МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ МОЛДАВСКОЙ ССР
Кишиневский политехнический институт им. С. Лазо

И. И. Валуцэ

ОТОБРАЖЕНИЯ
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ШТИИНЦА" • КИШИНЕВ • 1976

УДК 519-48

Понятие "отображение" - одно из основных понятий математики - играет большую роль в современной алгебре и многих смежных дисциплинах, в которых алгебраический аппарат находит применение.

В книге изучаются отображения множеств в различных алгебраических аспектах: унарные алгебры, полугруппы эндоморфизмов и алгебры эндоморфизмов универсальных алгебр. Первая глава и часть второй главы вводного характера. Здесь приводятся необходимые для дальнейшего понятия и факты из теории множеств и общей алгебры. При этом исходным для определения алгебраических понятий является понятие отношения и их согласованности. Для некоторых читателей эта часть книги представит определенный самостоятельный интерес.

Монография рассчитана на аспирантов и студентов, специализирующихся по алгебре, может быть полезна и для специалистов смежных математических и прикладных направлений (теория автоматов, математическая лингвистика, теория систем и др.), желающих ознакомиться с основными алгебраическими понятиями.

 В $\frac{20203 - 164}{М755(12) - 76}$ 31-76

Иван Иванович Валуцэ

ОТОБРАЖЕНИЯ.
Алгебраические аспекты теории

Утверждено к изданию
Ученым советом Кишиневского политехнического
института им. С.Лазо

Редактор Р.М.Берман. Художник А.И.Бургаз. Художественный редактор В.А.Чупин. Технический редактор А.Г.Киселица. Корректор Н.В.Дегтярь. Оператор-наборщик Р.Н.Литвинчук

Издательство "Штиинца". 277028. Кишинев, ул.Академическая, 3.

Подписано в печать 30.VIII 1976 г. АБ07143. Формат 60 х 90 1/16. Бумага офсетн. № 1. Усл.-печ.л.8,75.Уч.-изд.л.8,02.Тираж 1815. Цена 80 коп. Заказ 444

Типография изд-ва "Штиинца", 277004.
Кишинев, ул.Берзарина, 10

ВВЕДЕНИЕ

Понятие отображения является настолько общим, что, вообще говоря, любое алгебраическое построение в явной или неявной форме основывается на понятии отображения. Поэтому любая работа по алгебре в той или иной степени посвящена изучению отображений множеств. Название данной книги не следует рассматривать как претензию на создание какой-то "генеральной" теории отображений, а только как указание на то, что в ней изучаются некоторые алгебраические объекты, непосредственно связанные с понятием отображения. Такими объектами в данном случае являются унарные алгебры и полугруппы, и алгебры эндоморфизмов универсальных алгебр. Унарные алгебры изучаются, с одной стороны, в общей алгебре, где часто выступают как особые примеры универсальных алгебр, с другой стороны, в теории абстрактных автоматов, а изучение эндоморфизмов относится в равной степени к общей алгебре и к общей теории полугрупп.

В литературе имеется ряд хорошо известных руководств, в которых изложены основные вопросы алгебраической теории отображений. Отметим, например, работы [I - 4] по общей алгебре, [5, 6] по теории полугрупп и [7] по применению алгебраического аппарата в кибернетике. Предлагаемая вниманию читателя книга ни в коей мере не рассчитана заменить существующую литературу, она задумана лишь как дополнение к имеющимся исследованиям. С целью создания некоторых удобств для читателя дается (иногда беглое) изложение основных теоретико-множественных и алгебраических понятий, необходимых для прочтения остального текста. Этот материал (глава I и часть главы II), который может оказаться полезным для начинающего читателя, специалистом может быть упущен как знакомый из других источников. Исключение, быть может, составляет свойство канторовости бинарных отношений, которое (насколько автору известно) раньше в литературе не встречалось, и понятие s-согласованности отношений, которое носит достаточно общий характер и посредством которого можно определить многие основные понятия алгебры, такие, как само понятие алгебраической операции, подалгебры, гомоморфизма, конгруэнции, перестановочности операций, сократимости операций и др.

В главе II рассматриваются многообразия унарных алгебр. Различные вопросы унарных алгебр рассматривались в книгах [I, 3], в статьях [8, I0, I3 - I5] и др. В книге [I] и других работах [9, II, I2] рассматривались некоторые частные виды многообразий унарных алгебр. В продолжение этих исследований во второй главе настоящей книги дается описание структуры всех подмногообразий произвольного многообразия унарных алгебр. Для этого необходимо было ввести понятие отмеченной конгруэнции и отмеченной полугруппы.

Последующие главы посвящены изучению полных и частичных эндоморфизмов свободных универсальных алгебр.

При изучении произвольных алгебраических систем естественным образом возникают различного рода новые, так называемые производные системы. Среди них имеются и такие, элементы которых являются отображениями данной алгебры в себя. Сюда относятся группы автоморфизмов, полугруппы полных и частичных эндоморфизмов, различные алгебры эндоморфизмов (например, кольца эндоморфизмов абелевых групп, кольца преобразований векторных пространств и др.). Наряду с группами автоморфизмов алгебраических систем, которые изучены довольно подробно, внимание привлекают и другие множества отображений, в частности полугруппы полных и частичных эндоморфизмов.

Как известно, в общей алгебре особое место занимают свободные универсальные алгебры - каждая алгебра является фактор-алгеброй некоторой свободной алгебры. Поэтому как и в случае групп автоморфизмов естественно поставить вопрос об изучении полугрупп эндоморфизмов свободных универсальных алгебр.

Главы III и IУ посвящены изучению структур идеалов полугрупп полных и частичных эндоморфизмов свободных универсальных алгебр. При этом используется один общий подход, который частично встречался и раньше в литературе (отметим, например, работы [I6 - I9]). Общая схема применяемого здесь метода изложена в добавлении 1.

В главе III подробно изучаются и описываются структуры всех левых, правых и двусторонних идеалов полугруппы всех полных эндоморфизмов свободных универсальных алгебр. Как здесь, так и в дальнейшем полезными оказались понятия "насыщенных" и "разреженных" левых идеалов и обобщение на левые идеалы левого отношения Грина. При помощи структур насыщенных и разреженных идеалов дана характеризация циклических свободных алгебр и таких свободных алгебр достаточно большой мощности, в которых пересечение циклических подалгебр является циклической подалгеброй.

В главе IУ изучаются идеалы полугрупп частичных эндоморфизмов универсальных алгебр. Надо отметить, что как в общей алгебре, так и в теории полугрупп мало уделяется внимания полугруппам частичных эндоморфизмов универсальных алгебр. Однако эти полугруппы оказываются полезными в изучении основных структур. В этой главе установлено, в частности, одно необходимое условие для того, чтобы любая подалгебра данной свободной алгебры была свободной. Именно для этого необходимо, чтобы структура всех двусторонних идеалов полугруппы всех частичных эндоморфизмов данной алгебры была цепью.

В алгебраической литературе неоднократно рассматривался вопрос о перенесении операций основной алгебры над ее эндоморфизмами [4,20,21]. Как известно, этот вопрос связан о перестановочностью операций данной алгебры. Однако в случае свободных алгебр, следуя [22], можно определить все операции алгебры над ее эндоморфизмами так, что результат является снова эндоморфизмом. Тогда отдельные множества эндоморфизмов могут быть превращены в алгебры, сигнатура которых помимо сигнатурных операций основной алгебры содержит еще умножение эндоморфизмов. В главе У изучаются структуры идеалов одной из таких алгебр – алгебры ограниченных эндоморфизмов.

В добавлении I, как уже отмечалось, излагается схема общего подхода изучения структур левых и двусторонних идеалов различных полугрупп эндоморфизмов (и даже соответствий) моделей, который в главах Ш и IУ применялся к случаю полных и частичных эндоморфизмов свободных универсальных алгебр.

В добавлении 2 изучаются полиэндоморфизмы универсальных алгебр и дается формула их приведения к эндоморфизмам для случая некоторых поляризованных (в смысле А.И.Мальцева [23]) алгебр. Для случая групп подобные результаты получены в [24].

Ссылки делаются с указанием пункта, в котором содержится соответствующее предложение или определение. Если пункт принадлежит этой же главе, то указывается его номер: например, см. п.3.10. Если пункт принадлежит другой главе, то в его указании фигурирует группа из трех чисел, например, "см.п. I.3.IO" означает "смотри пункт 3.IO. из главы I".

Материал настоящей монографии докладывался в разное время на всесоюзных алгебраических коллоквиумах, на коллоквиуме по универсальной алгебре в Сегеде (Венгрия) в августе 1975 г. и излагался в специальных курсах в Кишиневском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. В.И.Ленина и Кишиневском политехническом институте им.С.Лазо.

Автор благодарит своих коллег - членов кафедры высшей математики Кишиневского политехнического института им.С.Лазо и кафедры алгебры Кишиневского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета им.В.И.Ленина, сотрудников Института математики с вычислительным центром АН МССР, особенно В.А.Андрунакиевича, В.Д.Белоусова, А.В.Кузнецова, Ю.М.Рябухина, а также Б.Чаканя из Сегедского университета за поддержку в работе, дискуссии и полезные замечания.

Автор с большой признательностью вспоминает доброту и отзывчивость своего учителя Александра Геннадиевича Куроша, который всегда был внимательным и оказывал умелую помощь в работе.

Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

§ I. Множества и операции над ними

<u>I.I. Основные термины и символика.</u> Приведем необходимые для дальнейшего некоторые понятия и факты из теории множеств. Понятия элемента и множества не будут как-то определяться, им придается обычный интуитивный смысл - множество понимается как совокупность, набор, семейство всех своих элементов, которые могут иметь самую различную природу, в частности, в свою очередь они могут быть снова множествами. Также интуитивно будем понимать и отношение принадлежности, и если элемент a принадлежит множеству A, то будем писать $a \in A$. Запись $A = \{a, b, c, \ldots\}$ означает, что множеству A принадлежат все указанные в фигурных скобках элементы $a, b, c, \ldots$ и только они. Если множество A состоит из всех элементов, обладающих некоторым свойством S, то будем писать $A = \{x \mid x$ обладает свойством $S\}$, или $A = \{x \mid S(x)\}$. Когда каждый элемент множества B принадлежит множеству A, то говорят, что множество B содержится, или включается в множество A; символически пишут $B \subseteq A$ и в таком случае множество B называется подмножеством множества A. Если при этом в множестве A имеется, по крайней мере, один элемент, не принадлежащий множеству B, то включение называется строгим, и будем писать $B \subset A$. Среди всех подмножеств произвольного множества A имеются подмножества, названные несобственными, которые, в определенном смысле, занимают экстремальные положения. Это само множество A и так называемое пустое подмножество, т.е. подмножество, не содержащее ни одного элемента. Пустые подмножества любых множеств совпадают между собой и совпадают с пустым множеством - множество, которое не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначим символом $\varnothing$.

Приведем некоторые принятые логические обозначения, которые в дальнейшем будут иногда употребляться. Знак импликации $\Longrightarrow$ связывает два высказывания $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ и означает логическое следствие, импликация правого высказывания $\mathcal{B}$ из левого высказывания $\mathscr{A}$, т.е. если истинно высказывание $\mathscr{A}$, то истинно и высказывание $\mathscr{B}$. Символ $\&$ (читается "и") обозначает конъюнкцию $\mathscr{A} \& \mathscr{B}$ двух высказываний $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, т.е. высказывание $\mathscr{A} \& \mathscr{B}$ истинно тогда и только тогда, когда истинны одновременно $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Запись $\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{B}$ означает равносильность, эквивалентность высказываний $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, т.е. конъюнкцию двух импликаций $(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \& (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A})$. Слово "или" заменяется символом V, так что высказывание $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний $\mathscr{A}$ или $\mathscr{B}$. Наконец, символы $\exists$ и $\forall$ – кванторы существования и всеобщности, означают, соответственно, "существует" и "для всех", так $\exists x\, S(x)$ и $\forall x\, S(x)$ означают, "существует в множестве значений переменной x, иногда для уточнения этого факта пишут $x \in A$, такое значение x, для которого имеет место $S(x)$" и "для всех (таких же) x имеет место $S(x)$". Например, если A и B подмножества некоторого множества, то $B \subseteq A \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall x (x \in B \Rightarrow x \in A)$. Введем еще операцию отрицания, которая отмечается знаком $\neg$, поставленным перед объектом, который отрицается черточкой над ним или его перечеркиванием. Так, $\bar{\in}$ или $\notin$ означает не принадлежит, $\nsubseteq$, $\neq$ означают, соответственно, не содержится, не равно, $\neg\mathscr{A}$ или $\bar{\mathscr{A}}$ – высказывание, противоположное высказыванию $\mathscr{A}$.

Остановимся на некоторых операциях над множествами. Под операцией над множествами будем здесь понимать закон, по которому некоторым совокупностям множеств сопоставляется каждой из них вполне определенное множество. При этом, как правило, будем ограничиваться изучением таких множеств, которые могут быть рассмотрены как подмножества некоторого фиксированного, не излишне огромного, множества, которое для удобства иногда называют универсумом.

<u>I.2. Булеан множества</u>. Пусть совокупность, о которой шла речь в конце предыдущего абзаца, состоит из одного единственного множества A. Под булеаном множества A понимается множество $\mathscr{B}(A)$, элементами которого являются все подмножества A, $\mathscr{B}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. Коротко говорят, что $\mathscr{B}(A)$ есть множество всех подмножеств множества A. Операцию, которая каждому множеству сопоставляет его булеан, будем называть <u>взятием булеана</u> данного множества. Такого рода операции, которые одному объекту сопоставляют некоторый единственный объект, называются у н а р н ы м и операциями.

Легко видеть, что $\mathscr{B}(\varnothing)$ состоит только из одного элемента – само пустое множество, причем пустое множество является единственным множеством, для которого булеан состоит только из одного элемента. Если A состоит из одного элемента $A=\{a\}$, то $\mathscr{B}(A)$ содержит два элемента, именно $\mathscr{B}(A)=\{\varnothing, A\}$. Вообще, если A является конечным и содержит n элементов, то $\mathscr{B}(A)$ будет содержать 2^n элементов. В самом деле, подмножеств множества A, состоящего из n элементов, будет столько, сколько сочетаний имеется из n элементов по k, где $0 \leq k \leq n$, а это число, как известно, будет $C_0^n + C_1^n + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$. Например, если A содержит три элемента $A=\{a, b, c\}$, то $\mathscr{B}(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$, содержит $2^3 = 8$ элементов.

Операцию взятия булеана можно повторять произвольное число раз. Следовательно, исходя из множества A можем получить последовательность множеств $\mathscr{B}(A), \mathscr{B}(\mathscr{B}(A)), \mathscr{B}(\mathscr{B}(\mathscr{B}(A))), \ldots$ Множества этой последовательности очень богаты элементами. Даже в случае, когда множество A пусто, последовательность $\mathscr{B}(\varnothing), \mathscr{B}(\mathscr{B}(\varnothing)), \mathscr{B}(\mathscr{B}(\mathscr{B}(\varnothing))), \ldots$ будет содержать сколько угодно большие конечные множества.

<u>I.3. Разбиения и фактор-множества.</u> Любой элемент множества $\mathscr{B}(\mathscr{B}(A))$ называется системой над A, т.е. системой над A является любое семейство $\mathscr{P}$ подмножеств множества A. Систему $\mathscr{P}$ над A будем называть покрывающей A, если каждый элемент $a \in A$ принадлежит некоторому члену системы $\mathscr{P}$. Система $\mathscr{D}$ называется дизъюнктивной, если для каждого $a \in A$ существует не более одного члена системы $\mathscr{D}$, содержащего a. Покрывающая и дизъюнктивная системы называются разбиением множества A.

Пусть I некоторое множество, элементы которого будем называть индексами. Для облегчения некоторых записей условимся говорить, что множество A индексировано при помощи I и писать $A = \{a_i \mid i \in I\}$, если каждому элементу из A приписан некоторый индекс $i \in I$, при этом использованы все $i \in I$.

Если $\mathscr{R}$ некоторое разбиение множества A, $\mathscr{R} = \{\mathscr{X}_i, i \in I\}$, то каждый член $\mathscr{X}_i$ называется классом разбиения $\mathscr{R}$, а множество всех классов называется фактор-множеством множества A по разбиению $\mathscr{R}$ и обозначается символом $A/\mathscr{R}$.

<u>I.4. Объединение множеств</u>. Пусть дано некоторое семейство множеств A_i, $i \in I$, где I – некоторое множество индексов. Множество всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из заданных множеств, называется объединением множеств A_i, обозначается $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, т.е.

Зак. 444

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{a \mid \exists i (a \in A_i)\}.$$

Если данное семейство является конечным и состоит из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т.е. $I=\{1,2,\ldots,n\}$, то будем писать также $\bigcup_{i=1} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Легко видеть, что объединение множеств обладает свойствами:

$A \cup B = B \cup A$ – коммутативность объединения;

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – ассоциативность объединения.

Эти свойства остаются верными для любого семейства множеств. Дальше: $\varnothing \cup A = A$ – для любого A. Если $B \subseteq A$, то $A \cup B = A$. Легко видеть, что система $\mathscr{P}=\{A_i \mid i \in I\}$ над A будет покрывающей, если $\bigcup_{i=1} A_i = A$.

Беря объединение $\mathscr{B}(\varnothing) \cup \mathscr{B}(\mathscr{B}(\varnothing)) \cup \mathscr{B}(\mathscr{B}(\mathscr{B}(\varnothing))) \cup \ldots$, получим бесконечное множество M. Для него опять можно составлять булеан $\mathscr{B}(M)$ и, продолжая этот процесс, получить новые, в определенном смысле сколь угодно большие, множества.

I.6. Пересечение множеств. Для множеств данного семейства $A_i, i \in I$ пересечение определяется как множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих всем множествам A_i, и обозначается символом $\bigcap_{i\in I} A_i$, т.е.

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{a \mid a \in A_i \quad \text{для всех} \quad i \in I\}.$$

Для конечного случая и здесь пишут

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

Пересечение множеств обладает следующими, легко проверяемыми, свойствами: $A \cap B = B \cap A$ – коммутативность пересечения; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – ассоциативность пересечения; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность пересечения относительно объединения; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения. Эти свойства должным образом могут быть обобщены для любых семейств множеств.

Дальше: $\varnothing \cap A = \varnothing$ – для любого множества; $A \cap B = B$, если $B \subseteq A$; $A \cup (A \cap B) = A$ – закон поглощения.

Система $\mathscr{P}=\{A_i \mid i \in I\}$ будет дизъюнктивной, если подмножества A_i попарно не пересекаются, т.е. для любых $i \neq j$, $i,j \in I$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.

I.6. Разность и дополнение множеств. Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество всех элементов из A, не принадлежащих B, т.е.

$$A \setminus B = \{a \mid a \in A \,\&\, a \notin B\}.$$

Если $B \subseteq A$, то разность $A \setminus B$ называется дополнением множества B в A. Если множество $\mathcal{U}$ фиксировано, то дополнение подмножества $A \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ в $\mathcal{U}$ обозначается символом $\bar{A}$.

Отметим, что для любых $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ и } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Отсюда следует принцип двойственности:

$$\overline{W(A, B, \ldots)} = \overline{W}(\bar{A}, \bar{B}, \ldots),$$

где W – некоторое выражение относительно множеств $A, B, \ldots$, в котором участвуют символы $\cup$ и $\cap$, а $\overline{W}$ – выражение, получающееся из W заменой символа $\cup$ на $\cap$ и символа $\cap$ на $\cup$.

I.7. Декартовое произведение множеств. Пусть дано семейство $\{A_i \mid i \in I\}$, где I – произвольное множество. Введем в рассмотрение "строчку мест" $(\ldots, \sqcup, \ldots, \sqcup, \ldots)$ так, что каждому индексу $i \in I$ сопоставляется свое место $\sqcup$ в этой строчке. Теперь заполняем эти места элементами из множеств A_i, именно, на i-том месте ставим некоторый элемент a_i из множества A_i. В итоге получаем строчку вида $(\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots)$, где $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j, \ldots$. Множество всех таких строчек обозначим через $\prod_{i \in I} A_i$ и назовем декартовым произведением множеств A_i. Если, как это обычно делается, называть строчку $(\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots)$ функцией, определенной на I со значениями из соответствующих A_i, то декартовое произведение $\prod_{i \in I} A_i$ будет состоять из множества всех таким образом определенных функций.

В случае когда множество I конечно $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, декартовое произведение обозначается через

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

и состоит из всех конечных строчек $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где на первом месте стоит элемент из A_1, на втором – из A_2 и т.д. В частности, если $I = \{1, 2\}$, то получаем произведение двух множеств $A_1 \times A_2$, которое состоит из множества всех пар (a_1, a_2), где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. Эта конструкция обобщает метод обычных систем координат. Если на одной "оси" расположить элементы множества A_1, на другой – множества A_2, то "точки плоскости" будут определяться парами (a_1, a_2), где a_1 – некоторый элемент из A_1, a_2 – из A_2. Если множества A_i, $i \in I$ равны между собой и совпадают с некоторым множеством A, то прямое произведение $\prod_{i \in I} A_i$ называется декартовой степенью множества A и обозначается A^I.

Таким образом, множество всех функций, определенных на множестве I со значениями в множестве A, совпадает с декартовой степенью A^I.

Если множество индексов I состоит из единственного элемента, например $I=\{1\}$, то и совокупность A_i, $i\in I$ состоит из единственного множества $A_1=A$. Тогда можно считать, что декартовое произведение $\prod_{i\in I} A_i$ совпадает с декартовой степенью A^I. Так как в этом случае рассмотренная строчка мест ($\sqcup$) содержит только одно место, то $\prod_{i\in I} A_i$ и A^I совпадают с множеством всех строчек (a), где a - произвольный элемент из A. Следовательно, произведение $\prod_{i\in I} A_i$ и степень A^I можно отождествить с множеством A, т.е. $A^{\{1\}}=\prod_{i\in I} A_i=A$. Если множество I пусто, то рассмотренная выше строчка мест является пустой ( ). Так как здесь ничего нельзя подставлять, то в этом случае произведение $\prod_{i\in\emptyset} A_i$ и степень $A^{\emptyset}$ будут состоять только из пустой строчки, т.е. из одного элемента. Если обозначить пустую строчку некоторым символом, например 1, то можно писать $\prod_{i\in\emptyset} A_i=A^{\emptyset}=1$.

Заметим, что если дано некоторое индексированное семейство A_i, $i\in I$, то построение элемента их произведения $\prod_{i\in I} A_i$ равносильно возможности "выбора" по одному элементу из каждого A_i. Возможность такого выбора постулируется в теории множеств аксиомой выбора (аксиома Цермело), которую, следовательно, можно сформулировать следующим образом:

Для любого множества индексов I и любых непустых множеств A_i, $i\in I$, декартовое произведение $\prod_{i\in I} A_i$ не пусто.

§ 2. Отображения

2.1. Полные отображения. Пусть даны два непустых множества A и B. Если каждому элементу множества A сопоставить по определенному правилу, закону единственный элемент множества B, то мы скажем, что определено отображение множества A в B. Иногда такие отображения, которые определены для каждого элемента A, называются полными в отличие от частичных отображений, которые будут рассмотрены ниже. Отображения будем обозначать, как правило, малыми греческими буквами, и если α - отображение множества A в B, то будем писать $\alpha: A\to B$, или $A\xrightarrow{\alpha}B$. Если при отображении α элементу $a\in A$ соответствует $b\in B$, то будем писать $a\alpha=b$, при этом b называется образом или значением элемента a

при отображении α. Если $A_1 \subseteq A$, то множество образов всех элементов $a \in A_1$ обозначается через $A_1\alpha$ и называется образом подмножества A_1 при отображении α. В частности, $A\alpha$ является образом множества A при отображении α, или множеством значений отображения α. Если $A\alpha = B$, то будем говорить, что α есть отображение A на B. Для каждого $b \in B$ обозначим через $b\alpha^{-1} = \mathcal{X}_b$ множество всех $a \in A$, для которых $a\alpha = b$. Заметим, что подмножество $b\alpha^{-1}$ может быть и пустым. Подмножество $b\alpha^{-1}$ называется полным прообразом элемента $b \in B$. Если $B_1 \subseteq B$, то $B_1\alpha^{-1} = \bigcup\limits_{b \in B_1} b\alpha^{-1}$ называется полным прообразом подмножества B_1. Два отображения $\alpha : A \to B$ и $\beta : C \to D$ называются равными, если $A = C$, $B = D$ и для всех $a \in A$ $a\alpha = a\beta$. Таким образом, строго говоря, под отображением следует понимать тройку (A, B, α), где A, B - множества, первое - множество, на котором определено отображение; второе - множество, которому принадлежат образы, и α - правило, закон, дающий соответствие.

Если не только $a\alpha$, но и $b\alpha^{-1}$ для любого $b \in B$ состоит в точности из одного элемента, то отображение α называется взаимно-однозначным соответствием множества A на B. Если A состоит из одного элемента $A = \{a\}$, то скажем, что каждое отображение $\alpha : \{a\} \to B$ отмечает некоторый элемент $b \in B$, именно тот, для которого $a\alpha = b$.

2.2. Произведение отображений. Пусть $\alpha : A \to B$ и $\beta : B \to C$. Тогда отображение $\gamma : A \to C$, для которого $a\gamma = (a\alpha)\beta$, где a - любой элемент из A, называется произведением отображений α и β, в символах $\gamma = \alpha\beta$. Можно сказать, что произведение двух отображений - это отображение, которое получится если последовательно выполнить данные отображения.

Произведение отображений обладает ассоциативным законом $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$. В самом деле, пусть $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$, $\gamma : C \to D$, тогда для любого $a \in A$ имеем

$$a((\alpha\beta)\gamma) = (a(\alpha\beta))\gamma = ((a\alpha)\beta)\gamma = (a\alpha)(\beta\gamma) = a(\alpha(\beta\gamma)),$$

откуда $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$. Если множество $A = B = C$, т.е. рассматриваются отображения множества A в себя, то произведение отображений всегда выполнимо.

Следовательно, в множестве всех отображений множества в себя определяется операция умножения отображений, которая обладает ассоциативным законом. Множество, которое замкнуто относительно некоторой операции, обладающей ассоциативным законом, называется полугруппой. Таким образом, множество $V(A)$ всех отображений любого множества A в себя является полугруппой.

2.3. Связь отображений с разбиениями. Эквиваленции. Пусть $\alpha: A \to B$. Для каждого $b \in A\alpha$ имеем соответствующий полный прообраз $b\alpha^{-1} = \mathcal{X}_b$. Совокупность всех таких полных прообразов составляет систему $\mathcal{R}$ над A. Ввиду того, что отображение α полное, система $\mathcal{R}$ будет покрывающей.

Пусть $\mathcal{X}_{b_1} \cap \mathcal{X}_{b_2} \neq \varnothing$ и $a \in \mathcal{X}_{b_1} \cap \mathcal{X}_{b_2}$. Тогда $a \in \mathcal{X}_{b_1}$, следовательно, $a\alpha = b_1$; с другой стороны, $a \in \mathcal{X}_{b_2}$, значит $a\alpha = b_2$. Тогда из определения отображения (однозначность соответствия) следует $b_1 = b_2$, откуда $\mathcal{X}_{b_1} = \mathcal{X}_{b_2}$. Отсюда при $b_1 \neq b_2$ будем иметь $\mathcal{X}_{b_1} \cap \mathcal{X}_{b_2} = \varnothing$, т.е. система $\mathcal{R}$ является и дизъюнктивной. В итоге получаем, что $\mathcal{R}$ есть разбиение множества A.

Элементы a_1 и a_2, принадлежащие одному и тому же классу рассматриваемого разбиения $\mathcal{R}$, называются эквивалентными относительно отображения α. Это отношение (будем считать, что читателю ясен смысл, который вкладывается в это слово - точное определение понятия отношения будет дано в следующем параграфе) между элементами множества A обозначим символом $a_1 \sim_\alpha a_2$. Отношение $\sim_\alpha$ является отношением "типа равенства", т.е. обладает свойствами, характерными для равенства каких-либо объектов:

1. Для любого $a \in A$, $a \sim_\alpha a$ - рефлексивность;

2. Для любых $a_1, a_2 \in A$ из $a_1 \sim_\alpha a_2$ следует $a_2 \sim_\alpha a_1$ - симметричность;

3. Для любых $a_1, a_2, a_3 \in A$ из $a_1 \sim_\alpha a_2$, $a_2 \sim_\alpha a_3$ следует $a_1 \sim_\alpha a_3$ - транзитивность.

Заметим, что отношения θ, обладающие свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, называются отношениями эквивалентности или просто эквиваленцией (используется также термин эквивалентность). Эквиваленция $\sim_\alpha$ называется ядром отображения α.

Конечно, разбиение $\mathcal{R}$ множества A может быть дано и без того, чтобы заранее имелось какое-нибудь отображение. И в этом случае разбиению $\mathcal{R}$ будет соответствовать некоторая эквивалентность $\theta = \sim_{\mathcal{R}}$. Легко видеть, что и обратно (см., например, [2]) любой эквивалентности θ соответствует вполне определенное разбиение $\mathcal{R}$ данного множества. Таким образом, можно говорить о фактор-множестве A/θ множества A по отношению θ. Это то же самое, что и фактор-множество $A/\mathcal{R}$ множества A по разбиению $\mathcal{R}$. Класс разбиения, содержащий элемент a, будем обозначать через $\mathcal{X}_a^\theta$ или $\tilde{a}$. Заметим, что для любого разбиения $\mathcal{R}$ отображение $\alpha: A \to A/\mathcal{R}$ такое, что $a\alpha = \mathcal{K}_a$ называется естественным отображением множества A на фактор-множество $A/\mathcal{R}$. Если α естественное отображение данного множества на соответствующее фактор-множество, то рассматриваемые разбиения и эквиваленция будут соответствовать отображению α в указанном выше смысле.

2.4. Частичные отображения. Пусть даны два множества A и B и некоторое подмножество A_1 множества A, каждое из которых является непустым. Тогда полное отображение $\alpha : A_1 \to B$ называется частичным отображением множества A в B. При этом A_1 называется областью определения частичного отображения α, а $A_1\alpha$ – множеством ее значений. Область определения частичного отображения α будем обозначать еще через $\Pi p_1\alpha$, а множество значений – символом $\Pi p_2\alpha$. Очевидно, что полные отображения являются частным случаем частичных, именно когда $\Pi p_1\alpha = A$.

2.5. Произведение частичных отображений. Пусть даны частичные отображения α множества A и B и β множества B в C. Если $\Pi p_2\alpha \cap \Pi p_1\beta \neq \varnothing$, то можно определить произведение $\alpha\beta$. Именно, пусть $\alpha : \Pi p_1\alpha \to \Pi p_2\alpha$ и $\beta : \Pi p_1\beta \to \Pi p_2\beta$. По определению $\Pi p_1\alpha\beta = (\Pi p_2\alpha \cap \Pi p_1\beta)\alpha^{-1}$ и $\Pi p_2\alpha\beta = (\Pi p_2\alpha \cap \Pi p_1\beta)\beta$. Для любого $a \in \Pi p_2\alpha\beta$ ставим по определению $a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta$, т.е. получаем обычное произведение отображений $\alpha : (\Pi p_2\alpha \cap \Pi p_1\beta)\alpha^{-1} \to \Pi p_2\alpha \cap \Pi p_1\beta$ и $\beta : \Pi p_2\alpha \cap \Pi p_1\beta \to (\Pi p_2\alpha \cap \Pi p_1\beta)\beta$. Умножение частичных отображений может оказаться невыполненным даже в том случае, когда $A = B = C$, так будет, когда $\Pi p_2\alpha \cap \Pi p_1\beta = \varnothing$. Для того чтобы сделать произведение частичных отображений множества A всегда выполнимым, вводят так называемое нулевое или пустое частичное отображение. Это отображение σ, для которого $\Pi p_1\sigma = \Pi p_2\sigma = \varnothing$. Тогда, если $\Pi p_1\alpha \cap \Pi p_2\beta = \varnothing$, ставим $\alpha\beta = \sigma$. Легко проверить, что произведение частичных отображений обладает ассоциативным законом, т.е. множество $W(A)$ всех частичных отображений множества A является полугруппой.

§ 3. Отношения

3.1. n-местные отношения. Пусть даны множества A_1, $A_2, \dots, A_n$. Если каким-нибудь образом выделена некоторая совокупность строчек $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, то скажем, что определено n-местное или n-арное отношение на системе множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$. Элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$

находятся в данном отношении, если строчка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ принадлежит выделенной совокупности. Нетрудно видеть, что каждому n-местному отношению соответствует некоторый элемент множества $\mathcal{B}(\prod_{i=1}^{n} A_i)$, и обратно, любое подмножество прямого произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ определяет некоторое отношение между элементами множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. В дальнейшем не будем различать отношения, которым в указанном выше смысле соответствует один и тот же элемент булеана $\mathcal{B}(\prod_{i=1}^{n} A_i)$, несмотря на то, что словесно они могут определяться разными способами. Таким образом, под отношением на системе множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будем понимать некоторый элемент множества $\mathcal{B}(\prod_{i=1}^{n} A_i)$. Отношения могут быть определены и для любой бесконечной совокупности множеств A_i, $i \in I$, однако мы в основном ограничимся рассмотрением конечно-местных, или, как еще говорят, конечно-арных отношений.

Отношения будем обозначать, как правило, малыми греческими буквами. Если элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ находятся в отношении $\rho \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i$, т.е. $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \rho$, то будем писать иногда $a_1 \ldots a_n \rho$, или $a_i \big|_{i=1}^{n} \rho$. Так как отношения являются подмножествами множества $\prod_{i=1}^{n} A_i$, то для них имеет место все то, что было сказано для подмножеств, в частности, для отношений имеют смысл операции, определенные над подмножествами.

Так, для каждого отношения ρ можно определить булеан $\mathcal{B}(\rho)$. Элементы $\mathcal{B}(\rho)$ называются подотношениями отношения ρ. Для любых двух отношений ρ_1 и ρ_2 (а первые две из следующих операций вообще для любого семейства отношений) можно определить их пересечение $\rho_1 \cap \rho_2$, объединение $\rho_1 \cup \rho_2$ и разность $\rho_1 \setminus \rho_2$. Пересечение $\rho_1 \cap \rho_2$ двух n-арных отношений ρ_1 и ρ_2 – это отношение, состоящее из всех последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, которые одновременно принадлежат как отношению ρ_1, так и отношению ρ_2. Объединение $\rho_1 \cup \rho_2$ – это отношение, состоящее из всех последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, которые принадлежат хотя бы одному из отношений ρ_1 или ρ_2.

Разность или дополнение $\rho_1 \setminus \rho_2$ отношения ρ_2 в ρ_1 состоит из всех последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, принадлежащих ρ_1, но не принадлежащих ρ_2. Среди всех отношений на системе множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеются два отношения, занимающие особое положение: это пустое отношение σ, которое определяется пустым подмножеством множества $\prod_{i=1}^{n} A_i$, и универсальное отношение $\mathcal{U}$, которое определяется всем множеством $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Если пустому отношению не принадлежит никакая последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то универсальному отношению принадлежит любая такая последовательность, т.е. любые элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ находятся в отношении U.

Отметим, что теория отношений становится особо содержательной в случае, когда все множества A_i совпадают между собой $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$. В этом случае каждое n-арное отношение является элементом булеана $\mathcal{B}(A^n)$ n-й степени множества A и будем говорить, что такое отношение определено или задано на множестве A. В частности, можно говорить о диагональном отношении или просто о диагонали $\Delta_A^{(n)} = \{(a, a, \ldots, a) \mid a \in A\}$, состоящей из всех систем из n элементов с равными членами. Отметим, что это понятие не имеет смысла в общем случае.

Множество A, в котором определена некоторая совокупность отношений, называется моделью или реляционной системой. Теория моделей получила уже довольно широкое самостоятельное развитие.

3.2. Бинарные отношения. Рассмотрим подробнее случай бинарных или двуместных отношений, т.е. отношений, для которых $n = 2$. Исходя из общего определения, получаем, что любое бинарное отношение между множествами A_1 и A_2 определяется некоторым элементом булеана $\mathcal{B}(A_1 \times A_2)$. Пусть дано бинарное отношение $\rho \in \mathcal{B}(A_1 \times A_2)$. Если $(a_1, a_2) \in \rho$, то будем писать также $a_1 \rho a_2$.

Помимо рассмотренных выше операций для бинарных отношений вводятся еще операции произведения отношений и взятия обратного отношения.

Пусть даны два бинарных отношения $\rho_1 \in \mathcal{B}(A_1 \times A_2)$ и $\rho_2 \in \mathcal{B}(A_2 \times A_3)$. Произведением бинарных отношений ρ_1 и ρ_2 называется бинарное отношение $\rho = \rho_1 ; \rho_2$ между элементами множеств A_1 и A_3, для которого $a_1 \rho a_3$ тогда и только тогда, когда существует $a_2 \in A_2$ такой, что $a_1 \rho_1 a_2$ и $a_2 \rho_2 a_3$, в этом случае будем писать также $a_1 \rho_1 a_2 \rho_2 a_3$. Произведение бинарных отношений обладает ассоциативным законом в следующем смысле: если $\rho_1 \in \mathcal{B}(A_1 \times A_2)$, $\rho_2 \in \mathcal{B}(A_2 \times A_3)$, $\rho_3 \in \mathcal{B}(A_3 \times A_4)$, то $(\rho_1 \rho_2)\rho_3 = \rho_1(\rho_2 \rho_3)$. В самом деле, пусть $(a_1, a_4) \in (\rho_1 \rho_2)\rho_3$. Тогда существует элемент $a_3 \in A_3$ такой, что $a_1(\rho_1 \rho_2)\, a_3 \rho_3 a_4$. Отсюда, так как $a_1(\rho_1 \rho_2) a_3$, то существует $a_2 \in A_2$, что $a_1 \rho_1 a_2 \rho_2 a_3$. Из этих соотношений получаем $a_2 \rho_2 a_3 \rho_3 a_4$, т.е. $a_2 (\rho_2 \rho_3) a_4$. Учитывая, что $a_1 \rho_1 a_2$, получаем $a_1 \rho_1 (\rho_2 \rho_3) a_4$, т.е. $(\rho_1 \rho_2)\rho_3 \subseteq \rho_1(\rho_2 \rho_3)$. Аналогично доказывается обратное включение, откуда следует требуемое равенство.

Для каждого отношения $\rho \in \mathcal{B}(A_1 \times A_2)$ определим обратное отношение ρ^{-1}. Если $\rho \in \mathcal{B}(A_1 \times A_2)$, то под ρ^{-1} понимается элемент булеана $\mathcal{B}(A_2 \times A_1)$, причем $a_2 \rho^{-1} a_1$ тогда и только тогда, когда $a_1 \rho a_2$.

3.3. Образы, прообразы, проекции. Пусть даны два множества A и B. Если $\rho \in \mathcal{B}(A \times B)$, то для любого $a \in A$ обозначим через $a\rho$ множество всех элементов $b \in B$, для которых $a \rho b$, которое называется полным образом (сечением [25], срезом [26]) или полным значением элемента $a \in A$ при отношении ρ. Если $C \subseteq A$, то через $C\rho$ обозначим образ подмножества C при отношении ρ, т.е. множество всех $b \in B$, для которых существует $c \in C$, такое, что $c \rho b$. Легко видеть, что $C\rho = \bigcup_{c \in C} c\rho$ случай $C\rho = \emptyset$ и $C \neq \emptyset$ не исключается. Это означает, что отношение ρ не определено ни для одного элемента из C. Второй проекцией $\Pi p_2 \rho$, или множеством значений отношения ρ, называется объединение полных образов всех элементов из A, т.е. $\Pi p_2 \rho = \bigcup_{a \in A} a\rho$.

Аналогично через ρb обозначим полный прообраз элемента $b \in B$, т.е. множество всех $a \in A$, для которых $a \rho b$. Таким образом определяется прообраз ρD подмножества $D \subseteq B$, именно $\rho D = \bigcup_{d \in D} \rho d$. Первой проекцией $\Pi p_1 \rho$, или областью определения отношения ρ, называется объединение всех полных прообразов элементов $b \in B$, т.е. $\Pi p_1 \rho = \bigcup_{b \in B} \rho b$. В этих обозначениях имеем $A\rho = \Pi p_2 \rho$ и $\rho B = \Pi p_1 \rho$. Легко видеть, что $\Pi p_1 \rho = \Pi p_2 \rho^{-1}$ и $\Pi p_2 \rho = \Pi p_1 \rho^{-1}$, а также что $\Pi p_1(\rho_1 \rho_2) = \rho_1(\Pi p_2 \rho_1 \cap \Pi p_1 \rho_2) = (\Pi p_2 \rho_1 \cap \Pi p_1 \rho_2)\rho_1^{-1}$ и $\Pi p_2(\rho_1 \rho_2) = \rho_2^{-1}(\Pi p_2 \rho_1 \cap \Pi p_1 \rho_2) = (\Pi p_2 \rho_1 \cap \Pi p_1 \rho_2)\rho_2$.

Заметим, что множество $\mathcal{B}(A \times B)$ замкнуто относительно операций пересечения, объединения и разности отношений, но не замкнуто относительно взятия обратного отношения, так как ρ^{-1}, вообще говоря, уже не принадлежит множеству $\mathcal{B}(A \times B)$. Что касается операции умножения, то она, в общем случае, даже не определена в этом множестве.

3.4. Связь между отношениями и отображениями. Так как каждому элементу $a \in A$ бинарное отношение $\rho \in \mathcal{B}(A \times B)$ ставит в соответствие подмножество $a\rho \subseteq B$, т.е. некоторый элемент булеана $\mathcal{B}(B)$, то отношение ρ определяет [25] некоторое отображение α_ρ множества A в $\mathcal{B}(B)$. Если для элемента $a \in A$ отношение ρ не определено, будем считать, что α_ρ сопоставляет элементу a пустое множество, т.е. $a\alpha_\rho = \emptyset$. Легко видеть, что и обратно любое отображение $\alpha : A \to \mathcal{B}(B)$ определяет некоторое отношение $\rho(\alpha)$ между элементами A и B. Именно, будем считать $a \rho(\alpha) b$, если $b \in a\alpha \subseteq B$. Нетрудно показать, что $\rho(\alpha_\rho) = \rho$ и $\alpha_{\rho(\alpha)} = \alpha$. Таким образом, каждое отношение $\rho \in \mathcal{B}(A \times B)$ может быть интерпретировано как отображение $A \to \mathcal{B}(B)$ и обратно.

Заметим, что иногда удобно рассматривать отношения как неоднозначные отображения множества A в B. При этом элементу $a \in A$ сопоставляется каждый элемент из $a\rho$. С этой точки зрения удобную интерпретацию получает умножение отношений, которое во многом аналогично умножению отображений, и это не случайно, так как отображения множества A в B являются частным случаем отношений между множествами A и B.

3.5. Бинарные отношения на данном множестве. Наряду с отношениями между элементами двух различных множеств A и B при изучении алгебраических систем большую роль играет случай $A = B$, т.е. отношений, определенных между элементами одного и того же множества. Такие отношения будут называться бинарными отношениями на множестве A. В соответствии с общим определением отношения под бинарным отношением на множестве A будем понимать любое подмножество его декартового квадрата, т.е. любой элемент булеана $\mathcal{B}(A \times A)$. Легко видеть, что если множество A конечно и состоит из n элементов, то общее число бинарных отношений, т.е. элементов множества $\mathcal{B}(A \times A)$, будет 2^{n^2}, т.е. множество отношений является намного более богатым, чем само множество A.

Помимо отмеченных выше универсального и пустого отношений, среди отношений на множестве A особое положение занимает еще отношение равенства $\mathcal{E}$, состоящее из всех пар (a, b), для которых $a = b$, т.е. совпадающее с диагональю $\Delta_A^{(2)} = \Delta_A = \{(a,a) | a \in A\}$ декартового квадрата $A \times A$.

Примечательным является то, что множество всех бинарных отношений любого множества A замкнуто не только относительно пересечения и объединения, но и относительно операций взятия обратного отношения и умножения отношений.

В самом деле, если $\rho \in \mathcal{B}(A \times A)$ и $a\rho^{-1}b$, то $b\rho a$, где $b \in A$, $a \in A$, следовательно, $\rho^{-1} \in \mathcal{B}(A \times A)$. Для любых $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{B}(A \times A)$ существует их произведение $\rho_1 \rho_2$, определенное обычным образом: если $a, b \in A$, то $a\rho_1\rho_2 b$ тогда и только тогда, когда существует $c \in A$ такое, что $a\rho_1 c\rho_2 b$, следовательно, $\rho_1 \cdot \rho_2 \in \mathcal{B}(A \times A)$. Отметим, что произведение может оказаться равным пустому отношению, именно $\rho_1\rho_2 = \sigma$ тогда и только тогда, когда не существуют элементы a, c, b, для которых $a\rho_1 c$ и $c\rho b$, т.е. когда $\Pi p_2 \rho_1 \cap \Pi p_1 \rho_2 = \emptyset$. Таким образом, множество $P(A)$ всех отношений множества A является полугруппой относительно операции умножения. Применяя к случаю $A=B$ сказанное в п.3.4, получаем, что между отношениями множества A и отображениями A в $B(A)$ имеется взаимно-однозначное соответствие.

3.6. Некоторые примеры бинарных отношений. Отношение $\rho\in B(A\times A)$ называется: рефлексивным, если для любого $a\in A$ имеет место $a\rho a$, иными словами, если $\rho\supseteq\varepsilon$; ирефлексивным, если $a\rho a$ не имеет место ни для какого $a\in A$, т.е. $\rho\setminus\varepsilon=\rho$; симметричным, если из $a\rho b$ следует $b\rho a$, т.е. если $\rho=\rho^{-1}$; антисимметричным, если из $a\rho b$ и $b\rho a$ следует $a=b$, другими словами, если $\rho\cap\rho^{-1}=\varepsilon$; асимметричным, если $\rho\cap\rho^{-1}=\sigma$; транзитивным, если из $a\rho b, b\rho c$ следует $a\rho c$. Это означает, что $\rho\cdot\rho=\rho^2\subseteq\rho$. При помощи этих терминов можно определить важные частные случаи бинарных отношений. Так, рефлексивное и транзитивное отношение называется отношением предпорядка, т.е. $\mathcal{P}$ - отношение предпорядка, если $\mathcal{P}\geqslant\varepsilon$ и $\mathcal{P}^2\leqslant\mathcal{P}$. Рефлексивное и симметричное отношение называется отношением толерантности [27], т.е. τ - отношение толерантности, если $\tau\geqslant\varepsilon$ и $\tau=\tau^{-1}$. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется отношением частичного порядка, т.е. ρ - отношение частичного порядка, если $\rho\geqslant\varepsilon, \rho\cap\rho^{-1}=\varepsilon, \rho^2\leqslant\rho$. Отношение θ является эквиваленцией, если $\theta\geqslant\varepsilon, \theta=\theta^{-1}, \theta^2\leqslant\theta$. Легко заметить, что эквиваленция это толерантное отношение предпорядка. Если $\mathcal{P}$ отношение предпорядка и $a\theta b\Leftrightarrow a\mathcal{P}b \,\&\, b\mathcal{P}a$, то θ эквиваленция, причем $\mathcal{P}$ индуцирует отношение частичного порядка в множестве классов $\mathcal{K}_a^\theta$. Приведенные и другие виды отношений встречаются в самых различных областях знаний. Например, словарь синонимов русского языка устанавливает отношение толерантности в множестве слов русского языка.

Если дано некоторое отношение ρ, то можно говорить о его рефлексивном, симметричном и транзитивном замыканиях, как наименьшем рефлексивном, симметричном соответственно транзитивном отношении, содержащем ρ. Это будут соответственно отношения $\rho^r=\rho\cup\varepsilon$, $\rho^s=\rho\cup\rho^{-1}$ и $\rho^t=\bigcup_{k=1}^{\infty}\rho^k$. Для последнего случая отметим, что $a\bigcup_{k=1}^{\infty}\rho^k b$, когда $a\rho^k b$, для некоторого k, т.е. когда существуют элементы a_1, $a_2,\ldots,a_{k-1}$ такие, что $a\rho a_1\rho\ldots\rho a_{k-1}\rho b$. Отсюда, если отношение $\rho=\bigcup_{j\in J}\theta_j$ является объединением некоторых отношений θ_j, то $a\rho^t b$ тогда и только тогда, когда существуют отношения $\theta_{j_1},\ldots$ $\ldots,\theta_{j_k}$ и элементы $a_1,\ldots,a_{k-1}$, что $a\,\theta_{j_1}a_1\,\theta_{j_2}\ldots\theta_{j_{k-1}}\,a_{k-1}\,\theta_{j_k}\,b$.

Под эквивалентным замыканием $\rho^э$ отношения ρ будем понимать наименьшую эквиваленцию, содержащую ρ. Нетрудно заметить, что симметричное замыкание рефлексивного отношения есть рефлексивное и симметричное отношение и транзитивное замыкание рефлексивного и симметричного отношения есть симметричное, рефлексивное и транзитивное отношение, следовательно $\rho^{э}=((\rho^{r})^{s})^{t}$.

3.7. Канторовость. Пусть ρ – некоторое отношение на множестве A. Если $a\bar{\rho}a$, то скажем, что a является ρ-нерефлексивным элементом. Каждое бинарное отношение $\rho \in P(A)$ обладает свойством, которое назовем канторовостью: Подмножество $B=\{x/x\bar{\rho}x\}$ всех ρ-нерефлексивных элементов множества A не является множеством вида $x\rho$.

Действительно, допущение $B=x^*\rho$ для некоторого $x^* \in A$ является противоречивым потому, что оно равносильно одновременному выполнению отношений $x^*\rho\, x^*$ и $x^*\bar{\rho}\, x^*$. В самом деле, для такого $x^* \in A$ имеем

$$x^*\rho\, x^* \Longrightarrow x^* \in x^*\rho \Longrightarrow x^* \in B \Longrightarrow x^*\bar{\rho}\, x^*,$$

и аналогично

$$x^*\bar{\rho}\, x^* \Longrightarrow x^* \bar{\in}\, x^*\rho \Longrightarrow x^* \bar{\in} B \Longrightarrow x^*\rho\, x^*.$$

Учитывая установленное в пп. 3.4 и 3.5 соответствие между отношениями на множестве A и отображениями $A \to \mathcal{B}(A)$, получаем, что не существует однозначного (в частности, взаимно-однозначного – теорема Кантора [28]) отображения множества A на $\mathcal{B}(A)$. В самом деле, при любом отображении $\alpha : A \to \mathcal{B}(A)$ подмножество всех $\rho(\alpha)$ нерефлексивных элементов (включая случай, когда это множество пусто) не будет образом.

3.8. Согласованность отношений. Начнем с рассмотрения одной общей ситуации. Пусть дана система множеств $A_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ и две системы отношений: m, n-местных отношений $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ $\theta_i \subseteq A_{i1} \times A_{i2} \times \ldots \times A_{in}$ и n, m-местных отношений $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s, \ldots$ $\ldots, \rho_n, \rho_k \subseteq A_{1k} \times A_{2k} \times \ldots \times A_{mk}$.

Отношение ρ_s называется s-согласованным (s-допустимым, s-инвариантным) с системами отношений $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ и $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{s-1}, \rho_{s+1}, \ldots, \rho_n$, если для любой матрицы элементов $x_{ij} \in A_{ij}$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1s-1} & x_{1s} & x_{1s+1} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2s-1} & x_{2s} & x_{2s+1} & \ldots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{ms-1} & x_{ms} & x_{ms+1} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

из того, что элементы i-той строки находятся в отношении θ_i, элементы j-того столбца $j \neq s$ находятся в отношении ρ_j, следует, что элементы s-того столбца находятся в отношении ρ_s.

Особое значение имеют случаи $n=2$, $A_{ik} = A'_{ik} = A_k$ и $A_{ij} = A$, $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_m = \theta$ и $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n = \rho$. В этих случаях будем говорить, что отношение ρ s-согласовано (s-допустимо, s-инвариантно) с отношением θ. Символически это условие можно записать так:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} x_{ij}\Big|_{j=1}^{n} \theta \;\&\; \mathop{\&}_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n} x_{ij}\Big|_{i=1}^{m} \rho \Longrightarrow x_{is}\Big|_{i=1}^{m} \rho.$$

Легко видеть, что универсальное отношение $\mathcal{U}$ согласовано с любым отношением (и даже с любыми системами отношений), и также что любое отношение согласовано с любой диагональю, в частности с равенством $\mathcal{E}$.

Понятие согласованности можно использовать для определения некоторых новых понятий. Так, $\rho_1 \leq \rho_2$, если ρ_1 I-согласовано с $\mathcal{E},\ldots,\mathcal{E}$ и ρ_2, а также $\rho_1 = \rho_2$, если, кроме того, ρ_2 2-согласовано с $\mathcal{E},\ldots,\mathcal{E}$ и ρ_1, т.е. равенство n-арных отношений можно определить при помощи понятия согласованности отношений. В самом деле, в этом случае имеем, что для матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ x_n & x_n \end{pmatrix}$$

каждая из строк которой находится в отношении $\mathcal{E}$, из $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \rho_2$ следует $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \rho_1$ и обратно.

Пусть дальше дано отношение $\rho \in \mathcal{B}(M_1 \times M_2)$ между двумя множествами M_1 и M_2. Если равенство $\mathcal{E}$ 2-согласовано с ρ, то ρ является частичным отображением M_1 в M_2. В самом деле, в таком случае для матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{pmatrix}$$

из $x_1 \rho x_2$, $x_1 \rho x'_2$, $x'_1 = x_1$ следует $x_2 = x'_2$. Если, кроме того, $\mathcal{E}$ I-согласовано с ρ, то ρ взаимно-однозначное частичное отображение. Если при этом $\Pi\rho_1\rho = M_1$, $\Pi\rho_2\rho = M_2$, то ρ будет взаимно-однозначным соответствием между множествами M_1 и M_2. Вообще, если равенство $\mathcal{E}$ s-согласовано с n-арным отношением ρ, то скажем, что ρ <u>s-сократимо</u>. Это означает, что если существует элемент x_s такой, что для некоторых $x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n$ имеет место $(x_1, \dots, x_{s-1}, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n) \in \rho$, то x_s единственный.

Эти примеры показывают, что понятие s-согласованности отношений имеет естественный и довольно универсальный характер. В дальнейшем увидим, что такие понятия, как алгебраическая операция, подалгебра, гомоморфизм, конгруэнция, перестановочность операций и т.п., являются разновидностями понятия s-согласованности отношений.

§ 4. Отношения порядка. Структуры

4.I. Отношения порядка. Остановимся более подробно на изучении отношения порядка (п.3.6). Простым, но в то же время важным примером отношения порядка служит отношение включения множеств.

Множество A, в котором определено некоторое отношение порядка, называется упорядоченным множеством. Если τ-отношение порядка, то обратное отношение τ^{-1}, как легко проверить, тоже является отношением порядка. Отношения порядка τ и τ^{-1} называются двойственными.

Назовем элементы $a, b \in A$ сравнимыми, если $a\tau b$ или $b\tau a$. Особое место занимает так называемое тривиальное упорядочение $\tau = \mathcal{E}$, в этом случае сравнимыми являются только равные элементы. Это отношение является наименьшим в том смысле, что оно содержится в любом другом отношении порядка, определенного на данном множестве. В некотором смысле противоположное место занимают отношения порядка, для которых $\tau \cup \tau^{-1} = \mathcal{U}$, т.е. любые два элемента сравнимы. Другими словами, для любых $a, b \in A$ имеет место $a\tau b$ или $b\tau a$. Такое отношение называется отношением линейного порядка, а множество A – линейно упорядоченным, или цепью. Примером линейно упорядоченного множества может служить множество всех действительных чисел (или любое его подмножество) относительно обычного отношения сравнения чисел по величине. Если множество не обязательно линейно упорядочено, т.е. могут существовать такие элементы a, b, что не имеет место ни $a\tau b$, ни $b\tau a$, то оно называется частично упорядоченным. Примером частично упорядоченных множеств служит булеан $\mathcal{B}(A)$ относительно включения подмножеств. Здесь, если множество A содержит не менее двух элементов, то несравнимыми являются, например, подмножества $\{a\}$ и $\{b\}$, где $a \neq b$. Другим примером служит множество всех натуральных чисел относительно понятия "быть кратным", которое обозначается иногда символом $\vdots$. Так, $12 \vdots 2$, $12 \vdots 4$ и т.д. Легко видеть, что $a \vdots a$ для любого натурального a, если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то $a = b$ и, наконец, из $a \vdots b$ и $b \vdots c$ следует $a \vdots c$. Несравнимыми здесь являются, например, числа 2 и 3.

Заметим, что если A – частично упорядоченное множество и $B \subseteq A$, то B является также частично упорядоченным множеством относительно индуцированного отношения порядка, т.е. для $b_1, b_2 \in B$, $b_1 \tau b_2$ тогда и только тогда, когда это отношение имеет место в A

<u>4.2. Наибольшие, наименьшие, минимальные и максимальные элементы. Грани</u>. Для того чтобы приблизиться к привычной символике, будем обозначать отношение порядка, заданное на множестве A, символом $\geqslant$. При этом вместо $a \geqslant b$ будем писать также $b \leqslant a$. Элемент a частично упорядоченного множества A называется наибольшим элементом, если для любого $x \in A$ имеет место $a \geqslant x$. Элемент b называется наименьшим элементом множества A, если для любого $x \in A$ имеет место $x \geqslant b$. Часто наибольший элемент называется единицей, а наименьший – нулем. Например, в множестве $\mathcal{B}(M)$, где M – произвольное множество, наибольшим является само множество M, наименьшим – пустое множество. В множестве всех натуральных чисел, где $\geqslant$ отношение делимости $\vdots$, наименьшим является число I, а наибольшего элемента не существует. Элемент a называется максимальным элементом упорядоченного множества A, если в A не существуют элементы строго больше, чем a, т.е. из $x \geqslant a$ следует $x = a$.

Двойственным образом определяется минимальный элемент: это такой элемент $b \in A$, что из $b \geqslant x$ следует $b = x$. В частично упорядоченном множестве с тривиальным порядком каждый элемент является как максимальным, так и минимальным. В множестве $\mathcal{B}(A) \setminus \{\varnothing\}$ минимальными являются все одноэлементные подмножества и только они. Очевидно, что наибольший элемент всегда является и максимальным, наименьший – и минимальным, обратное, однако, вообще говоря, не имеет места.

Пусть B – некоторое непустое подмножество частично упорядоченного множества A. Тогда элемент $a \in A$ называется точной верхней гранью или наименьшей верхней гранью множества $B \subseteq A$, если $a \geqslant x$ для любого $x \in B$ и если $a_1 \geqslant x$ для любого $x \in B$, то $a_1 \geqslant a$. Точная верхняя грань множества B обозначается символом $\bigvee\limits_{x \in B} x$ или $\sup B$. Двойственным образом элемент b называется точной нижней гранью или наибольшей нижней гранью некоторого подмножества $B \subseteq A$, если $b \leqslant x$ для любого $x \in B$ и из $b_1 \leqslant x$, для любого $x \in B$, следует $b_1 \leqslant b$. Точная нижняя грань обозначается символом $\bigwedge\limits_{x\in B} x$ или $\inf B$. Иногда вместо знаков $\vee$ и $\wedge$ используются, соответственно, известные из теории множеств символы $\cup$ и $\cap$, которые для случая множеств, как легко проверить, имеют тот же смысл.

Заметим, что $\inf B$, как и $\sup B$, зависит от того объемлющего множества A, подмножеством которого рассматривается B. Поэтому когда возникают недоразумения, необходимо ввести уточнения и писать $\inf_A B$, соответственно $\sup_A B$. Например, пусть $A=\{a_0, b_0, a_1, a_2\}$ и $a_0 \leq a_1 \leq a_2$, $b_0 \leq a_1 \leq a_2$ и $B=\{a_0, b_0, a_2\}$. Тогда $\sup_A\{a_0, b_0\}=a_1$, а $\sup_B\{a_0, b_0\}=a_2$, т.е. $\sup_A\{a_0, b_0\} \neq$ $\neq \sup_B\{a_0, b_0\}$.

4.3. Структуры. Структурой (в другой терминологии решетка) называется упорядоченное множество A, в котором любое конечное подмножество обладает как точной верхней гранью, так и точной нижней гранью. Например, любое линейное упорядоченное множество, т.е. любая цепь, является структурой. Другими примерами структур служит множество всех натуральных чисел с частичным упорядочением по делимости, булеан $\mathcal{B}(M)$ любого множества M относительно включения множеств. В частности, структурой является множество $\mathcal{B}(M\times M)$ всех бинарных отношений, определенных в множестве M. То же самое можно сказать о множестве всех бинарных отношений $\mathcal{B}(A\times B)$ и о множестве всех n-арных отношений $\mathcal{B}(A_1\times A_2\times\ldots\times A_n)$.

Подмножество B структуры A называется подструктурой, если оно является в свою очередь структурой, причем $\inf$ и $\sup$ в B совпадают с $\inf$ и $\sup$ в A.

4.4. Полные структуры. Упорядоченное множество A называется полной структурой, если $\sup B$ и $\inf B$ существуют для любого подмножества B. Любая полная структура A имеет нуль и единицу. Именно нуль будет $\inf A$, а единица $\sup A$. Легко видеть, что каждая полная структура является структурой. Обратно не имеет места даже для случая цепи. Так, множество рациональных чисел отрезка $[0,2]$ относительно обычного отношения $\geqslant$ не является полной структурой, так как, например, множество всех рациональных чисел, меньших $\sqrt{2}$, не имеет точной верхней грани в множестве рассмотренных рациональных чисел. Примером полной структуры может служить булеан $\mathcal{B}(M)$ произвольного множества M.

ЛЕММА. Пусть A – частично упорядоченное множество с отношением $\geqslant$. Если A обладает единицей и любое подмножество B из A имеет наибольшую нижнюю грань, т.е. существует $\inf B$, то A является полной структурой.

В самом деле, пусть $B \subseteq A$. Для любого $a \in B$ имеет место $a \leq 1$. Обозначим через P множество всех элементов $p \in A$, удовлетворяющие условию $a \leq p$, для любого $a \in B$. Множество P не пусто, так как $1 \in P$. В силу условия теоремы существует элемент $c = \inf P$. Докажем, что $c = \sup B$, т.е. что: 1) $a \leq c$ для любого $a \in B$; 2) если $a \leq a'$ для всех $a \in B$, то $c \leq a'$. Для доказательства 1) допустим противное, что существует $a \in B$ такое, что $a > c$. Тогда так как $a \leq p$ для любого $p \in P$, то согласно определению наибольшей нижней грани $a \leq \inf P = c$, что противоречит допущению. Допустим теперь, что $a \leq a'$ для всех $a \in B$. Тогда $a' \in P$, следовательно, $c = \inf P \leq a'$.

Заметим, что если A – подмножество некоторой полной структуры M, содержащей единицу и замкнутое относительно наибольших нижних граней, то A, будучи согласно доказанному, полной структурой, может не быть подструктурой полной структуры M. В этом случае наибольшие нижние грани подмножества $B \subseteq A$ в A и M будут совпадать $\inf_A B = \inf_M B$, а верхние точные грани могут быть различными $\sup_A B \neq \sup_M B$. Однако легко видеть, что $\sup_M B \leq \sup_A B$.

Отметим один важный частный случай доказанного предложения, когда A является системой (п.1.2) над некоторым множеством N, т.е. $A \subseteq \mathcal{B}(N)$. Тогда, если $N \in A$ и A замкнуто относительно любых пересечений, то A является полной структурой, в которой наибольшие нижние грани совпадают с пересечением соответствующих подмножеств, т.е. для любых $C_i \in A$, $i \in I$ $\inf_{A,\, i \in I} C_i = \bigcap_{i \in I} C_i$. Наименьшие верхние грани могут, вообще говоря, не совпадать с теоретико-множественным объединением, т.е. $\sup_{A,\, i \in I} C_i = \bigvee_{i \in I} C_i$. Как уже отмечалось, всегда будем иметь $\bigvee_{i \in I} C_i \supseteq \bigcup_{i \in I} C_i$.

В дальнейших наших приложениях будет встречаться и ситуация, двойственная только что изложенной. Для такого случая будем иметь: Если частично упорядоченное множество A обладает нулем и для любого его подмножества существует наименьшая верхняя грань, то A является полной структурой. Доказывается это предложение аналогично предыдущему. Для этого случая имеют место также следствия: Если A подмножество некоторой полной структуры M, A содержит нуль и замкнуто относительно наименьших верхних граней, то A является полной структурой, в которой наименьшие верхние грани такие же, как в M, т.е. $\sup_A C = \sup_M C$ для любого $C \subseteq A$. Наибольшие нижние грани могут быть различными, но имеет место $\inf_M C \geq \inf_A C$. Если A есть система над множеством N, т.е. $A \subseteq \mathcal{B}(N)$, содержащим наименьшее подмножество, т.е. такое подмножество H, что H содержится в любом подмножестве множества N, принадлежащего системе A, и A замкнуто относительно объединений, получаем, что A является полной структурой, в которой наименьшие верхние грани совпадают с объединением соответствующих подмножеств, т.е. $\sup_A_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I} C_i$. Наибольшие нижние грани могут отличаться от пересечения соответствующих подмножеств, но в этом случае $\inf_A_{i\in I} C_i = \bigwedge_{i\in I} C_i \subseteq \bigcap_{i\in I} C_i$.

<u>4.5. Системы замыканий</u>. Пусть A – некоторое множество и P – некоторая система над A, т.е. $P \subseteq \mathcal{B}(A)$. P называется системой замыканий, если P содержит A и замкнуто относительно пересечений. Каждое подмножество множества A, принадлежащее P, называется замкнутым. Из п.4.4 следует, что любая система замыканий P является полной структурой, в которой наибольшая нижняя грань совпадает с теоретико-множественным пересечением.

Если дана система замыканий P, то для любого подмножества B множества A можно определить замыкание $\mathfrak{z}_P(B)$ как пересечение всех подмножеств из P, содержащих данное подмножество $B \subseteq A$, т.е. $\mathfrak{z}_P(B) = \bigcap_{\substack{C\in P\\ C\supseteq B}} C$. Заметим, что среди таких подмножеств всегда находится множество A. Легко видеть, что при любой системе замыканий $P \subseteq \mathcal{B}(A)$ оператор замыкания $\mathfrak{z}_P$ обладает следующими свойствами (под оператором здесь понимается унарная операция, определенная в $\mathcal{B}(A)$):

1^0. $\mathfrak{z}_P(B) \supseteq B$, для любого $B \subseteq A$;

2^0. $\mathfrak{z}_P(\mathfrak{z}_P(B)) = \mathfrak{z}_P(B)$;

3^0. Если $B \supseteq C$, то $\mathfrak{z}_P(B) \supseteq \mathfrak{z}_P(C)$.

Пусть теперь задан некоторый оператор замыкания $\mathfrak{z}$ на множество A, т.е. оператор, обладающий свойствами 1^0, 2^0, 3^0. Обозначим через P систему над A, состоящую из всех подмножеств $B \subseteq A$, для которых $\mathfrak{z}(B) = B$. Покажем, что P является системой замыканий. Из 1^0 для множества A имеем $\mathfrak{z}(A) \supseteq A$, но так как для любого $B \subseteq A$ $\mathfrak{z}(B) \subseteq A$, то $\mathfrak{z}(A) = A$, следовательно, $A \in P$. Пусть теперь $B_i \in P$, $i \in I$, т.е. $\mathfrak{z}(B_i) = B_i$. Покажем, что $\bigcap_{i\in I} B_i \in P$. Так как $\bigcap_{i\in I} B_i \subseteq B_k$ для любого $k \in I$, то по 3^0 имеем $\mathfrak{z}(\bigcap_{i\in I} B_i) \subseteq \mathfrak{z}(B_k) = B_k$. Отсюда, так как это включение справедливо для любого $k \in I$, следует, что $\mathfrak{z}(\bigcap_{k\in I} B_k) \subseteq \bigcap_{k\in I} B_k$. С другой стороны, из 1^0 следует, что $\mathfrak{z}(\bigcap_{k\in I} B_k) \supseteq \bigcap_{k\in I} B_k$. Полученные включения показывают, что $\jmath(\bigcap_{k\in I} B_k)=\bigcap_{k\in I} B_k$, т.е. $\bigcap_{k\in I} B_k \in P$. Наконец, из 2^0 следует, что $\jmath(B)\in P$ для любого $B\subseteq A$, т.е. система замыканий P, соответствующая оператору замыкания $\jmath$, состоит из всех подмножеств вида $\jmath(B)$ для всех $B\subseteq A$. Отсюда следует, что $\jmath(B)=\jmath_P(B)$ для любого $B\subseteq A$, т.е. каждый оператор замыкания $\jmath$ полностью определяется системой замкнутых множеств $\jmath(B)$, следовательно, между операторами замыкания и системами замыкания на множестве A имеется взаимно-однозначное соответствие.

Отметим, что если $\jmath$ – оператор замыкания, соответствующий системе замыкания P, то $\sup_P A_i=\jmath(\bigcup_i A_i)$.

4.6. Системы козамыканий. В дальнейшем будут встречаться ситуации, двойственные рассмотренным в предыдущем пункте. В связи с этим дадим следующее определение: система $\mathcal{R}$ над A называется системой козамыканий, если $\mathcal{R}$ содержит пустое множество ϕ и замкнуто относительно объединений. Из п.4.4 следует, что любая система козамыканий $\mathcal{R}$ является полной структурой, в которой наименьшая верхняя грань совпадает с объединением соответствующих подмножеств.

Если дана система внутренних замыканий $\mathcal{R}$, то для любого подмножества B множества A определяется его козамыкание $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}(B)$ как объединение всех подмножеств из $\mathcal{R}$, содержащихся в B, т.е. $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}(B)=\bigcup_{\substack{C\subseteq B\\ C\in\mathcal{R}}} C$.

Легко видеть, что для любой системы козамыканий $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{B}(A)$ оператор козамыкания $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ обладает следующими свойствами:

1^I. $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}(B)\subseteq B$ для любого $B\subseteq A$;

2^I. $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}(\mathcal{U}_{\mathcal{R}}(B))=\mathcal{U}_{\mathcal{R}}(B)$;

3^I. Если $B\subseteq C$, то $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}(B)\subseteq\mathcal{U}_{\mathcal{R}}(C)$.

Если от отношения $\supseteq$ перейти к обратному отношению $\supseteq^{-1}$, определенному обычным образом $B\supseteq^{-1}C$ тогда и только тогда, когда $B\subseteq C$, то условия 1^I, 2^I, 3^I перейдут соответственно в 1^0, 2^0, 3^0. Двойственными рассуждениями для нашего случая получим, что любой оператор козамыкания $\mathcal{U}$, определенный на $\mathcal{B}(A)$, соответствует некоторой системе козамыканий, причем $\mathcal{U}=\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$, где $\mathcal{R}$ – система козамкнутых подмножеств, и что это соответствие является взаимно-однозначным.

Заметим, что в некоторых случаях нет необходимости рассматривать весь булеан $\mathcal{B}(A)$, а представляют интерес только те подмножества, которые содержат некоторые фиксированные подмножества H. Обозначим систему всех таких подмножеств через $\mathcal{B}^H(A)$. Очевидно, что $\mathcal{B}(A)=\mathcal{B}^{\varnothing}(A)$. Тогда можно несколько изменить понятие системы козамыкания. Именно, систему $\mathcal{R}$ над A назовем системой козамыкания, если $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{B}^{H}(A)$, $H\in\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}$ замкнуто относительно объединений. Соответствующий оператор козамыкания будет определен на $\mathcal{B}^{H}(A)$.

§ 5. Изоморфизм множеств с отношениями. Кардинальные и ординальные (порядковые) числа

5.1. Изоморфизм реляционных систем. В п.3.1 отмечалось, что особую роль играют множества, в которых выделена некоторая совокупность отношений. Такие множества с отношениями, как отмечалось, называются моделями или реляционными системами. Естественно поставить вопрос: когда две реляционные системы следует считать "равными", "совпадающими"? С этой целью вводится понятие изоморфизма реляционных систем (из греческого языка *isos* – одинаковое, *morphē* – форма). Пусть даны две реляционные системы $\mathfrak{A}=\langle A,\Omega_1\rangle$ и $\mathfrak{B}=\langle B,\Omega_2\rangle$ с той же совокупностью отношений в том смысле, что каждому отношению из Ω_1 сопоставлено взаимно-однозначным образом отношение из Ω_2 так, что сохраняется арность отношений. Будем считать, что такое соответствие между Ω_1 и Ω_2 фиксировано. Если при этом соответствующие отношения обозначены одним и тем же символом, то можно считать, что $\Omega_1=\Omega_2=\Omega$. Модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются изоморфными, если существует взаимно-однозначное соответствие $\varphi: A\to B$, которое называется изоморфизмом моделей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, что любое отношение $\rho\in\Omega$ k-согласовано $(k=1,2)$ с отношением $\varphi\subseteq A\times B$, т.е. для любой матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{n_\rho} & b_{n_\rho} \end{pmatrix}$$

из $a_i\varphi b_i$ (иными словами, из $a_i\varphi=b_i$) и $a_i\big|_{i=1}^{n_\rho}\rho$ следует $b_i\big|_{i=1}^{n_\rho}\rho$ и из $b_i\big|_{i=1}^{n_\rho}\rho$ следует $a_i\big|_{i=1}^{n_\rho}\rho$. Символически: $a_i\varphi=b_i\Rightarrow$ $\Rightarrow(a_i\big|_{i=1}^{n_\rho}\rho\Longleftrightarrow b_i\big|_{i=1}^{n_\rho}\rho)$, или

$$a_i\big|_{i=1}^{n_\rho}\rho\Longleftrightarrow a_i\varphi\big|_{i=1}^{n_\rho}\rho,$$

в другой записи

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n_\rho}) \in \rho \Longleftrightarrow (a_1\varphi, a_2\varphi, \ldots, a_{n_\rho}\varphi) \in \rho.$$

Если модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны, то будем писать $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

5.2. Реляционные типы. Введем в рассмотрение понятие типа реляционной системы, так что каждой реляционной системе $\mathfrak{A}$ сопоставляется свой тип $T(\mathfrak{A})$. При этом изоморфным реляционным системам сопоставляется один и тот же тип, а неизоморфным системам – разные типы. Следуя Кантору, будем понимать тип реляционной системы как характеристику класса всех изоморфных между собой реляционных систем. Сказанное нельзя рассматривать как определение типа реляционной системы. Это понятие, которое играет большую роль в теории множеств и алгебре, является на самом деле неопределяемым. Таким образом, будем считать, что каждая реляционная система $\mathfrak{A}$ имеет свой тип $\alpha = T(\mathfrak{A})$.

Описание всех типов реляционных систем данного класса является, по существу, основной задачей алгебры и ряда смежных дисциплин. Остановимся на некоторых частных случаях.

5.3. Кардинальные числа. Рассмотрим реляционные системы вида $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{U}_A \rangle$, где A – некоторое множество, а $\mathcal{U}_A$ – универсальное отношение на A, т.е. $\mathcal{U}_A = A \times A$. Пусть дана такая реляционная система $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{U}_A \rangle$ и $\alpha = T(\mathfrak{A})$ ее тип. Легко видеть, что $T(\mathfrak{A}) = T(\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B} = \langle B, \mathcal{U}_B \rangle$ тогда и только тогда, когда между множествами A и B существует взаимно-однозначное соответствие. В самом деле, если $T(\mathfrak{A}) = T(\mathfrak{B})$, то $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, следовательно, между A и B имеется взаимно-однозначное соответствие. Обратно, если между A и B имеется взаимно-однозначное соответствие φ, то из $a_1 \mathcal{U}_A a_2$ следует $a_1\varphi \mathcal{U}_B a_2\varphi$ из определения $\mathcal{U}_B$ и из $a_1\varphi \mathcal{U}_B a_2\varphi$ следует $a_1 \mathcal{U}_A a_2$ из определения $\mathcal{U}_A$, т.е. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Реляционный тип $\alpha = T(\mathfrak{A})$ модели $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{U}_A \rangle$ назовем кардинальным числом, или мощностью множества A и обозначим через $|A|$ или $\mathrm{card}\,A$. Если множество A конечно, то его кардинальное число можно отождествить с числом его элементов. Кардинальное число множества всех натуральных чисел обозначается через $\aleph_0$ (алеф нуль) и называется мощностью счетных множеств. Следовательно, счетными будут бесконечные множества, элементы которых можно индексировать при помощи натуральных чисел, т.е. которые могут быть перенумерованы.

5.4. Операции над кардинальными числами. Для кардинальных чисел можно ввести понятие сравнимости $\leqslant$ следующим образом: кардинальное число α называется меньше или равно кардинального числа β, если существуют множества A и B такие, что $card\, A=\alpha$, $card\, B=\beta$, и взаимно-однозначное отображение φ множества A в B. Можно доказать (см., например, [28]), что введенное отношение является отношением линейного порядка и, больше того, что любое множество кардинальных чисел является вполне упорядоченным(п.5.9).

Над кардинальными числами так же, как и над натуральными, которые являются частным случаем кардинальных, можно ввести арифметические операции сложения, умножения и возведения в степень. Так, если α и β – два кардинальных числа и непересекающиеся множества A и B такие, что $\alpha = card\, A$, $\beta = card\, B$, то ставим по определению $\alpha+\beta = card\,(A \cup B)$.

Нетрудно доказать, что сумма $\alpha+\beta$ не зависит от множеств A и B. Аналогично, произведением кардинальных чисел α и β называют кардинальное число γ такое, что для любых множеств A и B, для которых $\alpha = card\, A$, $\beta = card\, B$, имеем $\gamma = card\,(A \times B)$. Нетрудно доказать, что это определение также является корректным, т.е. что γ не зависит от взятых множеств A и B. Пусть дано некоторое множество индексов I, семейство множеств $A_i, i\in I$ и их произведение $\prod_{i\in I} A_i$. Если $\alpha_i = card\, A_i$, то $\gamma = card \prod_{i\in I} A_i$ называется произведением кардинальных чисел α_i, $\gamma = \prod_{i\in I} \alpha_i$. В частности, если все множества A_i, $i\in I$ равномощны $\alpha_i = \alpha$ и $card\, I=\delta$, то кардинальное число $\gamma = card\, A^I$ называется δ-й степенью кардинального числа α, и будем писать $\gamma = \alpha^\delta$. Заметим, что когда $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ конечные кардинальные числа (т.е. нуль или натуральные), то введенные здесь операции совпадают с известными арифметическими операциями.

Не останавливаясь на вопросах аксиоматики, теории множеств и на детальном проведении всех доказательств, укажем некоторые важные факты о кардинальных числах, необходимых для дальнейшего.

5.5. Некоторые свойства счетных множеств. Если каждый элемент множества M однозначно определяется некоторой конечной последовательностью целых чисел, то мощность множества M не более чем счетна. При этом, если M бесконечно, то $card\, M = \aleph_0$. В самом деле, для каждого $m\in M$ фиксируем одну последовательность $\langle m_1, m_2, \ldots, m_k\rangle$, которая его определяет. Назовем высотой элемента m число $h(m) = k + \sum_{i=1}^{k} |m_i|$. Здесь $|m_i|$, как обычно, обозначает абсолютную величину числа m_i. Ясно, что каждое $m \in M$ имеет одну вполне определенную высоту и что для каждого числа h имеется лишь конечное число элементов из M, высота которых равна h. Обозначим это число через $H(h)$. Так, $H(0)=0$ (пустые последовательности исключаются из рассмотрения). $H(1) \leq 1$, этой высоте может соответствовать лишь последовательность $\langle 0 \rangle$. $H(2) \leq 3$, так как высоту 2 могут иметь лишь последовательности $\langle 0,0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle -1 \rangle$, т.е. в M может быть не более трех элементов высоты $h=2$, и т.д.

Если существует $m \in M$, для которого $h(m)=1$, то ему сопоставляем число I; если существуют элементы высоты 2, то им сопоставляем (в зависимости от того, сколько их) числа 2, 3, 4 и т.д. Ясно, что каждое $m \in M$ получит свой "номер", т.е. множество M будет отображено взаимно-однозначно в множестве всех натуральных чисел. Если множество M бесконечно, то отображение будет "на" и тогда $card\, M = \aleph_0$.

Как частные случаи отсюда получаем счетность объединения $\bigcup_{i \in I} A_i$, где A_i счетно, I конечно или счетно, (если $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}, \ldots\}$, то a_{ik} сопоставляем последовательность $\langle i, k \rangle$), счетность множества рациональных чисел (достаточно в предыдущем примере взять $A_i = \{\frac{i}{1}, \frac{i}{2}, \ldots, \frac{i}{k}, \ldots\}$), а также счетность множества всех алгебраических чисел (т.е. чисел, являющихся корнями произвольных многочленов с целыми коэффициентами).

Для доказательства последнего утверждения заметим, что каждый многочлен с целыми коэффициентами $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ определяется последовательностью $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \rangle$ (коэффициенты, равные нулю, включаются в эту последовательность), следовательно, множество всех таких многочленов является счетным. Отсюда нетрудно получить, что и множество всех алгебраических чисел является счетным.

5.6. Мощность булеана данного множества. Заметим предварительно (см. пп. 5.4 и I.7), что для любого множества A, для которого $card\, A = \alpha$, степень 2^α представляет собой мощность множества D^A всех функций, определенных на множестве A со значениями в множестве $D = \{0,1\}$, $card\, D = card\, \{0,1\} = 2$. Покажем, что множество D^A равномощно множеству $\mathcal{B}(A)$. Для этого каждому подмножеству M множества A, т.е. каждому элементу M множества $\mathcal{B}(A)$ сопоставим "характеристическую функцию" $\mathcal{M}(x)$ такую, что $\mathcal{M}(x)=1$, если $x \in M$, и $\mathcal{M}(x)=0$, если $x \bar{\in} M$. Как видно, соответствие между множеством D^A всех таких функций и множеством $\mathcal{B}(A)$ всех подмножеств множества A является взаимно-однозначным. Таким образом, $card\,\mathcal{B}(A) = card\,\Delta^A$. Отсюда получаем, что $card\,\mathcal{B}(A) = 2^{\alpha}$.

Так как множество A отображается взаимно-однозначным образом в $\mathcal{B}(A)$ (достаточно каждому элементу $a \in A$ сопоставить одноэлементное множество $\{a\}$, которое является элементом множества $\mathcal{B}(A)$), получим соотношение $\alpha \leq 2^{\alpha}$. В действительности, как было показано в п.3.8, не существует взаимно-однозначного отображения множества A на $\mathcal{B}(A)$, т.е. имеет место строгое неравенство $\alpha < 2^{\alpha}$.

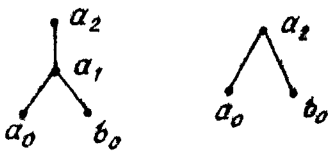
Из доказанного утверждения следует, что множество бесконечных кардинальных чисел является бесконечным. В частности, одну серию бесконечных кардинальных чисел можем получить беря различные степени двойки, начиная, например, с $2^{\aleph_0}$, где $\aleph_0$ – мощность множества натуральных чисел. Таким образом, получаем последовательность

$$\aleph_0,\ 2^{\aleph_0},\ 2^{2^{\aleph_0}},\ 2^{2^{2^{\aleph_0}}},\ \ldots .$$

5.7. Мощность континуума. Учитывая, что каждое действительное число отрезка $[0,1]$ представляется в виде бесконечной двоичной дроби, а множество всех таких дробей равномощно множеству всех последовательностей из нулей и единицы, т.е. множеству Δ^N, можно доказать, что множество действительных чисел отрезка $[0,1]$ имеет мощность $2^{\aleph_0}$. В действительности, такую же мощность имеет множество D всех действительных чисел, которая обозначается через C и называется мощностью континуума, т.е. $C = 2^{\aleph_0}$. Учитывая, что множество всех алгебраических чисел, как было показано выше, является счетным, отсюда следует существование неалгебраических чисел, причем их "намного больше", так как мощность множества таких чисел равна C. Еще Эйлер предсказал существование неалгебраических чисел и предложил для них термин трансцендентные числа.

Проведенные выше рассуждения представляют замечательный пример неэффективных доказательств – существование трансцендентных чисел доказано без указания какого-либо конкретного примера такого числа. Такое доказательство было дано Кантором в семидесятых годах XIX века. Заметим, что первые примеры трансцендентных чисел были приведены Лиувиллем лишь в середине прошлого века.

5.8. Порядковые типы. Пусть дана реляционная система $\langle M, \leqslant \rangle$, где $\leqslant$ отношение частичного порядка. Реляционный тип такого множества называется порядковым типом и обычно представляется в виде "диаграммы", т.е. совокупностью точек, расположенных на разных уровнях и отрезках, соединяющих их, так, что если $a_1, a_2 \in M$ и $a_1 \leqslant a_2$, то a_2 изображается точкой, находящейся "выше" точки, соответствующей a_1, и эти точки соединяются отрезком. Для упрощения диаграмм не проводятся отрезки в случаях, когда отношение $\leqslant$ можно получить по транзитивности. Например, для множеств A и B, рассмотренных в конце п.4.2, имеем соответственно диаграммы



Для наглядности точки здесь были обозначены теми же символами, что и соответствующие элементы. Понятно, что такое геометрическое изображение в виде диаграмм возможно только в случае простых упорядоченных множеств. Например, даже в случае множества рациональных чисел с обычным отношением сравнения чисел по величине диаграмма соответствующего порядкового типа не имеет такой удобной геометрической формы.

5.9. Порядковые числа. Рассмотрим подробнее один частный вид линейно упорядоченных множеств – так называемые вполне упорядоченные множества. Реляционная система $\langle M, \leqslant \rangle$ называется вполне упорядоченным множеством, если $\leqslant$ является отношением линейного порядка, причем таким, что любое подмножество множества M имеет минимальный элемент, т.е. для любого $A \subseteq M$ существует $\inf A$ и $\inf A \in A$. Реляционный тип α вполне упорядоченного множества M называется порядковым или ординальным числом и обозначается $\alpha = \operatorname{ord} M$. Для конечных вполне упорядоченных множеств порядковое число однозначно определяется мощностью данного множества, т.е. конечные кардинальные и ординальные числа взаимно-однозначно соответствуют друг другу. В случае бесконечных множеств картина существенно меняется. Для выяснения этого факта рассмотрим операции над порядковыми числами. Мы ограничимся здесь случаем сложения. Желающих ознакомиться с другими операциями отсылаем к специальной литературе (см., например, [28]).

5.10. Сложение порядковых чисел. Суммой $\alpha+\beta$ двух порядковых чисел α и β называется порядковый тип множества $A \cup B$, где A и B вполне упорядоченные множества, $\alpha = ord\, A$, $\beta = ord\, B$. При этом множество $A \cup B$ упорядочивается следующим образом: если $a, b \in A \cup B$, то будем считать $a \leq b$ в множестве $A \cup B$, если $a, b \in A$ и $a \leq b$ в смысле порядка в множестве A, или $a, b \in B$ и $a \leq b$ в смысле порядка в множестве B, или $a \in A$ и $b \in B$. Легко видеть, что сумма двух порядковых чисел является тоже порядковым числом, т.е. что множество $A \cup B$ с таким образом определенным отношением порядка является вполне упорядоченным множеством. В случае конечных множеств получаем обычную операцию сложения натуральных чисел.

5.11. Сравнение порядковых чисел. Вполне упорядоченное множество B называется начальным отрезком вполне упорядоченного множества A, если $B \subseteq A$, и из того, что $a \in B$, $a' \in A$ и $a' \leq a$, следует $a' \in B$. Пусть α и β два ординальных числа, A и B вполне упорядоченные множества такие, что $\alpha = ord\, A$, $\beta = ord\, B$. По определению $\beta \leq \alpha$, если B изоморфно некоторому начальному отрезку вполне упорядоченного множества A. Можно доказать, что таким образом определенное отношение является отношением линейного порядка для любого множества порядковых чисел.

5.12. Алефы. Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ множество натуральных чисел с обычным отношением порядка или какое-нибудь изоморфное ему упорядоченное множество (очевидно, N является вполне упорядоченным множеством). Обозначим соответствующее ему порядковое число через ω, т.е. $\omega = ord\, N$. Пусть дальше $A = \{a\}$. Естественно полагать $ord\, A = 1$. Найдем теперь $1+\omega$. Это будет порядковый тип множества $\{a, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Очевидно, что это множество изоморфно множеству натуральных чисел (изоморфизм получается, если сопоставить $a \longleftrightarrow 1$ и $n \longleftrightarrow n+1$). Следовательно, $1+\omega = \omega$. Легко заметить, что вообще $n+\omega = \omega$ для любого конечного n. С другой стороны, $\omega+1$ будет порядковым типом вполне упорядоченного множества $\{1, 2, \ldots, n, \ldots, a\}$, которое не изоморфно N, так как это множество имеет наибольший элемент, в то время когда N такого элемента не имеет. Следовательно, $\omega+1 \neq \omega$, причем $\omega < \omega+1$. Аналогично, если $A = \{a_1, a_2\}$, то, обозначая через $\omega+2$ порядковый тип множества $N \cup A$, у которого наибольший элемент имеет предшествующий, получим $\omega+2 \neq \omega+1$, причем $\omega+1 < \omega+2$. Таким образом, получаем числа $\omega+n$; дальше получим числа $\omega+\omega+\ldots+\omega+\ldots = \omega\cdot\omega = \omega^2$, $\omega^2\cdot\omega = \omega^3, \ldots$,

$\omega^n, \ldots, \omega^\omega, \ldots$. Порядковые числа, соответствующие счетным множествам, называются счетными порядковыми числами.

Множество всех счетных порядковых чисел оказывается уже несчетным, и его мощность обозначается через $\aleph_1$, причем оказывается, что $\aleph_0 < \aleph_1$ и между ними нет кардинальных чисел, т.е. $\aleph_1$ следует непосредственно после $\aleph_0$. Далее, множество всех порядковых чисел, соответствующих множествам мощности $\aleph_1$, имеет мощность $\aleph_2$, которая непосредственно следует за $\aleph_1$, и т.д. Этим путем получаем целую иерархию кардинальных чисел (так называемые "алефы"). В теории множеств доказывается, что $\aleph_2 \leq 2^{\aleph_0}$. Соотношение $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ называется гипотезой континуума. Желающим ознакомиться более подробно с теорией кардинальных чисел рекомендуем специальную литературу (например, книгу [28]).

§ 6. Универсальные алгебры

6.1. Определение алгебраической операции. Понятие операции является одним из основных в математике. Мы уже встречались с некоторыми операциями над множествами, отображениями, отношениями. Здесь дадим определение алгебраической операции, исходя из понятия отношения, при помощи согласованности отношений, введенное в п.3.8.

Пусть дано множество G и в нем $(n+1)$-местное отношение ω, n - нуль или натуральное число. Отношение ω называется n-арной (n-местной) алгебраической частичной операцией на G, если отношение равенства $\mathcal{E}$ $(n+1)$- согласовано с ω. Это означает, что ω является алгебраической частичной операцией, если для любой матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_{n+1} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n & b_{n+1} \end{pmatrix}$$

из $a_i\Big|_{i=1}^{n+1}\omega$, $b_i\Big|_{i=1}^{n+1}\omega$ и $a_i = b_i$, для $i = 1, 2, \ldots, n$, следует $a_{n+1} = b_{n+1}$. Другими словами, если для данных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует элемент a, для которого $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a) \in \omega$, то он определяется однозначно. Алгебраическую частичную операцию, определяемую отношением ω, будем обозначать той же буквой и условимся писать $a_1 a_2 \ldots a_n \omega = a$ или $a_i\Big|_{i=1}^{n}\omega = a$.

С любым k-арным отношением ρ в множестве G для каждого $s < k$ можно связать бинарное отношение ρ_s между множествами G^s и G^{k-s}. Именно, ставим $(a_1, a_2, \dots, a_s)\rho_s (a_{s+1}, a_{s+2}, \dots, a_k)$ тогда и только тогда, когда $(a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_k) \in \rho$. В частности, каждое $(n+1)$-арное отношение ω в G определяет бинарное отношение ω_n между G^n и G, где $(a_1, a_2, \dots, a_n)\omega_n a_{n+1}$ тогда и только тогда, когда $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \omega$. Легко видеть, что $(n+1)$-арное отношение ω является алгебраической частичной операцией тогда и только тогда, когда индуцированное бинарное отношение ω_n является частичным отображением G^n в G. В связи с этим часто n-арная алгебраическая частичная операция ω в множестве G определяется как частичное отображение $\omega . G^n \to G$. Этот факт может быть выражен словами: n-арная частичная операция на множестве G – это правило, закон, по которому некоторым упорядоченным системам $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ элементов из G сопоставляется единственный элемент $a \in G$. Взгляд на n-арную операцию ω как на отображение $\omega : G^n \to G$ является самым распространенным в литературе.

Мы в основном будем рассматривать случай, когда $Пр_1 \omega_n = G^n$, т.е. когда ω_n является полным отображением G^n в G. Соответствующая операция ω будет называться при этом полной алгебраической n-арной операцией на G.

Часто возникает необходимость рассматривать операции, которые не являются алгебраическими в смысле данного выше определения, в частности бесконечноарные операции, когда n – некоторое бесконечное кардинальное число (таковыми являются операции $\cup$ и $\cap$ в полных структурах), мультиоперации, соответствующие случаю, когда рассмотренное выше отношение ρ_s является отображением G^s в G^{k-s}. Иногда возникает необходимость рассмотреть также многоосновные операции, т.е. отображения прямого произведения $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ в G, где $G_1, G_2, \dots, G_n$, G – различные множества. Поскольку в дальнейшем будем изучать в основном лишь полные алгебраические операции, а другие типы операций, как частичные или бесконечноарные, будут играть лишь вспомогательную роль, под термином "операция" будем понимать полную алгебраическую операцию.

Одну из простых классификаций операций можно дать по их арности, т.е. в зависимости от значения n. С некоторыми из этих случаев мы уже знакомы. Например, для обычных операций сложения и умножения чисел $n = 2$. Такие операции называются бинарными. Если

$n = 3$, то операция называется тернарной. В случае $n=1$ получаем так называемые унарные операции, которые совпадают с полными отображениями множества G в себя. Рассмотрим случай нульарных операций, т.е. когда $n=0$. Здесь (см.п.I.7) степень $G^0 = G^\emptyset$ состоит из одного единственного элемента, который мы обозначили через 1. В этом случае каждое отображение $\omega : G^0 \longrightarrow G$, т.е. $\omega : \{1\} \longrightarrow G$, является отображением множества из одного элемента в G. Это отображение будет <u>отмечать</u> (см.п.2.I) некоторый элемент из G.

Если вернуться к терминологии из п.I.7 и взять $I = G^n$, то n-арную операцию можно рассматривать как функцию, определенную на G^n со значениями в G. Следовательно, множество всех n-арных операций, определенных в G, совпадает с множеством G^{G^n}, т.е. каждая такая операция может быть рассмотрена как элемент множества G^{G^n}. Отсюда, если множество G имеет мощность m, множество всех n-арных операций в G будет иметь мощность m^{m^n}. В частности, если m - конечно, то имеется конечное число n-арных операций. Всего операций в этом случае будет счетное число, включая даже случай $m = 1$. Если $m = \aleph_0$, т.е. G счетно, то множество всех n-арных операций на G будет иметь мощность $\aleph_0^{\aleph_0}$, которая совпадает с мощностью континуума, но тогда и множество всех операций в G будет иметь мощность континуума.

<u>6.2. Определение универсальной алгебры. Сигнатура алгебры.</u> Пусть дано множество G и Ω - некоторая совокупность операций на G. В таком случае будем говорить, что дана <u>универсальная алгебра</u>, или просто <u>алгебра</u>, $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$ с основным множеством G и множеством операций Ω. Элементы множества G называются также и элементами алгебры $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$. Очевидно, что алгебру $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$ можно рассматривать как реляционную систему определенного вида. Однако теория универсальных алгебр имеет свою проблематику, свои методы исследования, и ее нельзя рассматривать как частный случай теории реляционных систем.

Если через Ω_n обозначим множество всех n-арных операций из Ω, то напишем $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n \cup \ldots$, где $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, при $i \neq j$. Здесь некоторые Ω_i могут быть пустыми. Если для данного n множество n-арных операций можно вполне упорядочить по ординальному типу k_n, то последовательность $\langle 0, 0, \ldots ; 1, 1, \ldots ; n, n, \ldots \rangle$, где число n "взято в k_n экземплярах", называется <u>типом</u> алгебры $\mathcal{Y}$. Алгебры $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, имеющие один и тот же тип, называются однотипными.

Множество Ω всех символов операций алгебры $\mathcal{Y}$, для которых указаны их арности, называется сигнатурой данной алгебры. Сигнатуру алгебры можно представить в виде последовательности символов операций $<\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\xi, \dots>$, где $\xi < \alpha$, для некоторого ординального числа α. Часто у однотипных алгебр, если это не приводит к недоразумениям, соответствующие операции обозначаются тем же символом. В связи с этим, как правило, будем считать, что однотипные алгебры имеют одну и ту же сигнатуру. Если сигнатура фиксирована, то вместо выражения "алгебра $\mathcal{Y}=<G, \Omega>$" будем говорить "алгебра G", или "алгебра $\mathcal{Y}$".

6.3. Отношения, согласованные с операциями. Так как каждая n-арная операция является $(n+1)$-местным отношением и универсальная алгебра может быть рассмотрена как реляционная система, то к универсальным алгебрам можно применить конструкции и понятия реляционных систем. Особое значение в случае универсальных алгебр приобретает понятие согласованности отношений между однотипными алгебрами с их операциями. Учитывая общность и важность этого понятия в теории универсальных алгебр, приводим для этого случая определения в формах, имеющих наибольшее применение, и рассмотрим некоторые конкретные случаи.

Пусть даны алгебры $\mathcal{Y}_i = <G_i, \Omega>$, $i = 1, 2, \dots, m$, и $\rho \subseteq G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$, некоторое отношение между их элементами. Будем говорить, что отношение ρ согласовано с n-арной операцией $\omega \in \Omega$, если оно $(n+1)$-согласовано (в смысле п.3.8) с соответствующим $(n+1)$-арным отношением. Это означает, что для матрицы

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{1n+1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & x_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & x_{mn+1} \end{pmatrix}, \qquad (I)$$

где $x_{ij} \in G_i$, $j = 1, 2, \dots, n+1$, и $x_{in+1} = x_{i1} x_{i2} \dots x_{in}\omega$, $i = 1, 2, \dots, m$, из $(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) \in \rho$, для $j = 1, 2, \dots, n$, следует $(x_{1n+1}, x_{2n+1}, \dots, x_{mn+1}) \in \rho$. Используя обозначения из п.3.I. и учитывая, что $x_{in+1} = x_{i1} x_{i2} \dots x_{in}\omega$, условие согласованности отношений ρ с операцией ω можно записать следующим образом:

$$\mathop{\&}_{j=1}^{n} x_{ij}|_{i=1}^{m} \rho \Rightarrow x_{ij}|_{j=1}^{n} \omega|_{i=1}^{m} \rho. \tag{2}$$

Отношение ρ, согласованное со всеми операциями из Ω, называется m-местным соответствием между алгебрами $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_m$. В случае $m = 2$, который представляет особый интерес, будем говорить, что ρ является соответствием между алгебрами $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$. Если $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ совпадают $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$, то ρ называется соответствием алгебры $\mathcal{G}$. Если ρ, в свою очередь, является k-арной операцией, то ρ и ω называются <u>перестановочными операциями</u> [4, 20].

<u>6.4. Подалгебры и идеалы.</u> Пусть $\rho = A \subseteq G$ одноместное отношение в множестве G, т.е. $\rho = A$ – подмножество множества G. Это подмножество называется подалгеброй алгебры $\mathcal{G}$, если A является одноместным соответствием алгебры $\mathcal{G}$, т.е. из того, что $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$, следует $a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in A$ для всех $\omega \in \Omega$. В этом случае будем говорить также, что подмножество $A \subseteq G$ замкнуто относительно всех операций $\omega \in \Omega$. Множество всех подалгебр алгебры $\mathcal{G}$ обозначим через $S(\mathcal{G}) = S$.

Одноместное отношение $\rho = A$, т.е. подмножество множества G, называется i-идеалом относительно n-арной операции $\omega \in \Omega$, если $\rho = A \subseteq G$ $(n+1)$-согласовано с ω и системой $U, U, \ldots U, \rho, U, \ldots U$, где U – одноместное универсальное отношение, т.е. $U = G$ как множества, и ρ стоит в этой последовательности из n членов на i-том месте. Если операция ω является бинарной, то 1-идеалы называются правыми идеалами, 2-идеалы – левыми, подмножество, являющееся левым и правым идеалами, называется двусторонним идеалом. Заметим, что подмножество $A \subseteq G$ является левым (правым) идеалом относительно операции $xy\omega = xy$, если из $a \in A$ и любого $g \in G$ следует $ga \in A$ $(ag \in A)$. Более значительную роль идеалы играют в теории полугрупп и в теории колец, причем в последнем случае под идеалом кольца (см.п.6.11) понимается идеал относительно умножения, являющийся и подкольцом. Если множество A является i-идеалом относительно операции ω, то для любых $g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n \in G, a \in A$ имеет место $g_1 \ldots g_{i-1}\, a\, g_{i+1} \ldots g_n \omega \in A$. Если A является i-идеалом для любого i относительно любой операции $\omega \in \Omega$, то A называется идеалом алгебры $\mathcal{G}$. Дополнение $B = G \setminus A$ идеала A в алгебре G обладает следующим свойством: для любых $b_1, \ldots, b_n \in B$ и любой операции $\omega \in \Omega$ из $b_1 \ldots$

$...b_n\omega \in B$ следует $b_1 \in B, \ldots, b_n \in B$ и называется изолированным множеством относительно $\mathcal{U}$ [7].

6.5. Структуры подалгебр и идеалов универсальной алгебры. Пусть $A_i \leq G,\ i \in I$ некоторое семейство подалгебр (одноместных соответствий) алгебры $\mathcal{U}$. Подмножество $A = \bigcap_{i \in I} A_i$, равное пересечению всех подалгебр A_i, если не пусто, является подалгеброй. В самом деле, для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A,\ \omega \in \Omega$ имеем $a_1, a_2, \ldots,$ $a_n \in A \Rightarrow \forall i(a_1, a_2, \ldots, a_n \in A_i) \Rightarrow \forall i(a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in A_i) \Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in A$. Подобными рассуждениями можно показать, что пересечение i-идеалов, если не пусто, является i-идеалом.

В отдельных универсальных алгебрах пересечение некоторых подалгебр, или идеалов, или подмножеств других видов, может оказаться пустым. Например, существуют полугруппы, в которых пересечение некоторых левых или правых идеалов, следовательно, и подполугрупп, является пустым. В таких случаях оказывается удобным дополнить систему рассматриваемых подмножеств пустым множеством. В дальнейшем, не оговаривая это особо, будем считать, что всегда, когда в этом есть необходимость, такое дополнение выполнено.

Так как все множество G является подалгеброй, то множество $S(\mathcal{U})$ всех подалгебр алгебры $\mathcal{U}$ является системой замыканий, отсюда в силу п.4.5 следует, что множество $S(\mathcal{U})$ всех подалгебр алгебры $\mathcal{U}$ является полной структурой, в которой наибольшая нижняя грань совпадает с теоретико-множественным пересечением (в необходимых случаях пустое множество включается в число подалгебр), а наименьшая высшая грань, как правило, отличается от теоретико-множественного объединения.

Следуя п.4.5, введем оператор замыкания $\mathfrak{z}_S$, а именно, для каждого подмножества $M \leq G$ ставим $\mathfrak{z}_S(M) = \bigcap_{A \in S, A \geq M} A$. Обозначим также $\mathfrak{z}_S(M) = [M]$. $[M]$ – наименьшая подалгебра, содержащая множество M. Будем говорить, что подалгебра $[M]$ порождается множеством M, которое называется ее системой порождающих, или образующих.

Если $M = \{m\}$ состоит из одного элемента, то подалгебра $[m]$ называется циклической. Если существует такой элемент $g \in G$, что $[g] = G$, то $\mathcal{U}$ называется циклической алгеброй. Легко видеть, что если $M = \{g_i / i \in I\}$ и $A = [M]$, то любой элемент $g \in A$ выражается через g_i, т.е. $g = W(g_k)$, где k принимает конечное число значений из I. Рассуждая подобным образом, нетрудно показать, что множество всех идеалов алгебры $\mathcal{U}$ является полной структурой, причем для i-идеалов наибольшая нижняя грань и наименьшая верхняя грань совпадают с теоретико-множественными операциями пересечения и объединения. В частности, в случае полугрупп можно говорить о полных структурах левых, правых и двусторонних идеалов данной полугруппы. Это будут полные структуры относительно теоретико-множественных операций пересечения и объединения.

В свою очередь, множество всех изолированных подмножеств относительно алгебры $\mathscr{G}$ дуально-изоморфно полной структуре всех идеалов алгебры $\mathscr{G}$, (если $B_1 \subseteq B_2$, где B_1, B_2 – изолированные множества, то для соответствующих идеалов следует $A_1 \supseteq A_2$). Для установления дуального изоморфизма достаточно каждому изолированному подмножеству B сопоставить идеал $A = G \setminus B$.

6.6. Произведение алгебр. Пусть дано семейство алгебр $\mathscr{G}_i = \langle G_i, \Omega \rangle$, $i \in I$. Пусть дальше $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$ – произведение множеств G_i. На множестве $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$ определяем каждую из операций $\omega \in \Omega$ следующим естественным образом. Если операция $\omega \in \Omega$ n-арна и $(a_{ij}) = (\ldots, a_{ij}, \ldots)$, $i \in I$, $j = 1, 2, \ldots, n$, n элементов из $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$, то ставим по определению

$$(a_{i1})(a_{i2})\cdots(a_{in})\omega = (a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in}\omega).$$

В таких случаях говорят, что операция определена "покомпонентно". Итак, мы получили алгебру $\mathscr{G} = \langle G, \Omega \rangle$. Будем писать $\mathscr{G} = \prod\limits_{i \in I} \mathscr{G}_i$. Легко видеть, что m-местное отношение $\rho \subseteq \prod\limits_{i \in I} G_i = G$, $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, является соответствием между алгебрами $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2, \ldots, \mathscr{G}_m$ тогда и только тогда, когда ρ является подалгеброй алгебры $\mathscr{G} = \langle G, \Omega \rangle$. В самом деле, утверждения "ρ – соответствие между алгебрами $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2, \ldots, \mathscr{G}_m$" и "$\rho$ – подалгебра алгебры $\mathscr{G} = \prod\limits_{i \in I} \mathscr{G}_i$" эквивалентны следующей импликации

$$\mathop{\&}_{j=1}^{n} (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \in \rho \Longrightarrow (a_{11} \ldots a_{1n}\omega, \ldots, a_{m1} \ldots a_{mn}\omega) \in \rho$$

для любого $\omega \in \Omega$.

6.7. Гомоморфизм алгебр, эндоморфизмы. Пусть даны две алгебры $\mathscr{G}_1 = \langle G_1, \Omega \rangle$ и $\mathscr{G}_2 = \langle G_2, \Omega \rangle$ одной и той же сигнатуры. Отображение $\varphi : G_1 \to G_2$ называется гомоморфизмом алгебры $\mathscr{G}_1$ в алгебру $\mathscr{G}_2$, если φ $(n+1)$-согласовано с каждой операцией $\omega \in \Omega$, другими словами, если для любой матрицы

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} & g_{1n+1} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} & g_{2n+1} \end{pmatrix}$$

из $g_{1i}\in G_1$, $g_{2i}\in G_2$, $i=1,2,\ldots,n+1$, $g_{11}g_{12}\cdots g_{1n}\omega=g_{1n+1}$,
$g_{21}g_{22}\cdots g_{2n}\omega=g_{2n+1}$ и $g_{1i}\varphi=g_{2i}$, $i=1,2,\ldots,n$,
следует $g_{1n+1}\varphi=g_{2n+1}$. Тот факт, что φ гомоморфизм алгебры $\mathcal{Y}_1$ в алгебру $\mathcal{Y}_2$, обычно записывается следующим образом:

$$g_{11}g_{12}\cdots g_{1n}\omega\varphi=g_{11}\varphi g_{12}\varphi\cdots g_{1n}\varphi\omega,$$

для любых $g_{11},g_{12},\ldots,g_{1n}\in G_1$. Если алгебры $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ совпадают $\mathcal{Y}_1=\mathcal{Y}_2=\mathcal{Y}$, то φ называется эндоморфизмом алгебры $\mathcal{Y}$. Гомоморфизм φ алгебры $\mathcal{Y}_1$ на алгебру $\mathcal{Y}_2$ называется изоморфизмом, если φ является взаимно-однозначным соответствием между множествами G_1 и G_2. Если при этом $\mathcal{Y}_1=\mathcal{Y}_2=\mathcal{Y}$, то φ называется автоморфизмом алгебры $\mathcal{Y}$.

Класс алгебр $\mathcal{R}$ называется абстрактным, если вместе с данной алгеброй содержит и все ее изоморфные образы. В таких классах, как правило, изоморфные алгебры отождествляются.

Если $M=\{g_i, i\in I\}$ – система образующих алгебры $\mathcal{Y}$ и $\varphi:\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}\varphi$ – гомоморфизм, то множество $M\varphi=\{g_i\varphi, i\in I\}$ является системой образующих алгебры $\mathcal{Y}\varphi$.

В самом деле, пусть $b\in\mathcal{Y}\varphi$ и g один из его прообразов, т.е. $g\varphi=b$. Пусть $g=W(g_k)$ одно выражение g через образующие g_i. Тогда $b=g\varphi=W(g_k)\varphi=W(g_k\varphi)$, т.е. b выражается через $g_i\varphi$, $i\in I$.

Заметим дальше, что каждый гомоморфизм $\varphi:\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}\varphi$ однозначным образом определяется своим ограничением $\tilde\varphi$ на любую систему образующих $M=\{g_i, i\in I\}$ алгебры $\mathcal{Y}$.

В самом деле, в условиях теоремы имеем $g_i\tilde\varphi=g_i\varphi$, $i\in I$. Пусть φ_1 некоторый гомоморфизм $\varphi_1:\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}\varphi$, для которого $g_i\varphi_1=g_i\tilde\varphi$. Тогда для любого $g\in\mathcal{Y}$ имеем $g\varphi_1=W(g_k)\varphi_1=W(g_k\varphi_1)=W(g_k\tilde\varphi)=W(g_k\varphi)=W(g_k)\varphi=g\varphi$. Таким образом, эндоморфизмы φ_1 и φ совпадают. Отсюда следует, что любой гомоморфизм $\varphi:\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}\varphi$, следовательно, и любой эндоморфизм $\varphi:\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}$, является продолжением своего ограничения $\tilde\varphi$ на произвольной системе образующих, в смысле следующего определения. Соответствие $\rho\subseteq G_1\times G_2$ между алгебрами $\mathcal{Y}_1=\langle G_1,\Omega\rangle$ и $\mathcal{Y}_2=\langle G_2,\Omega\rangle$ является продолжением отображения $\tilde\varphi:M\to G_2$, где M – некоторая система образующих алгебры $\mathcal{Y}_1$, если ρ наименьшее соответствие, для которого $\rho\supseteq\varphi$.

Вообще говоря, продолжение произвольного отображения $\tilde\varphi:M\to G_2$ не всегда будет гомоморфизмом алгебры $\mathcal{Y}_1$ в $\mathcal{Y}_2$, однако каждое отображение $\tilde\varphi:M\to G_2$ продолжается до соответствия между алгебрами $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$. В самом деле, на базе отображения $\tilde\varphi$ определим отношение $\varphi\subseteq G_1\times G_2$ следующим образом: $g_1\varphi g_2$ тогда и только тогда, когда $g_1=W_1(g_k)$ и $g_2=W_1(g_k\tilde\varphi)$. Пусть $\omega\in\Omega$ n-арная операция и $g_{1j}\,\varphi\, g_{2j}$, $j=1,\dots,n$. Докажем, что $g_{11}\dots g_{1n}\omega\varphi g_{21}\dots g_{2n}\omega$. Пусть $g_{1j}=w_j(g_{kj})$ такие представления g_{1j} через образующие, что $g_{2j}=w_j(g_{kj}\tilde{\varphi})$. Тогда $g_{11}\dots g_{1n}\omega=w_1(g_{k1})\dots w_n(g_{kn})\omega$ и $g_{21}\dots g_{2n}\omega =w_1(g_{k1}\tilde{\varphi})\dots w_n(g_{kn}\tilde{\varphi})\omega$, что требовалось. Легко видеть, что если соответствие $\rho\geq\tilde{\varphi}$, то $\rho\geq\varphi$. Этим доказательство завершается.

6.8. Эндоморфные образы данной алгебры. Пусть φ некоторое соответствие между алгебрами $\mathcal{G}_1=\langle G_1,\Omega\rangle$ и $\mathcal{G}_2=\langle G_2,\Omega\rangle$, т.е. φ – отношение, согласованное со всеми операциями из Ω. Это означает, что для каждой n-арной операции $\omega\in\Omega$ любых $g_1,\dots,g_n\in G$ и $g_1',\dots,g_n'\in G_2$, из $g_i\varphi g_i'$, $i=1,\dots,n$, следует $g_1\dots g_n\omega\,\varphi\, g_1'\dots g_n'\omega$.

Первая проекция $\Pi p_1\varphi$ и вторая проекция $\Pi p_2\varphi$ отношения φ являются подалгебрами соответственно алгебр $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$. Покажем это, например, для второй проекции $\Pi p_2\varphi$. Пусть $\omega\in\Omega$ n-арная операция и $g_1',\dots,g_n'\in\Pi p_2\varphi$. Это означает, что существуют $g_1,\dots,g_n\in\Pi p_1\varphi$ такие, что $g_i\varphi g_i'$, $i=1,\dots,n$, но тогда $g_1\dots g_n\omega\,\varphi\, g_1'\dots g_n'\omega$, откуда следует, что $g_1'\dots g_n'\omega\in\Pi p_2\varphi$, что требовалось.

Если φ является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{G}_1$ в алгебру $\mathcal{G}_2$, то $\Pi p_2\varphi$ называется гомоморфным образом алгебры $\mathcal{G}_1$. Если $\mathcal{G}_1=\mathcal{G}_2=\mathcal{G}$ и φ – эндоморфизм алгебры $\mathcal{G}$, то $\Pi p_2\varphi=\mathcal{G}\varphi$ называется эндоморфным образом алгебры $\mathcal{G}$. Из доказанного следует, что каждый эндоморфный образ алгебры $\mathcal{G}$ является подалгеброй алгебры $\mathcal{G}$. Отметим, что обратное утверждение не всегда имеет место, т.е. не каждая подалгебра является эндоморфным образом данной алгебры. Поэтому задача описания всех эндоморфных образов представляет самостоятельный интерес для каждой отдельно взятой алгебры.

6.9. Конгруэнции. В теории универсальных алгебр особую роль играют эквиваленции, согласованные со всеми операциями алгебры. Пусть θ – эквиваленция на множестве G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Эквиваленция θ называется конгруэнцией алгебры $\mathcal{G}=\langle G,\Omega\rangle$, если θ согласовано с каждой операцией $\omega\in\Omega$, т.е. для любой матрицы

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n & g_{n+1} \\ g_1' & g_2' & \cdots & g_n' & g_{n+1}' \end{pmatrix}$$

элементов алгебры $\mathcal{G}$ из $g_i\theta g_i'$, $i=1,2,\dots,n$, $g_{n+1}=g_1g_2\dots g_n\omega$, $g_{n+1}'=g_1'g_2'\dots g_n'\omega$ следует $g_{n+1}\,\theta\, g_{n+1}'$.

Очевидно, что универсальное отношение $\mathcal{U}$ и равенство ε являются конгруэнциями в любой алгебре. С другой стороны, если θ_j некоторая совокупность конгруэнций, то $\theta^{\cap} \rightleftharpoons \bigcap_j \theta_j$ тоже конгруэнция. Рефлексивность, симметричность, транзитивность и согласованность $\theta^{\cap}$ следуют непосредственно из того факта, что $g\theta^{\cap}g' \Leftrightarrow \forall_j (g\theta_j g')$. Тогда, учитывая лемму п.4.4, получаем: Множество $Con\,\mathcal{G}$ всех конгруэнций алгебры $\mathcal{G}$ является полной структурой, в которой наибольшая нижняя грань совпадает с обычным пересечением (в теоретико-множественном смысле) отношений. Что касается наименьшей верхней грани, то она, как правило, отличается от теоретико-множественного объединения отношений, но, как будет показано ниже, совпадает с наименьшей эквиваленцией, содержащей каждое θ_j, следовательно, и их объединение $\bigcup_j \theta_j$. Так как $\bigcup_j \theta_j$ рефлексивно и симметрично, то для получения наименьшей такой эквиваленции $\theta^{\cup}$ надо взять (см.п.3.7) транзитивное замыкание отношения $\bigcup_j \theta_j$. Таким образом, эквиваленция $\theta^{\cup}$ обладает следующим свойством:

$$g\theta^{\cup}g' \Leftrightarrow \exists_{j_0}\exists_{j_2}\ldots\exists_{j_k} (g\theta_{j_0} g_1 \theta_{j_2} \ldots \theta_{j_{k-1}} g_k \theta_{j_k} g'),$$

т.е. $\quad g\theta^{\cup}g' \Leftrightarrow \exists_{j_0}\ldots\exists_{j_k} (g\theta_{j_0}\theta_{j_1}\ldots\theta_{j_k} g')$.

Для доказательства согласованности $\theta^{\cup}$ с операциями алгебры $\mathcal{G}$ заметим, что если рассматриваемые отношения являются рефлексивными, то любые их произведения рефлексивны и из $a\rho b$ следует $a\rho b\theta b$, т.е. $a\rho\theta b$.

Пусть $\omega\in\Omega$, n-арная операция и элементы g_i, g_i', $i=1,\ldots,n$ такие, что $g_1\theta^{\cup}g_1'$, $g_2\theta^{\cup}g_2'$, ..., $g_n\theta^{\cup}g_n'$. Тогда из определения $\theta^{\cup}$ следует, что в данной совокупности существуют конгруэнции $\theta_{j_1 1},\ldots,\theta_{j_1 k_1}$ такие, что $g_1\theta_{j_1 1}\ldots\theta_{j_1 k_1} g_1'$, конгруэнции $\theta_{j_2 1},\ldots,\theta_{j_2 k_2}$ такие, что $g_2\theta_{j_2 1}\ldots\theta_{j_2 k_2} g_2'$ и т.д., существуют конгруэнции $\theta_{j_n 1},\ldots,\theta_{j_n k_n}$ такие, что $g_n\theta_{j_n 1}\ldots\theta_{j_n k_n} g_n'$. Тогда, учитывая сделанные выше замечания, можем писать:

$$g_1\theta_{j_1 1}\ldots\theta_{j_1 k_1}\theta_{j_2 1}\ldots\theta_{j_2 k_2}\ldots\theta_{j_n 1}\ldots\theta_{j_n k_n} g_1'$$

$$g_2\theta_{j_1 1}\ldots\theta_{j_2 k_1}\theta_{j_2 1}\ldots\theta_{j_2 k_2}\ldots\theta_{j_n 1}\ldots\theta_{j_n k_n} g_2'$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$g_n\theta_{j_2 1}\ldots\theta_{j_1 k_1}\theta_{j_2 1}\ldots\theta_{j_2 k_2}\ldots\theta_{j_n 1}\ldots\theta_{j_n k_n} g_n'.$$

Отсюда, если данные отношения согласованы с операцией ω, то и их произведение согласовано с ω, получаем $g_1 g_2\ldots g_n\omega\theta_{j_1 1}\ldots$

$\theta_{j_1k_1}\theta_{j_21}\cdots\theta_{j_2k_2}\cdots\theta_{j_n1}\cdots\theta_{j_nk_n}g_1'g_2'\cdots g_n'\omega$, т.е. $g_1g_2\cdots g_n\,\omega\,\theta^u$ $\theta^u g_1'g_2'\cdots g_n'\omega$.

Назовем конгруэнцию θ <u>вполне характеристической</u>, если она согласована со всеми эндоморфизмами данной алгебры, т.е. если для матрицы

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{pmatrix}$$

элементов алгебры $\mathcal{U}$ и любого эндоморфизма α этой алгебры из $g_1\alpha=g_2$, $g_1'\alpha=g_2'$ и $g_1\theta g_1'$ следует $g_2\theta g_2'$, т.е. из $g_1\theta g_1'$ следует $g_1\alpha\,\theta g_1'\alpha$. Легко проверить, что пересечение и объединение (в смысле конгруэнций) вполне характеристических конгруэнций являются вполне характеристическими конгруэнциями. Отсюда следует, что множество всех вполне характеристических конгруэнций является полной подструктурой полной структуры $Con\,\mathcal{U}$.

<u>6.10. Фактор-алгебры.</u> Пусть θ некоторая конгруэнция алгебры $\mathcal{U}=<G,\Omega>$. Так как θ является эквиваленцией, то можно рассмотреть фактор-множество G/θ. На множестве G/θ определим все операции $\omega\in\Omega$ следующим образом. Если $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_n\in G/\theta$, где через $\tilde{a}$, как и в п.2.3, обозначается класс эквиваленции θ, содержащий элемент a, и ω n-арная операция, то ставим по определению

$$\tilde{a}_1\tilde{a}_2\ldots\tilde{a}_n\omega=\widetilde{a_1a_2\ldots a_n\omega}. \tag{I}$$

Покажем, что это определение корректно. Пусть $b_1,b_2,\ldots,b_n$ другие "представители" тех же классов. Тогда, для $i=1,2,\ldots,n$ имеем

$$\tilde{a}_i=\tilde{b}_i\Rightarrow a_i\theta b_i\Rightarrow a_1a_2\ldots a_n\omega\,\theta\, b_1b_2\ldots b_n\omega\Rightarrow\widetilde{a_1a_2\ldots a_n\omega}=\widetilde{b_1b_2\ldots b_n\omega}.$$

Таким образом, получили алгебру $<G/\theta,\Omega>$, которая называется фактор-алгеброй алгебры $\mathcal{U}$ по конгруэнции θ и обозначается через $\mathcal{U}/\theta$.

Естественное отображение (п.2.3) $\alpha: G\to G/\theta$, для которого $a\alpha=\tilde{a}$ является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{U}$ на фактор-алгебру $\mathcal{U}/\theta$. В самом деле, ввиду (I) имеем

$$a_1\alpha a_2\alpha\ldots a_n\alpha\,\omega=\tilde{a}_1\tilde{a}_2\ldots\tilde{a}_n\omega=\widetilde{a_1a_2\ldots a_n\omega}=a_1a_2\ldots a_n\omega\alpha.$$

Гомоморфизм α называется естественным гомоморфизмом алгебры $\mathcal{U}$, а его ядро (п.2.3) $\tilde{\alpha}$ равно θ, поэтому θ называется ядром гомоморфизма α.

Между конгруэнциями фактор-алгебры $\mathcal{U}/\theta$ и конгруэнциями алгебры $\mathcal{U}$, которые содержат θ, имеется взаимно-однозначное соответствие. В самом деле, такое соответствие получим, если конгруэнции $\rho \geqslant \theta$ сопоставить отношение $\tilde{a}\rho'\tilde{b}$, когда $a\rho b$, и, обратно, конгруэнции ρ' алгебры $\mathcal{U}/\theta$ сопоставить отношение ρ, для которой $a\rho b$, когда $\tilde{a}\rho'\tilde{b}$. Легко проверить, что при этом конгруэнции сопоставляется конгруэнция и что соответствие является взаимно-однозначным.

6.II. Некоторые примеры универсальных алгебр. Несмотря на то, что общая теория универсальных алгебр имеет свою проблематику, важное значение как в рамках этой общей теории, так и в приложениях имеют конкретные классы универсальных алгебр.

Обычно выделение отдельных классов универсальных алгебр производится путем конкретизации сигнатуры, например, указанием типа и перечислением условий, характеризующих данный класс универсальных алгебр. Начнем со случая алгебры с унарными операциями, хотя широко такие алгебры стали изучаться относительно недавно - классические примеры универсальных алгебр содержат, как правило, бинарные операции.

а) Алгебры типа $<0,0,\ldots,1,1,\ldots>$, т.е. у которых все операции не более чем унарны, называются унарными алгебрами. Алгебру, все операции которой унарны, следуя А.И.Мальцеву [I], будем называть уноидом. Изучение унарных алгебр представляет естественный интерес с точки зрения общей теории универсальных алгебр, тем не менее их значение и особое внимание к ним объясняются их связью с теорией автоматов. С абстрактной точки зрения автомат можно рассматривать как унарную универсальную алгебру $\mathcal{A} = <A, \Omega>$, где A - множество элементов алгебры, - будет множеством состояний автомата, и каждая операция $\omega \in \Omega$ интерпретируется как входной сигнал (вход). Унарную алгебру $\mathcal{A} = <A, \Omega>$ можно рассматривать как множество A заданного вместе с некоторой совокупностью Ω отображений множества A в себя.

б) Один из самых ранних в историческом отношении примеров универсальных алгебр, которые продолжают занимать ведущее место как в общей теории, так и в приложениях,- это понятие группы. Группы возникли в связи с изучением обратимых преобразований, т.е. самых общих форм симметрии. Поэтому группы находят широкое применение в различных областях от теории алгебраических уравнений (где возникло это понятие), геометрии и топологии в математике до кристаллографии, кибернетики и различных вопросов современной физики. Группой называется алгебра $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$; типа $\langle 0, 1, 2 \rangle$, в которой выполняется некоторый набор свойств - аксиомы группы. Итак, Ω содержит три операции: одна - нульарная операция, отмечаемый ею элемент обозначим через e; одна унарная операция ω, ее обозначим так, как обозначается обычно обратный элемент, $a\omega = a^{-1}$; одна бинарная операция, которая называется групповой и, как правило, обозначается как обычное умножение, и в этом случае группа называется мультипликативной. Таким образом, сигнатура группы имеет вид $\langle e, ^{-1}, \cdot \rangle$. Существуют различные наборы свойств, определяющих группу. Одной из самых распространенных и простых систем аксиом групп является следующая:

1^0. Групповая операция является ассоциативной, т.е. для любых $x, y, z \in G$ имеет место $(xy)z = x(yz)$.

2^0. Элемент e играет роль (правой) единицы, т.е. для любого $x \in G$ имеет место $xe = x$.

3^0. Для каждого $x \in G$ элемент x^{-1} удовлетворяет тождеству $xx^{-1} = e$, т.е. x^{-1} играет роль (правого) обратного элемента для элемента x.

Нетрудно показать, что элемент e является и левой единицей, а элемент x^{-1} является и левым обратным элементом, т.е. что выполняются равенства $ex = x$ и $x^{-1}x = e$. В самом деле, используя условия 1^0, 2^0, 3^0, получаем: $xx^{-1} = e = e\,e = e(xx^{-1})$, отсюда $e(xx^{-1}) = xx^{-1}$. Но тогда $[e(xx^{-1})](x^{-1})^{-1} = (xx^{-1})(x^{-1})^{-1}$, отсюда $e[(xx^{-1})(x^{-1})^{-1}] = x[x^{-1}(x^{-1})^{-1}]$, из этого следует $e(x(x^{-1}(x^{-1})^{-1})) = xe = x$, т.е. $e(xe) = x$, отсюда $ex = x$, что требовалось. Дальше из $xx^{-1} = e$ получаем $x^{-1}(xx^{-1}) = x^{-1}e$, или $(x^{-1}x)x^{-1} = x^{-1}$, отсюда $((x^{-1}x)x^{-1})(x^{-1})^{-1} = x^{-1}(x^{-1})^{-1}$, т.е. $(x^{-1}x)(x^{-1}(x^{-1})^{-1}) = e$, откуда $(x^{-1}x)e = e$, и, наконец, $x^{-1}x = e$.

Если групповая операция коммутативна, то часто называется сложением и обозначается через $+$, элеменет, отмечаемый нульарной операцией, обозначается через 0 и называется нулем, а элемент $x\omega$, где ω унарная операция, - через $-x$ и называется противоположным элементу x. Тогда аксиомы (аддитивной) группы принимают вид:

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$; 2. $x+0 = x$; 3. $x+(-x) = 0$;

4. $x+y = y+x$.

Нетрудно показать, что группу можно определить так же, как алгебру $\mathcal{G} = \langle G, \cdot \rangle$ с одной бинарной операцией, т.е. типа $\langle 2 \rangle$, в которой удовлетворяются условия: $\forall x, y, z((xy)z = x(yz))$ – ассоциативный закон, $\forall a \forall b, \exists x\,(ax = b)$, аналогично $\forall a \forall b, \exists y (ya = b)$ – разрешимость уравнений $ax = b$ и $ya = b$. Заметим, что в записи этих условий помимо квантора всеобщности, который, как легко видеть, достаточен для символической записи аксиом I°., 2°., 3°., участвует и квантор существования. Следовательно, определение одного и того же алгебраического объекта возможно при помощи различных средств формальной логики. Этот факт играет существенную роль в классификации универсальных алгебр. Возможны (и найдены) и другие определения понятия группы. Отметим здесь только еще одно из них. Группу можно определить как алгебру типа $\langle 2,2,2 \rangle$, т.е. с тремя бинарными операциями: группового умножения „$\cdot$", правого „/" и левого "\\" деления, которые удовлетворяют условиям: I. $(xy)z = x(yz)$; 2. $(xy)/y = x$; 3. $y \backslash (yx) = x$, для любых $x, y, z, \in G$.

Переходим к другим примерам универсальных алгебр.

в) Класс всех алгебр типа $\langle 2 \rangle$ называется классом группоидов, т.е. группоидом называется любая алгебра с одной бинарной операцией. Это самый широкий класс алгебр с одной бинарной операцией.

г) Ассоциативный группоид называется полугруппой, т.е. полугруппа – это алгебра типа $\langle 2 \rangle$ с одной операцией, которая удовлетворяет ассоциативному закону. Понятие полугруппы возникло в связи с изучением всевозможных отображений некоторого множества в себя.

д) Если в третьем из приведенных нами определений группы отказаться от ассоциативного закона и добавить ниже приведенные условия $2'$ и $3'$, то получим понятие квазигруппы, т.е. квазигруппа – это алгебра типа $\langle 2,2,2 \rangle$ с сигнатурой $\langle \cdot, /, \backslash \rangle$, в которой удовлетворяются приведенные условия 2,3 и $2'$. $(x/y)y = x$; $3'$. $y(y \backslash x) = x$.

е) Алгебра типа $\langle 0,2,2,2 \rangle$ с сигнатурой $\langle e, \cdot, /, \backslash \rangle$, в которой удовлетворяются помимо указанных условий 2, $2'$, 3, $3'$ и условия $ex = xe = x$, называется лупой.

Определения квазигруппы и лупы можно получить и исходя из второго определения группы, приведенной в пункте б).

ж) Кольцом называется алгебра типа $\langle 0,1,2,2 \rangle$ с сигнатурой $\langle 0, -, +, \cdot \rangle$, которая относительно операций $\langle 0, -, + \rangle$ является аддитивной группой, а умножение связано со сложением законами правой и левой дистрибутивности $(x+y)z=xz+yz$, $x(y+z)=xy+xz$. Если кроме этого имеет место коммутативный или ассоциативный законы, то кольцо называется коммутативным, соответственно, ассоциативным, если выполняются тождества $x^2=0$, $(xy)z+(yz)x+(zx)y=0$, то кольцо называется лиевым. Кольцо, в котором множество всех отличных от нуля элементов составляет группу относительно умножения, называется телом. Коммутативное тело называется полем. Отметим, что понятия тела и поля не являются универсальными алгебрами в смысле определения п. 6.2 , так как здесь унарная операция $^{-1}$ не применима к элементу 0. Эти случаи представляют собой примеры так называемых частичных алгебр.

з) Отметим еще случай векторных пространств и линейных алгебр. Векторным пространством над полем P называется алгебра $\mathcal{Y}$ сигнатуры $\langle 0, -, +, P\rangle$, которая относительно операций $\langle 0, -, +\rangle$ является коммутативной аддитивной группой, а все операции из P являются унарными, и множество P в свою очередь является полем. При этом для любых $x, y\in\mathcal{Y}$ и $\rho, \rho_1, \rho_2\in P$ имеют место тождества: $(x+y)\rho=x\rho+y\rho$; $x(\rho_1+\rho_2)=x\rho_1+x\rho_2$; $(x\rho_1)\rho_2=x(\rho_1\rho_2)$; $xe=x$, где e – единица поля P. Если алгебра $\mathcal{Y}$ имеет сигнатуру $\langle 0, -, +, \cdot, P\rangle$ так, что относительно операций $\langle 0, -, +, \cdot\rangle$ является кольцом, а относительно операций $\langle 0, -, +, P\rangle$ – векторным пространством и удовлетворяется еще условие $(xy)\rho=x(y\rho)=(x\rho)y$, то она называется линейной алгеброй над полем P. Иногда слово "линейная" опускается.

и) Наконец отметим, что понятие структуры, которое было дано в п.4.3, также можно определить в терминах универсальной алгебры. Это алгебра типа $\langle 2,2\rangle$, в которой удовлетворяются условия (операции обозначены символами $\cup$ и $\cap$):

1. $a\cap a=a$; $a\cup a=a$;
2. $a\cap b=b\cap a$; $a\cup b=b\cup a$;
3. $(a\cap b)\cap c=a\cap(b\cap c)$, $(a\cup b)\cup c=a\cup(b\cup c)$;
4. $a\cap(a\cup b)=a$, $a\cup(a\cap b)=a$.

Имеются, конечно, и другие классы конкретных универсальных алгебр – груды, почти-кольца, кольцоиды и т.д., а также ряд их обобщений, такие как Ω-группы, Ω-кольцоиды и др., но здесь на них не будем останавливаться. С некоторыми из таких алгебр можно ознакомиться по книге [4].

Глава II. ТОЖДЕСТВА В УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ. МНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Алгебры слов. Тождества. Многообразия

1.1. Алгебры слов. Тождества. Рассмотрим класс всех универсальных алгебр некоторого данного типа, причем будем считать, что они имеют одну и ту же сигнатуру Ω. Среди этих алгебр особое место занимают так называемые алгебры слов, к построению которых мы переходим.

Пусть $X=\{x_i, i\in I\}$ некоторое множество символов, которые будем называть также свободными элементами, предметными переменными или свободными образующими, а множество X – алфавитом или множеством свободных образующих. Множество X имеет произвольную мощность, в частности может быть и пустым. Если сигнатура Ω содержит нульарные операции, то обозначим их символами $e_1, e_2, \ldots$.

Построим множество Ω-слов $S(\Omega,X)$ следующим образом: 1. Элементы множества X и символы нульарных операций являются Ω-словами; 2. Если $u_1,\ldots,u_n$, $n\geqslant 1$ некоторая совокупность Ω-слов и $\omega\in\Omega$ n-арная операция, то выражение $u_1 u_2 \ldots u_n \omega$ является Ω-словом. 3. Ω-словами являются только те выражения, которые получаются по правилам 1 и 2. Два Ω-слова считаются равными, если они совпадают графически, т.е. если символы, стоящие на одинаковых местах, совпадают. Превращаем множество $S(\Omega,X)$ в алгебру $\langle S(\Omega,X),\Omega\rangle$, определяя операции $\omega\in\Omega$ следующим образом. Каждая нульарная операция отмечает символ, которым она обозначена. Если $u_1,\ldots,u_n$, $n\geqslant 1$, n Ω-слов, взятых в данном порядке, и $\omega\in\Omega$ некоторая n-арная операция $n\geqslant 1$, то результатом применения операции ω к Ω-словам $u_1,\ldots,u_n$ является Ω-слово $u_1\ldots u_n\omega$.

Таким образом, мы получили алгебру Ω-слов $\langle S(\Omega,X),\Omega\rangle$. Множество X будет системой образующих алгебры $\langle S(\Omega,X),\Omega\rangle$. Считая сигнатуру Ω фиксированной, вместо "Ω-слово" будем говорить "слово" и $S(\Omega,X)$ обозначим через $S(X)$. Если множество

X пусто и Ω не содержит нульарных операций, то алгебра $S(X)$ пуста. Если $X=\emptyset$ и Ω содержит нульарные операции, то $S(X)=S(\emptyset)$ не пусто и состоит из символов нульарных операций и всех слов, составленных из символов нульарных операций при помощи символов операции арности $n\geqslant 1$. Если $\Omega=\emptyset$, то $S(X)$ совпадает с множеством X.

Формальное равенство $w_1=w_2$ двух слов из $S(X)$ называется тождеством. ~~Будем говорить, что тождество $w_1=w_2$~~ выполняется в алгебре $\mathcal{Y}=<G,\Omega>$, если при любой замене символов нульарных операций, входящих в состав w_1 и w_2, элементами которых они отмечают в алгебре $\mathcal{Y}$, символов из X произвольными элементами множества G (один и тот же символ при каждом вхождении заменяется одним и тем же элементом множества G), при этом операциям $\omega\in\Omega$, входящим в состав слов w_1 и w_2, придается тот конкретный смысл, который они имеют в алгебре $\mathcal{Y}$, то w_1 и w_2 представляют один и тот же элемент алгебры $\mathcal{Y}$.

Множество всех тождеств, составленных из элементов множества $S(X)$, которые выполняются в каждой алгебре $\mathcal{Y}$ некоторого класса универсальных алгебр $\mathcal{R}$, является вполне характеристической конгруэнцией алгебры $<S(X),\Omega>$.

В самом деле, очевидно, что $w_1=w_1$ является тождеством в любой алгебре, также, если $w_1=w_2$ тождество, то и $w_2=w_1$ тождество. Дальше из того, что $w_1=w_2$ и $w_2=w_3$ тождества, следует, что $w_1=w_3$ – тождество. Следовательно, множество всех тождеств является эквиваленцией. Пусть теперь $w_1=w_1', \dots, w_n=w_n'$ тождества в $\mathcal{Y}$ и ω некоторая n-арная операция, тогда непосредственной проверкой убеждаемся, что $w_1\dots w_n\omega=w_1'\dots w_n'\omega$ также тождество. Если x_k, где k пробегает некоторое множество индексов, множество всех свободных элементов, входящих в состав слова w, то будем писать $w(x_k)$. Пусть теперь $w_1(x_k)=w_2(x_s)$ тождество и φ некоторый эндоморфизм алгебры $<S(X),\Omega>$. Допустим, что $x_i\varphi=u_i(x_{t_i})$, $i\in I$, тогда формальное равенство $w_1\varphi=w_2\varphi$ принимает вид $w_1(x_k\varphi)=w_2(x_s\varphi)$ или $w_1(u_k(x_{t_k}))=w_2(u_s(x_{t_s}))$, подстановка g_{t_k}, g_{t_s} соответственно вместо x_{t_k}, x_{t_s} в последнем выражении равносильна подстановке $u_k(g_{t_k})$ и $u_s(g_{t_s})$ вместо x_k и x_s в первоначальном, которое является тождеством в $\mathcal{Y}$. Следовательно, полученное в результате эндоморфизма φ формальное равенство будет тождеством. Итак, множество всех тождеств замкнуто относительно эндоморфизмов.

Вполне характеристическую конгруэнцию, состоящую из всех тождеств класса $\mathcal{R}$, обозначим через $\theta(\mathcal{R})$.

Таким образом, в каждой алгебре слов имеется вполне характеристическая конгруэнция, соответствующая классу $\mathcal{R}$. Она состоит из тождеств, выполняющихся в классе $\mathcal{R}$.

<u>1.2. Многообразия универсальных алгебр.</u> Класс всех однотипных алгебр, удовлетворяющих данной системе тождеств Λ, называется многообразием. Примерами многообразий могут служить некоторые из классов алгебр, приведенных в п.1.6.II. Однако неправильно будет считать, что любой класс алгебр является многообразием. Например, класс всех полугрупп с сокращением справа, т.е. удовлетворяющих условию $\forall x\ y\ z\ (xz = yz \Longrightarrow x = y)$, не является многообразием. Это получается ввиду того, что гомоморфный образ полугруппы с сокращением не всегда есть полугруппа с сокращением, из следующей теоремы Г.Биркгофа ([29],см.также[1]):

Для того чтобы непустой класс алгебр $\mathfrak{M}$ был многообразием, необходимо и достаточно, чтобы: 1. Декартовое произведение алгебр из $\mathfrak{M}$ принадлежало $\mathfrak{M}$. 2. Любая подалгебра произвольной алгебры из $\mathfrak{M}$ принадлежала $\mathfrak{M}$. 3. Любой гомоморфный образ произвольной алгебры из $\mathfrak{M}$ принадлежал $\mathfrak{M}$. Другими словами, класс $\mathfrak{M}$ должен быть замкнут относительно операций декартовых произведений, взятия подалгебр и перехода к гомоморфным образам.

Как следует из предыдущего пункта, множество Λ всех тождеств многообразия $\mathfrak{M}$ является вполне характеристической конгруэнцией алгебры слов $\langle S(X), \Omega \rangle$ при любом X.

<u>1.3. Свободные алгебры.</u> Рассмотрим некоторую фиксированную сигнатуру Ω и некоторый класс $\mathcal{R}$ алгебр сигнатуры Ω. Даем следующее ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$ называется свободной алгеброй в классе $\mathcal{R}$, если она принадлежит классу $\mathcal{R}$ и имеет такую систему образующих $X = \{x_i,\ i \in I\}$, что для любого однозначного отображения α этой системы образующих в произвольную алгебру $\langle A, \Omega \rangle$ класса $\mathcal{R}$ существует хотя бы один гомоморфизм алгебры $\mathcal{Y}$, в $\langle A, \Omega \rangle$, совпадающий с α на множестве X. Множество X при этом называется множеством свободных образующих алгебры $\mathcal{Y}$.

Если класс $\mathcal{R}$ состоит только из одной алгебры $\mathcal{Y}$, то алгебра $\mathcal{Y}$ называется свободной в себе.

ТЕОРЕМА. Алгебра $\mathcal{Y}$ является свободной в классе $\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда она изоморфна фактор-алгебре некоторой алгебры слов $\langle S(X), \Omega \rangle$ по вполне характеристической конгруэнции $\theta(\mathcal{R})$, соответствующей классу $\mathcal{R}$.

Пусть алгебра $\mathcal{Y}$ изоморфна фактор-алгебре алгебры слов $< S(X), \Omega >$ по вполне характеристической конгруэнции $\theta = \theta(\mathcal{R})$. Для простоты будем считать, что $\mathcal{Y}$ совпадает с фактором $< S(X)/\theta, \Omega >$. Рассмотрим случаи: а) существуют такие два элемента x_1 и x_2 множества X, которые находятся в отношении θ, т.е. $x_1 \theta x_2$. Это означает, что формальное равенство $x_1 = x_2$ является тождеством в любой алгебре класса $\mathcal{R}$. Отсюда следует, что каждые два элемента такой алгебры равны между собой, т.е. любая алгебра класса $\mathcal{R}$ является одноэлементной. Но в одноэлементных алгебрах выполняется любое тождество $w_1 = w_2$, следовательно, θ является универсальным отношением и алгебра $\mathcal{Y} \cong < S(X)/\theta, \Omega >$ также одноэлементна. Для этого случая справедливость предложения следует из того, что в классе одноэлементных алгебр одной и той же сигнатуры Ω каждая одноэлементная алгебра является свободной (любое отображение единственного элемента одноэлементной алгебры в другой одноэлементной алгебре будет их изоморфизмом).

б) Никакие два свободные образующие алгебры слова $S(X)$ не находятся в отношении θ. Тогда множество $\tilde{X}$ всех классов $x_i \theta = \tilde{x}_i, x_i \in X$ будет системой образующих алгебры $\mathcal{Y} \cong S(X)/\theta$. Покажем, что это будет свободной системой образующих. Пусть $\tilde{\varphi}: \tilde{X} \to A \in \mathcal{R}$, т.е. $\tilde{\varphi}$ некоторое отображение множества $\tilde{X}$ в алгебру A класса $\mathcal{R}$. Как мы знаем (п.I.6.7), $\tilde{\varphi}$ продолжается до соответствия φ между алгеброй $\mathcal{Y}$ и некоторой подалгеброй алгебры A. Для доказательства однозначности отношения φ заметим, что если $w_1(\tilde{x}_k)$ и $w_2(\tilde{x}_s)$ две записи какого-нибудь элемента $g \in \mathcal{Y}$, то слова $w_1(x_k)$ и $w_2(x_s)$ как элементы алгебры слов $S(X)$ связаны отношением θ: $w_1(x_k)\theta w_2(x_s)$, т.е. $w_1(x_k) = w_2(x_s)$ является тождеством в классе $\mathcal{R}$. Это означает, что в алгебре A имеет место $w_1(\tilde{x}_k \varphi) = w_2(\tilde{x}_s \varphi) = g\varphi$, т.е. φ однозначное отображение $\mathcal{Y}$ в A, следовательно, φ - гомоморфизм.

Докажем обратное. Пусть A - свободная алгебра в классе $\mathcal{R}$ с множеством свободных образующих $M = \{m_i, i \in J\}$. Рассмотрим алгебру слов $< S(X), \Omega >$, где $X = \{x_i, i \in J\}$. Пусть дальше θ вполне характеристическая конгруэнция алгебры $S(X)$, соответствующая классу $\mathcal{R}$. Как уже знаем, алгебра $\mathcal{Y} = S(X)/\theta$ является свободной алгеброй в классе $\mathcal{R}$. Тогда взаимно-однозначное отображение $\tilde{\varphi}: X \to M$, для которого $X_i \varphi = m_i$, продолжается до гомоморфизма $\varphi: \mathcal{Y} \xrightarrow{\text{на}} A$. Берем теперь отображение $\tilde{\psi}: M \to \tilde{X}$, для которого $m_i \tilde{\psi} = \tilde{x}_i$ тогда и только тогда, когда $\tilde{x}_i \varphi = m_i$. $\tilde{\psi}$ будет также взаимно-однозначным отображением. Так как A

свободная алгебра в классе $\mathcal{R}$, то $\tilde{\varphi}$ продолжается до гомоморфизма $\psi : A \to \mathcal{Y}$. Покажем, что ψ является изоморфизмом алгебр A и $\mathcal{Y}$. Для этого надо показать, что ψ взаимно-однозначное соответствие. Пусть g_1 и g_2 два элемента из $\mathcal{Y}$, для которых $g_1\psi = g_2\psi = a \in A$. Пусть $g_1 = W_1(\tilde{x}_k), g_2 = W_2(\tilde{x}_s)$. Тогда для элемента a имеются представления $a = g_1\varphi = W_1(\tilde{x}_k\varphi) = W_1(m_k)$; $a = g_2\varphi = W_2(\tilde{x}_s\varphi) = W_2(m_s)$. Отсюда получаем $a\psi = W_1(m_k)\psi = W_1(m_k\psi) = W_1(\tilde{x}_k)$, $a\psi = W_2(m_s)\psi = W_2(m_s\psi) = W_2(\tilde{x}_s)$. Так как ψ отображение, то $W_1(\tilde{x}_k) = W_2(\tilde{x}_s)$, т.е. $g_1 = g_2$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЯ.

1. Алгебра слов $\langle S(X), \Omega \rangle$ свободна в классе всех однотипных алгебр сигнатуры Ω.

В самом деле, так как в классе всех однотипных алгебр данной сигнатуры Ω (к которому принадлежит, в частности, и алгебра слов $S(X)$) не выполняются никакие тождества, то вполне характеристическая конгруэнция, соответствующая этому классу, является отношением равенства ε, но $S(X)/\varepsilon \cong S(X)$.

2. Свободные алгебры в классе $\mathcal{R}$ с равномощными системами свободных образующих изоморфны между собой.

В самом деле, каждая из них изоморфна алгебре $S(X)/\theta(\mathcal{R})$, где X той же мощности.

3. Если множество X имеет мощность n, то между вполне характеристическими конгруэнциями алгебры слов $\langle S(X), \Omega \rangle$ и свободными алгебрами, мощность систем свободных образующих которых равна n, взятых с точностью до изоморфизма, во всевозможных классах алгебр сигнатуры Ω имеется взаимно-однозначное соответствие.

4. Имеется взаимно-однозначное соответствие между всевозможными многообразиями сигнатуры Ω и вполне характеристическими конгруэнциями алгебры слов со счетным числом образующих.

Это следует из того, что для записи всевозможных тождеств достаточен счетный набор предметных переменных.

Если $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ два многообразия и каждая алгебра многообразия $\mathfrak{M}_1$ принадлежит многообразию $\mathfrak{M}_2$, то будем считать, что $\mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}_2$. Легко видеть, что для соответствующих вполне характеристических конгруэнций будет $\theta(\mathfrak{M}_1) \geqslant \theta(\mathfrak{M}_2)$, причем если первое включение строгое, то и второе строгое. Отсюда получаем следствие.

5. Для каждой сигнатуры Ω можно говорить о множестве многообразий, которое может быть рассмотрено как полная струк-

тура антиизоморфной полной структуре всех вполне характеристических конгруэнций алгебры Ω-слов $\langle S(\Omega, X), \Omega \rangle$ со счетным множеством образующих.

Учитывая результаты п.I.6.IO и определение свободных алгебр, нетрудно показать, что если ρ вполне характеристическая конгруэнция алгебры $\langle S(X), \Omega \rangle$, то структура вполне характеристических конгруэнций алгебры $\langle S(X)/\rho, \Omega \rangle$ и структура тех вполне характеристических конгруэнций алгебры $\langle S(X), \Omega \rangle$, которые больше ρ, изоморфны между собой. Отсюда получаем

6. Множество всех подмногообразий данного многообразия $\mathfrak{M}$ составляет полную структуру, антиизоморфную структуре всех вполне характеристических конгруэнций свободной алгебры многообразия $\mathfrak{M}$ со счетным числом образующих.

I.4. Производные операции. Эквивалентность многообразий. Пусть X - счетный алфавит. Слова, записанные в алфавите X, и сигнатуры Ω могут быть использованы для введения новых операций в алгебрах сигнатуры Ω. В самом деле, каждое Ω-слово $w(x_1, \ldots, x_n)$ может быть рассмотрено как новая n-арная операция в алгебре $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$. Такие операции назовем производными, а операции из Ω - основными.

Условимся всегда включать среди производных операций тождественное отображение $x\varepsilon = x$ для всех x из $\mathcal{Y}$, где $\mathcal{Y}$ произвольная алгебра рассматриваемого класса. Множество всех производных операций алгебры $\mathcal{Y}$ обозначим через $\hat{\Omega}_{\mathcal{Y}}$ и $\hat{\Omega}_{\langle S(X), \Omega \rangle} = \hat{\Omega}$.

А.И.Мальцев [30] и впоследствии ряд других авторов называли такие операции главными производными в отличие от тех, в выражении которых участвуют и фиксированные элементы рассматриваемых алгебр. Операции последнего вида мы не будем рассматривать в связи с чем будем понимать производные операции только в приведенном выше смысле.

При помощи производных операций можно по-разному задавать одно и то же многообразие универсальных алгебр. С одним подобным случаем мы уже встретились в п.I.6.II - понятие группы было введено различными способами. Если за основу взять первое определение группы, т.е. в сигнатуре $\langle e, {}^{-1}, \cdot \rangle$, то операции $\langle \cdot, /, \backslash \rangle$ из третьего определения будут производными, именно $x/y = xy^{-1}$, $x \backslash y = x^{-1}y$. И, обратно, $e = x/x$, $x^{-1} = e/x$.

Если Ω множество основных операций алгебр некоторого класса, то множество всех производных операций совпадает с множеством всех слов $S(X)$ в счетном алфавите X и сигнатуре Ω. При этом слову $x \in X$ соответствует операция ε, для которой $x\varepsilon = x$.

Пусть даны два многообразия $\mathfrak{M}_1$ сигнатуры Ω_1 с системой тождеств Λ_1 и $\mathfrak{M}_2$ сигнатуры Ω_2 с системой тождеств Λ_2. Многообразия $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ называются эквивалентными, если существует взаимно-однозначное отображение φ множества Ω_2 в множество $\hat{\Omega}_1$ всех производных операций многообразия $\mathfrak{M}_1$ такое, что система тождеств Λ_2', которая получается, если в каждом тождестве Λ_2 каждая входящая в нее операция $\omega_{(2)} \in \Omega_2$ заменяется операцией $\omega_{(1)}' = \omega_{(2)}\varphi$, выводима из системы тождеств Λ_1, и обратно, существует взаимно-однозначное отображение ψ множества Ω_1 в $\hat{\Omega}_2$ с аналогичным свойством (ср. [3I]).

§ 2. Тождества в уноидах

<u>2.I. Полугруппа производных операций уноидов.</u> В этой главе рассмотрим в основном алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$, сигнатура которых Ω содержит только унарные операции. Следуя А.И.Мальцеву [I], назовем такие алгебры уноидами. Учитывая определение производных операций, нетрудно заметить, что множество всех производных операций сигнатуры Ω, где Ω содержит только унарные операции, может быть рассмотрено как множество всех Ω-слов алгебры $\langle S(X), \Omega \rangle$, где X состоит из одного элемента x. В самом деле, если каждая операция ω из Ω унарна, то и каждая производная операция является унарной. Следовательно, каждая производная операция будет словом в циклической алгебре Ω-слов с порождающим элементом x, при этом слову x соответствует тождественная операция $x\varepsilon = x$. Заметим дальше, что каждая производная операция имеет вид $x\omega_1 \dots \omega_k$ для некоторых $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega$ и применение такой операции к некоторому конкретному элементу $a \in G$, где $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$, совпадает с применением к a произведения отображений множества G в себя, соответствующих операциям $\omega_1, \dots, \omega_k$. Таким образом, с каждым конкретным уноидом $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$ ассоциируется полугруппа $\langle \hat{\Omega}_{\mathcal{G}}, \cdot \rangle$ всех ее производных операций.

В случае, когда алгебра $\mathcal{G}$ свободна в классе всех алгебр сигнатуры Ω, полугруппа производных операций $\langle \hat{\Omega}, \cdot \rangle$ является свободной в классе всех полугрупп с единицей с системой свободных образующих Ω. Следовательно, полугруппа $\langle \hat{\Omega}, \cdot \rangle$ изоморфна полугруппе с единицей $\{\cdot\}$-слов, записанных в алфавите Ω, т.е. полугруппе $\langle S(\Omega, \cdot), \cdot \rangle = \langle S(\Omega), \cdot \rangle$. Здесь умножение выполняется приписыванием слов, а роль единицы играет пустое слово ε.

2.2. Тождества в уноидах. При рассмотрении тождеств уноидов можно ограничиться тождествами следующих видов (ср. [I], стр. 349):

$$x w_1 = x w_2 \tag{I}$$

$$x w = y w, \tag{2}$$

где $w_1, w_2, w \in S(\Omega)$. Отсюда следует, что любые тождества уноидов могут быть записаны при помощи Ω-слов над алфавитом из двух символов $X = \{x, y\}$. Тогда для случая уноидов отдельные следствия теоремы из п. I.3 могут быть конкретизированы следующим образом.

Между многообразиями уноидов данной сигнатуры Ω и вполне характеристическими конгруэнциями алгебры слов $\langle S(\{x,y\}), \Omega \rangle$ имеется взаимно-однозначное соответствие. Следовательно, множество всех многообразий уноидов сигнатуры Ω антиизоморфно полной структуре всех вполне характеристических конгруэнций алгебры слов $\langle S(\{x, y\}), \Omega \rangle$ над алфавитом $\{x, y\}$.

Полная структура всех подмногообразий данного многообразия $\mathfrak{M}$ уноидов антиизоморфна структуре всех вполне характеристических конгруэнций свободной алгебры многообразия $\mathfrak{M}$ с двумя свободными образующими.

Заметим, что тождества вида (2), в которых w – пустое слово, т.е. $x = y$, выполняются лишь в одноэлементных алгебрах. Соответствующие многообразия называются вырожденными.

2.3. Системы всех тождеств уноидов данного класса и связанные с ними конгруэнции полугруппы операций. Каждая система тождеств вида (I) данного многообразия унарных алгебр $\mathfrak{M}$ индуцирует некоторое отношение слов θ в свободной полугруппе с единицей, $\langle \hat{\Omega}, \cdot \rangle = \langle S(\Omega), \cdot \rangle$, где Ω – множество символов унарных операций, а умножение понимается как приписывание слов в алфавите Ω, именно

$$w_1 \, \theta \, w_2 \tag{3}$$

тогда и только тогда, когда имеет место тождество (I) в $\mathfrak{M}$.

Если Λ система всех тождеств, выполняющихся в некотором классе унарных алгебр, то таким образом определенное отношение θ будет, как нетрудно проверить, конгруэнцией свободной полугруппы с единицей $\langle S(\Omega), \cdot \rangle$.

Аналогичным образом, каждой системе тождеств вида (2) сопоставляем отношение μ между элементами множества $S(\Omega)$. Именно, если $xw = yw$, то ставим $w\mu w$. Отношение μ в общем случае не определено на все $S(\Omega)$. В частности, если алгебра $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$ не одноэлементна, то $\varepsilon\mu\varepsilon$ не имеет места, так как в противном случае мы получали бы $x\varepsilon = y\varepsilon$, т.е. $x = y$. Заметим, что если в алгебре $\mathcal{Y}$ выполняется хоть одно тождество вида (2), то выполняются и тождества вида $xw_1 = yw_2$ и некоторый набор нетривиальных тождеств вида (I). Если $xw = yw$, то тогда и $xw = yw'w$ для любого $w' \in S(\Omega)$; следовательно, имеется нетривиальное тождество $xw = xw'w$. Отсюда видно также, что $\theta \geqslant \mu$.

Пусть теперь $xw = yw$ принадлежит Λ. Тогда класс $\mathcal{K}_w^\theta$ является левым идеалом полугруппы $\langle S(\Omega), \cdot \rangle$. Пусть $w_1 \in \mathcal{K}_w^\theta$ и v - произвольный элемент из $S(\Omega)$. Надо показать, что $vw_1 \in \mathcal{K}_w^\theta$. Так как $w_1 \in \mathcal{K}_w^\theta$, то имеет место тождество $xw = xw_1$, но, учитывая, что $xw = yw$, получаем $xw_1 = yw$. Заменяя теперь x на yv, получим тождество $yvw_1 = yw$. Отсюда $vw_1 \theta w$, т.е. $vw_1 \in \mathcal{K}_w^\theta$, что требовалось.

Не исключено, что могут оказаться левыми идеалами и некоторые из тех классов, элементы которых связаны только тождествами вида (I). Следовательно, для того чтобы по заданной конгруэнции полугруппы $\langle S(\Omega), \cdot \rangle$ восстановить полную систему тождеств класса уноидов $\mathcal{K}$, нужно особо отметить те классы данной конгруэнции, элементы которых связаны тождествами вида (2). Эти замечания приводят к необходимости рассмотрения конгруэнций с отмеченными классами, которые определяются в следующем параграфе.

§ 3. Конгруэнции с отмеченными классами

3.I. <u>Определение конгруэнций с отмеченными классами.</u> Пусть S - произвольная полугруппа. Даем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Конгруэнция ρ полугруппы S называется конгруэнцией с отмеченными классами, если ρ является конгруэнцией и, кроме того, отмечены некоторые из тех классов данной конгруэнции, которые являются левыми идеалами полугруппы S, причем так, что выполняется следующее условие (а): Если $\mathcal{K}_a^\rho$ - отмеченный класс, то и $\mathcal{K}_{ab}^\rho$ отмечен для любого $b \in S$.

Обозначим через $H(S)$ множество всех конгруэнций с отмеченными классами полугруппы S. Например, если S является группой, то, так как группа имеет единственный левый идеал,- вся группа, $H(S)$ состоит из всех обычных конгруэнций с добавлением еще одного элемента U^* - конгруэнции с отмеченными классами, получающейся из универсальной конгруэнции, отмечая ее единственный класс. Других конгруэнций с отмеченными классами в этом случае не существует. Как правило, через ρ^* будем обозначать конгруэнцию с отмеченными классами, а через ρ - соответствующую ей конгруэнцию в обычном смысле. В $H(S)$ вводим отношение частичного порядка следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если ρ_1^* и ρ_2^* - две конгруэнции с отмеченными классами, то будем считать $\rho_1^* \leq \rho_2^*$ тогда и только тогда, когда $\rho_1 \leq \rho_2$ как обычные конгруэнции и из $\mathcal{K}^{\rho_1} \subseteq \mathcal{K}^{\rho_2}$ (здесь $\mathcal{K}^{\rho}$ - некоторый класс по конгруэнции ρ) и $\mathcal{K}^{\rho_1}$ - отмеченный класс конгруэнции ρ_1, следует, что $\mathcal{K}^{\rho_2}$ отмеченный класс конгруэнции ρ_2.

Заметим, что если $\rho_1 \leq \rho_2$, , то ρ_1^* и ρ_2^* могут быть несравнимы как конгруэнции с отмеченными классами. Легко видеть, что наибольшим элементом в упорядоченном множестве $H(S)$ будет конгруэнция U^* - универсальная конгруэнция, у которой ее единственный класс отмечен, а наименьшим - будет равенство ε, у этой конгруэнции не отмечен ни один класс.

<u>3.2. Операции над конгруэнциями с отмеченными классами.</u> Введем в $H(S)$ операции пересечения и объединения конгруэнций с отмеченными классами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пересечением множества $\{\rho_j, j \in J\}$, где J - некоторое множество индексов, конгруэнций с отмеченными классами, называется конгруэнция $\rho^\cap$, которая является пересечением в обычном смысле конгруэнций ρ_j, а отмеченными будут все те и только те классы $\mathcal{K}^{\rho^\cap}$, для которых из $\mathcal{K}^{\rho^\cap} \subseteq \mathcal{K}^{\rho_j}$ следует, что $\mathcal{K}^{\rho_j}$ является отмеченным классом конгруэнции ρ_j для всех $j \in J$.

Объединением $\rho^\cup$ множества $\{\rho_j, j \in J\}$ конгруэнций с отмеченными классами называется обычное объединение конгруэнций ρ_j, причем отмеченными будут те и только те классы $\mathcal{K}^{\rho^\cup}$, для которых существует такое $j \in J$, что $\mathcal{K}^{\rho_j} \subseteq \mathcal{K}^{\rho^\cup}$ и $\mathcal{K}^{\rho_j}$ - отмеченный класс конгруэнции ρ_j.

Обозначим $\rho^\cap = \bigcap_{j \in J} \rho_j$, $\rho^\cup = \bigcup_{j \in J} \rho_j$. Покажем, что приведенные определения являются корректными, т.е. что $\rho^\cap$ и $\rho^\cup$ существуют и единственны при любом J. Учитывая определение 2 п.3.1, легко видеть, что $\rho^\cap \leq \rho_j$ и $\rho^\cup \geq \rho_j$ для всех $j \in J$ как обычные конгруэнции.

Ввиду того что конгруэнция $\eta^{\cap}$ есть пересечение конгруэнций η_j, $j \in J$, для случая пересечения конгруэнций с отмеченными классами остается показать, что если класс $\mathcal{K}^{\eta^{\cap}}$ таков, что из $\mathcal{K}^{\eta^{\cap}} \subseteq \mathcal{K}^{\eta_j}$ следует, что $\mathcal{K}^{\eta_j}$ отмеченный, т.е. $\mathcal{K}^{\eta_j}$ левый идеал для всех $j \in J$, то $\mathcal{K}^{\eta^{\cap}}$ тоже может быть отмеченным классом, т.е. что $\mathcal{K}^{\eta^{\cap}}$ тоже левый идеал. Но это следует из того, что класс пересечения конгруэнций есть пересечение всех классов данных разбиений, которые его содержат, и что пересечение левых идеалов полугруппы, если не пусто, является левым идеалом. Пусть теперь некоторый класс $\mathcal{K}^{\eta^{\cup}}$ содержит для некоторого j отмеченный класс $\mathcal{K}^{\eta_j}$. Надо показать, что $\mathcal{K}^{\eta^{\cup}}$ может быть отмеченным классом, т.е. что $\mathcal{K}^{\eta^{\cup}}$ является левым идеалом. Пусть $u \in \mathcal{K}^{\eta^{\cup}}$ и $v \in \mathcal{K}^{\eta_j}$, тогда, так как $\mathcal{K}^{\eta_j} \subseteq \mathcal{K}^{\eta^{\cup}}$, из определения объединения конгруэнций следует, что существует цепочка $u_1 = u, u_2, \ldots, u_n = v$ такая, что $u_1 \eta_{j_1} u_2 \eta_{j_2} \cdots \eta_{j_{n-1}} u_n$. Тогда, так как η_{j_s} – конгруэнции, для любого $w \in S$ имеет место

$$w u_1 \eta_{j_1} w u_2 \eta_{j_2} \cdots \eta_{j_{n-1}} w u_n .$$

Но ввиду того, что $\mathcal{K}_v^{\eta_j}$ – левый идеал, $w u_n = w v \in \mathcal{K}_v^{\eta_j}$, т.е. $w u_n \eta_j u_n$, отсюда $w u_n \in \mathcal{K}_v^{\eta^{\cup}}$, но тогда и $w u = w u_1 \in \mathcal{K}_v^{\eta^{\cup}}$, что требовалось показать.

Используя свойства согласованности конгруэнций η_j с полугрупповым умножением и определения пересечения и объединения конгруэнций, нетрудно показать, что условие (а) из определения I п.3.I выполняется для $\eta^{\cap}$ и $\eta^{\cup}$.

3.3. Структура конгруэнций с отмеченными классами. Покажем теперь, что относительно введенных операций пересечения и объединения множество $H(S)$ является полной структурой. Для этого достаточно установить, что имеет место

ТЕОРЕМА. Для любого семейства конгруэнций с отмеченными классами η_j, $j \in J$ конгруэнции $\eta^{\cap}$ и $\eta^{\cup}$ являются соответственно наибольшей нижней гранью и наименьшей верхней гранью в $H(S)$.

Пусть для конгруэнций с отмеченными классами η^* и η_j^*, $j \in J$ имеет место $\eta^* \leq \eta_j^*$ для всех $j \in J$. Тогда между соответствующими конгруэнциями имеет место такое же отношение. Следовательно, так как $\eta^{\cap}$ есть пересечение конгруэнций η_j, для конгруэнций η и $\eta^{\cap}$ имеем $\eta \leq \eta^{\cap}$. С другой стороны, из определения 2 п.3.I следует, что если некоторый класс $\mathcal{K}^{\eta}$ отмечен, то для всех j классы $\mathcal{K}^{\eta_j} \supseteq \mathcal{K}^{\eta}$ также отмечены. Но в таком случае соответствующий класс $\mathcal{K}^{\eta^{\cap}}$, который содержит $\mathcal{K}^{\eta_j}$, согласно определению п.3.2 является отмеченным и тогда опять по определению 2 п. 3.I имеем $\rho^{\cap} \geqslant \rho^{*}$.

Пусть теперь $\rho^{*} \geqslant \rho_j^{*}$. Тогда $\rho \geqslant \rho^{\cup}$ как обычные конгруэнции. Если $\mathcal{K}^{\rho_j}$ – отмеченный класс и $\mathcal{K}^{\rho} \supseteq \mathcal{K}^{\rho^{\cup}} \supseteq \mathcal{K}^{\rho_j}$, то из определения 2 п.3.I и определения п.3.2 получаем, что классы $\mathcal{K}^{\rho}$ и $\mathcal{K}^{\rho^{\cup}}$ также отмечены, следовательно, $\rho^{*} \geqslant \rho^{\cup}$.

§ 4. Отмеченные полугруппы

<u>4.I. Определение, структура конгруэнций.</u> Отношение равенства на множестве S обозначим через ε_S или просто ε, т.е. $a \varepsilon b$ тогда и только тогда, когда $a=b$. Если S – некоторая универсальная алгебра, например полугруппа, то ε является конгруэнцией с одноэлементными классами. Элемент a полугруппы S называется правым нулем, если для любого $s \in S$ имеет место $sa = a$. Очевидно, что если a – правый нуль, то множество $\{a\}$, состоящее из одного элемента a, является левым идеалом полугруппы S. Таким образом, если полугруппа S имеет правые нули, то конгруэнция ε может индуцировать, вообще говоря, несколько конгруэнций с отмеченными классами для этого достаточно по-разному, но должным образом, если это возможно, отмечать некоторые из тех классов, что являются правыми нулями. Такого рода конгруэнции будем обозначать через ε_S^{*}, или ε^{*}.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Отмеченной полугруппой называется пара (S,ε^{*}), где S – полугруппа, а ε^{*} – ее конгруэнция с отмеченными классами, все классы которой одноэлементны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Две отмеченные полугруппы $(S_1, \varepsilon_{S_1}^{*})$ и $(S_2, \varepsilon_{S_2}^{*})$ называются изоморфными, если существует такой изоморфизм φ между полугруппами S_1 и S_2, что элемент $a \in S_1$ отмечен как класс конгруэнции $\varepsilon_{S_1}^{*}$ тогда и только тогда, когда $a\varphi$ отмечен как класс конгруэнции $\varepsilon_{S_2}^{*}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Конгруэнция ρ^{*} с отмеченными классами полугруппы S называется конгруэнцией отмеченной полугруппы (S, ε^{*}), если $\rho^{*} \geqslant \varepsilon^{*}$ (как конгруэнции с отмеченными классами).

Так как из $\rho_j^{*} \geqslant \varepsilon^{*}$, для всех $j \in J$, следует $\bigvee_j \rho_j^{*} \geqslant \varepsilon^{*}$ и $\bigcap_j \rho_j^{*} \geqslant \varepsilon^{*}$ (объединение и пересечение понимается здесь в смысле конгруэнций с отмеченными классами), то множество $Con(S,\varepsilon^{*})$ всех конгруэнций отмеченной полугруппы (S, ε^{*}) является полной структурой.

Если $\varepsilon^* = \varepsilon$, то (S,ε) отождествляется с S и тогда $Con(S,\varepsilon) = Con\, S$ состоит из множества всех конгруэнций с отмеченными классами полугруппы S.

4.2. <u>Фактор-полугруппы отмеченных полугрупп</u>. Пусть даны отмеченная полугруппа (S, ε^*) и некоторая ее конгруэнция γ^*. Обозначим через γ индуцированную ею обычную конгруэнцию полугруппы S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Фактор-полугруппой отмеченной полугруппы (S, ε_S^*) по конгруэнции γ^* называется полугруппа $(S/\gamma, \varepsilon_{S/\gamma}^*)$, где $\varepsilon_{S/\gamma}^*$ - конгруэнция с одноэлементными классами полугруппы S/γ, причем в ней отмечены все те и только те элементы, которые отмечены как классы конгруэнции γ^*.

Заметим, что для любого класса $\mathcal{K}^{\gamma^*}$ и каждого отмеченного класса $\mathcal{K}_a^{\gamma^*}$ конгруэнции γ^*, так как $\mathcal{K}_a^{\gamma^*}$ левый идеал полугруппы S, имеем $\mathcal{K}^{\gamma^*} \mathcal{K}_a^{\gamma^*} \subseteq \mathcal{K}_a^{\gamma^*}$, т.е. в полугруппе S/γ элемент $\mathcal{K}_a^{\gamma^*}$ является правым нулем. Таким образом, каждый отмеченный класс конгруэнции γ^* может быть отмечен как класс конгруэнции $\varepsilon_{S/\gamma}$, следовательно, данное определение корректно. Будем писать

$$(S, \varepsilon_S^*)/\gamma^* = (S/\gamma, \varepsilon_{S/\gamma}^*).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отмеченная полугруппа $(S_2, \varepsilon_{S_2}^*)$ называется гомоморфным образом отмеченной полугруппы $(S_1, \varepsilon_{S_1}^*)$, если она изоморфна фактор-полугруппе $(S_1, \varepsilon_{S_1}^*)/\gamma^*$, для некоторой конгруэнции γ^*.

Нетрудно видеть, что в этом случае существует такое отображение $\varphi: S_1 \to S_2$ (естественное отображение S_1 на соответствующий фактор, умноженный на данный изоморфизм фактора с S_2), что элемент $b \in S_2$ отмечен как класс конгруэнции $\varepsilon_{S_2}^*$ тогда и только тогда, когда полный прообраз $b\varphi^{-1}$ отмечен как класс конгруэнции γ^*. Отображение φ называется гомоморфизмом отмеченной полугруппы $(S_1, \varepsilon_{S_1}^*)$ на $(S_2, \varepsilon_{S_2}^*)$, и будем писать

$$\varphi: (S_1, \varepsilon_{S_1}^*) \to (S_2, \varepsilon_{S_2}^*).$$

Пусть $S(U)$ свободная полугруппа с множеством образующих $U = \{u_j, j \in J\}$. Назовем свободной отмеченной полугруппой отмеченную полугруппу $(S(U), \varepsilon)$. Как мы раньше согласились, полугруппа $(S(U), \varepsilon)$ отождествляется с $S(U)$. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА I. Каждая отмеченная полугруппа (S, ε^*) изоморфна фактор-полугруппе свободной полугруппы $S(U) = (S(U), \varepsilon)$ для некоторого $U = \{u_j, j \in J\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $S(U)$ свободная полугруппа, то из п.1.3 имеем $S \cong S(U)/\rho$ для подходящих $U=\{u_j, j\in J\}$ и конгруэнции ρ. Из того, что (S, ε_S^*) отмеченная полугруппа, следует, что те классы конгруэнции ρ, которые соответствуют отмеченным элементам конгруэнции ε_S^*, как прообразы правых нулей, являются левыми идеалами полугруппы $S(U)$. Отмечая все эти классы, получим конгруэнцию с отмеченными классами ρ полугруппы $S(U)$, для которой $(S(U),\varepsilon)/\rho^* = (S(U)/\rho, \tilde{\varepsilon}) \cong (S,\varepsilon^*)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (S_1, ε_1^*) и (S_2, ε_2^*) две отмеченные полугруппы такие, что для некоторой конгруэнции ρ^* имеет место

$$(S_1, \varepsilon_1^*)/\rho^* \cong (S_2, \varepsilon_2^*).$$

Тогда структура конгруэнций отмеченной полугруппы (S_2, ε_2^*) изоморфна структуре всех тех конгруэнций отмеченной полугруппы (S_1, ε_1^*), которые содержат конгруэнцию ρ^*.

В самом деле, пусть $\rho_1^* \geqslant \rho^*$ – некоторая такая конгруэнция отмеченной полугруппы (S_1, ε_1^*). Тогда определим конгруэнцию $\tilde{\rho}_1^*$ на (S_2, ε_2^*) следующим образом. Если $\varphi: (S_1, \varepsilon_1^*) \to (S_2, \varepsilon_2^*)$ – данный гомоморфизм, то полагаем $x_1\varphi\, \tilde{\rho}_1^*\, x_2\varphi$ тогда и только тогда, когда $x_1\, \rho_1^*\, x_2$, причем класс $K_{x\varphi}^{\tilde{\rho}_1^*}$ будет отмеченным тогда и только тогда, когда класс $K_x^{\rho_1^*}$ отмечен. При этом мы не придем к противоречию, потому что при гомоморфизме образ левого идеала есть левый идеал. Легко видеть, что установленное соответствие является взаимно-однозначным и сохраняет пересечения и объединения рассматриваемых конгруэнций.

<u>4.3. Конгруэнтное замыкание отношений в отмеченных полугруппах.</u> Пусть в множестве S отмеченной полугруппы (S,ε) даны два отношения ρ_1 и ρ_2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Под конгруэнтным замыканием пары отношений (ρ_1, ρ_2) в отмеченной полугруппе (S, ε^*) понимается наименьшая конгруэнция ρ_0^* отмеченной полугруппы (S, ε^*) среди всех тех, которые больше как ρ_1, так и ρ_2 и у которой отмечены все те классы, что содержат элементы, находящиеся в отношении ρ_2.

ТЕОРЕМА. Конгруэнтное замыкание существует для любой пары отношений ρ_1 и ρ_2 множества S и совпадает с конгруэнцией с отмеченными классами ρ^*, построенной по следующим правилам (запись $\frac{\Phi_1}{\Phi_2}$ означает "правило вывода", т.е. система условий Φ_2 следует из системы Φ_1; обозначение $a\rho^* b$ будем применять при построении отмеченных классов):

$I_1'.\ \dfrac{a\rho_1 b}{a\rho^\times b}$; $I_2'.\ \dfrac{a\rho_2 b}{a\rho^* b}$; $I_3'.\ \dfrac{a\rho^* b}{a\rho^\times b}$; $II_1'.\ \dfrac{a\in S}{a\rho^\times a}$; $II_2'.\ \dfrac{a\varepsilon^* a}{a\rho^* a}$;

$III_1'.\ \dfrac{a\rho^\times b}{b\rho^\times a}$; $III_2'.\ \dfrac{a\rho^* b}{b\rho^* a}$; $IV_1'.\ \dfrac{a\rho^\times b,\ b\rho^\times c}{a\rho^\times c}$; $IV_2'.\ \dfrac{a\rho^\times b,\ b\rho^* c}{a\rho^* c}$;

$V_1'.\ \dfrac{a\rho^\times b,\ c\rho^\times d}{ac\rho^\times bd}$; $V_2'.\ \dfrac{a\rho^* b,\ c\rho^* d}{ac\rho^* bd}$; $V_3'.\ \dfrac{a\rho^* b,\ c\in S}{a\rho^* cb}$;

VI_1'. Для каждых $p, q \in S$ имеют место $p\rho^\times q$ и $p\rho^* q$ тогда и только тогда, когда эти выражения получаются путем конечного числа применений правил $I_1' - V_3'$. Причем класс $\mathcal{K}_a^{\rho^\times}$ отмечен тогда и только тогда, когда существует $b \in S$, что $a\rho^* b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Универсальная конгруэнция на (S,ε^*), у которой отмечен ее единственный класс, содержит ρ_1 и ρ_2, и ее классы, содержащие элементы, находящиеся в отношении ρ_2, отмечены. Если конгруэнции ρ_k^* удовлетворяют таким же условиям, то и их пересечение удовлетворяет им. Отсюда получаем, что искомая конгруэнция ρ_0^* равна пересечению всех конгруэнций ρ_k^* отмеченной полугруппы (S,ε^*), которые больше как ρ_1, так и ρ_2 и у которых классы, содержащие элементы a, b, для которых $a\rho_2 b$, отмечены, т.е. $\rho_0^* = \bigcap\limits_k \rho_k^*$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что отношение $\rho^\times$, построенное по правилам $I_1' - VI_1'$, находится среди отношений ρ_k^*. В самом деле, согласно I_1', I_2', I_3' $\rho^\times$ содержит данные отношения ρ_1 и ρ_2. Дальше, ввиду II_1' оно рефлексивно, по II_2' $\rho^\times \geqslant \varepsilon^*$ из III_1' и III_2' следует симметричность, а из IV_1', IV_2', III_2' - транзитивность. Заметим, что $\dfrac{a\rho^* b,\ b\rho^\times c}{a\rho^* c}$ следует из IV_2', III_2'. В самом деле, $a\rho^* b, b\rho^\times c \Rightarrow c\rho^\times b, b\rho^* a \Rightarrow c\rho^* a \Rightarrow a\rho^* c$. Из V_1' следует согласованность $\rho^\times$ с умножением. Наконец, из I_2' следует, что если $a\rho_2 b$, то класс $\mathcal{K}_a^{\rho^\times}$ отмечен, из V_3' следует, что отмеченный класс является левым идеалом, а из V_2' следует, что если класс $\mathcal{K}_a^{\rho^\times}$ отмечен, то и класс $\mathcal{K}_{ac}^{\rho^\times}$ также отмечен. Итак, $\rho^\times \geqslant \rho^*$, с другой стороны, каждая конгруэнция μ, которая больше отношений ρ_1 и ρ_2 и у которой отмечены классы, содержащие элементы, находящиеся в отношении ρ_2, удовлетворяет всем условиям $I_1' - V_3'$, следовательно, имеет место $\mu \geqslant \rho^\times$ как конгруэнции с отмеченными классами. В частности, $\rho_0^* \geqslant \rho^\times$, где ρ_0^* - конгруэнтное замыкание отношений ρ_1 и ρ_2. Но так как ρ_0^* - наименьшая такая конгруэнция, то $\rho_0^* = \rho^\times$.

Зак. 444

§ 5. Многообразия униоидов

<u>5.1. Вполне характеристическая конгруэнция, порожденная данным отношением.</u> Пусть в алгебре слов $< S(X), \Omega >$, где $X = \{x, y\}$ и сигнатура Ω состоит из унарных операций, дано отношение ϱ. Пусть

$$x\omega_{j1}\,\varrho\, x\omega'_{j1}, \quad j \in J_1, \tag{1}$$

$$x\omega_{j2}\,\varrho\, y\omega'_{j2}, \quad j \in J_2 \tag{2}$$

совокупность всех выражений (1) (которые будем называть первого рода) и (2) (– второго рода) Ω-слов из $S(X)$, находящихся в отношении ϱ. Скажем, что отношение ϱ порождает вполне характеристическую конгруэнцию ϱ^x, если ϱ^x – наименьшая вполне характеристическая конгруэнция, содержащая ϱ.

ТЕОРЕМА. Для любого отношения ϱ алгебры Ω-слов $<S(X,\Omega), \Omega>$ существует вполне характеристическая конгруэнция, им порожденная, причем она совпадает с отношением ϱ^x, построенным при помощи следующих правил (как и выше, запись $\frac{\Phi_1}{\Phi_2}$ означает, что из совокупности выражений Φ_1 следует выражение Φ_2):

$$I_1^2.\ \frac{xw_1\,\varrho\, xw_2}{xw_1\,\varrho^x\, xw_2}; \quad I_2^2.\ \frac{xw_1\,\varrho\, yw_2}{xw_1\,\varrho^x\, yw_2}; \quad I_3^2.\ \frac{xw_1\,\varrho^x\, yw_2}{xw_1\,\varrho^x\, xw_2}; \quad I_4^2.\ \frac{xw_1\,\varrho^x\, xw_2}{yw_1\,\varrho^x\, yw_2};$$

$$I_5^2.\ \frac{yw_1\,\varrho^x\, yw_2}{xw_1\,\varrho^x\, xw_2}; \quad I_6^2.\ \frac{xw_1\,\varrho^x\, yw_2}{yw_1\,\varrho^x\, xw_2}; \quad I_7^2.\ \frac{yw_1\,\varrho^x\, xw_2}{xw_1\,\varrho^x\, yw_2};$$

$$II_1^2.\ \frac{w \in S(\Omega)}{xw\,\varrho^x\, xw};$$

$$III_1^2.\ \frac{xw_1\,\varrho^x\, xw_2}{xw_2\,\varrho^x\, xw_1}; \quad III_2^2.\ \frac{xw_1\,\varrho^x\, yw_2}{xw_2\,\varrho^x\, yw_1};$$

$$IV_1^2.\ \frac{xw_1\,\varrho^x\, xw_2,\ xw_2\,\varrho^x\, xw_3}{xw_1\,\varrho^x\, xw_3}; \quad IV_2^2.\ \frac{xw_1\,\varrho^x\, xw_2,\ xw_2\,\varrho^x\, yw_3}{xw_1\,\varrho^x\, yw_3};$$

$$V_1^2.\ \frac{xw_1\,\varrho^x\, xw_2,\ xw_3\,\varrho^x\, xw_4}{xw_1w_3\,\varrho^x\, xw_2w_4}; \quad V_2^2.\ \frac{xw_1\,\varrho^x\, yw_2,\ w \in S(\Omega)}{xw_1\,\varrho^x\, yww_2};$$

$$V_3^2.\ \frac{xw_1\,\varrho^x\, yw_2,\ xw_3\,\varrho^x\, xw_4}{xw_1w_3\,\varrho^x\, yw_2w_4};$$

VI_1^2. Два слова $v, v' \in S(X,\Omega)$ находятся в отношении η^x тогда и только тогда, когда выражение $v\eta^x v'$ получается путем конечного числа применения правил $I_1^2 - V_3^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Универсальная конгруэнция алгебры $\langle S(X,\Omega),\Omega\rangle$ является вполне характеристической, содержит отношение η. Если конгруэнции η_k вполне характеристичны и содержат η, то и их пересечение $\bigcap_k \eta_k$ является такой же. Отсюда получаем, что искомая вполне характеристическая конгруэнция η_0 равна пересечению всех вполне характеристических конгруэнций η_k, которые больше η, т.е. $\eta_0 = \bigcap_k \eta_k$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что отношение η^x, построенное по правилам $I_1^2 - \bar{VI}_1^2$, содержит η и является вполне характеристической конгруэнцией, т.е. $\eta^x \geqslant \eta_0$. В самом деле, согласно I_1^2, I_2^2 η^x содержит η, ввиду $\bar{II}_1^2$, I_4^2 оно рефлексивно. В силу $I_4^2 - I_7^2$, $\bar{III}_1^2$, $\bar{III}_2^2$ η^x симметрично. На основании $\bar{IV}_1^2$ и $\bar{IV}_2^2$, используя правила I_{1-7}^2 и $\bar{III}_{1-2}^2$, доказываются все случаи транзитивности. Из I_{1-7}^2, $\bar{II}_1^2$ и $\bar{V}_{1-3}^2$ следует, что η^x согласовано со всеми операциями $\omega\in\Omega$. Наконец, используя правила I_{1-7}^2, $\bar{III}_{1-2}^2$ и $\bar{V}_{1-3}^2$, доказывается, что η^x вполне характеристическая конгруэнция.

С другой стороны, любая вполне характеристическая конгруэнция μ, содержащая η, удовлетворяет всем условиям $I_1^2 - \bar{V}_3^2$, следовательно, больше η^x, в частности $\eta_0 \geqslant \eta^x$, отсюда $\eta_0 = \eta^x$.

5.2. Выводимость тождественных соотношений уноидов. Пусть дана некоторая система Σ тождеств уноидов:

$$x w_{j1} = x w'_{j1}, \qquad j\in J_1, \tag{1'}$$

$$x w_{j2} = y w'_{j2}, \qquad j\in J_2. \tag{2'}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что тождество $xw = xw'$ или $xw = yw'$ выводимо из систем тождеств (I$'$) (2$'$), если $xw\,\eta^x xw'$ или $xw\,\eta^x yw'$, где η^x - вполне характеристическая конгруэнция алгебры слов $\langle S(\{x,y\}),\Omega\rangle$, которая порождена (п.5.I) отношением η, где $xw_{j1}\,\eta\, xw'_{j1}$, $j\in J_1$ и $xw_{j2}\,\eta\, yw'_{j2}$, $j\in J_2$.

Пусть дано некоторое многообразие $\mathfrak{M}$ унарных алгебр.

ТЕОРЕМА. Система Σ тождественных соотношений (I$'$) (2$'$) определяет многообразие $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда любое тождество многообразия $\mathfrak{M}$ выводимо из Σ.

Как мы уже знаем (п.2.I), множество Λ всех тождеств многообразия $\mathfrak{M}$ представляет собой вполне характеристическую конгруэнцию в алгебре слов с двумя образующими x и y.

Пусть Σ определяет $\mathfrak{M}$, т.е. Σ порождает множество всех тождеств многообразия $\mathfrak{M}$, которое представляет собой вполне характеристическую конгруэнцию алгебры слов $\langle S(\{x, y\}), \Omega \rangle$. Учитывая теорему п.5.I, получаем, что каждое тождество, принадлежащее Λ, выводимо из Σ. Обратно, если каждое тождество из Λ выводимо из Σ, то Σ порождает вполне характеристическую конгруэнцию Λ и, следовательно, Σ определяет $\mathfrak{M}$.

5.3. <u>Многообразия уноидов и отмеченные полугруппы.</u> Пусть дано многообразие $\mathfrak{M}$ уноидов сигнатуры $\Omega = \{\omega_j, j \in J\}$, которое задается системой тождеств:

$$x\omega_{ie_1} \dots \omega_{ie_{r_e}} = x\omega_{je_1} \dots \omega_{je_{s_e}}, \tag{I}$$

$$x\omega_{ke_1} \dots \omega_{ie_{p_e}} = y\omega_{se_1} \dots \omega_{se_{q_e}}. \tag{2}$$

Каждому символу операции $\omega_i \in \Omega$ сопоставляем некоторый символ u_j и рассмотрим свободную отмеченную полугруппу $(S(U), \varepsilon)$ над алфавитом $U = \{u_j, j \in J\}$. Теперь каждому тождеству (I) первого рода сопоставляем отношение τ_1 в полугруппе $S(U)$

$$u_{ie_1} \dots u_{ie_{r_e}} \, \tau_1 \, u_{je_1} \dots u_{je_{s_e}}, \tag{3}$$

а каждому тождеству (2) второго рода – отношение τ_2

$$u_{ke_1} \dots u_{ke_{p_e}} \, \tau_2^* \, u_{se_1} \dots u_{se_{q_e}}. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА. Произвольное тождество первого рода

$$x\omega_{i_1} \dots \omega_{i_n} = x\omega_{j_1} \dots \omega_{j_m} \tag{5}$$

или второго рода

$$x\omega_{k_1} \dots \omega_{k_p} = y\omega_{s_1} \dots \omega_{s_q} \tag{6}$$

тогда и только тогда вытекает из совокупности тождеств (I), (2), когда имеет место

$$u_{i_1} \dots u_{i_n} \, \tau^x \, u_{j_1} \dots u_{j_m}, \tag{7}$$

соответственно

$$u_{k_1} \dots u_{k_p} \, \tau^* \, u_{s_1} \dots u_{s_q}, \tag{8}$$

где τ^x и τ^* из п.4.3, т.е. τ^x – конгруэнтное замыкание пары отношений (τ_1, τ_2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть соотношения (7), (8) выводимы из соотношений (3), (4). Выделяем некоторое соотношение и его вывод. Этот вывод состоит из конечного числа применений правил $I_1^1 - V^1$. На основании данного вывода составляем новый вывод, который будет применяться к тождеству (5), соответственно, (6), заменяя каждое правило из $I_1^1 - \bar{V}^1$ подходящим правилом из $I_1^2 - \bar{V}^2$. Применяя этот вывод к системе тождественных соотношений (I), (2), мы получим соответствующее тождественное соотношение из (5),(6).

Обратно, на основании вывода какого-либо тождественного соотношения (5), (6) из системы (I), (2) можем составить вывод соответствующего соотношения, принадлежащего (7), (8) из системы соотношений (3), (4).

§ 6. Структура подмногообразий произвольного многообразия униодов и унарных алгебр

6.I. <u>Структура многообразий всех униодов данной сигнатуры</u>. Здесь изложим следующую основную теорему этой главы.

ТЕОРЕМА. Структура всех многообразий униодов сигнатуры $\Omega = \{\omega_j, j \in J\}$ антиизоморфна структуре всех конгруэнций с отмеченными классами свободной полугруппы с единицей $S(U)$ над алфавитом $U = \{u_j, j \in J\}$, где символы u_j берутся по одному для каждой сигнатурной операции ω_j.

Мы знаем (п.I.3 и 2.2), что структура всех многообразий унарных алгебр сигнатуры Ω антиизоморфна структуре всех вполне характеристических конгруэнций алгебры слов $< S(X), \Omega >$, где $X = \{x, y\}$. Дальше, в теореме п.5.3 установлено взаимно-однозначное соответствие между вполне характеристическими конгруэнциями алгебры $<S(X), \Omega>$ и конгруэнциями с отмеченными классами свободной полугруппы $S(U)$ (где $U = \{u_j, j \in J\}$), которое сохраняет строгие включения, а отсюда уже следует утверждение нашей теоремы.

Так как $S(U) \cong S(\Omega)$, то доказанную теорему можно сформулировать следующим образом: Структура всех многообразий Ω-униодов антиизоморфна структуре всех конгруэнций с отмеченными классами полугруппы операций $< S(\Omega), \cdot > = < \hat{\Omega}, \cdot >$.

6.2. <u>Структура всех подмногообразий произвольного многообразия униодов</u>. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное многообразие униодов сигнатуры $\Omega = \{\omega_j, j \in J\}$, определенное системой тождеств Λ. Мы можем считать, что Λ является вполне характеристической конгруэнцией алгебры слов $< S(X), \Omega >$, $X = \{x, y\}$. Пусть $\tau^* = \tau(\Lambda)$ – конгруэнция с отмеченными классами рассмотренной выше свободной полугруппы с единицей $S(U)$. τ^* является конгруэнцией свободной отмеченной полугруппы $< S(U), \varepsilon >$. Пусть

$$(S, \varepsilon^*) \cong (S(U), \varepsilon)/\tau^* = (S(U)/\tau, \varepsilon^*_{S(U)/\tau}).$$

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА I. Структура $SV(\mathfrak{M})$ всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$ антиизоморфна структуре конгруэнций отмеченной полугруппы (S, ε^*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому подмногообразию $\mathfrak{N}$ многообразия $\mathfrak{M}$ взаимно-однозначно соответствует вполне характеристическая конгруэнция $\Lambda(\mathfrak{N})$ алгебры $\langle S(\{x,y\}), \Omega \rangle$, которая больше вполне характеристической конгруэнции $\Lambda(\mathfrak{M})$. Конгруэнции $\Lambda(\mathfrak{N})$ соответствует конгруэнция с отмеченными классами $\tau^*_{\mathfrak{N}} = \tau(\Lambda(\mathfrak{N}))$, для которой также имеем $\tau^*_{\mathfrak{N}} \geqslant \tau^*_{\mathfrak{M}} = \tau(\Lambda(\mathfrak{M}))$. Отсюда получаем, что структура подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$ антиизоморфна структуре всех вполне характеристических конгруэнций алгебры $\langle S(\{x,y\}), \Omega \rangle$, которые превосходят Λ, будет антиизоморфной и структуре всех конгруэнций отмеченной полугруппы $(S(U), \varepsilon)$, которые больше τ^*. Тогда по теореме 2 из п.4.2 получаем, что и требовалось доказать.

Если многообразия $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ заданы в разных сигнатурах, но отмеченные полугруппы $\hat{\Omega}_1$ и $\hat{\Omega}_2$, (где Ω_1 и Ω_2 соответственно сигнатуры многообразий $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$) изоморфны, то структуры $SV(\mathfrak{M}_1)$ и $SV(\mathfrak{M}_2)$ изоморфны. Отметим (ср. [32]), что $\hat{\Omega}_1 \cong \hat{\Omega}_2$ тогда и только тогда, когда многообразия $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ эквивалентны (п.I.4).

6.3. <u>Структура всех подмногообразий произвольного многообразия унарных алгебр</u>. Под унарной алгеброй (см.п.I.6.II) понимается алгебра $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$, сигнатура которой содержит не более чем унарные операции. Пусть $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$, где Ω_0 и Ω_1 – соответственно совокупности нульарных и унарных операций. Обозначим через $\mathfrak{M}$ многообразие всех однотипных унарных алгебр сигнатуры $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$. Каждой нульарной операции $\omega_0 \in \Omega_0$, отмечающей элемент $g_0 \in G$ в алгебре $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$ многообразия $\mathfrak{M}$, сопоставляем унарную операцию ω_0' на множестве G, для которой $x\omega_0' = g_0$ для всех $x \in G$. Множество всех таких унарных операций обозначим через Ω_1'. Наряду с многообразием $\mathfrak{M}$ рассмотрим многообразие уноидов $\mathfrak{M}'$ сигнатуры $\Omega' = \Omega_1' \cup \Omega_1$ и систему тождеств

$$x\omega_0' = y\omega_0'$$

для всех $\omega_0' \in \Omega_1'$. Обозначим через τ' конгруэнцию $\tau'(\mathfrak{M}')$, т.е. вполне характеристическую конгруэнцию алгебры Ω'-слов $\langle S(\Omega',X),\Omega'\rangle$, где $X=\{x,y\}$, соответствующая классу $\mathfrak{M}'$(п.I.D), и через $\langle\hat{\Omega}',\cdot\rangle$ – соответствующую полугруппу операций. Тогда, так как между вполне характеристическими конгруэнциями ρ алгебры Ω'-слов $\langle S(\Omega',\{x,y\}),\Omega'\rangle$, где $\rho\geqslant\gamma'$, и свободной алгебры с двумя образующими многообразия $\mathfrak{M}'$, имеется взаимно-однозначное соответствие, получаем следующий результат.

Структура $SV(\mathfrak{M})$ всех подмногообразий многообразия унарных алгебр $\mathfrak{M}$ изоморфна структуре $SV(\mathfrak{M}')$ всех подмногообразий многообразия Ω'-уноидов $\mathfrak{M}'$ и, следовательно, антиизоморфна структуре конгруэнций с отмеченными классами отмеченной полугруппы $(\langle\hat{\Omega}',\cdot\rangle,\varepsilon^*)$, где ε^* – равенство на фактор-полугруппе $S(\Omega')/\gamma'=\hat{\Omega}'$, у которой отмечены те элементы, которые как классы конгруэнции γ' содержат элементы вида $\omega_0'w$, где ω_0' – произвольная унарная операция, соответствующая нульарной ω_0, а w – произвольный элемент из $S(\Omega')$.

6.4. <u>Некоторые частные случаи</u>. а) Рассмотрим случай, когда сигнатура Ω состоит из одного символа операции $\Omega=\{\omega\}$ (см. [9]). Тогда полугруппа $S(U)$ является свободной полугруппой с одним образующим (свободной циклической полугруппой), и будем иметь $S(U)=\{\varepsilon,u,u^2,\ldots\}$. Определим конгруэнции с отмеченными классами полугруппы $S(U)$. Пусть γ – одна из таких конгруэнций. Тогда среди всех выражений $u^k\gamma u^t$, $t\neq k$ ищем те, у которых k наименьшее, если $\gamma\neq\varepsilon_{S(U)}$, то такие существуют. Пусть наименьшее значение k есть m и $u^m\gamma u^t$ одно их возможных таких выражений. Среди этих выражений ищем то, у которого t наименьшее. Так как $t\neq m$ и $t<m$ исключается ввиду минимальности m (γ – симметрично), то это наименьшее значение t может быть представлено в виде $m+s$, $s\geqslant 1$. Итак получаем

$$u^m\gamma u^{m+s}. \qquad (I)$$

Отсюда видно, что каждый из элементов $\varepsilon,u,u^2,\ldots,u^{m-1}$ составляет отдельный класс по γ, а дальше $u^{m+1}\gamma u^{m+s+1}$, $u^{m+2}\gamma u^{m+s+2}$,... ..., $u^{m+s}\gamma u^{m+2s}\gamma u^m$,..., т.е. остальные элементы разбиваются на классы, так что в один класс попадают те степени u^k, u^t, $t>k>m$, у которых $t-k\equiv 0(\mathrm{mod}\, s)$. Если $s>1$, то ни один из этих классов не может быть левым идеалом полугруппы $S(U)$, а при $s=1$ все элементы u^k, $k>m$ попадают в один класс, который, следовательно, является левым идеалом. Этот класс может быть отмечен, тогда можем писать

$$u^m \gamma^* u^m. \tag{2}$$

Итак, если конгруэнция γ^* полугруппы $S(U)$ не имеет отмеченных классов, то является конгруэнтным замыканием отношения типа (I). Если же γ^* имеет отмеченные классы, то она является конгруэнтным замыканием отношения типа (2), причем класс, содержащий u^m, – отмеченный.

Отсюда получаем: Любое многообразие унарных алгебр с одной унарной операцией задается одним тождеством вида

$$x w^m = x w^{m+s} \tag{I''}$$

или одним тождеством вида

$$x w^m = y w^m. \tag{2''}$$

Нетрудно проверить, что структурные операции выполняются следующим образом:

$$\{u^m \gamma u^{m+s}\}^k \cup \{u^n \gamma u^{n+t}\}^k = \{u^{\min(m,n)} \gamma u^{\min(m,n)+\text{НОД}(s,t)}\}^k;$$

$$\{u^m \gamma^* u^m\}^k \cup \{u^n \gamma u^{n+t}\}^k = \{u^{\min(m,n)} \gamma^* u^{\min(m,n)}\}^k;$$

$$\{u^m \gamma u^{m+s}\}^k \cap \{u^n \gamma u^{n+t}\}^k = \{u^{\max(m,n)} \gamma u^{\max(m,n)+\text{НОК}(s,t)}\}^k;$$

$$\{u^m \gamma^* u^m\}^k \cap \{u^n \gamma u^{n+t}\}^k = \{u^m \gamma u^{m+1}\}^k \cap \{u^n \gamma u^{n+t}\}^k;$$

$$\{u^m \gamma^* u^m\}^k \cap \{u^n \gamma^* u^n\}^k = \{u^{\max(m,n)} \gamma^* u^{\max(m,n)}\}^k.$$

Здесь $\{u^p \gamma u^q\}^k$ означает конгруэнтное замыкание выражения $u^p \gamma u^q$, а $\{u^p \gamma^* u^q\}^k$ – то же, с отмечением класса, содержащего u^p.

б) Если полугруппа $(S(U)/\gamma, \varepsilon)$ не имеет левых идеалов, то структура конгруэнций с отмеченными классами отличается от структуры обычных конгруэнций только тем, что добавляется еще один элемент U^* больше всех остальных – универсальное отношение, у которого отмечен его единственный класс. В частности, если $S(U)/\gamma$ группа, то это будет структура нормальных делителей с добавлением еще одного наибольшего элемента. Например, если $S(U)/\gamma$ – бесконечная циклическая группа, то, учитывая описание структуры ее нормальных делителей, получаем, что структура подмногообразий изоморфна полной структуре неотрицательных целых чисел, в которой наибольшая нижняя грань совпадает с наибольшим общим делителем, а наименьшая верхняя грань – с наименьшим общим кратным с добавлением еще одного элемента, который меньше всех элементов данной структуры (см. [33]).

Зак. 444

Глава III. ИДЕАЛЫ ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ УНИВЕРСАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ

§ I. Структура насыщенных левых идеалов

<u>I.I. Эндоморфные образы свободной алгебры.</u> Пусть $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$ свободная в себе (следовательно, и в некотором многообразии) алгебра. Пусть $X = \{x_i, i \in I\}$, где I – некоторое множество индексов, мощность которого обозначим через n, система свободных образующих алгебры $\mathcal{Y}$. Элементы алгебры $\mathcal{Y}$ будем обозначать малыми латинскими буквами $a, b, c, \ldots$, эндоморфизмы алгебры $\mathcal{Y}$ – малыми греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Множество всех эндоморфизмов алгебры $\mathcal{Y}$ обозначим через $V(\mathcal{Y})$ или просто V.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подалгебра B алгебры $\mathcal{Y}$ называется <u>n-подалгеброй</u>, если она имеет, по крайней мере, одну систему образующих, мощность которой не больше мощности n множества I.

Следующее предложение дает простой и эффективный критерий того, когда подалгебра N алгебры $\mathcal{Y}$ является гомоморфным образом алгебры $\mathcal{Y}$.

Подалгебра N алгебры $\mathcal{Y}$ является ее эндоморфным образом тогда и только тогда, когда N является n-подалгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если N – эндоморфный образ алгебры $\mathcal{Y}$, то существует такой эндоморфизм $\alpha \in V$, что $N = \mathcal{Y}\alpha$. Тогда подалгебра N порождается элементами $x_i\alpha$, т.е. имеет систему образующих мощности не больше n. Обратно, если N имеет систему образующих мощности не более n, то любое отображение множества X свободных образующих алгебры $\mathcal{Y}$ на эту систему образующих подалгебры N определяет эндоморфизм α, для которого $\mathcal{Y}\alpha = N$, т.е. N – эндоморфный образ.

Заметим, что если мощность n системы свободных образующих алгебры $\mathcal{Y}$ бесконечна и не меньше мощности множества Ω основных операций алгебры $\mathcal{Y}$, которые мы предполагаем, как обычно, финитарными, то сама алгебра $\mathcal{Y}$ будет иметь мощность n. В самом деле, в этом случае, как следует из известных фактов теории множеств, множество $X \cup \Omega$ имеет бесконечную мощность n, а следовательно, множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов множества $X \cup \Omega$, будет также мощности n. Отсюда получаем, что алгебра слов $\mathcal{Y}(X)$ имеет мощность не более чем n, так как каждое слово определяется такой последовательностью специального вида. Тогда и наша алгебра $\mathcal{Y}$ как фактор-алгебра алгебры слов $\mathcal{Y}(X)$ будет иметь мощность не более чем n. Учитывая, что $\mathcal{Y} \supseteq X$, заключаем, что мощность алгебры $\mathcal{Y}$ равна n. Тогда мощность каждой ее подалгебры не более n, следовательно, произвольная система образующих подалгебр алгебры $\mathcal{Y}$ будет иметь мощность не больше чем n, т.е. в этом случае каждая подалгебра алгебры $\mathcal{Y}$ является n-подалгеброй. Отсюда следует, что любая подалгебра такой алгебры $\mathcal{Y}$ является ее эндоморфным образом.

Из этого замечания следует, что для многих обычных алгебр (групп, колец, квазигрупп, луп, структур и т.п.) у свободной в некотором классе алгебры со счетным числом образующих (тем более, с любой бесконечной системой образующих) каждая подалгебра является эндоморфным образом. Положение, как правило, меняется в случае свободных алгебр с конечным числом образующих. Так, как хорошо известно, группа, свободная в классе всех групп с $n > 1$ свободными образующими, содержит подгруппу, любая система образующих которой счетна, следовательно, такая подгруппа не будет эндоморфным образом данной группы.

1.2. Насыщенные левые идеалы. Пусть M - некоторое подмножество множества G. Обозначим через $\mathfrak{A}_M$ множество всех эндоморфизмов $\alpha \in V(\mathcal{Y})$, которые отображают G в M, т.е. таких, что для любого $g \in G$, $g\alpha \in M$. В таком случае будем писать также $\mathcal{Y}\alpha \subseteq M$.

Для любого $M \subseteq G$ множество $\mathfrak{A}_M$, если не пусто, является левым идеалом полугруппы $V(\mathcal{Y})$. Пусть $\mathfrak{A}_M \neq \varnothing$ и $\varphi \in \mathfrak{A}_M$, т.е. для любого $g \in G$ имеем $g\varphi \in M$. Тогда для любого $\alpha \in V$ и $a \in G$ имеем

$$a(\alpha\varphi) = (a\alpha)\varphi = g\varphi \in M,$$

т.е. $\mathcal{Y}(\alpha\varphi) \subseteq M$, следовательно, $\alpha\varphi \in \mathfrak{A}_M$. Идеалы $\mathfrak{A}_M$ называются насыщенными.

1.3. Структура эндомножеств. Обозначим через $\mho$ оператор эндокозамыкания, который каждому подмножеству $M \subseteq G$ сопоставляет наименьшее его подмножество $\mho(M)$, для которого $\mathfrak{A}_{\mho(M)} = \mathfrak{A}_M$. Покажем, что таким образом определенный оператор $\mho$ является оператором козамыкания. Для этого надо показать, что выполняются условия 1^I, 2^I, 3^I определения козамыкания (см.п.1.4.6). По определению $\mathcal{V}(M) \subseteq M$. Покажем теперь, что $\mathcal{V}(\mathcal{V}(M)) = \mathcal{V}(M)$ для любого $M \subseteq G$. Так как $\mathcal{V}(\mathcal{V}(M)) \subseteq \mathcal{V}(M)$ по определению, то достаточно показать, что $\mathcal{V}(\mathcal{V}(M)) \supseteq \mathcal{V}(M)$. Пусть $m \in \mathcal{V}(M)$. Тогда существует $\varphi \in \mathfrak{A}_M$ и $g \in G$, что $g\varphi = m$. Но по определению оператора $\mathcal{V}$ имеем $\mathfrak{A}_M = \mathfrak{A}_{\mathcal{V}(M)} = \mathfrak{A}_{\mathcal{V}(\mathcal{V}(M))}$, следовательно, $\varphi \in \mathfrak{A}_{\mathcal{V}(\mathcal{V}(M))}$. Отсюда $g\varphi = m \in \mathcal{V}(\mathcal{V}(M))$, что требовалось.

Замкнутые множества относительно оператора эндозамыкания назовем эндомножествами. Согласно п.I.4.6 имеет место

ТЕОРЕМА. Множество U всех эндомножеств является структурой, в которой наименьшая верхняя грань совпадает с теоретико-множественным объединением.

Отметим, что эта теорема справедлива для любой алгебры, не обязательно свободной.

Для любого подмножества $\mathfrak{A} \subseteq V$ будем писать $G\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} G\alpha$.

ЛЕММА. Если M - эндомножество, то $G\mathfrak{A}_M = M$.

Утверждение леммы следует из того, что, как легко видеть, $G\mathfrak{A}_M = \mathcal{V}(M)$ и для нашего M, $\mathcal{V}(M) = M$.

Описание эндомножеств свободных алгебр дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА. Подмножество $M \subseteq G$ является эндомножеством тогда и только тогда, когда M является теоретико-множественным объединением подалгебр алгебры $\mathcal{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M - эндомножество. Согласно лемме $M = G\mathfrak{A}_M = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}_M} G\alpha$, следовательно, M есть объединение подалгебр. Пусть теперь M - объединение подалгебр и m произвольный элемент из M. Пусть α_m - эндоморфизм, для которого $x_i \alpha_m = m$ при любом $i \in I$. Тогда $\mathcal{G}\alpha_m$ является циклической подалгеброй, причем $G\alpha_m = [m]$. Так как циклическая подалгебра, порожденная элементом m, содержится в любой подалгебре, содержащей m, отсюда следует, что $G\alpha_m \subseteq M$ и тогда $M = \mathcal{V}(M)$, т.е. M - эндомножество.

<u>Пересечение произвольного семейства эндомножеств является эндомножеством.</u>

Пусть M_j, $j \in J$ - некоторое семейство эндомножеств. Положим $M = \bigcap_j M_j$. Надо показать, что M является объединением подалгебр. Для этого достаточно доказать, что для любого $m \in M$ циклическая подалгебра $[m]$ содержится в M. Из $m \in M$ следует, что $m \in M_j$ для каждого $j \in J$. Так как каждое M_j является объединением подалгебр и что, как уже отмечалось один раз, циклическая подалгебра $[m]$ содержится в каждой алгебре, которой принадлежит m, получаем, что $[m] \subseteq M_j$ для каждого $j \in J$. Тогда $[m] \subseteq \bigcap M_j$. Отсюда следует, что само $\bigcap\limits_{j\in J} M_j$ является объединением подалгебр, значит и ендомножеством.

Из доказанного следует, что в структуре U всех эндомножеств данной алгебры $\mathcal{Y}$ наибольшая нижняя грань любой совокупности совпадает с теоретико-множественным пересечением данных эндомножеств, следовательно, полная структура U является полной подструктурой структуры всех подмножеств множества G.

<u>I.4. Структура насыщенных левых идеалов.</u> Пусть $\mathfrak{A}$ – некоторое подмножество множества V всех эндоморфизмов алгебры $\mathcal{Y}$. Обозначим через $M_{\mathfrak{A}}$ множество всех $m \in G$, для которых существуют такие $a \in G$ и $\varphi \in \mathfrak{A}$, что $a\varphi = m$. Легко видеть, что $M_{\mathfrak{A}} = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} G\alpha$, т.е. множество $M_{\mathfrak{A}}$ для любого $\mathfrak{A} \subseteq V$ является эндомножеством.

Дальше, для любого $M \subseteq G$ имеет место включение $M_{\mathfrak{A}_M} \subseteq M$, причем $M_{\mathfrak{A}_M} = \mathcal{U}(M)$. В самом деле, включение $M_{\mathfrak{A}_M} \subseteq M$ следует непосредственно из определений $\mathfrak{A}_M$ и $M_{\mathfrak{A}}$. Для доказательства второго утверждения, ввиду того, что $M_{\mathfrak{A}_M}$ – эндомножество, достаточно доказать, что $M_{\mathfrak{A}_M}$ содержит все циклические подалгебры из M. Пусть элемент $m \in M$ таков, что $[m] \subseteq M$. Тогда $G\alpha_m = [m] \subseteq M$ (здесь α_m, как всегда, эндоморфизм, для которого $x_i\alpha_m = m$ при любом $i \in I$), т.е. $\alpha_m \in \mathfrak{A}_M$, откуда

$$M_{\mathfrak{A}_M} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}_M} G\alpha \supseteq G\alpha_m = [m].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для каждого подмножества $\mathfrak{A} \subseteq V$ определим <u>оператор насыщения $N(\mathfrak{A})$</u> следующим образом $N(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_{M_{\mathfrak{A}}}$, т.е. замыкание подмножества $\mathfrak{A} \subseteq V$ – это насыщенный левый идеал $\mathfrak{A}_{M_{\mathfrak{A}}}$.

Покажем, что оператор насыщения является оператором замыкания.

Так как $\mathfrak{A}$ отображает G на $M_{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A}_{M_{\mathfrak{A}}}$ содержит все эндоморфизмы, отображающие G в $M_{\mathfrak{A}}$, имеем

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_{M_{\mathfrak{A}}} = N(\mathfrak{A}).$$

Также легко видеть, что $N(\mathfrak{A}_M) = \mathfrak{A}_M$, т.е. $N(N(\mathfrak{A})) = N(\mathfrak{A})$, и из $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$ следует $N(\mathfrak{A}_1) \subseteq N(\mathfrak{A}_2)$. Отсюда на основании п.I.4.5 получаем.

ТЕОРЕМА I. Множество Π всех насыщенных левых идеалов полугруппы V полных эндоморфизмов свободной алгебры $\mathcal{Y}$ является полной структурой, в которой наибольшая нижняя грань совпадает с их теоретико-множественным пересечением.

Подчеркнем, что в этой теореме устанавливается, что пересечение любого семейства насыщенных левых идеалов является насыщенным левым идеалом.

Связь между структурами U и Π устанавливается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. Полные структуры всех эндомножеств свободной алгебры $\mathfrak{Y}$ и всех насыщенных левых идеалов полугруппы V полных эндоморфизмов алгебры $\mathfrak{Y}$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Устанавливаем соответствие f между насыщенными идеалами и эндомножествами, при котором насыщенному идеалу $\mathfrak{A}_M$ сопоставляется ендомножество M, которое, как мы заметили, совпадает с $M_{\mathfrak{A}_M} = M$. Это соответствие является однозначным, так как если M_1 и M_2 два эндомножества и, например, $m \in M_1 \setminus M_2$, то эндоморфизм $\alpha_m \in \mathfrak{A}_{M_1} \setminus \mathfrak{A}_{M_2}$. Отображение $f : \Pi \to U$ является взаимно-однозначным. Пусть $\mathfrak{A}_{M_1}$ и $\mathfrak{A}_{M_2}$ – два различных насыщенных левых идеала. Тогда $f(\mathfrak{A}_{M_1}) = M_1$ и $f(\mathfrak{A}_{M_2}) = M_2$. Если, например, $\alpha \in \mathfrak{A}_{M_1} \setminus \mathfrak{A}_{M_2}$, то $\mathfrak{Y}\alpha \subseteq M_1$, $\mathfrak{Y}\alpha \nsubseteq M_2$. Тогда существуют элементы $m \in M_1 \setminus M_2$ и $g \in G$, что $g\alpha = m$, и так $M_1 \neq M_2$.

Покажем, что f является изоморфизмом полных структур Π и U, т.е. что f сохраняет наибольшие нижние и наименьшие верхние грани. Пусть M_j, $j \in J$ – некоторое семейство эндомножеств. Тогда $\bigcap_j \mathfrak{A}_{M_j} = \mathfrak{A}_{\bigcap_j M_j}$. В самом деле, так как $\bigcap_j M_j \subseteq M_j$ для любого $j \in J$, то $\mathfrak{A}_{\cap M_j} \subseteq \mathfrak{A}_{M_j}$ для любого $j \in J$, но тогда $\mathfrak{A}_{\cap M_j} \subseteq \bigcap_j \mathfrak{A}_{M_j}$. Обратно, пусть $\alpha \in \bigcap_j \mathfrak{A}_{M_j}$, тогда $\alpha \in \mathfrak{A}_{M_j}$ для каждого $j \in J$. Отсюда $G\alpha \subseteq M_j$ для каждого $j \in J$, значит $G\alpha \subseteq \bigcap_j M_j$. Из последнего выражения получаем $\alpha \in \mathfrak{A}_{\bigcap_j M_j}$, и требуемое равенство доказано. Сейчас получаем

$$f\left(\bigcap_j \mathfrak{A}_{M_j}\right) = f\left(\mathfrak{A}_{\bigcap_j M_j}\right) = \bigcap_j M_j .$$

Следовательно, наибольшие нижние грани сохраняются взаимно-однозначным соответствием f. Наименьшую верхнюю грань насыщенных левых идеалов $\mathfrak{A}_{M_j}$, $j \in J$ обозначим символом $\bigvee_{j \in J} \mathfrak{A}_{M_j}$, т.е. этим символом обозначен наименьший насыщенный левый идеал $\mathfrak{A}_M$, содержащий $\mathfrak{A}_{M_j}$ для каждого $j \in J$, т.е. $\bigvee_{j \in J} \mathfrak{A}_{M_j} = \mathfrak{A}_M$. Докажем, что $M = \bigcup_{j \in J} M_j$. Пусть $\bigcup_j M_j \setminus M \neq \emptyset$, тогда существует хотя одно j и элемент $m \in M_j$ такой, что $m \notin M$. В таком случае эндоморфизм α_m, принадлежащий $\mathfrak{A}_{M_j}$, не принадлежит идеалу $\mathfrak{A}_M = \bigvee_{j \in J} \mathfrak{A}_{M_j}$, т.е. $\bigvee_{j \in J} \mathfrak{A}_{M_j} \supseteq$

$\supseteq \mathfrak{A}_{M_j}$ не выполняется, что противоречит определению наименьшей верхней грани. Допустим теперь, что $M \setminus \bigcup M_j \neq \emptyset$. Так как M и $\bigcup_{j\in J} M_j$ эндомножества, то существует некоторая Π-подалгебра, например циклическая $[m]$, так что $m \notin \bigcup_{j\in J} M_j$, $m \in M$, которая содержится в M, но не содержится в $\bigcup_{j\in J} M_j$. Но тогда $\alpha_m \in \mathfrak{A}_M$ и $\alpha_m \notin \mathfrak{A}_{\bigcup_{j\in J} M_j} \supseteq \bigvee \mathfrak{A}_{M_j}$, и это показывает, что $\mathfrak{A}_M$ не является наименьшим насыщенным левым идеалом, содержащим $\mathfrak{A}_{M_j}$, для всех $i \in J$. Итак, $M = \bigcup_{j\in J} M_j$. Тогда $\bigvee_{j\in J} \mathfrak{A}_{M_j} = \mathfrak{A}_M = \mathfrak{A}_{\bigcup_{j\in J} M_j}$, а отсюда получаем

$$f\left(\bigvee_{j\in J} \mathfrak{A}_{M_j}\right) = f\left(\mathfrak{A}_{\bigcup_{j\in J} M_j}\right) = \bigcup_{j\in J} M_j,$$

и этим теорема доказана.

I.5. Насыщенные левые идеалы циклических алгебр. Естественно поставить следующий вопрос: когда полная структура Π всех насыщенных левых идеалов является полной подструктурой полной структуры всех левых идеалов полугруппы $\mathcal{G}$. Учитывая доказанное в п.I.4, для ответа на этот вопрос остается выяснить, когда имеет место равенство

$$\bigvee_{j\in J} \mathfrak{A}_{M_j} = \bigcup_{j\in J} \mathfrak{A}_{M_j}.$$

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, представляющая одну характеризацию циклических свободных алгебр при помощи понятия насыщенного левого идеала.

ТЕОРЕМА. Свободная алгебра $\mathcal{G}$ является циклической тогда и только тогда, когда наименьшая верхняя грань любого семейства насыщенных левых идеалов $\mathfrak{A}_{M_j}$, $j \in J$ в полной структуре Π совпадает с их теоретико-множественным объединением.

Учитывая, что теоретико-множественное объединение левых идеалов есть левый идеал, можно сформулировать эту теорему следующим образом:

свободная алгебра $\mathcal{G}$ является циклической тогда и только тогда, когда для любого семейства насыщенных левых идеалов $\mathfrak{A}_{M_j}$, $j \in J$ имеет место

$$\bigcup_{j\in J} \mathfrak{A}_{M_j} = \mathfrak{A}_{\bigcup_{j\in J} M_j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим предварительно, что для любой алгебры $\mathcal{G}$ имеет место $\bigcup_{j\in J} \mathfrak{A}_{M_j} \subseteq \mathfrak{A}_{\bigcup_{j\in J} M_j}$. В самом деле, пусть $\alpha \in \bigcup_{j\in J} \mathfrak{A}_{M_j}$. Тогда существует $j \in J$, для которого $\alpha \in \mathfrak{A}_{M_j}$. Тогда $G_\alpha \subseteq M_j$, отсюда $G_\alpha \subseteq \bigcup_{j\in J} M_j$, следовательно, $\alpha \in \mathfrak{A}_{\bigcup_{j\in J} M_j}$.

Пусть теперь алгебра $\mathcal{V}$ – циклическая и $\alpha \in \mathfrak{A}_{\bigcup\limits_{j\in J} M_j}$. Так как в этом случае каждый эндоморфный образ является циклической подалгеброй, то $G\alpha = [a] \subseteq \bigcup\limits_{j\in J} M_j$. Тогда существует такое $j \in J$, что $a \in M_j$, но так как M_j эндомножество, то $[a] \subseteq M_j$, или $G\alpha \subseteq M_j$. Это означает, что $\alpha \in \mathfrak{A}_{M_j}$, т.е. $\alpha \in \bigcup\limits_{j\in J} M_j$, отсюда следует $\bigcup\limits_{j\in J} \mathfrak{A}_{M_j} \supseteq \mathfrak{A}_{\bigcup\limits_{j\in J} M_j}$. Таким образом, $\bigcup\limits_{j\in J} \mathfrak{A}_{M_j} = \mathfrak{A}_{\bigcup\limits_{j\in J} M_j}$.

Допустим теперь, что свободная алгебра $\mathcal{V}$ нециклическая, т.е. для системы образующих X, $card\, X \geqslant 2$. Так как каждая циклическая подалгебра является эндоморфным образом, то можно рассматривать семейство всех насыщенных идеалов $\mathfrak{A}_{M_j}$ для всех циклических подалгебр $M_j \subseteq G$. Так как в этом случае $\bigcup\limits_{j\in J} M_j = G$, то $\bigcup\limits_{j\in J} \mathfrak{A}_{M_j} \subset \mathfrak{A}_{\bigcup\limits_{j\in J} M_j}$, ибо правая часть содержит тождественный автоморфизм алгебры $\mathcal{V}$, в то время как в левой части он не содержится. Теорема доказана.

<u>1,6. Левое отношение Грина в полугруппе эндоморфизмов.</u> Как известно (см.,например,[5])элементы a и b некоторой полугруппы S находятся в отношении Грина $\mathcal{L}$ тогда и только тогда,когда они порождают один и тот же левый идеал полугруппы S. Этот факт можно записать в виде эквивалентности $a\mathcal{L}b \Leftrightarrow (a \cup Sa = b \cup Sb)$. Если полугруппа S обладает единицей, то $a\mathcal{L}b \Leftrightarrow (Sa = Sb)$.

ЛЕММА. Уравнение $\chi\alpha = \beta$ относительно неизвестного χ разрешимо тогда и только тогда, когда $G\beta \subseteq G\alpha$.

Если существует такое γ, что $\beta = \gamma\alpha$, то

$$G\beta = G(\gamma\alpha) = (G\gamma)\alpha \subseteq G\alpha .$$

Пусть теперь $G\beta \subseteq G\alpha$. Так как $G\alpha$ порождается системой элементов $m_i = x_i\alpha$, $i \in I$, то каждый из образующих $n_i = x_i\beta$ алгебры $G\beta$ выражается через m_i. Пусть $n_i = w_i(m_k)$, где k пробегает некоторое конечное подмножество $\mathcal{K} \subseteq I$, – одно из таких выражений для n_i. Тогда, если γ эндоморфизм, для которого $x_i\gamma = w_i(x_k)$, $i \in I$, $k \in \mathcal{K}$, то $\beta = \gamma\alpha$. В самом деле,

$$x_i(\gamma\alpha) = (x_i\gamma)\alpha = w_i(x_k)\alpha = w_i(x_k\alpha) = w_i(m_k) = n_i = x_i\beta ,$$

следовательно, эндоморфизмы $\gamma\alpha$ и β совпадают на множестве X свободных образующих, но тогда они равны.

СЛЕДСТВИЕ. Для любых $\alpha, \beta \in V$ имеем $\alpha\mathcal{L}\beta$ тогда и только тогда, когда $G\alpha = G\beta$, т.е. эквивалентны те и только те эндоморфизмы, которые имеют один и тот же образ.

§ 2. Структура разреженных левых идеалов

2.1. Разреженные левые идеалы. Для каждого эндомножества $M \leq G$ фиксируем некоторое его покрытие циклическими подалгебрами. Система элементов $m_j, j \in J$, где m_j образующие циклических подалгебр данного покрытия, взятых по одному во всех подалгебрах, составляющих указанное покрытие, называется степенным базисом эндомножества M. Очевидно, что степенной базис, вообще говоря, определяется неоднозначно даже для фиксированного покрытия. Пусть выбран некоторый степенной базис $B(M)$. Для этого степенного базиса обозначим через $\mathcal{L}(M)$ множество всех эндоморфизмов α_{m_j}, взятых по одному для каждого $m_j \in B(M)$. Так как $G\alpha_{m_j} = [m_j]$ и система подмножеств $[m_j]$ предоставляет покрытие эндомножества M, то $M_{\mathcal{L}(M)} = M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Левый идеал, порожденный в полугруппе V множеством эндоморфизмов $\mathcal{L}(M)$, называется разреженным левым идеалом полугруппы, соответствующим множеству M, и обозначается символом $\mathcal{R}_M$.

Таким образом, $\mathcal{R}_M = V \cdot \mathcal{L}(M)$.

ТЕОРЕМА 1. Разреженный левый идеал $\mathcal{R}_M$ является наименьшим среди всех тех левых идеалов, которые отображают алгебру $\mathcal{Y}$ на M, т.е. если $\mathcal{E}$ - левый идеал полугруппы V и $M_{\mathcal{E}} = M$, то $\mathcal{R}_M \leq \mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{E}$ - левый идеал такой, что $M_{\mathcal{E}} = M$. Берем некоторый степенной базис $B(M)$ эндомножества M. Тогда для любого $m \in B(M)$ существуют такие $a \in G$ и $\varphi \in \mathcal{E}$, что $a\varphi = m$. Отсюда следует, что $G\alpha_m \leq G\varphi$, а тогда по лемме п.1.6 существует такое γ, что $\alpha_m = \gamma\varphi$; таким образом $\alpha_m \in \mathcal{E}$. Итак, $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{L}(M)$, следовательно, $\mathcal{R}_M \leq \mathcal{E}$.

Из доказанной теоремы следует, что разреженный левый идеал $\mathcal{R}_M$ есть пересечение всех левых идеалов, отображающих G на M, а отсюда вытекает, что разреженный левый идеал $\mathcal{R}_M$ не зависит от выбора покрытия множества M циклическими подалгебрами, а также от выбора базиса $B(M)$.

Характеризация эндоморфизмов, принадлежащих разреженному левому идеалу $\mathcal{R}_M$, дается следующими теоремами.

ТЕОРЕМА 2. Разреженный левый идеал $\mathcal{R}_M$ состоит из тех и только тех эндоморфизмов, которые отображают алгебру $\mathcal{Y}$ в циклические подалгебры, содержащиеся в эндомножестве M.

Пусть $\alpha \in \mathcal{R}_M$, т.е. $\alpha = \varphi\alpha_m$, где $\varphi \in V$ и $m \in B(M)$ (здесь $B(M)$ - некоторый степенной базис множества M). Тогда, если $x_i\varphi = w_i(x_j)$, где $i \in I$, $j \in J_i \subseteq I$, J_i конечное, имеем

$$x_i\alpha = x_i(\varphi\alpha_m) = (x_i\varphi)\alpha_m = w_i(x_j)\alpha_m = w_i(x_j\alpha_m) = w_i'(m)$$

Через $w_i'(m)$ здесь обозначено выражение, полученное из $w_i(x_j)$ заменой всех x_j на m. Следовательно, $G\alpha \subseteq [m]$. Пусть теперь α - эндоморфизм, отображающий G в некоторую циклическую подалгебру $[m]$, для некоторого $m \in M$. Тогда для всех $i \in I$ имеем $x_i\alpha = w_i(m)$, где $w_i(m)$ - некоторое выражение от m. При этом можем считать, что $m \in B(M)$ хотя бы потому, что идеал $\mathcal{R}_M$ не зависит от выбора покрытия множества M циклическими подалгебрами и степенного базиса $B(M)$. Тогда из $G\alpha \subseteq [m] = G\alpha_m$ и леммы из п.I.6 следует существование такого $\gamma \in V$, что $\alpha = \gamma\alpha_m$, откуда $\alpha \in \mathcal{R}_M$.

Заметим, что для $\alpha \in \mathcal{R}_M$, вообще говоря, $G\alpha$ может не быть циклической подалгеброй.

ТЕОРЕМА 3. Левый идеал $\mathcal{R}_M$ порождается любой системой эндоморфизмов $\mathcal{X}'(M)$, отображающих G на все циклические подалгебры некоторого покрытия; причем берется по одному эндоморфизму для каждой из этих подалгебр, т.е. $\mathcal{R}_M = V \cdot \mathcal{X}'(M)$

Из теоремы 2 имеем $\mathcal{X}'(M) \subseteq \mathcal{R}_M$, т.е. $V \cdot \mathcal{X}'(M) \subseteq \mathcal{R}_M$. С другой стороны, пусть $B(M)$ степенной базис и $\mathcal{X}(M)$ множество эндоморфизмов α_m, $m \in B(M)$, при помощи которых построен идеал $\mathcal{R}_M$. Тогда для каждого $m \in B(M)$ существует циклическая подалгебра $[m']$, принадлежащая покрытию из условия теоремы, что $m \in [m']$. По условию существует $\alpha' \in \mathcal{X}'(M)$, что $G\alpha' = [m']$ Тогда

$$G\alpha_m = [m] \subseteq [m'] = G\alpha'.$$

Отсюда по лемме из п.I.6 существует $\gamma \in V$, что $\alpha_m = \gamma\alpha'$, следовательно, $\alpha_m \in V \cdot \mathcal{X}'(M)$, откуда $\mathcal{X}(M) \subseteq V \cdot \mathcal{X}'(M)$, следовательно, $V \cdot \mathcal{X}(M) \subseteq V \cdot \mathcal{X}'(M)$, т.е. $\mathcal{R}_M \subseteq V \cdot \mathcal{X}'(M)$. Таким образом, $\mathcal{R}_M = V \cdot \mathcal{X}'(M)$. В частности, отсюда следует, что $\mathcal{R}_M$ порождается любой системой эндоморфизмов, отображающих G на все циклические подалгебры из M.

2.2. Структура разреженных левых идеалов. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для каждого левого идеала $\mathfrak{A} \subseteq V$ определим внутреннее разрежение $R(\mathfrak{A})$ следующим образом: $R(\mathfrak{A}) = \mathcal{R}_{M_\alpha}$, т.е. $R(\mathfrak{A})$- это разреженный левый идеал, который отображает G на то же эндомножество, что и $\mathfrak{A}$.

Покажем, что оператор R является оператором козамыкания. Пусть $M_{\mathfrak{A}} = M$. Тогда для каждого $m \in M$ найдется $\alpha \in \mathfrak{A}$ такой, что $m \in G\alpha$. С другой стороны, эндоморфизм $\alpha_m \in \mathcal{R}_M$. Так как $G\alpha_m = [m] \subseteq G\alpha$, то по лемме из п.1.6 существует $\gamma \in V$ такое, что $\alpha_m = \gamma\alpha$, следовательно, $\alpha_m \in \mathfrak{A}$. Отсюда $\mathcal{R}_M \subseteq \mathfrak{A}$, т.е. $R(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$, то $M_{\mathfrak{A}_1} \subseteq M_{\mathfrak{A}_2}$, тогда $\mathcal{R}_{M_{\mathfrak{A}_1}} \subseteq \mathcal{R}_{M_{\mathfrak{A}_2}}$, т.е. $R(\mathfrak{A}_1) \subseteq R(\mathfrak{A}_2)$. Наконец, очевидно, что $R(\mathcal{R}_M^{\mathfrak{A}}) = \mathcal{R}_M^{\mathfrak{A}}$, отсюда $R(R(\mathfrak{A})) = R(\mathfrak{A})$.

Таким образом, на основании п.1.4.5 получаем:

ТЕОРЕМА 1. Множество $\mathcal{P}$ всех разреженных левых идеалов полугруппы V всех эндоморфизмов свободной алгебры $\mathcal{U}$ является полной структурой, в которой наименьшая верхняя грань совпадает с их теоретико-множественным объединением.

Связь между структурами $\mathcal{P}$, Π и U дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. Полная структура $\mathcal{P}$ всех разреженных левых идеалов полугруппы V изоморфна полной структуре U всех эндомножеств алгебры $\mathcal{U}$ и, следовательно, полной структуре Π всех насыщенных левых идеалов полугруппы V.

Устанавливаем соответотвие f между разреженными идеалами и эндомножествами, при котором разреженному идеалу $\mathcal{R}_M$ сопоставляется эндомножество M. Как и в доказательстве теормы 1.4.2, показывается, что f взаимно-однозначное соответствие. Кроме того, $\mathcal{R}_{M_1} \subset \mathcal{R}_{M_2}$ тогда и только тогда, когда $M_1 \subset M_2$. Отсюда следует, что для каждого оемейства $\mathcal{R}_{M_j}$ имеет место $f(\bigvee_j \mathcal{R}_{M_j}) = \bigcup_j M_j$ и $f(\bigwedge_j \mathcal{R}_{M_j}) = \bigcap_j M_j$. Следовательно, имеем $\bigvee_j \mathcal{R}_{M_j} = \mathcal{R}_{\bigcup_j M_j}$ и $\bigwedge_j \mathcal{R}_{M_j} = \mathcal{R}_{\bigcap_j M_j}$.

Естественно поставить вопрос о том, когда наибольшая нижняя грань разреженных левых идеалов совпадает с их теоретико-множественным пересечением. Ответ дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Наибольшая нижняя грань любой совокупности левых идеалов $\mathcal{R}_{M_j}$ в структуре $\mathcal{P}$ совпадает с их теоретико-множественным пересечением тогда и только тогда, когда для любой n-подалгебры N, содержащейся в некоторой циклической подалгебре, пересечение всех циклических подалгебр, содержащих данную n-подалгебру N, является циклической подалгеброй.

Допустим, что для любых эндомножеств M_j имеет место $\bigwedge_j \mathcal{R}_{M_j} = \bigcap_j \mathcal{R}_{M_j}$. По предыдущей теореме 2 тогда имеем $\bigcap_j \mathcal{R}_{M_j} = \mathcal{R}_{\bigcap_j M_j}$. Пусть N - некоторая n-подалгебра, которая содержится в циклической подалгебре. Обозначим через $[m_k]$ семейство всех циклических подалгебр, содержащих N. Если α – такой эндоморфизм, что $G\alpha = N$ (ввиду п.I.I такой эндоморфизм существует), то отсюда по теореме I из п.2.I $\alpha \in \mathcal{R}_{[m_k]}$ для всех k, следовательно, $\alpha \in \bigcap\limits_k \mathcal{R}_{[m_k]}$, а так как в нашем случае $\bigcap\limits_k \mathcal{R}_{[m_k]} = \mathcal{R}_{\bigcap\limits_k [m_k]}$, то $\alpha \in \mathcal{R}_{\bigcap\limits_k [m_k]}$, откуда $G\alpha \subseteq \bigcap\limits_k [m_k]$ и в силу теоремы 2 из п.2.I содержится в некоторой циклической алгебре $[m] \subseteq \bigcap\limits_k [m_k]$. Но так как в правой части последнего неравенства имеется пересечение всех таких циклических подалгебр, выходит, что $[m] = \bigcap\limits_k [m_k]$. Отсюда, кстати, следует, что если в этом случае пересечение циклических подалгебр есть n-подалгебра, то она циклическая.

Обратно, допустим, что пересечение всех циклических подалгебр, содержащих произвольную n-подалгебру, является циклической подалгеброй. Пусть даны некоторые левые идеалы $\mathcal{R}_{M_j}$ и пусть $\alpha \in \bigcap \mathcal{R}_{M_j}$, отсюда $\alpha \in \mathcal{R}_{M_j}$ для каждого j. Тогда существуют такие циклические подалгебры $[m'_j]$, что $[m'_j] \subseteq M_j$ и n-подалгебра $N = G\alpha$ содержится в $[m'_j]$ для каждого j. Пусть $[m]$ пересечение всех циклических подалгебр, содержащих N. Тогда $N \subseteq [m] \subseteq \bigcap [m'_j] \subseteq \bigcap M_j$. Отсюда, ввиду теоремы I п.2.2, так как $G\alpha = N$, получаем, что $\alpha \in \mathcal{R}_{\bigcap\limits_j M_j}$, следовательно $\bigcap\limits_j \mathcal{R}_{M_j} \subseteq \mathcal{R}_{\bigcap\limits_j M_j}$. Пусть сейчас $\alpha \in \mathcal{R}_{\bigcap\limits_j M_j}$. Тогда $G\alpha \subseteq [m] \subseteq \bigcap\limits_j M_j$ для некоторого $m \in \bigcap\limits_j M_j$. Для каждого j, в таком случае, имеем $G\alpha \subseteq [m] \subseteq M_j$, отсюда $\alpha \in \mathcal{R}_{M_j}$ для каждого j, следовательно, $\alpha \in \bigcap\limits_j \mathcal{R}_{M_j}$. Таким образом, $\bigcap\limits_j \mathcal{R}_{M_j} \supseteq \mathcal{R}_{\bigcap\limits_j M_j}$. Из доказанных неравенств следует, что $\bigcap\limits_j \mathcal{R}_{M_j} = \mathcal{R}_{\bigcap\limits_j M_j}$, что требовалось доказать.

Если условие теоремы выполняется, то структура $\mathcal{P}$ всех разреженных левых идеалов будет подструктурой структуры всех левых идеалов полугруппы V. Оно выполняется, в частности, если всякая подалгебра циклической алгебры сама является циклической подалгеброй, как, например, в случае групп.

§ 3. Эквивалентность левых идеалов

<u>3.I. Эквивалентность идеалов.</u> Обозначим через Σ структуру всех левых идеалов полугруппы $V(\mathcal{G})$. Обобщая понятие отношения Грина $\mathcal{L}$ в полугруппе $V(\mathcal{G})$ (п.I.6), даем определение. Два левых идеала $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ называются эквивалентными, если $G\mathfrak{A}_1 = G\mathfrak{A}_2$, или в других символах $M_{\mathfrak{A}_1} = M_{\mathfrak{A}_2}$. Скажем, что левый идеал $\mathfrak{A}$ <u>принадлежит</u> эндомножеству M, если $M = M_{\mathfrak{A}}$. Следовательно,

два левых идеала эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одному и тому же эндомножеству. Множество всех левых идеалов, принадлежащих эндомножеству M, обозначим через Σ_M. Очевидно, что насыщенный идеал $\mathfrak{A}_M$ является наибольшим в Σ_M. Из теоремы I п.2.I следует, что разреженный идеал $\mathfrak{R}_M$ является наименьшим в Σ_M. Обозначим через σ разбиение структуры Σ на классы Σ_M. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА. Разбиение σ является конгруэнцией полной структуры Σ.

Пусть $\mathfrak{A}_j \,\sigma\, \mathfrak{A}'_j$, где $j \in J$. Надо показать, что $\bigcup_j \mathfrak{A}_j \,\sigma \bigcup_j \mathfrak{A}'_j$ и $\bigcap_j \mathfrak{A}_j \,\sigma \bigcap_j \mathfrak{A}'_j$. Пусть $M_j = M_{\mathfrak{A}_j}$, т.е. $\mathfrak{A}_j \in \Sigma_{M_j}$, и покажем, что $\bigcup_j \mathfrak{A}_j \in \Sigma_{\bigcup_j M_j}$, или, другими словами, что $G \bigcup_j \mathfrak{A}_j = \bigcup_j M_j$. Пусть $m \in G \bigcup_j \mathfrak{A}_j$. Тогда существуют $\alpha \in \bigcup_j \mathfrak{A}_j$ и $g \in G$ такие, что $g\alpha = m$; но так как $\alpha \in \bigcup_j \mathfrak{A}_j$, существует j такое, что $\alpha \in \mathfrak{A}_j$, в таком случае $g\alpha = m \in M_j \subseteq \bigcup_j M_j$, откуда $G \bigcup_j \mathfrak{A}_j \subseteq \bigcup_j M_j$. Пусть теперь $m \in \bigcup_j M_j$. Тогда существует j такое, что $m \in M_j$. Отсюда следует существование $\alpha \in \mathfrak{A}_j$ и $g \in G$, что $g\alpha = m$; но, так как можно считать $\alpha \in \bigcup_j \mathfrak{A}_j$, получаем, что $m \in G \bigcup_j \mathfrak{A}_j$. Следовательно, $G \bigcup_j \mathfrak{A}_j \supseteq \bigcup_j M_j$. Из полученных неравенств имеем $G \bigcup_j \mathfrak{A}_j = \bigcup_j M_j$ или $\bigcup_j \mathfrak{A}_j \in \Sigma_{\bigcup_j M_j}$.

Дальше, так как $\mathfrak{A}_j \,\sigma\, \mathfrak{A}'_j$, следует, что $M_{\mathfrak{A}'_j} = M_{\mathfrak{A}_j} = M$. Тогда таким же образом получаем $\bigcup_j \mathfrak{A}'_j \in \Sigma_{\bigcup_j M_j}$, следовательно, $\bigcup_j \mathfrak{A}_j \,\sigma \bigcup_j \mathfrak{A}'_j$.

Покажем теперь, что из $\mathfrak{A}_j \,\sigma\, \mathfrak{A}'_j$ следует $\bigcap_j \mathfrak{A}_j \,\sigma \bigcap_j \mathfrak{A}'_j$. Пусть $M_j = M_{\mathfrak{A}_j}$, т.е. $\mathfrak{A}_j \in \Sigma_{M_j}$. Из включений $\mathfrak{R}_{M_j} \subseteq \mathfrak{A}_j$ (2.I) имеем $\bigcap_j \mathfrak{R}_{M_j} \subseteq \bigcap_j \mathfrak{A}_j$. Отсюда следует, что $\bigcap_j \mathfrak{A}_j$ содержит, во всяком случае, все эндоморфизмы, отображающие G на все циклические подалгебры, содержащиеся в $\bigcap_j M_j$ (п.2.2). Отсюда $M_{\bigcap_j \mathfrak{A}_j} \supseteq \bigcap_j M_j$. Если же взять $m \in \bigcap_j M_j$, то для эндоморфизма α_m имеем $G\alpha_m = [m] \subseteq \bigcap_j M_j$. Следовательно, α_m принадлежит каждому идеалу $\mathfrak{R}_{M_j}$, но тогда $\alpha_m \in \bigcap_j \mathfrak{R}_{M_j} \subseteq \bigcap_j \mathfrak{A}_j$. Отсюда следует, что $m \in M_{\bigcap \mathfrak{A}_j}$, т.е. $M_{\bigcap_j \mathfrak{A}_j} \subseteq \bigcap_j M_j$. Из полученных включений имеем $M_{\bigcap_j \mathfrak{A}_j} = \bigcap_j M_j$, т.е. $\bigcap_j \mathfrak{A}_j \in \Sigma_{\bigcap_j M_j}$.

Теперь, так как $\mathfrak{A}_j \,\sigma\, \mathfrak{A}'_j$, имеем $M_{\mathfrak{A}'_j} = M_{\mathfrak{A}_j} = M_j$, т.е. $\mathfrak{A}'_j \in \Sigma_{M_j}$. Тогда таким же образом получаем, что $\bigcap_j \mathfrak{A}'_j \in \Sigma_{\bigcap_j M_j}$. В итоге получаем $\bigcap_j \mathfrak{A}_j \,\sigma \bigcap_j \mathfrak{A}'_j$.

3.2. Фактор-структура по отношению эквивалентности левых идеалов. Рассмотрим фактор-структуру Σ/σ, где σ – конгруэнция, построенная в предыдущем пункте. Класс $\mathcal{K}^{\sigma}_{\mathfrak{A}}$ по конгруэнции σ, содержащий левый идеал $\mathfrak{A}$, совпадает с множеством $\Sigma_{M_{\mathfrak{A}}}$-левых идеалов, эквивалентных $\mathfrak{A}$. Из доказательства теоремы п.I следует, что отображение $f:\Sigma \to U$, для которого $f(\mathfrak{A}) = M_{\mathfrak{A}}$, обладает свойствами $f(\bigcup_j \mathfrak{A}_j) = \bigcup_j M_{\mathfrak{A}_j}$ и $f(\bigcap_j \mathfrak{A}_j) = \bigcap_j M_{\mathfrak{A}_j}$, т.е. является гомоморфизмом Σ на U. При этом соответствующая конгруэнция γ_f (см.п.I.2.3) совпадает с σ. Отсюда получаем: структуры Σ/σ и U изоморфны между собой и изоморфны, следовательно, структурам Π и $\mathcal{R}$ всех насыщенных и разреженных идеалов полугруппы $V(\mathcal{Y})$.

Если левые идеалы $\mathfrak{A}_j$ принадлежат одному и тому же классу Σ_M, то $\bigcup_j \mathfrak{A}_j \in \Sigma_{\bigcup_j M_j} = \Sigma_M$ и $\bigcap_j \mathfrak{A}_j \in \Sigma_{\bigcap_j M_j} = \Sigma_M$, т.е.каждый класс Σ_M является полной подструктурой структуры Σ.

§ 4. Структура всех левых идеалов полугруппы эндоморфизмов свободных универсальных алгебр

4.I. Наследственные системы n-подалгебр. Система q n-подалгебр алгебры $\mathcal{Y}$ называется наследственной, если удовлетворяет свойству:

а) Если n-подалгебра M принадлежит системе q и M_1 n-подалгебра, содержащаяся в M, то $M_1 \in q$.

Обозначим через Q множество всех наследственных систем n-подалгебр алгебры $\mathcal{Y}$. Заметим, что $Q \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{B}(G))$, т.е. если $q \in Q$, то $q \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(G))$ или $q \subseteq \mathcal{B}(G)$. Множество Q является частично упорядоченным относительно теоретико-множественного включения (как подмножества булеана $\mathcal{B}(G)$).

Заметим, что если n-подалгебра $N \subseteq M$ и $M \in q$, то $N \in q$, в частности, q принадлежат все циклические подалгебры, содержащиеся в каждой n-подалгебре $M \in q$.

ТЕОРЕМА I. Множество Q всех наследственных систем n-подалгебр алгебры $\mathcal{Y}$ является полной структурой относительно теоретико-множественных операций объединения и пересечения.

Пусть q_j, $j \in J$ некоторая совокупность наследственных систем n-подалгебр алгебры $\mathcal{Y}$. Надо показать, что $\bigcup_j q_j$ и $\bigcap_j q_j$ являются также наследственными системами. Пусть $M \in \bigcup_j q_j$ и $M_1 \subseteq M$, где M_1 — n-подалгебра. Тогда существует j такое, что $M \in q_j$, откуда, так как q — наследственная, $M_1 \in q_j$, следовательно, $M_1 \in \bigcup_j q_j$. Если $M \in \bigcap_j q_j$ и n-подалгебра M_1 такая, что $M_1 \subseteq M$, то $M \in q_j$ для каждого j, тогда $M_1 \in q_j$ для каждого j, следовательно, $M_1 \in \bigcap_j q_j$.

Обозначим через Q_M множество всех наследственных систем эндомножеств, которые удовлетворяют свойству:

б) Объединение всех эндомножеств данной системы $q \in Q_M$ равно M, т.е. q представляет покрытие множества M.

ТЕОРЕМА 2. Множество Q_M является полной структурой относительно теоретико-множественных операций объединения и пересечения.

Если $q_j \in Q_M$, $j \in J$, т.е. каждая q_j является покрытием M, то тем более $\bigcup_j q_j$ покрывает M, следовательно, $\bigcup_j q_j \in Q_M$. Дальше легко видеть, что каждая $q_j \in Q_M$, $j \in J$ содержит все циклические подалгебры, содержащиеся в M, тогда и $\bigcap_j q_j$ содержит все циклические подалгебры, содержащиеся в M, следовательно, $\bigcap_j q_j$ покрывает M, т.е. $\bigcap_j q_j \in Q_M$.

4.2. Описание структуры левых идеалов. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА I. Полная структура Σ всех левых идеалов полугруппы $V(\mathcal{Y})$ изоморфна полной структуре Q.

Определим отображение $f: \Sigma \longrightarrow Q$ следующим образом: каждому левому идеалу $\mathfrak{A} \in \Sigma$ поставим в соответствие совокупность q всех n-подалгебр, для которых существуют $\alpha \in \mathfrak{A}$, что $G_\alpha = M$. q является наследственной системой n-подалгебр. В самом деле, если $M \in q$, то существует $\alpha \in \mathfrak{A}$ такое, что $G\alpha = M$. Пусть $N \subseteq M$, N — некоторая n-подалгебра, тогда найдется $\beta \in V$ такое, что $G\beta = N$, т.е. $G\beta \subseteq G\alpha$, тогда по лемме I.6 существует такое γ, что $\beta = \gamma\alpha$ и, так как $\alpha \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ — левый идеал, имеем $N \in q$. Итак, q — наследственная система n-подалгебр, т.е. $q \in Q$.

Пусть теперь $q \in Q$, $q = \{M_t, t \in T\}$. Обозначим через $\mathfrak{A}'$ множество всех эндоморфизмов $\alpha \in V$, для которых существует $M \in q$ такое, что $G\alpha = M$. Покажем, что $\mathfrak{A}'$ является левым идеалом полугруппы V. Пусть $\alpha \in \mathfrak{A}'$ и $\beta = \gamma\alpha$, $\gamma \in V$. По условию существует такое $M \in q$, что $G\alpha = M$, тогда $G\beta \subseteq G\alpha = M$. И так как $G\beta$ n-подалгебра, то по условию а) $G\beta \in q$, следовательно, $\beta \in \mathfrak{A}'$, т.е. $\mathfrak{A}'$ — левый идеал. Если $\alpha \in \mathfrak{A}'$, имеем $G\alpha \in q$, т.е. $f(\mathfrak{A}') = q$. Таким образом, f является взаимно-однозначным соответствием между Σ и Q. Если для левых идеалов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ имеется строгое включение $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$, т.е. существует $\alpha \in \mathfrak{A}_2 \setminus \mathfrak{A}_1$, то $G\alpha \in \in q_2 \setminus q_1$, где $q_1 = f(\mathfrak{A}_1)$ и $q_2 = f(\mathfrak{A}_2)$, следовательно, $q_1 \subset q_2$. Отсюда следует, что $f(\bigcup_j \mathfrak{A}_j) = \bigcup_j q_j$ и $f(\bigcap_j \mathfrak{A}_j) = \bigcap_j q_j$, т.е. f является изоморфизмом структур Σ и Q.

ТЕОРЕМА 2. Для каждого эндомножества M полные структуры Σ_M и Q_M изоморфны.

В силу теоремы I достаточно показать, что если $\mathfrak{A} \in \Sigma_M$ и $f(\mathfrak{A}) = q$, то $q \in Q_M$, и, обратно, если $q \in Q_M$ и $f(\mathfrak{A}) = q$, то $\mathfrak{A} \in \Sigma_M$. Пусть $\mathfrak{A} \in \Sigma_M$, $q = f(\mathfrak{A}) = \{M_t, t \in T\}$. Надо показать, что $\bigcup_t M_t = M$. Так как $M_{\mathfrak{A}} = M$, то для любого насыщенного идеала из $\mathfrak{A}_{M_t} \subseteq \mathfrak{A}$ следует $M_t \subseteq M$, т.е. $\bigcup_t M_t \subseteq M$. Пусть $m \in M$, тогда существует $\alpha \in \mathfrak{A}$ и $g \in G$, что $g\alpha = m$, тогда $m \in G\alpha$, к тому же $G\alpha \in q$, следовательно, для некоторого t, $G\alpha = M_t$, отсюда $m \in \bigcup_t M_t$, или $\bigcup_t M_t \supseteq M$. Таким образом, $M = \bigcup_t M_t$, $q \in Q$. Обратно, если $q \in Q_M$, то соответствующий идеал $\mathfrak{A}'$ содержит $\mathcal{R}_M$, причем $R(\mathfrak{A}') = \mathcal{R}_M$, следовательно, $\mathfrak{A}' \in \Sigma_M$.

4.3. <u>Представление левых идеалов как объединения насыщенных</u>. Из доказательства второй части теоремы I следует, что если $f(\mathfrak{A}) = q$ и $q = \{M_t, t \in T\}$, то

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{t \in T} \mathfrak{A}_{M_t} \tag{I}$$

т.е. каждый левый идеал является объединением насыщенных левых идеалов. Представление (I) можно несколько упростить.

Пусть $\mathfrak{A} \in \Sigma_M$ и, следовательно, $q \in Q_M$. Тогда q содержит все циклические подалгебры из M и, следовательно, все n-подалгебры, содержащиеся в некоторых циклических подалгебрах из M. В таком случае из (I), учитывая п.2.I, можем писать

$$\mathfrak{A} = \mathcal{R}_M \cup \Big(\bigcup_{t \in T'} \mathfrak{A}_{M_t}\Big), \tag{2}$$

где M_t, $t \in T'$ – множество всех n-подалгебр совокупности q, не содержащихся ни в каких циклических подалгебрах из M. Обозначим дальше через T_1 множество индексов, для которых M_t, $t \in T_1$, являются максимальными в q n-подалгебрами. Тогда можем писать

$$\mathfrak{A} = \mathcal{R}_M \cup \Big(\bigcup_{t \in T_1} \mathfrak{A}_{M_t}\Big) \cup \Big(\mathfrak{A}_{t \in T_2} M_t\Big), \tag{3}$$

где T_2 – множество индексов, для которых M_t, $t \in T_2$ не содержатся ни в каких максимальных в q n-подалгебрах. В самом деле, ввиду того, что $\mathcal{R}_M = \bigcup_j \mathfrak{A}_{C_j}$, где C_j – всевозможные

n-подалгебры циклических алгебр,содержащиеся в M, правая часть выражения (3) содержится в левой. Пусть $\alpha \in \mathfrak{A}$. Тогда $G\alpha \in q$ и $G\alpha$ или является подалгеброй циклической подалгебры, тогда $\alpha \in \in \mathcal{R}_M$, или $G\alpha$ содержится в некоторой максимальной в q n-подалгебре M_t, $t \in T_1$, тогда $\alpha \in \bigcup\limits_{t \in T_1} \mathfrak{A}'_{M_t}$, или $G\alpha$ не содержится ни в какой максимальной в q n-подалгебре. Тогда $\alpha \in \bigcup\limits_{t \in T_2} \mathfrak{A}_t$, следовательно, левая часть содержится в правой, т.е. имеет место равенство (3).

§ 5. Структура правых идеалов полугруппы всех эндоморфизмов свободной универсальной алгебры

5.1. Вполне характеристические подмножества. Пусть дана некоторая алгебра $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$. Подмножество $N \subseteq G$ называется вполне характеристическим, если для любого эндоморфизма α алгебры $\mathcal{G}$ имеет место $N\alpha \subseteq N$. Мы скажем, что подмножество $P \subseteq N$ является множеством порождающих вполне характеристического множества N, если для любого $n' \in N$ найдется такое $n \in P$ и эндоморфизм α алгебры $\mathcal{G}$, что $n\alpha = n'$. Если $P = \{n\}$ состоит из одного элемента n, то N называется циклическим вполне характеристическим множеством. Легко видеть, что каждое вполне характеристическое множество алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$ является подалгеброй алгебры с унарными операциями $\mathcal{H} = \langle G, \Omega' \rangle$, с тем же множеством носителей G и множество операций которой Ω' состоит из всех эндоморфизмов алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$. Отсюда следует, что множество всех вполне характеристических множеств алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$ является полной структурой относительно теоретико-множественных операций пересечения и объединения.

5.2. Эндосистемы. Пусть дана система $\{N_i, i \in I\}$ циклических вполне характеристических множеств свободной алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$ с системой свободных образующих $X = \{x_i, i \in I\}$ вместе с некоторой системой порождающих $n_i \in N_i$, $i \in I$. Систему элементов $m_i \in N_i$ назовем слоем совокупности N_i, $i \in I$, если существует эндоморфизм $\alpha \in V$ такой, что $n_i\alpha = m_i$. Очевидно, что система элементов n_i, $i \in I$ является слоем, достаточно взять $\alpha = \varepsilon_G$, а также что если m_i - слой, то для любого $\beta \in V$, $m_i\beta$ также слой.

Заметим, что каждый элемент m, принадлежащий множеству N_i, является членом некоторого слоя системы $\{N_i, i \in I\}$. В самом деле, так как $m \in N_i$ и N_i – циклическое вполне характеристическое множество с порождающим элементом n_i, то существует $\alpha \in V$ такое, что $m = n_i \alpha$ для данного i. Тогда m принадлежит слою, состоящему из элементов $n_i \alpha$ для всех $i \in I$.

Система циклических вполне характеристических множеств $\{N_i, i \in I\}$, заданная вместе со своими слоями, называется циклической эндосистемой с порождающим слоем n_i, $i \in I$.

Определим понятие эндосистемы на алгебре $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$ следующим образом:

а) Каждая циклическая эндосистема $\{N_i, i \in I\}$ является эндосистемой с компонентами N_i;

б) Если $\{N_{ji}, i \in I\}$, $j \in J$ – некоторая совокупность эндосистем и $N_i = \bigcup_{j \in J} N_{ji}$, то $\{N_i, i \in I\}$ будет эндосистемой с компонентами $N_i = \bigcup_{j \in J} N_{ji}$, причем $m_i \in N_i, i \in I$ является слоем в $\{N_i, i \in I\}$ тогда и только тогда, когда является слоем в $\{N_{ji}, i \in I\}$ для некоторого $j \in J$. Заметим, что если каждый элемент $m \in N_{ji}$ принадлежит некоторому слою в $\{N_{ji}, i \in I\}$, то и каждый элемент $m \in N_i$ принадлежит некоторому слою в $\{N_i, i \in I\}$;

в) Пусть $\{N_{ji}, i \in I\}$, $j \in J$ – некоторая совокупность эндосистем. Обозначим через $N_i = \bigwedge_{j \in J} N_{ji}$ для некоторого $i \in I$ множество всех элементов $m \in \bigcap_{j \in J} N_{ji}$, которые принадлежат хотя бы одному слою m_i, $i \in I$ такого, что $m_i \in \bigcap_{j \in J} N_{ji}$ для всех $i \in I$. Легко видеть, что $\bigwedge_{j \in J} N_{ji}$ является вполне характеристическим множеством. Тогда система $\{\bigwedge_{j \in J} N_{ji}, i \in I\}$ является эндосистемой с компонентами $\bigwedge_{j \in J} N_{ji} = N_i$, причем система элементов $m_i \in \bigwedge_{j \in J} N_{ji}$ будет ее слоем тогда и только тогда, когда является слоем в каждой эндосистеме $\{N_{ji}, i \in I\}$;

г) Эндосистемами являются только те системы с соответствующими компонентами и слоями, которые получаются согласно пунктам а) – в).

Из определения эндосистемы следует, что если элемент m принадлежит некоторой компоненте N_j, то он принадлежит и некоторому слою данной эндосистемы.

Две эндосистемы считаются равными тогда и только тогда, когда у них совпадают соответствующие компоненты и имеются одни и те же слои.

Если дана некоторая совокупность эндосистем $\Phi_j = \{N_{ji}, i \in I\}$, $j \in J$, то их объединение $\bigcup_{j\in J} \Phi_j = \{\bigcup_{j \in J} N_{ji}, i \in I\}$ и пересечение $\bigwedge_{j\in J} \Phi_j = \{\bigwedge_{j\in J} N_{ji}, i \in I\}$ определяются в соответствии с пунктами б) и в) определения эндосистемы. Таким образом, получаем теорему.

ТЕОРЕМА. Множество $\mathcal{P}$ всех эндосистем, заданных на алгебре $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$, является полной структурой.

Заметим, что в структуре $\mathcal{P}$ отношение порядка устанавливается следующим образом. Эндосистема $\Phi_1 = \{N_i^1, i \in I\}$ меньше эндосистемы $\Phi_2 = \{N_i^2, i \in I\}$ тогда и только тогда, когда $N_i^1 \leq \leq N_i^2$ и каждый слой эндосистемы Φ_1 является слоем эндосистемы Φ_2. При этом Φ_1 будет строго меньше Φ_2 тогда и только тогда, когда имеется хотя бы один слой эндосистемы Φ_2, который не является слоем эндосистемы Φ_1. Заметим, что если слои двух эндосистем совпадают, то, учитывая, что каждый элемент компоненты принадлежит хотя бы одному слою, следует, что совпадают и компоненты.

5.3. Описание структуры правых идеалов. Обозначим через Δ структуру всех правых идеалов полугруппы всех эндоморфизмов свободной алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$. Имеет место

ТЕОРЕМА. Структура Δ всех правых идеалов полугруппы $V(\mathcal{G})$ изоморфна структуре $\mathcal{P}$ всех эндосистем на алгебре $\mathcal{G}$.

Установим соответствие f между структурами Δ и $\mathcal{P}$ следующим образом. Каждому правому идеалу $\mathfrak{A} \in \Delta$ сопоставим эндосистему $\{N_i, i \in I\}$, где а$_1$). N_i состоит из множества всех элементов $m \in G$ таких, что найдется эндоморфизм $\alpha \in \mathfrak{A}$, для которого $x_i \alpha = m$. Легко видеть, что каждое N_i, $i \in I$ является вполне характеристическим множеством. В самом деле, если $m \in N_i$, то существует $\alpha \in \mathfrak{A}$ такой, что $x_i \alpha = m$. Тогда для любого $\beta \in V$ имеем $m\beta = (x_i \alpha)\beta = x_i(\alpha\beta)$, и так как $\alpha\beta \in \mathfrak{A}$, то $m\beta \in N_i$; б$_1$). Слоем в $\{N_i, i \in I\}$ будет каждая система элементов m_i, для которых существует $\alpha \in \mathfrak{A}$, так что $x_i \alpha = m_i$.

Пусть $\mathfrak{A}$ – главный правый идеал, т.е. $\mathfrak{A} = \alpha V$ для некоторого $\alpha \in V$. Тогда каждая компонента N_i, $i \in I$ является циклическим вполне характеристическим множеством с порождающим элементом $n_i = x_i \alpha$. В самом деле, если $m \in N_i$, то существует $\gamma \in \mathfrak{A}$, что $x_i \gamma = m$, но так как $\mathfrak{A} = \alpha V$, то для γ имеем представление $\gamma = \alpha\beta$, тогда $m = x_i \gamma = x_i \alpha\beta = n_i \beta$, что требовалось. Заметим здесь же, что если m_i – некоторый слой, т.е. существует $\gamma \in \mathfrak{A}$, что $x_i \gamma = m_i$, то из полученного равенства $\gamma = \alpha\beta$ имеем $m_i = x_i \gamma = x_i \alpha\beta = n_i \beta$. Таким образом, $\{N_i, i \in I\}$

является циклической эндосистемой. Определим f на множестве циклических правых идеалов, сопоставляя каждому такому идеалу построенную эндосистему. Покажем, что соответствие f однозначно. Пусть $\mathfrak{A} = \alpha' V$ другое представление главного правого идеала $\mathfrak{A}$. Тогда, так как $\alpha' \in \mathfrak{A} = \alpha V$ и $\alpha \in \mathfrak{A} = \alpha' V$, имеем соответственно $\alpha' = \alpha\gamma$ и $\alpha = \alpha'\gamma'$. Очевидно, что компоненты N_i зависят от $\mathfrak{A}$ и не зависят от его представления. Покажем, что и слои не зависят от взятых представлений. Пусть $n_i = x_i\alpha$ и $n_i' = x_i\alpha'$ и m_i, $i \in I$ - некоторый слой относительно первого представления, т.е. для некоторого $\beta \in V$ имеем $m_i = n_i\beta$. Тогда $m_i = n_i\beta = x_i\alpha\beta = x_i\alpha'\gamma'\beta = x_i\alpha'\beta' = n_i'\beta'$, т.е. m_i, $i \in I$ - слой и относительно второго представления. Аналогично доказывается и обратное утверждение. Таким образом, f является отображением множества всех главных правых идеалов в множестве всех циклических эндосистем.

Пусть теперь $\mathfrak{B}$ некоторый правый идеал полугруппы V. Тогда, как легко видеть (см. [6], стр.214-215), каждый правый идеал может быть представлен как объединение главных правых идеалов, например, можно взять $\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{B}} \alpha V$. Пусть

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{j \in J} \mathfrak{A}_j$$

- некоторое представление $\mathfrak{B}$ как объединение главных правых идеалов. Правому идеалу $\mathfrak{B}$ ставим в соответствие эндомножество, равное объединению всех циклических эндомножеств, соответствующих главным правым идеалам $\mathfrak{A}_j$, т.е. если $f(\mathfrak{A}_j) = \{N_{ji}, i \in I\}$, то $f(\mathfrak{B}) = \{\bigcup_{j \in J} N_{ji}, i \in I\} = \{N_i, i \in I\}$. Покажем, что каждая компонента N_i состоит из множества всех элементов $m \in G$, для которых существует $\alpha \in \mathfrak{B}$ такой, что $x_i\alpha = m$. В самом деле, пусть для некоторого $\alpha \in \mathfrak{B}$, $x_i\alpha = m$. Так как $\alpha \in \bigcup_{j \in J} \mathfrak{A}_j$, то $\alpha \in \mathfrak{A}_j$ для некоторого $j \in J$ и, следовательно, $x_i\alpha = m \in N_{ji}$, откуда $m \in N_i = \bigcup_{j \in J} N_{ji}$.

Обратно, если $m \in N_i = \bigcup_{j \in J} N_{ji}$, то $m \in N_{ji}$ для некоторого j. Тогда существует $\alpha \in \mathfrak{A}_j$ такой, что $x_i\alpha = m$, но тогда эндоморфизм α принадлежит и идеалу $\mathfrak{B} = \bigcup_{j \in J} \mathfrak{A}_j$.

Отсюда, во-первых, N_i соответствует пункту a_I) из определения соответствия f, во-вторых - компоненты N_i не зависят от данного разложения идеала $\mathfrak{B}$ в объединении главных правых идеалов.

Покажем, что удовлетворяется и требование пункта $б_I$) из определения соответствия f. Согласно определению объединения эндосистем каждый слой любой из эндосистем $\{N_{ji}, i \in I\}$, т.е. система элементов $x_i = m_i, i \in I, \alpha \in \mathfrak{A}_j$ для каждого j является слоем эндосистемы $\{\bigcup_{j \in J} N_{ji}, i \in I\}$. Но такой α принадлежит и идеалу $\mathfrak{B}$, т.е. эти слои соответствуют $б_I$). Пусть теперь $\alpha \in \mathfrak{B}$ и $x_i \alpha = m_i$, тогда для некоторого j, $\alpha \in \mathfrak{A}_j$, следовательно, $m_i, i \in I$ является слоем эндосистемы $\{N_{ji}, i \in I\}$. Отсюда следует также, что слои эндосистемы, соответствующей правому идеалу $\mathfrak{B}$, не зависят от взятого разложения. Следовательно, каждому правому идеалу соответствует единственная эндосистема, т.е. f отображение Δ в $\mathfrak{P}$.

Пусть теперь дана некоторая эндосистема $\{N_i, i \in I\}$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество всех эндоморфизмов $\beta \in V$, для которых система элементов $m_i = x_i \beta$ является слоем данной эндосистемы. Для каждого слоя такой β существует, это будет продолжение отображения $x_i \longrightarrow m_i$ до эндоморфизма алгебры $\mathcal{G}$. Из определения эндосистемы имеем, что для любого $\gamma \in V$ система элементов $m_i \gamma = m_i'$ также является слоем, следовательно, для нашего случая $x_i \beta \gamma = m_i \gamma = m_i'$ является слоем данной эндосистемы, т.е. $\beta\gamma \in \mathfrak{B}$. Таким образом, $\mathfrak{B}$ – правый идеал. Покажем, что $f(\mathfrak{B})$ совпадает с данной эндосистемой $\{N_i, i \in I\}$. Пусть N_i' множество всех $n \in G$, для которых существует $\alpha \in \mathfrak{B}$ такой, $x_i \alpha = n$. Тогда, по определению $\mathfrak{B}$, имеем $N_i' \subseteq N_i$. Но так как каждый элемент из N_i принадлежит хотя бы одному слою, получаем $N_i = N_i'$.

По определению отображения f система элементов m_i будет слоем в $f(\mathfrak{B})$, когда существует $\alpha \in \mathfrak{B}$ так, что $x_i \alpha = m_i, i \in I$. Но тогда по определению $\mathfrak{B}$ система элементов $m_i, i \in I$ будет слоем данной эндосистемы. Таким образом, соответствующие компоненты и слои эндосистемы $f(\mathfrak{B})$ и данной эндосистемы $\{N_i, i \in I\}$ совпадают. Отсюда следует, что f является взаимно-однозначным соответствием. Покажем, что соответствие f согласовано с включением. Пусть $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2$ – два правых идеала, из которых $\mathfrak{A}_1$ строго содержит $\mathfrak{A}_2$ и $f(\mathfrak{A}_1) = \Phi_1 = \{N_i^1, i \in I\}$, $f(\mathfrak{A}_2) = \Phi_2 = \{N_i^2, i \in I\}$. Очевидно, что $N_i^1 \supseteq N_i^2$. Если $\alpha \in \mathfrak{A}_1 \setminus \mathfrak{A}_2$, то $m_i = x_i \alpha$ является слоем в Φ_1, но не является слоем в Φ_2, следовательно, Φ_1 строго содержит Φ_2. Обратно, если $\Phi_1 \supset \Phi_2$, то $N_i^1 \supseteq N_i^2$ и существует хотя бы один слой m_i в Φ_1, не являющийся слоем Φ_2. Тогда эндоморфизм α, для которого $x_i\alpha = m_i$, принадлежит $\mathfrak{A}_1$, но не принадлежит $\mathfrak{A}_2$, т.е. $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2$. Отсюда следует изоморфизм структур $\mathscr{P}$ и Δ. Теорема доказана.

5.4. Насыщенные правые идеалы. По аналогии со случаем левых идеалов введем понятие насыщенного правого идеала $\mathscr{B}_\Phi$, соответствующего системе вполне характеристических множеств $\Phi=\{N_i, i\in I\}$. Пусть дана система вполне характеристических множеств $\Phi=\{N_i, i\in I\}$. Обозначим через $\mathscr{B}_\Phi$ множество всех эндоморфизмов $\beta\in V$, для которых $x_i\beta\in N_i$, $i\in I$.

Множество $\mathscr{B}$ является правым идеалом полугруппы V, причем наибольшим среди всех правых идеалов $\mathfrak{A}$, для которых эндосистема $f(\mathfrak{A})$ имеет компоненты N_i, $i\in I$.

Пусть $\alpha\in\mathscr{B}_\Phi$, т.е. $x_i\alpha = m_i \in N_i$. Тогда, так как N_i вполне характеристические множества, для любого $\gamma\in V$ будем иметь $x_i\alpha\gamma = m_i\gamma\in N_i$, следовательно, $\mathscr{B}$ - правый идеал. Если $\mathfrak{A}$ - произвольный правый идеал, для которого $x_i\mathfrak{A} = N_i$, $i\in I$, то из $\alpha\in\mathfrak{A}$ имеем $x_i\alpha\in N_i$, т.е. $\mathfrak{A}\subseteq\mathscr{B}_\Phi$.

Как и в случае левых идеалов, можно определить оператор насыщенного замыкания правых идеалов, который, как легко проверить, будет оператором замыкания. Следовательно, множество всех насыщенных идеалов является полной структурой, в которой пересечение совпадает с теоретико-множественным пересечением.

Так как в эндосистеме $f(\mathscr{B}_\Phi)$ любая последовательность $m_i\in N_i$, $i\in I$ является слоем, то такая эндосистема полностью определяется системой вполне характеристических подмножеств N_i, $i\in I$. Если для совокупности $\Psi_j=\{N_{ji}, i\in I\}$, $j\in J$ таких систем определить

$$\bigcap_{j\in J}\Psi_j=\{\bigcap_{j\in J}N_{ji},\ i\in I\} \quad \text{и} \quad \bigcup_{j\in J}\Psi_j=\{\bigcup_{j\in J}N_{ji},\ i\in I\},$$

получим, что структура таких систем вполне характеристических множеств алгебры $\mathscr{G}$ изоморфна структуре насыщенных правых идеалов полугруппы V.

Дальше можно установить следующее утверждение, которое представляет собой еще одну характеризацию циклических свободных алгебр.

Наименьшая верхняя грань в структуре всех насыщенных правых идеалов совпадает с их теоретико-множественным объединением тогда и только тогда, когда алгебра $\mathscr{G}$ является циклической или G - единственное вполне характеристическое подмножество алгебры $\mathscr{G}$.

Пусть алгебра $\mathfrak{V} = \langle G, \Omega \rangle$ – циклическая. Тогда каждая эндосистема имеет единственную компоненту N, которая является вполне характеристическим множеством, и каждый элемент, принадлежащий N, является слоем. Отсюда, так как каждый элемент любой компоненты принадлежит хотя бы одному слою, следует, что каждый правый идеал в этом случае является насыщенным. Поскольку теоретико-множественное объединение правых идеалов есть правый идеал, получаем первую часть утверждения.

Обратно, пусть теоретико-множественное объединение насыщенных идеалов есть насыщенный идеал. Допустим, алгебра $\mathfrak{V}$ не циклическая, т.е. $card\, I \geqslant 2$. Пусть N_1 и $N_2 \neq N_1$ – два вполне характеристических множества. Рассмотрим правые идеалы $\mathcal{B}_{\Phi_1}$ и $\mathcal{B}_{\Phi_2}$, где $\Phi_1 = \{N_i', i \in I\}$, $N_{i_0}' = N_1$, $N_i' = N_2$, $i \neq i_0$, $\Phi_2 = \{N_i'', i \in I\}$, $N_{i_0}'' = N_2$, $N_i'' = N_1$, $i \neq i_0$. Тогда идеалу $\mathcal{B}_{\Phi_1} \cup \mathcal{B}_{\Phi_2}$ будет соответствовать эндосистема с компонентами $N_i' \cup N_i'' = N_1 \cup N_2$. Если $n \in N_1 \setminus N_2$, или $n \in N_2 \setminus N_1$, то $\mathcal{B}_{\Phi_1} \cup \mathcal{B}_{\Phi_2}$ не содержит эндоморфизм α, для которого $x_i\alpha = n$, следовательно, правый идеал $\mathcal{B}_{\Phi_1} \cup \mathcal{B}_{\Phi_2}$ не является насыщенным.

Заметим, что понятие разреженного правого идеала и конгруэнции, аналогичной конгруэнции σ в структуре левых идеалов, вообще говоря, нельзя ввести, так как пересечение правых идеалов, соответствующих эндосистемам с одинаковыми компонентами, может соответствовать эндосистеме с другими компонентами.

§ 6. Структура двусторонних идеалов полугруппы эндоморфизмов свободной универсальной алгебры

6.1. <u>Вполне характеристические системы подмножеств</u>. Система подмножеств P_j, $j \in J$ называется вполне характеристической системой подмножеств, если выполняется условие в). Для любого подмножества P_j этой системы и любого эндоморфизма $\alpha \in V$ существует такое подмножество $P_{j'}$ этой же системы, что $P_j\alpha \subseteq P_{j'}$.

Если некоторое подмножество $P \subseteq G$ само составляет вполне характеристическую систему, то P будет вполне характеристическим множеством.

Обозначим через P совокупность n-подалгебр, которая обладает свойствами а) п.4.I и вышеприведенного в), т.е. P является наследственной и вполне характеристической.

ТЕОРЕМА I. Множество R всех наследственных и вполне характеристических совокупностей n-подалгебр является полной структурой относительно теоретико-множественных операций пересечения и объединения.

Учитывая результаты п.4.I, достаточно заметить, что сохраняется условие в), т.е. для любых вполне характеристических ρ_k, $k \in \mathcal{K}$ объединение $\bigcup_k \rho_k$ и пересечение $\bigcap_k \rho_k$ вполне характеристические.

Обозначим через R_M множество тех $\rho \in R$, которые принадлежат Q_M. Для каждого R_M множество M – вполне характеристическое. В самом деле, пусть $\rho = \{P_j, j \in J\}$ – некоторая совокупность из R_M. Тогда для каждого $m \in M$ существует j, что $m \in P_j$, тогда для любого $\alpha \in V$, $m\alpha \in P_j\alpha \leqslant P_{j'} \leqslant M$. Как легко видеть, множество R_M является полной структурой. Если $\rho \in R_M$ состоит из всех циклических алгебр, содержащихся в M, то ρ – вполне характеристическая. В самом деле, для каждой циклической алгебры $[m]$, $m \in M$, учитывая, что M вполне характеристическое для любого $\alpha \in V$, имеем $[m]\alpha = [m\alpha] \leqslant M$, т.е. $[m]\alpha \in \rho$. Отсюда и из теоремы I получаем теорему.

ТЕОРЕМА 2. Для каждого вполне характеристического эндомножества M совокупность R_M не пуста и является полной структурой.

6.2. Описание двусторонних идеалов. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Левый идеал $\mathfrak{a}$ является двусторонним идеалом тогда и только тогда, когда соответствующая ему совокупность n-подалгебр ρ (в смысле п.4.2) вполне характеристична.

Пусть $\mathfrak{a}$ – двусторонний идеал, ρ – соответствующая ему совокупность n-подалгебр как левому идеалу в изоморфизме, установленном в п.4.2. Пусть $\rho = \{P_j, j \in J\}$, тогда для каждого $j \in J$ существует эндоморфизм $\varphi \in \mathfrak{a}$ такой, что $G\varphi = P_j$. В таком случае при любом $\alpha \in V$ имеем

$$P_j \alpha = (G\varphi)\alpha = G(\varphi\alpha) = G\varphi',$$

где $\varphi' = \varphi\alpha \in \mathfrak{a}$, так как $\mathfrak{a}$ – двусторонний идеал. Следовательно, существует такое $P_{j'} \in \rho$, что $\varphi' \in \mathfrak{a}_{P_{j'}}$, откуда

$$G\varphi' \leqslant P_{j'}, \text{ т.е. } P_j\alpha \leqslant P_{j'}.$$

Для установления обратного утверждения заметим, что для левого идеала $\mathfrak{a}$ имеем представление $\mathfrak{a} = \bigcup_j \mathfrak{a}_{P_j}$, где $\rho = \{P_j, j \in J\}$ –

совокупность n-подалгебр, соответствующая $\mathfrak{a}$. Пусть q – вполне характеристическая, покажем, что $\mathfrak{a}$ – двусторонний идеал. Если $\varphi \in \mathfrak{a}_i$, т.е. для некоторого j, $\varphi \in \mathfrak{a}_{B_j}$, то для любого $\alpha \in V$ имеем

$$G(\varphi\alpha) = (G\varphi)\alpha = B_j\alpha \leq B_j,$$

следовательно, $\varphi\alpha \in \mathfrak{a}_{B_j}$, тогда, тем более, $\varphi\alpha \in \mathfrak{a}$.

Левые идеалы $\mathfrak{k}_M$ и $\mathfrak{a}_M$ являются двусторонними тогда и только тогда, когда M вполне характеристическое эндомножество.

Если M – вполне характеристическое эндомножество, то легко видеть, что система H_j всех циклических подалгебр, содержащихся в M, и система B_i всех n-подалгебр, содержащихся в M, являются вполне характеристическими. Тогда, так как $\mathfrak{k}_M = \bigcup_j \mathfrak{a}_{H_j}$ и $\mathfrak{a}_M = \bigcup_i \mathfrak{a}_{B_i}$, следует, что $\mathfrak{k}_M$ и $\mathfrak{a}_M$ – двусторонние идеалы. Для установлений обратного утверждения заметим, что, вообще, если $\mathfrak{a}$ – двусторонний идеал, то множество $M = M_{\mathfrak{a}}$ вполне характеристично. Пусть $m \in M$, тогда существуют такие $a \in G$ и $\varphi \in \mathfrak{a}$, что $a\varphi = m$. Тогда для любого $\alpha \in V$ имеем $m\alpha = (a\varphi)\alpha = a(\varphi\alpha) = a\varphi'$, и так как $\mathfrak{a}$ – двусторонний идеал, то $\varphi' \in \mathfrak{a}$, следовательно, $m\alpha \in M$.

Таким образом, двусторонние идеалы полугруппы $V(\mathfrak{Y})$ распределены по классам Σ_M для вполне характеристических M. Причем каждый такой класс содержит двусторонние идеалы, такими, во всяком случае, являются идеалы $\mathfrak{k}_M$ и $\mathfrak{a}_M$.

§ 7. Характеристика полугруппы эндоморфизмов свободной универсальной алгебры

Пусть, по-прежнему, V – полугруппа всех полных эндоморфизмов свободной универсальной алгебры $\mathfrak{Y} = \langle G, \Omega \rangle$ с системой свободных образующих $X = \{x_i,\ i \in I\}$. Таким образом, любое отображение этой системы образующих в множество G продолжается до эндоморфизма алгебры $\mathfrak{Y}$. При изучении некоторых производных систем естественно ставится вопрос о характеризации этих производных систем, т.е. нахождении условий, при которых система рассматриваемого класса будет изоморфной производной системе для некоторой из изучаемых основных систем. Для нашего случая это означает, что надо найти условия, которым должна удовлетворять произвольная полугруппа S, для того, чтобы она была изоморфной полугруппе всех эндоморфизмов некоторой свободной универсальной алгебры данной сигнатуры Ω.

Приведенная здесь теорема подсказана характеризацией данной А.И.Мальцевым [33] полугруппы всех отображений некоторого множества в себя.

ТЕОРЕМА. Полугруппа S изоморфна полугруппе $V(\mathfrak{Y})$ всех эндоморфизмов некоторой свободной алгебры сигнатуры Ω тогда и только тогда, когда в S имеется правый идеал F и подмножество $E \subseteq F$ так, что выполняются условия:

1) если для некоторых s_1, s_2 из S имеют место равенства $es_1 = es_2$ для всех $e \in E$, то $s_1 = s_2$;

2) для любого отображения φ множества E в F существует, по крайней мере, одно $s \in S$ такое, что для любого $e \in E$, $e\varphi = es$;

3) множество F можно рассматривать как алгебру сигнатуры Ω с системой образующих E, причем так, что любой правый сдвиг $F \cdot s, s \in S$ является эндоморфизмом алгебры $\langle F, \Omega \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathfrak{Y}$ – свободная алгебра с множеством операций Ω и системой свободных образующих $X = \{x_i, i \in I\}$.

Обозначим через F множество всех эндоморфизмов α_a, т.е. для которых $x_i\alpha_a = a$ при любом $i \in I$. Тогда для любого $\alpha \in V$ имеем $x_i(\alpha_a\alpha) = (x_i\alpha_a)\alpha = a\alpha$. Таким образом, $\alpha_a\alpha = \alpha_{a\alpha}$, следовательно, $\alpha_a\alpha \in F$, т.е. F – правый идеал. Дальше, через E обозначим множество всех эндоморфизмов α_{x_i}, $i \in I$.

Пусть для всех $i \in I$ имеют место равенства

$$\alpha_{x_i}\alpha_1 = \alpha_{x_i}\alpha_2 ,$$

где α_1 и α_2 – некоторые эндоморфизмы из $V(\mathfrak{Y})$. Так как для каждого фиксированного $i_0 \in I$ имеем $x_{i_0}\alpha_{x_i}\alpha_1 = x_i\alpha_1$ и $x_{i_0}\alpha_{x_i}\alpha_2 = x_i\alpha_2$, то из нашего предположения следует $x_i\alpha_1 = x_i\alpha_2$ для всех $i \in I$, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2$. Итак, условие 1) выполняется.

Пусть φ – некоторое отображение множества E в F, причем $\alpha_{x_i}\varphi = \alpha_{a_i}$. Рассмотрим эндоморфизм α алгебры $\mathfrak{Y}$, для которого $x_i\alpha = a_i$. Тогда для любого $\alpha_{x_i} \in E$ имеем: $\alpha_{x_i}\varphi = \alpha_{a_i} = \alpha_{x_i\alpha} = \alpha_{x_i}\alpha$, т.е. выполняется и условие 2).

Превращаем множество F в алгебру сигнатуры Ω, определяя в F операции из Ω следующим образом. Для каждой n-арной операции $\omega \in \Omega$ ставим

$$\alpha_{a_1}\alpha_{a_2}\ldots\alpha_{a_n}\omega = \alpha_{a_1a_2\ldots a_n\omega} . \tag{1}$$

Тогда для любого эндоморфизма $\alpha \in V$ имеем

$$\alpha_{a_1}\alpha_{a_2}\ldots\alpha_{a_n}\,\omega\alpha=\alpha_{a_1a_2\ldots a_n\omega}\,\alpha=\alpha_{a_1a_2\ldots a_n\omega\alpha}=$$

$$=\alpha_{a_1\alpha\, a_2\alpha\ldots a_n\alpha\,\omega}=\alpha_{a_1\alpha}\,\alpha_{a_2\alpha}\ldots\alpha_{a_n\alpha}\,\omega=(\alpha_{a_1}\alpha)(\alpha_{a_2}\alpha)\ldots(\alpha_{a_n}\alpha)\,\omega,$$

следовательно, правый сдвиг $F\alpha$ является эндоморфизмом алгебры $\mathcal{F}=\langle F,\Omega\rangle$. Переходим к доказательству достаточности.

Пусть полугруппа S удовлетворяет всем требованиям условия теоремы. Покажем, что алгебра $\mathcal{F}=\langle F,\Omega\rangle$ является свободной алгеброй сигнатуры Ω и что $V(\mathcal{F})\cong S$. Для этого нужно показать, что имеется система образующих, любое отображение которой в алгебру $\mathcal{F}$ продолжается до эндоморфизма. Такой системой образующих является множество E. В самом деле, для любого отображения $\bar\varphi$ множества E в F согласно условию 2) существует элемент $s\in S$, для которого $e\varphi=es$. С другой стороны, правый сдвиг $F\cdot s$ согласно 3) является эндоморфизмом алгебры $\mathcal{F}$. Этот эндоморфизм на E совпадает с $\bar\varphi$. Следовательно, отображение $\bar\varphi$ продолжено до эндоморфизма $\varphi, f\varphi=fs, f\in F$ алгебры $\mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F}$–свободна.

Покажем теперь, что полугруппа S изоморфна полугруппе $V(\mathcal{F})$ всех эндоморфизмов алгебры $\mathcal{F}$. Отображением $V(\mathcal{F})$ в S, сопоставляя каждому эндоморфизму $\varphi\in V(\mathcal{F})$ элемент $s\in S$, который определяется как в предшествующем абзаце (ведь каждый эндоморфизм φ определяет некоторое отображение $\bar\varphi$, $e\bar\varphi=e\varphi$ множества E в F). Построенное отображение $V(\mathcal{F})$в S является однозначным, так как из $e\varphi=es_1$ и $e\varphi=es_2$ для всех $e\in E$ следует $es_1=es_2$ для всех $e\in E$,откуда по условию I) $s_1=s_2$.

Так как эндоморфизм свободной алгебры полностью определяется действием на свободных образующих, то из $\varphi_1\neq\varphi_2$ следует,что соответствующие им элементы s_1 и s_2 также различны.Следовательно, это будет взаимно-однозначным и ввиду 3) отображением на S.

Наконец, обозначая через φ_s эндоморфизм, соответствующий элементу $s\in S$ и учитывая, что $es\in F$, имеем для любых $e\in E$; $s_1,s_2\in S$:

$$e(\varphi_{s_1}\varphi_{s_2})=(e\varphi_{s_1})\varphi_{s_2}=(es_1)\varphi_{s_2}=(es_1)s_2=e(s_1s_2)=e\varphi_{s_1s_2},$$

т.е. $\varphi_{s_1}\varphi_{s_2}=\varphi_{s_1s_2}$. Таким образом, установленное соответствие является изоморфизмом и, следовательно, $S\cong V(\mathcal{F})$.

Если множество операций Ω пусто, то по свойству 3) $F=E$. Дальше, E как всякий правый идеал будет содержать все правые нули полугруппы S (заметим, что в этом случае правые нули имеются, таким будет отображение в один и тот же элемент). Пусть $f \in E$ и φ - отображение множества E в элемент f. Тогда по условию 2) существует $s_0 \in S$ такое, что $es_0 = e\varphi = f$ для любого $e \in E$. В частности, это имеет место и для всех правых нулей полугруппы S. Пусть e - некоторый правый нуль, тогда для любого $s \in S$ будем иметь

$$sf = s(es_0) = (se)s_0 = es_0 = f,$$

т.е. f - правый нуль. Следовательно, $E = F$ - это множество всех правых нулей полугруппы S. Таким образом, приходим к теореме А.И.Мальцева [34].

Глава IV. ИДЕАЛЫ ПОЛУГРУППЫ ЧАСТИЧНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ УНИВЕРСАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ

§ I. Структура левых идеалов полугруппы частичных эндоморфизмов свободной универсальной алгебры

I.I. Основные определения. Пусть дана некоторая алгебра $\mathcal{Y}=<G,\Omega>$. Следуя [35] назовем частичным эндоморфизмом алгебры $\mathcal{Y}=<G,\Omega>$ любой гомоморфизм α некоторой подалгебры Γ_α^1 алгебры $\mathcal{Y}$ на подалгебру Γ_α^2 алгебры $\mathcal{Y}$, т.е. для такого α, как бинарное отношение, имеем $\Gamma_\alpha^1=\Pi_{\rho_1}\alpha$, $\Gamma_\alpha^2=\Pi_{\rho_2}\alpha$. Умножение частичных эндоморфизмов определяется как умножение частичных отображений (см.п.I.2.5), или, что то же самое, как умножение бинарных отношений множества G. Именно, если α и β два частичных эндоморфизма и $\Gamma_\alpha^2\cap\Gamma_\beta^1\neq\phi$, то полагаем $\Gamma_{\alpha\beta}^1=(\Gamma_\alpha^2\cap\Gamma_\beta^1)\alpha^{-1}$, т.е. $\Gamma_{\alpha\beta}^1$ – полный прообраз подалгебры $\Gamma_\alpha^2\cap\Gamma_\beta^1$ при частичном гомоморфизме α и $\Gamma_{\alpha\beta}^2=(\Gamma_\alpha^2\cap\Gamma_\beta^1)\beta$. При этом $\alpha\cdot\beta$ – обычное последовательное выполнение преобразований α и β. Если же $\Gamma_\alpha^2\cap\Gamma_\beta^1=\phi$, то $\alpha\beta=0$, где 0 – нулевой частичный эндоморфизм, т.е. эндоморфизм, отображающий пустую алгебру на себя (как мы договорились, если пересечение всех подалгебр пусто, то пустое множество включается в число подалгебр).

Легко видеть, что множество $W=W(\mathcal{Y})$ всех частичных эндоморфизмов алгебры $\mathcal{Y}$ является полугруппой.

Каждая подалгебра H данной алгебры $\mathcal{Y}$ является образом некоторого частичного эндоморфизма. В качестве такого эндоморфизма достаточно взять, например, тождественное отображение ε_H алгебры H на себя.

Введя и для этого случая в рассмотрение эндомножества как объединение эндоморфных образов при частичных эндоморфизмах, легко заметим, что в отличие от случая полных эндоморфизмов здесь для любой алгебры, не только для свободных, каждое такое эндомножество будет объединением подалгебр, и, обратно, каждое теоретико-множественное объединение подалгебр являтся эндомножеством. Следовательно, множество U^W всех эндомножеств для частичных эндоморфизмов будет полной структурой относительно теоретико-множественных операций пересечения и объединения.

I.2. Структура левых насыщенных идеалов полугруппы частичных эндоморфизмов произвольной алгебры. Для каждого эндомножества $M \subseteq G$ обозначим через $\mathfrak{A}_M^W$ множество всех частичных эндоморфизмов $\alpha \in W$, для которых $\Gamma_\alpha^2 \subseteq M$. Заметим, что множество $\mathfrak{A}_M^W$ не пусто для любого эндомножества M, так как оно содержит, в частности, все тождественные отображения подалгебр, содержащихся в M на себя. Очевидно, что $\mathfrak{A}_M \subseteq \mathfrak{A}_M^W$. Дальше, если $\alpha \in \mathfrak{A}_M^W$ и $\beta \in W$, то $\Gamma_{\beta\alpha}^2 = (\Gamma_\beta^2 \cap \Gamma_\alpha^1)\alpha \subseteq \Gamma_\alpha^1\alpha \subseteq \Gamma_\alpha^2 \subseteq M$,

т.е. $\beta\alpha \in \mathfrak{A}_M^W$, следовательно, $\mathfrak{A}_M^W$ левый идеал в полугруппе W.

Для каждого множества частичных эндоморфизмов $\mathfrak{A} \subseteq W$ обозначим $M_\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \Gamma_\alpha^2$ и скажем, что $\mathfrak{A}$ частично отображает G на $M_\mathfrak{A}$.

Как и в п.Ш.I.4 для каждого левого идеала $\mathfrak{A}$ полугруппы W введем оператор насыщения. Именно насыщением левого идеала $\mathfrak{A}$ назовем насыщенный идеал $\mathfrak{A}_{M_\mathfrak{A}}^W$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что оператор насыщения является оператором замыкания в множестве всех левых идеалов. При этом замкнутыми будут только насыщенные левые идеалы.

Отсюда, на основании п.I.4.5, множество Π^W всех насыщенных идеалов $\mathfrak{A}_M^W$ является полной структурой.

Из того, что для каждой подалгебры $H \subseteq M$ тождественное отображение $\varepsilon_H \in \mathfrak{A}_M^W$, следует, что между Π^W и U^W имеется взаимно-однозначное соответствие $f(\mathfrak{A}_M^W) = M$, которое сохраняет строгие включения, отсюда полная структура Π^W изоморфна полной структуре U^W, т.е. $\Pi^W \cong U^W$.

I.3. Левое отношение Грина в полугруппе частичных эндоморфизмов свободной алгебры. Для дальнейшего понадобится следующая вспомогательная лемма, где α и β частичные эндоморфизмы алгебры $\mathcal{Y}$.

ЛЕММА. Если Γ_β^1 – свободная алгебра в рассматриваемом многообразии универсальных алгебр и $\Gamma_\beta^2 \subseteq \Gamma_\alpha^2$, то уравнение $\gamma\alpha = \beta$ разрешимо в W.

Пусть m_k – некоторая система образующих подалгебры Γ_α^1 и $a_k \in \Gamma_\alpha^2$ такие, что $m_k\alpha = a_k$. Пусть далее, y_j – некоторая система свободных образующих подалгебры Γ_β^1. Тогда $\eta_j = y_j\beta$ является системой образующих подалгебры Γ_β^2. Но, так как $\Gamma_\beta^2 \subseteq \Gamma_\alpha^2$, то $\eta_j \in \Gamma^2_\alpha$, и тогда они выражаются через ее образующие a_k, т.е. $\eta_j = w_j(a_k)$. Ввиду того, что Γ^1_β свободна в данном многообразии и y_j ее свободные образующие, то отображение $y_j \to w_j(m_k)$ продолжается до частичного эндоморфизма γ алгебры $\mathcal{Y}$, т.е. $y_j\gamma = w_j(m_k)$. При этом Γ^1_γ имеет систему образующих y_j, следовательно, $\Gamma^1_\gamma = \Gamma^1_\beta$, и, так как $y_j\gamma = w_j(m_k) \in \Gamma^1_\alpha$, то $\Gamma^2_\gamma \leq \Gamma^1_\alpha$, отсюда

$$\Gamma^1_{\gamma\alpha} = (\Gamma^2_\gamma \cap \Gamma^1_\alpha)\gamma^{-1} = (\Gamma^2_\gamma)\gamma^{-1} = \Gamma^1_\gamma = \Gamma^1_\beta .$$

Далее

$$y_j(\gamma\alpha) = (y_j\gamma)\alpha = w_j(m_k)\alpha = w_j(m_k\alpha) = w_j(a_k) = \eta_j = y_j\beta .$$

Откуда следует, что $\Gamma^2_{\gamma\alpha} = \Gamma^2_\beta$ и $\beta = \gamma\alpha$.

СЛЕДСТВИЕ I. Если $\mathcal{Y}$ свободная алгебра и левый идеал $\mathfrak{A}$ полугруппы $W(\mathcal{Y})$ частично отображает G на M, т.е. $M_{\mathfrak{A}} = M$, то $\mathfrak{A} \geq R_M$.

В самом деле, пусть $\beta \in R_M$, следовательно, $\Gamma^2_\beta = G\beta$ содержится в некоторой циклической алгебре $[m]$, где $m \in M$, т.е. $m \in \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \Gamma^2_\alpha$. Пусть $\alpha \in \mathfrak{A}$ такое, что $m \in \Gamma^2_\alpha$, тогда $[m] \leq \Gamma^2_\alpha$, следовательно, $\Gamma^2_\beta \leq [m] \leq \Gamma^2_\alpha$. Учитывая теперь, что $\Gamma^1_\beta = \mathcal{Y} = [\{x_i, i \in I\}]$ – свободная, получаем, что $\beta = \gamma\alpha$ для некоторого $\gamma \in W$ и, так как $\mathfrak{A}$ – левый идеал, $\beta \in \mathfrak{A}$. Больше того, $\mathfrak{A}$ содержит все эндоморфизмы β, для которых $\Gamma^1_\beta = [\{x_j, j \in J \leq I\}]$.

Заметим, что из $\beta = \gamma\alpha$ следует всегда $\Gamma^2_\beta \leq \Gamma^2_\alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если алгебра $\mathcal{Y}$ такова, что любая ее подалгебра свободна, т.е. для $\mathcal{Y}$ имеет место теорема о свободности подалгебр, то уравнение $\chi\alpha = \beta$ разрешимо в W тогда и только тогда, когда $\Gamma^2_\beta \leq \Gamma^2_\alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Два частичных эндоморфизма $\alpha, \beta \in W(\mathcal{Y})$, где $\mathcal{Y}$ – алгебра с теоремой о свободности подалгебр, находятся в отношении Грина $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma^2_\alpha = \Gamma^2_\beta$.

В этом случае уравнения $\chi\alpha = \beta$ и $\chi\beta = \alpha$ разрешимы, следовательно, $\beta \in W\alpha$ и $\alpha \in W\beta$, но отсюда $W\alpha = W\beta$.

<u>I.4. Левые насыщенные и разреженные идеалы полугруппы частичных эндоморфизмов свободной алгебры.</u> Пусть дана алгебра $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$, свободная в некотором многообразии универсальных алгебр с системой свободных образующих $X = \{x_i, i \in I\}$. В пункте I.2 было показано, что для любой алгебры $\mathcal{Y}$ структу-

ра Π^W насыщенных идеалов полугруппы W изоморфна структуре эндомножеств U^W. В п.Ш.I.4 показано, что если алгебра $\mathfrak{Y}$ свободна, то структура Π насыщенных левых идеалов полугруппы полных эндоморфизмов V изоморфна структуре $U = U^W$, следовательно, <u>если алгебра $\mathfrak{Y}$ свободна, то структуры насыщенных левых идеалов полугруппы частичных эндоморфизмов изоморфны полугруппе насыщенных левых идеалов полугруппы полных эндоморфизмов $\Pi \cong \Pi^W$</u>. Обозначим через Σ^W структуру всех левых идеалов полугруппы $W(\mathfrak{Y})$ и через Σ^W_M - множество всех левых идеалов полугруппы $W(\mathfrak{Y})$, которые частично отображают G на M, т.е. $\alpha \in \Sigma^W_M$ тогда и только тогда, когда $M_\alpha = M$. Через σ^W обозначим разбиение структуры Σ^W на классы Σ^W_M. Имеет место

ТЕОРЕМА. Разбиение σ^W является конгруэнцией полной структуры Σ^W. Фактор-структура Σ^W/σ^W изоморфна полной структуре U всех эндомножеств свободной алгебры $\mathfrak{Y}$.

Пусть $\alpha_j \, \sigma^W \alpha_j'$, $\alpha_j \in \Sigma^W_{M_j}$. Тогда, так как $\alpha_j \geq R_{M_j}$, то $\bigcap_j \alpha_j \geq \bigcap_j R_{M_j}$, следовательно, $M_{\bigcap_j \alpha_j} \geq M_{\bigcap_j R_{M_j}} = \bigcap_j M_j$. Но так как включение $M_{\bigcap_j \alpha_j} \leq \bigcap_j M_j$ следует из того, что для $m \in \bigcap_j M_j$ эндоморфизм $\alpha_m \in R_{\bigcap_j M_j} \leq \bigcap_j \alpha_j$, то $M_{\bigcap_j \alpha_j} = \bigcap M_j$, отсюда $\bigcap_j \alpha_j \in \Sigma^W_{\bigcap_j M_j}$. Таким же образом показывается, что $\bigcap_j \alpha_j' \in \Sigma^W_{\bigcap_j M_j}$, т.е. $\bigcap_j \alpha_j \, \sigma^W \bigcap_j \alpha_j'$. Дальше, из $\alpha_j \geq R_{M_j}$ следует $\bigcup_j \alpha_j \geq \bigcup_j R_{M_j}$, откуда $M_{\bigcup_j \alpha_j} \geq \bigcup_j M_{R_{M_j}} = \bigcup_j M_j$. Если $m \in M_{\bigcup_j \alpha_j}$, то существует $\alpha \in \bigcup_j \alpha_j$, для которого $m \in \Gamma^2_\alpha$, но тогда $\alpha \in \alpha_j$ для некоторого j, следовательно, $m \in M_{\alpha_j} = M_j$, т.е. $m \in \bigcup_j M_j$, откуда $M_{\bigcup_j \alpha_j} \leq \bigcup_j M_j$. Таким образом, $M_{\bigcup_j \alpha_j} = \bigcup_j M_j$. Итак, $\bigcup_j \alpha_j \in \Sigma^W_{\bigcup_j M_j}$. Так же получаем $\bigcup_j \alpha_j' \in \Sigma^W_{\bigcup_j M_j}$, следовательно, $\bigcup_j \alpha_j \sigma^W \bigcup_j \alpha_j'$. Теорема доказана.

В частности, если α_j множество всех левых идеалов из Σ^W_M, то $\alpha_j \geq R_M$ и $\bigcap_j \alpha_j \geq R_M$, следовательно, $R^W_M = \bigcap_{\alpha \in \Sigma^W_M} \alpha$ является наименьшим левым идеалом в классе Σ^W_M, причем $M_{R^W_M} = M_{R_M} = M$.

<u>I.5. Левые идеалы полугруппы частичных эндоморфизмов алгебры с теоремой о свободности подалгебр</u>. Обозначим через Q' структуру всех наследственных совокупностей подалгебр алгебры $\mathfrak{Y}$ (ср.п.Ш.4.I), для которой имеет место теорема о свободности подалгебр.

ТЕОРЕМА I. Структуры Σ^W и Q' изоморфны.

Установим соответствие между Σ^W и Q' следующим образом. Левому идеалу $\mathfrak{A}$ сопоставим совокупность $q = f(\mathfrak{A})$, где подалгебра $M \in q$ тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in \mathfrak{A}$, что $\Gamma_\alpha^2 = M$. Покажем, что q наследственная. Если $M' \subseteq M$, M' подалгебра $\mathfrak{A}$, то существует $\beta \in W$, что $\Gamma_\beta^2 = M'$, следовательно, $\Gamma_\beta^2 \leq \Gamma_\alpha^2$, тогда $\beta = \gamma\alpha$ для некоторого $\gamma \in W$, т.е. $\beta \in \mathfrak{A}$, следовательно, $M' \in q$. Если $\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{A}_2$ и, например, существует $\alpha \in \mathfrak{A}_1 \setminus \mathfrak{A}_2$, то $\Gamma_\alpha^2 \in f(\mathfrak{A}_1) \setminus f(\mathfrak{A}_2)$. Следовательно, f взаимно-однозначное соответствие Σ^W в Q'.

Пусть теперь q некоторая совокупность из Q'. Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех частичных эндоморфизмов α, для которых $\Gamma_\alpha^2 \leq M \in q$. Тогда легко видеть, что $\mathfrak{A}$ левый идеал. При этом $f(\mathfrak{A}) = q$.

Таким образом, Σ^W изоморфна Q'.

Обозначим через Q'_M множество всех наследственных совокупностей эндомножеств q, которые покрывают M. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 2. Полные структуры Q'_M и Σ^W_M изоморфны.

Для доказательства достаточно заметить, что изоморфное соответствие дается отображением f, установленным выше.

I.6. Насыщенные и разреженные идеалы полугрупп частичных эндоморфизмов для алгебр с теоремой о свободности подалгебр.

Заметим, что в структуре Σ^W_M наибольшим элементом является $\mathfrak{A}^W_M$, а наименьшим – разреженный идеал $\mathcal{R}^W_M = \bigcap_{\mathfrak{A} \in \Sigma^W_M} \mathfrak{A}$.

ТЕОРЕМА I. Левый идеал $\mathcal{R}^W_M$ состоит из всех эндоморфизмов, частично отображающих алгебру $\mathfrak{A}$ в циклические подалгебры из M.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дано эндомножество M. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех частичных эндоморфизмов α, для которых Γ_α^2 содержится в циклической алгебре из M. Тогда, если $\alpha \in \mathcal{R}$ и $\beta \in W$, имеем $\Gamma_{\beta\alpha}^2 \leq \Gamma_\alpha^2$, следовательно, $\Gamma_{\beta\alpha}^2$ содержится в циклической алгебре из M, т.е. $\beta\alpha \in \mathcal{R}$. Покажем, что $\mathcal{R}$ содержится в любом левом идеале $\mathfrak{A}$, для которого $M_\mathfrak{A} = M$. Пусть $\alpha \in \mathcal{R}$ и $\Gamma_\alpha^2 \leq [m]$, $m \in M$. Из условия следует, что существует $\beta \in \mathfrak{A}$ и $g \in G$ такое, что $g\beta = m$, следовательно, $\Gamma_\beta^2 \geq [m]$. Отсюда $\Gamma_\alpha^2 \leq \Gamma_\beta^2$, тогда по следствию 2 леммы из п.I.3 имеем $\alpha = \gamma\beta$. для некоторого $\gamma \in W$ и, так как $\mathfrak{A}$ левый идеал, то $\alpha \in \mathfrak{A}$, т.е. $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{A}$. Таким образом получаем, что $\mathcal{R} = \mathcal{R}^W_M$.

ТЕОРЕМА 2. В структуре Π^W наименьшая верхняя грань совпадает с теоретико-множественным объединением тогда и только тогда, когда любая подалгебра алгебры $\mathcal{Y}$ является циклической.

В самом деле, если любая подалгебра является циклической, то любой идеал $\mathfrak{A}$ частично отображает алгебру $\mathcal{Y}$ в циклические подалгебры, т.е. совпадает с $R^W_{M_\alpha}$, но для таких идеалов имеем $\bigcup R^W_{M_j} = R^W_{\bigcup M_j}$.

Обратно, пусть имеется нециклическая подалгебра $M \subseteq \mathcal{Y}$. Обозначим через H_j, $j \in J$ множество всех циклических подалгебр, содержащихся в M.
Тогда

$$R^W_M = \bigcup_j \mathfrak{A}^W_{H_j} .$$

Но тождественный частичный эндоморфизм ε_M не принадлежит R^W_M, следовательно, идеал $\bigcup_j \mathfrak{A}^W_{H_j}$ не является насыщенным.

ТЕОРЕМА 3. Наибольшая нижняя грань разреженных идеалов R^W_M совпадает с их теоретико-множественным пересечением тогда и только тогда, когда пересечение любой совокупности циклических подалгебр алгебры $\mathcal{Y}$ является циклической подалгеброй.

Предположим, что для любых M_j, $j \in J$ имеет место $\bigcap_j R^W_{M_j} = R^W_{\bigcap M_j}$. Пусть подалгебра N равна пересечению некоторых циклических подалгебр и обозначим через N_t, $t \in T$ множество всех циклических подалгебр, содержащих N. Если α – частичный эндоморфизм алгебры $\mathcal{Y}$, для которой $\Gamma^2_\alpha = N$, то $\Gamma^2_\alpha \leq N_t$ для любого $t \in T$. Тогда, так как N_t – циклическая, по теореме I $\alpha \in R^W_{N_t}$, для любого $t \in T$, но тогда $\alpha \in \bigcap_t R^W_{M_t}$. При нашем предположении получаем $\alpha \in \bigcap R^W_{\bigcap N_t}$, следовательно, $\Gamma^2_\alpha = N$ содержится в некоторой циклической подалгебре из $\bigcap_t N_t$. Так как $\bigcap_t N_t$ есть пересечение всех таких циклических подалгебр, то получаем, что само $\bigcap_t N_t$ является циклической подалгеброй, которая и совпадает с подалгеброй N.

Обратно, пусть каждая подалгебра, содержащаяся в некоторой циклической подалгебре, содержится в наименьшей циклической подалгебре. Берем произвольную совокупность левых идеалов $R^W_{M_j}$ и $\alpha \in \bigcap_j R^W_{M_j}$. Тогда $\alpha \in R^W_{M_j}$, для каждого j, и, следовательно, существуют циклические подалгебры $M'_j \leq M_j$ такие, что $\Gamma_\alpha^2 \leq M_j'$. Пусть $M = \bigcap_j M_j'$ — циклическая подалгебра, содержащая Γ_α^2, т.е. $\Gamma_\alpha^2 \leq M = \bigcap_j M_j'$. Отсюда $\Gamma_\alpha^2 \leq \bigcap_j M_j'$. Тогда, учитывая теорему I, получим $\alpha \in \mathcal{R}^W_{\bigcap_j M_j}$, т.е. $\bigcap_j \mathcal{R}^W_{M_j} \leq \mathcal{R}^W_{\bigcap_j M_j}$. Так как обратное включение имеет место для любых M_j, получаем $\bigcap_j \mathcal{R}^W_{M_j} = \mathcal{R}^W_{\bigcap_j M_j}$.

Отсюда получаем, что в таких условиях структура $\mathfrak{R}^W$ всех разреженных левых идеалов полугруппы $W(\mathcal{Y})$ является подструктурой структуры Σ^W и совпадает со структурой $\mathfrak{R}$ всех разреженных идеалов полугруппы $V(\mathcal{Y})$.

В конце заметим, что в случае, когда каждая подалгебра является n-подалгеброй, то структуры Σ левых идеалов полугруппы полных эндоморфизмов и Σ^W левых идеалов полугруппы частичных эндоморфизмов свободной универсальной алгебры с теоремой о свободности подалгебр совпадают. Например, такое положение имеем в случае свободных групп со счетным числом образующих.

§ 2. Структура двусторонних идеалов полугруппы частичных эндоморфизмов

<u>2.I. Допустимые кардинальные числа относительно данной алгебры</u>. Пусть дана свободная алгебра $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$, все подалгебры которой свободны.

Заметим, что для произвольной алгебры может быть найдена система образующих, наименьшая по мощности, т.е. система образующих мощности m так, что любая другая система образующих будет иметь мощность не меньше, чем m. В самом деле, пусть кардинальные числа $m_1 > m_2 > \ldots$ представляют мощности систем образующих данной алгебры. Тогда, так как произвольное множество кардинальных чисел вполне упорядочено [28], то эта цепочка будет обрываться на конечном месте, т.е. найдется система образующих наименьшей мощности m.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кардинальное число m называется допустимым относительно алгебры $\mathcal{Y}$ если:

а) для любого $m' < m$ существует такое m'', $m' < m'' < m$, что в алгебре $\mathcal{Y}$ имеется подалгебра, которая имеет систему образующих мощности m'', но не имеет систем образующих меньшей мощности;

б) если подалгебра $H \leq \mathcal{Y}$ имеет систему образующих мощности, меньшей m, то и любая подалгебра алгебры H имеет систему образующих, мощность которой меньше m.

Из определения следует, что допустимое кардинальное число относительно алгебры $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$ не превосходит $\aleph_{\nu+1}$, где $\aleph_\nu$ – мощность множества G.

Рассмотрим несколько примеров. Если $\mathcal{Y}$ свободная циклическая группа, то допустимыми являются числа I и 2. Число I потому, что в $\mathcal{Y}$ имеется единственная подгруппа, состоящая из единицы группы, у которой мощность системы образующих меньше I (эта мощность равна нулю в данном случае). Легко проверить, что число 2 также является допустимым (при этом основным является тот факт, что подгруппа циклической группы сама циклическая). Если $\mathcal{Y}$ свободная группа с конечным (больше единицы) или счетным числом образующих, то кроме I и 2 допустимым будет $\aleph_1$. Ввиду того, что свободная группа с двумя образующими содержит свободную подгруппу со счетным числом образующих, других допустимых чисел нет.

Рассмотрим сейчас еще случай свободных луп. Так как циклическая свободная лупа содержит подлупу со счетным числом образующих [36], то для свободной лупы с конечным (не нулевым) или счетным множеством образующих допустимыми будут числа I и $\aleph_1$. Другие примеры будут приведены в конце этого параграфа.

<u>2.2. Структура двусторонних идеалов полугруппы частичных эндоморфизмов</u>. Обозначим через $\mathfrak{A}_m$ множество всех частичных эндоморфизмов $\alpha \in W(\mathcal{Y})$, для которых Γ_α^2 имеет систему образующих, мощность которой строго меньше допустимого кардинального числа m.

ЛЕММА I. $\mathfrak{A}_m$ является двусторонним идеалом полугруппы W.

Пусть $\alpha \in \mathfrak{A}_m$ и $\beta \in W$. Для произведения $\beta\alpha$ имеем $\Gamma_{\beta\alpha}^2 \leq \Gamma_\alpha^2$. Так как Γ_α^2 имеет систему образующих мощности меньше m, и m допустимо, то $\Gamma_{\beta\alpha}^2$ по условию б) также имеет систему образующих мощности меньше m, следовательно, $\beta\alpha \in \mathfrak{A}_m$. Для произведения $\alpha\beta$ имеем $(\Gamma_{\alpha\beta}^1 \alpha \leq \Gamma_\alpha^2)$, и, так как m допустимо, то $(\Gamma_{\alpha\beta}^1)\alpha$ имеет систему образующих мощности меньше m, но тогда, тем более, $\Gamma_{\alpha\beta}^2 = ((\Gamma_{\alpha\beta}^1)\alpha)\beta$ имеет систему образующих мощности меньше m. Такой является, например, система образующих $b_j = a_j\beta$, где a_j – некоторая система образующих подалгебры $(\Gamma_{\alpha\beta}^1)\alpha$, мощность которой меньше m. Таким образом, $\alpha\beta \in \mathfrak{A}_m$.

ЛЕММА 2. Если $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ – два допустимых кардинальных числа относительно алгебры $\mathfrak{Y}$, и $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2$, то $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}_1} \subset \subset \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}_2}$.

Очевидно, что $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}_1} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}_2}$.

Так как $\mathfrak{m}_2$ допустимое кардинальное число относительно алгебры $\mathfrak{Y}$, то по условию а) определения допустимого числа существует подалгебра $F \subseteq \mathfrak{Y}$, наименьшая (по мощности) система образующих которой имеет мощность $\mathfrak{m}'$, причем $\mathfrak{m}_1 \leq \mathfrak{m}' < \mathfrak{m}_2$. Тогда тождественный эндоморфизм ε_F подалгебры F принадлежит $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}_2}$, но не принадлежит $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}_1}$. Таким образом, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}_1} \subset \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}_2}$.

ТЕОРЕМА. Каждый двусторонний идеал $\mathfrak{a}$ полугруппы $W(\mathfrak{Y})$ совпадает с идеалом $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}$ для некоторого кардинального числа $\mathfrak{m}$, допустимого относительно алгебры $\mathfrak{Y}$.

Пусть $\mathfrak{a}$ – двусторонний идеал. Для каждой подалгебры $\Gamma_\alpha^2, \alpha \in \mathfrak{a}$ отметим кардинальное число, равное наименьшей из мощностей систем образующих подалгебры Γ_α^2 (как было замечено в п.2.1, такое число существует).

Пусть дальше $\mathfrak{m}$ – наименьшее кардинальное число, которое превосходит все отмеченные кардинальные числа (существование такого числа обеспечено тем, что произвольное множество кардинальных чисел вполне упорядочено). Кардинальное число $\mathfrak{m}$ является допустимым относительно алгебры $\mathfrak{Y}$. В самом деле, из определения числа $\mathfrak{m}$ как наименьшего среди превосходящих отмеченных кардинальных чисел следует, что при любом $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$ среди подалгебр Γ_α^2, $\alpha \in \mathfrak{a}$ существует подалгебра, которая имеет систему образующих мощности $\mathfrak{m}''$, где $\mathfrak{m}' \leq \mathfrak{m}'' < \mathfrak{m}$ и не имеет систем образующих меньшей мощности, т.е. выполняется условие а) определения допустимого числа.

Пусть $H \subseteq \mathfrak{Y}$ имеет систему образующих мощности $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$. Ввиду определения $\mathfrak{m}$ имеется $\alpha \in \mathfrak{a}$, что Γ_α^2 имеет систему образующих мощности $\mathfrak{m}''$, $\mathfrak{m}' \leq \mathfrak{m}'' < \mathfrak{m}$ и не имеет систем образующих меньшей мощности.

В таком случае, Γ_α^2 имеет свободную систему образующих мощности не меньше, чем $\mathfrak{m}''$. Отобразим эти образующие каким-либо способом на образующие подалгебры H, и пусть β – соответствующий частичный эндоморфизм. Пусть $\gamma = \alpha\beta$. Так как $\Gamma_\alpha^2 = \Gamma_\beta^1$, то $\Gamma_\gamma^2 = (\Gamma_\alpha^2 \cap \Gamma_\beta^1)\beta = (\Gamma_\beta^1)\beta = \Gamma_\beta^2 = H$, с другой стороны, $\Gamma_\gamma^1 = (\Gamma_\alpha^2 \cap \Gamma_\beta^1)\alpha^{-1} = (\Gamma_\alpha^2)\alpha^{-1} = \Gamma_\alpha^1$. К тому же $\gamma \in \mathfrak{a}$ потому, что $\mathfrak{a}$ – двусторонний идеал, $\gamma = \alpha\beta$ и $\alpha \in \mathfrak{a}$. Пусть теперь H' подалгебра алгебры H. Покажем, что H' имеет систему образующих мощности меньше $\mathfrak{m}$. Тогда для тождественного автоморфизма $\varepsilon_{H'}$ подалгебры H', имеем $\Gamma^2_{\varepsilon_{H'}} \subseteq \Gamma^2_{\gamma}$, следовательно, по следствию 2 п.I.3 существует такое $\delta \in W$, что $\varepsilon_{H'} = \delta\gamma$, откуда, так как $\mathfrak{a}$ двусторонний идеал, получаем, что $\varepsilon_{H'} \in \mathfrak{a}$. Учитывая опять определение кардинального числа $\mathfrak{m}$, получаем, что подалгебра $H' = \Gamma^2_{\varepsilon_{H'}}$ имеет систему образующих мощности меньше $\mathfrak{m}$, следовательно, $\mathfrak{m}$ удовлетворяет и условию б), т.е. $\mathfrak{m}$ допустимое кардинальное число относительно алгебры $\mathfrak{Y}$. Таким образом, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}$.

Пусть теперь $\varphi \in W$ - некоторый частичный эндоморфизм $\mathfrak{Y}$, для которого Γ^2_{φ} имеет систему образующих мощности $\mathfrak{m}_1$ меньше $\mathfrak{m}$, т.е. $\varphi \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}$. Пусть $H = \Gamma^2_{\varphi}$. Как и выше, пусть $\alpha \in \mathfrak{a}$, для которого Γ^2_{α} имеет систему образующих мощности $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}_1 \leqslant \mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$ и не имеет систем образующих меньшей мощности. В силу определения числа $\mathfrak{m}$, такое α существует. Тогда Γ^2_{α} имеет и свободную систему образующих мощности не меньше $\mathfrak{m}'$. Отображая каким-либо образом эту свободную систему образующих на систему образующих подалгебры $H = \Gamma^2_{\varphi}$, мощность которой равна $\mathfrak{m}_1$, получим частичный эндоморфизм β, для которого $\Gamma^1_{\beta} = \Gamma^2_{\alpha}$ и $\Gamma^2_{\beta} = \Gamma^2_{\varphi}$. Тогда эндоморфизм $\gamma = \alpha\beta$ принадлежит $\mathfrak{a}$ ($\alpha \in \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}$ - двусторонний идеал). С другой стороны,

$$\Gamma^2_{\gamma} = \Gamma^2_{\alpha\beta} = (\Gamma^2_{\alpha} \cap \Gamma^1_{\beta})\beta = (\Gamma^1_{\beta})\beta = \Gamma^2_{\beta} = \Gamma^2_{\varphi},$$

следовательно, существует $\delta \in W$ такой, что $\varphi = \delta\gamma$, откуда $\varphi \in \mathfrak{a}$, т.е. $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{a}$. Из полученных включений получаем $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}$ и теорема доказана.

Из доказанной теоремы и лемм I и 2 п.2.2 следует, что <u>для любой свободной алгебры, у которой каждая подалгебра свободна, структура двусторонних идеалов является цепью вида</u>

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}_1} \subset \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}_2} \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}_\nu},$$

<u>где $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \ldots < \mathfrak{m}_\nu$ - совокупность всех кардинальных чисел допустимых относительно алгебры $\mathfrak{Y}$.</u>

<u>2.3. Примеры</u>. Теорема предыдущего пункта может быть применена к каждой свободной алгебре, для которой имеет место теорема о свободности подалгебр. Например, как уже было отмечено, если $\mathfrak{Y}$ циклическая группа, то допустимыми будут лишь числа

$m_1 = 1$ и $m_2 = 2$, т.е. $W(\mathcal{Y})$, где $\mathcal{Y}$ – циклическая бесконечная группа имеет двусторонние идеалы $\mathfrak{A}_1$ всех частичных эндоморфизмов α, для которых $\Gamma_\alpha^2 = \{e\}$, где e – единица группы и $\mathfrak{A}_2 = W(\mathcal{Y})$. Если $\mathcal{Y}$ свободная нециклическая группа конечного или счетного ранга, то допустимыми кардинальными числами будут $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = \aleph_1$, т.е. двусторонними идеалами полугруппы $W(\mathcal{Y})$ в этом случае являются: $\mathfrak{A}_1$ – состоящее из всех $\alpha \in W(\mathcal{Y})$, для которых $\Gamma_\alpha^2 = \{e\}$; $\mathfrak{A}_2$ – состоящее из всех $\alpha \in W(\mathcal{Y})$, для которых Γ_α^2 – циклическая подгруппа и $\mathfrak{A}_{\aleph_1} = W(\mathcal{Y})$. Если свободная группа $\mathcal{Y}$ имеет ранг $\aleph_\nu$, $\nu \geqslant 0$, то $W(\mathcal{Y})$ имеет двусторонние идеалы $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_{\aleph_k}$ для всех $k = 1, \dots, \nu+1$.

В работе А.И.Ширшова [37] доказано, что каждая подалгебра свободной лиевой алгебры свободна, причем циклическая ее подалгебра является векторным пространством с нулевым умножением и в свободной лиевой алгебре с двумя образующими содержится подалгебра, являющаяся свободной лиевой алгеброй со счетным числом образующих. Отсюда следует, что для свободной лиевой алгебры $\mathcal{Y}$ положение с двусторонними идеалами полугруппы $W(\mathcal{Y})$ такое же, как и в случае свободных групп.

Если $\mathcal{Y}$ – свободная лупа, система свободных образующих которой имеет мощность $\aleph_\nu$, то в силу работы [35], где показано, что каждая подлупа свободной лупы сама свободна и в циклической свободной лупе содержится подлупа со счетным числом свободных образующих, получаем, что $W(\mathcal{Y})$ имеет двусторонние идеалы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_{\aleph_k}$, где $k = 1, \dots, \nu+1$. Такое же положение имеется в случае свободной неассоциативной алгебры над произвольным полем [38], Ω-групп [39], алгебр слов [40], коммутативных и антикоммутативных алгебр [41].

Из теории абелевых групп (см., например, [42]) следует, что для свободной абелевой группы $\mathcal{Y}$ с $\aleph_\nu$ образующими любое кардинальное число m, $m \leqslant \aleph_{\nu+1}$ является допустимым, следовательно, в $W(\mathcal{Y})$ имеются двусторонние идеалы $\mathfrak{A}_m$ для всех $m \leqslant \aleph_{\nu+1}$. То же самое имеет место в случае векторных пространств над телами [2], [16], а также для алгебр с пустым множеством операций [5].

Глава У. ИДЕАЛЫ АЛГЕБР ЭНДОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ УНИВЕРСАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ

§ I. Алгебры эндоморфизмов

<u>I.I. Перенесение основных операций алгебры над отображениями</u>. Пусть дана некоторая алгебра $\mathfrak{G} = \langle G, \Omega \rangle$. Будем рассматривать полные отображения множества G в себя. Для отображений множества G в себя помимо операции умножения отображений можно определить и все операции из Ω. Понятно, что эти операции можно определить разными способами. Самым естественным определением операций из Ω над отображениями множества G в себя является следующее (см. [3]). Пусть даны отображения α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ множества G в себя, n-арная операция $\omega \in \Omega$, тогда $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \omega$ будет отображение, которое для любого $g \in G$ определяется по формуле

$$g(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \omega) = g\alpha_1\, g\alpha_2 \ldots g\alpha_n\, \omega . \tag{I}$$

Если произведение двух эндоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}$, как отображений множества G, является эндоморфизмом той же алгебры, то, как правило, нельзя то же самое оказать об операциях $\omega \in \Omega$. Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – эндоморфизмы алгебры $\mathfrak{G}$, то отображение $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \omega$, полученное по формуле (I), не всегда является эндоморфизмом алгебры $\mathfrak{G}$. Одним из достаточных условий замкнутости множества всех эндоморфизмов алгебры $\mathfrak{G} = \langle G, \Omega \rangle$ относительно всех операций из Ω, определенных по формуле (I), которое для свободных алгебр является и необходимым, является так называемый закон перестановочности операций (см., например, [20], с.32, [14]); т.е. согласованность ω_1 и ω_2 (п.I.6.3):

$$\begin{gathered} x_{11} x_{12} \ldots x_{1n} \omega_1\, x_{21} x_{22} \ldots x_{2n} \omega_1 \ldots x_{m1} x_{m2} \ldots x_{mn} \omega_1 \omega_2 = \\ = x_{11} x_{21} \ldots x_{m1} \omega_2\, x_{12} x_{22} \ldots x_{m2} \omega_2 \ldots x_{1n} x_{2n} \ldots x_{mn} \omega_2 \omega_1 , \end{gathered} \tag{2}$$

где ω_1 и ω_2 – произвольные (включая случай $\omega_1 = \omega_2$).

Однако не исключена и возможность какого-то другого пути перенесения основных операций над эндоморфизмами.

I.2. Определение операций над эндоморфизмами свободных алгебр. Естественный интерес представляют те классы алгебр, на эндоморфизмы которых каким-то способом можно переносить операции данной алгебры. Соответствующим примером служит изучаемый нами класс алгебр свободных в себе.

Пусть $V(\mathcal{Y})$ множество всех эндоморфизмов свободной алгебры $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$. Так как каждый эндоморфизм такой алгебры полностью определяется отображением множества $X = \{x_i, i \in I\}$ в G, следовательно, и множества I в G, то каждый эндоморфизм представляет собой функцию (см.п.I.I.7) с множеством определения I и множеством значений, содержащихся в G. Отсюда получаем, что множество эндоморфизмов такой алгебры совпадает с декартовой степени G^I. Но (см.п.I.6.6) в таком множестве можно определить (покомпонентно) все операции из Ω и, таким образом, получаем алгебру $\mathcal{Y}^I = \langle G^I, \Omega \rangle$. Покомпонентное выполнение операций в данном случае означает, что если даны эндоморфизмы $\alpha_j : x_i \longrightarrow g_{ij}$, т.е. $x_i \alpha_j = g_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и $\omega \in \Omega$ n-арная операция, то $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \omega$ будет эндоморфизм, являющийся продолжением отображения $x_i \longrightarrow g_{i1}\, g_{i2} \ldots g_{in}\, \omega = x_i \alpha_1\, x_i \alpha_2 \ldots x_i \alpha_n\, \omega$, другими словами, для любого $i \in I$ имеет место

$$x_i \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = x_i \alpha_1\, x_i \alpha_2 \ldots x_i \alpha_n\, \omega, \tag{3}$$

т.е. соотношение (I) имеет место для всех свободных образующих $x_i \in X$.

Такое перенесение основных операций над эндоморфизмами имеется для случая групп в работе Х. Нейман [43].

Таким образом, множество $V(\mathcal{Y})$ всех эндоморфизмов свободной алгебры $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$ становится алгеброй $\mathcal{V} = \langle V; \Omega' \rangle = \langle V; \Omega, \cdot \rangle$, сигнатура которой Ω' содержит сигнатуру Ω основной алгебры $\mathcal{Y}$ и еще операцию умножения эндоморфизмов. В алгебре $\mathcal{V}$ можно выделить отдельные подалгебры, которые, из определенных точек зрения, могут представлять самостоятельный предмет изучения. Одной из таких подалгебр является алгебра ограниченных эндоморфизмов, которая изучается ниже.

I.3. Алгебра ограниченных эндоморфизмов. В дальнейшем в этой главе будем изучать свободную алгебру $\mathcal{Y} = \langle G, \Omega \rangle$ со счетным числом свободных образующих, т.е. $X = \{x_i, i \in I\}$, где

I - счетное множество (можем считать, что I есть множество натуральных чисел $I=\{1,2, \ldots, n, \ldots\}$), сигнатура которой содержит нульарную операцию, отмечаемый элемент которой обозначим через e, или существует такая производная операция $e(x)$, удовлетворяющая тождеству $e(x)=e(y)=e$, так что для некоторой p-арной операции, $p\geqslant 2, \omega_0 \in \Omega$, для каждого места справедливо

$$e \ldots e x e \ldots e \omega_0 = x . \tag{4}$$

Кроме того, для любой операции $\omega \in \Omega$ имеет место

$$e \ldots e \omega = e . \tag{5}$$

Будем называть такие алгебры поляризованными алгебрами (см. [23]) с ω_0-единицей e, или унитарно-поляризованными алгебрами, а элемент e ω_0- единицей алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Эндоморфизм $\alpha \in V(\mathcal{G})$ называется ограниченным, если для конечного $J(\alpha)$, $J(\alpha) \subseteq I$ имеем

$$x_j \alpha = g_j \text{ , при } j \in J(\alpha) \quad \text{и} \quad x_i \alpha = e \text{ , при } i \notin J(\alpha),$$

т.е. это эндоморфизмы, которые только конечное число свободных образующих отображают в элементы, отличные от e.

Обозначим через $L = L(\mathcal{G})$ множество всех ограниченных эндоморфизмов алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$. Если $\alpha, \beta \in L$, то их произведение $\alpha\beta$ также принадлежит L. В самом деле, для $i \in I$ имеем $x_i(\alpha\beta) = (x_i\alpha)\beta = g_i\beta$. Если $i \notin J(\alpha)$, то $x_i(\alpha\beta) = (x_i\alpha)\beta = e\beta = e$. Следовательно, $\alpha\beta \in L$, причем $J(\alpha\beta) \subseteq J(\alpha)$. Дальше, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ и ω n-арная операция, то $\alpha_1 \ldots \alpha_n \omega \in L$. Пусть $J_k = J(\alpha_k)$ конечные множества, такие, что если $i \in I \setminus J_k$, то $x_i \alpha_k = e$, $k=1,\ldots,n$. Тогда $J = \bigcup_{k=1}^{n} J_k$ будет конечным множеством и, если $i \in I \setminus J$, то

$$x_i \alpha_1 \ldots \alpha_n \omega = x_i\alpha_1 \ldots x_i \alpha_n \omega = e \ldots e\omega = e,$$

следовательно, $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \omega \in L$.

Таким образом, получаем алгебру $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$, которая является подалгеброй алгебры $\mathcal{V} = \langle V, \Omega' \rangle$.

§ 2. Левые идеалы алгебры ограниченных эндоморфизмов

2.1. Связь между левыми идеалами алгебры эндоморфизмов и подалгебрами основной алгебры. Под левым (правым, двусторонним) идеалом алгебры $\mathcal{L}$ понимается левый (правый, двусторонний) идеал полугруппы $\langle L, \cdot \rangle$, являющийся подалгеброй алгебры $\mathcal{L}$.

ТЕОРЕМА I. Если множество эндоморфизмов $\alpha \subseteq L$ является левым идеалом алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$, то множество M_α является подалгеброй алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$.

Пусть даны n-арная операция $\omega \in \Omega$ и элементы $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M_\alpha$. Тогда существуют такие $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ и эндоморфизмы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \alpha$, что $g_k \alpha_k = m_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через α_g^j эндоморфизм, для которого $x_j \alpha_g^j = g$ и $x_i \alpha_g^j = e$ при $i \neq j$. Берем эндоморфизмы $\alpha_{g_k}^1$, для которых $x_1 \alpha_{g_k}^1 = g_k$, а при $i \neq 1$, $x_i \alpha_{g_k}^1 = e$. Тогда, так как α левый идеал, имеем $\alpha_{g_k}^1 \alpha_k \in \alpha$. Заметим, что $x_1(\alpha_{g_k}^1 \alpha_k) = (x_1 \alpha_{g_k}^1)\alpha_k = g_k \alpha_k = m_k$, а если $i \neq 1$ $x_i(\alpha_{g_k}^1 \alpha_k) = (x_i \alpha_{g_k}^1)\alpha_k = e\alpha_k = e$, т.е. $\alpha_{g_k}^1 \alpha_k = \alpha_{g_k}^1 \alpha_k = \alpha_{m_k}^1 \in \alpha$. Тогда, так как α подалгебра алгебры $\mathcal{L}$, то $\alpha_{m_1}^1 \alpha_{m_2}^1 \ldots \alpha_{m_n}^1 \omega \in \alpha$, т.е. $\mathcal{G}(\alpha_{m_1}^1 \alpha_{m_2}^1 \ldots \alpha_{m_n}^1 \omega) \subseteq M_\alpha$, отсюда $x_1(\alpha_{m_1}^1 \alpha_{m_2}^1 \ldots \alpha_{m_n}^1 \omega) = x_1 \alpha_{m_1}^1 \, x_1 \alpha_{m_2}^1 \ldots x_1 \alpha_{m_n}^1 \omega = m_1 m_2 \ldots m_n \omega \in M_\alpha$, т.е. M_α – подалгебра.

Обратная теорема, вообще говоря, не имеет места.

Например, берем $\mathcal{R} = \mathcal{R}_G \cap L$ ($\mathcal{R}_G$ – разреженный идеал полугруппы $V(\mathcal{G})$, соответствующий эндомножеству $M = G$ (п.Ш.2.I). $\mathcal{R}$ состоит из всех эндоморфизмов из L, отображающих G в циклические подалгебры. В качестве $\mathcal{G}$ берем нециклическую свободную группу. Тогда $M_{\mathcal{R}} = G$ и эндоморфизмы $\alpha_{x_1}^1$ и $\alpha_{x_2}^2$ принадлежат $\mathcal{R}$, однако эндоморфизм $\alpha = \alpha_{x_1}^1 \cdot \alpha_{x_2}^2$ не принадлежит $\mathcal{R}$. В самом деле,

$$x_1 \alpha = x_1(\alpha_{x_1}^1 \cdot \alpha_{x_2}^2) = x_1 \alpha_{x_1}^1 \cdot x_1 \alpha_{x_2}^2 = x_1 \cdot e = x_1 ,$$

$$x_2 \alpha = x_2 (\alpha_{x_1}^1 \cdot \alpha_{x_2}^2) = x_2 \alpha_{x_1}^1 \cdot x_2 \alpha_{x_2}^2 = e \cdot x_2 = x_2 ,$$

во x_1 и x_2 не содержатся ни в одной циклической подгруппе, так как они порождают в $\mathcal{Y}$ свободную подгруппу с двумя свободными образующими.

Однако, если $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^L_M = \mathfrak{A}_M \cap L$, т.е. $\mathfrak{A}$ состоит из всех эндоморфизмов $\alpha \in L$, отображающих алгебру $\mathcal{Y}$ в M, то имеет место

ТЕОРЕМА 2. Подмножество $\mathfrak{A}^L_M \subseteq L$ является левым идеалом алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$ тогда и только тогда, когда M – подалгебра алгебры $\mathcal{Y}$.

Если $\mathfrak{A}^L_M$ подалгебра алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$, то из теоремы I следует, что M – подалгебра алгебры $\mathcal{Y}$.

Пусть M – подалгебра алгебры $\mathcal{Y}$. Тогда $\mathfrak{A}^L_M$ не пусто, так как содержит во всяком случае эндоморфизмы $\alpha^{i_0}_m$, для которых $i_0 \in I$ и $m \in M$. Кроме того, если $\alpha \in \mathfrak{A}^L_M$ и $\beta \in L$, то $G(\beta\alpha) = (G\beta)\alpha \subseteq G\alpha \subseteq M$, т.е. $\mathfrak{A}^L_M$ – левый идеал полугруппы $\langle L, \cdot \rangle$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{A}^L_M$ и $\omega \in \Omega$ некоторая n-арная операция. Обозначим $x_i \alpha_k = m_{ik}$ здесь только для конечного множества значений i, $m_{ik} \neq e$. Тогда для любого $i \in I$

$$x_i(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \omega) = x_i\alpha_1\, x_i\alpha_2 \ldots x_i\alpha_n\, \omega = m_{i1}\, m_{i2} \ldots m_{in}\, \omega \in M,$$

т.е. $\mathcal{Y}(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\omega) \subseteq M$, отсюда, так как $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\omega \in L$, следует, что $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\omega \in \mathfrak{A}^L_M$. Таким образом, $\mathfrak{A}^L_M$ – подалгебра алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$.

2.2. Частичное суммирование эндоморфизмов. Операция частичного суммирования эндоморфизмов определена лишь для некоторых совокупностей эндоморфизмов вида α^j_a, т.е. таких, для которых $x_j\alpha^j_a = a$ и $x_i\alpha^j_a = e$ при $i \neq j$. Именно, пусть $J \subseteq I$ – некоторое конечное подмножество множества I и для каждого $j \in J$ взят единственный эндоморфизм $\alpha^j_{a_j}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Частичной суммой $\sum_{j \in J} \alpha^j_{a_j} = \alpha^{j_1}_{a_{j_1}} + \alpha^{j_2}_{a_{j_2}} + \ldots + \alpha^{j_t}_{a_{j_t}}$, где $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_t\}$, эндоморфизмов $\alpha^j_{a_j}$, $j \in J$, называется эндоморфизм α, для которого $x_j\alpha = a_j$ при $j \in J$ и $x_i\alpha = e$, при $i \notin J$.

ТЕОРЕМА. Левый идеал $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$ замкнут относительно частичных сумм тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^L_M$, для некоторой подалгебры $M \subseteq \mathcal{Y}$.

Пусть $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^L_M$, где M подалгебра и J конечное подмножество $J \subseteq I$, и $\alpha_{m_j}, m_j \in M$ совокупность эндоморфизмов, для которых определена частичная сумма. Пусть $\sum\limits_{j\in J} \alpha^j_{m_j} = \alpha$. Согласно определению частичной суммы, $x_j \alpha = m_j$ для $j \in J$ и $x_i \alpha = e$, для $i \bar{\in} J$. Для любого $g \in G$ берем некоторое его выражение через свободные образующие $g = w(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = w(x_s)$, $s = i_1, i_2, \ldots, i_k$. Тогда $g\alpha = w(x_s)\alpha = w(x_s\alpha) = w(m_s)$, здесь $m_s = m_j$ при $s = j \in J$ и $m_s = e$ при $s \bar{\in} J$. Так как e принадлежит любой подалгебре алгебры $\mathcal{G}$, то $w(m_s) \in M$, следовательно, $\alpha \in \mathfrak{a}^L_M$. Обратно, пусть $\mathfrak{a}$ левый идеал алгебры $\mathcal{L}$ замкнут относительно частичных сумм и $\alpha \in L$ такое, что $G\alpha \subseteq M$. Обозначим $x_j \alpha = m_j$ для всех $j \in J \subseteq I$, для которых $x_j \alpha \neq e$. Тогда легко видеть, что $\alpha = \sum\limits_{j\in J} \alpha^j_{m_j}$. Так как $M_{\mathfrak{a}} = M$, то для каждого m_j существует эндоморфизм α_j такой, что для некоторого $g_j \in G$ имеет место $g_j \alpha_j = m_j$ и $\alpha_j \in \mathfrak{a}$. Берем эндоморфизм γ, для которого $x_j \gamma = g_j$ и $x_i \gamma = e$ при $i \neq j$. Тогда $x_j(\gamma\alpha_j) = (x_j\gamma)\alpha_j = g_j \alpha_j = m_j$, а при $i \neq j$, $x_i(\gamma\alpha_j) = (x_i\gamma)\alpha_j = e\alpha_j = e$, т.е. $\gamma\alpha_j = \alpha^j_{m_j}$, и так как $\mathfrak{a}$ левый идеал полугруппы $\langle L, \cdot \rangle$, то $\alpha^j_{m_j} \in \mathfrak{a}$. По условию $\mathfrak{a}$ замкнут относительно частичных сумм, следовательно, $\alpha = \sum\limits_{j\in J} \alpha^j_{m_j} \in \mathfrak{a}$, т.е. $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^L_M$. Осталось показать, что $\mathfrak{a}^L_M$ замкнут относительно всех операций $\omega \in \Omega$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{a}^L_M$ и $\omega \in \Omega$, некоторая n-арная операция. Покажем, что $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \omega \in \mathfrak{a}^L_M$. Пусть $x_i \alpha_j = a_{ij}$, $i \in I$. Заметим, что для каждого $j = 1, \ldots, n$ имеется конечное множество $I_j \subseteq I$ такое, что только при $i \in I_j$, $a_{ij} \neq e$. Тогда

$$x_i \alpha = x_i(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \omega) = x_i\alpha_1\, x_i\alpha_2 \ldots x_i\alpha_n \omega = a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{in} \omega.$$

Причем, учитывая (5) из п.I.3 лишь для $i \in \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$, может быть $x_i \alpha \neq e$. Обозначим через ε^k_s эндоморфизм $\alpha^k_{x_s}$, т.е. для которого $x_k \varepsilon^k_s = x_s$ и $x_i \varepsilon^k_s = e$ при $i \neq k$. Тогда $x_k \varepsilon^k_s \alpha_j = x_s \alpha_j = a_{sj}$, и при $k \neq i$, $x_i \varepsilon^k_s \alpha_j = e\alpha_j = e$, т.е. $\varepsilon^k_s \alpha_j = \alpha^k_{a_{sj}}$. Учитывая, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^L_M$ левый идеал полугруппы $\langle L, \cdot \rangle$, получим $\alpha^k_{a_{sj}} \in \mathfrak{a}$. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – попарно различные элементы из I, тогда эндоморфизмы $\alpha^{k_1}_{a_{i1}}, \alpha^{k_2}_{a_{i2}}, \ldots, \alpha^{k_n}_{a_{in}}$ принадлежат $\mathfrak{a}$ для каждого i и поскольку $\mathfrak{a}$ замкнут относительно частичных сумм, то

$$\beta=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{a_{ij}}^{k_j}=\alpha_{a_{i1}}^{k_1}+\alpha_{a_{i2}}^{k_2}+\ldots+\alpha_{a_{in}}^{k_n}\in\mathfrak{a}.$$

Для каждого $i\in I_0=\bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$ строим эндоморфизмы

$$\alpha^{i}=\alpha^{i}_{x_{k_1}\,x_{k_2}\ldots x_{k_n}\,\omega}\,\beta\in\mathfrak{a}.$$

Учитывая определение β и частичных сумм, имеем

$$\alpha^{i}=\alpha^{i}_{x_{k_1}\,x_{k_2}\ldots x_{k_n}\,\omega}\,\beta=\alpha^{i}_{x_{k_1}\,x_{k_2}\ldots x_{k_n}\,\omega\beta}=\alpha^{i}_{x_{k_1}\beta\,x_{k_2}\beta\ldots x_{k_n}\beta\,\omega}=$$

$$=\alpha^{i}_{x_{k_1}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{a_{ij}}^{k_j}\,x_{k_2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{a_{ij}}^{k_j}\ldots x_{k_n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{a_{ij}}^{k_j}\,\omega}=\alpha^{i}_{a_{i1}\,a_{i2}\ldots a_{in}\,\omega}.$$

Тогда для эндоморфизма $\alpha=\sum\limits_{i\in I_0}\alpha^{i}=\sum\limits_{i\in I_0}\alpha^{i}_{a_{i1}\,a_{i2}\ldots a_{in}\,\omega}$ имеем для $i\,\overline{\in}\,I_0$ $x_i\alpha=x_i\sum\limits_{i\in I_0}\alpha^{i}=e$, а при $i\in I_0$

$$x_i\alpha=x_i\sum_{i\in I_0}\alpha^{i}=x_i\sum_{i\in I_0}\alpha^{i}_{a_{i1}\,a_{i2}\ldots a_{in}\,\omega}=x_i\,\alpha^{i}_{a_{i1}\,a_{i2}\ldots a_{in}\,\omega}=$$

$$=a_{i1}\,a_{i2}\ldots a_{in}\,\omega=x_i\alpha_1\,x_i\alpha_2\ldots x_i\alpha_n\,\omega=x_i\,(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\,\omega),$$

следовательно,

$$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\,\omega.$$

Так как $\mathfrak{a}$ замкнут относительно частичных сумм, то $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\,\omega\in\mathfrak{a}$, отсюда $M=M_{\mathfrak{a}}$ – подалгебра алгебры $\mathcal{G}$. Заметим, что в доказательстве теорем данного параграфа не использованы тождества (4) из п.I.3, а также, что эти теоремы имеют место и для левых идеалов алгебры $\mathcal{V}=\langle V,\ \Omega'\rangle$ при условии, что в определении частичных сумм J может быть любое подмножество I.

§ 3. Структура левых идеалов алгебры эндоморфизмов поляризованных свободных алгебр

3.I. Подалгебры алгебры эндоморфизмов. Для поляризованных алгебр $\mathcal{G}=\langle G\ ,\ \Omega\rangle$, т.е. для которых имеется p-арная операция $\rho \geqslant 2$, $\omega_0 \in \Omega$, что выполняются тождества (4) из п.I.3, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА I. Если подмножество $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$ замкнуто относительно операции ω_0, то оно замкнуто и относительно частичных сумм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_{m_s}^{k_s} \in \mathfrak{A}$, $s=1,2,\dots,t$ такие, что частичная сумма $\sum\limits_{s=1}^{t} \alpha_{m_s}^{k_s}$ определена. Добавляя некоторое число "нулевых" эндоморфизмов α_e, для которых $x_i\,\alpha_e = e$ для всех $i \in I$, можно добиться, чтобы число слагаемых t имело вид ρ^m для некоторого m, при этом частичная сумма, $\sum\limits_{s=1}^{t=\rho^m} \alpha_{m_s}^{k_s}$, очевидно, не меняет своего значения. Составим выражение $w(\alpha_{m_s}^{k_s})$ следующим образом. Выпишем все $\alpha_{m_s}^{k_s}$ в некотором порядке. Через каждые ρ знаков эндоморфизмов $\alpha_{m_s}^{k_s}$ ставим знак операции ω_0, через каждые ρ знаков операции ω_0, или, что то же самое, через каждые ρ^2 знаков эндоморфизмов $\alpha_{m_s}^{k_s}$ ставим рядом с имеющимся еще один знак операции ω_0, потом через каждые ρ знаков операции ω_0, поставленных во вторую очередь, или через каждые ρ^3 знаков эндоморфизмов ставим рядом с имеющимися еще один знак операции ω_0 и так далее. Очевидно, что процесс закончится через m шагов. Таким образом, получаем некоторое выражение $w(\alpha_{m_s}^{k_s})$ от $\alpha_{m_s}^{k_s}$, которое ввиду того, что множество $\mathfrak{A}$ замкнуто относительно операции ω_0, принадлежит подмножеству $\mathfrak{A}$. Докажем, что

$$w(\alpha_{m_s}^{k_s}) = \sum_{s=1}^{t} \alpha_{m_s}^{k_s}. \tag{I}$$

Учитывая равенства (3) п.I.2 можем писать

$$x_i\, w(\alpha_{m_s}^{k_s}) = w(x_i\,\alpha_{m_s}^{k_s}).$$

Для любого $i \in I$. При этом, если $i \bar{\in} \{k_1, k_2, \dots, k_t\}$, то используя (5) п.I.3 получаем

$$x_i\, w(\alpha_{m_s}^{k_s}) = w(x_i\,\alpha_{m_s}^{k_s}) = w(e) = e.$$

Если же $i \in \{k_1, k_2, \dots, k_t\}$, т.е. $i = k_{s_0}$, то в выражении $w(x_i\,\alpha_{m_s}^{k_s})$ лишь на одном месте будет стоять m_{s_0}, а на всех остальных местах e, тогда из соотношений (4) и (5) п.I.3 получаем $x_{k_{s_0}}\, w(\alpha_{m_s}^{k_s}) = m_{s_0}$. Но точно такие же компоненты имеет и эндоморфизм, равный частичной сумме $\sum\limits_{s=1}^{t} \alpha_{m_s}^{k_s}$, следовательно, имеет место равенство (I), таким образом, $\sum\limits_{s=1}^{t} \alpha_{m_s}^{k_s} \in \mathfrak{A}$.

Из доказанной теоремы и теоремы п.2.2 получаем

ТЕОРЕМА 2. Левый идеал $\mathfrak{a}$ полугруппы $\langle L, \cdot \rangle$, который замкнут относительно операции ω_0, является левым идеалом алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$.

3.2. Описание структуры левых идеалов алгебры ограниченных эндоморфизмов. Скажем, что левый идеал $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$ принадлежит множеству M, если $M_{\mathfrak{a}} = M$. Из теоремы I п.2.I следует, что если левый идеал $\mathfrak{a}$ принадлежит множеству M, то M подалгебра алгебры $\mathcal{G}$. Дальше, если $\mathcal{G}$ поляризованная алгебра, то $\mathfrak{a}$ как подалгебра будет замкнут относительно операции ω_0, тогда из теоремы I п.3.I следует, что $\mathfrak{a}$ замкнут относительно частичных сумм, отсюда, в силу теоремы п.2.2, следует, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^L_M$. Таким образом, имеет место теорема.

ТЕОРЕМА I. Каждой подалгебре $M \subseteq \mathcal{G}$ поляризованной алгебры $\mathcal{G}$ принадлежит единственный левый идеал алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$ именно, это будет идеал $\mathfrak{a}^L_M$, состоящий из всех эндоморфизмов $\alpha \in L$, для которых $G\alpha \subseteq M$.

Таким образом, установлено взаимно-однозначное соответствие между подалгебрами алгебры $\mathcal{G}$ и левыми идеалами алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$.

ТЕОРЕМА 2. Полные структуры подалгебр алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$ и левых идеалов алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$ изоморфны.

Каждому левому идеалу $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$ ставим в соответствие подалгебру M, которой он принадлежит, так что $M = M_{\mathfrak{a}}$, при этом $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^L_M$, и, согласно предыдущей теореме, это соответствие взаимно-однозначно. Пусть $\mathfrak{a}_j$, $j \in J$ – некоторое семейство левых идеалов алгебры $\mathcal{L}$ и M_j – соответствующие им подалгебры алгебры $\mathcal{G}$. Покажем, что левому идеалу $\mathfrak{a} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{a}_j$ соответствует подалгебра $M = \bigcap_{j \in J} M_j$, т.е. что $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^L_M$. Пусть $\alpha \in \mathfrak{a}^L_M$, тогда $G\alpha \subseteq M$, следовательно, $G\alpha \subseteq M_j$ для всех $j \in J$, но тогда $\alpha \in \mathfrak{a}^L_{M_j} = \mathfrak{a}_j$, для каждого $j \in J$, откуда $\alpha \in \bigcap_{j \in J} \mathfrak{a}_j = \mathfrak{a}$, т.е. $\mathfrak{a}^L_M \subseteq \mathfrak{a}$. Пусть теперь $\alpha \in \mathfrak{a} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{a}_j$, тогда $\alpha \in \mathfrak{a}_j$ для всех $j \in J$, следовательно, $G\alpha \subseteq M_j$ для каждого $j \in J$, т.е. $G\alpha \subseteq \bigcap_{j \in J} M_j = M$. Отсюда получаем, что $\alpha \in \mathfrak{a}^L_M$, т.е. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^L_M$. Итак, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_M$. Таким образом, установленное соответствие сохраняет пересечения.

Обозначим теперь через $\mathfrak{a}_t$, $t \in T$ множество всех левых идеалов алгебры $\mathcal{L}$, каждый из которых содержит все левые идеалы $\mathfrak{a}_j, j\in J$, и через M_t, $t\in T$ соответствующие им подалгебры алгебры $\mathcal{Y}$. Тогда из доказанного левому идеалу $\mathfrak{a}'=\bigcap_{t\in T}\mathfrak{a}_t$ соответствует подалгебра $M'=\bigcap_{t\in T}M_t$. Но $\mathfrak{a}'$ есть не что иное, как левый идеал, порожденный левыми идеалами $\mathfrak{a}_j$, и M' – подалгебра, порожденная подалгебрами M_j, $j\in J$. Таким образом, указанное соответствие между идеалами и подалгебрами сохраняет и объединения, откуда следует изоморфизм этих структур.

§ 4. Структура правых идеалов алгебры ограниченных эндоморфизмов

ТЕОРЕМА. Структура правых идеалов алгебры $\mathcal{L}=\langle L,\Omega\rangle$ изоморфна структуре всех подалгебр прямой степени $\mathcal{Y}^I$, каждая компонента которых является вполне характеристической.

(Прямая степень здесь понимается как множество всех последовательностей (a_i), $i\in I$ элементов из $\mathcal{Y}$, среди которых лишь конечное число отлично от e).

Пусть $\mathfrak{a}$ правый идеал алгебры $\mathcal{L}$. Обозначим через $A_{\mathfrak{a}}$ множество всех последовательностей (a_i), $i\in I$, для которых существует $\alpha\in\mathfrak{a}$ так, что $x_i\alpha=a_i$. Покажем, что $A_{\mathfrak{a}}$ является подалгеброй алгебры $\mathcal{Y}^I$. Пусть $\omega\in\Omega$ n-арная операция и (a_{ij}), $i\in I$, $j=1,2,\ldots,n$, где $x_i\alpha_j=a_{ij}$, для некоторых $\alpha_j\in\mathfrak{a}$ n элементов из $A_{\mathfrak{a}}$. Тогда $(a_{i1})(a_{i2})\ldots$ $\ldots(a_{in})\omega=(a_{i1}a_{i2}\ldots a_{in}\omega)=(x_i\alpha_1\, x_i\alpha_2\ldots x_i\alpha_n\,\omega)=(x_i\cdot\alpha_1\alpha_2\ldots$ $\ldots\alpha_n\omega)=(x_i\alpha)$, для $\alpha\in\mathfrak{a}$, следовательно, $(a_{i1})(a_{i2})\ldots$ $\ldots(a_{in})\omega\in A_{\mathfrak{a}}$. Обозначим через N_{i_0} i_0-тую компоненту $A_{\mathfrak{a}}$, т.е. множество всех $a\in G$, для которых существует последовательность $(a_i)\in A_{\mathfrak{a}}$, так что на i_0-том месте стоит элемент a. Покажем, что для любого эндоморфизма $\beta\in L$ имеем $N_{i_0}\beta\leq N_{i_0}$. Пусть $a\in N_{i_0}$ и пусть $(a_i)\in A_{\mathfrak{a}}$ последовательность, на i_0-том месте которой стоит a. По условию существует $\alpha\in\mathfrak{a}$ так, что $x_i\alpha=a_i$, в частности, $x_{i_0}\alpha=a$. По условию $\alpha\beta\in\mathfrak{a}$, следовательно, $x_{i_0}\alpha\beta=a\beta\in N_{i_0}$, что и требовалось. С другой стороны, если для данной такой подалгебры $A\leq$ $\leq\mathcal{Y}^I$ обозначить через $\mathfrak{a}$ множество всех эндоморфизмов α, для которых $(x_i\alpha)\in A$, то $\mathfrak{a}$ – правый идеал и ему будет соответствовать $A=A_{\mathfrak{a}}$ в указанном выше смысле, следовательно, установленное соответствие является взаимно-однозначным. Если теперь $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2$, то для соответствующих подалгебр будем иметь $A_{\mathfrak{a}_1} \subset A_{\mathfrak{a}_2}$, так как если $\alpha \in \mathfrak{a}_2 \setminus \mathfrak{a}_1$, то $(x_i \alpha) \in A_{\mathfrak{a}_2} \setminus A_{\mathfrak{a}_1}$, и обратно. Отсюда следует, что рассматриваемые структуры изоморфны.

§ 5. Структура двусторонних идеалов алгебры ограниченных эндоморфизмов

ТЕОРЕМА I. Подмножество $\mathfrak{a} \subseteq L$ является двусторонним идеалом алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$ тогда и только тогда, когда соответствующее ему подмножество (как левому идеалу) $M_{\mathfrak{a}} \subseteq G$ является вполне характеристической подалгеброй алгебры $\mathcal{G}$.

Пусть $\mathfrak{a}$ – двусторонний идеал алгебры $\mathcal{L} = \langle L, \Omega' \rangle$. Тогда, так как $\mathfrak{a}$ – левый идеал, то $M = M_{\mathfrak{a}}$ является подалгеброй в $\mathcal{G}$. Дальше, для любого $m \in M$ существует $\alpha \in \mathfrak{a}$ и $g \in G$ такие, что $g\alpha = m$, и так как $\mathfrak{a}$ – правый идеал, то при любом $\beta \in L$ имеем $m\beta = (g\alpha)\beta = g(\alpha\beta) = g\alpha'$, где $\alpha' \in \mathfrak{a}$, следовательно, $g\alpha' = m' \in M$, т.е. M – вполне характеристическая подалгебра.

Обратно, если M – вполне характеристическая подалгебра, т.е. для любого $\beta \in L$, $M\beta \subseteq M$, то при любых $\alpha \in \mathfrak{a}$ и $i \in I$ имеем $x_i(\alpha\beta) = (x_i\alpha)\beta = m_i\beta = m_i' \in M$, т.е. $\alpha\beta \in \mathfrak{a}$.

Отсюда и из теорем I,2 п.3.2 получаем теорему

ТЕОРЕМА 2. Структура всех двусторонних идеалов алгебры $\mathcal{L}$ изоморфна структуре всех вполне характеристических подалгебр алгебры $\mathcal{G}$.

Ряд теорем, полученных в этой главе, являются обобщениями соответствующих теорем из [28], доказанных там для групп.

ДОПОЛНЕНИЕ I

ОДНА ОБЩАЯ СХЕМА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ИДЕАЛОВ ПОЛУГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

I. Основные определения. Пусть $\mathcal{Y}=\langle G, \Omega\rangle$, где Ω – совокупность отношений, определенных на G,– некоторая модель (реляционная система). Пусть $V(\mathcal{Y})$ – некоторая полугруппа бинарных отношений (подполугруппа полугруппы всех бинарных отношений множества G), которые как-то связаны с основными отношениями модели $\mathcal{Y}$ и которые будем называть преобразованиями модели $\mathcal{Y}$. Например, $V(\mathcal{Y})$ может быть полугруппой полных эндоморфизмов некоторой алгебры или модели, частичных эндоморфизмов, соответствий, всех бинарных отношений множества G, Σ-преобразований (Глускин [44]),которые определяются следующим образом. Будем считать, что множество Ω разбито на два подмножества Ω_1 и Ω_2, которые могут пересекаться, некоторое из них может быть и пустым. Отображение α множества G в себя называется Σ-преобразованием, если для каждого $\omega\in\Omega_1$ существует $\omega'\in\Omega_1$ такой же арности, что если $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\omega$, то $(a_1\alpha, a_2\alpha, \ldots, a_n\alpha)\in\omega'$, и для каждого $\sigma\in\Omega_2$ существует $\sigma'\in\Omega_2$ такой же арности, что если $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in\sigma'$, то $(a_1\alpha, a_2\alpha, \ldots, a_n\alpha)\in\sigma$.

2. Структура эндомножеств. Пусть дана модель $\mathcal{Y}=\langle G, \Omega\rangle$ и $V(\mathcal{Y})$– некоторая полугруппа преобразований. Для каждого множества $M\subseteq G$ определим внутреннее замыкание как объединение всех эндоморфных образов $G\alpha\subseteq M$, для $\alpha\in V(\mathcal{Y})$. Так как различные эндоморфные образы могут иметь пустое пересечение, или пересечение эндоморфных образов может не содержать никакого эндоморфного образа, для некоторого удобства будем дополнять множество всех эндоморфных образов пустым множеством. Легко проверяются условия 1^I, 2^I, 3^I из определения козамыкания (п.I.4.6). Козамкнутые множества, которые, как легко видеть, представляют собой теоретико-множественные объединения эндоморфных мно-

жеств, будем называть эндомножествами. Применяя к данному случаю результаты п.I.4.6, получаем:

ТЕОРЕМА. Множество H всех эндомножеств модели $\mathcal{Y}=\langle G,\Omega\rangle$ относительно полугруппы $V(\mathcal{Y})$ является полной структурой, причем наименьшая верхняя грань совпадает с теоретико-множественным объединением.

Обозначим пересечение в структуре H знаком $\wedge$.

3. Структура насыщенных идеалов. Для каждого $M\in H$ обозначим через $\mathfrak{A}_M$ множество всех преобразований $\alpha\in V(\mathcal{Y})$, для которых $\mathcal{Y}\alpha\subseteq M$. Тогда множество $\mathfrak{A}_M$ является левым идеалом полугруппы $V(\mathcal{Y})$. В самом деле, если $\alpha\in\mathfrak{A}_M$ и $\beta\in V(\mathcal{Y})$, то для любого $a\in G$ имеем

$$a(\beta\alpha)=(a\beta)\alpha=b\alpha\in M.$$

Следовательно, $\beta\alpha\in\mathfrak{A}_M$. Левые идеалы вида $\mathfrak{A}_M$ называются насыщенными.

Из определения насыщенных идеалов следует, что каждому $M\in H$ соответствует единственный насыщенный левый идеал $\mathfrak{A}_M$. Покажем, что $M_1\neq M_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_{M_1}\neq\mathfrak{A}_{M_2}$. Если $M_1\neq M_2$, то, по крайней мере, одно из множеств $M_1\setminus M_2$ и $M_2\setminus M_1$ не пусто. Пусть, например, $M_1\setminus M_2\neq\emptyset$, тогда существует $\alpha\in V(\mathcal{Y})$ такое, что $G\alpha\subseteq M_1$, но $G\alpha\nsubseteq M_2$. Тогда $\alpha\in\mathfrak{A}_{M_1}\setminus\mathfrak{A}_{M_2}$, т.е. $\mathfrak{A}_{M_1}\neq\mathfrak{A}_{M_2}$. Обратно, если $\mathfrak{A}_{M_1}\setminus\mathfrak{A}_{M_2}\neq\emptyset$, то для $\alpha\in\mathfrak{A}_{M_1}\setminus\mathfrak{A}_{M_2}$ имеем $G\alpha\subseteq M_1$, но $G\alpha\nsubseteq M_2$, следовательно, $M_1\neq M_2$. Эти рассуждения показывают также, что $M_1\subset M_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_{M_1}\subset\mathfrak{A}_{M_2}$. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА. Множество Π всех насыщенных левых идеалов полугруппы $V(\mathcal{Y})$ является полной структурой, изоморфной полной структуре эндомножеств H.

В структуре Π наибольшая нижняя грань элементов совпадает с их теоретико-множественным пересечением, именно $\bigcap_{j\in J}\mathfrak{A}_{M_j}=\mathfrak{A}_{\bigwedge_{j\in J}M_j}$. Пусть $\alpha\in\bigcap_{j\in J}\mathfrak{A}_{M_j}$, тогда $\alpha\in\mathfrak{A}_{M_j}$ для каждого $j\in J$. Отсюда $G\alpha\subseteq M_j$ для каждого $j\in J$, следовательно, $G\alpha\subseteq\bigwedge_{j\in M_j}M_j$, но в таком случае $\alpha\in\mathfrak{A}_{\bigwedge_{j\in J}M_j}$, т.е. $\bigcap_{j\in J}\mathfrak{A}_{M_j}\subseteq\mathfrak{A}_{\bigwedge_{j\in J}M_j}$. Пусть $\alpha\in\mathfrak{A}_{\bigwedge_{j\in J}M_j}$, тогда $G\alpha\subseteq\bigwedge_{j\in J}M_j$, или $G\alpha\subseteq M_j$, для каждого $j\in J$, отсюда $\alpha\in\mathfrak{A}_{M_j}$ для каждого $j\in J$, следовательно, $\alpha\in\bigcap_{j\in J}\mathfrak{A}_{M_j}$, т.е. $\bigcap_{j\in J}\mathfrak{A}_{M_j}\supseteq\mathfrak{A}_{\bigwedge_{j\in J}M_j}$. Из полученных включений следует требуемое равенство.

Для наименьшей верхней грани такое утверждение не имеет места, следовательно, вообще говоря, структура насыщенных идеалов Π не является подструктурой структуры Σ всех левых идеалов полугруппы $V(\mathcal{Y})$, которая является полной структурой относительно теоретико-множественных операций пересечения и объединения.

4. Обобщенное левое отношение Грина. Если дано множество $\mathfrak{a} \subseteq V(\mathcal{Y})$, то будем писать $M_{\mathfrak{a}} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{a}} G\alpha$. Для каждого $M \in H$ обозначим через Σ_M множество всех левых идеалов $\mathfrak{a} \in \Sigma$, для которых $M_{\mathfrak{a}} = M$, т.е. которые принадлежат множеству M. Каждый класс Σ_M содержит, по крайней мере, один элемент – насыщенный идеал $\mathfrak{a}_M$. Легко видеть, что объединение любой совокупности левых идеалов из Σ_M принадлежит также Σ_M, в частности $\bigcup_{\mathfrak{a} \in \Sigma_M} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_M$.

Разбиение структуры Σ на классы Σ_M определяет некоторое отношение эквивалентности θ на Σ, именно: если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – два левых идеала, то $\mathfrak{a}\theta\mathfrak{b}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a} \in \Sigma_M$ и $\mathfrak{b} \in \Sigma_M$, другими словами, когда $M_{\mathfrak{a}} = M_{\mathfrak{b}} = M$.

Эквивалентность θ согласована с операцией объединения левых идеалов в структуре Σ. Для этого надо показать, что из $\mathfrak{a}_j \theta \mathfrak{b}_j$ следует $\bigcup_j \mathfrak{a}_j \theta \bigcup_j \mathfrak{b}_j$. Мы покажем даже больше, именно, что из $\mathfrak{a}_j \in \Sigma_{M_j}$ следует $\bigcup_j \mathfrak{a}_j \in \Sigma_{\bigcup_j M_j}$. Пусть $\bigcup_j \mathfrak{a}_j \in \Sigma_M$. Тогда $M = M_{\bigcup \mathfrak{a}_j} \supseteq M_{\mathfrak{a}_j} = M_j$ для каждого j, следовательно, $M \supseteq \bigcup_j M_j$. Пусть $a \in M$, тогда существуют $m \in G$ и $\alpha \in \bigcup_j \mathfrak{a}_j$, что $m\alpha = a$, но тогда при некотором j, $\alpha \in \mathfrak{a}_j$, следовательно, $a \in M_{\mathfrak{a}_j} = M_j$, откуда $M \subseteq \bigcup_j M_j$. Итак, $M = \bigcup_j M_j$.

Относительно операции пересечения совокупностей левых идеалов класс Σ_M может быть не замкнут, т.е. левый идеал

$$\mathcal{R}_M = \bigcap_{\mathfrak{a} \in \Sigma_M} \mathfrak{a}$$

может не принадлежать классу Σ_M. Однако для многих важных частных случаев, например для свободных универсальных алгебр, для так называемых "рефлексивных" моделей (т.е. для которых $(a, a, \ldots, a) \in \omega$ для любых $a \in G$ и $\omega \in \Omega$) и др. это условие выполняется. В связи с этим введем условие:

I_I. Каждый класс Σ_A содержит наименьший левый идеал $\mathcal{R}_M$, причем если $M_1 \subset M_2$, то $\mathcal{R}_{M_1} \subset \mathcal{R}_{M_2}$.

Если модель $\mathcal{Y}$ принадлежит классу I_1, то эквивалентность θ согласована и с пересечением левых идеалов, причем $\bigcap_j \alpha_j \in \Sigma_{\bigwedge_j M_j}$, где $\alpha_j \in \Sigma_{M_j}$ (здесь через $\bigwedge_j M_j$ обозначена наибольшая нижняя грань множеств M_j в структуре H; см. п. 2 дополнения).

Пусть $\alpha_j \in \Sigma_{M_j}$ и $\alpha = \bigcap_j \alpha_j$, требуется показать, что $M_\alpha = \bigwedge_j M_j$. Так как $\alpha \subseteq \alpha_j$, то $M_\alpha \subseteq M_j = M_{\alpha_j}$, откуда $M_\alpha \subseteq \bigwedge_j M_j$. С другой стороны, если $M = \bigwedge_j A_j$, то из $M \subseteq M_j$ имеем $R_M \subseteq R_{M_j} \subseteq \alpha_j$ для каждого j, следовательно, $R_M \subseteq \bigcap_j \alpha_j = \alpha$. Но тогда $M_\alpha \geq M_{R_M} = M = \bigwedge_j M_j$, т.е. $M_\alpha = \bigwedge_j M_j$. Из полученных включений следует $M_\alpha = \bigwedge_j M_j$. Таким образом,

Если модель $\mathcal{Y}$ принадлежит классу I_1, то θ является конгруэнцией структуры Σ всех левых идеалов полугруппы $V(\mathcal{Y})$, причем $\Sigma/\theta \cong H$.

Можно показать, что условие I_1 является не только достаточным, но и необходимым, т.е. если разбиение θ является конгруэнцией, то выполняется условие I_1.

В самом деле, если θ является конгруэнцией полной структуры Σ, то $\Sigma/\theta \cong \Pi \cong H$. Кроме того, каждый класс Σ_M является полной подструктурой, следовательно, содержит пересечение всех своих элементов, т.е. $R_M = \bigcap_{\alpha \in \Sigma_M} \alpha \in \Sigma_M$. Пусть $M_1 \subset M_2$, покажем, что $R_{M_1} \subset R_{M_2}$. Так как θ конгруэнция, для которой $\Sigma/\theta \cong H$, то $\alpha = R_{M_1} \cap R_{M_2} \in \Sigma_{M_1 \wedge M_2} = \Sigma_M$. Тогда $\alpha \geq R_M$, потому что R_M – наименьший в классе Σ_M. Но из $\alpha = R_{M_1} \cap R_{M_2}$ следует $\alpha \leq R_{M_1}$. Таким образом, $\alpha = R_{M_1}$, но тогда $R_{M_1} \cap R_{M_2} = R_{M_1}$, следовательно, $R_{M_1} \leq R_{M_2}$. Если $M_1 \neq M_2$, то классы Σ_{M_1} и Σ_{M_2} различны и так как $R_{M_1} \in \Sigma_{M_1}$, $R_{M_2} \in \Sigma_{M_2}$, то и $R_{M_1} \neq R_{M_2}$, т.е. из $M_1 \subset M_2$ следует $R_{M_1} \subset R_{M_2}$.

Для левых идеалов вида R_M имеет место формула $\bigcup_j R_{M_j} = R_{\bigcup_j M_j}$.

В самом деле, так как $M_j \subseteq \bigcup_j M_j$, то при любом j, $R_{M_j} \subseteq R_{\bigcup M_j}$ имеем $\bigcup_j R_{M_j} \subseteq R_{\bigcup_j M_j}$. С другой стороны, $\bigcup_j R_{M_j} \in \Sigma_{\bigcup_j M_j}$, следовательно, $\bigcup_j R_{M_j} \geq R_{\bigcup_j M_j}$, откуда получаем требуемое равенство. Отсюда следует, что множество всех идеалов вида R_M образует полную структуру, т.е. что существует наибольшая нижняя грань $\bigwedge_j R_{M_j}$ для любой совокупности R_{M_j}. Докажем, что $\bigwedge_j R_{M_j} = R_{\bigwedge_j M_j}$. Пусть $\bigwedge_j R_{M_j} = R_M$. Тогда $R_M \subseteq R_{M_j}$, следовательно, $M \subseteq M_j$, откуда $M \subseteq \bigwedge_j M_j$. С другой стороны, $R_M = \bigwedge_j R_{M_j} \in \Sigma_{\bigwedge_j M_j}$, следовательно, $R_M \supseteq R_{\bigwedge_j M_j}$, но тогда $M \supseteq \bigwedge_j M_j$, таким образом, $M = \bigwedge_j M_j$. Итак,

Для всякой модели класса I_1 структура Π насыщенных левых идеалов, структура $\mathfrak{R}$ левых идеалов вида R_M и фактор-структура Σ / θ изоморфны между собой и изоморфны, следовательно, структуре H всех эндомножеств данной модели.

5. Структуры левых идеалов. Обозначим через M' множество всех эндоморфных образов модели $\mathcal{Y}$, т.е. подмножеств вида $G\alpha$, где $\alpha \in V(\mathcal{Y})$, а через M'' - множество всех подмножеств множества M'. Пусть, далее, Q - множество всех тех q из M'', которые вместе с некоторым элементом из M' содержат и все меньшие такие подмножества, т.е. q наследственные совокупности эндоморфных образов.

Легко видеть, что Q является полной структурой - подструктурой структуры M'', следовательно, наибольшей нижней гранью и наименьшей верхней гранью в структуре Q являются соответственно обычные теоретико-множественные пересечения и объединения как подмножеств M''.

Обозначим через I_2 класс моделей, удовлетворяющих условию,

I_2. Если для эндоморфизмов α, β из $V(\mathcal{Y})$ имеет место $G\alpha \subseteq G\beta$, то существует $\eta \in V(\mathcal{Y})$ такой, что $\alpha = \eta\beta$. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА. Структура Σ всех левых идеалов полугруппы эндоморфизмов $V(\mathcal{Y})$ модели $\mathcal{Y}$ класса I_2 изоморфна структуре Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому левому идеалу $\mathfrak{a} \in \Sigma$ ставим в соответствие элемент $s \in M''$, состоящий из всех подмножеств $G\alpha$ для всех $\alpha \in \mathfrak{a}$. Если некоторый $G\alpha \in s$ и $G\beta \subseteq G\alpha$, то из I_2 следует существование $\eta \in V(\mathcal{Y})$, что $\beta = \eta\alpha$, откуда $\beta \in \mathfrak{a}$, следовательно, $G\beta \in s$, это означает, что $s \in Q$. Таким образом, установлено однозначное отображение Σ в Q. Если $s \in Q$, то обозначим через $\mathfrak{a}$ множество всех преобразований $\alpha \in V(\mathcal{Y})$, для которых $G\alpha \in s$. Пусть $\beta = \eta\alpha$ для некоторого $\eta \in V(\mathcal{Y})$, тогда

$$G\beta = G(\eta\alpha) = (G\eta)\alpha \leq G\alpha,$$

т.е. $G\beta \leq G\alpha$, откуда по определению Q имеем $G\beta \in s$, следовательно, $\beta \in \mathfrak{A}$, таким образом, $\mathfrak{A}$ - левый идеал. Итак, рассматриваемое отображение является отображением Σ на Q. Пусть при $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$, например $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B} \neq \emptyset$, соответствующие элементы равны, т.е. $s_1 = s_2$. Тогда для $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ имеем $M\alpha \in \in s_2 = s_1$, следовательно, существует $\beta \in \mathfrak{B}$, что $G\beta = G\alpha$, из I_2 вытекает тогда $\alpha = \eta\beta$, откуда $\alpha \in \mathfrak{B}$, что не может быть. Таким образом, между Σ и Q установлено взаимно-однозначное соответствие. Замечая, что это соответствие сохраняет строгие включения, получаем, что требовалось доказать.

Из приведенного доказательства следует, что если левому идеалу $\mathfrak{A}$ соответствует $s \in Q$, то $\mathfrak{A} = \bigcup_{M \in s} \mathfrak{A}_M$.

Приведенная схема была детально осуществлена в главе Ш для случая полугруппы полных эндоморфизмов свободной универсальной алгебры, в главе IУ - для случая полугруппы частичных эндоморфизмов алгебры, из которой каждая подалгебра свободна [45, 46]. Могут быть найдены и другие случаи эффективного использования этой схемы. Отметим случай левых идеалов полугруппы всех бинарных отношений произвольного множества.

Отметим в конце, что можно изложить некоторую дуальную схему для описания правых идеалов [47], которая осуществляется в отдельных частных случаях, например векторных пространств.

Что касается двусторонних идеалов, то для общего случая, исходя из доказанной в этом пункте теоремы, можно дать такое же описание, как было дано в п.Ш.6.2 для двусторонних идеалов полугруппы полных эндоморфизмов свободной универсальной алгебры.

ДОПОЛНЕНИЕ 2

ПОЛИЭНДОМОРФИЗМЫ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

I. Основные определения и свойства. Пусть даны две алгебры одной и той же сигнатуры $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$ и $\mathcal{B} = \langle B, \Omega \rangle$. Как мы знаем (см.п.I.6.7), отображение $\alpha : A \to B$ является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{B}$, если α согласовано с каждой операцией $\omega \in \Omega$. Это означает, что α может быть рассмотрено как унарная операция (функция), определенная на A со значениями в B, которая перестановочна (п.5.I.I) с каждой операцией $\omega \in \Omega$.

Однако понятие перестановочности операций определяется для операций любой арности, поэтому естественно не ограничиваться только унарными операциями и поставить вопрос об изучении операций любой арности, определенных на A со значениями в B, и перестановочных со всеми операциями из Ω. В связи с этим даем следующее определение:

m-полигомоморфизмом алгебры $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$ в алгебру $\mathcal{B} = \langle B, \Omega \rangle$ называется m-арная операция φ, определенная на A со значениями в B, и перестановочная со всеми операциями из Ω.

Несмотря на общность этого определения, нетрудно заметить, что понятие полигомоморфизма сводится к понятию обычного гомоморфизма. Заметим, что если φ - некоторый m-полигомоморфизм алгебры $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$ в алгебру $\mathcal{B} = \langle B, \Omega \rangle$, то φ определяет отображение $\overline{\varphi}$ множества A^m в множество B. Именно, для каждых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$ имеем $(a_1, a_2, \ldots a_m) = (a_i) \in A^m$ и ставим по определению

$$a_1 a_2 \ldots a_m \varphi = (a_1, a_2, \ldots, a_m)\overline{\varphi}. \tag{I}$$

Имеет место следующая

ЛЕММА. m-Арная операция φ, определенная на A со значениями в B, является m-полигомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}=\langle A, \Omega\rangle$ в алгебру $\mathcal{B}=\langle B, \Omega\rangle$ тогда и только тогда, когда индуцированное им отображение $\bar\varphi : A^m \to B$ является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}^m=\langle A^m, \Omega\rangle$ в алгебру $\mathcal{B}=\langle B, \Omega\rangle$.

Пусть φ является m-полигомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{B}$, т.е. φ перестановочна с каждой операцией ω из Ω. Покажем, что отображение $\bar\varphi$, определенное по формуле (I), является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}^m=\langle A^m, \Omega\rangle$ в алгебру $\mathcal{B}=\langle B, \Omega\rangle$. Пусть $(a_{1i})=(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}), (a_{2i})=(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}), \dots, (a_{ni})=(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm})$, n элементов из A^m и $\omega\in\Omega$ n-арная операция. Надо показать, что

$$(a_{1i})(a_{2i})\dots(a_{ni})\,\omega\bar\varphi=(a_{1i})\bar\varphi\,(a_{2i})\bar\varphi\dots(a_{ni})\bar\varphi\,\omega . \qquad (2)$$

Учитывая перестановочность операций φ и ω (см.п.5.I.I), имеем $(a_{1i})(a_{2i})\dots(a_{ni})\,\omega\bar\varphi=(a_{1i}\,a_{2i}\dots a_{ni}\,\omega)\bar\varphi=(a_{11}a_{21}\dots a_{n1}\,\omega,$ $a_{12}\,a_{22}\dots a_{n2}\,\omega, \dots, a_{1m}\,a_{2m}\dots a_{nm}\,\omega)\bar\varphi=a_{11}a_{21}\dots a_{n1}\omega\, a_{12}\,a_{22}\dots$ $\dots a_{n2}\omega\dots a_{1m}\,a_{2m}\dots a_{nm}\,\omega\varphi=a_{11}\,a_{12}\dots a_{1m}\,\varphi\, a_{21}\,a_{22}\dots a_{2m}\,\varphi\dots a_{n1}\times$ $\times a_{n2}\dots a_{nm}\,\varphi\omega=(a_{1i})\bar\varphi\,(a_{2i})\bar\varphi\dots(a_{ni})\bar\varphi\,\omega$. Обратно, пусть выполняется условие (2) для любой операции $\omega\in\Omega$. Покажем, что для операции φ, определенной по формуле (I), выполняются условия перестановочности для всех $\omega\in\Omega$ $a_{11}\,a_{12}\dots a_{1m}\varphi\, a_{21}a_{22}\dots$ $\dots a_{2m}\,\varphi\dots a_{n1}\,a_{n2}\dots a_{nm}\,\varphi\omega=(a_{1i})\bar\varphi\,(a_{2i})\bar\varphi\dots(a_{ni})\bar\varphi\,\omega=$ $=(a_{1i})(a_{2i})\dots(a_{ni})\,\omega\bar\varphi=(a_{1i}\,a_{2i}\dots a_{ni}\,\omega)\bar\varphi=a_{11}\,a_{21}\dots a_{n1}\,\omega\, a_{12}\,a_{22}\dots a_{n2}\omega\dots$ $\dots a_{1m}\,a_{2m}\dots a_{nm}\,\omega\,\varphi$. Отсюда следует ряд простейших свойств для полигомоморфизмов. Отметим некоторые из них.

Пусть φ m-полигомоморфизм алгебры $\mathcal{A}=\langle A,\Omega\rangle$ в алгебру $\mathcal{B}=\langle B, \Omega\rangle$. Назовем полигомоморфным образом алгебры $\mathcal{A}$ при полигомоморфизме φ множество всех $b\in B$, для которых существуют $a_1, a_2, \dots, a_m\in A$ такие, что $a_1\,a_2\dots a_m\,\varphi=b$. Полигомоморфный образ алгебры $\mathcal{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathcal{B}$. Это следует из того, что полигомоморфный образ алгебры $\mathcal{A}$ совпадает с гомоморфным образом алгебры $\mathcal{A}^m$. Отсюда имеем дальше, что полигомоморфный образ алгебры $\mathcal{A}$ изоморфен фактор-алгебре $\mathcal{A}^m/\sim_{\bar\varphi}$, где $\sim_{\bar\varphi}$ (см.п.I.2.3) ядро отображения $\bar\varphi$.

В случае, когда алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают, вместо „m-полигомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в себя" будем говорить „m-полиэндоморфизм алгебры $\mathcal{A}$", т.е. m-полиэндоморфизм алгебры $\mathcal{A}=\langle A, \Omega\rangle$ это m-арная операция, определенная на том же множестве

A со значениями в A, и перестановочная со всеми операциями $\omega \in \Omega$. Множество всех полиэндоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

II. Суперпозиция полиэндоморфизмов. Полиэндоморфизмы под различными названиями изучались уже в литературе (например, [3, 24]. В частности, в книге Кона [3], с.143, показано, что (формулировка дается в нашей терминологии) если φ m-полиэндоморфизм и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ n-полиэндоморфизмы, то n-арная операция

$$x_1 x_2 \ldots x_n \Phi = x_1 x_2 \ldots x_n \varphi_1\, x_1 x_2 \ldots x_n \varphi_2 \ldots x_1 x_2 \ldots x_n \varphi_m \varphi \tag{3}$$

также полиэндоморфизм.

Докажем, что подобное предложение имеет место для любых суперпозиций полиэндоморфизмов. При этом суперпозицией операций $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, где φ - n-арная операция на A, φ_k m_k-арные операции на A, $k = 1, 2, \ldots, n$, или некоторые φ_k являются символами некоторых переменных x_s, называется операция Φ, полученная по формуле

$$x_{11} x_{12} \ldots x_{1m} \varphi_1\, x_{21} x_{22} \ldots x_{2m} \varphi_2 \ldots x_{n1} x_{n2} \ldots x_{nm} \varphi_n \varphi = x'_1 x'_2 \ldots x'_p \Phi. \tag{4}$$

Здесь некоторые переменные в левой части могут совпадать, и последовательность $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ представляет последовательность различных переменных из левой части равенства (4), взятых в том же порядке. Тогда имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если m-арная операция φ является m-полиэндоморфизмом, а m_k-арные операции φ_k m_k-арными полиэндоморфизмами $k = 1, 2, \ldots, m$ алгебры $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$ или символами некоторых переменных, то суперпозиция (4) является p-полиэндоморфизмом алгебры $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$, т.е. $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ замкнут относительно суперпозиций.

Надо показать, что для любой q-арной операции $\omega \in \Omega$ имеет место

$$x'_{11} \ldots x'_{p1} \Phi\, x'_{12} \ldots x'_{p2} \Phi \ldots x'_{1q} \ldots x'_{pq} \Phi \omega =$$
$$= x'_{11} \ldots x'_{1q} \omega\, x'_{21} \ldots x'_{2q} \omega \ldots x'_{p1} \ldots x'_{pq} \omega \Phi. \tag{5}$$

Используя, как и в п.I.3.I, для каждой индексированной последовательности формальных выражений $a_1 b, a_2 b, \ldots, a_n b$ запись $a_1 b\, a_2 b \ldots a_n b = a_k b \big|_{k=1}^{n}$, получим

$$x'_{11}\dots x'_{p1}\Phi x'_{12}\dots x'_{p2}\Phi\dots x'_{1q}\dots x'_{pq}\Phi\omega = x'_{1k}\dots x'_{pk}\Phi\Big|_{k=1}^{q}\omega =$$

$$= x^k_{11}\dots x^k_{1m_1}\varphi_1 x^k_{21}\dots x^k_{2m_2}\varphi_2\dots x^k_{n1}\dots x^k_{nm_n}\varphi_n\varphi\Big|_{k=1}^{q}\omega =$$

$$= x^k_{1i}\Big|_{i=1}^{m_1}\varphi_1\Big|_{k=1}^{q}\omega\, x^k_{2i}\Big|_{i=1}^{m_2}\varphi_2\Big|_{k=1}^{q}\omega\dots x^k_{ni}\Big|_{i=1}^{m_n}\varphi_n\Big|_{k=1}^{q}\omega\,\varphi =$$

$$= x^k_{1i}\Big|_{k=1}^{q}\omega\Big|_{i=1}^{m_1}\varphi_1\, x^k_{2i}\Big|_{k=1}^{q}\omega\Big|_{i=1}^{m_2}\varphi_2\dots x^k_{ni}\Big|_{k=1}^{q}\omega\Big|_{i=1}^{m_n}\varphi_n\,\varphi =$$

$$= x^k_{11}\Big|_{k=1}^{q}\omega\dots x^k_{1m_1}\Big|_{k=1}^{q}\omega\,\varphi_1\, x^k_{21}\Big|_{k=1}^{q}\omega\dots x^k_{2m_2}\Big|_{k=1}^{q}\omega\,\varphi_2\dots x^k_{n1}\Big|_{k=1}^{q}\omega\dots x^k_{nm_n}\Big|_{k=1}^{q}\omega\,\varphi_n\,\varphi$$

$$= x'_{11}\dots x'_{1q}\,\omega\, x'_{21}\dots x'_{2q}\,\omega\dots x'_{p1}\dots x'_{pq}\,\omega\Phi.$$

Таким образом, формула (5) доказана. Отсюда следует, что множество всех полиэндоморфизмов данной алгебры или каких-нибудь его подмножеств может быть рассмотрено как алгебраическая система, множество операций которой будут какие-нибудь частные виды суперпозиций. Так, если ограничиться унарными полиэндоморфизмами и в качестве операции взять их суперпозицию, получим полугруппу эндоморфизмов данной алгебры. Если в множество всех n-полиэндоморфизмов ввести операцию $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \varphi)$, определенную для n-арных φ_k, $k=1,2,\dots,m$, и m-арной φ по формуле

$$x_1 x_2\dots x_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi) = x_1\dots x_n\varphi_1\, x_1\dots x_n\varphi_2\dots x_1\dots x_m\varphi_m\varphi \quad (6)$$

с добавлением как элементов, отмеченных нульарными операциями, единичных операций δ_n^{ni}, для которых $x_1\dots x_{i-1}\, x_i\, x_{i+1}\dots x_n\delta_n^i = x_i$, получим клон полиэндоморфизмов алгебры [3]. Если в качестве операции взять $\overset{i}{+}$ суперпозицию на i-том месте согласно формуле

$$x_1\dots x_{n+m-1}(\varphi_1\overset{i}{+}\varphi_2) = x_1\dots x_{i-1}\, x_i\dots x_{i+m-1}\varphi_2\, x_{i+m}\dots x_{n+m-1}\varphi_1 \quad (7)$$

получим так называемую [48] позиционную алгебру полиэндоморфизмов алгебры $\mathcal{Y}$.

Отметим, что, как показал А.В.Кузнецов, для конечных алгебр имеет место результат более сильный, чем доказанный выше. Им найдены несколько обобщений понятия выразимости функций посредством суперпозиций. В вопросах перестановочности операций, как оказалось, большую роль играет так называемая параметрическая выразимость операций.

Пусть Ω - некоторое множество символов операций, и $<S(\Omega,X)$, $\Omega>$ - алгебра Ω-слов над счетным алфавитом X. Допустим, что каждому символу операций $\omega \in \Omega$ сопоставлена определенная операция на множестве M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Операция $x_1 \ldots x_n \varphi$ на множестве M параметрически выразима через систему операций Ω на M, если равенство $x_{n+1} = x_1 \ldots x_n \varphi$ эквивалентно условию следующего вида:

$$\exists x_{n+2} \exists x_{n+3} \ldots \exists x_{n+k}((A_1 = B_1) \& (A_2 = B_2) \& \ldots \& (A_m = B_m)),$$

где $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_M$ - Ω-слова, а значениями переменных считаются элементы множества M.

С разрешения А.В.Кузнецова приведем формулировку полученных им критерия параметрической выразимости операций на конечном множестве и некоторых смежных результатов, которые подробно еще не опубликованы.

I. Если M конечное множество, то операция φ на M параметрически выразима через систему операций Ω на M тогда и только тогда, когда φ не отделяется от Ω никакой операцией ψ, т.е. тогда и только тогда, когда не существует операции ψ на M, которая была бы перестановочна с каждой операцией $\omega \in \Omega$, но не перестановочна с φ.

2. Множество всех полиэндоморфизмов $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ произвольной алгебры $\mathcal{G} = <G, \Omega>$ замкнуто относительно параметрической выразимости.

3. Конечные алгебры $<G, \Omega_1>$ и $<G, \Omega_2>$ имеют одно и то же множество полиэндоморфизмов тогда и только тогда, когда каждая операция из Ω_1 параметрически выразима через систему операций Ω_2 и, обратно, каждая операция из Ω_2 параметрически выразима через систему операций Ω_1. Причем в этом утверждении (даже при $card\ G = 2$) параметрическую выразимость, вообще говоря, нельзя заменить на выразимость посредством суперпозиций.

4. Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ множество всех полиэндоморфизмов алгебры $\mathcal{G} = <G, \Omega>$. Если G конечное множество и $\mathcal{G}' = <G, \mathcal{P}(\mathcal{G})>$, то

множество $\mathcal{P}(\mathcal{U}')$ всех полиэндоморфизмов алгебры $\mathcal{U}'$ совпадает с параметрическим замыканием множества операций Ω на G (ср. Кон [3], с.141 – 144).

5. Множество Ω_1 операций на конечном множестве G является множеством всех полиэндоморфизмов некоторой алгебры $< G, \Omega >$ тогда и только тогда, когда Ω_1 замкнуто относительно параметрической выразимости.

Ш. Абелевы алгебры. Алгебра $\mathcal{U}$ называется абелевой, если $\Omega \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Для полиэндоморфизмов абелевых алгебр могут быть определены, причем разными подходами, операции $\omega \in \Omega$. Например, для n-полиэндоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и m-арной операции $\omega \in \Omega$ согласно формуле (6) имеем

$$x_1 \ldots x_n (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \omega) = x_1 \ldots x_n \varphi_1 \ldots x_1 \ldots x_n \varphi_m \omega . \qquad (8)$$

В случае, когда $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ – эндоморфизмы, формула (8) принимает вид

$$x(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \omega) = x\varphi_1 \ldots x\varphi_m \omega , \qquad (9)$$

т.е. получаем обычное перенесение операций $\omega \in \Omega$ над эндоморфизмами.

Если в правой части формулы (8) взять каждый полиэндоморфизм φ_i с разными переменными, то, обозначая такую суперпозицию через $[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m; \omega]$, можем писать

$$x_1 \ldots x_N [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m; \omega] = x_1 \ldots x_{n_1} \varphi_1 \ldots x_{N-n_m+1} \ldots x_N \varphi_m \omega , \qquad (10)$$

где n_i – арность полиэндоморфизма φ_i и $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$. В случае, когда все φ_i – эндоморфизмы, получаем

$$x_1 \ldots x_m [\varphi_1, \ldots, \varphi_m; \omega] = x_1 \varphi_1 \ldots x_m \varphi_m \omega . \qquad (11)$$

Формула (11) показывает, что в отдельных случаях полиэндоморфизм может получаться в виде суперпозиции эндоморфизмов.

В следующем пункте будет рассмотрен один класс алгебр, для полиэндоморфизмов которых имеет место такое представление (см. также [24]).

IУ. Полиэндоморфизмы поляризованных алгебр. Пусть $\mathcal{U}<G,\Omega>$ унитарно-поляризованная алгебра (п.У.1.3), т.е. алгебра среди основных операций которых имеется операция $\omega_0 \in \Omega$ и производная унарная $e(x) = e(y) = e$ или нульарная операция, отмечающая элемент e так, что $ee \ldots e\omega = e$ для любого $\omega \in \Omega$ и

$$e\dots exe\dots e\,\omega_0 = x \qquad (12)$$

для любого места.

Заметим, что если операция ω_0 имеет арность $n_0>1$, то для каждого $n>1$ можно указать производную операцию ω_0' арности n, обладающую свойством (12). В самом деле, если $1<n<n_0$, то суперпозиция $x_1\dots x_n e\dots e\,\omega_0$ дает требуемую операцию. Если $n>n_0$, то для некоторого k арность операции $\omega'=(\dots(\omega_0 \overset{1}{+} \overset{1}{+}\omega_0)\overset{1}{+}\dots\overset{1}{+}\omega_0)\overset{1}{+}\omega_0$, где k - число "слагаемых" в этой "сумме", равной $kn_0-(k-1)$, станет больше, чем n. Заменяя в ω' некоторые переменные на e, получим операцию ω_0' арности n, которая, как легко видеть, обладает свойствами (12).

Для унитарно-поляризованных алгебр имеет место

ТЕОРЕМА. Для каждого n-полиэндоморфизма φ унитарно-поляризованной алгебры $\mathcal{G}=\langle G,\Omega\rangle$ существуют операция ω_0', удовлетворяющая условиям (12), и эндоморфизмы $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ алгебры $\mathcal{G}$ так, что

$$x_1\dots x_n\varphi = x_1\varphi_1\dots x_n\varphi_n\,\omega_0'. \qquad (13)$$

Обозначим через φ_i унарную операцию

$$x\varphi_i = e\dots exe\dots e\varphi, \qquad (14)$$

где x стоит на i-том месте. Так как e - единственная одноэлементная подалгебра, то e является нульарным полиэндоморфизмом, тогда $x\varphi_i$ как суперпозиция полиэндоморфизмов есть полиэндоморфизм и так как $x\varphi_i$ - унарная операция, то φ_i - эндоморфизм алгебры $\mathcal{G}$. Тогда если ω_0' — n-арная основная или производная операция, удовлетворяющая условиям (12), имеем:

$$x_1x_2x_3\dots x_{n-1}x_n\varphi = x_1ee\dots ee\omega_0'\,ex_2e\dots ee\omega_0'\dots eee\dots ex\omega_0'\varphi =$$

$$= x_1ee\dots ee\varphi\, ex_2e\dots ee\varphi\dots eee\dots ex_n\varphi\,\omega_0' = x_1\varphi_1\,x_2\varphi_2\dots x_n\varphi_n\,\omega_0',$$

что требовалось доказать.

Скажем, что n-арная операция ω_1 является <u>гомотопом</u> n-арной операции ω_2, если они определены на одном и том же множестве G и имеются такие отображения множества G в себя

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi$, что

$$x_1x_2\dots x_n\omega_1\varphi = x_1\varphi_1\,x_2\varphi_2\dots x_n\varphi_n\,\omega_2. \qquad (15)$$

Если отображение φ - тождественное, то

$$x_1 x_2 \dots x_n \omega_1 = x_1 \varphi_1 x_2 \varphi_2 \dots x_n \varphi_n \omega_2 , \qquad (16)$$

и ω_1 называется главным гомотопом ω_2 с компонентами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Доказанную теорему можно сформулировать сейчас следующим образом.

Для каждого n-полиэндоморфизма φ унитарно-поляризованной алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$ существует основная или производная операция ω_0', удовлетворяющая условиям (12) так, что φ является главным гомотопом операции ω_0', компоненты которого являются эндоморфизмами алгебры $\mathcal{G}$.

Если к тому же алгебра $\mathcal{G}$ абелева, то такое предложение имеет место для любой основной или производной операции алгебры $\mathcal{G}$.

Назовем алгебру $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$ ω_0-абелевой, если каждая операция $\omega \in \Omega$ перестановочна с операцией ω_0, удовлетворяющей условиям (12), и $\{e\}$ является подалгеброй алгебры $\mathcal{G}$. Тогда каждая $\omega \in \Omega$ является гомотопом операции ω_0 или некоторой операцией типа ω_0', причем компонентами будут эндоморфизмы алгебры $\langle G ; \omega_0 , e \rangle$.

Пусть ω_0 - n-арная обратимая операция, т.е. для любого i уравнение $a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n \omega_0 = a$ имеет, причем единственное, решение. Тогда алгебра $\langle G ; \omega_0 , e \rangle$ называется n-лупой. Из доказанной теоремы получаем также: если $\langle G ; \omega_1 , e \rangle$ и $\langle G ; \omega_2 , e \rangle$ n-лупы на том же множестве с одной и той же единицей и операции ω_1 и ω_2 перестановочны, то они главно-изотопны (φ_i - подстановки множества G), причем если $x_1 \dots x_n \omega_1 = x_1 \varphi_1 \dots x_n \varphi_n \omega_2$, то φ_i автоморфизмы лупы $\langle G ; \omega_1 , e \rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

I. А.И.Мальцев. Алгебраические системы. М., "Наука", I970.
2. А.Г.Курош. Лекции по общей алгебре. М., Физматгиз, I962.
3. П.Кон. Универсальная алгебра. М., "Мир", I968.
4. А.Г.Курош. Общая алгебра. Лекции I969/70 учебного года.М., "Наука", I974.
5. А.Клифорд, Г.Престон. Алгебраическая теория полугрупп, т.I и II. М., "Мир", I972.
6. Е.С.Ляпин. Полугруппы. М., Физматгиз, I960.
7. В.М.Глушков, Г.Е.Цейтлин, Е.Л.Ющенко. Алгебра. Языки. Программирование. Киев, "Наукова думка", I974.
8. Ю.И.Соркин. Теория определяющих соотношений для автоматов. Проблемы кибернетики, вып.IX, (I963), 45 - 69.
9. E.Jacobs, R.Schwabauer. The lattice of equational classes of algebras with one unary operations,Amer.Math.Monthly, 71, 2, (1964), 151 - 155.
I0. J.Ježek. Primitive classes of algebras with unary and nullary operations,Colloq.Math., 20, 2, (1969),159 - 179.
II. А.И.Мальцев. Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп. Мат.сб., 69(Ш), (I966), 3 - I2.
I2. Д.М.Смирнов. Решетки многообразий и свободные алгебры.Сиб. мат. журн., I0, 5, (I969), II44 - II60.
I3. S.Buriss. A note on varieties of unary algebras, Colloq. Math., 22, 2, (1971), 195 - 196.
I4. J.C.Varlet. Endomorphisms and fully invariant congruences in unary algebras, Bull. Soc. roy. sci. Liege, 39,(1970) 11/12, 575 - 589.
I5. J.Berman. On the congruence lattices of unary algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 36, (1972), 1, 34 - 38.
I6. Р.Бэр. Линейная алгебра и проективная геометрия. М., ИЛ, I955.
I7. Н.Джекобсон. Строение колец. М., ИЛ, I96I.
I8. P.Dubreil. Sur le demi-groupe des endomorphismes d'une algebre abstraite, Atti Accad. naz. Lincei. Rend.Cl.sci. fis., mat. e natur., 46, 2, (1969), 149 - 153.
I9. J.P.Lafon. Anneau des endomorphismes d-une module de type fini sur une anneau local, Annales Institut Fourier,11, (1961), 313 - 384.

Зак. 444

20. Б.И.Плоткин. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М., "Наука", 1966.
21. R.H. Bruk. A survey of binary systems, Berlin-Götingen-Heidelberg, 1958.
22. H.Neumann. On varieties of groups and their associated near-rings, Math. Zeitschr., 65, (1956), 36 - 69.
23. А.И.Мальцев. Об умножении классов алгебраических систем. Сиб.мат. журн., 8, 2, (1967), 346 - 365.
24. Я.В.Хион. m-арные кольцоиды. Сиб.мат.журн., 8, I, (1967), 174 - 194.
25. Р.Фор, А.Кофман, М.Дени-Папен. Современная математика. М., "Мир", 1966.
26. В.В.Вагнер. Теория отношений и алгебра частичных отображений. В сб.: Теория полугрупп и ее приложения, вып.I. Изд. Саратовского университета, 1956, 3 - 178.
27. Ю.А.Шрейдер. Равенство, сходство, порядок. М., "Наука", 1971.
28. К.Куратовский, А.Мостовский. Теория множеств. М., "Мир", 1970.
29. G.Birkhoff. On the structure of abstract algebras, Proc. Cambr. Phil. Soc., 31, (1935), 433 - 454.
30. А.И.Мальцев. К общей теории алгебраических систем. Мат.сб., 35(77), (1954), 3 - 20.
31. Б.Чакань. Об эквивалентности некоторых классов алгебраических систем. Acta Scient. Math., 23, (1962), 46 - 57.
32. B.H.Neumann, E.C.Wiegold. A semigroup representation of varieties of algebras, Colloq. Math., 14, (1966), 111 - 113.
33. А.А.Акатаев, Д.М.Смирнов. Решетки подмногообразий многообразий алгебр. Алгебра и логика. Новосибирск, 7, I, (1968), 5 - 25.
34. А.И.Мальцев. Симметрические группоиды. Мат.сб., 31, (73), (1952), 136 - 151.
35. Л.М.Глускин. О плотных вложениях. Мат.сб., 61(103), (1963), 175 - 206.
36. T.Evans. On multiplicative system defined by generators and relations, Proc.Cambr.Phil.Soc., 47, (1951), 637 - 649.
37. А.И.Ширшов. Подалгебры свободных лиевых алгебр. Мат.сб., 33(75), (1953), 441 - 452.
38. А.Г.Курош. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр. Мат. сб., 20(62), (1947), 239 - 262.
39. А.Г.Курош. Свободные суммы мультиоператорных групп. Acta Scient. Math., 21, (1960), 187 - 196.
40. А.И.Мальцев. Конструктивные алгебры I. УМН, 16, (1961), I - 59.

41. А.И.Ширшов. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр. Мат.сб., 34(76), (1954), 81-88.
42. М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков. Основы теории групп.М.,"Наука", 1972.
43. Х.Нейман. Многообразия групп. М., "Мир", 1969.
44. Л.М.Глускин. Идеалы полугрупп. Мат.сб., 55(97),(1961),421 - 448.
45. И.И.Валуцэ, Левые идеалы полугруппы эндоморфизмов универсальной алгебры, ДАН СССР, 150, 2, (1963), 235 - 237; Мат.сб., 62(104), 3, (1963), 371 - 384.
46. И.И.Валуцэ. Идеалы алгебры эндоморфизмов свободной универсальной алгебры. Мат.исслед., 3:2(8), (1968),104 - 112,
47. И.И.Валуцэ. Об идеалах некоторых полугрупп преобразований. Исследования по алгебре. Кишинев, Изд. АН МССР, 1965, 67 - 80.
48. В.Д.Белоусов. n-Арные квазигруппы. Кишинев, "Штиинца", 1972.

О Г Л А В Л Е Н И Е