

HAO WANG, McNAUGHTON R.

LES SYSTÈMES AXIOMATIQUES
DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

COLLECTION DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE,
SÉRIE A, IV

Paris, Gauthier-Villars, 1953

ВАН ХАО, Р. МАК-НОТОН

АКСИОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Перевод с французского
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

Под редакцией
Л. А. КАЛУЖНИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1963

А Н Н О Т А Ц И Я

Брошюра представляет собой развернутое изложение обзорного доклада, прочитанного первым из авторов — крупным специалистом по математической логике. В исключительно сжатой, но доступной и четкой форме авторам удалось изложить важнейшие современные аксиоматические обоснования теории абстрактных множеств. Эта отрасль весьма слабо представлена в советской математической литературе, а между тем современное бурное развитие исследований по основаниям математики и по математической логике тесно связано с ней.

Брошюра будет полезна всем математикам, а также представителям других специальностей, интересующихся приложениями математической логики.

Редакция литературы по математическим наукам.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая брошюра Ван Хао и Мак-Нотона содержит обзор различных аксиоматических обоснований теории абстрактных множеств. Нужно отметить, что теория абстрактных множеств очень плохо представлена в советской математической литературе. Имеется перевод классической книги Хаусдорфа „Теория множеств“¹⁾, но это издание давно уже стало библиографической редкостью. Кроме того, изложение Хаусдорфа отражает состояние теории множеств в начале этого столетия и в первую очередь внимание уделяется теории точечных множеств. Книга П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова „Введение в теорию множеств и функций“ также посвящена в основном применению теории множеств к теории функций. В отличие от теории абстрактных множеств теория точечных множеств, теоретико-множественная теория функций, дескриптивная и метрическая теория множеств освещены в нашей литературе довольно подробно в книгах и оригинальных работах Н. Н. Лузина и его учеников и последователей.

Между тем абстрактная теория множеств, и особенно аксиоматические построения этой теории, играют в настоящее время немаловажную роль. Это связано с современным бурным развитием исследований по основаниям математики и по математической логике, к которым теория абстрактных множеств в аксиоматическом изложении самым тесным образом примыкает. Аксиоматическая абстрактная теория множеств приобретает в настоящее время определенный интерес также в связи с возникновением новой важной области современной алгебры — теории категорий. Для четкого и строгого обоснования этой теории оказывается необходимым обращаться

¹⁾ Хаусдорф Ф., Теория множеств, М., 1937.

к одной из современных аксиоматических систем абстрактной теории множеств, например к системе Бернайса — Неймана.

Авторы брошюры — видные специалисты по теории множеств. В исключительно сжатой форме им удалось доступно и тем не менее довольно полно познакомить читателя с важнейшими современными направлениями в рассматриваемой области. Конечно, эта брошюра не может заменить подробного изложения абстрактной теории множеств, данного, например, в книге Френкеля и Бар-Хиллела¹), однако нам представляется, что перевод работы Ван Хао и Р. Мак-Нотона также принесет несомненную пользу советским математикам.

Л. А. Калужнин

¹) Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y., Foundations of set theory, Amsterdam, 1958. (Готовится русское издание в Издательстве иностранной литературы.)

ПРЕДИСЛОВИЕ К ФРАНЦУЗСКОМУ ИЗДАНИЮ

В апреле 1951 г. в Исследовательской группе символической логики Парижского университета Ван Хао прочел превосходную лекцию, в которой он дал полный обзор различных аксиоматических систем теории множеств и связанных с ними исследований. Мы тогда же обратились к нему с просьбой подготовить для печати небольшую работу с изложением аксиоматических систем теории множеств, и вот теперь перед нами эта работа, отличающаяся четкостью своего построения. Она написана Ван Хао совместно с Мак-Нотоном, является первой книгой этих авторов, и мы им благодарны за то, что они согласились издать ее в составе нашей коллекции.

Эта книга будет весьма полезна для тех, кто хочет познакомиться с современными исследованиями по аксиоматизации теории множеств и с доказательствами непротиворечивости (*consistance*), которыми преимущественно занимался Мак-Нотон (в частности, две последние главы посвящены новейшим математическим и семантическим исследованиям непротиворечивости и силы различных систем). Эта книга, содержащая обширную библиографию, является также хорошим введением, позволяющим ориентироваться в современных исследованиях и дающим возможность оценить, изучить и углубить работы Френкеля, Неймана, Бернайса, Куайна, Гёделя, Тарского и многих других авторов. Ван Хао принадлежат многочисленные результаты в тех областях, которые рассматриваются в данной монографии; в Соединенных Штатах он сотрудничал с Куайном, в Европе — с Бернайсом, и поэтому его обзор основных современных направлений особенно ценен.

П. Детуш-Феврие

О Т А В Т О Р О В

Часть материала, содержащегося в этой работе, была предметом лекции „Сравнение различных систем аксиом теории множеств“, прочитанной одним из нас в Институте Анри Пуанкаре в апреле 1951 г. Мы выражаем здесь благодарность Сильвену Бромберже за то, что он любезно согласился перевести на французский язык большую часть нашей рукописи (гл. I—VI), а также за его полезные замечания и предложения. Г-жа Детуш-Феврие содействовала изданию этой книги и помогла нам улучшить наш текст.

Кембридж (Массачусетс)
апрель 1952 г.

Van Haa
P. Mak-Hoton

Глава I

КАНТОР. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ С НАИВНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Общепризнано, что теория множеств создана Георгом Кантором. Действительно, с 1872 г. по 1897 г. (главным образом в 1872—1884 гг.) он опубликовал ряд работ, в которых были систематически изложены основные разделы теории множеств, включая теорию точечных множеств и теорию трансфинитных чисел (кардинальных и порядковых). Именно ему мы обязаны, с одной стороны, главными, основными понятиями этих теорий и, с другой стороны, введением в математику рассуждений нового типа, которые он применил для доказательства основных теорем теории множеств. К тому времени аналогичные принципы уже считались общепринятыми и применялись математиками при рассмотрении конечных множеств, но именно Кантор первый явно и систематически применил их в теории бесконечных множеств. По-видимому, некоторые из его современников были смущены его результатами и не питали доверия к его доказательствам, однако они не могли обнаружить в его рассуждениях ни одной ошибки.

Около 1900 г. было обнаружено, что рассуждения, завишиющиеся сходными с рассуждениями Кантора, приводят к противоречию. В 1897 г. Бурали-Форти [18] опубликовал парадокс наибольшего порядкового числа, известный как „парадокс Бурали-Форти“. В 1903 г. Рассел [109] опубликовал еще более поразительный парадокс, который включается в следующем. Пусть дано множество C всех множеств, не содержащих самих себя в качестве своего элемента. Тогда если C не принадлежит C , то, по определению C , C принадлежит C ; если же C принадлежит C , то, по определению C , C не принадлежит C .

Некоторые математики заключили отсюда, что при рассмотрении множеств нельзя просто полагаться на интуицию,

хотя множества являются фундаментальными понятиями для математики и человеческого мышления. Другие математики отвергают всю теорию множеств (в том числе и классический анализ), считая ее ошибочной и несостоятельной. Третья группа математиков, напротив, считает, что парадоксы не затрагивают теории множеств по той простой причине, что они возникают из-за определений и рассуждений, искажающих математическую интуицию и существенно отличающихся от правомочных методов, обычно применяемых в математике.

Какую бы из этих точек зрения ни принять, необходимо признать, что важной задачей является уточнение тех представлений, которые лежат в основе теории множеств, а также возможно более четкое выделение тех рассуждений, которые приводят к противоречиям. Аксиоматический метод является, по-видимому, особенно подходящим для этой цели. И действительно, в эпоху, когда развивалась теория множеств, большой интерес вызывали аксиоматические системы геометрии и арифметики. Поэтому казалось вполне естественным попытаться построить системы аксиом для теории множеств. В результате в 1908 г. были опубликованы две очень интересные системы. Эти системы построили независимо друг от друга и исходя из различных точек зрения Рассел [111] и Цермело [162]. В дальнейшем многие исследователи пересматривали и изменяли обе системы, но в основном эти системы сохранили свой характер. В настоящее время они все еще известны соответственно как теория типов Рассела и теория множеств Цермело. Не вдаваясь в исторические подробности, мы рассмотрим в настоящей работе эти системы в одной из их форм, общеупотребительной в настоящее время. Затем мы рассмотрим другие системы, которые получаются из двух первых путем расширения или путем наложения существенных ограничений.

Мы начнем с теории типов.

Глава II

ТЕОРИЯ ТИПОВ

В целях уточнения понятия множества или класса, согласно теории типов, необходимо рассматривать классы в рамках некоторой иерархии типов. В основании этой иерархии находятся объекты типа один, которые представляют собой индивиды (или, если угодно, индивидуальные сущности, или материальные объекты). На следующей ступени находятся классы индивидов, которые составляют объекты типа два. Вообще, если i — целое число ($i > 1$), то классы типа i содержат в качестве своих элементов только объекты типа $i - 1$. Таким образом, допущение, например, класса, содержащего одновременно объекты типа два и индивиды, противоречило бы теории типов.

Теория типов дает средство избежать парадокса Рассела (см. гл. I). Действительно, в этой иерархии существует класс типа i , соответствующий любому свойству объектов типа $i - 1$ ($i > 1$), но нет класса, элементами которого являются объекты различных типов, хотя бы они обладали одним и тем же свойством. Таким образом, не существует класса, содержащего все классы, не являющиеся элементами самих себя. Так как все члены какого-либо класса должны быть типа более низкого, чем тип этого класса, то не может быть более речи о классах, которые содержат себя в качестве своего элемента.

В формальной системе не существует таких переменных x, y , значениями которых могут служить объекты произвольного типа. Каждой переменной приписываются индексы, которые указывают тип ее значений. Следовательно, x_1 , например, может иметь в качестве значений только индивиды, x_2 — только классы типа два и т. д. Нельзя больше говорить: „все объекты, такие, что ...“, а нужно говорить: „все объекты x_1 , такие, что ...“, или, если дано некоторое i , „всякий объект x_i , такой, что ...“.

Утверждение, что некоторый объект является членом класса, когда тип этого класса не превосходит в точности на единицу тип объекта, не только ложно, но лишено всякого смысла. Отношение элемента к своему классу формально указывается значком \in ; $x_1 \in y_2$ означает, что x_1 является элементом y_2 . Итак, наложенное ограничение выражается следующим образом: выражение $x_i \in y_j$ может фигурировать где-либо только в том случае, если $j = i + 1$.

Теперь мы можем ввести формальную систему Т [42] [128]. Мы будем предполагать, что элементарная логика известна, и будем пользоваться обычными обозначениями, т. е. \equiv будет обозначать эквивалентность („если ..., то ... и наоборот“); \supset — импликацию („если ..., то ...“); \sim — отрицание („не“); $\&$ — конъюнкцию („и“); \vee — дизъюнкцию („или“), квантор общности („для всякого x_1 “, „для всякого y_2 “ и т. д.) будем обозначать $(x_1) .$, $(y_2) .$ и т. д., квантор существования („существует y_2 , такое, что ...“, „существует x_6 , такое, что ...“, и т. д.) — $(Ey_2) .$, $(Ex_6) .$ и т. д. Если читатель не интересуется формальным аспектом элементарной логики, он может воспринимать эти символы как сокращенную запись соответствующих выражений, имеющихся в обычном языке математики.

В дальнейшем нам будут полезны следующие определения.

Для всякого $i \geq 1$ тождество определяется следующим образом: $x_i = y_i$ пишем вместо $(w_{i+1}) . (x_i \in w_{i+1} \equiv y_i \in w_{i+1})$. Таким образом, сказать, что объекты тождественны, все равно что сказать, что они принадлежат к одному и тому же классу.

Упорядоченная пара $\langle x_i, y_i \rangle$ двух объектов x_i и y_i одного и того же типа определяется как класс типа $i + 2$, элементами которого служат единичный класс $\{x_i\}$ объекта x_i и класс пар (неупорядоченных) $\{x_i, y_i\}$ объектов x_i и y_i . Легко видеть, что, согласно этому определению, заданием x_i и y_i полностью определяется $\langle x_i, y_i \rangle$ и, наоборот, x_i и y_i однозначно определяются заданием класса $\langle x_i, y_i \rangle$. Можно считать, что отношение двух объектов представляет собой некоторый класс упорядоченных пар. Например, отношение “... является отцом ...” представляет собой класс всех упорядоченных пар $\langle x_i, y_i \rangle$, таких, что x_i является отцом для y_i . Следовательно, отношение между двумя объектами

одного и того же типа определяет класс, тип которого превосходит на три единицы тип этих объектов; отношение двух индивидов, например, представляет собой класс типа четыре. Мы будем записывать для удобства отношение w_{i+3} между x_i и y_i посредством $w_{i+3}(x_i, y_i)$, где $w_{i+3}(x_i, y_i)$ заменяет $\langle x_i, y_i \rangle \in w_{i+3}$.

Аксиомами системы Т являются следующие три.

• Т1. Аксиома объемности (экстенсиональности). Два класса являются тождественными, если они имеют одни и те же элементы. Другими словами, класс полностью определен, когда заданы его члены.

В символической записи:

$$(x_i). (x_i \in y_{i+1} \equiv x_i \in z_{i+1}) \supset y_{i+1} = z_{i+1},$$

где i — любое целое положительное число.

Т2. Аксиома выделения (сопреженсион). Для всякого предложения, служащего определением объектов типа i , существует соответствующий ему класс типа $i+1$.

Следовательно, если $F(x_i)$ — предложение в терминах Т, в которое не входит y_{i+1} , то имеем

$$(Ey_{i+1}).(x_i). [x_i \in y_{i+1} \equiv F(x_i)].$$

Т3. Аксиома бесконечности. Легко видеть, что следующее предложение обеспечивает существование в Т бесконечного числа индивидов:

$$(Ew_4).((x_1). \sim w_4(x_1, x_1) \& (x_1). (Ey_1). w_4(x_1, y_1) \& \\ \& (x_1). (y_1). (z_1). [(w_4(x_1, y_1) \& w_4(y_1, z_1)) \supset w_4(x_1, z_1)]).$$

Итак, теория типов представляется в двух видах: как интуитивная модель иерархии классов и как формальная система. Если считать интуитивную модель надежной основой для того, чтобы пользоваться классами, то, очевидно, формальная система является столь же надежной. Действительно, можно легко убедиться в том, что если модель содержит бесконечное число индивидов и если, отправляясь от этих индивидов, построена иерархия типов, то аксиомы системы выполняются в этой модели. Аксиома объемности

выполняется, так как каждый класс полностью определяется своими элементами. Аксиома выделения выполняется, так как каждое свойство объектов, имеющих данный тип, определяет некоторый класс. Другими словами, должен существовать класс y_{i+1} , содержащий все x_i , обладающие данным свойством. Аксиома бесконечности выполняется, так как предполагается бесконечное число индивидов.

Таким образом, можно полагать, что если надежна интуитивная модель, включающая в себя иерархию типов, то в равной мере надежна соответствующая формальная система. Но на каком основании мы уверены в том, что можно полагаться на интуитивную модель? Можно считать, что понятие класса, опирающееся на интуитивную модель, не затрагивается парадоксами, открытыми в начале нашего века. Действительно, можно показать, что эти парадоксы возникают из-за „порочного круга“ в рассуждениях, который заключается в следующем: некоторый объект определяется с помощью совокупности, к которой он принадлежит. Например, класс всех классов, не являющихся элементами самих себя, определяется с помощью совокупности всех классов, к которой принадлежит и определяемый класс. Выше мы показали, как в теории типов устраняется парадокс Рассела. Можно было бы сделать вывод, что благодаря иерархии типов в теории множеств устраняются все парадоксы, возникающие из-за „порочного врага“. Действительно, классы иерархии типов задаются к определенном порядке: сначала индивиды, затем классы индивидов, затем классы классов индивидов и т. д. Отсюда, по-видимому, следует, что при рассмотрении классов в рамках иерархии типов устраняются рассуждения, содержащие „порочный круг“. Несмотря на все сказанное и на то обстоятельство, что формальной системе удовлетворяет интуитивная модель, при помощи аксиом системы все же не удается совсем избежать „порочного круга“. Для данного класса w_3 типа три, согласно аксиоме выделения, существует класс y_2 , такой, что

$$(x_1). [x_1 \in y_2 \equiv (Ex_2). (x_1 \in z_2 \& z_2 \in w_3)].$$

Здесь y_2 представляет собой класс типа два, который, однако, определяется при помощи связанной переменной типа два, а именно z_2 . Это означает, что класс y_2 определяется при помощи совокупности, частью которой он является; такой

класс называется *непредикативным* [106]. Оказывается, что существенная часть высшей математики не может быть изложена в рамках теории типов, если не допускать непредикативные классы — такие, как y_2 . Таким образом, хотя можно быть уверенными в том, что в теории типов нельзя непосредственно прийти ни к парадоксу Рассела, ни к другим хорошо известным парадоксам, тем не менее мы не можем быть полностью уверены в непротиворечивости теории типов, если в ней допускаются непредикативные классы.

Мы полагаемся на интуитивную модель, так как в ней классы порождаются, так сказать, в определенном порядке, имея исходным пунктом совокупность индивидов. Если мы согласны исходить из интуитивной уверенности в том, что такое образование классов является когерентным (*cohérent*) процессом, то можно полагаться на интуитивную модель и тогда формальная система будет непротиворечивой. Но если нет уверенности в том, что иерархия типов получается при помощи процесса, заслуживающего доверия, то единственным основанием для того, чтобы считать теорию типов надежной, является лишь то обстоятельство, что в ней, по-видимому, устраняются все известные до сих пор парадоксы.

Глава III

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ ЦЕРМЕЛО

A. Теория Цермело

Система аксиом, которую Цермело опубликовал в 1908 г., представляет собой первую успешную попытку явно и строго формализовать методы, которые Кантор и его последователи принимали неявно. С тех пор, как мы увидим далее, в работах Френкеля, Сколема, Неймана, Бернайса и др. система Цермело и некоторые подобные ей системы были доведены до высокой степени формального совершенства.

Основной принцип построения Цермело очень напоминает оригинальную идею, при помощи которой Кантор объясняет парадоксы, и можно считать, что он представляет собой то, что Рассел [110] называет „теорией ограничения объема“. Итак, существуют некоторые воспроизводимые процессы, связанные с такими свойствами, что по данному классу объектов, обладающих подобным свойством, всегда можно определить новый объект, также обладающий этим свойством. Попытка рассмотреть все эти объекты в рамках некоторого замкнутого единства (множества) приводит к противоречиям, напоминающим „антиномии“ Канта. Этого можно избежать, если считать, что порождаемые таким способом члены не могут составлять множество, и наложить некоторые общие ограничения на объем совокупностей, которые можно рассматривать как множества [110], [164]. Система Цермело дает точную формулировку этих ограничений.

Прежде чем изложить аксиомы системы, мы опишем интуитивную модель этой теории ([7], часть VI). С этой целью рассмотрим сначала в качестве исходных понятий нулевое (пустое) множество Λ и операцию P , порождающую множество всех подмножеств. Из определения P непосредственно следует, что

$$P(\Lambda) \text{ есть } \{\Lambda\}, P(\{\Lambda\}) \text{ есть } \{\Lambda, \{\Lambda\}\}, \\ P(\{\Lambda, \{\Lambda\}\}) \text{ есть } \{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\{\Lambda\}\}, \{\Lambda, \{\Lambda\}\}\} \text{ и т. д.},$$

где $\{x\}$ есть единичное множество, образованное объектом x , $\{x, y\}$ есть множество, единственными элементами которого являются x и y , и т. д. Пусть $p(k)$ обозначает k -е множество, полученное таким образом, отправляясь от Λ , причем $p(0)$ есть Λ , а $p(m)$ есть множество подмножеств $p(m - 1)$. Продолжая этот процесс, для каждого конечного числа n можно получить множества с большим чем n числом членов, но никогда нельзя получить бесконечное множество. Поскольку для построения теории множеств необходимо наличие бесконечных множеств, мы введем новое предположение, что существует бесконечное множество I , которое содержит все входящие в $p(k)$ (k — конечное число) множества:

$$I = \{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\{\Lambda\}\}, \{\Lambda; \{\Lambda\}\}, \dots\}.$$

Теперь к этому множеству мы можем применить операцию P и получить классы $P(I)$, $P(P(I))$ и т. д. Мы будем обозначать k -е множество в этой последовательности множеств посредством $p(\omega + k)$, где $p(\omega)$ есть I , а $p(\omega + k)$ есть $P(p(\omega + k - 1))$. Мы получаем, таким образом, бесконечную иерархию бесконечных множеств, упорядоченных по возрастанию их кардинальных чисел. Далее определяется пространство S как совокупность всех множеств $p(g)$ ($g = 0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, \dots$). Пространство S дает модель теории множеств Цермело. Читатель сможет сам проверить, что это так.

Формальная система Цермело Z может быть описана следующим образом. Имеется только один вид переменных x , y, \dots , представляющих множества, и первичный предикат \in , указывающий на отношение члена к классу („принадлежит“). Атомарные предложения имеют только следующий вид: $x \in y$, $z \in w$. Отправляясь от них, посредством связок элементарной логики и кванторов строятся другие предложения; предполагается, что принимаются аксиомы и правила вывода элементарной логики (ср. с гл. II). Собственно аксиомами системы Z являются следующие:

Z1. Аксиома объемности. В этой аксиоме утверждается, что всякое множество определяется своими элементами, т. е. если два множества имеют одни и те же члены, то все, что выполняется для одного множества, выполняется и для другого: $x = y$ определяется как

более краткая запись выражения $(z).(z \in x \equiv z \in y)$, и аксиома тогда записывается следующим образом:

$$x = y \supset (w). (x \in w \supset y \in w).$$

Z2. Аксиома объединения. Если даны два множества x и y , то $\{x, y\}$ также является множеством, т. е.

$$(Ew). (z). [z \in w \equiv (z = x \vee z = y)].$$

Z3. Аксиома выделения (Aussonderungs-axiom). Для любого множества z и предложения $F(x)$ системы Z существует подмножество z , содержащее все те и только те множества x , для которых $F(x)$ истинно..

Символически:

$$(z). (Ey). (x). (x \in y \equiv [x \in z \& F(x)]).$$

где y не входит в $F(x)$.

Z4. Аксиома множества подмножеств. Для любого множества существует множество его подмножеств:

$$(z). (Ey). (x). [x \in y \equiv (w). (w \in x \supset w \in z)].$$

Z5. Аксиома множества-суммы. Для каждого множества существует его множество-сумма:

$$(z). (Ey). (x). [x \in y \equiv (Ew). (x \in w \& w \in z)].$$

Z6. Аксиома выбора (аксиома умножения). Если x есть множество, элементы которого не пусты и не имеют общих членов, то его множество-сумма содержит по крайней мере одно подмножество и, имеющее в точности один общий элемент с каждым его членом:

$$(x). [(y). (z). ((y \in x \& z \in x) \supset [(Ew). w \in y \& \sim (Ew).$$

$$(w \in y \& w \in z)]) \supset (Eu). (y). (y \in x \supset (Ev).$$

$$(t). [t = v \equiv (t \in u \& t \in y)]).]$$

Z7. Аксиома бесконечности. Существует множество, которое содержит в качестве своего элемента

нулевое множество и которое вместе с любым своим элементом x содержит единичное множество $\{x\}$.

В символах:

$$(Ex).[\wedge \in z \& (x).(x \in z \supset \{x\} \in z)].$$

Основная идея этой аксиомы восходит к Дедекинду [59, № 66], но для доказательства этого принципа необходимо иметь понятие умножения объектов, понятие объектов, понятие понятий и т. д., и, следовательно, оно не может быть получено средствами систем, рассматриваемых здесь и в предыдущем разделе.

Z8. Аксиома ограничения (Fundierungsaxiom). Для всякого предложения $F(x)$ системы Z , такого, что $(Ex) F(x)$, существует множество y , такое, что $F(y)$ истинно, но ни для какой его части z $F(z)$ не является истинным.

В символах:

$$(Ex).F(x) \supset (Ey). (F(y) \& (z) \sim [z \in y \& F(z)]).$$

На этом список аксиом системы Z заканчивается.

Очевидно, что описанная выше модель имеет более или менее то же значение, что и модель теории типов гл. II. Такие модели помогают лучше понять структуру формальных систем, но они никоим образом не могут устраниТЬ сомнительные стороны теории множеств (например, непредикативные определения).

Аксиоматическая система Z , которую мы изложили, не совсем то же самое, что теория Цермело, изложенная в [162], [150], [122]. Тем не менее мы будем считать, что Z — теория множеств по Цермело.

Б. Теория Цермело — Френкеля

Еще в 1899 г. Кантор [63, стр. 144] уточнил, что если какая-либо совокупность эквивалентна некоторому множеству (т. е. между их членами существует взаимно однозначное соответствие), то эта совокупность также является множеством. Поэтому удивительно, что Цермело опустил аксиому, дающую именно такое следствие. В частности, из-за этого пропуска на основании лишь аксиом $Z1-Z8$ нельзя

построить доказательство того, что совокупность $E = \{P(\omega), p(\omega + 1), \dots\}$ является множеством, хотя она эквивалентна бесконечному множеству

$$\{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\{\Lambda\}\}, \{\{\{\Lambda\}\}\}, \dots,$$

которое, как это предполагает Цермело (в Z7), существует. Чтобы спасти положение, Френкель предложил [150] следующую аксиому: *Если каждый элемент множества x заменить некоторым множеством, то в результате снова получится множество.* Или точнее:

ZF9. Аксиома подстановки (Ersetzungssaxiom). *Если одна из взаимно однозначно соответствующих друг другу областей является множеством, то и другая также является множеством.*

Другими словами, если дано такое предложение $F(u, v)$, что

$$(x).(y).(z).(w).([F(x, y) \& F(z, w)] \supset [(x = z) \equiv (y = w)]),$$

и если существует множество всех множеств v , таких, что $(Ev) F(u, v)$ истинно, то существует множество всех множеств v , таких, что $(Eu) F(u, v)$ истинно.

Система, определяемая аксиомами ZF1—ZF9, где ZF1—ZF8 совпадают с Z1—Z8, гораздо сильнее, чем система Z; следуя принятому нами способу, мы будем обозначать теорию множеств Цермело—Френкеля посредством ZF. На основании аксиом ZF7 и ZF9 мы можем доказать существование в ZF бесконечного множества E . Приняв множество-сумму множества E в качестве модели Z, мы можем доказать в ZF, что Z непротиворечива. Отсюда на основании теоремы Гёделя (см. дальше) [120] следует, что в ZF нельзя формализовать доказательство непротиворечивости ZF относительно Z. Этот результат вполне определенно указывает на то, что ZF сильнее Z. Было бы интересно расширить интуитивную модель Z так, чтобы получить подобную, но более сложную модель для ZF.

Глава IV

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ НЕЙМАНА — БЕРНАЙСА

Аксиомы ZF3, ZF8 и ZF9 теории множеств ZF (Цермело — Френкеля) отличаются от других аксиом использованием не определенных точно предложений $F(x)$, $F(x, y)$ и т. д., которые определяют совокупности, не являющиеся необходимо множествами в рассматриваемой системе. Поскольку ZF содержит бесконечное число выражений, каждая из этих аксиом охватывает бесконечное число частных случаев [для каждого предложения $F(x)$ или $F(x, y)$]. Теория Неймана — Бернайса [99] и [7] получается, если эти совокупности принять определенным образом и ввести для их представления новые переменные X , Y . Хотя кажется вполне естественным рассматривать таким образом все совокупности, определенные выражениями из ZF, нельзя все же приписывать этим совокупностям свойства, которыми обладают множества из ZF (например, свойство принадлежать некоторому множеству), так как в противном случае парадоксы возникают на новом уровне. Нейман делает оговорку, что такие совокупности не могут быть членами никакой другой совокупности. Следуя общему правилу, мы будем называть все множества, которые могут быть получены в ZF, „множествами“, а все совокупности, определяемые произвольным предложением из ZF, — „классами“. Таким образом, здесь мы больше не будем рассматривать как синонимы слова „класс“ и „множество“. Такое различие будет иметь существенное значение в этой главе, так же как и в следующей.

Формально система В содержит все символы системы ZF и, кроме того, переменные X , Y и т. д., обозначающие классы. Таким образом, в предложениях этой системы могут фигурировать как выражения вида $x \in Y$, $z \in X$ и т. д., так и предложения системы ZF. Система В имеет десять аксиом. B2 — B9 совпадают с ZF2 — ZF9, за исключением ZF3, ZF8

и ZF9, которые заменяются соответственно аксиомами

$$B3. (X).(z).(Ey).(x). [x \in y \equiv (x \in z \& x \in X)].$$

$$B8. (X).((Ex).(x \in X) \equiv$$

$$\equiv (Ey). [y \in X \& (z). \sim (z \in y \& z \in X)]).$$

$$B9. (X). [(x).(y).(z).(w). [\langle x, y \rangle \in X \& \langle z, w \rangle \in X] \supset$$

$$\supset (x = z \equiv y = w)] \& (Eu).(x). [(x \in u \equiv (Ey). (\langle x, y \rangle \in X))] \supset$$

$$\supset (Ev).(y). [y \in v \equiv (Ex). (\langle x, y \rangle \in X)]].$$

Упорядоченная пара $\langle x, y \rangle$ двух множеств x и y определяется так же, как в Т (ср. гл. 2). В1 представляет собой расширение Z1.

$$B1. x = y \supset (Z).(x \in Z \equiv y \in Z).$$

B10 является основной аксиомой относительно классов системы B. Фактически она постулирует, что всякое предложение из ZF определяет некоторый класс B.

B10. Если $F(x)$ — предложение, не содержащее ни одной связанной, обозначающей класс переменной и если Y — переменная, которая не входит в $F(x)$, то

$$(EY).(x). [x \in Y \equiv F(x)].$$

При сравнении B1 — B10 с ZF1 — ZF9 сразу же видно, что благодаря наличию нового рода переменных три группы аксиом ZF3, ZF8 и ZF9 заменяются тремя определенными аксиомами B3, B8, B9. B10 — единственная аксиома системы B, которая заключает в себе больше чем один случай, но даже она может быть сведена к следующим частным случаям:

B10a. Всякое множество представимо посредством некоторого класса:

$$(z).(EY).(x). (x \in Y \equiv x \in z).$$

B10b. Существует класс, содержащий все упорядоченные пары $\langle x, y \rangle$, такие, что $x \in y$:

$$(EY). [(x).(y). (\langle x, y \rangle \in Y \equiv x \in y)].$$

B10c. Для каждого класса существует соответствующий ему дополнительный класс:

$$(X).(EY).(x). (x \in Y \equiv \sim x \in X),$$

- B10d. Для всяких двух классов существует их пересечение:

$$(X).(Z).(EY).(x).[x \in Y \equiv (x \in X \& x \in Z)].$$

- B10e. Для всякого класса упорядоченных пар X существует соответствующий ему класс, членами которого являются первые элементы каждого члена X :

$$(X).(EY).(x).[x \in Y \equiv (Ey).(\langle x, y \rangle \in X)].$$

- B10f. Для каждого класса X существует соответствующий ему класс, элементами которого являются пары $\langle x, y \rangle$, такие, что $x \in X$:

$$(X).(EY).(x).(y).(\langle x, y \rangle \in Y \equiv x \in X).$$

Упорядоченная тройка $\langle x, y, z \rangle$ определяется как $\langle x, \langle y, z \rangle \rangle$.

$$\text{B10g. } (X).(EY).(x).(y).(z).(\langle x, y, z \rangle \in Y \equiv \langle y, z, x \rangle \in X).$$

$$\text{B10h. } (X).(EY).(x).(y).(z).(\langle x, y, z \rangle \in Y \equiv \langle y, x, z \rangle \in X).$$

Доказательство того, что B10 можно заменить посредством B10a — B10h, довольно сложно ([7], ч. I); основная идея такого приведения состоит попросту в следующем: если $F(x)$ — атомарное предложение, то B10 вытекает из B10a — B10h; если B10 выполняется для некоторых предложений $F(x)$, $G(x)$ и $H(y, z)$, то B10 выполняется также и для $\sim F(x)$, $F(x) \& G(x)$ и $(Ey)H(y, z)$ на основании B10a — B10h. Так как B10 можно свести к B10a — B10h, то очевидно, что B10 действительно утверждает, что каждое предложение ZF определяет класс, несмотря на то, что в $F(x)$ могут входить свободные переменные классов. Отсюда следует, что классы в B10a и в B10b определяются выражениями из ZF; классы Y , входящие в другие аксиомы, также определяются предложениями из ZF, если то же самое можно сказать о данных классах X и Z в этих аксиомах.

Следующим образом можно доказать, что если система ZF непротиворечива, то В также непротиворечива [120]. Будем рассматривать аксиомы B10a — B10h как операции $O_1 — O_8$, которые при их применении к некоторым заданным множествам и классам снова дают классы. Предположим, что ZF непротиворечива. По известной теореме Лёвенгейма — Скolem для каждой непротиворечивой системы существует модель в области натуральных чисел. Следовательно, если

ZF непротиворечива, то для нее существует модель в области натуральных чисел, такая, что: 1) каждому множеству x из ZF соответствует натуральное число и 2) на области натуральных чисел определен предикат \in^* , такой, что если m соответствует x , а n соответствует y , то $m \in^* n$ тогда и только тогда, когда $x \in y$. Тогда классам В могут быть поставлены в соответствие целые числа вида $2^m 3^n 5^k$, где m принимает значения от 1 до 8, а n и k могут иметь в качестве своих значений все натуральные числа. Если множеству z в B10a соответствует n , то классу Y мы ставим в соответствие числа $2^1 3^n 5^k$, где k — любое натуральное число. Классу, определяемому посредством B10b, мы ставим в соответствие числа $2^2 3^n 5^k$, где n и k — любые натуральные числа. Классу, определяемому посредством B10c, ставится в соответствие $2^3 3^n 5^k$, где n соответствует X , а k — любое натуральное число. Классу Y в B10d ставится в соответствие $2^4 3^n 5^k$, где n соответствует X , а k соответствует Z , и т. д. Таким образом, каждому классу, порождаемому операциями O_1 — O_8 , соответствует некоторое натуральное число, и никакое натуральное число не соответствует двум различным классам, хотя каждому классу соответствует несколько натуральных чисел. При помощи соотношений, выраженных в B10a — B10h, мы можем определить другой арифметический предикат $\bar{\in}$, такой, что если множеству x соответствует m и классу Y соответствует n , то $m \bar{\in} n$ тогда и только тогда, когда $x \in Y$. Если $\bar{\in}$ представляет собой отношение принадлежности члена к классу, а $\bar{\in}^*$ — отношение принадлежности элемента к множеству, то мы получаем модель В в системе натуральных чисел. Следовательно, система В непротиворечива. Мы опускаем детали этого доказательства относительной непротиворечивости и только отметим, что это доказательство возможно благодаря тому, что определение классов в В не является непредикативным¹⁾.

¹⁾ Более рабище и иначе проведенное доказательство см. в [102].

Глава V

СИСТЕМЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ КУАЙНА

A. „Зигзаг“-теория

„Зигзаг“-теория Куайна, известная под названием „Новые основы“ (мы будем обозначать ее посредством NF), представляет собой интересное расширение теории типов. Формальная сторона этого расширения очень проста, и, тем не менее, получаемая при этом система не поддается интерпретации, аналогичной интерпретации системы Т. Основным нововведением Куайна является применение им принципа *стратификации предложений*, что позволяет устранить индексы типов. Точнее, предложение является *стратифицированным*, если можно занумеровать каждую переменную таким образом, чтобы ей соответствовало одно и то же целое число при каждом ее вхождении и чтобы всюду переменная, стоящая за знаком \in , имела номер на единицу больший, чем переменная, стоящая перед \in . Например, предложение $(x \in y \& y \in z) \vee (x \in w \& w \in z)$ является стратифицированным, так как переменной x можно отнести один, переменным w и y — два, а переменной z — три. Предложения же $x \in y \& y \in z \& z \in x$ и $(x \in y \& y \in z) \vee x \in z$ не являются стратифицированными, так как для них такая нумерация переменных невозможна.

Куайн не требует, чтобы все предложения из NF были стратифицированными. Исходные обозначения и область предложений системы NF фактически совпадают с обозначениями и областью предложений в системе Цермело Z. Как и Z, NF также включает в себя теорию квантификации общих переменных x , y и т. д. Принцип стратификации входит лишь как ограничение, налагаемое на аксиому существования множества. Определение тождества в NF следующее:

$$x = y \text{ заменяет } (z). (x \in z \supset y \in z).$$

Аксиомы Куайна суть следующие две [73]:

NF1. Аксиома объемности:

$$(z). (z \in x \equiv z \in y) \supset x = y.$$

NF2. „Зигзаг“-аксиома. Если $F(x)$ является стратифицированным и не содержит никакой свободной переменной y , тогда $(Ey).(x).[x \in y \equiv F(x)]$. Не изменяя системы, можно было бы определить $x = y$ как $(z).(x \in z \equiv y \in z)$, потому что из NF2 следует теорема

$$(z).(x \in z = y \in z) \equiv (z).(x \in z \equiv y \in z).$$

Формально NF2 совпадает с аксиомой Т2 системы Т (ср. гл. II) без индексов типа, если подразумевать, что при вычеркивании индексов типа различные переменные остаются различными [75].

Несмотря на формальное сходство, система NF существенно отлична от Т. Например, в NF можно доказать существование универсального множества V , такого, что

$$(x)(x \in V),$$

и, в частности,

$$V \in V.$$

Следовательно, несмотря на условие стратификации, имеющееся в аксиоме NF2, в NF существует по крайней мере одно множество, являющееся элементом самого себя, так что интуитивная модель Т не является пригодной для NF.

Б. Расширенная теория

Несмотря на то что множество V системы NF представляется содержащим бесконечное число членов, явно невозможно доказать аксиому бесконечности, которая бы соответствовала, например, аксиоме Т3 теории типов [8]. В результате в NF нельзя построить теорию чисел. С целью устранить этот недостаток системы Куайн [76], расширив NF, ввел систему ML, которая относится к NF почти так же, как В к ZF. Стало быть, обозначения и область выражений для ML и В в точности совпадают. Система ML имеет три аксиомы. ML1 является обобщением NF1;

ML1. $(z).(z \in x \equiv z \in y) \supset (x \in Z \supset y \in Z)$.

Аксиома ML2 совпадает с NF2. Для того чтобы система была непротиворечива [119], весьма существенно, чтобы переменные, входящие в предложение $F(x)$ аксиомы ML2, обозначались строчными буквами. ML3 представляет собой аксиому, устанавливающую существование классов:

ML3. $(EY)(x)[x \in Y \equiv F(x)]$, где $F(x)$ — произвольное предложение системы ML, в которое не входит Y .

Аксиома B10 отличается от ML3, так как фигурирующее в ней выражение $F(x)$ не содержит ни одной связанной переменной класса, в то время как ML3 допускает даже непредикативные классы. Следствием этого отличия является невозможность доказать путем нумерации классов непротиворечивость ML относительно NF. Для доказательства этой непротиворечивости мы должны избрать следующий способ. Принимается некоторая система (например, система T2, описанная ниже), в которой можно построить теорию натуральных чисел и их классов, и предполагается, что NF непротиворечива. Тогда на основании теоремы Лёвенгейма — Скolem'a NF имеет модель в области натуральных чисел. Следовательно, ML имеет модель в области классов натуральных чисел. Известно, что классы натуральных чисел изоморфны действительным числам, а действительные числа образуют модель, надежность которой общепризнана. Следовательно, ML непротиворечива [23].

НЕСКОЛЬКО БОЛЕЕ СЛАБЫХ ТЕОРИЙ МНОЖЕСТВ

А. Введение

В этой главе мы рассмотрим ряд более слабых теорий множеств в порядке возрастания их силы. Эти теории кое-что заимствуют у теории Цермело и у теории типов. Первая из них T_1 имеет ту же силу, что и теория натуральных чисел. Мы будем ее называть *теорией множеств для натуральных чисел* на том основании, что в ней может быть построена теория натурального числа. Вторая система T_2 имеет ту же силу, что и теория действительных чисел, и на том основании, что теория действительных чисел может быть построена в рамках системы T_2 , мы будем называть T_2 *теорией множеств для действительных чисел*. Третья система T_3 имеет ту же силу, что и теория функций действительных чисел, а так как последняя может быть построена в T_3 , мы будем называть T_3 *теорией множеств для функций*. Остальные системы T_4 , T_5 , ... будут нас интересовать в меньшей степени, чем T_1 , T_2 , T_3 .

Б. Теория T_1

Сначала мы рассмотрим T_1 . T_1 представляет собой теорию множеств Цермело, но без аксиомы бесконечности $Z7$. Аксиомы T_11 , ..., T_16 системы T_1 совпадают с $Z1$, ..., $Z6$ системы Z соответственно, а T_17 совпадает с $Z8$. Система T_1 известна также под названием общей теории множеств. Тождество определяется в T_1 так же, как в Z .

Интуитивная модель для T_1 — это просто часть интуитивной модели теории множеств Цермело. Вместо пространства S , определенного в гл. III, определяется пространство S' , которое представляет собой сумму всех множеств $p(l)$ для всех $l < \omega$. Это пространство S' , содержащее лишь конечные множества, является интуитивной моделью для T_1 .

В T_1 можно построить теорию чисел (а именно теорию натуральных чисел) следующим образом [98]: 0 отождествляется с Λ (т. е. с нулевым множеством), 1 — с $\{\Lambda\}$; 2 — с $\{\Lambda, \{\Lambda\}\}$, 3 — с $\{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\Lambda, \{\Lambda\}\}\}$; вообще если n отождествляется с множеством x , то $n+1$ отождествляется с классом, состоящим из всех членов множества x и самого множества x (символически $x \cup \{x\}$). Другими словами, число n просто отождествляется с множеством всех чисел меньших чем n . Теперь в T_1 можно определить предикат $N(x)$, означающий, что x есть натуральное число ([7], ч. II). При помощи этого предиката можно ввести новые переменные, представляющие только натуральные числа (мы будем обозначать их буквами из средней части алфавита, от i до t). Они определяются только как связанные переменные следующим образом:

$$(i). F(i) \text{ вместо } (x). [N(x) \supset F(x)], \\ (Ei). F(i) \text{ вместо } (Ex). [N(x) \& F(x)]$$

(то же самое для j, \dots, t), где $F(x)$ есть предложение в системе Т. Смысл этих определений очевиден: сказать, что всякое натуральное число обладает определенным свойством, равносильно заявлению, что всякий объект, являющийся натуральным числом, обладает этим свойством, и утверждение „имеется натуральное число, обладающее некоторым свойством“, равносильно утверждению „некоторый объект, являющийся натуральным числом, обладает этим свойством“. Переменные i, j и т. д. достаточно определить лишь как связанные переменные, так как можно потребовать, чтобы все теоремы формальной логики содержали только связанные переменные [76]. Этот прием введения переменных, область значения которых ограничивается определенной частью всей рассматриваемой области, является обычным в формальной логике.

Теперь, после того как введены некоторые вспомогательные определения, можно дать общее определение сложения и умножения натуральных чисел. Можно также доказать некоторые общеизвестные законы — такие, как законы коммутативности и ассоциативности сложения и умножения и закон дистрибутивности умножения относительно сложения. Фактически в T_1 можно доказать теоремы, соответствующие всем аксиомам (и, следовательно, всем теоремам) типичной

формальной модели теории чисел. Итак, в T_1 доказываются следующие теоремы:

- (1) $(l).(l = l),$
- (2) $(l).(j).(l = j \supset [F(l) \equiv F(j)]),$
- (3) $(El).(l = 0),$
- (4) $(l).(Ej).(j = l + 1),$
- (5) $(l).(j).(l + 1 = j + 1 \supset l = j),$
- (6) $(l).(0 \neq l + 1),$
- (7) $(F(0) \& (l).[F(l) \supset F(l + 1)]) \supset (j).F(j),$
- (8) $(l).(l + 0 = l),$
- (9) $(l).(j).[l + (j + 1) = (l + j) + 1],$
- (10) $(l).(l \cdot 0 = 0);$
- (11) $(l).(j).[l \cdot (j + 1) = l \cdot j + l].$

Вместо $F(l)$ должно быть подставлено любое выражение из T_1 , то же самое выражение должно быть подставлено и вместо $F(j)$, но при этом свободные переменные i должны быть заменены свободными переменными j [мы вправе предположить, что j не будет связана, если ее подставит в $F(l)$ вместо свободной переменной i]. (1) и (2) представляют собой аксиомы логики тождества. Они остаются теоремами T_1 , даже если вместо i и j подставить x и y . Ясно что (1) и (2) должны выполняться во всякой формальной системе, включающей в себя отношение тождества, в противном случае отношение $x = y$ не будет отношением тождества. Аксиомы (3) — (7) — хорошо известные аксиомы Пеано для натуральных чисел. (8) и (9) представляют собой рекурсии, характеризующие сложение, (10) и (11) — рекурсии, характеризующие умножение в терминах сложения. Система, аксиомами которой являются (1) — (11), есть стандартная система натуральных чисел.

B. Теория T_n

Теперь мы можем описать систему T_n , где $n > 1$. Не вполне точно можно сказать, что T_n есть теория типов с n типами, индивидами которой являются множества из T . Другими словами, T_n так относится к T_1 , как функциональное исчисление n -го порядка относится к функциональному исчислению первого порядка. Таким образом, пере-

менные в T_n имеют индексы, которые принимают значения от 1 до n . Мы будем говорить, что x_1 является либо **множеством**, либо **классом типа 1**. Для каждого $i \leq n$ x_i является классом типа i . Переменные типа i будут представлять множества из T_1 и переменные типа $i+1$ будут представлять классы классов типа i .

Атомарные выражения теории T_n имеют одну из следующих двух форм:

$$\begin{aligned}x_1 &\in y_1, \\x_i &\in y_{i+1}.\end{aligned}$$

Тождество в T_n определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}x_1 = y_1 &\text{ заменяет } (z_1). (z_1 \in x_1 \equiv z_1 \in y_1), \\x_{i+1} = y_{i+1} &\text{ заменяет } (z_i). (z_i \in x_{i+1} \equiv z_i \in y_{i+1}).\end{aligned}$$

Необходимо заметить, что $x_1 = y_1$ определяется так же, как определяется тождество множеств в T_1 (а последнее определяется так же, как в системе Z). Аксиомы $T_n 1 - T_n 7$ системы T_n в точности совпадают с аксиомами $T_1 1 - T_1 7$ системы T_1 (или с $Z 1 - Z 6$ и $Z 8$ системы Z) с тем отличием, что уже не все переменные имеют индекс 1. Между прочим, предложение $F(x_1)$ в $T_n 3$ и в $T_n 7$ может содержать лишь переменные типа 1. В T_n входят также следующие две аксиомы:

$T_n 8$. Аксиома объемности. Для каждого $i < n$

$$x_i = y_i. \supset (w_{i+1}). (x_i \in w_{i+1} \equiv y_i \in w_{i+1}).$$

$T_n 9$. Аксиома выделения (Compréhension). Для всякого $i < n$ и для всякого предложения $F(x_i)$ системы T_n , в которое y_{i+1} не входит свободно,

$$(Ey_{i+1}). (x_i). [x_i \in y_{i+1} \equiv F(x_i)].$$

Интуитивную модель теории T_n составляет иерархия теорий типов вплоть до типа n , причем объектами типа 1 служат множества интуитивной модели системы T_1 . Так как теория чисел может быть построена в рамках системы T_1 , она может быть также построена и в рамках системы T_n .

Тарский доказал, что для всякого $n > 1$ существует в T_n определение истинности для T_{n-1} [130].

Из работ Гёделя [42, 44] известно, что синтаксис любой формальной системы может быть формализован в теории

чисел таким образом, что каждому предложению этой системы будет соответствовать некоторое число и посредством формулировок теории чисел можно будет выразить любые комбинации предложений, дающие новые предложения (при помощи функций истинности и кванторов), равно как любую последовательность выражений, составляющую доказательство той или иной теоремы. Так как в каждой системе T_n содержится теория чисел, в T_n может быть выражен синтаксис T , (и фактически синтаксис любой другой формальной системы). Определение истинности T_{n-1} в T_n представляет собой, по Тарскому, некоторый предикат $\text{Tr}(i)$, означающий, что выражение W_i является истинным, где i — гёдлевский номер выражения W_i . Можно показать, что если W_i есть высказывание (т. е. предложение без свободных переменных системы T_{n-1} (и, следовательно, также системы T_n), то в T , имеет место следующая теорема:

$$(i). (\text{Thm}_{n-1}(i) \supset \text{Tr}(i)).$$

где $\text{Thm}_{n-1}(i)$ означает, что W_i есть теорема из T_{n-1} .

Таким образом, в T_n можно доказать, что все теоремы T_{n-1} истинны. Кроме того, это приводит нас к доказательству в T_n непротиворечивости T_{n-1} . Действительно, если все теоремы системы верны, то никакое ложное предложение не может быть теоремой. Однако можно показать, что если система противоречива, то все высказывания являются теоремами системы. Так как из определения $\text{Tr}(i)$ следует, что имеются ложные высказывания (например, отрицание истинного высказывания), то такая система является непротиворечивой, если все ее теоремы истинны.

Приведенное здесь рассуждение аналогично заключению о том, что если свидетель говорит правду, то его рассказ непротиворечив.

Гёдель показал, что непротиворечивость системы не может быть доказана в рамках самой системы [42, 44]. Стало быть, если непротиворечивость данной системы может быть доказана в другой системе, то последняя должна быть сильнее первой. Следовательно, T_1, T_2, \dots представляют собой последовательность систем, расположенных в порядке возрастания их силы, несмотря на то, что каждая из этих систем слабее, чем система Цермело и теория типов.

Глава VII

СИЛА СИСТЕМ

Можно доказать два следующих утверждения [91]:

7.1. Доказательство непротиворечивости В относительно ZF (фактически это — доказательство, описанное в гл. IV) может быть формализовано в рамках системы T_2 .

7.2. Доказательство непротиворечивости ML относительно NF, описанное в гл. V, может быть формализовано в T_3 .

По-видимому, эти теоремы об относительной непротиворечивости нельзя доказать в рамках более слабых систем.

Исследуя вопросы относительной непротиворечивости, Мостовский [97] привел весьма изящное рассуждение, при помощи которого можно установить следующую общую теорему:

7.3. Пусть символизм системы L составляет собственную часть символизма системы L' и пусть является возможным доказать непротиворечивость L' относительно L таким методом, что для каждого предложения p из L тем же методом может быть доказана непротиворечивость L'^* относительно L^* (L'^* и L^* получаются из L' и L путем принятия p в качестве новой аксиомы). Тогда всякая теорема L' , которая полностью выражается в символизме L , является также теоремой системы L .

Отсюда и из утверждений гл. IV и V следует, что всякая теорема В (или ML) является теоремой в ZF (или NF), если она выражена в символизме ZF (или NF).

Из результата 7.2 вытекает несколько интересных следствий, которые являются весьма характерными для теории множеств. Рассмотрим системы I_n при $n > 1$, совпадающие с системами гл. VI как по обозначениям, так и по имею-

щимся в них аксиомам, за исключением следующего: I_n вместо аксиомы $T_n 9$ системы T_n содержит следующую аксиому:

$T_n 9'$. Аксиома выделения. Для всякого $i < n$ и для всякого выражения $F(x_i)$, в которое не входят ни y_{i+1} , ни переменные более высокого типа, чем типа $i+1$,

$$(Ey_{i+1}).(x_i).[x_i \in y_{i+1} \equiv F(x_i)].$$

$T_n 9'$ отличается от $T_n 9$ тем, что переменные типа более высокого, чем $i+1$, не могут входить в определение классов типа $i+1$. Хотя I_2 совпадает с T_2 , при $n \geq 3$, система I_n гораздо слабее, чем T_n . Действительно, непротиворечивость I_2 , совпадающая с непротиворечивостью T_2 , может быть доказана в T_3 (ср. гл. VI). Далее, в T_3 может быть доказана непротиворечивость I_{n+1} относительно I_n для всякого n ; это следует из того, что I_{n+1} и I_n относятся друг к другу, как ML к NF. Отсюда имеем

7.4. *Непротиворечивость I_n может быть доказана в T_3 для всякого n .*

Кроме того, если T_ω представляет собой сумму или объединение всех систем I_n , можно также доказать следующее [91]:

7.5. *Непротиворечивость I_ω может быть доказана в T_4 .*

Таким образом, согласно замечанию в конце гл. VI, всякая система I_n слабее, чем система T_3 , при всех n . Исследуем, почему T_3 настолько сильнее I_n . Основной причиной является то обстоятельство, что в T_3 переменные типа три могут входить в определения классов типа два, чего нельзя сказать о всякой системе I_n . T_3 является более сильной системой, так как существование некоторых классов типа два может быть доказано в T_3 , но не может быть доказано во всякой системе I_n . Примером может служить класс всех x_1 , таких, что $(Ex_2).(x_1 \in z_2 \& z_2 \in w_3)$, где w_3 есть заданный класс типа три.

Хорошо известно, что системы, допускающие непредикативные определения (ср. гл. II) существования класса, являются более сильными, чем системы, их не допускающие. I_n (при любом данном n) и T_3 включают в себя непредикативные определения (в $T_n 9'$ и $T_3 9$ соответственно), так как в определение классов некоторого типа могут входить связанные

переменные того же типа. Однако тот факт, что T_3 сильнее, чем I_n , может быть объяснен при помощи следующего общего положения: принцип существования класса тем сильнее, чем более высокого типа переменные (в частности, связанные переменные) могут входить в его формулировку.

Имеется также другое применение этого общего принципа. Интуитивные модели теории множеств Цермело и теории типов подобны друг другу. Индивиды иерархии типов и конечные множества модели Цермело, т. е. множества, являющиеся членами $p(\omega)$ (ср. гл. III), могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие друг с другом, поскольку число и тех и других бесконечно и счетно.

Итак, мы, казалось бы, могли классам типа два в иерархии типов поставить в соответствие множества из $p(\omega + 1)$ модели Цермело, классам типа три — множества из $p(\omega + 2)$ и т. д. Мы могли бы также сказать, что интуитивные модели для Z и T имеют равную силу.

Несмотря на эту возможную эквивалентность моделей для Z и T , можно доказать, что система Z сильнее, чем T .

Кемени построил в Z истинное определение T и, кроме того, доказал следующий интересный результат [66]:

7.6. Непротиворечивость T может быть доказана в Z .

Аксиома выделения Z_3 представляет собой принцип существования класса в Z , соответствующий аксиоме выделения T_2 в T и, кроме того, согласно Z_3 в выражения системы Z могут входить общие переменные, которые в системе Цермело пробегают всю область допустимых значений. Другими словами, при помощи Z_3 множество (целых положительных чисел) может быть определено в терминах совокупности, включающей в себя всю область возможных значений.

С другой стороны, в силу самой сути теории типов, на основании аксиомы T_2 недопустимы такие переменные, которые пробегают всю область возможных значений. Прибегая к термину „тип переменных“, мы можем сказать, что все переменные в T имеют определенный конечный тип, в то время как переменные в Z имеют тип или неопределенный, или бесконечный. Это различие переменных, входящих в T_2 и Z_3 , по-видимому, объясняет, почему Z сильнее, чем T ,

ЛИТЕРАТУРА

Адамар (Hadamard J.)

- [1] Cinq lettres sur la théorie des ensembles, *Bull. Soc. math. France*, 13 (1905).

Аккерман (Ackermann W.)

- [2] Die Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1924.
- [3] Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, *Math. Ann.* 99 (1928).
- [4] Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre, *Math. Ann.*, 114 (1937).
- [5] Mengentheoretische Begründung der Logik, *Math. Ann.*, 115 (1937—1938).

Бернайс (Bernays P.)

- [6] Sur le platonisme dans les mathématiques, *L'Ens. math.*, 34 (1935—1936).
- [7] A system of axiomatic set theory, *J. Symbolic Logic*, Part I 2 (1937); Part II, 6 (1941); Part III, Part IV, 7 (1942); Part V, 8 (1943); Part VI, 13 (1948).
- [8] Review of [73], *J. Symbolic Logic*, 2 (1937), 86.

Бет (Beth E. W.)

- [9] Les fondements logiques des mathématiques (Gauthier-Villars, Paris, 1950).

Боргерс (Borgers A.)

- [10] Development of the notion of set and of the axioms for sets., *Synthese*, 7 (1948—1949).

Борель (Borel E.)

- [11] Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles, *Math. Ann.*, 60 (1905).
- [12] Les "paradoxes" de la théorie des ensembles, *Ann. scient. Ecole norm. supér.* (Paris), 3^e s., 25 (1908).

Брауэр (Brouwer L. E. J.)

- [13] De onbetrouwbaarheid der logische principes, *Tijdschr. wijsbegeerte*, 2 (1908).
- [14] Intuitionisme et formalisme, 1912.
- [15] Begründung der Mengenlehre, 1918, 1919.

- [16] Mathematik, Wissenschaft und Sprache, *Monatsh. Math. Phys.*, 36 (1929).

Брунсвиг (Brunschwig L.)

- [17] Les étapes de la philosophie mathématique, 1912.

Буралли-Форти (Buralli-Forti)

- [18] Una questione sui numeri transfiniti, *Rend. Palermo*, 11 (1897), 154—164.

Вайсман (Waismann F.)

- [19] Einführung in das mathematische Denken, 1936.

Ван Хао (Wang Hao)

- [20] A new theory of element and number, *J. Symbolic Logic*, 13 (1948).

- [21] On Zermelo's and von Neumann's axioms for set theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 35 (1949).

- [22] A theory of constructive types, *Methodos*, 1 (1949).

- [23] A formal system of logic, *J. Symbolic Logic*, 15 (1950).

- [24] Remarks on the comparison of axioms systems, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 36 (1950).

- [25] The non finitizability of impredicative principles, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 39 (1950).

- [26] Existence of classes and value specification of variables, *J. Symbolic Logic*, 15 (1950).

- [27] Set-theoretical basis for real numbers, там же.

- [28] Arithmetic translations of axioms systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71 (1951).

- [29] Truth definitions and consistency proofs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 73 (1952).

- [30] Arithmetic models for formal systems, *Methodos*, 3 (1951).

Вейль (Weyl H.)

- [31] Das Kontinuum, 1918.

- [32] Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, *Math. Z.*, 10 (1921).

- [33] Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, 1927.
Русский перевод: Вейль Г., О философии математики, М., 1934.

Винер (Wiener N.)

- [34] A simplification of the logic of relations, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 17 (1912—1914).

Гальперин (Hailperin Th.)

- [35] A set of axioms for logic, *J. Symbolic Logic*, 9 (1944).

Гейтинг (Heyting A.)

- [36] Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik
Sitz. Preus. Akad. Wissen., 1930.

- [37] Mathematische Grundlagenforschung, 1934. Русский перевод: Гейтинг А., Обзор исследований по основаниям математики, М.—Л., 1936.

Генцен (Gentzen G.)

- [38] Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik, *Math. Z.*, 41 (1936).
- [39] Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung, 1938.

Гессенберг (Hessenberg G.)

- [40] Grundbegriffe der Mengenlehre, 1906.

Гёдель (Gödel K.)

- [41] Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatsh. Math. Phys.*, 37 (1930).
- [42] Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatsh. Math. Phys.*, 38 (1931).
- [43] Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 4 (1931—1932).
- [44] On undecidable propositions of formal mathematical systems, 1934.
- [45] The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum-hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 24 (1938).
- [46] Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 25 (1939).
- [47] The consistency of the continuum hypothesis, Princeton, 1940.
- [48] Russell's mathematical logic, *Philosophy of Bertrand Russell*, 1944.
- [49] What is the continuum problem?, *Am. math. monthly* (1947).

Гильберт (Hilbert D.)

- [50] Mathematische Probleme, *Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, 1900.
- [51] Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, Leipzig, 1905. Русский перевод: Гильберт Д., Основания геометрии, Об основаниях логики и арифметики, М.—Л., 1948, стр. 322—337.

- [52] Axiomatische Denken, *Math. Ann.*, 78 (1918).
- [53] Über das Unendliche, *Math. Ann.*, 95 (1926). Русский перевод: Гильберт Д., Основания геометрии, О бесконечном, М.—Л., 1948, стр. 338—364.
- Гильберт и Аckerман (Hilbert D. et Ackermann W.)
- [54] Grundzüge der theoretischen Logik, 1928, 1938, 1949. Русский перевод: Гильберт Д. и Аckerман В., Основы теоретической логики, М., 1947.
- Гильберт и Бернайс (Hilbert D. et Bernays P.)
- [55] Grundlagen der Mathematik, Springer, Berlin, t. 1, 1934, t. 2, 1939.
- Греллиг (Grelling K.)
- [56] Die Axiome der Arithmetik, Dissertation, Göttingen, 1910.
- [57] Mengenlehre, Leipzig, 1924.
- Дедекинд (Dedekind R.)
- [58] Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872. Русский перевод: Дедекинд Р., Непрерывность и иррациональные числа, Одесса, 1914 (3-е изд.), 1923 (4-е изд.).
- [59] Was sind und was sollen die Zahlen?, 1888.
- Йоргенсен (Jørgensen J.)
- [60] A treatise of formal logic, 1931.
- Кавайлес Ж. (Cavaillès J.)
- [61] Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles, 1938.
- [62] Méthode axiomatique et formalisme, 1938.
- Кантор (Cantor G.)
- [63] Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, red. par Ernst Zermelo, Berlin, 1932.
- Карнап (Carnap R.)
- [64] Abriss der Logistik, 1929.
- [65] Logical syntax of language, 1937.
- Кемени (Kemeny J. G.)
- [66] Type theory vs. set theory, Dissertation, Princeton University, 1949.
- Кёниг (König J.)
- [67] Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem, *Math. Ann.*, 61 (1905), 63 (1907).
- Колмогоров А. Н.
- [68] О принципе “tertium non datur”, *Матем. сб.*, 32 (1924—1925),

- [69] Zur Deutung der intuitionistischen Logik, *Math. Z.*, 3 (1932).

Куайн (Quine W. V.)

- [70] A system of logistic, 1934.
- [71] On the axiom of reducibility, *Mind*, 45 (1936).
- [72] Set-theoretic foundations for logic, *J. Symbolic Logic*, 1 (1936).
- [73] New foundations for the mathematical logic, *Am. math monthly*, 44 (1938).
- [74] On Cantor's theorem, *J. Symbolic Logic*, 2 (1937).
- [75] On the theory of types, *J. Symbolic Logic*, 3 (1938).
- [76] Mathematical logic, 1940, 1947, 1951.
- [77] Element and number, *J. Symbolic Logic*, 6 (1941).
- [78] Whitehead and the rise of modern logic, The philosophy of A. N. Whitehead, 1941.
- [79] On existence conditions for elements and classes, *J. Symbolic Logic*, 7 (1942).
- [80] On ordered pairs, *J. Symbolic Logic*, 10 (1945).
- [81] Methods of logic, 1950.

Кутюра (Couturat L.)

- [82] La logique de Leibniz, 1901.

Лангфорд (Langford C. H.)

- [83] Analytic completeness of postulate sets, *Proc. London Math. Soc.*, 25 (1926).

Лебег (Lebesgue H.)

- [84] Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo, *Bull. Soc. Math. France*, 35 (1907).

Лёвенгейм (Löwenheim L.)

- [85] Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Ann.*, 76 (1915).

Лоренцен (Lorenzen P.)

- [86] Konstruktive Begründung der Mathematik, *Math. Z.*, 53 (1950).

- [87] Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis, *Math. Z.*, 54 (1951).

- [88] Mass und Integral in der konstruktiven Analysis, *Math. Z.*, 54 (1951).

- [89] Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände, *J. Symbolic Logic*, 16 (1951).

Льюис (Lewis C. I.)

- [90] A survey of symbolic logic, 1918.

Майхилл (Myhill J. R.)

[91] Report on some investigations concerning the consistency of the axiom of reducibility, *J. Symbolic Logic*, 16 (1951).

[92] Toward a consistent set-theory, там же.

Мак-Нотон (McNaughton R.)

[93] Some formal relative consistency proofs, *J. Symbolic Logic*, 18 (1953).

Мартин (Martin R. M.)

[94] A homogeneous system for formal logic, *J. Symbolic Logic*, 8 (1943).

Мостовский (Mostowski A.)

[95] Über den Begriff einer endlichen Menge, *Comp. rend. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Classe III*, 31 (1938).

[96] Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatz vom Ordnungsprinzip, *Fund. math.*, 32 (1939).

[97] Some impredicative definitions in the axiomatic set-theory, *Fund. math.*, 37 (1950).

Нейман (Neumann J. von)

[98] Zur Einführung der transfiniten Zahlen, *Acta litt. Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae*, 1 (1923).

[99] Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *J. reine und angew. Math.*, 154 (1925).

[100] Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Math. Z.*, 27 (1928).

[101] Über eine Widersprüchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre, *J. reine und angew. Math.*, 160 (1929).

Новак (Novak I. L.)

[102] A construction for models of consistent systems, *Fund. math.*, 37 (1950).

Пeanо (Peano G.)

[103] Arithmetices principia, 1889.

[104] Sul concetto di numero, *Riv. mat.*, 1 (1891), 87—102, 256—267.

[105] Notations de logique mathématique, 1894.

Пуанкаре (Poincaré H.)

[106] Les mathématiques et la logique, *Rev. métaph. mor.*, 13 (1905), 14 (1906).

[107] La logique de l'infini, *Rev. métaph. mor.*, 17 (1909).

[108] Dernières pensées, 1913. Русский перевод: Пуанкаре А., Последние мысли, П-д, 1923.

Рамсей (Ramsey F. P.)

[109] The foundations of mathematics, 1931.

Рассел (Russell B.)

- [110] The principles of mathematics, 1903.
- [111] On some difficulties in the theory of transfinite number and orders types, *Proc. London Math. Soc.*, 2 s., 4 (1906)
- [112] Mathematical logic as based on the theory of types, *Amer. J. Math.*, 30 (1908).
- [113] Introduction to the mathematical philosophy, 1919.

Ришар (Richard J.)

- [114] Les principes des mathématiques et le problème des ensembles, *Rev. gén. sci. pures et appl.*, 16 (1905).
- [115] Sur la logique et la notion de nombre entier, *L'Ens. math.*, 9 (1907).
- [116] Considérations sur la logique et les ensembles, *Rev. métaph. mor.*, 27 (1920).

Робинсон (Robinson R. M.)

- [117] The theory of classes, *J. Symbolic Logic*, 2 (1937).

Россер (Rosser J. B.)

- [118] On the consistency of Quine's new foundations for mathematical logic, *J. Symbolic Logic*, 4 (1939).
- [119] Burali-Forti paradox, *J. Symbolic Logic*, 7 (1942).

Россер и Ван Хао (Rosser and Wang Hao)

- [120] Non-standard models for formal logics, *J. Symbolic Logic*, 15 (1950).

Скolem (Skolem Th.)

- [121] Logisch-kombinatorische Untersuchungen..., 1920.
- [122] Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre (Vortrag, Juli 1922), 1923.
- [123] Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, 1929.
- [124] Sur la portée du théorème de Löwenheim—Skolem, *Les entretiens de Zürich*, 1938, publié 1941.

Тарский (Tarski A.)

- [125] Sur les ensembles finis, *Fund. Math.*, 6 (1924).
- [126] Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften, *Monatsh. Math. Phys.*, 37 (1930).
- [127] Sur les ensembles définissables de nombres réels, *Fund. math.*, 17 (1931).
- [128] Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω -Widerspruchsfreiheit und der ω -Vollständigkeit, *Monatsh. Math. Phys.*
- [129] Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia philosophica*, 1 (1936).

- [130] On undecidable statements in enlarged systems of logic and the concept of truth, *J. Symbolic Logic*, 4 (1939).

Тарский и Линденбаум (Tarski A. et Lindenbaum A.).

- [131] Communication sur les recherches de la théorie des ensembles, *Comp. rend. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Classe III*, 19. (1926).

Уайтхед и Рассел (Whitehead A. N. and Russell B.).

- [132] Principia mathematica, t. 1, 1910, t. 2, 1912, t. 3, 1913, Introduction and appendices to the second edition, 1925.

Финслер (Finsler P.)

- [133] Formale Beweise und die Entscheidbarkeit, *Math. Z.*, 25 (1926).

- [134] Über die Grundlagen der Mengenlehre, *Math. Z.*, 25 (1926).

Фитч (Fitch F. B.)

- [135] The consistency of the ramified Principia, *J. Symbolic Logic*, 3 (1938).

- [136] Hypothesis that infinite classes are similar, *J. Symbolic Logic*, 4 (1939).

- [137] A basic logic, *J. Symbolic Logic*, 7 (1942).

- [138] Representations of calculi, *J. Symbolic Logic*, 9 (1944).

- [139] A minimum calculus for logic, там же.

- [140] Self-reference in philosophy, *Mind*, 55 (1946).

- [141] Extension of basic logic, *J. Symbolic Logic*, 13 (1948).

- [142] The Heine — Borel theorem in extended basic logic, *J. Symbolic Logic*, 14 (1949).

- [143] A further consistent extension of basic logic, там же.

- [144] A demonstrably consistent mathematics, *J. Symbolic Logic*, 15 (1950); 16 (1951).

Фрэгэ (Frege G.)

- [145] Begriffsschrift, Halle, 1879.

- [146] Die Grundlagen der Arithmetik, 1884.

- [147] Grundgesetze der Arithmetik, t. 1, 1893; t. 2, 1903.

Фраенкель (Fraenkel A.)

- [148] Einleitung in die Mengenlehre, 1919, 1923, 1928.

- [149] Der Begriff "definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms, *Sitz. Preus. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.*, 1922.

- [150] Zu den Grundlagen der Cantor — Zermeloschen Mengenlehre, *Math. Ann.*, 86 (1922).

- [151] Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Math. Z.*, 22 (1925).

- [152] Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, 1927.

Х вистек (Chwistek L.)

- [153] Zasada sprzeczności w świetle nowszych badań Bertranda Russella, *Rozpr. Akad. Umiejętności*, (Kraków), Wydział hist.-filozof., 2 s., 30 (1912).
- [154] Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik, *Math. Z.*, 14 (1922).
- [155] The theory of constructive types, *Ann. Soc. Polonaise Math.*, 2 (1924); 3 (1925).
- [156] Über die Hypothesen der Mengenlehre, *Math. Z.*, 25 (1926).
- [157] Neue Grundlagen der Logik und Mathematik, *Math. Z.*, 30 (1929), 34 (1932).

Хенкин (Henkin L.)

- [158] The completeness of the first-order functional calculus, *J. Symbolic Logic*, 14 (1949).
- [159] Completeness in the theory of types, *J. Symbolic Logic*, 15 (1950).

Цермело (Zermelo E.)

- [160] Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.*, 59 (1904).
- [161] Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *Math. Ann.*, 65 (1908).
- [162] Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, там же.
- [163] Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète, *Acta math.*, 32 (1909).
- [164] Über Grenzzahlen und Mengenbereiche, *Fund. math.*, 16 (1930).

Черч (Church A.)

- [165] Alternatives to Zermelo's assumption, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 29 (1927).
- [166] A set of postulates for the foundations of logic, *Ann. math.*, 33 (1932); 34 (1933).
- [167] A formulation of the simple theory of types, *J. Symbolic Logic*, 5 (1940).
- [168] Formal logic, etc. *Dictionary of philosophy*, 1942.
- [169] Introduction to mathematical logic, 1956. Русский перевод: Чёрч А., Введение в математическую логику, ИЛ, М., 1960.

Шепердсон (Shepherdson J. C.)

- [170] Inner models for set theory, *J. Symbolic Logic*, 16 (1951).

Шютте (Schütte K.)

[171] Beweistheoretische Untersuchung der verzweigten Analysis, *Math. Ann.*, 124 (1952).

Эрбран (Негванд J.)

[172] Recherches sur la théorie de la démonstration, 1930.

[173] Sur le problème fondamental de la logique mathématique, *Comp. rend. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Classe III*, 24 (1931).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА¹⁾

Бенеш (Венес V. E.)

A partial model for Quine's "New Foundations". *J. Symbolic Logic*, 19 (1954), 197—200.

Бернайс (Бернайс P.)

A system of axiomatic set theory. VII, *J. Symbolic Logic*, 19 (1954), 81—96.

Axiomatic set theory. With a historical introduction by Fraenkel A. A., Amsterdam, 1958.

Бет (Beth E. W.)

Sur la description de certains modèles d'un système formel, Actes du XI Congrès Intern. de Philosophie, vol. V, 1953, p. 64—69.

Бочвар Д. А.

О парадоксах и расширенном исчислении предикатов, *Матем. сб.*, новая сер., 42 (84) (1957), 3—10.

Бюргер (Bürgger E.)

Eine Bemerkung zur Bernays—Gödel-Mengenlehre, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 4 (1958), 178—179.

Ван Хао (Wang Hao)

Certain predicates defined by induction schemata, *J. Symbolic Logic*, 18 (1953), 49—59.

Between number theory and set theory, *Math. Ann.*, 126 (1953), 385—409.

The Formalization of mathematics, *J. Symbolic Logic*, 19 (1954), 241—266.

Вегель (Wegel H.)

Axiomatische Mengenlehre ohne Elemente von Mengen, *Math. Ann.*, 131 (1956), 435—462.

Злот (Zlot W.)

Some comments on the role of the axiom of choice in the deve-

¹⁾ Добавлена переводчиком.

lopment of abstract set theory, *Math. Mag.*, 32 (1958—1959), 115—122.

Клиновский (Klimovsky G.)

Tres enunciados equivalentes al teorema de Zorn. *Contribuciones Científicas, Serie Mathematica*, vol. 2, № 1, Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Buenos Aires, 1956.

Клава (Klava D.)

Ein Aufbau der Mengenlehre mit transfiniten Typen, formalisiert im Prädikatenkalkül der ersten Stufe, *Z. Math. Logic Grundlagen Math.*, 3 (1957), 303—316.

Коган (Cogan E. J.)

A formalisation of the theory of sets from the point of view of combinatory logic, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 1 (1955), 198—240.

Краснер (Krasner M.)

Théorie de la définition II. Théorie de catégories supérieures. Systèmes non Kroneckériens. Origine et solution de paradoxes. La signification du definitionisme, *J. Math. Pures Appl.* (9), 37 (1958), 55—101.

Крейзель и Ван Хао (Kreisel G. and Wang Hao)

Some applications of formalised consistency proofs, *Fund. Math.*, 42 (1955), 101—110.

Applications of formalized consistency proofs, II. *Fund. Math.*, 45 (1958), 334—335.

Куайн (Quine W. V.)

Unification of universes in set theory, *J. Symbolic Logic*, 21 (1956), 267—279.

Куратовский, Мостовский (Kuratowski K., Mostowski A.)

Theorie Mnogości, Warszawa — Wrocław, 1952.

Леви (Lévy A.)

The independence of various definitions of finiteness, *Fund. Math.*, 46 (1958), 1—13.

Мак-Нотон (McNaughton R.)

A non-standard truth definition, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (1954), 505—509.

Менделсон (Mendelson E.)

Some Proofs of independence in axiomatic set theory, *J. Symbolic Logic*, 21 (1956), 291—303.

The independence of a weak axiom of choice, *J. Symbolic Logic*, 21 (1956), 350—366.

The Axiom of Fundierung and axiom of choice, *Arch. Math. Logik Grundlagenforsch.*, 4 (1958), 65—70.

Мостовский (Mostowski A.)

On models of axiomatic set theory, *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III*, 4 (1956), 663—667.

On a problem of W. Kinna und K. Wagner, *Colloq. Math.*, 6 (1958), 207—208.

Ори (Orey S.)

On the relative consistency of set theory, *J. Symbolic Logic*, 21 (1956), 280—290.

Ригер (Rieger L.)

A Contribution to Gödel's axiomatic set theory. I, *Czechosl. Math. J.*, 7 (82) (1957), 323—357.

Россер (Rosser B.)

The relative strength of Zermelo's set theory and Quine's new foundations, *Proc. Int. Congr. Math.*, v. III, Amsterdam, 1954, 1956, p. 289—294.

Сапп (Suppes P.)

Axiomatic set theory, D. Van Nostrand Co., 1960.

Скolem (Skolem Th.)

A remark on a set theory based on positive logic. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, Trondheim, 25 (1952), 112—116.

Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 3 (1957), 1—17.

Two remarks on set theory, *Math. Scand.*, 5 (1957), 40—46.

Спекер (Specker E.)

Die Antinomien der Mengenlehre, *Dialectica*, 8 (1954), 234—244.

Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs- und Auswahlaxiom), *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 3 (1957), 173—210.

Такенти (Takenti G.)

Construction of the set theory from the theory of ordinal numbers, *J. Math. Soc. Japan*, 6 (1954), 196—220.

On Skolem's theorem, *J. Math. Soc. Japan*, 9 (1957), 71—76.

Remark on my paper: On Skolem's theorem, *J. Math. Soc. Japan*, 9 (1957), 192—194.

On the theory of ordinal numbers. II, *J. Math. Soc. Japan*, 10 (1958), 106—120.

Тиеле (Thiele E.-J.)

- Ein axiomatisches System der Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 1 (1955), 173—185.
- Трахтенброт Б. А. Отделение конечного множества и дедуктивная неполнота теории множеств, *Изв. АН СССР*, сер. мат., 20 (1956), 569—582.
- Френкель (Fraenkel A.) Paul Bernays und die Begründung der Mengenlehre, *Dialectica*, 12 (1958), 274—279.
- Френкель и Бар-Хилел (Fraenkel A. and Bar-Hillel Y.) Foundations of set theory, Amsterdam, 1958.
- Фраисс (Fraïssé R.) Un modèle définissant une théorie aberrante des ensembles où sont niés les axiomes du choix et d'extensionalité, *Publ. Sci. Univ. Alger.*, Sér. A5 (1958), 17—98.
- Хайнал (Hajnal A.) The work of G. von Neumann in the axiomatic set theory, *Mat. Lapok*, 10 (1959), 5—11.
- Хайнал и Кальмар (Hajnal A. and Kalmár L.) An elementary combinatorial theorem with an application of axiomatic set theory, *Publ. Math. Debrecen*, 4 (1956), 431—449.
- Халмос (Halmos P.) Naive set theory, D. Van Nostrand Co., 1960.
- Хинтика и Яакко (Hintikka K., Yaakko I.) Vicious circle principle and the paradoxes, *J. Symbolic Logic*, 22 (1957), 245—249.
- Шмидт (Schmidt I.) Mehrstufige Austauschstrukturen, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 2 (1956), 233—249.
- Шоенфильд (Shoenfield G. R.) On the independence of the axiom of constructibility, *Amer. J. Math.*, 81 (1959), 537—540.

ТАБЛИЦА ОБОЗНАЧЕНИЙ

Буквы

В Система Неймана — Бернайса

С Множество

F Предложение, см. $F(x)$

I Бесконечное множество

I_n Система аксиом, аналогичная системе T_n , с заменой $T_n 9$ на $T_n 9'$

t, j, t Целые числа

L, L' Символизмы

0 Число ноль

0₁, ..., 0₈ Операции, порождающие классы, определенные В.10a — В.10h

P Порождающая операция

p Предложение

S Пространство

S' Пространство

T Система типов Рассела

T₁, T₂, ..., T_n Более слабые системы аксиом

t, u, v, w, x, y, z Переменные, обозначающие индивиды или множества

V Универсальное множество в NF

W_t Предложение в T_n

X, Y Переменные, обозначающие классы в В

Z Формальная система Цермело

Λ Нулевое множество, пустое множество

ω Первое трансфинитное порядковое число
(порядковое число, соответствующее I)

Группы букв

F(x) Предложение в Т, в Z, в ML

F(u, v) Предложение в ZF

ML Расширенная система Куайна

NF	„Зигзаг“-система Куайна
$N(x)$	Предикат в T_1
$p(k)$	Множество
Thm_{n-1}	Предикат, состоящий в том, что некоторое предложение является теоремой в T_{n-1}
Tr	Предикат, состоящий в том, что некоторое предложение истинно
ZF	Система Цермело — Френкеля

Знаки

\equiv	Эквивалентность
\supset	Импликация
\sim	Отрицание
$\&$	Конъюнкция
\vee	Дизъюнкция
$(x).$	„Для всякого $x \dots$ “
$E(x).$	„Существует x , такой, что \dots “

Арифметические знаки

$+$	Сложение чисел
$-$	Вычитание целых чисел
$>$	Больше чем
\geqslant	Больше или равно

Знаки для множеств

$=$	Тождество в Т
	в Z, в NF, в T_n
$\{x\}$	Множество, образованное одним элементом x
$\{x_i, y_i\}$	Пара (неупорядоченная)
$\langle x_i, y_i \rangle$	Пара упорядоченная
$\langle x, y, z \rangle$	Тройка упорядоченная
\wedge	Нулевое множество, пустое множество
\cup	Сумма множеств
\in	Принадлежит к (отношение элемента к множеству)
\in^*	Предикат на множестве, соответствующий \in в арифметической модели множеств для ZF

- Є Предикат, представляющий отношение элемента к классу в арифметической модели для В
- Є* Предикат, представляющий отношение элемента к множеству в арифметической модели для В

ТАБЛИЦА СИСТЕМ АКСИОМ

- T Теория типов Рассела
- Z Теория множеств Цермело
- ZF Теория множеств Цермело — Френкеля
- B Теория множеств Неймана — Бернайса
- NF „Зигзаг“-теория Куайна
- ML Расширенная теория Куайна
- T_1 Теория множеств для натуральных чисел или общая теория множеств
- T_2 Теория множеств для действительных чисел
- T_3 Теория множеств для функций
- T_n Теория порядка n

СПИСОК АКСИОМ, ИМЕЮЩИХ НАИМЕНОВАНИЕ

Аксиома объемности	T_1
” ”	Z_1
” ”	NF1
” ”	T_n^8
Аксиома выделения	T_2
” ”	Z_3
Аксиома бесконечности	T_3
” ”	Z_7
Аксиома объединения	Z_2
Аксиома множества подмножеств	Z_4
Аксиома множества-суммы	Z_5
Аксиома выбора	Z_6
Аксиома ограничения	Z_8
Аксиома подстановки	ZF9
„Зигзаг“-аксиома	NF2
Аксиома выделения	T_n^9
” ”	T_n^9'

УКАЗАТЕЛЬ АВТОРОВ

- Бернайс (Bernays) 16, 21, 36, 45
Бурали-Форти (Buralli-Forti) 9, 37
Гёдель (Godel) 20, 31, 32, 38
Дедекинд (Dedekind) 19, 39
Кант (Kant) 16
Кантор (Cantor) 9, 16, 19, 39
Кемени (Kemeny) 35, 39
Куайн (Quine) 25, 26, 40
Лёвенгейм (Löwenheim) 23, 27, 40
Мостовский (Mostowski) 33, 41, 47
Нейман (von Neumann) 16, 21, 41
Пeanо (Peano) 30, 41
Рассел (Russell) 9, 10, 11, 14, 15, 42
Скolem (Skolem) 23, 27, 42, 47
Тарский (Tarski) 31, 32, 42
Френкель (Fraenkel) 16, 19, 20, 21, 43, 48
Цермело (Zermelo) 10, 16, 17, 19 20, 21, 25
35, 44

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие к французскому изданию	7
От авторов	8
<i>Глава I. Кантор. Теория множеств с наивной точки зрения</i>	9
<i>Глава II. Теория типов</i>	11
<i>Глава III. Теория множеств Цермело</i>	16
А. Теория Цермело	16
Б. Теория Цермело — Френкеля	19
<i>Глава IV. Теория множеств Неймана — Бернайса</i>	21
<i>Глава V. Системы теории множеств Куайна</i>	25
А. Зигзаг [“] -теория	25
Б. Расширенная теория	26
<i>Глава VI. Несколько более слабых теорий множеств</i>	28
А. Введение	28
Б. Теория T_1	28
В. Теория T_n	30
<i>Глава VII. Список систем</i>	33
Литература	36
Дополнительная литература	45
Таблица обозначений	49
Таблица систем аксиом	51
Список аксиом, имеющих наименование	51
Указатель авторов	52

Ван Хао и Р. Мак-Нотон
АКСИОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Редактор *А. А. Бряндинская*

Художник *М. Г. Ровенский*

Художественный редактор

В. И. Шаповалов

Технический редактор *Ю. И. Коротеева*

Корректор *Т. А. Палладина*

Сдано в производство 25/VII 1962 г.

Подписано к печати 16/X 1962 г.

Бумага 84×108^{1/2}= 0,9 бум. л.

2,9 печ. л. Уч.-изд. л. 2,3. Изд. № 1/1543

Цена 16 коп. Зак. 597

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УЦБ и ПП Ленсовнархоза
Ленинград. Измайловский пр., 29

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

выпускает серию брошюр
под общим названием

„БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА „МАТЕМАТИКА“

Вышли из печати

Микусинский Я., Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций. Вып. I. Варшава, 1957, перевод с английского, 3,5 изд. л.

Хёрмандер Л., К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. Уppsала, 1959, перевод с английского, 6 изд. л.

Халмуш П. Р., Лекции по эргодической теории. Токио, 1956, перевод с английского, 7 изд. л.

Капланский И., Введение в дифференциальную алгебру. Париж, 1957, перевод с английского, 4 изд. л.

Карлеман Т., Математические задачи кинетической теории газов. Уppsала, 1957, перевод с французского, 5,7 изд. л.

Хейман В. К. Многолистные функции. Кембридж 1958, перевод с английского, 8,4 изд. л.

Номидзу К., Группы Ли и диффеरенциальная геометрия. Токио, 1956, перевод с английского, 6 изд. л.

Судзуки М., Строение группы и строение структуры ее подгрупп. Берлин — Геттинген — Гейдельберг, 1956, перевод с английского, 7 изд. л.

Рутисхаузер Г., Алгоритм частных и разностей. Базель — Штутгарт, 1957, перевод с немецкого, 4 изд. л.

Ито К., Вероятностные процессы. Вып. I. Токио 1957, перевод с японского, 6,1 изд. л.

Гренандер У., Случайные процессы и статистические выводы. Стокгольм, 1960, перевод с английского, 8 изд. л.

Гординг Л., Задача Коши для гиперболических уравнений. Чикаго, 1957, перевод с английского, 5,3 изд. л.

Гудстейн Р. Л., Математическая логика. Лейчестер, 1957, перевод с английского, 7,9 изд. л.

Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. Берлин, 1958, перевод с английского, 11,2 изд. л.

Гротендиц А., О некоторых вопросах гомологической алгебры. Япония, 1957, перевод с французского, 8,9 изд. л.

Альфорс Л., Берс Л., Пространства риманиевых поверхностей и квазиконформные отображения. Сборник статей, перевод с английского, 8,7 изд. л.

Лёре Ж., Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии. Париж, 1959, перевод с французского, 6 изд. л.

Мандельбройт С., Теоремы замкнутости и теоремы композиции. Издание оригинальное, 7 изд. л.

Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. США, 1959, перевод с английского, 9,3 изд. л.

Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Париж, 1955, перевод с французского, 13 изд. л.

Хант Дж. А., Марковские процессы и потенциалы. Урбана, 1959, перевод с английского, 10 изд. л.

Находятся в печати

Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения. Берлин — Геттинген — Гейдельберг, 1958, перевод с английского, 10 изд. л.

Хёрмандер Л., Операторы, инвариантные относительно сдвига. Уппсала, 1960, перевод с английского, 5 изд. л.

Зойтендейк Г., Методы возможных направлений. Амстердам, 1960, перевод с английского, 8 изд. л.

Холл М., Комбинаторный анализ. США, 1960, перевод с английского, 5 изд. л.

Ито К., Вероятностные процессы. Вып. II. Токио, 1957, перевод с японского, 5 изд. л.

Микусинский Я., Сикорский Р., Элементарная теория обобщенных функций. Вып. II. Варшава, 1960, 4 изд. л.

Готовятся к печати

Возенкрафт Дж., Рейффен Б., Последовательное декодирование. США, 1960, перевод с английского, 6 изд. л.

Носиро К., Предельные множества. Берлин — Геттинген — Гейдельберг, 1960, перевод с английского, 9 изд. л.

Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. Лейпциг, 1959, перевод с немецкого, 7 изд. л.