'.

337. Брахистохрона. Это есть кривая, по которой должна двигаться тяжелая точка для того, чтобы в кратчайшее время перейти из точки A в точку B. Мы ее определим, предположив, что начальная скорость равна 0.

Возьмем три прямоугольные оси, направив ось x по направлению силы тяжести. Пусть (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) — координаты точек A, B. Так как скорость в точке (x, y, z) есть $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(x-x_0)}$, то время пробега кривой AB будет

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{x-x_0}}.$$

Интеграл, который нужно обратить в minimum, будет

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{X}, \text{ где } X = \sqrt{x - x_0}.$$

Вычислим δI по способу n° 333, заметив, что x_0 может варьироваться (n° 330). Написав в первой строчке все члены, зависящие от вариаций в пределах, получим без труда:

$$\delta I = \left[\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{X\,ds}\right]_0^1 + \frac{\delta x_0}{2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{X^3} -$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta x\left(\frac{ds}{2X^3} + d\,\frac{dx}{X\,ds}\right) + \delta y\,d\,\frac{dy}{X\,ds} + \delta z\,d\,\frac{dz}{X\,ds}\right]. \qquad (14)$$

Главное уравнение распадается на три (из которых лишь два различны):

$$\frac{ds}{2X^3} + d\,\frac{dx}{X\,ds} = 0;\quad d\,\frac{dy}{X\,ds} = 0;\quad d\,\frac{dz}{X\,ds} = 0. \qquad (15)$$

Два последние дают: $dy = \alpha X\,ds$; $dz = \beta X\,ds$, где α и β—постоянны. Стало быть,

$$\beta\,dy = \alpha\,dz \text{ и } \beta\,y = \alpha\,z + \gamma,$$

что показывает, что искомая кривая расположена в вертикальной плоскости.

Вид кривой. Для определения природы кривой примем ее плоскость за плоскость xy и поместим начало координат в исходную точку A, что приводит X к $\sqrt{x}$. Второе из уравнений (15) дает нам:

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{x}{2a}},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2a - x}},$$

причем $\sqrt{\frac{1}{2a}}$ означает постоянную интегрирования.

Сделав подстановку

$$x = a\,(1 - \cos t),$$

найдем:

$$dy = a\sin t\,dt\,\sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = a\,(1 - \cos t)\,dt;\quad y = a\,(t - \sin t)$$

(так как x, y обращаются в 0 вместе с t в точке A).

Это есть параметрическое представление циклоиды. Искомая кривая есть поэтому вертикальная циклоида, описываемая точкой круга радиуса a, который катится снизу по горизонтали точки A.

Определение постоянных. Если A и B даны, циклоида определяется тем, что проходит через эти точки.

Пусть теперь A B должны лишь лежать на двух данных кривых MN и PQ. Так как тогда перемещения точек A и B независимы, уравнение в предельных значениях $A = 0$ (где A означает совокупность членов первой строки в выражении (14) для δI). распадается на два:

$$dx_1\,\delta x_1+dy_1\,\delta y+dz_1\,\delta z_1=0;$$

$$\delta x\left|\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{2X^2}-\left(\frac{dx}{Xds}\right)_0\right|-\delta y_0\left(\frac{ds}{Xds}\right)_0-\delta z_0\left(\frac{dz}{Xds}\right)_0=0.$$

Первое уравнение выражает, что циклоида пересекает нормально кривую PQ в конечной точке B.

Во втором уравнении сделаем следующие подстановки, получаемые из соотношений (15) интегрированием их в пределах от x_0 до x_1:

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{2X^3}=-\left[\frac{dx}{Xds}\right]_0^1,\ \left(\frac{dy}{Xds}\right)_0=\left(\frac{dy}{Xds}\right)_1,\ \left(\frac{dz}{Xds}\right)_0=\left(\frac{dz}{Xds}\right)_1,$$

после чего уравнение приведется к

$$dx_1\,\delta x_0+dy_1\,\delta y_0+dz_1\,\delta z_0=0$$

и выражает, что циклоида в конечной точке B нормальна к касательной к кривой MN в исходной точке A.

Задача, которую мы исследовали, была решена Joh. Bernoulli около 1696 г.

Замечание. Когда начальная скорость равна 0, формулировка задачи очевидно предполагает, что исходная точка A имеет по крайней мере ту же высоту, что и конечная точка B; но эти две точки могут быть и на одинаковой высоте и тогда брахистохрона будет полной аркой циклоиды.

333. **Относительные maxima и minima.** Существует другой класс задач, который характеризуют термином относительные: maxima или minima или *изопериметрические задачи*, по тем геометрическим приложениям, которые дали первые примеры подобных задач. Рассмотрим интеграл

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F\,(x,\,y,\,y')\,dx$$

и пусть требуется обратить этот интеграл в maximum или minimum при условии, что интеграл, взятый в тех же пределах

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\Phi\,(x,y,y')\,dx,$$

сохраняет постоянную величину l.

Определение относительных maxima и minima приводится к определению абсолютных maxima и minima, по следующему правилу:

Правило. *Для определения относительных maxima и minima интеграла I обозначаем через k неизвестную постоянную и дей-*

ствуем, так, как если бы дело шло об определении абсолютных maxima или minima интеграла

$$I - kV.$$

Таким образом определяем все неизвестные элементы в функции параметра k, а он сам определяется из условия $V = l$.

Для оправдания этого правила заметим, что в случае относительного maximum'а или minimum'а мы должны иметь $\delta I = 0$ для всех вариаций, удовлетворяющих условию $\delta V = 0$.

Разлагая эти вариации так, как это было сделано в n⁰ 327, (и сохраняя обозначения n⁰ 332), мы видим, что уравнение

$$\delta I = A + \int_{x_0}^{x_1} B\,\omega\,dx = 0$$

должно быть следствием уравнения

$$\delta V = A_1 + \int_{x_0}^{x_1} B_1\,\omega\,dx = 0,$$

где члены A и A_1 зависят только от вариаций в пределах.

Отсюда заключаем прежде всего, что отношение $\frac{B}{B_1}$ должно оставаться постоянным в промежутке (x_0, x_1). В самом деле, пусть ξ_1 и ξ_2 две какие угодно точки этого промежутка. Обратим в 0 все вариации повсюду, за исключением двух бесконечно малых промежутков $(\xi_1, \xi_1 + \varepsilon)$ и $(\xi_2, \xi_2 + \varepsilon)$; необходимо, чтобы соотношение

$$\delta I = \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} B\omega\,dx + \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} B\,\omega\,dx = 0$$

было выполнено при условии

$$\delta V = \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} B_1\,\omega\,dx + \int_{\xi_2}^{\xi+\varepsilon_2} B_1\,\omega\,dx = 0.$$

В этих соотношениях ω есть неопределенная функция от x. Заменяем ее другою неопределенной величиной α, положив с одной стороны, $\omega = \frac{\alpha}{B_1}$ между ξ_1 и $\xi_1 + \varepsilon$, а с другой: $\omega = \frac{-\alpha}{B_1}$, между ξ_2 и $\xi_2 + \varepsilon$

Необходимо, чтобы соотношение

$$\int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} \frac{B}{B_1}\,\alpha\,dx = \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} \frac{B}{B_1}\,\alpha\,dx \tag{1}$$

было следствием соотношения

$$\int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} \alpha\,dx = \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} \alpha\,dx. \tag{2}$$

Предположим, что неопределенная функция α положительна, и применим теорему о среднем так, чтобы вынести $\frac{B}{B_1}$ из-под знака интеграла в соотношении (1). Для этого обозначим через m_1 и m_2 средние значения $\frac{B}{B_1}$ в первом и втором промежутках интегрирования. Соотношение (1) можно представить в виде

$$m_1 \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} \alpha\, dx = m_2 \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} \alpha\, dx,$$

откуда, в силу (2), заключаем: $m_1 = m_2$. Но так как ε бесконечно мало, m_1 и m_2 стремятся соответственно к значениям $\frac{B}{B_1}$ в точках ξ_1 и ξ_2; стало быть, эти значения равны, и отношение $\frac{B}{B_1}$ остается постоянным. Пусть k его величина; имеем

$$B - kB_1 = 0.$$

После этого необходимо, чтобы уравнение $\delta I - k\,\delta V = 0$, которое приводится к

$$A - kA_1 = 0,$$

было выполнено при условии $\delta V = 0$, но так как оно не содержит ω, оно должно выполняться независимо от условия $\delta V = 0$. Мы получаем таким образом соотношения $B - kB_1 = 0$ и $A - kA_1 = 0$, которые совпадают с теми, которые дают абсолютные maxima или minima интеграла $I - kV$. Правило таким образом доказано.

339. Задачи на относительные maxima и minima. Первая задача. *Даны две точки A, B в плоскости; найти среди всех кривых данной длины — ту, для которой сегмент, заключенный между дугой AB и ее хордой, есть maximum.*

Примем прямую AB за ось x, перпендикуляр в середине AB — за ось y. Полагая $AB = 2a$, нужно обратить в maximum интеграл

$$S = \int_{-a}^{+a} y\, dx, \text{ при условии } \int_{-a}^{+a} ds = 2l.$$

По нашему правилу ищем абсолютный maximum интеграла

$$I = \int_{-a}^{+a} (y\, dx - k\sqrt{dx^2 + dy^2}).$$

Так как точки A, B даны, то вариации в пределах обращаются в 0; таким образом, получается:

$$\delta I = \int_{-a}^{+a} \left(\delta y\, dx + y\, d\delta x - k\, \frac{dx\, d\delta x + dy\, d\delta y}{ds} \right) =$$

$$= \int_{a}^{+a} \delta y\, d\left(x + k\,\frac{dy}{ds}\right) - \delta x\, d\left(y - k\,\frac{dx}{ds}\right).$$

Итак, нужно приравнять 0 коэффициенты при δx и δy, что дает две эквивалентные формы главного уравнения (n° 333). Таким путем получим непосредственно два первых интеграла:

$$x - C = -k\,\frac{dy}{ds};\; y - C_1 = k\,\frac{dx}{ds},$$

а затем и уравнение искомой кривой, возвышая в квадрат и складывая; это будет окружность

$$(x - C)^2 + (y - C_1)^2 = k^2.$$

При $y = 0$ мы должны иметь $x = \pm a$, стало быть, $C = 0$ и $C_1 = \pm\sqrt{k^2 - a^2}$, что соответствует двум решениям, симметричным относительно AB. Наконец, нужно сделать так, чтобы дуга была равна $2l$. Пусть 2θ есть центральный угол, стягиваемый AB; имеем $\theta k = l$ и $k \sin\theta = a$. Исключив k, для определения θ (а потому и k), получаем трансцендентное уравнение

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{a}{l}.$$

Если привести точки A и B к совпадению (так что $a = 0$), то исследование это показывает, что среди всех замкнутых кривых одинакового периметра окружность ограничивает наибольшую площадь.

Вторая задача. *Среди всех кривых одинаковой длины, проведенных в плоскости xy между точками A, B, найти те, которые при вращении около оси x образуют поверхность вращения наибольшей или наименьшей площади, или, что то же самое, те, центр тяжести которых расположен выше всего или ниже всего.*

Нужно обратить в maximum или minimum интеграл $\int y\,ds$ при условии $\int ds = l$, что, в силу правила, приводит к уравнению

$$\delta \int (y - k)\, ds = 0.$$

Это уравнение отличается от того, которое было исследовано в n° 234 только заменой y на $y - k$, что не изменяет ни δx, ни δy. Достаточно, стало быть, заменить и в окончательном результате y на $y - k$; искомая кривая будет поэтому цепной линией

$$y - k = \frac{C}{2}\left(e^{\frac{x - C_1}{C}} + e^{-\frac{x - C_1}{C}}\right).$$

Постоянные определяются из условий, что кривая проходит через точки A, B, и дуга AB имеет данную длину l. Вообще говоря, будет несколько решений, соответствующих maxima и minima, смотря по тому, будет ли кривая вогнута или выгнута по отношению к оси вращения.

Третья задача. *Среди всех кривых одинаковой длины, проведенных между точками A и B, как и в предыдущей задаче, найти те, для которых объем тела вращения будет maximum или minimum.*

Нужно обратить в maximum или minimum интеграл $\int y^2 dx$ при условии, что $\int ds = l$. Получаем, стало быть,

$$\delta \int (y^2\,dx - k\,ds) = 0.$$

Так как точки A и B даны, вариации в пределах обращаются в 0. Для получения главного уравнения достаточно варьировать только y (n⁰ 333); таким путем последовательно получим:

$$\int \left(2y\,\delta y\,dx - k\,\frac{dy\,d\delta y}{ds}\right) = 0, \quad \int \left(2y\,dx + kd\,\frac{dy}{ds}\right)\delta y = 0,$$

а потому главное уравнение будет:

$$2y + k\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

Но, обозначив через R радиус кривизны кривой и через φ наклонение касательной, имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{d\sin\varphi}{dx} = \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{ds} = \pm\frac{1}{R},$$

а потому уравнение это можно переписать в виде

$$R = \frac{k}{2y},$$

изменяя в случае надобности знак k.

Итак, радиус кривизны обратно пропорционален ординате. Искомая кривая есть *упругая линия* и ее уравнение было проинтегрировано в n⁰ 268 (с тою только разницей, что оси переставлены между собой).

340. Maxima и minima двойных интегралов. Мы исследуем только самый простой случай. Пусть z есть функция от двух независимых переменных x, y и p, q — ее частные производные первого порядка. Рассмотрим двойной интеграл

$$I = \int\int F\,(x, y, z, p, q)\,dx\,dy,$$

взятый по некоторой определенной области D. Функция F и значения z на контуре области интегрирования считаются данными;

требуется определить z в функции от x, y так, чтобы двойной интеграл был maximum или minimum.

Для решения этой задачи рассуждаем как и раньше. Предположим, что z зависит от некоторых параметров, вариация которых определяет δz, и напишем, что соответствующая вариация δI обращается в 0 в случае maximum'а или minimum'а.

Для вычисления δI обозначим через Z, P, Q частные производные F по z, p, q. Перемещая символы ∂ и δ, имеем:

$$\delta F = Z\delta z + P\frac{\partial \delta z}{\partial x} + Q\frac{\partial \delta z}{\partial y},$$

откуда

$$\delta I = \int\int Z\delta z\,dx\,dy + \int dy\int P\frac{\partial \delta z}{\partial x}\,dx + \int dx\int Q\frac{\partial \delta z}{\partial y}\,dy.$$

Стало быть, интегрируя по частям под знаком интеграла и замечая, что по предположению δz обращается в 0 на границе области D, находим:

$$\delta I = \int\int\left(Z - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\delta z\,dx\,dy.$$

Отсюда получаем для maximum'а или minimum'а условие

$$Z - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

Это есть уравнение в частных производных, которое служит для определения z.

341. Минимальные поверхности. Поставим себе задачу определить среди всех поверхностей, опирающихся на данный замкнутый контур, ту, площадь которой наименьшая.

Пусть $z = f(x, y)$ есть уравнение этой поверхности, площадь представится двойным интегралом, распространенным на данную область:

$$\int\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

В рассматриваемом случае имеем:

$$Z = 0,\ P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad Q = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Уравнение в частных производных, которому должно удовлетворять z, будет:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

т. е.

$$r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2) = 0.$$

Это и есть уравнение в частных производных *минимальных поверхностей.* Как мы увидим ниже, оно выражает, что средняя кривизна поверхности в каждой точке равна 0.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

1. *Задача.* Показать, что среди всех поверхностей вращения одинаковой площади наибольший объем имеет сфера.

2. *Понижение порядка главного уравнения.* Если высшая производная, входящая в подинтегральную функцию, есть y'', главное уравнение $Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} = 0$, вообще говоря, будет четвертого порядка (если Y'' содержит y'').

Порядок этот понижается в следующих случаях:

1°. Если F не содержит явно y, то $Y = 0$ и непосредственно получаем первый интеграл (3-го порядка):

$$Y' - \frac{dY''}{dx} = C.$$

2°. Если F не содержит явно ни x, ни y, можно исключить Y' из предыдущего соотношения с помощью равенства $dF = Y'dy' + Y''dy''$, откуда:

$$dF = Cdy' + y''dY'' + Y''dy'' = Cdy' + d(y''Y''),$$

что дает второй интеграл (второго порядка):

$$F = C_1 + Cy' + y''Y''.$$

3°. *Задача.* Между двумя точками A, B плоскости провести кривую AMB так, чтобы площадь, заключенная между этой кривой, радиусами кривизны в точках A, B и эволютой была наименьшей.

Отв. Пусть R означает радиус кривизны; интеграл, который нужно обратить в minimum, есть

$$I = \int R\, ds = \int \frac{(1 + y'^2)^2}{y''}\, dx.$$

Заметив, что F не содержит ни x, ни y и что $y''Y'' = -F$, видим, что второй интеграл предыдущего примера будет: $2F = C_1 + Cy'$. Но $F = R\frac{ds}{dx}$, а потому, обозначая через φ наклонение касательной, находим:

$$2R\,\frac{ds}{dx} = C_1 + Cy',$$

откуда

$$2R = C_1 \cos\varphi + C \sin\varphi;$$

это есть *внутреннее уравнение циклоиды* (n° 271, замечание).

Если даны концы A, B и направления радиусов кривизны в этих двух точках, этих условий достаточно для определения постоянных интегрирования. В противном случае нужно будет обратиться к уравнению в предельных значениях.

4. *Точные производные.* Найти условие для того, чтобы функция $F(x, y, y', \ldots, y^{n})$ была полной производной некоторой функции от $x, y, y', \ldots, y^{n-1}$, при каком угодно y (n° 264).

Отв. Необходимо, чтобы интеграл $\int F(x, y, y', \ldots)\,dx$ зависел только от значений x, y при пределах интегрирования, но не от выбора y; стало быть, нужно, чтобы его вариация обращалась в 0, когда предельные значения закреплены. Это дает при произвольном ω:

$$\int \left(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \ldots \right) \omega\, dx = 0.$$

Искомое условие заключается в том, чтобы имели тождественно:

$$Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \ldots = 0.$$

5. *Свойство геодезических линий.* 1^0. Если из некоторой точки A на поверхности провести во всех направлениях отрезки геодезических линий одинаковой длины AM, геометрическое место их концов M есть кривая, ортогональная ко всем геодезическим линиям.

2^0. Если в каждой точке кривой MN на поверхности проведем отрезки геодезических кривых, нормальных к MN и постоянной длины, геометрическое место их концов также есть кривая, нормальная к этим отрезкам.

3^0. Геометрическое место таких точек M поверхности, что сумма их геодезических расстояний от двух данных точек F, F' поверхности есть величина постоянная, представляет кривую, которая пересекает под равными углами обе геодезические кривые MF и MF'.

Эти свойства, высказанные Gauss'ом, выводятся легко из вариационного исчисления. Мы докажем только первое, так как остальные устанавливаются аналогичным способом. Пусть (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) суть координаты точек A и M. Длина кривой AM выражается интегралом $I = \int_0^1 ds$ и его вариация равна 0, когда мы переходим от одной геодезической к бесконечно к ней близкой. Эта вариация вычисляется по формуле n^0 335. Но в этой формуле интеграл обращается в 0, так как мы имеем дело с геодезической кривой. Члены при пределе 0 также обращаются в 0, так как A неподвижна, остается только

$$\delta I = \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1 = 0,$$

что и доказывает теорему.

6. *Задача.* Пусть $\rho = f(r)$ есть данная функция радиуса-вектора в пространстве Найти кривую, вдоль которой интеграл $\int \rho\, ds$ есть maximum или minimum.

Отв. Примем полюс O за начало прямоугольных координат. Главное уравнение распадается на три:

$$d\left(\rho \frac{dx}{ds}\right) = ds\,\frac{\rho' x}{r};\; d\left(\rho \frac{dy}{ds}\right) = ds\,\frac{\rho' y}{r};\; d\left(\rho \frac{dz}{ds}\right) = ds\,\frac{\rho' z}{r}.$$

Помножив их соответственно на направляющие cosinus'ы X, Y, Z бинормали и сложив, легко найдем: $Xx + Yy + Zz = 0$, т. е. что вронскиан

$W(x, y, z) = 0$. Следовательно, x, y, z связаны линейным однородным соотношением с постоянными коэффициентами, и кривая лежит в плоскости, проходящей через начало координат.

Для получения уравнения кривой введем полярные координаты r и θ в ее плоскости. Интеграл, который должен быть maximum или minimum, есть $\int \rho\, ds = \rho \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$. Построим главное уравнение, варьируя только θ. Мы найдем непосредственно:

$$d\left(\rho\, \frac{r^2 d\theta}{ds}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{r^2 d\theta}{ds} = \frac{k}{\rho}.$$

Переменные r и θ разделяются и интегрирование приводится к квадратурам.

7. *Частный случай предыдущей задачи:* $f(r) = \frac{1}{r^2 \pm l^2}$. В этом случае решение легко доводится до конца; последнее уравнение в прямоугольных координатах будет

$$\frac{x\, dy - y\, dx}{ds} = k\,(x^2 + y^2 \pm l^2),$$

или, обозначая через φ наклонение касательной,

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = k\,(x^2 + y^2 \pm l^2). \tag{1}$$

Дифференцируя по s, находим:

$$(x \cos\varphi + y \sin\varphi)\, \frac{d\varphi}{ds} = 2k\,(x \cos\varphi + y \sin\varphi).$$

Обращая выражение, стоящее в скобках, в 0, находим частное решение (прямые, проходящие через начало координат). Общий интеграл получим из соотношения $\frac{d\varphi}{ds} = 2k$. Это есть круг радиуса $\frac{1}{2k}$, но нужно выразить еще, что решение это удовлетворяет (1). Пусть (a, b) центр круга, подставив в (1) значения x, y на окружности:

$$x = a + \frac{1}{2k} \sin\varphi;\quad y = b - \frac{1}{2k} \cos\varphi,$$

находим соотношение между постоянными a, b, k:

$$\frac{1}{4k^2} = a^2 + b^2 \pm l^2.$$

Примем a, b за постоянные интегрирования и исключим k; уравнение искомых кругов будет

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = \pm l^2. \tag{2}$$

Их можно определить по их взаимоотношению с неподвижным кругом $x^2 + y^2 = l^2$. В случае знака $(+)$ радикальная ось проходит через начало координат и круги (2) пересекают неподвижный круг в диаметрально противоположных точках. В случае знака (—) радикальная ось есть поляра точки 0 и круги (2) пересекают ортогонально неподвижный круг.

Если будем рассматривать $\frac{1}{f(r)}$ как масштаб изображения неэвклидова пространства в эвклидовом, эти результаты дают интересное представление обеих неэвклидовых геометрий, Riemann'a (+) и Лобачевского (—). Найденные круги дают изображение прямых в каждой системе.

§ 2. Исчисление конечных разностей.

342. Определения и обозначения. Пусть $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ есть последовательность значений, которые получает переменная y. Последовательные приращения y, когда мы переходим от одного значения к следующему, называются *первыми разностями* этих значений. Операция образования этих разностей обозначается символом Δ. Получаем

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0; \ \Delta y_1 = y_2 - y_1; \ \ldots \Delta y_n = y_{n+1} - y_n; \ldots$$

Разности первых разностей называются *вторыми разностями*:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0; \ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1; \ldots$$

Точно также, *третьи разности* будут:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0; \ \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1; \ldots$$

и так далее.

Часто бывает удобно обозначать символом ∇ (который называется „псевдодельта“) операцию перехода от одного значения к следующему в ряде $y_0, y_1, y_2, \ldots$ Таким образом имеем:

$$\nabla y_0 = y_1; \ \nabla y_1 = y_2, \ldots \ \nabla y_n = y_{n+1}, \ldots$$

Операция ∇ может также применяться последовательно. Имеем:

$$\nabla^2 y_n = \nabla y_{n+1} = y_{n+2}, \ldots \ \nabla^p y_n = y_{n+p}, \ldots$$

и в частности, $\nabla^n y_0 = y_n$.

Замечание. Так как $y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$, имеем:

$$\nabla y_n = y_n + \Delta y_n = (1 + \Delta) y_n,$$
$$\Delta y_n = (\nabla - 1) y_n.$$

Таким образом операции Δ и ∇ связаны формулами:

$$\nabla = 1 + \Delta; \ \Delta = \nabla - 1.$$

343. Свойства операций Δ и ∇. 1°. В силу предыдущих определений имеем:

$$\Delta^p \Delta^q y_n = \Delta^q \Delta^p y_n = \Delta^{p+q} y_n,$$

и точно также:

$$\nabla^p \nabla^q y_n = \nabla^q \nabla^p y_n = \nabla^{p+q} y_n = y_{n+p+q}.$$

Стало быть, операции Δ и ∇ обладают свойствами:

$$\Delta^p \Delta^q = \Delta^q \Delta^p = \Delta^{p+q}; \quad \nabla^p \nabla^q = \nabla^q \nabla^p = \nabla^{p+q}$$

2°. Если u, v, z, ... переменные величины, имеем:

$$\Delta(u+v-z+\ldots) = \Delta u + \Delta v - \Delta z + \ldots$$
$$\nabla(u+v-z+\ldots) = \nabla u + \nabla v - \nabla z + \ldots;$$

если a постоянная:

$$\Delta ay = a\Delta y; \quad \nabla ay = a\nabla y.$$

344. Выражение $\Delta^n y_0$ в функции от $y_0, y_1, \ldots, y_n$. В силу свойств, установленных в предыдущем n°, так как символы Δ и ∇ ведут себя как обыкновенные величины при вычислениях,

$$\Delta y_0 = (\nabla - 1)y_0,$$
$$\Delta^2 y_0 = (\nabla - 1)(\nabla - 1)y_0 = (\nabla - 1)^2 y_0.$$

и вообще:

$$\Delta^n y_0 = (\nabla - 1)^n y_0.$$

Раскрывая скобки и заменяя $\nabla^k y_0$ на y_k, находим:

$$\Delta^n y_0 = y_n - ny_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1-2} y_{n-2} - \ldots \pm y_0.$$

345. Выражение y_n в функции от $y_0, \Delta y_0, \ldots \Delta^n y_0$. Имеем:

$$y_1 = \nabla y_0 = (1+\Delta)y_0,$$
$$y_2 = \nabla y_1 = (1+\Delta)^2 y_0,$$

и вообще

$$y_n = \nabla^n y_0 = (1+\Delta)^n y_0.$$

Раскрывая скобки, находим:

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y$$

Замечание. Результаты этого и предыдущего n°-ов можно рассматривать как следующие символические соотношения:

$$\Delta^n = (\nabla - 1)^n \text{ и } \nabla^n \ldots 1 = (1+\Delta)^n.$$

346. Разности простых функций. Мы будем одновременно рассматривать независимую переменную x и функцию y от x.

Обозначим через $y_0, y_1, y_2, \ldots$ последовательные значения y, когда x получает ряд одинаковых приращений, равных h. Последовательные значения y, а потому и их последовательные разности зависят от начального значения x и приращения h. Стало быть, это будут функции от x и h, которые нужно будет определить.

1°. *Целая функция.* Пусть y есть полином степени m:

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L.$$

Имеем сперва

$$\Delta y = A[(x+h)^m - x^m] + B[(x+h)^{m-1} - x^{m-1}] + \ldots + Kh,$$

а затем, разлагая по степеням x:

$$\Delta y = mAx^{m-1}h + B'x^{m-2} + \ldots + K'.$$

Первый член, наивысшего порядка относительно x, будет степени $(m-1)$ и его коэффициент получим, умножив коэффициент первого члена y на показатель степени его и на h.

Оперируя таким же образом с Δy, получим:

$$\Delta^2 y = m(m-1)Ax^{m-2}h^2 + B''x^{m-3} + \ldots + K'' \text{ и т. д.}$$

Степень каждой последовательной разности уменьшается на единицу. Стало быть, $\Delta^m y$ будет степени 0 и приводится к одному первому члену, закон составления которого известен. Получаем поэтому

$$\Delta^m y = 1 \cdot 2 \ldots m\,Ah^m.$$

Итак, *m-ая разность целой функции степени m, когда x получает равные приращения, есть величина постоянная, все же следующие разности равны нулю.*

2°. *Показательная функция.* Имеем:

$$\Delta A^{ax+b} = A^{a(x+\Delta x)+b} - A^{ax+b} = A^{ax+b}(A^{a\Delta x} - 1),$$

$$\Delta^2 A^{ax+b} = (A^{a\Delta x} - 1)\,\Delta A^{ax+b} = A^{ax+b}(A^{a\Delta x} - 1)_2,$$

и вообще

$$\Delta^n A^{ax+b} = A^{ax+b}(A^{a\Delta x} - 1)^n.$$

3°. *Тригонометрические функции.* Имеем:

$$\Delta \sin(ax+b) = \sin(ax+b+a\Delta x) - \sin(ax+b) =$$

$$= 2\sin\frac{a\Delta x}{2}\cos\left(ax+b+\frac{a\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{a\Delta x}{2}\sin\left(ax+b+\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right),$$

и вообще

$$\Delta^n \sin(ax+b) = \left(2\sin\frac{a\Delta x}{2}\right)^n \sin\left(ax+b+n\,\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right).$$

Равным образом:

$$\Delta^n \cos(ax+b) = \left(2\sin\frac{a\Delta x}{2}\right)^n \cos\left(ax+b+n\,\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right).$$

347. Факториалы. 1°. Введем символ:

$$x^{[p]} = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{p-1}\,h);$$

имеем

$$\Delta x^{[p]} = x(x-h)\ldots(x-\overline{p-2}\,h)\,ph = px^{[p-1]}\Delta x.$$

Равным образом

$$\Delta^2 x^{[p]} = p\,\Delta x\,\Delta x^{[p-1]} = p(p-1)x^{[p-2]}\Delta x^2$$

и вообще

$$\Delta^n x^{[p]} = p(p-1)\ldots(p-n+1)x^{[p-n]}\Delta x^n.$$

Здесь очевидна аналогия с правилом дифференцирования степени в дифференциальном исчислении.

2°. Положим еще символически

$$x^{-[p]} = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+\overline{p-1}\,h)};$$

найдем без труда

$$\Delta x^{-[p]} = \frac{-ph}{x(x+h)\ldots(x+ph)} = -px^{-[p+1]}\Delta x,$$

откуда, вообще,

$$\Delta^n x^{-[p]} = (-1)^n p(p+1)\ldots(p+n-1)x^{-[p+n]}\Delta x^n.$$

348. Исчисление, обратное исчислению разностей. Прибавление произвольной периодической функции. Исчисление, обратное исчислению разностей, находится в таком же отношении с исчислением разностей, как интегральное исчисление с дифференциальными. Его цель — определить функцию, когда известна его конечная разность, или, более обще, соотношение между этой функцией, некоторыми из ее разностей и независимой переменной. Мы займемся здесь лишь первым случаем.

Пусть x есть независимая переменная, приращение которой $\Delta x = h$ считается постоянным; пусть $F(x)$ — неизвестная функция и $f(x)$ — данная ее разность. Мы должны иметь

$$\Delta F(x) = f(x), \text{ или } F(x+h) - F(x) = f(x).$$

Функция $F(x)$, разность которой есть $f(x)$, обозначается символом $\sum f(x)$ и называется *интегралом в конечных разностях от $f(x)$*. В силу этих обозначений, операции Δ и $\sum$, примененные к одной и той же функции, взаимно уничтожаются и имеем

$$\Delta \sum f(x) = f(x).$$

В обыкновенном интегральном исчислении, найдя какой-нибудь частный интеграл данного дифференциала, для получения общего выражения интеграла прибавляют к нему произвольную постоянную. В интегральном исчислении в конечных разностях нужно прибавлять уже не постоянную, а самую общую функцию, разность которой равна 0, т. е. какую угодно периодическую функцию периода $h = \Delta x$. Подобные функции будем обозначать через Π.

В силу этого, если $f(x)$ есть частный вид функции, разность которой есть $\Delta f(x)$, имеем:

$$\sum \Delta f(x) = f(x) + \Pi.$$

Итак, символы $\sum$ и Δ взаимно уничтожаются и тогда, когда $\sum$ предшествует Δ, но только нужно прибавлять произвольную периодическую функцию Π.

В силу этого замечания, вычисления в n° 346 и 347 дают соответственно:

$$\sum A^x = \frac{A^x}{A^h - 1} + \Pi.$$

$$\sum \cos(ax + b) = \frac{\sin\left(ax - \frac{ah}{2} + b\right)}{2\sin\frac{ah}{2}} + \Pi.$$

$$\sum x^{[p]} = \frac{x^{[p+1]}}{(p+1)h} + \Pi.$$

349. Определенный интеграл в конечных разностях. Интеграл в конечных разностях обладает свойством, аналогичным первообразной функции в интегральном исчислении: пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ряд значений, отличающихся на h, и $F(x)$—интеграл в конечных разностях от $f(x)$; имеем:

$F(x_2) - F(x_1) = f(x_1)$; $F(x_3) - F(x_2) = f(x_2), \ldots, F(x_n) - F(x_{n-1}) = f(x_{n-1})$ или, складывая эти равенства:

$$F(x_n) - F(x_1) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}).$$

Это и есть свойство, которое мы хотели установить. Правая часть этого равенства называется *определенным интегралом в конечных разностях от* $f(x)$ и обозначается сокращенно через

$$\sum_{x_1}^{x_n - h} f(x).$$

Уравнение примет тогда вид:

$$\sum_{x_1}^{x_n - h} f(x) = F(x_n) - F(x_1),$$

в котором очевидна аналогия с формулами квадратур. Например, с помощью интеграла от A^x, указанного в конце предыдущего n°, полагая $h = \frac{b-a}{n}$, находим:

$$A^a + A^{a+h} + \ldots + A^{a+(n-1)h} = \sum_a^{b-h} A^x = \frac{A^b - A^a}{A^h - 1}.$$

§ 3. Формула Euler'а Maclaurin'а. Соотношение между суммами и интегралами.

350. Предварительная формула. Рассмотрим формулу Maclaurin'а

$$f(x)-f(0)=xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^{2p}}{(2p)}f^{2p}(0)+R_{2p+1}, \tag{1}$$

причем остаточный член (т. I, n° 406 есть

$$R_{2p+1}=\frac{1}{(2p)!}\int_0^x f^{2p+1}(x-t)t^2\,dt.$$

Заменим в этой формуле последовательно функцию f ее производными f', f'',..., заменяя в то же время $2p$ на $(2p-1)$, $(2p-2),\ldots,1$. Помножив эти уравнения соответственно на B_1x, $\frac{B_2x^2}{2!}$, $\frac{B_3x^3}{3!},\ldots\frac{B_{2p-1}\,x^{2p-1}}{(2p-1!)}$ (где B означают числа Bernoulli, см. n° 156 и след.) и сложив почленно с (1), получим результат вида

$$[f(x)-f(0)]+\frac{B_1x}{1}[f'(x)-f'(0)]+\ldots+\frac{B_{2p-1}x^{2p-1}}{(2p-1)!}[f^{(2p-1)}(x)-$$

$$-f^{(2p-1)}(0)]=xf'(0)+A_2x^2f''(0)+\ldots+A_{2p}x^{2p}f^{2p}(0)+R,$$

полагая

$$A_2=\frac{1}{2!}+\frac{B_1}{1}=\frac{(1+B)^2-B^2}{2!}$$

$$A_3=\frac{1}{3!}+\frac{B_1}{2!\,1'}+\frac{B_2}{2!}=\frac{(1+B)^3-B^3}{3!}$$

$$A_4=\frac{1}{4!}+\frac{B_1}{3!\,1}+\frac{B_2}{2!\,2!}+\frac{B_3}{3!}=\frac{(1+B)^4-B^4}{4!}$$

и обозначая через R интеграл

$$\int_0^x dtf^{2p+1}(x-t)\left[\frac{t^{2p}}{(2p)!}+\frac{B_1xt^{2p-1}}{1!(2p-1)!}+\frac{B_2x^2\,t^{2p-2}}{2!(2p-2)}+\cdots\right]$$

Заметим сперва, что все коэффициенты A_2, A_3,... в силу соотношений (7) и n° 157 обращаются в 0. Выражение же в скобках под знаком интеграла R приводится к полиному Bernoulli (n° 159), ибо оно может быть написано так:

$$\frac{(t+Bx)^{2p}-(Bx)^{2p}}{(2p)!}=x^{2p}\frac{\left(\frac{t}{x}+B\right)^{2p}-B^{2p}}{(2p)!}=\frac{x^{2p}}{(2p-1)!}\varphi_{2p-1}\left(\frac{t}{.}\right).$$

Итак, обозначая через φ полиномы Bernoulli, имеем:

$$R = \frac{x^{2p}}{(2p-1)!} \int_0^x f^{2p+1}(x-t)\,\varphi_{2p-1}\left(\frac{t}{x}\right) dt. \tag{2}$$

Вспомнив, что (n^0 157) все B с нечетными значками равны 0, кроме B_1, который равен $-\frac{1}{2}$, мы получаем таким образом следующую формулу:

$$f(x) - f(0) = x\frac{f'(x) + f'(0)}{2} - \frac{B_2 x^2}{2!}[f''(x) - f''(0)] - \ldots -$$

$$- \frac{B_{2p-2}\,x^{2p-2}}{(2p-2)!}\left[f^{(2p-2)}(x) - f^{(2p-2)}(0)\right] + R. \tag{3}$$

351. Упрощение R. Воспользуемся свойствами полиномов Bernoulli (n^0 160). Так как в выражении (2) $\frac{t}{x}$ изменяется от 0 до 1, то $\varphi_{2p-1}\left(\frac{t}{x}\right)$ не меняет знака (свойство 5^0) и можно положить по теореме о среднем:

$$R = \frac{x^{2p}}{(2p-1)!} f^{2p+1}(\theta x) \int_0^x \varphi_{2p-1}\left(\frac{t}{x}\right) dt,$$

где θ лежит между 0 и 1, так что θx есть среднее значение аргумента $x - t$.

Заменив t на tx в интеграле, получим:

$$R = \frac{x^{2p+1}}{(2p-1)!} f^{2p+1}(\theta x) \int_0^x \varphi_{2p-1}(t)\,dt.$$

Интегрирование можно выполнить непосредственно, если заменить φ_{2p-1} его выражением из уравнения (10) n^0 160, а именно:

$$\varphi_{2p-1} = \frac{\varphi'_{2p} - B_{2p}}{2p},$$

и заметить, что интеграл от φ' обращается в 0, так как $\varphi = 0$ при $t = 0$ и 1. Итак, получаем просто:

$$R = -\frac{B_{2p}x^{2p+1}}{(2p)!} f^{2p+1}(\theta x). \tag{4}$$

352. Формула Euler'a и Maclaurin'a. Формула Euler'a и Maclaurin'a есть не что иное, как преобразование формулы (3). Заменим в левой части функцию $f(x)$ интегралом

$$\int_r^{a+x} f(x)\,dx = \int_0^x f(a+x)\,dx.$$

Тогда в правой части нужно будет заменить производную $f^k(x)$ на $f^{k-1}(a+x)$ ($k=1, 2, \ldots$), а потому получим:

$$\int_a^{a+x} f(x)dx = x\frac{f(a+x)+f(a)}{2} - \frac{B_2x^2}{2!}[f'(a+x)-f'(a)] - \ldots -$$
$$-\frac{B_{2p-2}x^{2p-2}}{(2p-2)!}[f^{2p-3}(a+x)-f^{2p-3}(a)]+R, \tag{5}$$

причем выражение (4) для R примет вид:

$$R = -\frac{B_{2p}x^{2p+1}}{(2p)!}f^{2p}(a+\theta x) \quad (0<\theta<1). \tag{6}$$

Формула (5) и есть *формула Euler'a и Maclaurin'a*, дополненная однако выражением остаточного члена, которое эти геометры не дали.

Так как числа B_2, B_4, ... быстро возрастают по абсолютной величине, эта формула часто становится расходящейся при беспредельном возрастании p. Но, придавая p надлежащее значение, можно, вообще говоря, сделать R настолько малым, чтобы на практике его можно было откинуть, причем выражение (6) для R позволит действовать наверняка.

Формулой Euler'a и Maclaurin'a пользуются для того, чтобы приводить вычисление интегралов к вычислению сумм и обратно. Это мы и покажем.

353. Приложение к приближенному вычислению определенных интегралов. Для применения формулы (5) к вычислению интеграла $\int_a^b f(x)dx$ достаточно очевидно положить $x=b-a$. Но, если промежуток интегрирования велик, для большей точности полезно разбить его на несколько частей. Положив $h=\frac{b-a}{n}$, будем иметь:

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^{a+h} + \int_{a+h}^{a+2h} + \ldots + \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f\,dx.$$

Применив к каждому из этих интегралов формулу (5), где x нужно заменить на h, и сложив результаты, найдем

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{f(a)}{2}+f(a+h)+\ldots+f(a+\overline{n-1}h)+\frac{f(b)}{2}\right] -$$
$$-\frac{B_2h^2}{2!}[f'(b)-f'(a)] - \frac{B_4h^4}{4!}[f'''(b)-f'''(a)] - \ldots -$$
$$-\frac{B_{2p-2}h^{2p-2}}{(2p-2)!}[f^{2p-3}(b)-f^{2p-3}(a)]+R,$$

причем остаток R будет дан формулой

$$R = -n\mu\frac{B_{2p}h^{2p+1}}{(2p)!}, \tag{7}$$

где μ означает среднее значение $f^{2p}(x)$ между a и b.

Формулу (7) мы и хотели получить. Член в первой строке правой части допускает геометрическое истолкование: он представляет сумму трапеций, вписанных в кривую $y = f(x)$ и определяемых равноотстоящими ординатами. Левая же часть есть площадь кривой.

354. Формула суммирования Euler'a и Maclaurin'a. Обратно, формула (7) может служить для приведения вычисления суммы к определенному интегралу. Положим

$$\sum_a^{b-h} f(x) = f(a) + f(a+h) + \ldots + f(b-h), \text{ где } b = a + nh.$$

Формула (7) даст:

$$\sum_a^{b-h} f(x) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(b)-f(a)}{2} + \frac{B_1 h}{2!}[f'(b) - f'(a)] + \ldots +$$

$$+ \frac{B_{2p-2}h^{2p-3}}{(2p-2)!}[f^{2p-3}(b) - f^{2p-3}(a)] + n\mu\frac{B_{2p}h^{2p}}{(2p)!} \tag{8}$$

Это есть *формула суммирования Euler'a и Maclaurin'a*, дополненная выражением остаточного члена. Она бывает часто весьма полезной, когда указанная квадратура выполняется просто.

355. Символическое выражение формулы Euler'a и Maclaurin'a. Интегрирование в конечных разностях полинома. Пусть $f(y)$ есть полином. В формуле (6) n⁰ 158 положим $y = 1, 2, \ldots (n-1)$ и сложим результаты, получим:

$$f'(0) + f'(1) + \ldots + f'(n-1) = f(B+n) - f(B).$$

Эту формулу можно обобщить, заменяя функцию $f(y)$ на $f(a+hy)$ и рассматривая последнюю как функцию от y; формула превратится тогда в следующую:

$$\sum_{y=0}^{n-1} f'(a+hy) = \frac{f[a+(B+n)h] - f(a+Bh)}{h}. \tag{9}$$

Это есть наиболее изящная формула для суммирования полинома. Впрочем она представляет лишь символическое выражение формулы Euler'a и Maclaurin'a, где f заменено на f' в том случае, когда формула эта содержит конечное число членов, и остаточный член равен 0.

Если f не есть полином, можно все-таки рассматривать (9) как символическое выражение формулы Euler'a и Maclaurin'a, продолженной до бесконечности; но она годится лишь тогда, когда остаточный член формулы (8) стремится к 0, что представляет исключительный случай.

§ 4. Интерполирование.

356. Цель интерполирования. Цель интерполирования заключается в нахождении функции от переменной, когда известны значения этой функции при некоторых данных значениях переменной. Эта задача, поскольку мы не фиксируем вида искомой функции, является неопределенной, так как сводится к проведению кривой через данные точки, что можно сделать бесчисленным множеством способов, пока кривая не определена. Задача интерполирования становится определенной, если задан вид функции, и она заключает столько различных параметров, сколько есть данных. Так например, целая функция $(n-1)$-й степени содержит n параметров и может быть определена, если даны n значений функции.

357. Формула интерполирования Lagrange'a. Полином y степени $(n-1)$, принимающий n данных значений при n различных значениях x: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяется единственным образом. В самом деле, если бы таких полиномов было два, их разность, степени не выше $n-1$, имея n различных корней, $x_1, x_2, \ldots x_n$, обращалась бы тождественно в 0, и полиномы оказались бы тождественными между собой.

Можно непосредственно написать полином P_1 степени $n-1$, принимающий значение 1 при $x=x_1$ и обращающийся в 0 при

$$x=x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n.$$

Это есть

$$P_1=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}$$

Полином P_i, равный 1 при $x=x_i$ и 0 при остальных значениях x_k, выводится из предыдущего заменой значка 1 на i. Следовательно, полином y $(n-1)$-й степени, принимающий значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выражается формулой

$$y=y_1P_1+y_2P_2+\ldots+y_nP_n. \tag{1}$$

Это и есть формула интерполирования Lagrange'a, весьма полезная при теоретических рассуждениях, но мало пригодная для вычисления.

358. Формула интерполирования Newton'a. Пусть $f(x)$ какая угодно функция. Поставим себе задачу определить полином y степени $n-1$, принимающий значения $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Обозначим вообще через Q_i полином степени $i-1$, принимающий значения $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_i)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_i$. К формуле Newton'a мы придем, написав полином y в виде

$$y=Q_1+\sum_{i=2}^{n}(Q_i-Q_{i-1}),$$

но только нужно преобразовать члены этой суммы. Полином Q_i-Q_{i-1} степени $i-1$, в силу своего определения, обращается в 0 в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Стало быть, он отличается от произведения $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})$ лишь постоянным множителем, равным коэффициенту при x_{i-1} в выражении $Q_i - Q_{i-1}$, следовательно, в Q_i; в силу выражения Q_i по формуле Lagrange'a коэффициент этот равен

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_i)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)\ldots(x_2-x_i)}+\ldots+$$
$$+\frac{f(x_i)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})}.$$

Таким образом, этот коэффициент оказывается симметрической функцией от $x_1, x_2, \ldots, x_i$, которую мы обозначим через

$$f(x_1, x_2, \ldots x_i).$$

Итак, выражение y можно написать так:

$$y=f(x_1)+(x-x_1)f(x_1, x_2)+(x-x_1)(x-x_2)f(x_1, x_2, x_3)+\ldots+$$
$$+(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (2)$$

Это и есть *формула интерполирования Newton'a* для получения полинома степени $n-1$, принимающего в точках x_k данные значения $f(x_k)$.

Выражения $f(x_1, x_2)$, $f(x_1, x_2, x_3)$, ... называют *первой, второй ... интерполирующими функциями для* $f(x)$. Их вычисляют с помощью последовательного алгорифма, который мы сейчас покажем.

359. Вычисление интерполирующих функций. Если положим $x=x_n$ в формуле (2) Newton'a, она дает $f(x_n)$; стало быть, заменяя x_n на x, получаем тождественно при всех x:

$$f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f(x_1, x_2)+\ldots$$
$$+(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})+$$
$$+(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x) \qquad (3)$$

Вычитая из этого тождества то, которое получается заменой n на $n-1$, заключаем:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x)=\frac{f(x_1, \ldots, x_{n-2}, x)-f(x_1, \ldots, x_{n-1})}{x-x_{n-1}}.$$

Полагая $n=2, 3, \ldots$, получаем ряд формул:

$$f(x_1, x)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}; \quad f(x_1, x_2, x)=\frac{f(x_1, x)-f(x_1, x_2)}{x-x_2}, \ldots,$$

дающих систематический способ для последовательного вычисления интерполирующих функций.

360. Остаток формулы интерполирования Newton'a. Установим сперва общее свойство интерполирующих функций, предположив, что $f(x)$ имеет производные до $(n-1)$-го порядка. Обозначив опять через y полином, определяемый по формуле (2), рассмотрим разность $f(x)-y$. Она обращается в 0 в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а потому в силу теоремы Roll'я заключаем, что ее производные 1, 2, ... $(n-1)$-го порядка обращаются в нуль соответственно по крайней мере $n-1, n-2, \ldots, 1$ раз в промежутке, содержащем эти значения. Пусть теперь ξ есть корень последней производной, который лежит в промежутке, содержащем $x_1, x_2, \ldots, x_n$; имеем:

$$0=f^{(n-1)}(\xi)-D^{(n-1)}y=f^{(n-1)}(\xi)-(n-1)!\,f(x_1, \ldots, x_n),$$

откуда и вытекает исследуемое свойство:

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}, \tag{4}$$

Возратимся теперь к формуле Newton'а.

Заменив в формуле (3) n на $n+1$, преобразуем последний член на основании предыдущего свойства; мы получим:

$$f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f(x_1, x_2)+\ldots+$$
$$+(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f(x_1, x_2, \ldots x_n)+R,$$

причем

$$R=\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

где ξ лежит уже между $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и x.

Стало быть, R представляет ошибку, которую мы делаем, вычисляя $f(x)$ приближенно по формуле (2) или по формуле интерполирования Newton'а. Вот почему R называется *остаточным членом формулы Newton'а*; выражение его, которое мы вывели, напоминает выражение остаточного члена формулы Taylor'а.

361. Формула Newton'а в случае равноотстоящих значений x. Рассмотрим случай, когда последовательные значения $x_0, x_1, x_2, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию. Заменяя, в случае надобности, x на $x+x_0$, можно считать, что эти значения суть:

$$x_0=0,\ x_1=h,\ x_2=2h,\ \ldots\ x_n=nh.$$

Пусть $y_0, y_1, \ldots, y_n$—соответствующие значения полинома y n-ой степени, который нужно определить. Выражение этого полинома по формуле Newton'а можно вывести непосредственно из одной формулы исчисления конечных разностей. В самом деле, образовав последовательные разности $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \ldots, \Delta^n y_0$, мы получим:

$$y_m=y_0+m\,\Delta y_0+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0+\ldots$$

Это разложение останавливается на члене, содержащем $\Delta^n y_0$. Заменим в этом разложении m на $\frac{x}{h}$ и продолжим его до члена, содержащего $\Delta^n y_0$, имеем:

$$y = y_0 + \frac{x}{h}\,\frac{\Delta y_0}{1} + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2} + \ldots +$$
$$+ \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\ldots\left(\frac{x}{h} - n + 1\right)\frac{\Delta^n y_0}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Справедливость этой формулы проверяется непосредственно, так как разложение это приводится к y_m, когда $x = mh$. Мы получили таким образом весьма простое выражение формулы Newton'a для случая равноотстоящих значений, и оно связано с исчислением конечных разностей.

Можно обнаружить аналогию этой формулы с формулой Maclaurin'a.

Положив, по обозначению факториалов,

$$x^{[p]} = x(x-h)\ldots(x-ph+h)$$

и заменив h на Δx, находим:

$$y = y_0 + \frac{x}{1}\,\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{x^{[2]}}{1 \cdot 2}\,\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \ldots + \frac{x^{(n)}}{1 \cdot 2 \ldots n}\,\frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n}.$$

Эта формула должна совпасть с формулой (2), написанной для настоящего случая, так как в них обеих прибавляется лишний член при замене n на $n+1$ и, следовательно, члены одинакового ранга тождественны.

362. Приближенные формулы для квадратур. Формулы интерполирования могут служить для вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

когда эта квадратура не может быть выполнена точно. Для этой цели заменяем кривую $y = f(x)$ другою, которую умеем интегрировать.

Можно заменить $f(x)$ полиномом n-ой степени с помощью формулы Lagrange'a. Это приводится к замене кривой $y = f(x)$ параболой n-й степени, имеющей с данной кривой $n+1$ общих точек. Если абсциссы этих точек образуют арифметическую прогрессию, получаем *способ интегрирования Cotes*'a и *Newton*'a, который, впрочем, мало удобен. Gauss значительно улучшил предыдущий способ, изменив выбор абсциссы точек деления, благодаря чему увеличилась точность; но точное изложение *способа Gauss*'a требует слишком многих вычислений и здесь не может быть приведено.

Вместо того, чтобы интерполировать во всем промежутке (a, b), можно разбить его на последовательные части и интерполировать в каждой части. Можно заменить $f(x)$ рядом полиномов первой степени, т. е. данную кривую рядом прямых, что даст *формулу трапеций.*

Можно также заменить $f(x)$ рядом полиномов второй или третьей степени, т. е. данную кривую рядом дуг парабол; считая промежутки равными, получим формулу *Simpson'a* (т. I, n$^{\circ}$ 370).

363. Эмпирическое выражение некоторых законов. Когда точный закон изменения каких-либо величин неизвестен, как это имеет место для большинства явлений природы, можно пользоваться формулами интерполирования. Определяем значение функции для ряда значений переменной, и формулы интерполирования дают тогда эмпирическое правило для вычисления значений функции при других значениях переменной. Однако полученные таким путем формулы заслуживают, вообще говоря, мало доверия.

ГЛАВА X.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ.

§ 1. Особые точки плоских кривых.

364. Обыкновенные и особые точки. Рассмотрим уравнение плоской кривой в прямоугольных или косоугольных координатах:

$$f(x,\ y)=0, \tag{1}$$

и допустим, что f есть непрерывная и однозначная функция, *имеющая производные всех порядков* в соседстве с точкой $M\ (a,\ b)$ кривой.

Если $f'_y\ (a,\ b) \neq 0$, уравнение (1) в соседстве с точкой M имеет единственное решение $y=\varphi(x)$, которое представляет единственную непрерывную ветвь кривой, проходящую через точку M и имеющую определенную касательную, изменяющуюся непрерывным образом при передвижении точки касания. Это вытекает из общей теоремы существования неявных функций (т. I, n⁰ 169). Точка M, обладающая этими отличительными свойствами, называется *обыкновенной точкой кривой*.

Если бы $f'_y=0$ в точке M но $f'_x \neq 0$, то можно было бы разрешить уравнение (1) относительно x и заключение получилось бы аналогичное.

Итак, если мы назовем *особыми точками* такие, которые не обладают вышеуказанными свойствами, мы можем высказать следующее заключение:

Когда функция $f(x,y)$ и все ее производные непрерывны и однозначны, кривая $f(x,y)=0$ может иметь только те особые точки, координаты которых a, b удовлетворяют совокупной системе трех уравнений:

$$f(a,b)=0;\quad \frac{\partial f}{\partial a}=0;\quad \frac{\partial f}{\partial b}=0.$$

Стало быть, в этом случае, для нахождения особых точек кривой, необходимо найти системы решений трех предыдущих уравнений.

365. Особые точки различных порядков. Пусть $M(a,\ b)$ есть особая точка. Разложим $f(x,y)$ по формуле Taylor'a (с остаточным членом) по степеням разностей $(x-a)$ и $(y-b)$. Так как по предположению f, f'_x и f'_y обращаются в 0 в точке M, члены порядков 0 и 1 исчезают, и разложение начинается с членов второго порядка.

Итак, имеем:

$$f(x,y)=\varphi_2+\varphi_3+\cdots+\varphi_{n-1}+R_n,$$

обозначая через φ_2, φ_3, ... — однородные полиномы относительно $(x-a)$, $(y-b)$ степеней 2, 3, ... и через R_n — остаточный член.

Если совокупность членов второго измерения, а именно

$$\varphi_2=\frac{(x-a)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}+(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}+\frac{(y-b)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2},$$

не обращается тождественно в 0, как предыдущие, т. е. если по крайней мере одна из производных второго порядка f не обращается в 0 в точке M, говорят, что M есть *особая точка второго порядка* *).

Если же, напротив, φ_1, φ_2, ..., φ_{n-1} обращаются тождественно в 0, а φ_n не равно тождественно 0, говорят, что точка $M(a, b)$ кривой есть *особая точка n-го* порядка **).

366. Особые точки второго порядка. В силу предыдущего, особая точка $M(a, b)$ второго порядка кривой $f(x, y)=0$ характеризуется тем обстоятельством, что разложение $f(x, y)$ по степеням разностей $(x-a)$, $(y-b)$ имеет вид

$$f(x, y)=\varphi_2+\varphi_3+\ldots,$$

причем φ_2 не равно тождественно 0.

Вид кривой в соседстве с точкой M связан со свойствами однородного уравнения второй степени $\varphi_2=0$, представляющего пучок двух прямых, вещественных или мнимых, различных или совпадающих, проходящих через M.

В самом деле, обозначим через Δ дискриминант φ_2, т. е.

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}.$$

Мы получим следующую теорему, содержание которой выяснится ниже при ее доказательстве:

Теорема. 1°. *Если $\Delta<0$, или, что то же самое, обе прямых пучка мнимые, точка M есть* изолированная точка.

2°. *Если $\Delta>0$ или обе прямых пучка вещественные и различные, точка M есть* двойная точка с различными касательными, *т. е. кривая имеет две ветви, проходящие через M и касающиеся соответственно обеих прямых пучка* (черт. 2).

3°. *Если $\Delta=0$, или обе прямые пучка совпадают, вид кривой сомнителен, но за некоторыми исключениями, точка M есть* точка возврата *первого рода* (черт. 3).

Для упрощения письма допустим, что предварительно начало координат перенесено в точку M; мы приходим к изучению вида кривой $f(x, y)=0$ около начала координат. В разложении $f(x, y)$ по формуле Maclaurin'а по степеням x, y члены второй степени не исчезают, и мы имеем:

$$f(x, y)=\varphi_2+\varphi_3+\ldots+\varphi_{n-1}+R_n,$$

*) В теории аналитических функций такую точку называют *двойной*, так как через нее проходят две ветви кривой, вещественные или мнимые. Мы все здесь рассматриваем исключительно с точки зрения вещественных переменных.

**) В теории аналитических функций такую точку называют n-кратной, так как через нее проходят n ветвей, вещественных или мнимых.

где φ означают уже однородные полиномы от x, y, степень коих указывается значком, R_n—остаточный член.

Сделаем здесь важное замечание. Какова бы ни была точка (x, y), по крайней мере одно из отношений $y:x$ или $x:y$ не превосходит единицы по абсолютной величине. Стало быть, всегда получим точки кривой, полагая в ее уравнении либо $y = ux$, либо $x = vy$ и отыскивая в первом случае *конечные значения* u, во втором *конечные значения* v, удовлетворяющие преобразованному уравнению кривой.

Нужно еще посмотреть, какой вид принимает остаточный член R_n при подстановке $y = ux$ (аналогичные заключения имеют очевидно место для подстановки $x = vy$). Положим для сокращения:

$$F(x) = f(x, ux).$$

При подстановке $y = ux$ написанное выше разложение $f(x, y)$ преобразуется в разложение $F(x)$ по степеням x; R_n преобразуется в соответствующий остаточный член, который имеет вид (т. I, n° 406 (2)):

$$\ldots = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 F^{(n)}(tx)(1-t)^n \, dt.$$

Так как производные F выражаются линейно через частные производные $f(x, y)$, мы видим, что, при подстановке $y = ux$, R_n принимает вид

$$R_n = x^n \psi(u, x),$$

где $\psi(u, x)$, равно как и f, означает непрерывную функцию, имеющую *производные всех порядков*, если x достаточно мало (в каковом случае точка (x, y) находится в соседстве с началом координат).

Переходим теперь к доказательству теоремы, считая, что точка M принята за начало координат.

Первый случай. $\Delta < 0$. Прямые пучка мнимые. Начало находится тогда на конечном расстоянии от всех других точек кривой и говорят, что начало есть *изолированная точка*. Мы это докажем.

Представим уравнение кривой в виде

$$\varphi_2(x, y) + R_3 = 0.$$

Положим в этом уравнении сперва $y = ux$ и разделим на x^2; принимая во внимание предыдущее выражение для R_n, находим:

$$\varphi_2(1, u) + x\psi(u, x) = 0,$$

где значение ψ остается ограниченным, когда x стремится к 0 (и u остается ограниченным). Но полином $\varphi_2(1, u)$, имеющий мнимые корни, остается по абсолютной величине больше некоторой положительной постоянной. Стало быть, предыдущее уравнение при стремлении x к 0 невозможно. Равным образом, положив $x = vy$, мы пришли бы к невозможному соотношению при стремлении y к 0.

Это показывает, что кривая не имеет точек в соседстве с началом координат.

Второй случай. $\Delta > 0$. Если прямые пучка вещественны и различны, кривая имеет две ветви, пересекающиеся в начале координат и касательные соответственно к каждой прямой пучка (черт. 2).

Примем оба прямых пучка за координатные оси; $\varphi_2(x, y)$ приводится к xy, если сократить все уравнение на коэффициент при xy. Уравнение кривой приводится тогда к

$$xy + R_3 = 0.$$

Делаем сперва подстановку $y = ux$, где u остается ограниченным. R_3 принимает вид $x^3\psi(u, x)$ и, разделив на x^2, находим:

$$u + x\psi(u, x) = 0.$$

Это уравнение показывает, что u стремится к 0 вместе с x, оно определяет некоторую кривую в плоскости u, x, которую мы назовем кривой (u, x), чтобы отличить ее от кривой (x, y). Для этой кривой (u, x) начало координат есть обыкновенная точка, так как имеется член первой степени относительно u; стало быть, существует одно и только одно решение в виде функции u от x, бесконечно малое вместе с x.

Заменяя $\psi(u, x)$ на $\psi(0, x) + u\psi_u'(\theta u, x)$, где $0 < \theta < 1$, мы видим что это решение удовлетворяет соотношению

$$u = \frac{-x\psi(0, x)}{1 + u\psi_u'(\theta u, x)}.$$

Если $\psi(0, 0) \neq 0$, главные части значений u, а затем и y суть:

$$u = -x\psi(0, 0);\quad y = -x^2\psi(0, 0).$$

Это последнее соотношение есть приближенное уравнение ветви кривой, касающейся оси x в начале координат и не имеющей точек перегиба в этой точке.

Если $\psi(0, 0) = 0$, главными частями u и y будут соответственно главные части выражений $-x\psi(0, x)$, $-x^2\psi(0, x)$; стало быть, точка перегиба будет или нет, смотря по тому, начинается ли разложение $\psi(0, x)$ по степеням x членом нечетной или четной степени.

Подстановкой $x = vy$ мы докажем точно также, что кривая имеет вторую ветвь, касающуюся оси x, причем других ветвей в соседстве с началом координат она иметь не может.

Простейшая кривая, имеющая двойную точку с различными касательными, есть *Декартов лист*: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Третий случай. $\Delta = 0$. Обе кривые пучка приводятся к одной; принимая эту прямую за ось x и разделяя на постоянный множитель, приводим уравнение кривой к виду

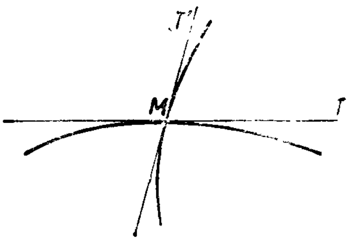
$$y^2 + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \ldots = 0.$$

Подстановка $x = vy$ при ограниченном v не может дать никакой точки кривой, бесконечно близкой к началу координат, так как, сократив на y^2 и считая y бесконечно малым, мы получили бы $1=0$, что невозможно. Достаточно поэтому изучить подстановку $y=ux$. Разделив на x^2, получаем соотношение

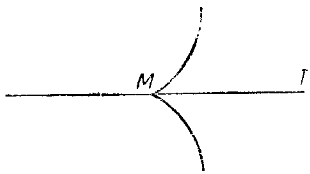
$$u^2+x\varphi_3(1,\ u)+x^2\varphi_4(1,\ u)+\ldots=0,$$

которое показывает прежде всего, что u бесконечно мало вместе с x.

Вообще, $f(x, y)$ содержит член с x^3, коэффициент которого $\varphi_3(1,\ 0)=0$, и предыдущее соотношение содержит тогда член первой степени относительно x; тогда начало координат будет обыкно-



Черт. 2.



Черт. 3.

венной точкой кривой (u, x). Существует единственное значение x в функции от u, удовлетворяющее уравнению в соседстве с началом; его главная часть есть

$$x=-\frac{u}{\varphi_3(1,\ 0)},$$

откуда

$$\begin{cases} u=\pm\sqrt{-x\varphi_3(1,\ 0)}, \\ y=\pm x\sqrt{-x\varphi_3(1,\ 0)}. \end{cases}$$

Эти два значения y различных знаков и вещественны лишь при условии, что x имеет знак $-\varphi_3(1,\ 0)$. Поэтому кривая расположена только по одну сторону оси y, но состоит из двух ветвей, касающихся оси x в начале координат и останавливающихся в этой точке. Эти две ветви расположены по обе стороны их общей касательной; говорят, что начало есть *точка возврата первого рода* (черт. 3).

Однако, это заключение предполагает, что $f(x, y)$ содержит член с x^3, в противном же случае вид кривой сомнителен, и необходимо дальнейшее исследование.

Простейшая кривая, представляющая точку возврата первого рода в начале координат, есть $y^2+x^3=0$.

337. Исследование сомнительного случая. Когда члены второй степени приводятся к y^2, но x^3 отсутствует, исследование усложняется. Предположим, что, разлагая $f(x, y)$, имеем:

$$y^2+(b_3x^2y+c_3xy^2+d_3y^3)+(a_4x^4+b_4x^3y+\ldots)+$$
$$+(a_5x^5+b_5x^4y+\ldots)+\ldots=0.$$

Подставив $y=ux$, разделив на x^2 и расположив по степеням u и x, находим:

$$(u^2+b_3ux+a_4x^2)+(a_5x^3+b_4x^2u+c_3xu^2)+\ldots=0.$$

Стало быть, начало координат будет *особой точкой второго порядка* кривой (u, x), и мы должны повторить для этой кривой исследование, проделанное уже для кривой (x, y). Мы заключаем поэтому:

1°. Если трехчлен $(u^2 + b_3u + a_4)$ имеет мнимые корни, начало координат есть *изолированная точка кривой* (u, x), а потому и кривой (x, y)

2°. Если этот трехчлен имеет вещественные и различные корни α и β, кривая (u, x) имеет две ветви, касающиеся вначале прямых $u = \alpha x$, $u = \beta x$; стало быть, кривая (x, y) имеет две ветви, имеющие соответственно приближенные уравнения $y = \alpha x^2$, $y = \beta x^2$ и, следовательно, касающиеся оси x. Они будут по одну или по разные стороны от оси x, смотря по тому, будут ли α и β одинакового или разных знаков. Если один из корней α, β равен 0, соответствующие выражения u и y будут высшего порядка относительно x, и соответствующая ветвь кривой (x, y), в виде исключения, может иметь точку перегиба. Во всех этих случаях говорят, что начало координат есть *двойная точка с совпадающими касательными* (черт. 4). Таков, например, случай кривой $y^2(1 + x) = x^4$.

3°. Если трехчлен $(u^2 + b_3ux + a_4x^2)$ есть полный квадрат $(u - \alpha x)^2$ и мы не имеем вторично дело с сомнительным случаем, кривая (u, x) касается в начале координат прямой $u - \alpha x = 0$ и имеет в начале координат точку возврата первого рода. Ее две ветви имеют, в силу предыдущего, приближенные уравнения

$$u - \alpha x = \pm x\sqrt{mx},$$

а уравнения соответствующих ветвей кривой (x, y) будут приближенно

$$y = x^2(\alpha \pm \sqrt{mx}).$$

Эти обе ветви касаются оси x в начале координат, но останавливаются в этой точке. Они расположены по одну сторону их касательной, если $\alpha = 0$, и тогда говорят, что начало есть *точка возврата второго рода* (черт. 5).

Простейшая кривая, имеющая точку возврата второго рода в начале координат, есть $(y - x^2)^2 = x^5$.

В виде исключения может оказаться, что имеется опять сомнительный случай; тогда все рассуждения придется повторить снова и т. д. Если мы вообще приведем к какому-нибудь решению, начало координат может быть либо изолированной точкой, либо двойной точкой (с различными совпадающими касательными), либо точкой возврата (первого или второго рода). Но если все время будет повторяться сомнительный случай, способ не дает никакого решения.

Этот неуспех не может случиться, если кривая алгебраическая, т. е. если $f(x, y)$ есть полином, так как каждое новое исследование вводит все новые и новые члены разложения F, а полином содержит лишь конечное число членов.

368. Кратные точки высших порядков. Предположим теперь, что начало есть особая точка порядка n кривой $f(x, y) = 0$.

Разложение $f(x, y)$ по формуле Maclaurin'а начинается с членов порядка n, т. е. f со своими производными порядка $< n$ обращается в 0, но по крайней мере одна из производных порядка n отлична от нуля в начале координат. Уравнение кривой имеет вид:

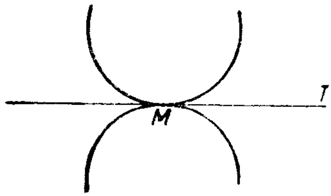
$$\varphi_n(x, y) + \varphi_{n+1}(x, y) + \ldots = 0.$$

Мы покажем, что свойства кривой в соседстве с началом связаны с свойствами однородного уравнения n-ой степени

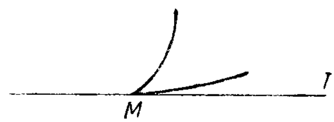
$$\varphi_n(x, y) = 0,$$

представляющего пучок n прямых, вещественных или мнимых, проходящих через начало. Подробное исследование, произведенное нами в случае $n = 2$, позволит быть более краткими в общем случае.

Пусть $M(x, y)$ есть точка кривой, бесконечно близкая к началу O. Обозначим через r растояние OM и через λ, μ направляющие



Черт. 4.



Черт. 5.

cosinus'ы OM. Подставив в уравнение кривой $x = \lambda r$, $y = \mu r$ и разделив на r^n, получим:

$$\varphi_n(\lambda, \mu) + r\varphi_{n+1}(\lambda, \mu) + \ldots = 0.$$

Стало быть, если r бесконечно мало, направляющие cosinus'ы λ, μ бесконечно мало отличаются от решения $\varphi_n(\lambda, \mu) = 0$.

Отсюда заключаем, что всякая ветвь кривой, проходящая через начало, необходимо касается одной из прямых пучка $\varphi_n(x, y) = 0$. Отсюда следующая теорема:

Теорема. *Всякая ветвь (вещественная) кривой непременно касается вещественной прямой пучка $\varphi(x, y) = 0$. В частности, если весь пучок состоит из мнимых прямых, начало координат есть изолированная точка.*

В силу этой теоремы мы приходим к необходимости изучить в отдельности каждую прямую пучка, чтобы узнать, соответствует ли ей касательная ветвь и какой природы.

В частности, рассмотрим прямую пучка кратности $k (k \leq n)$. Приняв ее за ось x, получим в выражении $\varphi_n(x, y)$ множитель y^k, и уравнение кривой будет

$$y^k \psi_{n-k}(x, y) + \psi_{n+1}(x, y) + \ldots = 0,$$

где ψ означают однородные полиномы, степени коих указаны значками, причем первый из них не содержит y множителем.

Положим в уравнении этой кривой, которую назовем кривой (x, y) $y = ux$ и разделим на x^n; мы получим кривую (u, x):

$$u^k \psi_{n-k}(1, u) + x \psi_{n+1}(1, u) + \ldots = 0.$$

Изучение ветви кривой (x, y), касательной к оси x, приводится к изучению кривой (u, x) в соседстве с началом, так как u должно быть бесконечно мало, для того чтобы y было бесконечно мало по сравнению с x, и если мы знаем главную часть значения u, то получим и главную часть $y = ux$. Отсюда вытекают следующие заключения:

Первый случай. *Кривая (u, x) имеет в начале обыкновенную точку.* Это обычный случай, который может иметь место при двух предположениях: a) если $k = 1$, b) если $k > 1$, но $\varphi_{n+1}(1, 0) \neq 0$.

a) Если $k = 1$, уравнение кривой содержит первую степень u, так как $\psi_{n-k}(1, 0) \neq 0$, стало быть, u имеет единственное выражение в функции от x, его главная часть получается из уравнения

$$u\psi_{n-1}(1, 0) + x\psi_{n+1}(1, 0) = 0;$$

отсюда для y получается единственное, вещественное выражение. Итак, *всякой простой прямой пучка соответствует единственная ветвь, касательная к ней в начале.*

b) Если $k > 1$, но $\psi_{n+1}(1, 0) \neq 0$, уравнение кривой (u, x) содержит член первой степени относительно x и дает для x в функции от u единственное выражение. Главная часть его определяется из уравнения

$$u^k\psi_{n-k}(1, 0) + x\psi_{n+1}(1, 0) = 0;$$

она имеет вид $x = mu^k$, где m постоянная $\neq 0$. Отсюда, обратно, находим главные части u, а затем y:

$$y = ux = x\sqrt[k]{\frac{x}{m}}.$$

Если k нечетно, радикал имеет одно вещественное значение, которое меняет знак вместе с x и тогда y знака не меняет. Стало быть, *кратная прямая нечетного порядка касается ветви без перегиба.*

Если k четное, радикал имеет вещественное значение только, если x имеет знак m, в каковом случае y имеет два значения противоположных знаков. Итак, *кратная прямая четного порядка касается кривой в точке возврата (первого рода).*

Например, для кривой

$$x^2y^3 = x^6 + y^6$$

начало координат есть особая точка 5-го порядка. Ось x (тройная прямая) есть обыкновенная касательная, ось y (двойная прямая) — касательная в точке возврата.

Второй случай. *Кривая (u, x) имеет в начале особую точку.* Так как имеется член, содержащий u^k, эта точка порядка $\leqslant k \leqslant n$.

С этой точкой нужно повторить все исследование, проделанное для кривой (x, y) и т. д.

Если кривая алгебраическая, исследование непременно должно привести к цели, как и в случае двойной точки.

369. Другие особые точки. Предыдущая теория предполагает непрерывность и дифференцируемость рассматриваемых функций. Могут существовать и другие особые точки, происхождение которых связано с наличием разрывов. Вот некоторые примеры:

1°. *Точка прекращения.* Если однозначная функция $f(x)$ внезапно перестает существовать или становится мнимой (не обращаясь в бесконечность), когда x проходит через значение a, кривая y имеет точку прекращения при $x = a$. Например, начало координат есть точка прекращения для кривой $y = x \operatorname{Log} x$.

2°. *Угловая точка.* Это суть точки, в которых прекращаются две дуги кривой, под разными углами. Например, кривая

$$y = x\,(x \operatorname{Log} x \pm \sqrt{1 - x})$$

имеет угловую точку в начале.

§ 2. Асимптоты плоских кривых.

370. Определение. *Асимптотой* бесконечной ветви кривой называется такая прямая AB, что расстояние точки M кривой от этой прямой стремится к нулю при бесконечном удалении точки вдоль по кривой.

Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы расстояние точки M от прямой AB стремилось к нулю, когда оно измеряется в направлении, параллельном определенной наклонной к AB прямой, так как отношение истинного расстояния, и расстояния, измеряемого указанным образом, сохраняет постоянное, отличное от нуля, значение.

371. Асимптоты, параллельные оси y. Эти асимптоты находятся непосредственно с помощью следующей теоремы:

Для того чтобы прямая $x = a$ была асимптотой кривой $y = f(x)$, заданной в прямоугольных или косоугольных координатах, необходимо и достаточно, чтобы абсолютная величина $f(x)$ стремилась к бесконечности, когда x с определенной стороны стремится к a.

Действительно, при этих условиях точка M (x, y) кривой удаляется в бесконечность и ее расстояние до прямой $x = a$, измеряемое в направлении оси x, равное (с точностью до знака) $x - a$, стремится к нулю.

Если кривая задана уравнением $f(x, y) = 0$, то для нахождения асимптот, параллельных оси y, нужно разыскать такие конечные значения x, для которых некоторые из соответствующих значений y обращаются в бесконечность.

Например ось y является асимптотой кривой

$$y = e^{1/x},$$

потому что y стремится к бесконечности, когда x, будучи положительным, стремится к нулю; ветвь кривой расположена справа от асимптоты. Аналогичный метод применяется и для нахождения асимптот, параллельных оси x. Так например, рассмотренная кривая имеет вторую асимптоту $y=1$, так как x стремится к бесконечности, когда y стремится к 1.

372. Асимптоты, не параллельные оси. Для нахождения таких асимптот пользуются следующей теоремой:

Если бесконечная ветвь кривой имеет асимптоту $y=cx+d$, то коэффициенты c и d определяются соотношениями

$$c=\lim \frac{y}{x}, \quad d=\lim\,(y-cx), \tag{1}$$

где x стремится к бесконечности и точка $M(x, y)$ остается на ветви кривой.

В самом деле, расстояние точки $M(x,y)$ от прямой $y-cx-d=0$ пропорционально выражению $y-cx-d$. Для того чтобы эта прямая была асимптотой, необходимо, таким образом, чтобы $y-cx-d$ стремилось к нулю при удалении в бесконечность точки $M(x,y)$ вдоль соответствующей ветви кривой. При этом x стремится к $+\infty$ или $-\infty$, смотря по направлению, в котором уходит в бесконечность рассматриваемая ветвь.

Это равносильно тому, что уравнение рассматриваемой ветви может быть представлено в форме

$$y-cx-d=u,$$

где u есть функция от x, стремящаяся к нулю, когда x стремится к бесконечности указанного знака. Отсюда вытекают соотношения

$$\frac{y}{x}=c+\frac{d+u}{x}, \quad y-cx=d+u, \tag{2}$$

из которых и получаются обе формулы теоремы, если предположить x стремящимся к бесконечности, знак которой определяется ветвью кривой.

Обратно, если оба предела (1) *существуют, когда точка $M(x, y)$ удаляется в бесконечность по ветви кривой, то прямая $y=cx+d$ является асимптотой этой ветви.*

Действительно, если существуют пределы (1), то $y-cx-d$ стремится к нулю, когда $M(x, y)$ удаляется по ветви в бесконечность, и прямая $y-cx-d=0$ является асимптотой.

Полезно заметить, что x стремится к $+\infty$ для ветви, расположенной справа от оси y, и к $-\infty$ — для ветви, лежащей слева от этой оси. С другой стороны, u будет положительно или отрицательно, смотря по тому, лежит ли рассматриваемая ветвь выше или ниже своей асимптоты.

373. Асимптоты алгебраических кривых. Пусть $f(x, y)=0$ уравнение алгебраической кривой n-ого порядка. Располагая в левой части члены в порядке убывания степеней, мы представим уравнение в форме

$$\varphi_n(x, y)+\varphi_{n-1}(x,y)+\ldots=0, \tag{1}$$

где φ суть однородные полиномы степени n, $n-1$.

Для нахождения асимптот, не параллельных оси y*), положим $y=tx$; деление уравнения (1) на x^n дает

$$\varphi_n(1,\ t)+\frac{1}{x}\ \varphi_{n-1}(1,t)+\ldots=0. \qquad (2)$$

Угловой коэффициент асимптоты c есть предел t, когда x стремится к бесконечности, следуя ветви; но предыдущее уравнение приводится к виду $\lim\ \varphi_n\ (1,\ t)=0$, так что t стремится к корню уравнения

$$\varphi_n\ (1,\ c)=0, \qquad (3)$$

Для существования асимптот, не параллельных оси y, необходимо, таким образом, чтобы это уравнение имело вещественные корни.

Направления, определяемые этими корнями, суть асимптотические направления. Уравнение (3) называется *уравнением асимптотических направлений.*

Пусть c один из его корней. Положим в уравнении (1) $y=cx+v$. После приведения подобных членов и деления на наивысшую степень x уравнение примет вид

$$\psi\ (v,\ c)+\frac{1}{x}\ \psi_1(v,c)+\ldots=0. \qquad (4)$$

Начальная ордината асимптоты d есть предел v, когда x стремится к бесконечности: это следовательно корень уравнения

$$\psi\ (d,c)=0. \qquad (5)$$

Таким образом, для существования асимптоты, имеющей направление c, необходимо, чтобы $\psi\ (d,\ c)$ содержало d и чтобы уравнение $\psi\ (d,\ c)=0$ допускало хоть один вещественный корень. Пусть d один из корней уравнения (5); в таком случае прямая

$$y=cx+d$$

будет являться асимптотой, *если только ей соответствует вещественная бесконечная ветвь кривой*, уравнение которой может быть представлено в форме

$$y=cx+d+u, \qquad (6)$$

где u стремится к нулю при x бесконечно большом и определенного знака. Этот знак характеризует то направление, в котором прямая является асимптотой, в то время как знак u определяет, лежит ли ветвь кривой выше или ниже своей асимптоты.

Для того чтобы убедиться в существовании этой ветви, подставим значение y из соотношения (6) в уравнение кривой, что приводится к замене v на $d+u$ в уравнении (4).

Уравнение

$$\psi\ (d+u,\ c)+\frac{1}{x}\ \psi_1(d+u,c)+\ldots=0$$

*) Достаточно обменять переменные ролями, чтобы с помощью того же процесса найти асимптоты, не параллельные оси x.

должно определять по крайней мере одно значение u бесконечно малое при x, стремящемся к бесконечности определенного знака.

Заменим x на $1 : x'$, уравнение

$$\psi(d+u, c)+x'\psi_1(d+u, c)+\ldots=0 \tag{7}$$

должно определять значение u, бесконечно малое при бесконечно малом и сохраняющем знак x'.

Итак, мы приходим к вопросу о том, имеет ли кривая (7) одну или несколько ветвей, проходящих через начало координат, и каково их расположение около начала. Этот вопрос исследован в предыдущем параграфе.

Из характера кривой (7) в начале координат легко устанавливается и положение ветвей кривой (1), имеющих асимптотой прямую $y=cx+d$. Действительно, всякой ветви кривой (7) соответствует бесконечная ветвь кривой (1), причем знаки u и x связаны так же, как и знаки u и x'.

В частности, если d есть простой корень уравнения (5), то прямая $y=cx+d$ наверное является асимптотой и притом в обоих направлениях.

Действительно, $u=0$ является простым корнем полинома $\psi(d+$ $+u, c)$, и начало координат есть обыкновенная точка кривой (7), уравнение которой содержит член первой степени относительно u; следовательно функция u существует и бесконечно мала одновременно с x' (независимо от знака последнего).

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ.

1. Асимптота *Декартова листа*:

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

Уравнение асимптотических направлений:

$$1+c^3=0;$$

существует одно вещественное асимптотическое направление $c=-1$. Подставляя $y=-x+v$, получим $v+a-\frac{v(v+a)}{x}+\frac{v^3}{3x^2}=0$, откуда $d+a=0$.

Это уравнение имеет один *простой* корень $d=-a$, значит прямая $y=-x-a$ является асимптотой (в обоих направлениях). Для выяснения расположения обеих соответствующих ветвей заменим v на $-a+u$ и x на $1 : x'$; это даст

$$u[1-x'(u-a)]+\frac{1}{3}x'^2(u-a)^3=0.$$

Главный член u есть $\frac{1}{3}a^3x'^2$; он имеет тот же знак, что и a. Если a положительно, то обе бесконечные ветви расположены выше асимптоты.

2. Асимптоты кривой $x^4-y^4+xy=0$.

Уравнение асимптотических направлений:

$$1-c^4=0;$$

существуют два вещественных асимптотических направления:

$$c = \pm 1.$$

Подставляя $y = cx + v$, получим

$$4cv - \frac{c - 6v^2}{x} + \ldots = 0,$$

откуда

$$4cd = 0.$$

Каждому из значений c отвечает один простой корень $d = 0$; следовательно, имеются две асимптоты (каждая в обоих направлениях) $y = \pm x$.

Для выяснения расположения ветвей кривой заменим v на u и x на $1 : x'$. Тогда

$$4cu - x'(c - 6u^2) + \ldots = 0.$$

Главный член u есть $\frac{1}{4} x'$, он меняет знак вместе с x'; ветвь, соответствующая каждой асимптоте, расположена выше последней со стороны положительных x и ниже — со стороны отрицательных x.

3. Асимптоты кривой $y^2x^2 - ax + a^2 = 0$.

Уравнение асимптотических направлений: $c^2 = 0$; единственное вещественное направление: $c = 0$. Подставляя $y = cx + v = v$, получим

$$v^2 - \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} = 0,$$

откуда

$$d^2 = 0.$$

Итак, возможна асимптота $y = 0$. Убедимся в существовании соответствующей ветви. Положим $v = d + u = u$ и $x = 1 : x'$; тогда получится

$$u^2 - ax' + a^2x'^2 = 0.$$

Начало координат есть простая точка этой кривой; главным членом u является $\pm\sqrt{ax'}$, где x' должен иметь тот же знак, что и a. Следовательно, если $a > 0$, прямая $y = 0$ служит асимптотой только со стороны положительных x, но ей соответствуют две бесконечные ветви, расположенные по обе ее стороны. Ось y также является асимптотой.

4. Асимптота кривой $y^2x^2 - 2y + a^2 = 0$.

Одно асимптотическое направление $c = 0$, откуда $d = 0$. Но $y = 0$ не является асимптотой, потому что уравнение между u и x' имеет вид

$$u^2 + a^2x'^2 - 2ux'^2 = 0,$$

и начало координат есть изолированная точка этой кривой. Аналогичным способом можно показать, что у кривой нет асимптоты, параллельной оси y.

Последние две кривые можно было бы легко исследовать прямым способом, разрешив их уравнения относительно x или y.

§ 3. Теория касания. Соприкасающиеся кривые и поверхности.

374. Расстояние до плоской кривой от бесконечно близкой к ней точки. Рассмотрим плоскую кривую (C), определенную в прямоугольных координатах уравнением

$$f(x,\ y)=0, \tag{C}$$

где f есть однозначная функция, непрерывная вместе со своими первыми производными. Пусть a, b будут координаты обыкновенной точки P кривой, а x', y' координаты точки Q, бесконечно близкой к P, но не лежащей на кривой. Предложим себе определить расстояние точки Q от кривой (C). С этой целью обозначим через X и Y координаты точки Q' кривой, бесконечно близкой к Q, через ρ — расстояние QQ' и через u и v — коэффициенты направления отрезка QQ'; в этом случае

$$X=x'+u\rho, \qquad Y=y'+v\rho.$$

Подставляя эти значения в уравнение кривой и разлагая последнее по степеням ρ,

$$0=f(X,\ Y)=f(x',\ y')+\rho\left(u\frac{\partial f}{\partial x'}+v\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\ \ldots$$

Но, так как x', y' бесконечно близки к a, b, последнее соотношение можно представить в следующей форме

$$f(x',\ y')+\rho\left(u\frac{\partial f}{\partial a}+v\frac{\partial f}{\partial b}+\varepsilon\right)=0,$$

где ε стремится к нулю вместе с ρ.

Точка P, по допущению, есть обыкновенная точка кривой, значит f_a' и f_b' не равны одновременно нулю и, следовательно, $uf_a'+vf_b'$ равно нулю лишь для направления касательной к (C) в точке P. Таким образом, если только направление отрезка QQ' не совпадает в пределе с направлением указанной касательной, главный член ρ равен абсолютной величине отношения

$$f(x',\ y')\ :\ (uf_a'+vf_b').$$

Кратчайшее расстояние точки Q от кривой (C) получится для направления u, v, доставляющего максимум знаменателю вышенаписанной дроби, т. е. для направления нормали к кривой в точке P.

Отсюда вытекает следующая

Теорема. *Пусть x', y' будут координаты точки Q, бесконечно близкой к обыкновенной точке P плоской кривой $f(x,\ y)=0$; расстояние точки Q от кривой является бесконечно малой того же порядка, что и выражение $f(x',\ y')$, получаемое подстановкой координат точки Q в левую часть уравнения кривой. Это предложение остается в силе и при условии измерять указанное расстояние в произвольном постоянном направлении, лишь бы по-*

следнее не совпадало с направлением касательной к кривой в точке P.

375. Расстояние до поверхности от бесконечно близкой к ней точки. Для определения расстояния точки Q от поверхности

$$F(x, y, z) = 0,$$

заданной в прямоугольных или косоугольных координатах, при условии, что точка Q бесконечно близка к обыкновенной точке $P(a, b, c)$ поверхности, мы поступим так же, как в предыдущем n°. Функцию $F(x, y, z)$ мы предполагаем непрерывной вместе с ее первыми производными.

Пусть x', y', z' означают координаты точки Q; X, Y, Z — координаты точки Q' поверхности, бесконечно близкой к Q. Обозначим через ρ расстояние QQ' и через u, v, w коэффициенты направления отрезка QQ', в таком случае

$$F(X, Y, Z) = F(x', y', z') + \rho(uF_a' + vF_b' + wF_c' + \varepsilon) = 0,$$

где ε стремится к нулю вместе с ρ.

Но, так как P есть обыкновенная точка поверхности, $uF_a' + vF_b' + wF_c'$ равно нулю только для направления, параллельного касательной плоскости к поверхности в точке P. Для всякого другого направления главный член ρ равен абсолютной величине дроби $F(x', y', z') : (uF_a' + vF_b' + wF_c')$, и кратчайшее расстояние точки (x', y', z') от поверхности получим, выбирая направление, доставляющее максимум знаменателю этой дроби. Это есть, очевидно, направлеиие нормали к поверхности в точке P.

Отсюда имеем следующую теорему:

Теорема. *Расстояние точки Q от поверхности $F(x, y, z) = 0$, если точка Q бесконечно близка к обыкновенной точке P этой поверхности, есть бесконечно малая того же порядка, что и выражение $F(x', y', z')$, получаемое подстановкой координат точки Q в левую часть уравнения поверхности. Это предложение остается в силе и при условии отсчитывать расстояние в произвольном постоянном направлении, лишь бы последнее не было параллельно касательной плоскости к поверхности в точке P.*

376. Расстояние пространственной кривой от бесконечно близкой точки. Найдем теперь расстояние точкн Q от кривой двоякой кривизны:

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0, \tag{C}$$

если точка $Q(x', y', z')$ бесконечно близка к обыкновенной точке $P(a, b, c)$ кривой (том I, n° 318). Пусть $Q'(X, Y, Z)$ — точка кривой, бесконечно близкая к Q, ρ — длина отрезка QQ' и u, v, w — коэффициенты направления этого отрезка. Как и выше, мы имеем:

$$f(x', y', z') + \rho(uf_a' + vf_b' + wf_c' + \varepsilon) = 0,$$

$$f_1(x', y', z') + \rho(uf_{1a}' + vf_{1b}' + wf_{1c}' + \varepsilon_1) = 0,$$

где ε и ε_1 — бесконечно малы вместе с ρ

Следовательно ρ может быть выражено двумя дробями:

$$\rho = -\frac{f(x', y', z')}{uf'_a + vf'_b + wf'_c + \varepsilon} = -\frac{f_1(x', y', z')}{uf'_{1a} + vf'_{1b} + wf'_{1c} + \varepsilon_1}.$$

Если QQ' не параллельна касательной к кривой в точке P, то хоть один из знаменателей не является бесконечно малым и ρ будет того же порядка, что и соответствующий числитель, хотя может быть бесконечно велико по сравнению с другим числителем. Значит ρ есть бесконечная малая того же порядка, что и больший по абсолютной величине числитель. Это остается справедливым и для того случая, когда ρ есть кратчайшее расстояние. Отсюда имеем следующую теорему:

Теорема. *Кратчайшее расстояние точки* (x', y', z') *от пространственной кривой* (C), *если эта точка бесконечно близка к обыкновенной точке кривой, есть бесконечно малая того же порядка, что и большее по абсолютному из выражений* $f(x', y', z')$ *и* $f_1(x', y', z')$.

377. Общее определение касания. Пусть даны две кривые (C) и (C'), или же кривая (C) и поверхность (S), имеющие общую обыкновенную точку P. Выберем на (C) точку Q, бесконечно близкую к P. Если ее расстояние до (C') [или до (S)] есть бесконечно малая порядка $n+1$ (n — целое) по сравнению с PQ, то говорят, что между (C) и (C') [или между (C) и (S)] существует касание порядка n.

В случае двух кривых точка Q может быть выбрана на любой из них, ибо, как мы покажем, условия касания симметричны относительно обеих кривых.

378. Касание двух плоских кривых. Предположим, что кривая (C') определена уравнением

$$F(x, y) = 0, \qquad (C')$$

где F — однозначная, непрерывная и бесконечно дифференцируемая функция.

Пусть P есть обыкновенная точка, общая этой кривой и кривой (C). В силу теоремы n° 374, *условие, необходимое и достаточное для того, чтобы эти кривые имели в точке* P *касание* n*-ого порядка, состоит в том, чтобы величина* $F(x, y)$, *получаемая подстановкой в* F *координат точки* Q, *бесконечно близкой к* P *и лежащей на* (C), *была бесконечно малой порядка* $n+1$ *относительно* PQ.

Применим это правило при различных предположениях, которые можно сделать относительно аналитического представления кривой (C).

Предположим сначала, что кривая (C) определена с помощью параметрических уравнений

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad (C)$$

где функции φ и ψ однозначны, непрерывны и бесконечно дифференцируемы. В этом случае обыкновенная точка есть такая, в которой хоть одна из производных x', y' отлична от нуля.

Пусть t_0 есть значение параметра, соответствующее точке P; точка Q кривой (C), бесконечно близкая к P, имеет координаты

$$x = \varphi(t_0 + dt), \qquad y = \psi(t_0 + dt)$$

и PQ имеет тот же порядок, что и ds, которое, в свою очередь, того же порядка, что и dt, ибо x' и y' не равны одновременно нулю.

Условие касания порядка n заключается, следовательно, в том, чтобы выражение

$$F[\varphi(t_0 + dt), \quad \psi(t_0 + dt)]$$

было порядка $n + 1$ относительно dt.

Полагая, для простоты,

$$\Phi(t) = F[\varphi(t), \quad \psi(t)],$$

мы видим, что разложение $\Phi(t_0 + dt)$ по формуле Taylor'а должно начинаться с члена, содержащего dt^{n+1} *Аналитические условия того, чтобы касание в точке t_0 было не ниже n-го порядка, заключаются в выполнении $n + 1$ равенств*

$$\Phi(t_0) = \Phi'(t_0) = \ \ldots \ = \Phi^{(n)}(t_0) = 0;$$

для того же, чтобы касание было точно n-ого порядка, следует к этим условиям добавить условие, чтобы $\Phi^{n+1}(t_0)$ было отлично от нуля.

Условие принимает особенно простую форму, если уравнения обеих кривых разрешены относительно ординаты, т. е. имеют вид

$$y - f(x) = 0, \qquad (C)$$

$$y - f_1(x) = 0. \qquad (C')$$

В этом случае касательная не параллельна оси y.

Если x_0 есть абсцисса точки касания P, то координаты точки Q, бесконечно близкой к P и лежащей на (C), будут $x_0 + dx$, $f(x_0 + dx)$. Подставляя их в левую часть уравнения (C') и замечая, что PQ того же порядка, что и dx, видим, что условие касания n-ого порядка в точке x_0 состоит в том, чтобы разность

$$f(x_0 + dx) - f_1(x_0 + dx)$$

была бесконечно малой $(n + 1)$-го порядка относительно dx. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было

$$f(x_0) = f_1(x_0), \quad f'(x_0) = f_1'(x_0), \ \ldots \ f^{(n)}(x_0) = f_1^{(n)}(x_0)$$

в то время как $f^{(n+1)}(x_0)$ и $f_1^{(n+1)}$ должны быть отличны одна от другой.

Отсюда — следующая теорема:

Теорема. *Для того, чтобы две плоские кривые имели касание n-ого порядка в точке, в которой касательная не параллельна оси y, необходимо и достаточно, чтобы ординаты обеих кривых вместе со своими n первыми производными по абсциссе были в рас-*

сматриваемой точке, равны. Для того чтобы касание не оказалось более высокого порядка, необходимо еще, чтобы $(n+1)$-ые производные не были равны для обеих кривых.

Заметим, что две кривые, имеющие касание первого или более высокого порядка, касаются одна другой в обычном смысле слова, т. е. имеют общую касательную, ибо y' принимает одинаковое значение для обеих кривых.

Теорема. *Две кривые, имеющие касание n-ого порядка, пересекаются или не пересекаются в точке касания, смотря по тому, будет ли n четным или нечетным.*

Действительно, пусть $y=f(x)$ и $y=f_1(x)$ уравнения кривых и x_0 — абсцисса точки касания. Как мы видели, вблизи этой точки разность ординат обеих кривых, т. е. $f(x_0+dx)-f_1(x_0+dx)$, имеет порядок $n+1$ относительно dx. Значит, она меняет знак вместе с dx, если n четное, и не меняет его, если n нечетное. В первом случае кривые пересекаются в точке x_0, а во втором случае они не пересекаются.

379. Соприкасающиеся плоские кривые. Предположим, что задана кривая (C) и точка P на ней, но кривая (C') подчинена лишь условию принадлежать семейству кривых, определяемому уравнением (C')

$$F(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})=0,$$

содержащим $n+1$ произвольных параметров.

Можно предложить себе определить эти параметры так, чтобы кривая (C') имела в точке P с кривой (C) касание наивысшего возможного порядка. Кривая (C'), выбранная таким образом из числа всех кривых рассматриваемой системы, называется — по сравнению с ними — соприкасающейся с кривой (C).

Вообще говоря, $n+1$ различных параметров могут быть подчинены $(n+1)$-му условию. Их можно, следовательно, определить так, чтобы получить в точке P касание по крайней мере n-ого порядка.

Для конкретности предположим, что кривая (C) определена с помощью параметрических уравнений

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

и положим, как в предыдущем n°,

$$\Phi(t)=F(\varphi, \psi, a_1, a_2, \ldots a_{n+1}).$$

$n+1$ условия касания n-ого порядка в точке t будут

$$\Phi(t)=\Phi'(t)=\Phi''(t)= \ldots =\Phi^{n}(t)=0.$$

Обычно в приложениях эта система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными a не является ни невозможной, ни неопределенной и определяет элементы соприкасающейся кривой. Соприкасающаяся имеет касание порядка n, если $\Phi^{(n+1)}(t)$ не равно нулю, и в исключительных случаях, когда и эта производная равна нулю, — касание более высокого порядка.

Допустим, что, как это бывает в большинстве приложений,

$n+1$ параметров a вполне определяются как с помощью уравнений $\Phi=\Phi'=\ldots=\Phi^n=0$, так и требованием, чтобы получаемая кривая проходила через заданные $n+1$ точек. Имеет место следующая теорема:

Теорема. *Кривая (C'), принадлежащая к семейству, зависящему от $n+1$ параметров и соприкасающаяся с данной кривой (C) в данной точке P, есть предел кривых того же семейства, проходящих через точку P и через n других точек кривой (C), бесконечно близких к первой.*

Доказательство. Пусть (C) и (C') определены как выше. Обозначим через $t_0, t_1, t_2, \ldots t_n$ значения параметра для точки P и n близких точек кривой (C). Условие, чтобы кривая (C') проходила через эти точки, дает $n+1$ уравнений

$$\Phi(t_0)=\Phi(t_1)=\ldots=\Phi(t_n)=0.$$

Следовательно, в силу теоремы Rolle'я, в интервалах между этими $n+1$ корнями $\Phi(t)$ находится по крайней мере n корней $\Phi'(t)$ и, следовательно, $n-1$ корней $\Phi''(t)$, ... и т. д., наконец, один корень $\Phi^n(t)$. Если устремить $t_1, t_2, \ldots, t_n$ к t_0, то все эти корни также будут стремиться к t_0. Мы получим, следовательно, в пределе систему уравнений

$$\Phi(t_0)=\Phi'(t_0)=\ldots=\Phi^n(t_0)=0,$$

которые определяют соприкасающуюся кривую в точке t_0.

380. Примеры. I. *Соприкасающаяся прямая.* Уравнение прямой

$$y-ax-b=0$$

содержит два произвольных параметра a и b, позволяющих добиться в данной точке кривой $y=f(x)$ касания первого порядка. Элементы соприкасающейся в точке x прямой определяются уравнениями

$$\Phi(x)=f(x)-ax-b=0, \quad \Phi'(x)=f'(x)-a=0.$$

Ее угловой коэффициент a есть, следовательно, $f'(x)$. *Соприкасающаяся прямая есть касательная*, что вполне соответствует предыдущей теореме.

Таким образом, касательная имеет, вообще говоря, касание первого порядка с кривой и кривая не пересекает свой касательной. В исключительных случаях, когда $\Phi''(x)=f''(x)=0$, касание будет более высокого порядка. Это имеет место в точках перегиба. Следовательно, *в точке перегиба касание между касательной и кривой будет, по меньшей мере, второго порядка.*

II. *Соприкасающийся круг.* Уравнение круга

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$$

содержит три параметра, что позволяет установить с кривой в данной точке P касание второго порядка. С помощью этих же трех параметров можно провести круг через три точки. Соприкасающийся в точке P круг является, следовательно, предельным для круга, проходящего через эту точку и две другие, бесконечно близкие (это свойство было принято за определение в первом томе). Касание соприкасающегося круга с кривой имеет, вообще говоря, второй порядок, и круг пересекает кривую, кроме исключительных точек, где касание имеет более высокий порядок.

381. Касание кривой и поверхности. Пусть S — поверхность определенная уравнением

$$(S)\quad F(x, y, z) = 0,$$

где F есть однозначная, бесконечно дифференцируемая функция; пусть, далее, P есть обыкновенная точка, общая этой поверхности и некоторой кривой (C). По определению касания (n° 377) и в силу теоремы n° 375 имеет место следующая теорема:

Теорема. *Для того чтобы кривая (C) и поверхность (S) имели в обыкновенной точке P касание порядка n, необходимо и достаточно, чтобы выражение $F(x,y,z)$, получаемое подстановкой в левую часть уравнения поверхности координат x, y, z точки Q, бесконечно близкой к P и лежащей на кривой (C), было бесконечно малой порядка $n+1$ относительно PQ.*

Пусть кривая (C) задана параметрическими уравнениями:

$$x = f(t),\quad y = f_1(t),\quad z = f_2(t),$$

где функции f однозначны и бесконечно дифференцируемы. Так как производные x', y', z' в обыкновенной точке одновременно не обращаются в нуль, то с помощью рассуждений, аналогичных развитым в n° 378, легко показать, что условия касания n-ого порядка в обыкновенной точке могут быть выражены так: *Если положить $\Phi(t) = F(x, y, z)$, где x, y, z суть функции t, то необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(t_0 + dt)$ было порядка $n+1$ относительно dt, иначе говоря, чтобы было*

$$\Phi(t_0) = \Phi'(t_0) = \ldots = \Phi^n(t_0) = 0,\quad \Phi^{n+1}(t_0) \gtrless 0.$$

Необходимы, таким образом, $n+1$ условий, чтобы кривая и поверхность имели в данной точке касание не ниже n-ого порядка.

Предположим, что уравнение поверхности дано в форме

$$z - f(x, y) = 0,$$

а уравнения кривой — в форме

$$y = f_1(x),\quad z = f_2(x).$$

В этом случае, принимая $t = x$, мы имеем

$$\Phi(x) = f_2(x) - f[x, f_1(x)]$$

и условие касания порядка n в точке x_0 состоит в том, чтобы выражение

$$f_2(x_0 + dx) - f[x_0 + dx,\ f_1(x_0 + dx)]$$

было бесконечно малым порядка $n+1$ относительно dx. Это выражение представляет разность координат z на кривой и на поверхности. Итак, подобно случаю плоских кривых, имеет место следующая теорема:

Теорема. *Кривая (C), имеющая с поверхностью (S) касание порядка n, пересекает или не пересекает (S), смотря по тому, будет ли n четным или нечетным.*

382. Поверхности, соприкасающиеся с кривой в данной точке. Рассмотрим семейство поверхностей, зависящее от $n+1$ параметров

$$F(x, y, z, a_1, \quad a_2, \ldots, a_{n+1}) = 0.$$

Соприкасающейся поверхностью в точке P с данной кривой (C) называется та из поверхностей семейства, которая имеет с кривой касание наивысшего возможного порядка. Поскольку для касания n-ого порядка необходимо, вообще говоря, $n+1$ условий, то из них и определяются значения параметров $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$; таким образом порядок касания соприкасающейся поверхности, принадлежащей семейству поверхностей, зависящему от $n+1$ параметров, вообще говоря, равен n.

Допустим, что $n+1$ параметр однозначно определяются как условием касания n-ого порядка, так и условием, чтобы поверхность проходила через заданные $n+1$ точек; имеем, как и в n⁰ 379, следующую теорему:

Теорема. *Поверхность, принадлежащая к семейству, зависящему от $n+1$ параметра, и соприкасающаяся в данной точке P с кривой (C), служит предельной для поверхности того же семейства, проходящей через точку P и n других точек кривой, бесконечно близких к первой.*

383. Соприкасающаяся плоскость. Уравнение плоскости

$$F(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$$

содержит три произвольных параметра, что позволяет добиться в точке t кривой (C), заданной уравнениями

$$x = f(t), \quad y = f_1(t), \quad z = f_2(t),$$

касания второго порядка. Условия этого касания имеют вид:

$$\begin{cases} \Phi(t) = ax + by + cz + d = 0 \\ \Phi'(t) = ax' + by' + cz' = 0 \\ \Phi''(t) = ax'' + by'' + cz'' = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения определяют параметры соприкасающейся плоскости для точки t, если хоть один из определителей

$$A = y'z'' - y''z', \quad B = z'x'' - z''x', \quad C = x'y'' - x''y'$$

отличен от нуля. Мы в дальнейшем предполагаем это условие выполненным.

Так как соприкасающаяся плоскость имеет, вообще говоря, касание второго порядка, то кривая пересекает свою соприкасающуюся плоскость. Для того чтобы порядок касания повысился, необходимо, чтобы было

$$\Phi'''(t) = ax''' + by''' + cz''' = 0;$$

в этом случае из уравнений $\Phi' = \Phi'' = \Phi''' = 0$ можно исключить a, b, c, откуда получаем условие $D = 0$, где D есть определитель

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

В точке, в которой обращается в нуль определитель D, соприкасающаяся плоскость называется *стационарной*; она имеет с кривой касание по меньшей мере третьего порядка и, вообще говоря, кривая ее не пересекает. В этом случае в точке касания кручение равно нулю, так как оно определяется формулой (том I, n° 335)

$$\frac{1}{T} = -\frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Соприкасающаяся плоскость, определенная условием иметь с кривой касание второго порядка, может также быть определена условием проходить через точку t и две другие бесконечно близкие точки кривой; это свойство в первом томе было принято за определение.

Теорема. *Кривая, у которой все соприкасающиеся плоскости стационарны, есть плоская кривая.*

В самом деле, определитель D есть вронскиан $W(x', y', z')$, обращение которого в нуль означает, что x', y', z' связаны линейной зависимостью с постоянными коэффициентами (n° 219):

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0,$$

откуда $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, а это есть уравнение плоскости.

Замечание. В силу этой теоремы, всякая кривая, у которой кручение постоянно равно нулю, есть плоская кривая, ибо в этом случае, из выражения $\frac{1}{T}$ следует, что $D = 0$. Этот результат в первом томе был установлен из других соображений.

384. Касание двух пространственных кривых. Пусть (C') кривая, определяемая двумя уравнениями

$$(C')\quad F(x, y, z) = 0;\quad F_1(x, y, z) = 0,$$

где функции F однозначны, непрерывны и бесконечно дифференцируемы; пусть, далее, P есть обыкновенная точка, общая этой кривой и некоторой кривой (C). В силу определения касания и теоремы n°376, условие касания n-го порядка в точке P дается следующей теоремой:

Теорема. *Для того чтобы две кривые (C) и (C') имели в обыкновенной точке P касание n-ого порядка, необходимо и достаточно, чтобы оба выражения $F(x, y, z)$ и $F_1(x, y, z)$, получаемые подстановкой в левые части уравнений (C') координат точки Q, лежащей на (C) и бесконечно близкой к P, были бесконечно малыми порядка $n+1$ относительно расстояния PQ и чтобы хоть одно из них не было более высокого порядка.*

Предположим, что кривая (C) задана параметрическими уравнениями

$$x = f(t),\quad y = f_1(t),\quad z = f_2(t),$$

где функции f непрерывны и бесконечно дифференцируемы. Положим

$$\Phi(t) = F(x, y, z), \quad \Phi_1(t) = F_1(x, y, z),$$

где x, y, z, — вышеуказанные функции t.

Условия касания n-ого порядка в точке t состоят в том, что $\Phi(t+dt)$ и $\Phi_1(t+dt)$ имеют $(n+1)$-ый порядок малости относительно dt и только лишь одно из этих выражений может иметь более высокий порядок. Отсюда имеем:

$$\Phi(t) = \Phi'(t) = \ldots \Phi^{n}(t) = 0$$

$$\Phi_1(t) = \Phi_1'(t) = \ldots \Phi_1^{n}(t) = 0;$$

кроме того одна из производных $\Phi^{(n+1)}(t)$ и $\Phi_1^{(n+1)}(t)$ отлична от нуля, ибо иначе касание имело бы более высокий порядок.

Необходимы, таким образом, $2n+2$ соотношения, чтобы выразить, что две пространственные кривые имеют в данной точке касание не ниже n-ого порядка.

385. Соприкасающиеся кривые. Соприкасающиеся кривые в пространстве определяются так же, как и на плоскости, однако с некоторым отличием. Если семейство кривых (C') зависит от $2n+2$ параметров, то последние можно определить так, чтобы получить касание n-ого порядка с данной кривой (C) в данной точке P. Но если уравнения кривых (C') содержат только $2n+1$ параметров, то нельзя добиться касания порядка выше чем $n-1$, удовлетворив $2n$ условиям, так что один параметр остается произвольным. Таким образом получается бесчисленное множество соприкасающихся кривых из семейства (C') или же их не будет вовсе, в зависимости от принятой точки зрения.

Рассмотрим семейство кривых (C'), зависящее от $2n+2$ параметров, и допустим, что значения параметров могут быть вполне определены как условием доставлять касание n-ого порядка с данной кривой (C) в данной точке, так и условием, чтобы кривая (C'), проходила через заданные $n+1$ точек. Легко установить, как в n^0 379, следующую теорему:

Теорема. *Кривая (C'), соприкасающаяся в точке (P) с кривой (C), есть предел кривых (C'), проходящих через точку P и через n других точек кривой (C), бесконечно близких к P.*

386. Примеры. I. *Соприкасающаяся прямая.* Уравнения прямой в пространстве содержат четыре параметра, позволяющих добиться касания первого порядка с данной кривой (C) в данной точке P. Согласно предыдущей теореме, эта прямая есть предельное положение секущей, проходящей через P и бесконечно близкую точку кривой (C).

Соприкасающаяся прямая совпадает с касательной и, вообще говоря, имеет с кривой касание первого порядка.

II. *Соприкасающийся круг.* Уравнения круга в пространстве содержат 6 параметров, позволяющих добиться касания второго порядка или заставить круг пройти через три заданные точки. *Соприкасающийся круг* для данной точки P данной кривой (C)

является, следовательно, предельным для круга, проходящего через эту точку и две других точки кривой, бесконечно близких к данной. Он имеет, вообще говоря, второй порядок касания с кривой.

§ 4. Огибающие плоских кривых.

387. Характеристические точки. Пусть дано семейство плоских кривых, зависящее от одного параметра α,

$$F(x,\ y,\ \alpha)=0. \tag{1}$$

Мы предполагаем, что функция F и ее первые частные производные однозначны и непрерывны.

Далее мы считаем, что если какая-нибудь из кривых семейства имеет особые точки, то последние изолированы друг от друга.

Выберем кривую α семейства, т. е. кривую, отвечающую значению α параметра и пусть M будет *обыкновенной* точкой этой кривой, так что одна из производных F_x' или F_y' отлична от нуля. Это условие остается выполненным и вблизи точки M, так что в окрестности этой точки кривые семейства не имеют особых точек.

Уравнение кривой $(\alpha+d\alpha)$, бесконечно близкой к кривой (α), имеет вид

$$F(x,\ y,\ \alpha)+[F_\alpha'(x,\ y,\ \alpha)+\varepsilon]d\alpha=0,$$

где ε стремится к нулю вместе с α. В силу уже известного принципа (n° 374), расстояние точки $M(x, y)$ кривой α от кривой $\alpha+d\alpha$ есть бесконечно малая того же порядка, что и выражение

$$[F_\alpha'\ (x,\ y,\ \alpha)+\varepsilon]d\alpha,$$

получаемое подстановкой в уравнение кривой $(\alpha+d\alpha)$ координат точки M. Это выражение имеет, вообще говоря, порядок $d\alpha$. Для того чтобы порядок повысился, необходимо и достаточно, чтобы было $F_\alpha'=0$. *Характеристическими точками кривой* (α) *называются обыкновенные точки этой кривой, расстояние которых от бесконечно близкой кривой* $(\alpha+d\alpha)$ *есть бесконечно малая высшего порядка, нежели* $d\alpha$. Это следовательно *обыкновенные* точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$F=0, \qquad F_\alpha'=0.$$

В случае пересечения двух бесконечно близких кривых

$$F(x,y,\alpha)=0,\ F(x,y,\alpha+d\alpha)=0,$$

предельными для точек пересечения являются характеристические точки, ибо их координаты удовлетворяют уравнению

$$\lim\frac{F(x,y,\alpha+d\alpha)-F(x,y,\alpha)}{d\alpha}=F_\alpha'=0.$$

Обратное предложение, однако, не всегда верно; характеристические точки не всегда являются предельными для точек пересечения*).

*) Для более полного рассмотрения этого вопроса см. нашу статью „*Sur les enveloppes de courbes planes qui ont un contact d'ordre superieur avec leurs enveloppées*". Memorie d. Pontif. Acc. Rom. dei Nuovi Lincei. Vol. XXVIII, 1910.

383. **Огибающая**. Может встретиться исключительный случай, когда кривая (α) состоит вся из характеристических точек; но, вообще говоря, характеристические точки расположены на каждой кривой изолированно. *Геометрическое место изолированных характеристических точек называется огибающей семейства.*

Значит, если огибающая существует, она может быть определена путем исключения α из уравнений

$$F=0,\ F'_\alpha=0. \tag{2}$$

Однако можно этим путем получить и кривые, отличные от огибающей.

Действительно, если уравнениям (2) можно удовлетворить значением α, не зависящим от (x, y), то соответствующая кривая (α) состоит исключительно из характеристических точек и не представляет, вообще говоря, части огибающей.

Во-вторых, уравнениям (2) удовлетворяют также координаты особых точек, ибо они суть функции от α, удовлетворяющие трем уравнениям $F=0$, $F'_x=0$, $F'_y=0$ и, следовательно, уравнению $F'_\alpha=0$, которое получается полным дифференцированием уравнения $F=0$, по α, если учесть, что $F'_x=F'_y=0$.

Таким образом, для определения огибающей нужно найти функции x, y от α, удовлетворяющие уравнениям (2) и не являющиеся координатами особой точки. Эти функции

$$x=x\ (\alpha),\ y=y\ (\alpha) \tag{3}$$

и дают параметрическое представление огибающей.

В нижеследующей теории мы будем рассматривать исключительно ту часть огибающей, на которой нет особых точек, так что одна из производных $x'(\alpha)$, $y'(\alpha)$ предполагается отличной от нуля.

389. **Теоремы.** *Каждая огибаемая касается своей огибающей в характеристической точке M.*

Координаты точек огибающей суть функции (3) от α, удовлетворяющие уравнению $F(x, y, \alpha)=0$. Дифференцируем это уравнение полным образом по α; так как во всякой точке огибающей $F'_\alpha=0$, то для такой точки будет

$$x'F'_x+y'F'_y=0.$$

Это уравнение не может быть тождеством, так как, в обыкновенной точке, хоть одна из производных F'_x, F'_y не равна нулю. Следовательно, направляющие коэффициенты касательной к огибающей x', y' определяются посредством того же уравнения, что и коэффициенты касательной к огибаемой в той же точке, и обе касательные совпадают.

Обратно, при разыскании кривой (E), *которой касаются все огибаемые, получается огибающая.*

Действительно, так как (E) есть геометрическое место точек касания с огибаемыми, то координаты точек (E) суть функции параметра α, удовлетворяющие уравнению $F(x, y, \alpha) = 0$. Взяв полную производную по α, получим

$$x'F_x' + y'F_y' + F_\alpha' = 0,$$

откуда

$$F_\alpha' = 0,$$

ибо

$$x'F_x' + y'F_y' = 0$$

(так как касательные к огибаемой и к кривой (E) совпадают). Следовательно (E) есть геометрическое место характеристических точек. Отсюда, очевидно, вытекает, что *всякая плоская кривая есть огибающая семейства своих касательных* *).

390. Нахождение огибающей для других форм уравнений. I. Часто встречается задача нахождения огибающей семейства кривых $F(x, y, \alpha, \beta) = 0$, уравнение которого содержит два параметра, связанных соотношением $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

Этот случай приводится к предыдущему, если рассматривать β как функцию α, определенную последним соотношением. Для получения огибающей нужно исключить α, β и $\frac{d\beta}{d\alpha}$ из четырех уравнений:

$$F = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0;$$

или, что то же самое, исключить α и β из трех уравнений

$$F = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{d(F, \varphi)}{d(\alpha, \beta)} = 0, \tag{4}$$

последнее из которых представляет результат исключения $d\beta : d\alpha$ из двух последних уравнений предыдущей системы.

II. Кривая, огибающая которой отыскивается, может быть также задана с помощью параметрических уравнений

$$x = \varphi(t, \alpha), \quad y = \psi(t, \alpha), \tag{5}$$

где t есть параметр, определяющий положение точки на кривой, а α попрежнему означает параметр, характеризующий кривую.

Этот случай опять приводится к изученному, если рассматривать в первом уравнении t как функцию y и α, определенную

---

*) Интересно проверить это предложение непосредственно. Пусть $\beta = f(\alpha)$ есть уравнение кривой, тогда

$$y - f(\alpha) = (x - \alpha) f'(\alpha)$$

уравнение касательной в точке α. Координаты характеристической точки удовлетворяют уравнению, получающемуся дифференцированием по α

$$(x - \alpha) f''(\alpha) = 0.$$

Если $f''(\alpha)$ равно нулю (точка перегиба), то все точки касательной являются характеристическими. Но, вообще говоря, этот случай не имеет места; предыдущее уравнение дает $x = \alpha$, и единственной характеристической точкой является точка касания.

вторым уравнением. Для получения уравнения огибающей нужно исключить α, t и $\frac{\partial t}{\partial \alpha}$ из уравнений (5) и двух следующих:

$$0=\frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial \alpha}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha},\quad 0=\frac{\partial \psi}{\partial t}\cdot\frac{dt}{d\alpha}+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\tag{6}$$

или, что то же самое, исключить t и α из уравнений (5) и уравнения

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(t, \alpha)}=0,$$

представляющего непосредственный результат исключения производной t из уравнений (6).

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ.

1. *Огибающая семейства*, зависящего от двух параметров α и β

$$\frac{x^m}{\alpha^m}+\frac{y^m}{\beta^m}=1 \text{ при условии } \frac{\alpha^p}{a^p}+\frac{\beta^p}{b^p}=1.$$

Отв. Уравнение огибающей

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}}=1.$$

Частные случаи. 1°. Если $m=1$, $p=2$; $b=a$, то имеем огибающую прямой постоянной длины a, концы которой опираются на две взаимно перпендикулярные оси. Это есть *астроида* $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

2°. Если $m=2$, $p=1$, $b=a$, то переменная кривая есть эллипс, описываемый одной из точек предыдущей прямой, и его огибающая та же, что и у прямой.

3°. Если $m=2$, $p=2$, то переменная кривая есть эллипс, вершины которого суть проекции точек постоянного эллипса на его оси. Огибающая есть совокупность четырех прямых

$$\pm\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=1.$$

2. *Огибающая прямых.* Пусть в прямоугольных осях дана подвижная прямая своим уравнением в нормальном виде:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-f(\alpha)=0.\tag{1}$$

Характеристическая точка лежит в пересечении этой прямой и прямой

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha-f'(\alpha)=0,\tag{2}$$

и координаты x, y этой точки мы получим, как функции α, разрешая систему. Показать: 1) что второе уравнение есть уравнение семейства нормалей к огибающей (E) прямых (1); 2) что огибающая прямых (2) есть эволюта (E); 3) что радиус кривизны R и дифференциал ds длины дуги (E) определяются равенством

$$R=\frac{ds}{d\alpha}=\pm\left[f(\alpha)+f''(\alpha)\right],$$

откуда получается *формула спрямления Legendre'a*

$$s=\pm[f'(\alpha)+\int f(\alpha)\,d\alpha].$$

3. *Огибающая окружностей.* Дано семейство окружностей (a, b, R — функции от α)

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0.$$

Характеристические точки суть точки пересечения окружности с прямой

$$(x-a)\,a'+(y-b)\,b'+RR'=0. \qquad (D)$$

Эта прямая перпендикулярна к касательной MT к кривой (C), описываемой центром M круга, и ее расстояние от центра равно

$$\frac{RR'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}=R\frac{dR}{ds},$$

где s — дуга кривой (C):

1°. Если $|dR|<|ds|$, то прямая (D) пересекает окружность в двух точках и существуют две ветви огибающей.

В частности, если R постоянно, то прямая (D) проходит через центр и огибающая состоит из двух ветвей, которые можно получить откладыванием на нормалях к кривой (C) в обе стороны от точки M постоянного отрезка R.

2°. Если $|dR|>|ds|$, то прямая и круг не пересекаются и не существует огибающей.

3°. Если $|dR|=|ds|$, то прямая (D) касается круга (а следовательно и огибающей) в характеристической точке, и нормаль к огибающей есть касательная к кривой (C).

В этом случае *переменный круг является соприкасающимся кругом своей огибающей*; условием, необходимым и достаточным для этого, таким образом, служит равенство $|dR|=|ds|$.

4. *Каустики.* Каустикой кривой (C) относительно светящейся точки A называется огибающая лучей, исходящих из A и отражающихся в кривой (C). Показать, что каустика есть эволюта подэры (относительно той же точки A) кривой (C'), подобной (C) и получающейся удвоением каждого радиуса вектора AP, соединяющего точку A с кривой (C).

Вывести отсюда соотношение

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{r}=\frac{2}{R\cos i},$$

где r — длина падающего луча AP, l — длина отраженного луча до точки касания с огибающей, R — радиус кривизны (C), i — угол падения В частности, если лучи параллельны, то $l=\frac{R\cos i}{2}$, и нормаль к каустик делит радиус кривизны (C) пополам.

Указание. Заметив, что нормаль к подэре кривой делит радиус-вектор соответствующей точки кривой пополам, установить, что отраженный луч является нормалью к подэре кривой (C'). Затем применить соотношение, связывающее радиусы кривизны кривой и ее подэры.

5. Показать, что *каустика окружности* относительно какой-либо ее точки есть *кардиоида* каустика окружности относительно бесконечно удаленной точки (лучи параллельны) есть *эпициклоида* с двумя точками возврата.

§ 5. Огибающие поверхностей и кривых в пространстве.

391. Огибающая семейства поверхностей с одним параметром. В виду полной аналогии рассматриваемой теории с теорией огибающих плоских кривых, мы ограничимся краткими указаниями. Пусть дано семейство поверхностей

$$F(x, y, z, \alpha)=0, \tag{1}$$

где F есть непрерывная и дифференцируемая функция.

Характеристикой поверхности (α) называется геометрическое место *характеристических точек* этой поверхности, т. е. геометрическое место *обыкновенных* точек, расстояние которых от бесконечно близкой поверхности $(\alpha+d\alpha)$ имеет порядок высший, чем $d\alpha$. Вообще говоря (и мы будем именно это предполагать), это геометрическое место есть линия, определяемая уравнениями

$$F=0,\ F'_\alpha=0. \tag{2}$$

Если поверхность $(\alpha+d\alpha)$ пересекает поверхность (α), то предельное положение линии пересечения есть характеристика; однако, в исключительных случаях, может оказаться, что характеристика не является предельным положением линии пересечения.

Огибающая семейства поверхностей есть геометрическое место характеристик; каждая поверхность семейства называется *огибаемой*.

Следует заметить, что, как и в случае плоских кривых, координаты *особых точек* (в которых одновременно $F'_x=F'_y=F'_z=0$) также удовлетворяют уравнениям (2). Все это дает следующее правило:

Уравнение огибающей семейства поверхностей $F=0$ получается исключением параметра α из уравнения $F=0$ и результата его дифференцирования по параметру $F'_\alpha=0$. Однако при этом получается также геометрическое место особых точек, если последние имеются.

Теоремы. *Каждая огибаемая касается огибающей на всем протяжении соответствующей характеристики.*

Направляющие коэффициенты нормали к огибаемой, в обыкновенной точке, суть F'_x, F'_y и F'_z. С другой стороны, уравнение $F=0$ можно рассматривать как уравнение огибающей, если в нем заменить α его выражением через x, y, z, получаемым из уравнения $F'_\alpha=0$. Значит, направляющие коэффициенты нормали к огибающей суть $F_x' + F_\alpha' \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \ldots$ Но в точках огибающей F_α' равно нулю, так что эти коэффициенты имеют те же значения, что и для огибаемой. Таким образом, огибающая и огибаемая имеют ту же нормаль и, следовательно, ту же касательную плоскость на всем протяжении общей характеристики.

Обратно, при разыскании поверхности (E), которая касается в каждой своей точке одной из поверхностей семейства, получается огибающая.

Действительно, пусть M — точка поверхности (E), это, следовательно, точка касания (E) с определенной поверхностью (α_0). Проведем через M произвольную плоскость. Линии пересечения этой плоскости с поверхностями мы также обозначим, соответственно, через (E) и (α). Сечение (E) касается плоских сечений (α). Значит, (E) есть огибающая этих сечений и M есть характеристическая точка (в смысле, установленном для плоских кривых) на сечении (α_0), которое проходит через эту точку; ее расстояние от сечения ($\alpha_0 + d\alpha$) имеет таким образом порядок высший, чем $d\alpha$; это показывает, что M является характеристической точкой и для поверхности (α_0). Значит, касающаяся поверхность, состоя из характеристических точек, является огибающей.

Отсюда следует, что *поверхность, у которой семейство касательных плоскостей зависит от одного параметра, является огибающей своих касательных плоскостей.*

392. Огибающая семейства поверхностей с двумя параметрами. Рассмотрим теперь „дважды бесконечное“ семейство поверхностей, т. е. семейство, зависящее от двух произвольных параметров α, β:

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Характеристической точкой поверхности (α, β) называется такая ее обыкновенная точка, расстояние которой от всякой бесконечно близкой поверхности ($\alpha + d\alpha, \beta + d\beta$) есть бесконечно малая порядка высшего, чем $|d\alpha| + |d\beta|$. Отсюда нетрудно усмотреть, что координаты характеристической точки должны удовлетворять трем уравнениям:

$$F = 0, \quad F_\alpha' = 0, \quad F_\beta' = 0.$$

Если эти три уравнения действительно определяют точки, координаты которых суть непрерывные функции α и β, то *огибающей семейства называется геометрическое место этих характеристических точек.* Уравнение огибающей получается исключением параметров α и β из трех указанных уравнений.

Можно показать, что, как и в предыдущем случае, *каждая огибаемая касается огибающей во всех своих характеристических точках.*

Обратно, *при разыскании поверхности (E'), которая касается всех поверхностей семейства, получается огибающая.*

Действительно, координаты x, y, z точек (E) можно считать функциями параметров α и β, удовлетворяющими уравнению

$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$. Дифференцируя последнее по α и по β, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} x_\alpha' + \frac{\partial F}{\partial y} y_\alpha' + \frac{\partial F}{\partial z} z_\alpha' + F_\alpha' = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} x_\beta' + \frac{\partial F}{\partial y} y_\beta' + \frac{\partial F}{\partial z} z_\beta' + F_\beta' = 0.$$

Но, в силу предположения, что поверхность (E) касается огибаемых в точке (x, y, z), эти уравнения приводятся к виду

$$F_\alpha' = 0, \quad F_\beta' = 0,$$

ибо, в этом случае, $x_\alpha', \ldots$ и $x_\beta', \ldots$, будучи направляющими коэффициентами двух касательных к (E), являются также направляющими коэффициентами двух касательных к огибаемой и из уравнений исчезают члены, содержащие эти коэффициенты *). Таким образом, мы возвращаемся к трем уравнениям огибающей.

Отсюда следует, что *поверхность, семейство касательных плоскостей которой зависит от двух параметров, является огибающей своих касательных плоскостей.*

393. Огибающая семейства кривых в пространстве. Рассмотрим семейство пространственных кривых, зависящее от произвольного параметра α и определяемое двумя уравнениями

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \Phi(x, y, z, \alpha) = 0. \tag{3}$$

Если мы опять назовем *характеристической точкой* кривой (α) такую ее *обыкновенную* точку, расстояние которой от бесконечно близкой кривой $(\alpha + d\alpha)$ имеет порядок, высший чем $d\alpha$, то легко видеть, как и для случая плоской кривой, что координаты такой точки должны удовлетворять двум уравнениям

$$F_\alpha' = 0, \qquad \Phi_\alpha' = 0. \tag{4}$$

Однако, вообще говоря, уравнения (3) и (4) несовместны, кроме отдельных исключительных значений α, так что и характеристических точек не имеется. В тех же случаях, когда существуют характеристические точки, положение которых меняется непрерывным образом вместе с α, иначе говоря, когда уравнения (3) и (4) допускают общие решения x, y, z, являющиеся непрерывными функциями пара-

---

*) Очевидно, $x_\alpha', \ldots$ и $x_\beta', \ldots$ служат коэффициентами направления касательных к так называемым *координатным кривым*, на поверхности (E), т. е. кривым, которые получаются из ее параметрического представления, через параметры α и β, если изменять лишь α, сохраняя β постоянным, и наоборот. Так как нормаль к огибаемой поверхности с коэффициентами направления $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ перпендикулярна к обеим касательным, то

$$\frac{\partial F}{\partial x} x_\alpha' + \frac{\partial F}{\partial y} y_\alpha' + \frac{\partial F}{\partial z} z_\alpha' = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} x_\beta' + \frac{\partial F}{\partial y} y_\beta' + \frac{\partial F}{\partial z} z_\beta' = 0,$$

откуда и вытекает заключение в тексте.

Прим. ред.

метра α, геометрическое место этих характеристических точек мы будем называть *огибающей* рассматриваемого семейства кривых.

В силу сказанного, семейство пространственных кривых, вообще говоря, не имеет огибающей.

Теоремы. *Если семейство кривых имеет огибающую, то каждая огибаемая касается огибающей в соответствующей характеристической точке.*

Доказательство совершенно такое же, как и для случая плоских кривых.

Обратно, *если существует кривая* (E), *касающаяся в каждой своей точке одной из кривых семейства, то эта кривая является огибающей.*

Действительно, координаты x, y, z точки M кривой (E) суть функции параметра α, удовлетворяющие уравнениям (3). Дифференцируя последние полным образом по α, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' + F_\alpha' = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z' + \Phi_\alpha' = 0$$

(штрихи обозначают дифференцирование по α).

Но отсюда исчезают члены, содержащие x', y', z', ибо, по предположению, кривая (E) и огибаемая имеют общую касательную. Таким образом, написанные уравнения приводятся к двум уравнениям $F_\alpha' = 0$, $\Phi_\alpha' = 0$, определяющим огибающую.

394. Огибающая характеристик (ребро возврата). Важным классом кривых, имеющих огибающую, является класс характеристик семейства поверхностей, зависящего от одного параметра: $F(x, y, z, \alpha) = 0$.

В этом случае четыре уравнения (3) и (4) сводятся в действительности всего лишь к трем

$$F = 0, \quad F_\alpha' = 0, \quad F_\alpha'' = 0.$$

Значения x, y, z, определенные отсюда, являются, вообще говоря, функциями α, что дает некоторую кривую, касающуюся всех характеристик семейства. Эта кривая называется *ребром возврата*)* огибающей поверхности.

395. Огибающие (или фокальные) поверхности конгруэнции кривых. Конгруэнцией называется совокупность кривых, зависящих от двух произвольных параметров α и β, и определяемых двумя уравнениями:

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим определенную кривую $[\alpha, \beta]$. Можно считать, что она является элементом семейства кривых, зависящего от одного параметра α, если установить какое-либо соотношение $\beta = \varphi(\alpha)$, удовлетворяющееся теми частными значениями параметров, которые соответствуют выбранной кривой. Эту зависимость можно,

---

*) Потому что точки этого ребра суть, вообще говоря, точки возврата сечений огибающей поверхности плоскостью.

вообще говоря, выбрать так, чтобы полученное семейство с одним параметром имело огибающую, т. е. так, чтобы на кривой $[\alpha, \beta]$ существовали характеристические точки. Действительно, координаты характеристических точек должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}+\frac{\partial F}{\partial \beta}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}=0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}+\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}=0. \tag{6}$$

Если исключить x, y, z из уравнений (5) и (6), то получается дифференциальное уравнение первого порядка, связывающее α и β и позволяющее определить зависимость $\beta=\varphi(\alpha)$. С другой стороны, исключая $\frac{d\beta}{d\alpha}$ из двух уравнений (6), получаем три уравнения для определения характеристических точек кривой $[\alpha, \beta]$:

$$F=0,\ \Phi=0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}-\frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}=0. \tag{7}$$

Мы предполагаем, что эти уравнения совместны и определяют координаты одной или нескольких точек, как непрерывные функции параметров α и β. Эти точки называются *фокальными точками*. Вообще говоря (и мы будем предполагать, что это так), геометрическое место этих точек есть некоторая поверхность, которая называется *огибающей* или *фокальной поверхностью* конгруэнции.

Если из уравнений (7) определить x, y, z как функции α, β, то получается параметрическое представление фокальной поверхности; ее явное уравнение получается из уравнений (7) исключением α и β.

Теорема. *Каждая кривая конгруэнции касается фокальной поверхности во всех своих фокальных точках.*

Действительно, составляющие dx, dy, dz касательного к фокальной поверхности перемещения соответствуют некоторым приращениям $d\alpha$, $d\beta$ параметров и связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial F}{\partial \beta}d\beta=0\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial \Phi}{\partial z}dz+\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}d\beta=0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

В частности, если $d\alpha$ и $d\beta$ удовлетворяют *обоим* уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial F}{\partial \beta}d\beta=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}d\beta=0, \tag{9}$$

совместным в силу третьего из уравнений (7), то перемещение dx, dy, dz происходит по касательной к кривой $[\alpha, \beta]$. Следовательно, эта кривая касается фокальной поверхности.

Обратно, при разыскании поверхности, которая в каждой точке касается одной из кривых конгруэнции, получается фокальная поверхность.

Действительно, координаты x, y, z точек поверхности должны быть функциями от α, β, удовлетворяющими уравнениям $F=0$, $\Phi=0$. Дифференцируя эти уравнения полным образом, получим уравнения (8); если разуметь под dx, dy, dz составляющие касательного к кривой $[\alpha, \beta]$ перемещения, то они приведутся к уравнениям (9). Исключая, наконец, из получившихся уравнений $d\beta : d\alpha$, мы придем к третьему из уравнений (7), которое определяет фокальную поверхность.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

1. Показать, что уравнение огибающей плоскостей, отсекающих от координатных осей отрезки, соответственно равные $\alpha^2:(a+\alpha)$, $\alpha^2:(b+\alpha)$, $\alpha^2:(c+\alpha)$ имеет вид: $(x+y+z)^2+4(ax+by+cz)=0$

2. Огибающая касательных плоскостей эллипсоида, проведенных в различных точках плоского сечения, есть коническая поверхность. Доказать.

3. *Каналовой поверхностью* называется огибающая сферы постоянного радиуса, центр которой описывает некоторую кривую. Характеристикой в этом случае является большой круг, лежащий в плоскости, нормальной к кривой, описываемой центром. Исследовать случай, когда радиус меняется при движении центра.

4. Огибающая плоскости $\alpha x+\beta y+\gamma z=l$, параметры которой связаны соотношениями $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ и

$$\frac{\alpha^2}{l^2-a^2}+\frac{\beta^2}{l^2-b^2}+\frac{\gamma^2}{l^2-c^2}=0,$$

есть *волновая поверхность*

$$\frac{a^2x^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{r^2-c^2}=0 \qquad (r^2=x^2+y^2+z^2).$$

§ 6. Системы прямых: линейчатые поверхности; конгруэнции.

396. Развертывающиеся и косые линейчатые поверхности. *Линейчатой* называется поверхность, представляющая геометрическое место последовательных положений некоторой движущейся прямой, называемой *образующей*. Существуют два вида таких поверхностей — *развертывающиеся поверхности и косые поверхности*. Мы начнем с изучения развертывающихся поверхностей. Это наименование дается им в виду возможности *наложить* их на плоскость, что мы покажем в n° 399.

Общее замечание. Во всей этой теории мы будем предполагать, что все рассматриваемые функции *однозначны, непрерывны и бесконечно дифференцируемы*. Большинство теорем становится неверными, если отказаться от предположения дифференцируемости.

397. Развертывающиеся поверхности. *Развертывающейся называется поверхность, которая является огибающей для различных положений движущейся плоскости, зависящей от одного параметра.* Пусть уравнение движущейся плоскости будет

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где A, B, C, D зависят от параметра α.

Если плоскость перемещается, оставаясь параллельной сама себе или поворачиваясь вокруг некоторой определенной прямой, то огибающей не существует. Мы исключим поэтому указанные два случая. Тогда *характеристика* плоскости (п 391) получается присоединением к предыдущему уравнению результата его дифференцирования по параметру α.

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

и эти характеристики и служат прямолинейными *образующими* поверхности.

Теорема. *Касательная плоскость остается неизменной вдоль всей прямолинейной образующей развертывающейся поверхности.*

Действительно, касательная плоскость в точке развертывающейся поверхности есть плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$, проходящая через эту точку (п 391). Если бы эта плоскость изменялась при движении точки вдоль прямой, лежащей на поверхности, то, поскольку она содержит эту прямую, она поворачивалась бы вокруг последней и не огибалась бы поверхностью.

Теорема. *Всякая прямая, лежащая на поверхности, есть одна из характеристик.*

Действительно, если бы прямая Δ не была характеристикой, то поверхность была бы геометрическим местом характеристик, пересекающихся с Δ. Касательная плоскость, не меняясь ни вдоль Δ, ни вдоль характеристик, оставалась бы во всех точках поверхности одной и той же, и развертывающаяся поверхность свелась бы к этой плоскости.

Таким образом, развертывающаяся поверхность может иметь только одну систему прямолинейных образующих и касательная плоскость не изменяется вдоль образующей.

Ребро возврата. Вообще говоря, характеристики являются касательными к некоторой кривой, называемой *ребром возврата* развертывающейся поверхности; эта кривая определится, если к уравнениям характеристик присоединить еще одно уравнение

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0,$$

которое получается новым дифференцированием по α; из полученной таким образом системы трех линейных уравнений можно определить x, y, z, как функции α.

Следует отметить, однако, два исключительных случая: если ребро возврата вырождается в точку, то развертывающаяся поверхность оказывается *конической*, если к тому же эта точка бесконечно удалена, то поверхность будет *цилиндрической*.

Теорема. *Обратно, геометрическое место касательных к пространственной кривой есть развертывающаяся поверхность, а именно огибающая семейства соприкасающихся плоскостей рассматриваемой кривой.*

Действительно, соприкасающаяся плоскость, меняясь вдоль кривой, зависит лишь от одного параметра, определяющего положение точки касания. Характеристики (линии пересечения двух бесконечно близких соприкасающихся плоскостей) являются касательными к кривой (том I, n° 336), так что огибающая соприкасающихся плоскостей есть геометрическое место касательных.

Таким образом, развертывающиеся поверхности суть такие линейчатые поверхности, образующие которых имеют огибающую кривую, или пересекаются в одной точке (конические поверхности), или же, наконец, параллельны между собой (цилиндрические поверхности).

Эта огибающая кривая есть *ребро возврата* поверхности. Если это плоская кривая, то поверхность вырождается в плоскость.

Теорема. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы переменная прямая*

$$x = az + p, \quad y = bz + q, \tag{1}$$

коэффициенты которой зависят от одного параметра α, *описывала развертывающуюся поверхность (или плоскость), заключается в выполнении равенства*

$$a'q' - b'p' = 0. \tag{2}$$

Действительно, для того, чтобы прямая (1) являлась характеристикой переменной плоскости, необходимо, чтобы ее можно было определить уравнениями вида

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}$$

что, по исключении x и y из уравнений (1), дает четыре условия:

$$\left.\begin{array}{l} Aa + Bb + C = 0 \\ Ap + Bq + D = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} A'a + B'b + C' = 0 \\ A'p + B'q + D' = 0. \end{array}\right\}$$

Последние два уравнения могут быть заменены следующими двумя

$$\left.\begin{array}{l} Aa' + Bb' = 0, \\ Ap' + Bq' = 0; \end{array}\right\}$$

они получаются, если продифференцировать первые два и принять во внимание последние два.

Для того чтобы эти уравнения были совместны и позволяли определить A, B, а затем и C, D, необходимо и достаточно, чтобы было: $a'q' - b'p' = 0$.

Если это условие выполнено, то прямая (1) описывает развертывающуюся поверхность, если только уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ не определяет *постоянной* плоскости; в последнем случае прямая описывает эту плоскость.

393. Уравнение развертывающихся поверхностей в частных производных. Развертывающиеся поверхности удовлетворяют некоторому уравнению в частных производных, которое их и характеризует.

Будем координату z точки на поверхности рассматривать как функцию x, y; для краткости положим:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}, \; r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Касательная плоскость не меняется вдоль образующей; коэффициенты ее уравнения

$$\zeta - z - p(\xi - x) - q(\eta - y) = 0,$$

в частности p и q суть функции одного параметра, определяющего положение образующей, вдоль которой происходит касание. Следовательно, p и q являются также функциями друг друга и, в силу общей теоремы о функциональных определителях (n⁰ 292)

$$\frac{d(p, q)}{d(x, y)} = rt - s^2 = 0.$$

Следовательно, координата z точки развертывающейся поверхности удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными второго порядка

$$rt - s^2 = 0.$$

Обратно, уравнение в частных производных $rt - s^2 = 0$ определяет развертывающуюся поверхность. Действительно, прежде всего оно выражает, что p и q суть функции друг друга. Кроме того

$$\frac{d(pz - px - qy)}{d(x, y)} = -\begin{vmatrix} r, & rx + sy \\ s, & sx + ty \end{vmatrix} = y\,(s^2 - rt) = 0,$$

так что и третий коэффициент $(z - px - qy)$ уравнения касательной плоскости является функцией первого p. Значит, семейство касательных плоскостей поверхности зависит от одного параметра; а так как (n⁰ 391), поверхность есть огибающая своих касательных плоскостей, то в данном случае она, по определению, является развертывающейся.

399. Поверхности, налагающиеся на плоскость. Две поверхности называются *налагающимися* друг на друга, если между их точками можно установить соответствие такого рода, чтобы соответствующие дуги на обеих поверхностях имели одинаковые длины. Мы покажем, что развертывающиеся поверхности характеризуются свойством налагаться на плоскость.

1⁰. *Развертывающаяся поверхность наложима на плоскость.* Пусть x, y, z суть координаты точки O ребра возврата поверхности, выраженные в функции дуги s этой кривой. Направляющие косинусы касательной к ребру в точке O равны x', y', z', где значками отмечается дифференцирование по s. Координаты же ξ, η, ζ точки M этой касательной, лежащей на расстоянии (положительном или отрицательном) u от точки O, равны

$$\xi = x + ux', \quad \eta = y + uy', \quad \zeta = z + uz'.$$

Мы имеем, таким образом, выражение координат любой точки развертывающейся поверхности в функции двух параметров u и s.

Найдем выражение дифференциала $d\sigma$ дуги кривой, лежащей на рассматриваемой развертывающейся поверхности. Прежде всего

$$d\sigma^2 = \sum d\xi^2 = \sum [(x' + ux'')\,ds + x'\,du]^2.$$

Пусть R — радиус кривизны и λ, μ, ν, направляющие косинусы главной нормали ребра в точке O. Тогда $x'' = \lambda : R$, . . . $\Sigma x'^2 = 1$ и $\Sigma x'\lambda = 0$, откуда следует, что

$$d\sigma^2 = \left(1 + \frac{u^2}{R^2}\right) ds^2 + 2\, du\, ds + du^2 = (du + ds)^2 + \left(\frac{u\, ds}{R}\right)^2.$$

Это выражение зависит только от соотношения $u = \varphi(s)$, определяющего кривую на поверхности, и от радиуса кривизны R ребра, но нисколько не зависит от кручения последнего.

Но R есть вполне определенная функция $f(s)$ дуги. С другой стороны, соотношение $R = f(s)$ есть *натуральное уравнение* (n°271) некоторой плоской кривой, которую мы можем построить. Отнесем к каждой точке O ребра ту точку O' этой плоской кривой, которая определяется тем же значением s; при этом соответствующие радиусы кривизны будут равны. Отложим теперь на касательной в точке O' плоской кривой отрезок, равный OM, т. е. равный u; этим самым мы определяем в плоскости кривой точку M', соответствующую точке M развертывающейся поверхности. Установленное этим способом соответствие между точками развертывающейся поверхности и плоскости сохраняет длины дуг, ибо дифференциалы $d\sigma$ дуг двух соответствующих кривых, т. е. кривых, определяемых на обеих поверхностях одним соотношением $u = \varphi(s)$, имеют одно и то же выражение.

Это доказательство перестает быть убедительным в случае *конической* или *цилиндрической* поверхности, однако читатель без труда может проверить, что теорема остается справедливой и в этих случаях.

2°. *Обратно, всякая налагающаяся на плоскость поверхность есть развертывающаяся поверхность.*

Пусть α, β суть координаты точек плоскости, на которую налагается поверхность. Мы можем рассматривать координаты x, y, z точек поверхности как функции координат α, β соответствующих точек плоскости. В виду сохранения длин, прямым, которые суть линии кратчайшего расстояния на плоскости, должны соответствовать геодезические линии на поверхности. Меняя α, β вдоль прямой (D) произвольного направления, мы можем считать $d\alpha$ и $d\beta$ постоянными; тогда дифференциал дуги на плоскости $ds = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$, являющийся также дифференциалом дуги и для соответствующей геодезической линии (g), тоже остается постоянным. Направляющие косинусы главной нормали к (g) будут пропорциональны d^2x, d^2y и d^2z (в силу постоянства ds). Но, с другой стороны, поскольку речь идет о геодезической линии, эти косинусы должны быть также пропорциональны направляющим коэффициентам p, q и -1 нормали к поверхности (n° 336). Мы находим, таким образом, следующие *тождества* относительно α, β, $d\alpha$ и $d\beta$:

$$d^2x + p\, d^2z = 0; \qquad d^2y + q\, d^2z = 0,$$

справедливые при любых постоянных $d\alpha$ и $d\beta$.

Заменим в этих уравнениях d^2x, d^2y и d^2z их развернутыми выражениями через $d\alpha$ и $d\beta$; в таком случае должны быть равны нулю отдельно коэффициенты при $d\alpha^2$, $d\alpha d\beta$ и $d\beta^2$. В частности, мы имеем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}+p\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}=0,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta}+p\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta}=0, \tag{3}$$

что дает, после умножения соответственно на $d\alpha$ и $d\beta$ и сложения,

$$d\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)+pd\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)=0$$

и точно также

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)+qd\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)=0.$$

Из этих двух тождеств следует, что

$$pd\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) \text{ и } qd\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)$$

оказываются точными дифференциалами, так что p и q будут функции от $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$, т. е. функции одного параметра *). Но в этом случае p и q будут функциями друг друга и, как показано в предыдущем n°, рассматриваемая поверхность есть развертывающаяся.

400. Линейчатые поверхности вообще и свойства косых поверхностей в частности. Всякая линейчатая поверхность может рассматриваться как описанная движением прямолинейной *образующей* G, постоянно пересекающейся с некоторой *направляющей* Γ.

Пусть x, y, z суть координаты точки направляющей Γ, выраженные в функции независимой переменной t; пусть, далее a, b, c — направляющие косинусы (функции t) образующей G, которая проходит через эту точку t; пусть наконец u есть расстояние (положительное или отрицательное) точки M образующей G от точки x, y, z. Координаты ξ, η, ζ точки M образующей G определяются формулами

$$\xi=x+au,\quad \eta=y+bu,\quad \zeta=z+cu. \tag{G}$$

Пусть M_1 есть точка бесконечно близкой образующей, проходящей через точку $(t+\Delta t)$ направляющей. Координаты ξ_1, η_1, ζ_1 точки M_1 определяются такими же формулами

$$\xi_1=x_1+a_1u_1,\quad \eta_1=y_1+b_1u_1,\quad \zeta_1=z_1+c_1u_1, \tag{G_1}$$

где положено

$$x_1=x+\Delta x;\quad y_1=y+\Delta y;\quad z_1=z+\Delta z.$$

Найдем кратчайшее расстояние образующей G от бесконечно близкой образующей G_1. Квадрат расстояния δ между точками $M(\xi,\eta,\zeta)$ и $M_1(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ этих двух образующих имеет выражение

$$\delta^2=(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2=\sum(\xi_1-\xi)^2. \tag{4}$$

---

*) Действительно, если pdF есть точный дифференциал, то, так как он обращается в нуль вместе с dF, это есть дифференциал некоторой функции одного только F, так что и p, как производная этой функции, также зависит лишь от F.

Для нахождения его минимума следует приравнять нулю его частные производные по u и по u_1, что дает, если принять во внимании выражения $\xi, \xi_1, \ldots$

$$\sum (\xi_1 - \xi)\, a = 0, \qquad \sum (\xi_1 - \xi)\, a_1 = 0.$$

Но, так как $a_1 = a + \Delta a, \ldots$, эта система может быть представлена в форме

$$\sum (\xi_1 - \xi)\, a = 0, \qquad \sum (\xi_1 - \xi)\Delta a = 0. \tag{5}$$

Подставим в эти уравнения

$$\xi_1 - \xi = \Delta x + a_1 u_1 - au = \Delta x + a\,(u_1 - u) + u_1 \Delta a, \ldots,$$

тогда первое уравнение показывает, что u_1 стремится к u, когда Δt стремится к нулю, и второе уравнение примет вид:

$$\sum \Delta a \Delta x + u_1 \sum (\Delta a)^2 + (u_1 - u) \sum a\,\Delta a = 0.$$

Разделим это равенство на $(\Delta t)^2$ и перейдем к пределу: обозначая значками производные по t и заменяя u_1 его пределом u, получим:

$$\sum a'x' + u \sum a'^2 = 0,$$

ибо отношение

$$\sum a\,\Delta a : (\Delta t)^2$$

остается ограниченным $\left(\sum aa' \text{ равна нулю, так как } \sum a^2 = 1\right)$ *). Отсюда получаем значение u:

$$u = -\frac{\sum a'x'}{\sum a'^2}. \tag{6}$$

Это (положительное или отрицательное) значение и определяет на образующей G некоторую точку O, являющуюся основанием перпендикуляра общего G и бесконечно близкой образующей, и называемую *центральной точкой*. Геометрическое место этих точек на различных образующих есть некоторая кривая, лежащая на поверхности и называемая *линией сжатия* (ligne de striction). В частном случае, когда поверхность есть развертывающаяся, центральные точки суть *характеристические точки*, а линия сжатия есть *ребро возврата* развертывающейся поверхности.

---

*) Точнее говоря, из равенств $\Sigma a^2 = 1$ и $\Sigma\,(a + \Delta a)^2 = 1$, вычитая их почленно, получим: $2 \Sigma a\,\Delta a + \Sigma (\Delta a)^2 = 0$, так что

$$\frac{\Sigma\, a\Delta a}{\Delta t^2} = -\frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{\Delta a}{\Delta t}\right)^2,$$

откуда и видно, что это выражение остается ограниченным.

Прим. ред.

Равенство (6) дает *условие того, чтобы направляющая* Γ *была линией сжатия (или ребром возврата): необходимо и достаточно, чтобы было* $u=0$, *то есть*

$$\sum a'x' = a'x' + b'y' + c'z' = 0.$$

Определим теперь направляющие косинусы λ, μ, ν кратчайшего расстояния δ. С этой целью заменим в уравнениях (5) величины $\xi_1 - \xi$, . . . пропорциональными им числами λ, . . . ; уравнения примут вид

$$\sum \lambda a = 0, \quad \sum \lambda \Delta a = 0.$$

Отсюда, пользуясь свойствами равных отношений, легко заключить, что

$$\frac{\lambda}{b\Delta c - c\Delta b} = \frac{\mu}{c\Delta a - a\Delta c} = \frac{\nu}{a\Delta b - b\Delta a} = \pm \frac{1}{\sin\varphi} \tag{7}$$

где φ обозначает угол между двумя бесконечно близкими образующими, ибо, как известно из аналитической геометрии,

$$\sum \lambda^2 = 1 \quad \text{и} \quad \sum (b\Delta c - c\Delta b)^2 = \sin^2\varphi.$$

Наконец, поскольку $\sum \lambda a$ и $\sum \lambda a_1$ равны нулю, само кратчайшее расстояние δ равно

$$\delta = \sum \lambda(\xi_1 - \xi) = \sum \lambda (\Delta x + a_1 u_1 - au) = \sum \lambda\Delta x,$$

откуда, заменяя λ, μ, ν, их значениями (7), находим

$$\delta = \pm \frac{1}{\sin\varphi} \sum \Delta x\,(b\Delta c - c\Delta b) = \pm \frac{1}{\sin\varphi} \begin{vmatrix} a & \Delta a & \Delta x \\ b & \Delta b & \Delta y \\ c & \Delta c & \Delta z \end{vmatrix}$$

Располагая знаком φ, можно выбрать его так, чтобы получить знак $+$ в предыдущем равенстве.

Для краткости мы будем писать: $\delta \sin\varphi = [a, \Delta a, \Delta x]$; разлагая это выражение до членов третьего порядка, мы будем иметь

$$\delta \sin\varphi = [a, da, dx] + \frac{1}{2}[a, d^2a, dx] + \frac{1}{2}[a, da, d^2x] + \ldots =$$

$$= [a, da, dx] + \frac{1}{2} d[a, da, dx] + \ldots$$

Множитель $\sin\varphi$, имеющий главный член $\sqrt{\sum (bdc - cdb)^2}$ или $\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$, будет первого порядка так что и δ, вообще говоря, будет первого порядка, относительно dt. Если δ имеет более высокий порядок малости, то центральная точка есть *характеристическая точка* и поверхность развертывается. Значит, *условие того, чтобы линейчатая поверхность была развертывающейся, состоит в выполнении равенства* $[a, da, dx] = 0$. В этом случае дифференциал указанного определителя также равен нулю, так что δ имеет третий порядок малости.

Таким образом, *для развертывающейся поверхности расстояние между двумя бесконечно близкими образующими имеет третий порядок малости.*

Предположим теперь, что мы имеем дело с косой поверхностью. Разделим обе части последнего равенства на $\sin^2\varphi$ и перейдем к пределу; проще всего получить результат, если заменить $\delta\sin\varphi$ и $\sin^2\varphi$ их главными членами:

$$\lim\frac{\delta}{\sin\varphi}=\frac{[a,\ da,\ dx]}{da^2+db^2+dc^2}=\frac{[a,\ a',\ x']}{a'^2+b'^2+c'^2}=-k, \tag{8}$$

где k обозначает некоторую величину определенного знака, меняющуюся при переходе от одной образующей к другой и называемую *параметром распределения* (paramètre de distribution).

Этот параметр играет важную роль в теории касательных плоскостей к косым поверхностям. Мы ознакомимся с ним, изучая закон вращения касательной плоскости вокруг образующей G при перемещении точки касания вдоль этой образующей.

С этой целью возьмем рассматриваемую образующую за ось z, нормаль к поверхности в центральной точке за ось y и предположим, что линия сжатия взята в качестве направляющей Γ.

При этих условиях мы будем иметь: $a=0$, $b=0$, $c=1$, откуда $c'=0$ (ибо c имеет максимальное значение), далее $y'=0$ (ибо ось y есть нормаль к Γ), наконец $a'=0$ (ибо соотношение $\sum a'x'=0$ приводится к $a'x'=0$ и x' не равно *постоянно* нулю, так как иначе Γ и G касались бы и поверхность оказалась бы развертывающейся).

Установив все это, легко видеть, что направляющие косинусы X, Y, Z $(Z=0)$ нормали к поверхности в точке $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=u$ определяются соотношением

$$Xd\xi+Yd\eta+Zd\zeta=Xd\xi+Yd\eta=0,$$

которое должно иметь место при всяком перемещении по поверхности:

$$d\xi=(x'+a'u)\ dt+adu=x'dt$$
$$d\eta=(y'+b'u)\ dt+bdu=b'udt,$$

откуда вытекает соотношение

$$Xx'+Yb'u=0.$$

Пусть φ есть угол между касательной плоскостью в точке u образующей G и касательной плоскостью в центральной точке той же образующей (последняя называется *центральной плоскостью*). Тогда

$$X=\pm\sin\varphi,\quad Y=\pm\cos\varphi,$$

так что

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{X}{Y}=\frac{b'u}{x'}=\frac{u}{k},$$

ибо значение (8) параметра распределения приводится к $x' : b'$, поскольку $a = b = a' = c' = 0$ и $c = 1$. Отсюда вытекает теорема Chasle'я: *Тангенс угла наклона касательной плоскости к центральной плоскости изменяется вдоль каждой образующей, оставаясь пропорциональным расстоянию точки касания от центральной точки.* Когда точка касания перемещается, то касательная плоскость поворачивается вокруг образующей в том или ином направлении, смотря по знаку параметра распределения k.

401. Конгруэнции прямых. Рассмотрим конгруэнцию прямых

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \tag{9}$$

коэффициенты которой зависят от двух параметров α, β, и напомним общие результаты, установленные в n⁰ 395. Все прямые D конгруэнции являются касательными к одной и той же поверхности S, называемой *фокальной поверхностью.*

Точки, в которых прямая D касается S, называются *фокальными точками* прямой. Для нахождения этих точек прямую D рассматривают как элемент некоторого семейства, зависящего от одного параметра. Чтобы получить такое семейство, устанавливают соотношение $\beta = \varphi(\alpha)$ так, чтобы оно удовлетворялось и частными значениями параметров, определяющими прямую D. Это соотношение должно быть, кроме того, такого рода, чтобы на прямой D существовали *характеристические точки*; эти последние и будут фокальными точками.

Таким образом, для получения фокальных точек мы сопоставляем уравнения (9) с результатами их полного дифференцирования по α:

$$0 = a'z + p', \qquad 0 = b'z + q', \tag{10}$$

причем функцию $\varphi(\alpha)$ выбираем таким образом, чтобы эти уравнения были совместны, иначе говоря, чтобы выполнялось условие

$$a'q' - b'p' = 0, \tag{11}$$

где

$$a' = \frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial a}{\partial \beta} \cdot \beta', \qquad q' = \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \beta} \beta', \; \ldots,$$

так что условие (11) принимает следующий вид

$$P\beta'^2 + Q\beta' + R = 0, \tag{12}$$

где P, Q, R суть известные функции от α, β. Это квадратное уравнение имеет, вообще говоря, два корня, которые мы будем предполагать вещественными:

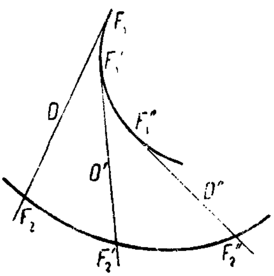
$$\beta' = \varphi_1(\alpha, \beta), \qquad \beta' = \varphi_2(\alpha, \beta). \tag{13}$$

Внося эти значения β' в уравнения (10), мы получаем два соответствующих значения для z.

Таким образом, на каждой образующей конгруэнции существуют две фокальные точки F_1 и F_2, и фокальная поверхность S состоит из двух полостей S_1 и S_2, каждая из которых касается в одной точке каждой из образующих конгруэнции.

Проделанные выкладки решают также вопрос о проведении через прямую D конгруэнции развертывающейся поверхности, образующие которой принадлежали бы конгруэнции. Действительно, для этого необходимо установить соотношение $\beta = \varphi(\alpha)$, удовлетворяющееся параметрами прямой D и подчиненное условию, чтобы оказывалось справедливым равенство (11). Значит должны быть выполненными также и соотношения (12) и (13). Но дифференциальные уравнения (13) вполне определяют два соотношения $\beta = \varphi(\alpha)$, удовлетворяющие условиям вопроса. Отсюда получаем следующий вывод:

Существуют две развертывающиеся поверхности Δ_1 и Δ_2, образованные прямыми конгруэнции и проходящие через заданную по произволу образующую.



Черт. 6.

Фокальные точки F_1 и F_2 образующей D суть, соответственно, ее точки касания с ребрами возврата A_1 и A_2 обеих развертывающихся поверхностей Δ_1 и Δ_2. Эти ребра возврата лежат, таким образом, на соответствующих полостях S_1 и S_2 фокальной поверхности, которая является их геометрическим местом.

Рассмотрим, в частности, развертывающуюся поверхность Δ_1, описанную образующими D, D', D'', . . . (черт. 6).

Последовательные фокальные точки F_1, F_1', F_1'', . . . вычертят на S_1 ребро возврата A_1; точки же F_2, F_2', F_2'', . . . вычерчивают на S_2 некоторую другую кривую поверхности Δ_1, которая не будет касаться прямой D.

Тогда D и касательная к этой второй кривой определяют касательную плоскость к развертывающейся поверхности в точке F_2 (т. е. вдоль всей D).

Точно также они определяют касательную плоскость к S_2 в той же точке F_2, так что эти касательные плоскости совпадают, и мы имеем следующую теорему:

Касательные плоскости к фокальной поверхности в двух фокальных точках одной и той же образующей, или ф о к а л ь н ы е п л о с к о с т и, *являются касательными плоскостями, соответственно, к двум развертывающимся поверхностям, проходящим через эту образующую.*

Отсюда вытекает еще одно заключение:

Каждая из двух развертывающихся поверхностей, проходящих через образующую D конгруэнции, имеет ребро возврата, лежащее на одной из полостей фокальной поверхности, а сама описана около другой ее полости.

Фокальная плоскость является, таким образом, одновременно касательной плоскостью к одной из полостей фокальной поверхности и соприкасающейся плоскостью ребра возврата, лежащего на другой полости.

Следовательно, если две фокальные плоскости взаимно перпендикулярны, то соприкасающаяся плоскость ребра возврата нормальна к фокальной поверхности.

Если это условие оказывается выполненным для всех прямых конгруэнции, то ребра возврата развертывающихся поверхностей, проходящих через различные образующие, являются *геодезическими линиями* фокальной поверхности. Как мы покажем в следующем n°, это условие действительно выполняется для конгруэнции нормалей к произвольной поверхности.

Замечание. Все эти общие заключения выведены в предположении, что фокальные точки F_1 и F_2 не сливаются и что каждая из них описывает некоторую поверхность, что очевидно представляет общий случай.

402. Конгруэнции нормалей поверхностей. Поставим вопрос, является ли произвольная конгруэнция прямых

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \tag{14}$$

где коэффициенты a, b, p, q суть функции двух параметров α и β, совокупностью нормалей к некоторой поверхности.

Если это так, то координаты x, y, z точек поверхности будут функциями от α и β, удовлетворяющими предшествующим уравнениям (14). Так как всякое перемещение dx, dy, dz на поверхности должно быть нормально к прямой (14), то (считая x, y, z функциями от α и β) должно выполняться условие

$$a\,dx + b\,dy + dz = 0,$$

или, заменяя dx и dy их выражениями, полученными из равенств (14),

$$(a^2 + b^2 + 1)\,dz + z\,(a\,da + b\,db) + a\,dp + b\,dq = 0.$$

что, после деления на $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$, принимает более простую форму

$$d(z\sqrt{a^2 + b^2 + 1}) + \frac{a\,dp + b\,dq}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 0,$$

Это есть уравнение в полных дифференциалах относительно z, α и β, из которого следует определить z. Но для того, чтобы это было возможно, необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$\frac{a\,dp + b\,dq}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$$

было точным дифференциалом. Это условие устанавливает некоторое соотношение между четырьмя функциями a, b, p и q параметров α и β. Следовательно, *вообще говоря, не существует поверхности, нормальной ко всем прямым данной конгруэнции.*

Условие, к которому мы только что пришли, допускает весьма замечательную геометрическую интерпретацию. Примем за независимые переменные координаты p и q точки пересечения прямой D с плоскостью (xy) *). Условие интегрируемости дает соотношение

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}\right). \tag{15}$$

*) Это допустимо. Действительно, если бы p и q были связаны каким-либо соотношением, то это означало бы, что конгруэнция пересекает плоскость (x, y)

С другой стороны, уравнение (11) приводит к соотношению

$$\frac{\partial a}{\partial q} q'^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial p} - \frac{\partial b}{\partial q}\right) q' - \frac{\partial b}{\partial p} = 0;$$

корни этого последнего уравнения q_1' и q_2' суть угловые коэффициенты, в плоскости (x, y), кривых пересечения этой плоскости с двумя развертывающимися поверхностями, проходящими через D. Касательные плоскости вдоль всей D к этим двум поверхностям, которые должны содержать D и одну из указанных касательных, будут иметь следующие уравнения:

$$q_1'(x - az - p) = (y - bz - q); \quad q_2'(x - az - p) = (y - bz - q).$$

Условие перпендикулярности этих двух плоскостей имеет вид

$$1 + b^2 - ab(q_1' + q_2') + q_1'q_2'(1 + a^2) = 0,$$

или после замены корней q' их значениями,

$$\frac{\partial a}{\partial q}(1 + b^2) + ab\left(\frac{\partial a}{\partial p} - \frac{\partial b}{\partial q}\right) - \frac{\partial b}{\partial p}(1 + a^2) = 0,$$

что в точности воспроизводит условие интегрируемости (15). Таким образом, имеет место следующая теорема:

Условие необходимое и достаточное для того, чтобы конгруэнция прямых была конгруэнцией нормалей, заключается в перпендикулярности фокальных плоскостей любой образующей.

§ 7. Приложение к кривым двоякой кривизны. Полярная поверхность. Эволюты.

403. Огибающие плоскостей главного триэдра. Если рассматривать на кривой двоякой кривизны точку M и соответствующий главный триэдр (т. I, n⁰ 333), то этот триэдр изменяется вместе с точкой M, и каждая из трех плоскостей триэдра огибается некоторой развертывающейся поверхностью.

Три плоскости триэдра суть *соприкасающаяся плоскость*, перпендикулярная бинормали, *нормальная плоскость*, перпендикулярная касательной и, наконец, плоскость, перпендикулярная главной нормали, которая называется *спрямляющей плоскостью*.

На соприкасающейся плоскости характеристикой является касательная и огибающей будет *(развертывающаяся) поверхность касательных*.

Нормальная плоскость, к которой мы еще вернемся, имеет огибающей *полярную (развертывающуюся) поверхность*.

Наконец огибающая *спрямляющей плоскости* есть некоторая поверхность, называемая *спрямляющей (развертывающейся) поверхностью*. Рассматриваемая кривая лежит на этой поверхности,

---

по некоторой кривой. Этого можно избежать, меняя систему координат, так как невозможно, чтобы конгруэнция, не будучи поверхностью, пересекала всякую плоскость по некоторой кривой.

так как спрямляющая плоскость содержит касательную и, следовательно, поверхность, огибающая эту плоскость, содержит линию, огибающую касательные, т. е. самую кривую. Мы замечаем в то же время, что характеристика спрямляющей плоскости проходит через точку M, которая служит характеристической точкой на касательной. Главная нормаль к кривой перпендикулярна к плоскости, касательной к спрямляющей поверхности, т. е. к спрямляющей плоскости, так что рассматриваемая кривая есть геодезическая линия спрямляющей поверхности и *переходит в прямую* при наложении этой поверхности на плоскость. Отсюда и название поверхности.

404. Полярная поверхность. Пусть дана кривая двоякой кривизны

$$x = f(t), \quad y = f_1(t), \quad z = f_2(t),$$

ее *полярной поверхностью* называется, как уже сказано, огибающая нормальных плоскостей. Для получения уравнений характеристики следует взять уравнение нормальной плоскости и результат его дифференцирования по t. Таким образом уравнения характеристики имеют следующий вид:

$$(\xi - x)x' + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0,$$

$$(\xi - x)x'' + (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Эта прямая называется *полярной прямой*, или *осью соприкасающейся плоскости*, или, наконец, *осью кривизны*. Она перпендикулярна к соприкасающейся плоскости, так как коэффициенты направления $y'z'' - y''z' = A, \ldots$ таковы же, как и у нормали к этой плоскости. Если присоединено к уравнениям оси кривизны еще уравнение соприкасающейся плоскости $A(\xi - x) + \ldots = 0$, то получаются как раз те три уравнения, из которых определяются координаты центра кривизны (т. I, n^0 329). Следовательно, *центр кривизны есть точка пересечения соприкасающейся плоскости с осью кривизны.*

Уравнения ребра возврата полярной поверхности получаются присоединением к двум уравнениям характеристики результата еще одного дифференцирования:

$$(\xi - x)x''' + (\eta - y)y''' + (\zeta - z)z''' = 3(x'x'' + y'y'' + z'z'').$$

405. Соприкасающаяся сфера. Уравнение сферы (с произвольным центром ξ, η, ζ и произвольным радиусом R) содержит четыре параметра, что позволяет получить касание третьего порядка с заданной кривой в заданной точке t.

Элементы ξ, η, ζ и R соприкасающейся сферы определяются с помощью четырех уравнений:

$$\psi(t) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - R^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\psi'(t) = (x - \xi)x' + (y - \eta)y' + (z - \zeta)z' = 0$$

$$\psi''(t) = \psi'''(t) = 0.$$

Три уравнения $\psi' = \psi'' = \psi''' = 0$, определяющие ξ, η, ζ, совпадают с выведенными в предыдущем n⁰ уравнениями, определяющими координаты точки касания полярной прямой и ее ребра возврата. Таким образом, мы имеем следующую теорему:

Ребро возврата полярной поверхности есть геометрическое место положений центра соприкасающейся сферы.

406. Эволюты кривых двоякой кривизны. *Эволютой* (разверткой) данной кривой называется всякая кривая, которая является огибающей нормалей данной кривой, или всякая кривая, касательные которой пересекают данную кривую под прямым углом.

Пусть t—параметр и x, y, z—координаты точки M кривой двоякой кривизны, ξ, η, ζ—координаты соответствующей точки N эволюты; ρ—длина отрезка MN—нормали; σ—длина дуги эволюты, причем за положительное направление отсчета ее примем направление MN. Вопрос приводит к уравнениям:

$$\frac{d\xi}{\xi - x} = \frac{d\eta}{\eta - y} = \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{d\sigma}{\rho} \tag{1}$$

$$(\xi - x)dx + (\eta - y)dy + (\zeta - z)dz = 0. \tag{2}$$

Мы имеем, таким образом, три различные уравнения для определения ξ, η, ζ в функции t. Начнем с установления некоторых свойств эволюты. Продифференцируем уравнение

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \rho^2;$$

принимая во внимание (2), мы получаем:

$$(\xi - x)d\xi + (\eta - y)d\eta + (\zeta - z)d\zeta = \rho\, d\rho,$$

и заменив $d\xi, \ldots$ их значениями (1), находим:

$$[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]\frac{d\sigma}{\rho} = \rho\, d\rho, \quad \text{откуда} \quad d\sigma = d\rho.$$

Значит, *длина дуги эволюты равна разности отрезков нормалей кривой, касательных в концах этой дуги.*

Продифференцируем уравнение (2), причем отметим соотношение $\sum d\xi\, dx = 0$, являющееся непосредственным следствием уравнений (1) и (2); мы получаем

$$(\xi - x)d^2x + (\eta - y)d^2y + (\xi - z)d^2z = ds^2. \tag{3}$$

Но уравнения (2) и (3) суть уравнения оси кривизны точки M. Точка N, в которой нормаль MN касается эволюты, лежит таким образом, на этой оси; следовательно, *все эволюты кривой лежат на ее полярной поверхности.*

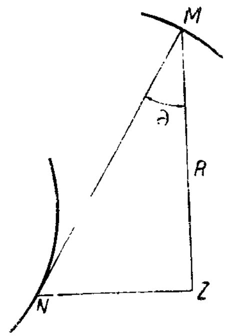
Перейдем теперь к аналитическому определению эволют.

Пусть Z будет центр кривизны точки M; проведем радиус кривизны $R = MZ$ и ось кривизны ZN (черт. 7). Отрезок ZN мы считаем положительным, если его направление совпадает с направлением (X, Y, Z) бинормали (т. I, n⁰ 333) и отрицательным—в противном случае.

Обозначим, наконец, через θ угол нормали MN, главной нормалью MZ; угол этот содержится между -90° и $+90^\circ$ и ему приписан тот же знак, что и ZN, так что $ZN = R \operatorname{tg} \theta$.

Для получения координат ξ, η, ζ точки N, напишем, что проекции отрезка MN на оси координат равны проекциям ломаной MZN; мы находим таким образом

$$\left.\begin{aligned} \xi - x &= R(\lambda + X \operatorname{tg} \theta) \\ \eta - y &= R(\mu + Y \operatorname{tg} \theta) \\ \zeta - z &= R(\nu + Z \operatorname{tg} \theta) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$



Черт. 7.

Заменив в этих равенствах x, y, z и вторые члены функциями t, мы получим параметрическое представление развертки. Для этого, однако, нужно предварительно найти выражение θ в функции t.

С этой целью продифференцировав уравнения (4), получим:

$$d\xi = dx + \lambda dR + R d\lambda + dX(R \operatorname{tg} \theta) + X d(R \operatorname{tg} \theta)$$

и аналогичные выражения для $d\eta$ и $d\zeta$. Умножим эти равенства соответственно на X, Y, Z и сложим; точно также умножим их на λ, μ, ν и сложим. Так как $\sum X^2 = \sum \lambda^2 = 1$, кроме того

$$\sum X dx = \sum \lambda dx = \sum X dX = \sum \lambda d\lambda = \sum \lambda X = 0$$

и наконец (в силу формул $dX = \lambda ds : T, \ldots$, т. I, n° 338)

$$\sum \lambda dX = -\sum X d\lambda = \frac{ds}{T},$$

то мы, без труда находим:

$$\sum X d\xi = -R \frac{ds}{T} + d(R \operatorname{tg} \theta), \qquad \sum \lambda d\xi = dR + \frac{ds}{T}(R \operatorname{tg} \theta).$$

С другой стороны, из (1) и (4) следует также, что

$$\sum X d\xi = \frac{d\sigma}{\rho} \sum X(\xi - x) = \frac{R d\sigma}{\rho} \operatorname{tg} \theta$$

$$\sum \lambda d\xi = \frac{d\sigma}{\rho} \sum \lambda(\xi - x) = \frac{R d\sigma}{\rho}.$$

Сопоставляя между собою полученные результаты, мы получаем два уравнения:

$$-R \frac{ds}{T} + d(R \operatorname{tg} \theta) = \frac{R d\sigma}{\rho} \operatorname{tg} \theta, \qquad \frac{R ds}{T} \operatorname{tg} \theta + dR = \frac{R d\sigma}{\rho}.$$

Вычтем из первого второе, умноженное на $\operatorname{tg} \theta$:

$$-R \frac{ds}{T}(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) + R d \operatorname{tg} \theta = 0, \text{ откуда } d\theta = \frac{ds}{T}$$

В конечном итоге, θ определяется с помощью квадратуры

$$\theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{T}, \tag{5}$$

причем переменной интегрирования является t. Начальное значение θ_0 остается произвольным. Подстановка выражения (5) в урния (4) дает уравнения бесконечного множества эволют, отличающихся друг от друга начальным значением θ_0.

Формула (5) приводит к важному следствию. Если мы рассмотрим две эволюты (θ) и (θ'), огибающие два различных семейства нормалей (MN) и (MN'), то из формулы (5) следует, что

$$\theta - \theta' = \theta_0 - \theta_0',$$

Итак, *если каждое из двух семейств нормалей* (MN) и (MN') *определяет некоторую эволюту, то соответственные нормали образуют между собой постоянный угол.*

Обратно, если нормали (MN) *имеют огибающую, то ее имеют и нормали* (MN'), *если только* MN' *образуют с* MN *постоянный угол.*

Замечание. В случае плоской кривой, кручение $\frac{1}{T}$ равно нулю и θ сводится к θ_0. Если плоскость кривой взять за плоскость xy, то $z = \nu = X = Y = 0$ и $Z = 1$; формулы (4) в этом случае дают:

$$\xi = x + R\lambda, \qquad \eta = y + R\mu, \qquad \zeta = R \operatorname{tg} \theta_0.$$

Но ξ и η суть координаты центра кривизны. Следовательно, все эволюты располагаются на цилиндре; все эти кривые получаются, если на каждом перпендикуляре к плоскости кривой, восстановленном из центра кривизны, откладывать отрезки, пропорциональные соответствующим радиусам кривизны.

Обыкновенная эволюта получается, если положить $\theta_0 = 0$, она является огибающей главных нормалей. Следует заметить, что только у плоских кривых главные нормали имеют огибающую, ибо, как показывает формула (5), θ не может быть постоянным, если кручение не равно нулю.

Замечание. Нормали к кривой двоякой кривизны (C) образуют конгруэнцию прямых (n^0 401). *Фокальными точками* на нормали будут точки M кривой и точки касания с полярной поверхностью. Последняя, таким образом, является одной из двух полостей фокальной поверхности, в то время как вторая полость „вырождается" в кривую (C), геометрическое место точек M. Через каждую нормаль проходит одна развертывающаяся поверхность, в собственном смысле, которая содержит кривую (C) и ребро возврата которой лежит на полярной поверхности. Вторая же развертывающаяся поверхность есть нормальная плоскость, перпендикулярная к первой поверхности. Таким образом фокальные плоскости взаимно перпендикулярны, и конгруэнция есть конгруэнция нормалей некоторой поверхности (n^0 402), *а эволюты суть геодезические линии полярной поверхности.*

§ 8. Кривизна линий, лежащих на поверхности.

407. Основная формула. Этот параграф посвящен вопросу о кривизне линий, лежащих на поверхности S и проходящих через точку M этой поверхности. Оси координат предполагаются прямоугольными.

Возьмем уравнение поверхности в форме

$$z = f(x, y)$$

и предположим, что z и ее частные производные первых двух порядков представляют собой непрерывные функции обеих переменных x и y. Положим, для краткости,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Проведем нормаль MN к поверхности в точке $M(x, y, z)$, в направлении, образующем острый угол с осью Oz. Ее направляющие косинусы X, Y, Z равны

$$X = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

причем здесь нет никакой неопределенности в знаке (радикал положителен).

Пусть теперь α, β, γ будут направляющие косинусы касательной MT в точке M к некоторой кривой (C) на поверхности; λ, μ, ν — направляющие косинусы радиуса кривизны R этой кривой и θ — угол между R и нормалью к поверхности. Как известно [том I, n⁰ 332, формула (14)]

$$\cos\theta = X\lambda + Y\mu + Z\nu = \frac{R(X\,d\alpha + Y\,d\beta + Z\,d\gamma)}{ds}.$$

Подставим значения

$$d\alpha = d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d^2x}{ds} - \frac{dx\,d^2s}{ds^2}, \; \ldots$$

и заметим, что $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ равно нулю, потому что перемещение dx, dy, dz по кривой (C) перпендикулярно к нормали к поверхности; отсюда

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{X\,d^2x + Y\,d^2y + Z\,d^2z}{ds^2}. \tag{1}$$

Заменим теперь d^2z его значением

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y;$$

члены, содержащие d^2x и d^2y, исчезнут, ибо их коэффициенты $X + pZ$ и $Y + qZ$ суть нули; подставим далее, вместо Z, его значение, указанное выше. Мы получим

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{ds^2\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \tag{2}$$

или же, если ввести направляющие косинусы α, β касательной к кривой (C).

$$\frac{\cos\theta}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{3}$$

Эта основная формула в теории кривизны.

408. Теорема. *Произвольная кривая, лежащая на поверхности, имеет в точке M тот же радиус кривизны, что и плоская кривая, получающаяся в пересечении поверхности с соприкасающейся плоскостью к первой кривой.*

Действительно, обе эти кривые имеют в точке M общую касательную и общую главную нормаль, так что величины θ, α, β имеют для обеих кривых одинаковые значения, и формула (3) приводит к одинаковым значениям R.

Эта теорема сводит вопрос о кривизне произвольных кривых к вопросу о кривизне плоских сечений. Однако эта теорема перестанет быть справедливой, если $\cos\theta$ и $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$ обращаются одновременно в нуль, ибо в этом случае формула (3) становится тождеством. Это произойдет, если соприкасающаяся плоскость кривой является касательной плоскостью к поверхности и касательная к кривой имеет *асимптотическое направление* (n° 413).

409. Теорема Meusnier. *Радиус кривизны наклонного сечения в точке M есть проекция на плоскость этого сечения радиуса кривизны нормального сечения, имеющего в точке M ту же касательную.*

Пусть R_0 есть радиус кривизны нормального сечения, имеющего касательную MT. Для этого сечения будет $\cos\theta=\pm 1$, смотря по тому, совпадает ли направление R_0 с направлением MN, или прямо противоположно ему. Первый член формулы (3) приводится, таким образом, к $\pm 1 : R_0$ и, так как второй член не зависит от θ, мы получаем

$$\frac{\cos\theta}{R}=\frac{\pm 1}{R_0}, \quad \text{откуда } R=R_0(\pm\cos\theta). \tag{4}$$

В обоих случаях $\pm\cos\theta$ является косинусом угла, образуемого R с R_0, что и доказывает наше предположение.

410. Нормальная кривизна и геодезическая кривизна. Пусть C есть центр кривизны кривой, лежащей на поверхности. Проведем через эту точку ось кривизны (т. е. нормаль к соприкасающейся плоскости), пересекающую в точке C_0 нормальную плоскость поверхности (проходящую через MT) и в точке C_1 касательную плоскость.

Точка C_0 называется *центром нормальной кривизны*, вектор MC_0—*радиусом нормальной кривизны*, а обратная величина—*нормальной кривизной* кривой в точке M.

Точка C_1 называется *центром геодезической кривизны*, MC_1—*радиусом геодезической кривизны*, обратная величина—*геодезической кривизной*.

В силу этого, нормальная и геодезическая кривизны имеют, со ответственно, следующие значения (если не обращать внимания на знак)

$$\frac{\cos\theta}{R}, \quad \frac{\sin\theta}{R}.$$

Мы видим также, вспоминая соотношение (4) предыдущего n°, что *нормальная кривизна кривой равна кривизне нормального сечения, имеющего ту же касательную MT.*

Если спроектировать кривую на касательную плоскость, то кривая и ее проекция будут, соответственно, наклонным и нормальным сечениями проектирующего цилиндра. Отсюда, в силу теоремы Meusnier, *геодезическая кривизна есть кривизна в точке M проекции кривой на касательную плоскость поверхности.* Точно также, *нормальная кривизна евть кривизна проекции кривой на нормальную плоскость поверхности, проходящую через касательную MT.*

Определения нормальной и геодезической кривизны получаются наиболее естественным образом, если исследовать вращение касательной к кривой относительно нормали MN поверхности и относительно нормали MP кривой, проведенной в касательной плоскости.

Пусть X, Y, Z будут направляющие косинусы нормали MN и U, V, W — косинусы нормали MP; пусть далее ω и ω' означают углы, образованные касательной с MN и MP. Будем считать эти углы положительными в направлении TN и TP, так что их начальное значение будет $-\frac{\pi}{2}$.

Очевидно,

$$\cos\omega = X\alpha + Y\beta + Z\gamma, \quad \cos\omega' = U\alpha + V\beta + W\gamma;$$

дифференцируя для бесконечно малого перемещения касательной, причем MN и MP остаются неизменными, получим

$$-\sin\omega\frac{d\omega}{ds} = \frac{d\omega}{ds} = X\frac{d\alpha}{ds} + \ldots = \frac{X\lambda + \ldots}{R},$$

$$-\sin\omega'\frac{d\omega'}{ds} = \frac{d\omega'}{ds} = U\frac{d\alpha}{ds} + \ldots = \frac{U\lambda + \ldots}{R}.$$

Предположим, что угол θ между главной нормалью и MN считается положительным в направлении NP, в таком случае

$$X\lambda + \ldots = \cos\theta, \quad U\lambda + \ldots = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{\cos\theta}{R}, \quad \frac{d\omega'}{ds} = \frac{\sin\theta}{R}. \tag{5}$$

Эти выражения и дают, соответственную нормальную и геодезическую кривизны. Они будут положительны или отрицательны, смотря по направлению вращений $d\omega$ и $d\omega'$ (R здесь существенно положительно).

Если главная нормаль является и нормалью к поверхности, то $\theta = 0$ или π и геодезическая кривизна равна нулю. Линии, у которых геодезическая кривизна равна постоянно нулю, называются *геодезическими линиями.*

Если главная нормаль является касательной к поверхности, то $\theta = \pi : 2$ и нормальная кривизна равна нулю. Линии, у которых нормальная кривизна постоянно равна нулю, называются *асимптотическими линиями* (n^0 423).

411. **Формула Euler'а. Главные сечения и направления.** Теорема Meusnier сводит изучение кривизны произвольной кривой к исследованию кривизны нормальных сечений. Последнее было осуществлено Euler'ом.

Перенесем начало координат в точку M и возьмем нормаль MN за ось z, так что плоскостью xy будет касательная плоскость к поверхности. В этом случае $p = q = 0$. Для нормального сечения основная формула приводится к следующему виду

$$\frac{1}{R} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2, \tag{6}$$

если R направлено по MN; если же R имеет обратное направление, то нужно изменить знак левой части. Мы, однако, условимся считать формулу (6) общей, приписывая R положительный знак, если он имеет направление MN, и отрицательный знак — в противном случае.

Пусть ω — угол касательной MT к сечению с осью x; с помощью легкого преобразования находим

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\omega + 2s\cos\omega\sin\omega + t\sin^2\omega = \frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2}\cos 2\omega + s\sin 2\omega$$

Это равенство показывает, что $1 : R$ есть непрерывная и ограниченная функция угла ω; она имеет, следовательно, хоть один максимум и один минимум. Мы найдем их, определив те значения ω, которые обращают в нуль производную этой функции, т. е. корни уравнения

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2s}{r-t}.$$

Это уравнение определяет два взаимно перпендикулярных направления. Примем их за оси x и y; тогда предыдущее уравнение должно иметь корень $\omega = 0$, так что необходимо $s = 0$, и соотношение (6) принимает вид:

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\omega + t\sin^2\omega.$$

Пусть R_1 — радиус кривизны сечения $\omega = 0$; R_2 — то же для сечения $\omega = \frac{\pi}{2}$; мы получаем $1 : R_1 = r$ и $1 : R_2 = t$. Таким образом, мы приходим к *формуле Euler'a*

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}.$$

Два взаимно перпендикулярных направления, которые мы рассмотрели, соответствуют сечениям с наибольшей и наименьшей кривизной, называемым *главными сечениями*. Плоскости этих сечений суть *главные плоскости*. Радиусы кривизны R_1 и R_2 этих сечений суть *главные радиусы кривизны*. Соответствующие центры кривизны суть *главные центры кривизны*; наконец, направления касательных к главным сечениям суть *главные направления*.

Формула *Euler'а* ни в какой мере не зависит от выбора осей координат и выражает свойство самой поверхности. Она устанавливает зависимость радиуса кривизны произвольного нормального сечения от угла, образованного плоскостью этого сечения с плоскостью главного сечения, и от главных радиусов кривизны.

412. Средняя кривизна. Пусть R' и R'' суть радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений, направления которых определяются углами ω и $\omega+\frac{\pi}{2}$; в силу **формулы** Euler'а, имеем

$$\frac{1}{R'}=\frac{\cos^2\omega}{R_1}+\frac{\sin^2\omega}{R_2},\quad \frac{1}{R''}=\frac{\sin^2\omega}{R_1}+\frac{\cos^2\omega}{R_2},$$

откуда

$$\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$

Следовательно *сумма кривизн двух взаимно перпендикулярных сечений в точке M есть величина постоянная, равная сумме главных кривизн*. Половина этой постоянной называется *средней кривизной* в точке M. Понятие средней кривизны принадлежит Sophie Germain.

413. Форма поверхности вблизи точки M. Асимптотические направления. Точки поверхности, по своей природе, могут быть трех видов:

1°. Если R_1 и R_2 имеют одинаковые знаки, то и R всегда имеет тот же знак, независимо от ω; так что все сечения обращены вогнутостью в одну и ту же сторону. Вблизи точки M вся поверхность лежит по одну сторону своей касательной плоскости. Такое положение вещей имеет место, например, в каждой точке эллипсоида.

2°. Если R_1 и R_2 имеют разные знаки, то R меняет знак. Два направления, соответствующие корням уравнения

$$\operatorname{tg}\omega=\pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}},$$

дают $\frac{1}{R}=0$. Эти направления называются *асимптотическими направлениями*; основание для такого наименования будет указано в следующем п°. Соответствующие касательные называются *касательными асимптотических направлений*. Поверхность не располагается целиком по одну сторону касательной плоскости. Это имеет место, например, в каждой точке однополого гиперболоида.

3°. Промежуточным случаем между двумя предыдущими будет тот, когда одна из главных кривизн, например $1:R_2$, равна нулю. В этом случае

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\omega}{R_1}$$

Поверхность вся расположена по одну сторону от своей касательной плоскости, но $R=\infty$ при $\omega=\frac{\pi}{2}$. Это имеет место, например, в каждой точке цилиндрической поверхности.

Наконец, следует отметить один частный случай, именно случай равенства главных радиусов кривизны. В этом случае все нормальные сечения имеют одинаковую кривизну. Точка, в которой имеет место подобное явление, называется *точкой округления* (*ombilic*) поверхности.

414. Индикатриса Dupin'a. Изменение радиуса кривизны при вращении плоскости сечения вокруг нормали к поверхности может быть геометрически представлено с помощью следующего построения. Отложим на касательной сечения отрезок MT, равный корню квадратному из абсолютной величины R, точка T опишет на касательной плоскости некоторую кривую (называемую *индикатрисой*), которая и характеризует изменение R. Природа этой кривой зависит от характера точки M.

1°. Если R_1 и R_2 имеют одинаковые знаки, то R имеет тот же знак, например, положительный. В таком случае координаты точки T будут $x=\sqrt{R}\cos\omega$, $y=\sqrt{R}\sin\omega$ и индикатриса оказывается эллипсом:

$$\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}=1.$$

В этом случае говорят, что M есть *эллиптическая точка.*

2°. Если одна из главных кривизн, например $\frac{1}{R_2}$, равна нулю, то индикатриса называется параболической и представляет систему двух параллельных прямых, а именно (предполагая R_1 положительным)

$$\frac{x^2}{R_1}=1.$$

В этом случае говорят, что M есть *параболическая точка.*

3°. Если R_1 и R_2 имеют разные знаки, то R положительно, когда MT лежит в одном из углов между асимптотическими направлениями, и отрицательно для другого угла. Координаты точки T будут, смотря по случаю, $x=\sqrt{\pm R_1}\cos\omega$, $y=\sqrt{\pm R_2}\sin\omega$. Индикатриса состоит из двух сопряженных гипербол

$$\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}=\pm 1,$$

асимптотами которых являются *асимптотические направления,* что оправдывает название последних. В этом случае говорят, что M есть *гиперболическая точка*

Можно и другим способом выяснить связь между индикатрисой и формой поверхности около точки M. Напомним, что точка M взята за начало координат, а касательные главных сечений за оси x и y. Следовательно, если разложить z, пользуясь формулой Maclaurin'а по степеням x и y, то (так как p, q, s в начале координат равны нулю)

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+ty^2)+\ \ldots$$

или, поскольку $r=\frac{1}{R_1}, t=\frac{1}{R_2}$ (n⁰ 411),

$$2z=\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}+\ \ldots$$

Пересечем поверхность двумя параллельными плоскостями $z=\pm l$, бесконечно близкими к касательной плоскости $z=0$. Приближенные уравнения сечений будут

$$\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}=\pm 2l.$$

Отсюда вытекает следующее заключение

Если пересечь поверхность плоскостью, параллельной касательной плоскости и бесконечно близкой к точке касания, то линия пересечения подобна индикатрисе этой точки касания.

415. Определение характера точки при произвольных прямоугольных осях. Пусть теперь точка M (x, y, z) занимает произвольное положение относительно прямоугольных осей координат. Формула (3) дает нам, при тех же соглашениях относительно знака, что и выше (n⁰ 411), следующее выражение кривизны произвольного нормального сечения в точке M

$$\frac{1}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Мы опять непосредственно усматриваем три различных возможности по отношению к изменению знака $\frac{1}{R}$ при изменении отношения $\alpha:\beta$, связанных со свойствами трехчлена $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$.

1⁰. Если $rt-s^2>0$, то трехчлен, а следовательно и R, не меняет знака и не обращается в нуль. Точки M *эллиптическая.*

2⁰. Если $rt-s^2=0$, то трехчлен может обратиться в нуль, но не может изменить знака. Точки M *параболическая.* Таковы все точки развертывающейся поверхности.

3⁰. Если $rt-s^2<0$, то трехчлен и R меняют знак; точка M *гиперболическая.*

Асимптоты индикатрисы (n⁰ 414) соответствуют направлениям, для которых кривизна нормального сечения равна нулю. Таким образом, асимптотические направления определяются уравнением:

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2=0.$$

416. Определение главных сечений и кривизн. Главные кривизны представляют максимум и минимум кривизны $\frac{1}{R}$, рассматриваемой как функция отношения $\alpha:\beta$. Для нормального сечения, в силу формулы (7), имеем

$$\frac{1}{RZ}=r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2.$$

Но, так как

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+(p\alpha+q\beta)^2=1,$$

то предыдущее уравнение можно заменить другим, в которое входит только отношение $\alpha:\beta$, именно:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+(p\alpha+q\beta)^2}{RZ}=r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2,$$

так что максимум и минимум $1:R$ могут быть найдены из этого соотношения, в котором переменные α и β рассматриваются как независимые. Для этого необходимо найти из этого соотношения производные $\frac{1}{R}$ по α и по β, и в отдельности приравнять их нулю. Это, очевидно, сводится к дифференцированию соотношения отдельно по α и по β, что дает

$$\frac{\alpha+p(p\alpha+q\beta)}{RZ}=r\alpha+s\beta,\quad \frac{\beta+q(p\alpha+q\beta)}{RZ}=s\alpha+t\beta,$$

или иначе

$$\frac{\alpha+p(p\alpha+q\beta)}{r\alpha+s\beta}=\frac{\beta+q(p\alpha+q\beta)}{s\alpha+t\beta}=RZ. \tag{8}$$

Равенство двух первых членов представляет квадратное уравнение, дающее два значения для $\alpha:\beta$. Отсюда определяются направления касательных главных сечений.

После преобразований, мы находим

$$\alpha^2[s(1+p^2)-pqr]+\alpha\beta[t(1+p^2)-r(1+q^2)]-\beta^2[s(1+q^2)-pqt]=0. \tag{9}$$

С другой стороны, если исключить $\alpha:\beta$ из двух уравнений (8) то получается квадратное уравнение, относительно $\frac{1}{R}$:

$$\frac{1+p^2+q^2}{R^2Z^2}-\frac{r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs}{RZ}+(rt-s^2)=0, \tag{10}$$

корнями которого служат главные кривизны $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$.

Заменяя Z его известным значением (n° 407), мы из этого уравнения непосредственные получаем:

$$\frac{1}{R_1R_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2},\quad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}. \tag{11}$$

Последняя величина, будучи разделена на 2, есть *средняя величина* в точке M; первая называется *полной кривизной* поверхности в этой точке.

Замечание. Из уравнения (9) легко вывести условие того, чтобы точка M была точкой округления. Главные сечения становятся в этом случае неопределенными и уравнение должно оказаться тождеством, откуда вытекает, что

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}.$$

Эти два уравнения характеризуют точку округления. Вместе с уравнением поверхности они образуют систему трех уравнений относительно x, y, z. Следовательно, вообще говоря, на поверхности существует разве лишь конечное число точек округления.

417. Формулы Olinde Rodrigue'a. Уравнения (8), определяющие главные сечения и кривизны, могут быть представлены в других, более простых или более симметричных формах.

Прежде всего, заменим в этих уравнениях α и β пропорциональными им компонентами dx и dy малого перемещения в главном направлении; тогда можно написать

$$\frac{dx+p\,dz}{dp}=\frac{dy+q\,dz}{dq}=RZ. \tag{12}$$

Подставляем, далее, вместо p и q их значения $-X:Z$ и $-Y:Z$; тогда

$$-\frac{Z\,dx-X\,dz}{Z\,dX-X\,dZ}=-\frac{Z\,dy-Y\,dz}{Z\,dY-Y\,dZ}=R,$$

или

$$\frac{dx+R\,dX}{X}=\frac{dy+R\,dY}{Y}=\frac{dz+R\,dZ}{Z}.$$

Но здесь каждая из дробей равна нулю, потому что сумма числителей, умноженных соответственно на X, Y, Z, равна нулю, в то время как такая же сумма знаменателей равна *единице*.

Следовательно, мы получаем

$$dx+R\,dX=0,\ dy+R\,dY=0,\ dz+R\,dZ=0. \tag{13}$$

Это суть формулы *Olinde Rodrigue'a*, относящиеся к перемещению вдоль главного направления. Они в сущности представляют лишь две различные формулы, так как, будучи умножены на X, Y, Z, в сумме дадут тождество.

Замечание. Формулы Olinde Rodrigue'a позволяют непосредственно установить, что *поверхность, все точки которой суть точки округления, есть сфера.*

Действительно, в этом случае все направления являются главными, так что эти формулы справедливы для произвольных значений dx и dy; поэтому первые две из них дают следующие четыре:

$$1+R\frac{\partial X}{\partial x}=0,\ \frac{\partial X}{\partial y}=0,\ \frac{\partial Y}{\partial x}=0,\ 1+R\frac{\partial Y}{\partial y}=0.$$

Средние две формулы показывают, что X зависит только от x, а Y только от y; но тогда две крайние формулы показывают, что R не зависит ни от y, ни от z, т. е. есть постоянная величина. Формулы Olinde Rodrigue'а непосредственно интегрируются и (обозначая через a, b, c постоянные интегрирования) из них получается:

$$x-a+RX=0, \quad y-b+RY=0, \quad z-c+RZ=0,$$

откуда

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

418. Выражение средней и полной кривизны через направляющие косинусы нормали. Уравнение, эквивалентное уравнению (9) и определяющее главные направления, можно получить исключением R из двух формул Olinde Rodrigue'а; например из двух первых, что дает

$$dx\, dY - dy\, dX = 0.$$

Для получения уравнения, определяющего главные кривизны, предположим X и Y выраженными в функции x и y. Тогда первые две из формул (13) могут быть переписаны следующим образом:

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{\partial X}{\partial x}\right) dx+\frac{\partial X}{\partial y}\, dy=0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x}\, dx+\left(\frac{1}{R}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) dy=0.$$

Исключение отсюда $dx : dy$ дает нам

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{\partial X}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-\frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}=0.$$

Это квадратное уравнение относительно $1 : R$ эквивалентно уравнению (10) и определяет главные кривизны. Из него выводятся изящные выражения для полной и средней кривизн, а именно:

$$\frac{1}{R_1 R_2}=\frac{d(X, Y)}{d(x, y)}; \quad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

Проделывая указанные здесь вычисления, мы возвратимся к выражению (11).

419. Полная кривизна. Gauss, которому принадлежит понятие полной кривизны, показал, что ей можно дать определение, аналогичное определению кривизны плоских кривых.

Рассмотрим на поверхности S такую часть с площадью σ, на которой $\frac{1}{R_1 R_2}$ не меняет знака. Проведем из начала координат сектор OP, длина которого равна 1 и который параллелен нормали к поверхности в точке M (с координатами x, y, z). Когда M описывает область σ, точка P (с координатами X, Y, Z) опишет некоторую часть сферы с площадью σ_1. Говорят, что σ_1 есть *полная кривизна* части поверхности σ, а отношение $\sigma_1 : \sigma$ — ее средняя кривизна. Если площадь σ стремится к нулю, стягиваясь в данную точку M, то предел средней кривизны называется *полной кривизной поверхности в точке M*.

Легко установить, что это определение опять приводит нас к величине $\frac{1}{R_1 R_2}$, указанной в предыдущем n°. Пусть действительно, σ' и σ_1' будут проекциями σ и σ_1 на плоскость xy. Тогда

$$\sigma = \iint\limits_{\sigma'} \frac{dx\,dy}{Z}, \quad \sigma_1 = \iint\limits_{\sigma_1'} \frac{dX\,dY}{Z}.$$

Если преобразовать второй интеграл, принимая за новые переменные x и y, то области σ_1' будет соответствовать как раз область σ', и мы получаем, приписывая σ_1 знак $+$ или $-$, смотря по тому, будет ли соответствие между σ_1 и σ_1' прямым или обратным (n° 16), следующее соотношение

$$\sigma_1 = \iint\limits_{\sigma'} \frac{d(X, Y)}{d(x, y)} \cdot \frac{dx\,dy}{Z} = \iint\limits_{\sigma'} \frac{1}{R_1 R_2} \cdot \frac{dx\,dy}{Z}.$$

Следовательно, если устремить σ' к 0, то действительно, применяя теорему о среднем к двойному интегралу, найдем

$$\lim \frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Предыдущее определение сохраняет силу и для развертывающихся поверхностей, на которых повсюду $\frac{1}{R_1 R_2} = 0$. Действительно, полная кривизна σ некоторой части σ_1 развертывающейся поверхности равна нулю. В этом легко убедиться, замечая, что так как нормаль не меняет направления по всей длине образующей, то определенная выше точка P перемещается по кривой.

420. Поверхности с нулевой средней кривизной. Поверхности с нулевой средней кривизной называются *минимальными поверхностями*, потому что всякая часть такой поверхности, ограниченная замкнутой кривой, имеет площадь, наименьшую по сравнению со всеми другими поверхностями, проходящими через ту же кривую. Действительно, покажем, что найденное в n° 341 условие того, чтобы поверхность имела минимальную площадь, в точности выражает требование, чтобы средняя кривизна поверхности равнялась нулю.

Поверхности с нулевой средней кривизной характеризуются уравнением (n° 418):

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

Если заметить, что величины X и Y в точности совпадают с величинами P и Q n° 341, то мы убеждаемся, что это уравнение выражает условие того, чтобы поверхность имела минимальную площадь. Как уже сказано, именно поэтому поверхности с нулевой средней кривизной и носят название *минимальных поверхностей*.

Если ограничить кривой некоторую часть такой поверхности, то площадь этой части меньше, чем площадь всякой другой поверхности, ограниченной той же кривой.

Во всякой точке минимальной поверхности главные кривизны равны и имеют обратные знаки, индикатриса состоит из двух равнобочных сопряженных гипербол и асимптотические направления взаимно перпендикулярны.

421. Линии кривизны и эволюта поверхности. Геометрическое место нормалей к поверхности, восставленных в точках некоторой линии (C) на ней, есть линейчатая поверхность, называемая *нормальной поверхностью*; вообще говоря, она будет косой.

Линиями кривизны называются такие линии на поверхности, что построенные для них нормальные поверхности оказываются развертывающимися.

В силу этого определения всякая плоская линия является линией кривизны своей плоскости, ибо соответствующая нормальная поверхность будет цилиндрической. Всякая линия на сфере также есть линия кривизны, ибо соответствующая нормальная поверхность является конической.

Меридианы и параллели поверхностей вращения суть линии кривизны, ибо соответствующие нормальные поверхности суть плоскости и конические поверхности.

Нормали к поверхности образуют конгруэнцию прямых (n⁰ 401). Поэтому через каждую образующую можно провести две нормальные развертывающиеся поверхности и, следовательно, через каждую точку поверхности можно, вообще говоря, провести две линии кривизны. Займемся сначала определением их направлений.

Уравнения нормали в произвольной точке $M(x, y, z)$ суть

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0.$$

Они зависят от двух параметров x и y. Для того, чтобы эта нормаль, перемещаясь, описывала развертывающуюся поверхность (или имела огибающую), нужно установить соотношение $y = \varphi(x)$, такого рода, чтобы расстояние двух бесконечно близких нормалей было выше первого порядка. Координаты ξ, η, ζ характеристической или *фокальной точки*, являющейся точкой касания нормали и ее огибающей, должны удовлетворять уравнениям нормали и результатам их дифференцирования по параметру, то есть уравнениям

$$(\zeta - z)\,dp - (dx + p\,dz) = 0, \quad (\zeta - z)\,dq - (dy + q\,dz) = 0,$$

откуда следует

$$\zeta - z = \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}. \tag{14}$$

Для совместности этих уравнений необходимо, чтобы было

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}. \tag{15}$$

Это соотношение и определяет функцию $y = \varphi(x)$, т. е. это и есть *дифференциальное уравнение линий кривизны.* Если здесь заменить dz, dp и dq их выражениями через dx и dy, то получается

$$\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{(1+q^2)\,dy+pq\,dx}{s\,dx+t\,dy}. \qquad (16)$$

Уравнения (15) и (16) совпадают соответственно с уравнениями (12) и (8), определяющими главные направления (n° 417). Следовательно, *в каждой точке линии кривизны касаются главных сечений и существуют, следовательно, два семейства линий кривизны, пересекающихся под прямым углом и образующих на поверхности ортогональную систему* *).

Определим теперь *фокальные точки* на нормали в точке M. Координата ζ такой точки находится из уравнения (14), дающего, если учесть (12), что $\zeta=z+RZ$, где R есть один из главных радиусов кривизны R_1 или R_2. Следовательно, *две фокальные точки на нормали суть соответствующие главные центры кривизны.*

Таким образом, фокальная поверхность конгруэнции нормалей есть геометрическое место главных центров кривизны. Ее называют также *поверхностью центров* или *эволютой* данной поверхности. *Ребра возврата развертывающихся нормальных поверхностей лежат на поверхности центров и суть ее геодезические линии* (n° 401).

422. Приложение к развертывающимся поверхностям. На развертывающихся поверхностях образующие и их ортогональные траектории дают два семейства линий кривизны. Одна полость поверхности центров бесконечно удалена. Для определения другой полости заметим, что *нормальная плоскость к траектории в точке M развертывающейся поверхности совпадает со спрямляющей плоскостью* (n° 403) *ребра возврата в точке O, где это ребро касается образующей, проходящей через M* (ибо эта плоскость содержит касательную OM и нормаль к соприкасающейся плоскости ребра). Следовательно, *осью кривизны траектории является характеристика спрямляющей плоскости ребра возврата* и ее центр кривизны лежит на этой характеристике.

Таким образом, эта характеристика является геометрическим местом центров кривизны траекторий, проходящих через различные точки образующей OM.

Отсюда следует, что *эволюта развертывающейся поверхности есть некоторая другая развертывающаяся поверхность, а именно спрямляющая поверхность ребра возврата данной поверхности.*

423. Асимптотические линии. *Асимптотическими линиями поверхности называются такие линии, которые в каждой своей точке касаются одной из асимптот индикатрисы.* Дифференциальное уравнение этих линий получим, заменяя в уравнении асимптотических направлений (n° 415) α и β на dx и dy, что дает

$$r\,dx^2+2\,s\,dx\,dy+t\,dy^2=0. \qquad (17)$$

---

*) Ортогональность линий кривизны является также непосредственным следствием взаимной ортогональности развертывающихся поверхностей конгруэнции нормали (n° 402).

Сопоставляя это с формулой (3), мы непосредственно видим, что это уравнение выражает, что *асимптотическими линиями являются линии, нормальная кривизна которых* $\cos\theta : R$ *постоянно равно нулю.*

В частности *всякая прямая, лежащая на поверхности, является ее асимптотической линией.*

Если точки поверхности являются гиперболическими, то уравнение (17) дает два значения для $\frac{dy}{dx}$ и, следовательно, определяет два семейства взаимно пересекающихся асимптотических линий. Если все точки суть параболические, то поверхность развертывающаяся, уравнение имеет только один корень, и единственным семейством асимптотических линий является семейство прямолинейных образующих. Наконец, если все точки эллиптические, то не существует вещественных асимптотических линий.

Непрямолинейным асимптотическим линиям можно дать и другое определение. Это суть *такие линии, соприкасающиеся плоскости которых являются касательными плоскостями поверхности,* ибо в этом, очевидно, заключается необходимое и достаточное условие равенства нулю нормальной кривизны.

424. Сопряженные касательные. Две касательные в точке M поверхности называются *сопряженными*, если они совпадают с двумя сопряженными диаметрами индикатрисы; сопряженными называют и соответствующие им направления. По свойству конических сечений, *во всякой точке поверхности* (кроме точек округления) *существуют только два сопряженных взаимно перпендикулярных направления; это суть главные направления.*

Теорема. *Когда точка касания движется вдоль некоторой кривой* (C) *на поверхности, то характеристика касательной плоскости в каждом положении точки касания является касательной, сопряженной с касательной к кривой* (C).

Пусть x, y, z, будут координаты точки M кривой (C); уравнение касательной плоскости и результат его дифференцирования по параметру:

$$\zeta - z = p\,(\xi - x) + q\,(\eta - y),$$
$$(\xi - x)\,dp + (\eta - y)\,dq = 0,$$

(ибо $dz = p\,dx + q\,dy$) определяют характеристику, проходящую через точку M. Перенесем начало координат в точку M и возьмем касательные к главным направлениям за оси x и y; мы получим (n⁰ 411)

$$x = y = z = p = q = s = 0; \quad dp = r\,dx = \frac{dx}{R_1}, \quad dq = t\,dy = \frac{dy}{R_2},$$

так что уравнения характеристики примут вид

$$\zeta = 0, \quad \frac{\xi\,dx}{R_1} + \frac{\eta\,dy}{R_2} = 0.$$

Эта прямая и касательная к кривой (C), расположенные в плоскости xy, имеют, соответственно, следующие угловые коэффициенты

m и m': $m = -\frac{R_2}{R_1}\frac{dx}{dy}$, $m' = \frac{dy}{dx}$, откуда $mm' = -\frac{R_2}{R_1}$, а это и есть соотношение, связывающее угловые коэффициенты сопряженных направлений конического сечения $R_2 x^2 + R_1 y^2 = \pm R_1 R_2$.

Заметим, что касательная плоскость вдоль (C) огибается развертывающейся поверхностью; мы получаем отсюда следующий результат. *Если около данной поверхности описана развертывающаяся поверхность, то в каждой точке кривой касания образующая и касательная к этой кривой представляют две сопряженные касательные.*

425. **Геодезическое кручение.** Пусть M есть точка кривой (C), лежащей на поверхности. Проведем через эту точку касательную MT к кривой, нормаль MN к поверхности и нормаль MP к нормальной плоскости MNT, причем направим эту прямую так, чтобы триэдр $MTNP$ имел то же вращение, что и триэдр $Oxyz$ (т. I, n^0 333).

Через точку M' кривой (C), бесконечно близкую к M, проведем нормаль $M'N'$ к поверхности; обозначим через ψ бесконечно малый угол, образованный $M'N'$ с нормальной плоскостью MNT; выражение

$$\lim \frac{\psi}{ds}$$

называется *геодезическим кручением* кривой в точке M и обозначается через $\frac{1}{\gamma}$.

Знак ψ, а, следовательно, и геодезического кручения, можно определить, рассматривая угол ψ как дополнительный к углу, образованному $M'N'$ с нормалью MP к плоскости MNT. Таким образом, кручение будет положительным, если нормаль $M'N'$ поворачивается в положительном направлении вокруг MT, когда M' перемещается в направлении MT. Пусть U, V, W — направляющие косинусы MP, а X, Y, Z — косинусы MN; в таком случае мы имеем, с точностью до бесконечно малых высшего порядка,

$$\psi = \sin\psi = U(X + dX) + \ldots = UdX + VdY + WdZ,$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{UdX + VdY + WdZ}{ds}. \tag{18}$$

Возьмем, далее, MN за ось z, а главные направления за оси x и y; обозначим через ω угол между MT и Mx; тогда $Mxyz$ и $MTNP$ имеют разные вращения и, в силу соотношений предыдущего n^0,

$$U = \sin\omega, \quad V = -\cos\omega, \quad W = 0,$$

$$dX = d\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = -dp = -\frac{dx}{R_1} = -\frac{\cos\omega}{R_1}\,ds$$

$$dY = d\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = -dq = -\frac{dy}{R_2} = -\frac{\sin\omega}{R_2}\,ds.$$

Подставляя эти значения в (18), находим

$$\frac{1}{\gamma}=\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\cos\omega\,\sin\omega. \tag{19}$$

Из этой формулы вытекают следующие заключения:

1°. Если только M не точки округления (в каковом случае все направления суть главные), геодезическое кручение равно нулю только для $\omega=0$ и $\omega=90°$, так что *геодезическое кручение равно нулю для главных направлений и только для них.*

2°. При замене ω на $\omega+90°$, величина $\frac{1}{\gamma}$ меняется только по знаку, так что *если две линии поверхности пересекаются под прямым углом, то они имеют равные по величине и обратные по знаку геодезические кручения.*

Замечание. Можно получить еще одно выражение геодезического кручения, которое мы сразу же и используем; для этого следует, сохранив начало координат в точке M, принять касательную MT за ось x.

Обозначим через η угол, образованный нормалью (переменной) к поверхности с осью y, и предположим, что в точке M нормаль MN образует острый угол с осью Oz; тогда в точке M

$$X=0,\ Y=\cos\eta,\ Z=\sin\eta;\ U=0,\quad V=-\sin\eta,\ W=\cos\eta.$$

Но, во всех точках поверхности, $Y=\cos\eta$ и $X\,dx+Y\,dY+Z\,dZ=0$, поэтому в точке M мы получим

$$dY=-\sin\eta\,d\eta,\ dZ=-\frac{Y\,dY}{Z}=-\cos\eta\,d\eta,$$

что, после подстановки в формулу (18), дает в точке M

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{d\eta}{ds}. \tag{20}$$

426. Теорема. *Если две поверхности S и S' пересекаются под углом θ, постоянным или переменным, и если обозначить через $\frac{1}{\gamma}$ и $\frac{1}{\gamma'}$ геодезические кручения линии пересечения относительно обеих поверхностей, то (с точностью до знака) для перемещения вдоль этой линии справедливо соотношение*

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma'}.$$

Следовательно, в частности, когда две поверхности пересекаются под постоянным углом θ, то геодезическое кручение линии пересечения одинаково по отношению к обеим поверхностям; обратно, в случае равенства кручений поверхности пересекаются под постоянным углом.

Для доказательства этой формулы сохраним обозначения предыдущего замечания, и будем отмечать штрихами величины, относящиеся к S'.

Проведем в точке пересечения M нормали MN и MN', образующие угол θ. Касательную MT возьмем за ось x и проведем ось Mz так, чтобы она составляла острые углы с каждой из только что указанных нормалей. В точке M мы имеем $\eta = \eta' + \theta$ (предполагая $\eta' < \eta$) и в близкой точке

$$\eta = \eta' + \theta - \varepsilon,$$

где ε — положительно, ибо η, η' и Θ суть три угла триэдра и один из них не может превзойти сумму двух остальных. Значит, ε имеет минимум в точке M и его дифференциал равен нулю; дифференцируя на самом деле, мы находим для точки M

$$d\eta = d\eta' + d\theta, \quad \text{откуда} \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\eta}{ds} - \frac{d\eta'}{ds}.$$

В силу формулы (20) это соотношение и выражает теорему.

Вспомним, что линии кривизны характеризуются своим свойством иметь нулевое (стало быть, постоянное) геодезическое кручение. Тогда предыдущая теорема дает следующую теорему:

427. Теорема Joachimsthal'я. *Две поверхности, пересекающиеся по общей линии кривизны, образуют постоянный угол. Обратно, если они пересекаются под постоянным углом, то линия пересечения не может быть линией кривизны одной из поверхностей, не будучи ею для другой.*

В частности, в виду того, что всякая плоская линия есть линия кривизны своей плоскости, *если линия кривизны оказывается плоской, то ее плоскость пересекает поверхность под постоянным углом, и обратно.*

428. Теорема Dupin'а. Три семейства поверхностей

$$F_1(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F_2(x, y, z, \beta) = 0, \quad F_3(x, y, z, \gamma) = 0$$

образуют *трижды ортогональную систему*, если через каждую точку проходит одна из поверхностей каждого семейства и каждые две поверхности из различных семейств пересекаются под прямым углом.

Теорема. *Поверхности, принадлежащие разным семействам трижды ортогональной системы, взаимно пересекаются по их линиям кривизны* (Dupin).

Пусть S_1, S_2, S_3 будут поверхности, пересекающиеся в точке M по линиям $C_{2,3}$, $C_{3,1}$ и $C_{1,2}$. Геодезическое кручение $C_{2,3}$ одинаково на S_2 и S_3 (n⁰ 426); мы обозначим его через $1:\gamma_{2,3}$, а через $1:\gamma_{3,1}$ и $1:\gamma_{1,2}$ — два других аналогичных кручения. Так как $C_{2,3}$ и $C_{3,1}$ пересекаются на S_3 в точке M под прямым углом, то в этой точке (n⁰ 425, 2⁰)

$$\frac{1}{\gamma_{2,3}} + \frac{1}{\gamma_{3,1}} = 0; \text{ точно так же } \frac{1}{\gamma_{3,1}} + \frac{1}{\gamma_{1,2}} = \frac{1}{\gamma_{1,2}} + \frac{1}{\gamma_{2,3}} = 0,$$

что возможно только при условии, что каждое из трех кручений в отдельности равно нулю. Поэтому линии пересечения действительно суть линии кривизны поверхностей (n^0 425, 1^0).

Софокусные поверхности второго порядка (quadriques homofocales). Через каждую точку x, y, z можно провести три поверхности системы:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1 \quad (a^2>b^2>c^2), \tag{21}$$

ибо соответствующие значения параметра λ суть корни этого уравнения, кубического относительно λ. Далее, эти три корня вещественны и лежат, соответственно, в промежутках $(-\infty, c^2)$, (c^2, b^2) и (b^2, a^2), в чем можно убедиться подставляя $\lambda=-\infty$, $c^2-\varepsilon$, $c^2+\varepsilon$, $b^2-\varepsilon$, $b^2+\varepsilon$, $a^2-\varepsilon$. Следовательно, через каждую точку, действительно проходят три поверхности системы: эллипсоид($c^2>\lambda$), однополый гиперболоид ($b^2>\lambda>c^2$) и двуполый гиперболоид ($a^2>\lambda>b^2$).

Эти три семейства образуют трижды ортогональную систему.

Действительно, нормали к двум поверхностям (λ) и (λ') в общей точке имеют следующие коэффициенты направления:

$$\frac{x}{a^2-\lambda},\quad \frac{y}{b^2-\lambda},\quad \frac{z}{c^2-\lambda};\qquad \frac{x}{a^2-\lambda'},\ \ldots$$

и условие

$$\frac{x^2}{(a^2-\lambda)(a^2-\lambda')}+\frac{y^2}{(b^2-\lambda)(b^2-\lambda')}+\frac{z^2}{(c^2-\lambda)(c^2-\lambda')}=0$$

выполняется, ибо представляет собой результат почленного вычитания уравнений поверхностей (λ) и (λ')

Отсюда легко найти линии кривизны эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

и убедиться в том, что они являются алгебраическими кривыми. Именно это суть линии пересечения эллипсоида с двумя семействами гиперболоидов, однополых и двуполых, уравнения которых содержатся в формуле (21).

429. Обобщение формул на случай параметрического задания поверхности. Предположим, что координаты x, y, z точек поверхности выражены *непрерывными и дифференцируемыми* функциями двух независимых параметров u и v. Мы будем отмечать их частные производные индексами, например

$$\frac{\partial x}{\partial u}=x_1,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=x_2,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=x_{1,1},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=x_{1,2}=x_{2,1},\ \ldots$$

Введем также следующие параметры (распространяя суммы Σ на координаты x, y, z):

$$E=\Sigma x_1^2;\quad F=\Sigma x_1x_2;\quad G=\Sigma x_2^2;$$

$$A=\Sigma(y_1z_2-y_2z_1);\quad B=\Sigma(z_1x_2-z_2x_1);\quad C=\Sigma(x_1y_2-x_2y_1);$$

$$H^2=A^2+B^2+C^2=EG-F^2;$$

$$L=\frac{Ax_{1,1}+By_{1,1}+Cz_{1,1}}{H};\quad M=\frac{Ax_{1,2}+By_{1,2}+Cz_{1,2}}{H};$$

$$N=\frac{Ax_{2,2}+By_{2,2}+Cz_{2,2}}{H};$$

или, в форме определителей:

$$HL=\begin{vmatrix} x_{1,1} & y_{1,1} & z_{1,1}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix};\ HM=\begin{vmatrix} x_{1,2} & y_{1,2} & z_{1,2}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix};\ HN=\begin{vmatrix} x_{2,2} & y_{2,2} & z_{2,2}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Дифференциал длины дуги кривой на поверхности в этих обозначениях есть

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2.$$

Направляющие косинусы нормали к поверхности суть:

$$X=\frac{A}{H},\quad Y=\frac{B}{H},\quad Z=\frac{C}{H}$$

и, при условии направлять нормаль как в n⁰ 407, нужно приписать H такой же знак, как и C.

Нормальная кривизна кривой на поверхности, если главная нормаль этой кривой составляет угол θ с нормалью к поверхности, находится по формуле (1) n⁰ 407. Значит,

$$\frac{\cos\theta}{R}=\frac{X\,d^2x+Y\,d^2y+Z\,d^2z}{ds^2}=\frac{A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z}{H\,ds^2},$$

или, если заменить d^2x, d^2y, d^2z их выражениями через du, dv, d^2u и d^2v и заметить, что члены, содержащие d^2u и d^2v, исчезают,

$$\frac{\cos\theta}{R}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{ds^2}.$$

Кривизна нормального сечения, направление которого определяется отношением $du:dv$, может быть найдена по этой формуле, если положить $\cos\theta=1$ и заменить ds^2 его выражением. При тех же соглашениях относительно знака, что и в n⁰ 414, получим

$$\frac{1}{R}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}.$$

Уравнение асимптотических направлений (*или дифференциальное уравнение асимптотических линий*) получим, приравняв кривизну нулю, что дает

$$L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0.$$

Обозначим, для краткости, кривизну $1:R$ через ρ; тогда предпоследнее уравнение, по освобождении от знаменателя, дает

$$(L-\rho E)du^2+2(M-\rho F)du\,dv+(N-\rho G)dv^2=0.$$

Для получения главных кривизн (максимума и минимума ρ) следует, как и в n⁰ 416, приравнять нулю частные производные по du и dv от левой части этого однородного уравнения, что дает

$$(L-\rho E)du+(M-\rho F)dv=(M-\rho F)du+(N-\rho G)dv=0.$$

Исключение ρ из этих уравнений приводит к *уравнению главных направлений или уравнению линий кривизны*:

$$\frac{L\,du+M\,dv}{M\,du+N\,dv}=\frac{E\,du+F\,dv}{F\,du+G\,dv},$$

или, в форме определителя

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0.$$

Напротив, исключение $du:dv$ приводит к квадратному уравнению относительно ρ, корни которого суть главные кривизны ρ_1 и ρ_2; именно

$$(M-\rho F)^2-(L-\rho E)(N-\rho G)=0,$$

откуда непосредственно следует выражение полной кривизны:

$$\rho_1\rho_2=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

Теорема Gauss'a. *Полная кривизна выражается через параметры* E, F и G *и их частные производные первых двух порядков* (*так что она зависит только от выражения дифференциала дуги*).

В силу предыдущего выражения полной кривизны и соотношения $H^2=EG-F^2$, достаточно показать, что величина $H^2(M^2-LN)$ выражается через E, F, G и их производные.

Заменим поэтому HL, HM, HN их вышеуказанными значениями, представленными в форме определителей, и напишем произведение, пользуясь правилом перемножения определителей. Если еще принять во внимание выражения E, F и G, то величина $H^2(M^2-LN)$ принимает вид

$$\begin{vmatrix} \Sigma x_{1,2}^2 & \Sigma x_1x_{1,2} & \Sigma x_2x_{1,2} \\ \Sigma x_1x_{1,2} & E & F \\ \Sigma x_2x_{1,2} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Sigma x_{1,1}x_{2,2} & \Sigma x_1x_{2,2} & \Sigma x_2x_{2,2} \\ \Sigma x_1\,x_{1,1} & E & F \\ \Sigma x_2\,x_{1,1} & F & G \end{vmatrix};$$

если вычесть из обоих определителей одну и ту же величину $(EG-F^2)\,\Sigma x_{2,1}\,x_{2,2}$, то разность не изменится и примет вид

$$\begin{vmatrix} \Sigma(x_{1,2}^2-x_{1,1}\,x_{2,2}) & \Sigma x_1\,x_{1,2} & \Sigma x_2\,x_{1,2} \\ \Sigma x_1\,x_{1,2} & E & F \\ \Sigma x_2\,x_{1,2} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \Sigma x_1\,x_{2,2} & \Sigma x_2\,x_{2,2} \\ \Sigma x_1\,x_{1,1} & E & F \\ \Sigma x_2\,x_{1,1} & F & G \end{vmatrix}$$

Для завершения доказательства достаточно непосредственным вычислением проверить, что четыре суммы $\Sigma x_1 x_{1.1}$, $\Sigma x_1 x_{1,2}$, $\Sigma x_2 x_{1,2}$, $\Sigma x_2 x_{2,2}$ представляют половины первых частных производных E и G по u и v и что остальные три суммы

$$\Sigma x_1 x_{2,2},\ \Sigma x_2 x_{1,1},\ \Sigma(x_{1,2}^2 - x_{1,1} x_{2,2})$$

соответственно равны:

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

430. Налагающиеся поверхности. Теорема Gauss'а. Две поверхности S и S_1 *налагаются* одна на другую, если между их точками можно установить такое соответствие, чтобы дуги двух соответствующих кривых на обеих поверхностях имели одинаковые длины.

Рассмотрим параметрическое представление поверхности S:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u\, v);$$

и пусть x_1, y_1, z_1 будут координатами точки поверхности S_1, соответствующей точке x, y, z поверхности S.

Имеем

$$x_1 = x_1(u, v),\ y_1 = y_1(u, v),\ z_1 = z_1(u, v).$$

Для того, чтобы дуги двух соответствующих кривых имели одинаковые длины, необходимо и достаточно, чтобы дифференциалы дуг ds и ds_1 имели одинаковые выражения через du и dv на обеих поверхностях, т. е. чтобы

$$ds^2 = ds_1^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

или, чтобы параметры E, F и G были одинаковы для обеих поверхностей.

Теорема Gauss'а, приведенная в конце предыдущего n^0, имеет поэтому следующее следствие:

Теорема. *Если две поверхности налагаются друг на друга, то в соответствующих точках полная кривизна обеих поверхностей одинакова* (Gauss).

Например, так как плоскость имеет кривизну, постоянно равную нулю, то всякая поверхность, налагающаяся на плоскость, должна обладать тем же свойством, так что такая поверхность должна быть развертывающейся, как мы это уже доказали выше (n^0 399).

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ.

1. Сумма кривизн поверхности по двум сопряженным направлениям есть величина, в каждой точке постоянная и равная сумме главных кривизн в той же точке.

2. Если поверхность есть огибающая семейства сфер, зависящего от одного параметра, то характеристики образуют одно семейство круговых линий кривизны. Обратно, поверхность, имеющая семейство круговых линий кривизны, есть огибающая сфер.

3. Если все линии кривизны поверхности являются окружностями, то поверхность есть огибающая семейства сфер, касающихся трех данных сфер (циклида Dupin'а).

4. Главными центрами кривизны поверхности вращения являются центр кривизны меридиана и точка встречи нормали с осью вращения. Следовательно, единственной минимальной поверхностью вращения является та, которая образована вращением ценной линии вокруг ее основания (катеноид).

5. Единственной минимальной линейчатой поверхностью является геликоид с направляющей плоскостью (поверхность винта с четыреугольной нарезкой), иначе говоря, геометрическое место главных нормалей круговой винтовой линии (Catalan).

6. Поверхность вращения с постоянной отрицательной полной кривизной есть псевдосфера; так называется поверхность, образованная вращением, вокруг основания цепной линии, той из ее эвольвент, точка возврата которой лежит в вершине цепной линии (трактриса).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IX. Начала вариационного исчисления и исчисления конечных разностей.

Глава X. Дополнительные геометрические приложения.