

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА  
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

А. Н. ВАСИЛЬЕВ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ  
МЕТОДЫ  
В КВАНТОВОЙ  
ТЕОРИИ  
ПОЛЯ  
И СТАТИСТИКЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ЛЕНИНГРАД 1976

Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Ленинградского университета

УДК 530.145

Васильев А. Н. **Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике.** Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. 295 с.

Монография представляет собой систематическое введение в аппарат квантовой теории поля и характерную для него функциональную технику — представления различных величин функционалами и функциональными интегралами, уравнения в вариационных производных и т. д. В ней подчеркивается единство этого аппарата для совершенно различных разделов теоретической физики: обычной квантовой механики, квантовой механики в представлении вторичного квантования, релятивистской квантовой теории поля, евклидовой теории поля, квантовой статистики для конечных температур и классической статистики неидеального газа и спиновых систем.

Книга рассчитана на читателей, знакомых с основами квантовой механики, теории поля и статистики.

Ил. — 1, библиогр. — 87 назв.

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук, проф. *Л. Д. Фаддеев* (Ленинградское отделение Математического ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР), канд. физ.-мат. наук *В. А. Франке* (Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова, кафедра теории ядра и элементарных частиц).

# ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора . . . . .	5
<b>Глава I. ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ ТЕОРИИ ПОЛЯ</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>§ 1. Поля и свертки</b> . . . . .	—
1. Каноническое квантование (7). 2. Классическая свободная теория (9). 3. Антикommутующие поля (10). 4. Нормальное произведение операторов свободного поля (13).	
<b>§ 2. Функциональные формулировки теорем Вика</b> . . . . .	15
1. Теорема Вика для простого произведения (15). 2. Сум- и $T$ -произведения (18). 3. Теорема Вика для симметричных произведений (20). 4. Формулы приведения для операторных функционалов (23). 5. Виковское и дайсоновское $T$ -произведения (25).	
<b>§ 3. <math>S</math>-матрица и функции Грина</b> . . . . .	27
1. Определения (27). 2. Переход к представлению взаимодействия в операторе развития (28). 3. Переход к представлению взаимодействия для функций Грина (30). 4. Взаимодействие, содержащее производные поля по времени (34). 5. Производящие функционалы $S$ -матрицы и функций Грина (37).	
<b>§ 4. Диаграммы</b> . . . . .	39
1. Теория возмущений (39). 2. Некоторые понятия теории графов (40). 3. Симметричные коэффициенты (41). 4. Рекуррентное соотношение для симметричных коэффициентов (42). 5. Переход к майеровским графам для экспонциального взаимодействия (43). 6. Графы для взаимодействия типа Юкавы (44). 7. Графы для парного взаимодействия (48). 8. Связность логарифма $R(\varphi)$ (49). 9. Графы для функций Грина (51).	
<b>§ 5. Унитарность <math>S</math>-матрицы</b> . . . . .	54
1. Операция сопряжения (54). 2. Формальная унитарность $S$ -матрицы вне поверхности масс (55).	
<b>§ 6. Функциональные интегралы</b> . . . . .	58
1. Гауссовы интегралы (58). 2. Интегралы на грассмановой алгебре (61). 3. Гауссовы интегралы на грассмановой алгебре (63). 4. Гауссовы интегралы в теории поля (64). 5. Представления производящих функционалов $S$ -матрицы и функций Грина функциональными интегралами (67). 6. Метод стационарной фазы (69). 7. Теорема Доминисиса—Энглерта (71).	
<b>§ 7. Уравнения в вариационных производных</b> . . . . .	72
1. Уравнения Швингера (72). 2. Линейные уравнения для связанных функций Грина (75). 3. Общий метод вывода уравнений (75). 4. Итерационное решение уравнений (78).	
<b>§ 8. 1-неприводимые функции Грина</b> . . . . .	81
1. Определения (81). 2. Уравнения движения для $\Gamma$ (83). 3. Итерационное решение уравнений, доказательство 1-неприводимости (84).	
<b>§ 9. Ренормировочные преобразования</b> . . . . .	87
<b>§ 10. Аномальные функции Грина, спонтанное нарушение симметрии</b> . . . . .	89
<b>Глава II. КОНКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ</b> . . . . .	<b>92</b>
<b>§ 2. Квантовая механика</b> . . . . .	—
1. Осциллятор (93). 2. Свободная частица (94).	
<b>§ 2. Нерелятивистская теория поля</b> . . . . .	99
1. Квантовый бозе- или ферми-газ (102). 2. Атом (103). 3. Электроны в твердом теле, фононы (104).	
<b>§ 3. Релятивистская теория поля</b> . . . . .	105
<b>§ 4. Интегральные представления амплитуды перехода</b> . . . . .	108
<b>§ 5. Пространство <math>E(\Delta)</math> для различных систем</b> . . . . .	114
<b>§ 6. Функциональные интегралы по фазовому пространству</b> . . . . .	115
<b>Глава III. БЕЗМАССОВОЕ ПОЛЕ ЯНГА — МИЛЛСА</b> . . . . .	<b>119</b>
<b>§ 1. Квантование поля Янга — Миллса</b> . . . . .	—
1. Классическая теория (119). 2. Общий рецепт квантования (120). 3. Теория возмущений для калибровок $lB+c=0$ (123). 4. Обобщенная фейнмановская калибровка (126). 5. Производящий функционал $S$ -матрицы (126).	

**§ 2. Калибровочная инвариантность** . . . . . 128

1. Тожества Ворда — Славнова (128). 2. Поперечность и калибровочная инвариантность  $S$ -матрицы в электродинамике (128). 3. Поперечность и калибровочная инвариантность  $S$ -матрицы на поверхности масс для поля Янга — Миллса (131).

**Глава IV. ЕВКЛИДОВА ТЕОРИЯ ПОЛЯ** . . . . . 133

**§ 1. Евклидов разворот** . . . . . —

1. Определения (133). 2. Формальный евклидов разворот функционала действия (134). 3. Евклидов разворот функций Грина (135). 4. Свойства полей  $\varphi$  и действия  $S_e(\varphi)$  (137). 5. Разворот группы Лоренца в  $O_4$  (138). 6. Примеры (140).

**§ 2. Представления функциональными интегралами** . . . . . 142

**§ 3. Свойства выпуклости** . . . . . 146

1. Квазивероятностные теории (146). 2. Выпуклость и спектральные представления (148).

**Глава V. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА** . . . . . 151

**§ 1. Квантовая статистика полевых систем** . . . . . —

1. Определения (151). 2. Свободная теория (153). 3. Среднее значение оператора в  $N$ -форме (154). 4. Диаграммные представления статсуммы и функций Грина (157). 5. Периодические продолжения функций Грина (157). 6. Представления функциональными интегралами (160). 7. Предельный переход к нулевой температуре (161). 8. Формула Фейнмана — Каца (162). 9. Свойства выпуклости (163). 10. Выпуклость логарифма статсуммы (165). 11. Представление статсуммы свободной теории функциональным интегралом (166).

**§ 2. Решеточные спиновые системы** . . . . . 169

1. Модель Изинга (169). 2. Квантовый ферромагнетик Гайзенберга (171).

**§ 3. Классический неидеальный газ** . . . . . 173

1. Газ с парными силами (173). 2. Газ с многочастичными силами (176).

**Глава VI. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА** . . . . . 178

**§ 1. Фазовые переходы** . . . . . —

1. Введение (178). 2. Переход к вариационной задаче в термодинамике (179). 3. Предельный переход к бесконечному объему (184). 4. Особые и критические точки (186). 5. Описание фазовых переходов (188). 6. Критические и голдстоуновские флуктуации (191).

**§ 2. Преобразования Лежандра производящего функционала связанных функций Грина** . . . . . 194

1. Функциональные формулировки вариационного принципа (194). 2. Уравнения движения в связанных переменных (200). 3. Уравнения движения в 1-неприводимых переменных (206). 4. Линейные уравнения и их общие решения (210). 5. Итерационное решение уравнений (214). 6. Второе преобразование Лежандра (217). 7. Приближение самосогласованного поля (221). 8. Третье преобразование Лежандра (224). 9. Четвертое преобразование (229). 10. Уравнения стационарности, перенормировка, паркетные графики (236). 11. Свойства симметрии полного преобразования Лежандра, «спонтанное взаимодействие» (239). 12. Энергия основного состояния (243). 13. Устойчивость и свойства выпуклости функциональных преобразований Лежандра (245).

**§ 3. Преобразования Лежандра логарифма производящего функционала  $S$ -матрицы** . . . . . 248

1. Определения и общие свойства (248). 2. Классический неидеальный газ, вириальное разложение (253). 3. Модель Изинга (256). 4. Анализ незвездных графиков для модели Изинга (258). 5. Второе преобразование Лежандра для классического газа (264). 6. Уравнения стационарности и приближение самосогласованного поля (271).

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Нестационарная теория возмущений для дискретного уровня** . . . . . 275

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Графики и симметричные коэффициенты** . . . . . 284

**Указатель литературы** . . . . . 287

**Предметный указатель** . . . . . 291

## ОТ АВТОРА

Эта книга представляет собой существенно переработанный и расширенный курс лекций, читаемых автором в течение ряда лет для специализирующихся по теоретической физике студентов пятого курса физического факультета Ленинградского государственного университета. Она рассчитана на достаточно подготовленного читателя, знакомого с основами квантовой теории поля и статистической физики.

Книга посвящена не физике, как таковой, а ее аппарату. Исползованный в заглавии термин „функциональные методы“ обозначает совокупность различных технических приемов, позволяющих перевести квантовомеханический операторный формализм на язык классических объектов — нелинейных функционалов. Этот язык очень удобен для записи характерных для теории поля соотношений, например теорем Вика. Кроме того, он универсален и может быть использован в самых разных разделах теоретической физики: в квантовой теории поля, в евклидовой теории, в квантовой статистике полевых и спиновых систем и в статистике классического неидеального газа.

В главе I последовательно излагается математический аппарат обычной (псевдоевклидовой) квантовой теории поля, в следующих главах этот формализм конкретизируется и обобщается на евклидову теорию и статистическую физику. Короткая гл. III посвящена теории безмассового поля Янга — Миллса, а последняя гл. VI, занимающая около трети общего объема, — вариационным методам и функциональным преобразованиям Лежандра.

Материал глав I, II, IV и V, за исключением некоторых разделов, не нов, хотя его и не найдешь собранным в одном месте. Изложенное в этих главах правильнее всего определить как фольклор современной квантовой теории поля. Разу-

меется, этот фольклор возник не сам собой, а создан трудами множества людей, но я и не пытался составить сколько-нибудь подробный список литературы.

Несколько слов о порядке ссылок в тексте. Книга состоит из шести глав, разбитых на параграфы, большинство которых (но не все) в свою очередь делится на разделы. Параграфы и разделы нумеруются одной арабской цифрой, главы — римской, нумерация формул в пределах каждой главы сплошная. Отсутствие точного указания при ссылках всегда подразумевает слово „данный“. Например, (56) — формула (56) данной главы и (II.33) — формула (33) из (другой) гл. II. Аналогично, п. 2 — раздел 2 данного параграфа данной главы, § 3 — параграф 3 данной главы, п. 3.2 — раздел 2 § 3 данной главы, п. IV.2.4 — раздел 4 § 2 гл. IV, § III. 5 — параграф 5 гл. III, и т. п. Повсюду используется система единиц с  $\hbar = c = 1$ .

Мне остается лишь выполнить приятный долг и поблагодарить всех, кто помог в работе над книгой: Л. Д. Фаддеева и В. А. Франке, прочитавших рукопись и сделавших ряд ценных замечаний, которые учтены в окончательной редакции текста; А. Г. Басуева, Н. М. Боголюбова, А. К. Казанского, А. В. Кузьменко, Ю. М. Письмака и Р. А. Раджабова, оказавших на определенном этапе существенную помощь в оформлении рукописи. Я признателен также всем сотрудникам и аспирантам кафедры теории ядра и элементарных частиц физического факультета Ленинградского университета за многочисленные полезные обсуждения вопросов, затронутых в книге. Но более всего своим появлением на свет рукопись обязана моей жене, сумевшей создать необходимые условия для работы. Ей я и посвящаю эту книгу.

## § 1. ПОЛЯ И СВЕРТКИ

1. **Каноническое квантование.** В классической физике динамика системы с конечным числом степеней свободы определяется лагранжианом  $\mathcal{L}$ , который задается как функция обобщенных координат  $q = \{q_1 \dots q_n\}$  и скоростей  $\dot{q}_i \equiv dq_i/dt$ . Классические уравнения движения формулируются в виде требования стационарности функционала действия  $S = \int dt \mathcal{L}(t)$ .

Квантование классической системы осуществляется обычно в рамках канонического формализма; т. е. на языке координат и импульсов. Импульсы  $p_i$ , сопряженные с координатами  $q_i$ , определяются соотношениями  $p_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$ . Если эти соотношения однозначно разрешимы относительно скоростей, то говорят, что лагранжиан невырожден. В этом случае классический гамильтониан  $\mathcal{H} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$  можно рассматривать как некоторую известную функцию координат и импульсов.

При переходе к квантовой теории координаты и импульсы реализуются линейными эрмитовыми операторами  $\hat{q}_i$  и  $\hat{p}_i$ , действующими в некотором гильбертовом пространстве и удовлетворяющими каноническим перестановочным соотношениям  $\hat{q}_s \hat{p}_m - \hat{p}_m \hat{q}_s = i \delta_{sm}$ . Квантовым аналогом классической наблюдаемой  $F(p, q)$  считается оператор  $F(\hat{p}, \hat{q})$ , в частности, квантовый оператор энергии — гамильтониан  $\hat{H}$  — есть по определению  $\mathcal{H}(\hat{p}, \hat{q})$ . Эти правила перехода от классической теории к квантовой составляют хорошо известный рецепт канонического квантования.

Функция некоммутирующих операторов  $\mathcal{H}(\hat{p}, \hat{q})$  определена неоднозначно даже при наложении естественного добавочного требования эрмитовости. Прежде всего имеется произвол в расстановке множителей  $\hat{p}$  и  $q$ , т. е. произвол в вы-

боре формы записи классического гамильтониана  $\mathcal{H}(p, q)$ . Например равным классическим функциям  $p^2 + q^2$  и  $(p+iq)(p-iq)$  соответствуют при квантовании разные операторы. Это значит, что данной классической системе соответствует, вообще говоря, много разных квантовых систем, и выбор одной из них всегда является результатом доопределения.

Кроме этой „чисто алгебраической“ неоднозначности существует также неоднозначность выбора реализации операторов  $\hat{p}$  и  $\hat{q}$ : коммутационные соотношения не определяют ее единственным, хотя бы с точностью до унитарной эквивалентности, образом (известная теорема единственности фон Неймана относится лишь к вейлевской форме перестановочных соотношений). Выбор реализации требует привлечения дополнительных соображений относительно характера канонических переменных  $p$  и  $q$ : являются они переменными типа декартовых координат и импульсов или переменными типа угол — момент и т. д. Для рассматриваемых обычно конкретных систем существует некоторая естественная реализация, которая всегда и выбирается. В случае декартовых координат и импульсов — это общеизвестные представления операторами умножения и дифференцирования.

Рецепт канонического квантования со всеми этими оговорками легко переносится и на системы с бесконечным числом степеней свободы, обобщенные координаты которых, как правило, описываются „полем“  $q(\mathbf{x})$  или конечным набором таких полей. Аргумент  $\mathbf{x}$  играет роль непрерывного индекса, нумерующего координаты, лагранжиан будет теперь не функцией, а функционалом координат  $q(t, \mathbf{x})$  и скоростей  $\dot{q}(t, \mathbf{x})$  на поверхности  $t = \text{const}$ , в определении импульса обычная производная, заменится вариационной, а  $\delta$ -символ в перестановочных соотношениях заменится  $\delta$ -функцией [1]:

$$\hat{q}(\mathbf{x}) \hat{p}(\mathbf{x}') - \hat{p}(\mathbf{x}') \hat{q}(\mathbf{x}) = i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (1)$$

В этой книге термин „поле“ будет употребляться для обозначения обобщенных координат любых систем, независимо от того, идет ли речь об истинной теории поля или о системе с конечным числом степеней свободы. В частности, координата частицы в механике рассматривается как поле, зависящее только от времени. Для сокращения записи и унификации формул часто будут использоваться *универсальные обозначения*, в которых весь набор обобщенных координат описывается единым полем  $\varphi(x) \equiv \varphi(t, \mathbf{x})$ . Аргумент  $\mathbf{x}$  обозначает при этом всю совокупность непрерывных и дискретных переменных (индексов), кроме времени, от которых зависит поле. Для комплексных величин  $\varphi$  и  $\varphi^+$  считаются разными компонентами единого поля ( $\varphi \equiv \varphi_1$ ,  $\varphi^+ \equiv \varphi_2$ ) и различающий эти компоненты индекс включается в аргумент  $x$ . Символ  $\int dx \dots$



будет обозначать интегрирование по всем непрерывным и суммирование по всем дискретным компонентам  $x$ , символ  $\delta(x-x')$  будет обозначать произведение  $\delta$ -функций для всех непрерывных и  $\delta$ -символов Кронекера для всех дискретных компонент  $x$ . Наконец,  $\delta(x-x') \equiv \delta(t-t')\delta(x-x')$  и  $\int dx \dots \equiv \int dt \int dx \dots$ , причем интегрирование по времени, если не указано противное, всегда подразумевается в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

В таких обозначениях коммутационное соотношение (1) справедливо для всех систем.

**2. Классическая свободная теория.\*** Свободными будут называться такие системы, для которых лагранжиан является квадратичной формой от поля или его производных конечного порядка. Для таких лагранжианов классическое уравнение движения линейно и его можно записать в виде

$$K\varphi = 0, \quad (2)$$

где  $K$  — некоторая линейная операция на множестве полей  $\varphi$ , явный вид которой определяется лагранжианом. Часто оказывается удобным понимать  $K$  как линейную интегральную операцию

$$[K\varphi](x) = \int dx' K(x, x') \varphi(x') \quad (3)$$

с должным образом подобранным ядром  $K(x, x')$ .

Линейную операцию  $K$  будем называть  $t$ -локальной, если по переменной  $t$  она является обычной дифференциальной операцией конечного порядка; функционал  $F(t, \varphi)$  будем называть  $t$ -локальным, если он зависит лишь от поля и его производных конечного порядка в фиксированный момент времени  $t$ . Примером  $t$ -локального функционала является любой лагранжиан, из  $t$ -локальности лагранжиана следует  $t$ -локальность линейной операции  $K$  в (2). Для  $t$ -локальной операции ядро  $K(x, x')$  содержит  $\delta(t-t')$  и ее производные конечного порядка, так что интегрирование по времени  $t'$  в (3) снимается.

Соответствующее уравнению (3) свободное действие формально можно представить в виде квадратичной формы

$$S_0(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi K \varphi \equiv \frac{1}{2} \iint dx dx' \varphi(x) K(x, x') \varphi(x'), \quad (4)$$

---

\* Термин "теория" в этой книге употребляется в разных значениях: в широком смысле (квантовая теория поля, релятивистская теория) и в узком — для обозначения конкретной системы или класса систем с определенной динамикой (свободная теория, теория  $\lambda\varphi^4$ , теория с действием (...), и т. п.). В этом смысле, например, модель Изинга — конкретная теория.

Такое использование термина стало употребительным в специальной литературе, так как оно позволяет избежать многократного повторения громоздких конструкций типа "система с лагранжианом взаимодействия  $\lambda\varphi^4$ ", и т. п.

но в действительности для перехода от обычного выражения  $S_0 = \int dt \mathcal{L}_0(t)$  к форме (4) нужно выполнить интегрирование по частям и отбросить получающиеся при этом внеинтегральные члены. Например, для свободной частицы в одномерном пространстве  $\varphi \equiv q(t)$ ,  $\mathcal{L}_0 = m\dot{q}^2/2$ ,  $K = -m\partial^2/\partial t^2$  и  $K(t, t') = -m\partial^2 \delta(t-t')/\partial t^2$ . Выражения  $2S_0 = m \int dt \dot{q}^2$  и  $2S'_0 = -m \int dt q\ddot{q}$  различаются, очевидно, внеинтегральным членом. В истинной теории поля для перехода к форме (4) обычно бывает необходимым интегрирование по частям не только по времени, но и по пространственным аргументам  $x$ .

Формулу (4) можно отождествить со свободным действием только тогда, когда последнее рассматривается как функционал на пространстве достаточно хорошо убывающих полей, а ядро  $K$  в этом случае без ограничения общности можно считать симметричным:  $K = K^T$ , где  $K^T$  — транспонированная операция, ядро которой получается перестановкой аргументов из исходного ( $K^T(x, x') = K(x', x)$ ). Это определение транспонирования приложимо и к дифференциальным операторам, поскольку их можно представить интегральными операциями с  $\delta$ -образными ядрами, и эквивалентно следующему простому правилу транспонирования первой производной:  $\partial^T = -\partial$ .

Равенство  $K = K^T$  выражает следующее утверждение: операция  $K$  в уравнении (2), получаемом из требования стационарности свободного действия, всегда будет симметричной линейной операцией на пространстве достаточно хорошо убывающих полей.

Уточним смысл симметричности ядра для комплексного поля  $\varphi, \varphi^+$ . Форму  $\varphi^+ K \varphi$  с произвольным ядром  $K$  всегда можно записать в виде полусуммы  $[\varphi^+ K \varphi + \varphi K^T \varphi^+]/2$ , которая в универсальных обозначениях  $\varphi \equiv \Phi_1$ ,  $\varphi^+ \equiv \Phi_2$  примет следующий вид:

$$\varphi^+ K \varphi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & K^T \\ K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^+ \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \Phi \mathcal{K} \Phi. \quad (5)$$

По определению транспонирование блочной операции есть транспонирование соответствующей матрицы, сопровождаемое транспонированием каждого из ее блоков. Ясно, что матричное ядро  $\mathcal{K}$  в (5) симметрично в этом смысле независимо от свойств ядра  $K$ .

**3. Антиккоммутирующие поля.** В квантовой теории есть и такие системы, у которых операторы канонических переменных удовлетворяют не перестановочным соотношениям (1), а антикоммутиационным перестановочным соотношениям

$$\hat{q}(x) \hat{p}(x') + \hat{p}(x') \hat{q}(x) = i \delta(x - x').$$

Такие соотношения появляются в теории тождественных частиц, подчиняющихся статистике Ферми. Исторически к ним пришли путем известной процедуры вторичного квантования, но при желании их можно рассматривать как естественный рецепт обычного „первичного“ квантования не вполне обычных классических систем, обобщенные координаты которых являются не простыми, а антикоммутирующими функциями. Ниже приводятся лишь необходимые для дальнейшего краткие сведения об антикоммутирующих величинах (более подробную информацию можно найти в [2]).

Набор конечного числа попарно антикоммутирующих объектов  $\varphi = \varphi_1 \dots \varphi_n^*$  на языке математики представляет собой множество образующих конечномерной грассмановой алгебры, а сама алгебра определяется как совокупность всех полиномов, построенных из  $\varphi_1 \dots \varphi_n$ . Число независимых мономов  $\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}$  конечно, поскольку, во-первых, любые два монома, отличающиеся лишь перестановкой множителей, совпадают с точностью до знака и, во-вторых, ни один из мономов не может содержать дважды какую-либо из образующих  $\varphi_i$  — перестановками два одинаковых множителя  $\varphi_i$  можно было бы подвести друг к другу и затем воспользоваться вытекающим из антикоммутативности образующих равенством  $\varphi_i^2 = 0$ . Отсюда ясно, что мономом старшей степени является произведение всех образующих  $\varphi_i$ . Полное число всех независимых мономов, включая единицу, равно, как легко подсчитать,  $2^n$ , т. е. грассманова алгебра с  $n$  образующими представляет собой конечномерное пространство размерностью  $2^n$ , и ее общий элемент может быть записан в виде линейной комбинации

$$f(\varphi) = f_0 + \sum_i f_1(i) \varphi_i + \sum_{i < k} f_2(i, k) \varphi_i \varphi_k + \dots \quad (6)$$

с произвольными числовыми коэффициентами  $f_k(i_1 \dots i_k)$ .

Обычные функции типа  $\exp \varphi_i$  понимаются в виде рядов, которые, как правило, обрываются (например,  $\exp \varphi_i = 1 + \varphi_i$ ).

Все нечетные мономы антикоммутируют между собой, а всякий четный моном коммутирует с любым другим.

Для грассмановой алгебры вводятся понятия производных по  $\varphi_i$ , причем различаются производные „слева“ ( $\vec{\partial}/\partial\varphi_i$ ) и производные „справа“ ( $\overleftarrow{\partial}/\partial\varphi_i$ ). Действие левой производной  $\vec{\partial}/\partial\varphi_i$  на произвольный моном определяется следующим образом: ес-

---

\* В книге будут очень часто встречаться функции и функционалы многих переменных, и для сокращения записи формул мы не будем ставить запятых при перечислении аргументов (например, „функционал от переменных  $\varphi_1 \dots \varphi_n$ “, или  $W_n(x_1 \dots x_n)$ ). В тех относительно редких случаях, когда речь идет о произведении величин, а не о перечислении, это ясно из контекста или указывается терминами „моном“, „произведение“.

ли данный моном не содержит множителя  $\varphi_i$ , то результат равен нулю, если же он содержит  $\varphi_i$  (и только один), то этот множитель нужно перевести в крайнее левое положение путем перестановок и затем вычеркнуть, или (что эквивалентно) просто вычеркнуть, добавив знаковый множитель  $\pm 1$  в соответствии с четностью перестановки  $\varphi_i$  влево. Правая производная определяется аналогично, только теперь  $\varphi_i$  нужно переводить в крайнее правое положение. Производные различаются, поскольку четность перестановки налево и направо в общем случае различна. Легко проверить, что левые и правые производные коммутируют между собой, а одноименные производные антикоммутируют.

При обобщении этого языка на случай поля  $\varphi(x)$  аргумент  $x$  воспринимается как непрерывный индекс. Поле  $\varphi$  представляет собой набор антикоммутирующих образующих грассмановой алгебры (т. е.  $\varphi(x)\varphi(x') = -\varphi(x')\varphi(x)$ ), а различные функционалы  $F(\varphi)$  являются элементами этой алгебры. Вводятся левая и правая вариационные производные по  $\varphi(x)$ , каждая из которых действует на отдельный множитель  $\varphi(x')$  по обычному правилу:

$$\vec{\delta}\varphi(x')/\delta\varphi(x) = \overleftarrow{\delta}\varphi(x')/\delta\varphi(x) = \delta(x - x'). \quad (7)$$

Если же дифференцируемое поле отделено от символа  $\delta/\delta\varphi$  другими множителями, то его предварительно следует вывести перестановками в одно из крайних положений (в соответствии с характером производной) и затем уже дифференцировать по правилу (7). Вариационные производные обладают такими же свойствами коммутации, как и обычные.

Приведем несколько справочных формул, которые понадобятся в дальнейшем, предоставив их доказательство читателю. Для любого функционала  $F(\varphi)$  и любого четного  $n$

$$\frac{\vec{\delta}}{\delta\varphi(x_1)} \cdots \frac{\vec{\delta}}{\delta\varphi(x_n)} F(\varphi) = \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\varphi(x_n)} \cdots \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\varphi(x_1)} F(\varphi). \quad (8)$$

Отсюда, учитывая антикоммутативность одноименных производных, получаем

$$\vec{\delta}/\delta\varphi(x) \cdot \vec{\delta}/\delta\varphi(x') = -\overleftarrow{\delta}/\delta\varphi(x) \cdot \overleftarrow{\delta}/\delta\varphi(x'). \quad (9)$$

Пусть теперь  $\varphi(x)$  и  $A(x)$  — пара антикоммутирующих (в том числе и друг с другом) полей. Тогда

$$\exp(-\varphi A) F(\vec{\delta}/\delta\varphi) \exp(\varphi A) = F(A + \vec{\delta}/\delta\varphi), \quad (10)$$

$$\exp(A \overleftarrow{\delta}/\delta\varphi) F(\varphi) = F(\varphi + A). \quad (11)$$

Здесь и далее используются сокращенные обозначения:

$$\varphi A \equiv \int dx \varphi(x) A(x), \quad A \vec{\delta}/\delta\varphi \equiv \int dx A(x) \vec{\delta} \delta\varphi(x).$$

Отметим, что операция  $\delta/\delta\varphi$  антикоммутирует с множителем  $A$  вследствие антикоммутативности  $A$  и  $\varphi$ . Из (10) имеем

$$F(\vec{\delta}/\delta\varphi) \exp \varphi A = F(A) \exp \varphi A. \quad (12)$$

Соотношения (10) — (12) являются непосредственными обобщениями обычных правил действия с вариационными производными. То, что в эти обобщения входит именно левая производная, есть следствие принятой формы записи: все операции ставятся слева от функционала и действуют в порядке очередности — сначала ближайшая к нему, затем следующая, и так далее.

В дальнейшем системы с обычными полями будут называться *бозонными*, а с антикоммутирующими — *фермионными*. Свободное уравнение движения для фермионных полей также имеет вид (2), но операция  $K$ , являющаяся ядром формы (4), будет теперь не симметричной, а антисимметричной вследствие антикоммутативности множителей  $\varphi(x)\varphi(x')$ . Для краткости мы будем называть ядро  $K$  симметричным в обоих случаях и писать  $K = \kappa K^T$ , всегда подразумевая симметрию, согласованную со статистикой: *здесь и далее на протяжении всей книги*  $\kappa = 1$  для бозонов и  $\kappa = -1$  для фермионов. Для комплексного фермионного поля (а в реальных моделях фермионные поля всегда комплексны) симметрия ядра проявляется, как и в бозонном случае, только при использовании универсальных обозначений:

$$\varphi^+ K \varphi = \frac{1}{2} [\varphi^+ K \varphi - \varphi K^T \varphi^+] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -K^T \\ K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^+ \end{pmatrix}.$$

Интегралы на грассмановой алгебре будут рассмотрены в п. 6.2.

#### 4. Нормальное произведение операторов свободного поля.

Последующее изложение в равной степени относится к релятивистской квантовой теории поля, к нерелятивистской квантовой механике в представлении вторичного квантования и, наконец, к обычной квантовой механике систем с конечным числом степеней свободы. Во всех этих случаях процедура канонического квантования свободной теории хорошо известна, и мы не будем на ней останавливаться. Дополнительные сведения о различных конкретных системах читатель найдет в гл. II, а здесь мы ограничимся следующими замечаниями.

Зависимость от времени операторов квантованного свободного поля в представлении взаимодействия, называемых в дальнейшем просто *операторами свободного поля*, определяет-

ся квантовомеханическим законом развития  $\hat{\varphi}(x) \equiv \hat{\varphi}(t, \mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{H}_0 t) \hat{\varphi}(0, \mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{H}_0 t)$ , где  $\hat{\varphi}(0, \mathbf{x})$  — оператор поля в шредингеровском представлении,  $\mathbf{H}_0$  — свободный гамильтониан. В то же время оператор  $\hat{\varphi}(x)$  всегда удовлетворяет классическому уравнению движения (2). Операторы поля в разных точках (анти) коммутируют между собой на  $c$ -число.

Перейдем теперь к определению понятия *нормального произведения*. Допустим, что оператор свободного поля  $\hat{\varphi}(x)$  можно представить в виде суммы двух слагаемых  $\hat{a}(x) + \hat{b}(x)$ , таких, что  $\hat{a}(x)\hat{a}(x') = \kappa\hat{a}(x')\hat{a}(x)$ ,  $\hat{b}(x)\hat{b}(x') = \kappa\hat{b}(x')\hat{b}(x)$  и

$$\hat{a}(x)\hat{b}(x') - \kappa\hat{b}(x')\hat{a}(x) = n(x, x'), \quad (13)$$

где  $\kappa = \pm 1$  в зависимости от статистики, а  $n(x, x')$  — некоторая  $c$ -числовая функция, называемая в дальнейшем простой сверткой поля  $\varphi$ .

Будем говорить, что произведение нескольких множителей  $\hat{a}(x_i)$  и  $\hat{b}(y_k)$  имеет нормальную форму, если в этом произведении любой из множителей  $\hat{b}$  находится слева от любого из множителей  $\hat{a}$ . Нормальным произведением множителей  $\hat{a}(x_1) \dots \hat{a}(x_n)$ ,  $\hat{b}(y_1) \dots \hat{b}(y_m)$ , расположенных в произвольном порядке, назовем выражение

$$\varepsilon_p \hat{b}(y_1) \dots \hat{b}(y_m) \hat{a}(x_1) \dots \hat{a}(x_n), \quad (14)$$

в котором  $\varepsilon_p$  есть знаковый множитель, всегда равный 1 для бозонного поля, а для фермионного поля  $\varepsilon_p = 1$ , если исходное произведение сводится к произведению в (14) четным числом перестановок  $n+m$  множителей  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ , и  $\varepsilon_p = -1$ , если число необходимых перестановок нечетно.

Обозначив нормальное произведение символом  $N$ , можно написать:

$$\begin{aligned} N\{P[\hat{b}(y_1) \dots \hat{b}(y_m) \hat{a}(x_1) \dots \hat{a}(x_n)]\} = \\ = \varepsilon_p \hat{b}(y_1) \dots \hat{b}(y_m) \hat{a}(x_1) \dots \hat{a}(x_n), \end{aligned}$$

где  $P$  обозначает произвольную перестановку множителей  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ .

Это определение распространяется по линейности на любые полиномиальные формы, построенные из операторов  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ , т. е.

$$N\{\sum \Pi \dots\} = \sum N\{\Pi \dots\}, \quad N\{\alpha \Pi \dots\} = \alpha N\{\Pi \dots\}, \quad N\{\alpha\} = \alpha, \quad (15)$$

где  $\Pi \dots$  обозначает любое произведение множителей  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ ,  $\alpha$  — произвольная константа ( $c$ -число).

Правила (15) определяют символ  $N$  как линейную операцию на множестве полиномиальных форм, построенных из  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ : каждой такой форме  $F$  однозначно сопоставляется форма  $F' = NF$ . Но отсюда не следует, что  $N$  можно понимать как линейную операцию на множестве операторов: существуют различные полиномы, которые равны как операторы, а из операторного равенства  $F_1 = F_2$  не следует, что  $NF_1 = NF_2$ . Контрпримером может послужить операторное равенство (13), для которого

$$N[\hat{a}(x)\hat{b}(x') - x\hat{b}(x')\hat{a}(x)] = 0 \neq n(x, x') = N\{n(x, x')\}.$$

Это показывает, что в символе  $NF$  нельзя, вообще говоря, заменять оператор  $F$  на равный ему оператор  $F'$ .

Представив каждый множитель произведения  $\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)$  в виде суммы  $\hat{a} + \hat{b}$  и пользуясь правилами (15), мы определяем тем самым символ  $N[\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)]$ . В частности, таким путем получим

$$N[\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')] = \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x') - n(x, x'), \quad (16)$$

где  $n$  — та же функция, что и в (13).

Из определения ясно, что  $N$ -произведение симметрично, т. е. поля под знаком  $N$ -произведения ведут себя подобно классическим объектам — коммутируют в случае бозонов и антикоммутируют в случае фермионов:  $N\{P[\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)]\} = \varepsilon_P N[\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)]$ . Здесь  $P$  — произвольная перестановка множителей  $\hat{\varphi}(x_i)$ ,  $\varepsilon_P$  имеет обычный смысл.

## § 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМ ВИКА

**1. Теорема Вика для простого произведения.** Хорошо известная (см., например, [1]) теорема Вика определяет правило приведения к нормальной форме произведения  $\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)$ . Для  $n = 1, 2$  имеем

$$\hat{\varphi}(x) = N\hat{\varphi}(x), \quad \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x') = N[\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x') + n(x, x')]. \quad (17)$$

Первое из этих равенств очевидно, а второе есть соотношение (16).

Мы будем доказывать по индукции справедливость следующего правила приведения к  $N$ -форме:

$$\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) = N \left\{ \prod_{i < k} \left( 1 + \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} \right) \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \right\} \dots, \quad (18)$$

где знак  $|\dots$ , как и далее, обозначает  $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \hat{\varphi}$ .

В этой и последующих формулах  $\varphi(x)$  обозначает классический аналог  $\hat{\varphi}(x)$ , т. е. обычное классическое поле для бозонов и антикоммутирующее поле для фермионов. Поля  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  в правой части (18) рассматриваются как независимые функциональные аргументы, дифференциальные квадратичные формы понимаются следующим образом:

$$\frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_s} \equiv \iint dx dx' \frac{\delta}{\delta \varphi_i(x)} n(x, x') \frac{\delta}{\delta \varphi_s(x')}.$$

При  $i < k$  и  $s < t$  имеем

$$\frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} \varphi_s(x) \varphi_m(x') = \delta_{is} \delta_{km} n(x, x'). \quad (19)$$

Для антикоммутирующих полей все вариационные производные в (18) будут считаться правыми. Равенство (19) справедливо тогда для обеих статистик.

Объекты внутри фигурной скобки в (18) являются классическими — это обычные функционалы и их вариационные производные. Как указано явно в (18), все оставшиеся после дифференцирования классические поля  $\varphi_i$  следует заменить на квантовый оператор  $\hat{\varphi}$ .

Переходя к доказательству „формулы приведения“ (18), замечаем, что для  $n = 1, 2$  она совпадает с (17). Допустим, что формула верна для любого числа  $k \leq n$  множителей  $\hat{\varphi}$ ; и докажем, что она справедлива и тогда, когда число множителей равно  $n+1$ . Обозначив для сокращения записи  $\hat{\varphi}(x_i) \equiv \hat{\varphi}_i$ , запишем последний множитель  $\hat{\varphi}_{n+1}$  в виде суммы  $\hat{a}_{n+1} + \hat{b}_{n+1}$ . Воспользовавшись перестановочными соотношениями для операторов  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ , получим:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1 \dots \hat{\varphi}_{n+1} &= \hat{\varphi}_1 \dots \hat{\varphi}_n \hat{a}_{n+1} + \varepsilon \hat{b}_{n+1} \hat{\varphi}_1 \dots \hat{\varphi}_n + \\ &+ \sum_{k=1}^n \varepsilon_k n(x_k, x_{n+1}) [\hat{\varphi}_1 \dots \hat{\varphi}_n]_k, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $[\hat{\varphi}_1 \dots \hat{\varphi}_n]_k$  обозначает произведение  $\hat{\varphi}_1 \dots \hat{\varphi}_n$  без множителя  $\hat{\varphi}_k$ , а  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_k$  — знаковые множители, для бозонов всегда равные 1, а для фермионов  $\varepsilon = (-1)^n$  и  $\varepsilon_k = (-1)^{n-k}$ .

В двух первых слагаемых в правой части (20) множители  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  стоят в нужном („нормальном“) порядке и, пользуясь правилом (18) для  $n$  множителей  $\hat{\varphi}$ , сумму этих двух слагаемых можно записать в виде

$$N \{ \mathcal{P}_n \varphi_1 \dots \varphi_n | \dots \hat{a}_{n+1} + \varepsilon \hat{b}_{n+1} \mathcal{P}_n \varphi_1 \dots \varphi_n | \dots \}, \quad (21)$$



где  $\mathcal{P}_n$  — операция приведения для  $n$ -множителей:

$$\mathcal{P}_n \equiv \prod_{i < k=1}^n \left( 1 + \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} \right), \quad (22)$$

а символ  $|\dots$  имеет такой же смысл, как и в (18).

Выражение в фигурных скобках (21) является оператором под знаком  $N$ -произведения. Пользуясь симметричностью последнего, множитель  $\hat{b}_{n+1}$  можно вернуть в крайнее правое положение. При этом существенно, что в операторном полиноме  $\mathcal{P}_n \varphi_1 \dots \varphi_n |\dots$  все мономы имеют одинаковую четность, поскольку поля сворачиваются парами. Отсюда следует, что при перестановке этого полинома с  $\hat{b}_{n+1}$  возникает дополнительно (для фермионов) точно такой же знаковый множитель  $\varepsilon$ , как и в (21), и поэтому в крайнем правом положении операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  группируются в оператор поля  $\hat{\varphi}_{n+1}$ . Это доказывает, что выражение (21) можно записать в виде  $N\{\mathcal{P}_n \varphi_1 \dots \varphi_{n+1}\} |\dots$ . Напомним, что операция приведения  $\mathcal{P}_n$  не содержит производной по  $\varphi_{n+1}$ .

Рассмотрим теперь сумму по  $k$  в правой части (20). Пользуясь формулой (19) и правилом приведения (18) для произведения  $[\hat{\varphi}_1 \dots \hat{\varphi}_n]_k$ , содержащего  $n-1$  множитель, приводим эту сумму к виду

$$N \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \mathcal{P}_n \left( \frac{\delta}{\delta \varphi_k} n \frac{\delta}{\delta \varphi_{n+1}} \varphi_k \varphi_{n+1} \right) [\varphi_1 \dots \varphi_n]_k |\dots \quad (23)$$

Операцию приведения для  $[\hat{\varphi}_1 \dots \hat{\varphi}_n]_k$  мы записали в той же форме (22), как и для  $n$  множителей, поскольку дополнительные члены с производными по  $\varphi_k$  все равно не дадут вклада: в дифференцируемом выражении нет поля  $\varphi_k$ .

Теперь нужно вернуть множители  $\varphi_k$  и  $\varphi_{n+1}$  в их естественное положение. В фермионном случае, считая обе производные правыми, имеем

$$\frac{\delta}{\delta \varphi_k} n \frac{\delta}{\delta \varphi_{n+1}} \varphi_1 \dots \varphi_{n+1} = (-1)^{n-k} \left( \frac{\delta}{\delta \varphi_k} n \frac{\delta}{\delta \varphi_{n+1}} \varphi_k \varphi_{n+1} \right) [\varphi_1 \dots \varphi_n]_k.$$

Дифференцирование по  $\varphi_{n+1}$  справа не вносит знакового множителя, последующее дифференцирование справа по  $\varphi_k$  дает множитель  $(-1)^{n-k}$ , равный четности перестановки  $\varphi_k$  направо. Знаковый множитель  $\varepsilon_k$  в (23) также равен  $(-1)^{n-k}$ , что позволяет записать (23) в виде

$$N \sum_{k=1}^n \mathcal{P}_n \cdot \delta / \delta \varphi_k \cdot n \cdot \delta / \delta \varphi_{n+1} \cdot \varphi_1 \dots \varphi_{n+1} |\dots$$

Добавив сюда полученное ранее выражение для суммы двух первых слагаемых в правой части (20), заключаем, что пол-

ная операция приведения для  $n+1$  множителя записывается в виде

$$\mathcal{P}_n \cdot \left[ 1 + \sum_{k=1}^n (\partial/\partial\varphi_k) n (\partial/\partial\varphi_{n+1}) \right].$$

Сравнив с определением (22) операции  $\mathcal{P}_n$ , находим, что написанная выше операция есть  $\mathcal{P}_{n+1}$ , и это доказывает по индукции формулу (18).

Еще раз напомним, что в фермионном случае все вариационные производные считаются правыми.

**2. Sym- и T-произведения.** Существуют и другие „произведения“, под знаком которых операторы поля ведут себя подобно классическим объектам. Прежде всего это обычное *симметризованное произведение* операторов поля:

$$\text{Sym} [\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)] = \frac{1}{n!} \sum_P \varepsilon_P P [\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)]. \quad (24)$$

Суммирование производится по всем  $n!$  перестановкам  $P$  операторов  $\hat{\varphi}$ ,  $\varepsilon_P$  имеет обычный смысл. Из этого определения и из (17) получаем:

$$\text{Sym} [\hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x')] = N [\hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x')] + n_s(x, x'),$$

где  $n_s$  — *симметричная часть* простой свертки  $n$ :

$$n_s \equiv \frac{1}{2} (n + xn^T). \quad (25)$$

Очень важную роль в теории играет *хронологическое* или *T-произведение*

$$T [\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)] = \sum_P \varepsilon_P P \{\theta(1 \dots n) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)\}. \quad (26)$$

Здесь и далее на протяжении всей книги

$$\theta(1 \dots n) \equiv \theta(t_1 \dots t_n) \equiv \prod_{k=1}^{n-1} \theta(t_k - t_{k+1}). \quad (27)$$

Суммирование в (26) производится по всем одновременным перестановкам множителей  $\hat{\varphi}(x_i)$  и времен  $t_i$  в  $\theta$ -функции.

Выражение (26) однозначно определено (и симметрично) лишь тогда, когда все времена  $t_1 \dots t_n$  различны, а при совпадении всех или части аргументов  $t_i$  оно нуждается в доопределении. В качестве такового мы потребуем равенства Sym- и T-произведений на поверхности  $t = \text{const.}$ \* Это эквивалентно до-

\* Иногда доопределяют не Sym-, а N-произведением (см., например, [2], с. 221).

определению  $\theta$ -функции (27) на ее поверхностях разрыва (поверхности совпадения некоторых подгрупп аргументов  $t_i$ ) с помощью полной симметризации относительно перестановок совпадающих аргументов. В частности, при  $t_1 = t_2$  полагаем  $\theta(12) = \theta(21) = 1/2$ . При таком доопределении  $T$ -произведение остается симметричным и при совпадении любых подгрупп временных аргументов.

Для „нулевой“ степени поля символы  $T$  и  $\text{Sym}$  доопределяются обычным образом:  $\text{Sym } 1 = T 1 = 1$ . Отметим, что  $\text{Sym}$  и  $T$ , так же как и  $N$ , не являются в действительности линейными операциями на пространстве операторов: из операторного равенства  $\hat{F}_1 = \hat{F}_2$  не следует ни  $T\hat{F}_1 = T\hat{F}_2$ , ни  $\text{Sym } \hat{F}_1 = \text{Sym } \hat{F}_2$ .

Хронологической сверткой или пропагатором поля  $\hat{\phi}$  называется  $c$ -числовая функция  $\Delta(x, x')$ , определенная соотношением

$$T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')] = N[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')] + \Delta(x, x'). \quad (28)$$

Из определения (26) и равенства (17) получаем

$$\Delta(x, x') = \theta(12)n(x, x') + \kappa\theta(21)n(x', x). \quad (29)$$

Сокращенно  $\Delta = \theta_{12}n + \kappa\theta_{21}n^T$ . В соответствии с договоренностью при совпадении времен свертка  $\Delta$  доопределяется условием

$$\Delta(x, x')|_{t=t'} = \frac{1}{2}[n(x, x') + \kappa n(x', x)]|_{t=t'} = n_s(x, x')|_{t=t'}. \quad (30)$$

В отличие от  $n$  свертка  $\Delta$  всегда симметрична, т. е.  $\Delta = \kappa\Delta^T$ . Отметим еще одно важное свойство сверток, а именно: простая свертка  $n$  удовлетворяет свободному уравнению (2) по каждому из своих аргументов, а хронологическая свертка (29) всегда оказывается функцией Грина (с точностью до множителя  $i$ ) этого уравнения:\*

$$Kn = Kn^T = 0, \quad K\Delta = i. \quad (31)$$

Левые части понимаются как произведения линейных операций, а  $i$  в правой части — как операция, кратная единичной (ядром последней является  $\delta(x-x')$ ). Мы не будем приводить общего доказательства соотношений (31), а удовлетворимся тем, что для всех рассматриваемых в следующей главе конкретных систем они легко проверяются. Особым является случай безмассового векторного поля, которое рассматривается отдельно в гл. III.

\* Часто в (28) вместо  $\Delta$  пишут  $i\Delta$ , и тогда равенство  $K\Delta = i$  принимает вид  $K\Delta = 1$ . При такой записи  $\Delta = K^{-1}$  — настоящая функция Грина (без  $i$ ). Мы предпочтем запись (28), так как свертка  $\Delta = iK^{-1}$  во все формулы входит как целое, но для краткости называть ее будем просто функцией Грина, подразумевая оговорку "с точностью до множителя  $i$ ".

**3. Теорема Вика для симметричных произведений.** Запись теоремы Вика (18) существенно упрощается, если в левой части стоит не простое, а симметричное произведение операторов поля.

Рассмотрим сначала Sum-произведение. Приводя каждый член суммы (24) к нормальной форме по правилу (18), получаем

$$\begin{aligned} & \text{Sym} [\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)] = \\ & = N \left\{ \prod_{i < k} \left( 1 + \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} \right) \text{Sym} [\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)] \right\} \Big| \dots \end{aligned} \quad (32)$$

Симметризация в правой части производится по всем перестановкам  $x_1 \dots x_n$  при сохранении порядка функциональных аргументов  $\varphi_1 \dots \varphi_n$ . Например:

$$\text{Sym} [\varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2)] = \frac{1}{2} [\varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) + \varphi_1(x_2) \varphi_2(x_1)]. \quad (33)$$

Поля  $\varphi_i$  в (32) — классические объекты, и должной перестановкой множителей  $\varphi_i$  мы можем вернуть аргументы  $x_i$  к исходному порядку  $x_1 \dots x_n$  в каждом члене суммы в правой части (32). Возникающий при перестановке  $\varphi_i$  дополнительный знаковый множитель совпадает, очевидно, с множителем  $\epsilon_p$  в определении (24) операции симметризации, и эти два множителя взаимно сокращаются. Отсюда ясно, что симметризацию в правой части (32) можно также понимать как симметризацию бозонного типа (все члены со знаком плюс) относительно перестановок функциональных аргументов  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  при сохранении порядка  $x_1 \dots x_n$ . В примере (33)

$$\varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) + \varphi_1(x_2) \varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) + \varphi_2(x_1) \varphi_1(x_2).$$

Подчеркнем, что знак в правой части этого равенства не зависит от статистики.

Обратимся теперь к операции приведения и разложим каждую из дифференциальных квадратичных форм на симметричную и антисимметричную относительно перестановки индексов части:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} + \frac{\delta}{\delta \varphi_k} n \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} - \frac{\delta}{\delta \varphi_k} n \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая, 1) что дифференцируемый функционал, по доказанному, является четным относительно любой перестановки функциональных аргументов  $\varphi_i$ , 2) что он линеен по каждому из аргументов  $\varphi_i$  и 3) что после дифференцирования все  $\varphi_i$  полагаются равными одному и тому же оператору  $\hat{\varphi}$ , заключаем,

что нечетные части любой из форм (34) не дают вклада в окончательное выражение и их можно отбросить.

Итак, каждый множитель операции приведения можно записать в виде

$$1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} + \frac{\delta}{\delta \varphi_k} n \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \right] \cong \exp \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} + \frac{\delta}{\delta \varphi_k} n \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \right]. \quad (35)$$

Замена на экспоненту допустима потому, что добавляемые высшие степени производных все равно не дадут вклада вследствие линейности дифференцируемого функционала по каждому из аргументов  $\varphi_i$ . Полная операция приведения в (32) является произведением по  $i < k$  операций (35):

$$\mathcal{P} = \exp \left( \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \neq k} \delta_i / \delta \varphi_i \cdot n \cdot \delta_i / \delta \varphi_k \right). \quad (36)$$

Пользуясь еще раз линейностью по  $\varphi_i$  дифференцируемого функционала, к показателю экспоненты (36) можно добавить диагональные члены с  $i = k$ , после чего показатель принимает вид „полного квадрата“:

$$\sum_{ik} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} = \left( \sum_i \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \right) n \left( \sum_k \frac{\delta}{\delta \varphi_k} \right). \quad (37)$$

Если от  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  перейти к новым функциональным аргументам — среднему значению  $\varphi \equiv (\varphi_1 + \dots + \varphi_n) / n$  и разностям  $\varphi_i - \varphi_{i+1}$ , то форма (37) сведется ко второй производной по  $\varphi$ . Действительно:

$$\frac{\delta}{\delta \varphi} = \sum_i \frac{\delta \varphi_i}{\delta \varphi} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi_i} = \sum_i \frac{\delta}{\delta \varphi_i}; \quad \sum_{ik} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} = \frac{\delta}{\delta \varphi} n \frac{\delta}{\delta \varphi}. \quad (38)$$

После выполнения дифференцирования мы должны заменить все  $\varphi_i$  на  $\hat{\varphi}$ . Ясно, что можно положить  $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n \equiv \varphi$  еще до дифференцирования, поскольку форма (38) не содержит производных по разностям  $\varphi_i - \varphi_{i+1}$ . Это значит, что теорему Вика (32) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{Sym} [\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)] = \\ & = N \left\{ \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \varphi} n \frac{\delta}{\delta \varphi} \right) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \right\} \Big|_{\varphi = \hat{\varphi}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Знак Sym в правой части опущен потому, что произведение  $\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)$  симметрично автоматически. Отметим также, что свертку  $n$  в (39) можно заменить на ее симметричную часть (25), так как ядро дифференциальной квадратичной формы автоматически симметризуется вследствие коммутативности производных в бозонном случае и антикоммутативности

одноименных (в данном случае правых) производных в ферми-  
 сном:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_l} n \frac{\delta}{\delta\varphi_k} = \frac{\delta}{\delta\varphi_k} n \frac{\delta}{\delta\varphi_l}; \quad \frac{\delta}{\delta\varphi} n \frac{\delta}{\delta\varphi} = \frac{\delta}{\delta\varphi} n_s \frac{\delta}{\delta\varphi}. \quad (40)$$

Формула (39) выгодно отличается от (18) тем, что в (39) операция приведения универсальна, т. е. не зависит от вида приводимого выражения.

Перейдем к  $T$ -произведению. Из определения (26) и формулы (18)

$$\begin{aligned} & T [\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)] = \\ & = N \left\{ \prod_{i < k} \left( 1 + \frac{\delta}{\delta\varphi_i} n \frac{\delta}{\delta\varphi_k} \right) \sum_P \varepsilon_P P [\theta(1 \dots n) \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)] \right\} \Bigg| \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Суммирование в правой части производится по всем одновременным перестановкам аргументов  $x_1 \dots x_n$  и времен  $t_1 \dots t_n$  в  $\theta$ -функции при сохранении порядка функциональных аргументов  $\varphi_1 \dots \varphi_n$ . Важно заметить, что в каждом члене суммы по перестановкам поле с большим номером всегда имеет меньшее время, т. е. из  $i < k$  следует, что временной аргумент у поля  $\varphi_i$  больше, чем у поля  $\varphi_k$ . Это прямо вытекает из определения  $T$ -произведения и формулы (18): временные аргументы полей убывают слева направо во всех членах суммы (26), а номера полей в (18) возрастают слева направо.

Допустим сначала, что среди времен  $t_1 \dots t_n$  нет совпадающих. Из сказанного выше тогда ясно, что во всех дифференциальных формах  $(\delta/\delta\varphi_i) n (\delta/\delta\varphi_k)$  операции приведения в (41) свертку  $n$  можно заменить на  $\Delta$ , пользуясь тем, что при  $t > t'$  эти две свертки совпадают. Воспользовавшись затем симметричностью свертки  $\Delta$ , форму  $(\delta/\delta\varphi_i) \Delta (\delta/\delta\varphi_k)$  можно симметризовать относительно перестановки индексов:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_i} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi_k} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta}{\delta\varphi_i} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi_k} + \frac{\delta}{\delta\varphi_k} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi_i} \right].$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, можно представить операцию приведения в виде экспоненты „полного квадрата” и затем положить все поля  $\varphi_i$  равными еще до дифференцирования. Тогда правая часть (41) примет вид

$$N \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi} \right] \sum_P \varepsilon_P P [\theta(1 \dots n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)] \Bigg| \dots \quad (42)$$

Остается заметить, что произведение классических полей симметрично, т. е.  $\varepsilon_P P[\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)] = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)$ , и поэтому сумма по  $P$  в (42) равна

$$\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \sum_P P^\theta(1 \dots n) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n),$$

так как сумма всех перестановок  $\theta$ -функции есть единица. Итак:

$$\begin{aligned} & T[\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)] = \\ & = N \left\{ \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \right\} \Big|_{\varphi = \hat{\varphi}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Мы вывели эту формулу в предположении, что среди времен  $t_1 \dots t_n$  нет совпадающих, но она верна, как нетрудно проверить, и в общем случае: если свертка  $\Delta$  в (43) при совпадающих временах определена соотношением (30), то правая часть (43) доопределяет  $T$ -произведение при совпадении произвольных групп временных аргументов именно таким образом, как это было сформулировано в предыдущем разделе.

Формула (43) является функциональной формулировкой хронологической теоремы Вика. В таком виде она была получена в работе Хори [3].

**4. Формулы приведения для операторных функционалов.** Операторными функционалами мы будем называть выражения вида

$$F(\hat{\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_n F_n(x_1 \dots x_n) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n), \quad (44)$$

которые задаются набором своих, возможно обобщенных, коэффициентных функций  $F_n(x_1 \dots x_n)$ . Будем говорить, что функционал симметричен, если таковы все его коэффициентные функции. Как всегда при этом имеется в виду симметрия, согласованная со статистикой. Симметричному операторному функционалу можно поставить в соответствие классический функционал, заменив в (44) оператор свободного поля  $\hat{\varphi}$  на классический аргумент  $\varphi$ . Симметричные функции  $F_n$  определяются по функционалу  $F(\varphi)$  однозначно. Отметим также, что для симметричного функционала  $F(\hat{\varphi}) = \text{Sym} F(\hat{\varphi})$ .

Во избежание недоразумений еще раз скажем, что операторный функционал (44) задается именно своими коэффициентными функциями, а не оператором  $F(\hat{\varphi})$ . Функции  $F_n$  определяют оператор  $F(\hat{\varphi})$  однозначно, но обратное неверно, так как свободное поле  $\varphi$  является не совершенно произвольным аргументом, а одним из решений уравнения (2). Набор симметричных функций  $F_n$  находится во взаимоднозначном соответствии

с классическим функционалом  $F(\varphi)$ , а для однозначного определения оператора  $F(\hat{\varphi})$  достаточно знать сужение функционала  $F(\varphi)$  на *поверхность масс*, т. е. на множество всех решений свободного уравнения (2). Понятия „оператор” и „операторный функционал” отождествлять нельзя.

Формулы (39), (43) предыдущего раздела непосредственно обобщаются и на операторные функционалы вследствие универсальности соответствующих операций приведения — в этом, собственно, и состоит ценность универсальности. Сказанное относится и к  $t$ -локальным функционалам (см. определение в п. 1.2), если они зависят лишь от поля на поверхности  $t = \text{const}$ , а не от его производных по времени. Дело в том, что мы специально позаботились о доопределении  $T$ -произведения полей при совпадении времен, а доопределение аналогичных выражений с производными поля по времени еще не было сделано (см. следующий раздел). Исключив пока такие функционалы из рассмотрения, перепишем формулы приведения (39), (43):

$$\text{Sym } F(\hat{\varphi}) = N \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} n \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] F(\varphi) \Big|_{\varphi = \hat{\varphi}}, \quad (45)$$

$$TF(\hat{\varphi}) = N \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] F(\varphi) \Big|_{\varphi = \hat{\varphi}}. \quad (46)$$

Отсюда легко находятся формулы обратных и всевозможных комбинированных преобразований. Например:

$$NF(\hat{\varphi}) = \text{Sym} \exp \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} n \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] F(\varphi) \Big|_{\varphi = \hat{\varphi}}, \quad (47)$$

$$TF(\hat{\varphi}) = \text{Sym} \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} (\Delta - n) \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] F(\varphi) \Big|_{\varphi = \hat{\varphi}}.$$

Отправляясь от общей формы теоремы Вика (18) и рассуждая точно так же, как и при выводе соотношения (39), можно получить следующую формулу, являющуюся обобщением соотношения (45) на случай произведения нескольких симметричных операторных функционалов:

$$\prod_{i=1}^n [\text{Sym } F_i(\hat{\varphi})] = N \left\{ \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_i \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_i} + \sum_{i < k} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} \right] \prod_{i=1}^n F_i(\varphi_i) \right\} \Big|_{\varphi_1 = \dots = \varphi_n = \hat{\varphi}}. \quad (48)$$

Здесь и далее некоммутирующие множители в левой части считаются расположенными в порядке возрастания номеров:

$$\prod_{i=1}^n [\text{Sym } F_i(\hat{\varphi})] \equiv \text{Sym } F_1(\hat{\varphi}) \cdot \dots \cdot \text{Sym } F_n(\hat{\varphi}).$$



Диагональные члены квадратичной формы производных в (48) порождают свертки внутри сомножителей  $F_i$ , приводя их к нормальной форме, а недиагональные члены дают свертки между разными сомножителями.

Формула (48) очевидным образом обобщается на тот случай, когда некоторые из множителей в левой части записаны не в  $\text{Sym}$ -, а в  $N$ -форме:

$$\prod_{i=1}^n [\mathcal{A}F_i(\hat{\varphi})] = N \left\{ \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{\text{Sym}} \frac{\delta}{\delta\varphi_i} n \frac{\delta}{\delta\varphi_i} + \sum_{i < k} \frac{\delta}{\delta\varphi_i} n \frac{\delta}{\delta\varphi_k} \right] \prod_{i=1}^n F_i(\varphi_i) \right\} \Big|_{\dots} \quad (49)$$

Здесь  $\mathcal{A}$  обозначает  $\text{Sym}$  или  $N$ , а суммирование в диагональных членах квадратичной формы производится лишь по тем полям, которые соответствуют множителям в  $\text{Sym}$ -форме. Если все множители записаны в  $N$ -форме, то диагональных членов нет.

Если произведение операторных функционалов стоит под общим знаком какого-либо симметричного произведения, то оно автоматически симметризуется, и можно пользоваться обычными формулами (45), (46). Например:

$$T \left\{ \prod_{i=1}^n F_i(\hat{\varphi}) \right\} = N \left\{ \exp \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi} \right) \prod_{i=1}^n F_i(\varphi) \right\} \Big|_{\varphi=\hat{\varphi}} \quad (50)$$

Но иногда бывает удобно явным образом разделить свертки между разными сомножителями. Это можно сделать, переписав (50) следующим образом:

$$T \left\{ \prod_{i=1}^n F_i(\hat{\varphi}) \right\} = N \left\{ \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_i \frac{\delta}{\delta\varphi_i} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi_i} + \sum_{i < k} \frac{\delta}{\delta\varphi_i} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi_k} \right] \prod_{i=1}^n F_i(\varphi_i) \right\} \Big|_{\dots} \quad (51)$$

Переход от этого представления к предыдущему осуществляется с помощью обычного приема, основанного на формуле (38).

**5. Виковское и дайсоновское  $T$ -произведения.** В этом разделе обсуждается вопрос об определении символа  $T$  в тех случаях, когда в приводимом выражении содержатся производные поля по аргументу  $x$ , в частности по времени. Положим по определению

$$\begin{aligned} T[\mathcal{D}_1(x_1) \dots \mathcal{D}_n(x_n) \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)] &= \\ = \mathcal{D}_1(x_1) \dots \mathcal{D}_n(x_n) T[\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)], \end{aligned} \quad (52)$$

де  $\mathcal{D}_i(x_i)$  — произвольные дифференциальные операции, действующие на аргументы  $x_i$ . Доопределенное таким образом  $T$ -произведение называется *виковским* в отличие от дайсоновского  $T$ -произведения, которое будет рассмотрено ниже.

Выражение под знаком  $T$  в левой части (52) можно формально представить в виде операторного функционала (44) с сингулярным ядром:

$$\int \dots \int dy_1 \dots dy_n [\mathcal{D}_1^T(y_1) \dots \mathcal{D}_n^T(y_n) \delta(x_1 - y_1) \dots \delta(x_n - y_n)] \times \hat{\varphi}(y_1) \dots \hat{\varphi}(y_n). \quad (53')$$

Напомним, что транспонирование дифференциальной операции  $\mathcal{D}(x)$  определяется правилом  $[\partial/\partial x]^T = -\partial/\partial x$ . Если считать (53) обычным операторным функционалом и писать

$$\begin{aligned} T \int \dots \int dy_1 \dots dy_n F(y_1 \dots y_n) \hat{\varphi}(y_1) \dots \hat{\varphi}(y_n) = \\ = \int \dots \int dy_1 \dots dy_n F(y_1 \dots y_n) T [\hat{\varphi}(y_1) \dots \hat{\varphi}(y_n)], \end{aligned}$$

то правая часть этого равенства для сингулярного ядра (53) как раз и окажется правой частью (52). Другими словами, правило (52) эквивалентно распространению формулы приведения (46) на случай функционалов с любыми сингулярными ядрами, в том числе и на  $t$ -локальные функционалы с производными поля по времени. Отметим, что аналогичное (52) равенство для  $N$ - и Суп-произведений всегда выполнено.

Определим теперь *дайсоновское*  $T$ -произведение. Пусть  $\hat{F}_i(t_i)$  — произвольные операторы, зависящие от времени (другие аргументы, если они есть, воспринимаются как фиксированные параметры), причем каждый из  $\hat{F}_i$  является оператором либо бозонного, либо фермионного типа, но не смесью. Дайсоновское  $T$ -произведение этих операторов определяется равенством

$$T_D [\hat{F}_1(t_1) \dots \hat{F}_n(t_n)] = \sum_P \varepsilon_P P [\theta(1 \dots n) \hat{F}_1(t_1) \dots \hat{F}_n(t_n)], \quad (54)$$

в котором суммирование производится по всем одновременным перестановкам времен  $t_i$  в  $\theta$ -функции и операторов  $\hat{F}_i(t_i)$  как целого, а знаковый множитель  $\varepsilon_P$  определяется, как обычно, четностью перестановки множителей фермионного типа. В частном случае, когда каждый из  $\hat{F}_i$  есть оператор свободного поля  $\hat{\varphi}(x_i)$ , определение (54) совпадает с обычным виковским  $T$ -произведением (26). Но в тех случаях, когда  $\hat{F}_i$  содержат производные поля по времени, дайсоновское  $T$ -произведение (54) уже не совпадает с виковским  $T$ -произведением, определенным правилом (52).

Пусть, например,  $\hat{F}_1(t_1) = \hat{\varphi}(x_1)$  и  $\hat{F}_2(t_2) = \partial\hat{\varphi}(x_2)/\partial t_2$ . Тогда

$$T_D \left[ \hat{\varphi}(x_1), \frac{\partial\hat{\varphi}(x_2)}{\partial t_2} \right] = \theta(12) \hat{\varphi}(x_1) \frac{\partial\hat{\varphi}(x_2)}{\partial t_2} + \kappa\theta(21) \frac{\partial\hat{\varphi}(x_2)}{\partial t_2} \hat{\varphi}(x_1),$$

в то время как

$$\begin{aligned} T \left[ \hat{\varphi}(x_1), \frac{\partial\hat{\varphi}(x_2)}{\partial t_2} \right] &= \frac{\partial}{\partial t_2} T [\hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2)] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} [\theta(12) \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) + \kappa\theta(21) \hat{\varphi}(x_2) \hat{\varphi}(x_1)]. \end{aligned}$$

Ясно, что эти два выражения различаются, поскольку при дифференцировании по  $t_2$  во втором из них появляются дополнительные слагаемые, содержащие производные  $\theta$ -функций.

### § 3. S-МАТРИЦА И ФУНКЦИИ ГРИНА

**1. Определения.** Мы переходим теперь к рассмотрению взаимодействующих квантовых систем, для которых  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}$ , где  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}_0$  — соответственно полный и свободный гамильтонианы,  $\mathbf{V}$  — гамильтониан взаимодействия.

Динамику квантовой системы можно описывать унитарным оператором развития  $\mathbf{U}(\tau_1, \tau_2)$  в представлении взаимодействия. Этот оператор является решением уравнения  $i\partial\mathbf{U}(\tau_1, \tau_2)/\partial\tau_1 = \mathbf{V}(\tau_1)\mathbf{U}(\tau_1, \tau_2)$ , в котором  $\mathbf{V}(\tau)$  есть гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия:  $\mathbf{V}(\tau) = \exp(i\mathbf{H}_0\tau) \times \mathbf{V} \exp(-i\mathbf{H}_0\tau)$ . Решение уравнения движения для  $\mathbf{U}$  с начальным условием  $\mathbf{U}(\tau, \tau) = \mathbf{I}$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\tau_1, \tau_2) &= e^{i\mathbf{H}_0\tau_1} e^{i\mathbf{H}(\tau_2 - \tau_1)} e^{-i\mathbf{H}_0\tau_2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int \dots \int dt_1 \dots dt_n \theta(1 \dots n) \mathbf{V}(t_1) \dots \mathbf{V}(t_n). \end{aligned} \quad (55)$$

Интегрирование по каждому времени  $t_i$  производится от  $\tau_2$  до  $\tau_1$ .

По определению оператором  $S$ -матрицы  $\mathbf{U}$  называется предел оператора развития  $\mathbf{U}(\tau_1, \tau_2)$  при  $\tau_1 \rightarrow \infty$ ,  $\tau_2 \rightarrow -\infty$ :  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(+\infty, -\infty)$ .

С математической точки зрения  $\mathbf{U}(\tau_1, \tau_2)$  является хорошо определенным унитарным оператором тогда, когда  $\mathbf{H}_0$  и  $\mathbf{H}$  — самосопряженные (а не просто симметричные) операторы. Для трансляционно инвариантных систем, в частности релятивистских, оператор  $\mathbf{H}$  таковым, как правило, не является. Но даже если оператор  $\mathbf{U}(\tau_1, \tau_2)$  хорошо определен, предел  $\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}(\infty, -\infty)$  может не существовать в математически строгом смысле. Необходимым условием существования этого предела служит совпадение спектров операторов  $\mathbf{H}_0$  и  $\mathbf{H}$ , а это условие, как правило, не выполняется. Таким образом, в большинстве практически важных случаев рассматриваемые нами операторы являются всего лишь некоторыми формальными конструкциями,

из которых, тем не менее, оказывается возможным извлечь всю необходимую физическую информацию о системе.

Возвратимся теперь к выражению (55). Симметризовав общий член ряда по всем перестановкам времен  $t_1 \dots t_n$ , мы выразим его через дайсоновское  $T$ -произведение операторов  $\mathbf{V}(t_i)$ :

$$\begin{aligned} & \int \dots \int dt_1 \dots dt_n \theta(1 \dots n) \mathbf{V}(t_1) \dots \mathbf{V}(t_n) = \\ & = \frac{1}{n!} \int \dots \int dt_1 \dots dt_n T_D [\mathbf{V}(t_1) \dots \mathbf{V}(t_n)], \end{aligned} \quad (56)$$

а весь ряд (55) можно тогда записать в виде дайсоновской  $T$ -экспоненты:

$$U(\tau_1, \tau_2) = T_D \exp \left[ -i \int_{\tau_2}^{\tau_1} dt \mathbf{V}(t) \right]. \quad (57)$$

Равенство (56) верно лишь тогда, когда  $\mathbf{V}(t)$  — оператор бозонного типа, что и будет всегда предполагаться, хотя на практике встречаются и такие случаи, когда это не так. Например, оператор взаимодействия двухуровневой системы с квантованным электромагнитным полем записывается в виде  $a^+b + b^+a$ , где  $b^+$ ,  $b$  — фермионные повышающий и понижающий операторы двухуровневой системы,  $a^+$ ,  $a$  — бозонные операторы поля. Взаимодействие является в данном случае оператором фермионного типа и вольтерровский ряд (55) не сводится к дайсоновской  $T$ -экспоненте.

В полевых теориях важным объектом изучения являются также функции Грина поля, которые определяются следующим образом:

$$H_n(x_1 \dots x_n) = \langle 0 | T_D [\hat{\varphi}_r(x_1) \dots \hat{\varphi}_r(x_n)] | 0 \rangle. \quad (58)$$

В этой формуле  $|0\rangle$  обозначает основное состояние полного гамильтониана — „физический вакуум“, которое предполагается невырожденным и нормированным на единицу;  $\hat{\varphi}_r(x)$  — оператор поля в гайзенберговском представлении:  $\hat{\varphi}_r(t, \mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{H}t) \hat{\varphi}(0, \mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{H}t)$ . Символ  $T_D$  определен в предыдущем разделе.

**2. Переход к представлению взаимодействия в операторе развита.** В полевых теориях оператор  $\mathbf{V}(t)$  задается явно в виде некоторого  $t$ -локального операторного функционала. В этом и следующем разделах предполагается, что операторный функционал  $\mathbf{V}(t)$  не содержит производных поля по времени. Мы будем называть такие функционалы *простыми*.

Любой операторный функционал можно записать в  $N$ -форме, а от нее, при желании, перейти к Sym-форме с помощью соотношения (47). В дальнейшем изложении особую роль будет играть симметричный функционал  $\varphi(t, \hat{\varphi})$ , представляющий оператор взаимодействия в Sym-форме:  $\mathbf{V}(t) = \varphi(t, \hat{\varphi}) =$

$= \text{Sym} \varphi(t, \hat{\varphi})$ . В соответствии с предположением  $\varphi(t, \varphi)$  — простой  $t$ -локальный функционал.\* Величину

$$S_v(\tau_1, \tau_2; \varphi) \equiv - \int_{\tau_2}^{\tau_1} dt \varphi(t, \varphi) \quad (59)$$

будем называть *функционалом взаимодействия* в интервале  $\tau_2 \leq t \leq \tau_1$  для данного квантового взаимодействия  $V$ . Функционал взаимодействия на всей оси времени будет обозначаться  $S_v(\varphi)$ .

Сразу же подчеркнем, что  $S_v$  рассматривается просто как некий классический образ заданного квантового взаимодействия, а не как характеристика той классической системы, каноническое квантование которой приводит к рассматриваемой квантовой теории. Функционал  $S_v$  определяет оператор  $V$  однозначно, тогда как каноническое квантование в общем случае неоднозначно.

Переход к представлению взаимодействия в (57) можно выполнить, опираясь на следующее утверждение: для любого набора  $\hat{F}_1(t_1) \dots \hat{F}_n(t_n)$  простых  $t$ -локальных операторных функционалов

$$T_D [\hat{F}_1(t_1) \dots \hat{F}_n(t_n)] = T [\hat{F}_1(t_1) \dots \hat{F}_n(t_n)]. \quad (60)$$

Символ  $T$  в правой части обозначает виковское  $T$ -произведение.

Чтобы доказать (60), приведем обе части равенства к  $N$ -форме и убедимся, что получающиеся выражения одинаковы.

Правая часть (60) приводится к  $N$ -форме по правилу (50):

$$\begin{aligned} & T [\hat{F}_1(t_1) \dots \hat{F}_n(t_n)] = \\ & = N \left\{ \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] \mathcal{F}_1(\varphi) \dots \mathcal{F}_n(\varphi) \right\} \dots, \quad (61) \end{aligned}$$

где  $\mathcal{F}_i$  представляет  $\text{Sym}$ -форму оператора  $\hat{F}_i(t_i)$ , т. е.  $\hat{F}_i(t_i) = = \text{Sym} \mathcal{F}_i(\hat{\varphi}) = \mathcal{F}_i(\hat{\varphi})$ .

Чтобы привести к  $N$ -форме левую часть (60), воспользуемся определением (54) и приведем к  $N$ -форме по правилу (48) каждый член суммы по перестановкам. В результате придем к выражению

$$\begin{aligned} & N \left\{ \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_i \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_i} + \sum_{i < k} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k} \right] \times \right. \\ & \left. \times \sum_P \varepsilon_P P [\theta(1 \dots n) \mathcal{F}_1(\varphi_1) \dots \mathcal{F}_n(\varphi_n)] \right\} \dots, \quad (62) \end{aligned}$$

\* Как отмечалось в п. 2.4, классический функционал определяется по квантовому оператору лишь с точностью до произвольной добавки, обращаемой в нуль на поверхности масс, т. е. на множестве решений уравнения  $K\varphi = 0$ . Но для обычных  $K$  такая добавка обязательно будет содержать производные поля по времени, поэтому в классе простых функционалов  $\text{Sym}$ -форма  $V$  определяется однозначно.

в котором суммирование производится по всем одновременным перестановкам времен  $t_i$  в  $\theta$ -функции и нижних индексов функционалов  $\mathcal{F}_i$  при сохранении порядка функциональных аргументов  $\varphi_1 \dots \varphi_n$ ;  $\varepsilon_p$  определяется, как обычно, четностью перестановки фермионных множителей.

Последующие рассуждения почти дословно повторяют доказательство хронологической теоремы Вика (43). Основным соображением является то, что во всех членах суммы по перестановкам в (62) аргументы  $\varphi_i$  расположены в порядке возрастания номеров слева направо и их порядок точно совпадает с порядком убывания времен в  $T$ -произведении. Поэтому в недиагональных членах квадратичной формы производных свертку  $n$  можно заменить на  $\Delta$  и затем выполнить симметризацию по  $i \rightleftharpoons k$  точно так же, как это было сделано при доказательстве формулы (43):

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_i} n \frac{\delta}{\delta\varphi_k} \rightarrow \frac{\delta}{\delta\varphi_i} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi_k} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta}{\delta\varphi_i} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi_k} + \frac{\delta}{\delta\varphi_k} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi_i} \right]. \quad (63)$$

Диагональные члены квадратичной формы производных при доказательстве (43) были несущественны, поскольку они не давали вклада. Теперь же они существенны, но в этих членах также можно заменить  $n$  на  $\Delta$ , воспользовавшись, во-первых, тем, что ядро формы  $(\delta/\delta\varphi_i)n(\delta/\delta\varphi_i)$  автоматически симметризуется, и, во-вторых, тем, что эти операции действуют на простые  $t$ -локальные функционалы и потому в ответы войдут лишь значения  $n_s$  на поверхности  $t=t'$ , где  $n_s$  и  $\Delta$  согласно равенству (30) совпадают. Это доказывает, что квадратичную форму производных в (62) можно записать в виде полного квадрата типа (38); повторяя затем дословно соответствующую часть доказательства теоремы Вика (43), мы получим искомый результат.

Воспользовавшись равенством (60) для того случая, когда каждый из  $\hat{F}_i(t_i)$  есть оператор взаимодействия  $V(t_i)$ , представим оператор развития и  $S$ -матрицу виковской  $T$ -экспонентой, которую затем можно привести к нормальной форме по правилу (46):

$$\begin{aligned} U(\tau_1, \tau_2) &= T \exp iS_v(\tau_1, \tau_2; \hat{\varphi}) = \\ &= N \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi} \right) \exp iS_v(\tau_1, \tau_2; \varphi) \Big|_{\varphi=\hat{\varphi}}. \end{aligned} \quad (64)$$

В этих формулах  $S_v(\tau_1, \tau_2; \varphi)$  — классический функционал взаимодействия (59), представляющий  $\text{Sum}$ -форму квантового взаимодействия.

**3. Переход к представлению взаимодействия для функций Грина.** Рассмотрим переход от дайсоновского  $T$ -произведения к виковскому в функциях Грина (58), предполагая, как и раньше, что оператор взаимодействия не содержит производных поля по времени.

Пусть  $\hat{F}_i(t_i)$  — некоторые простые  $t$ -локальные операторные функционалы,  $\hat{F}_{ir}(t_i)$  — те же операторы в гайзенберговском представлении:

$$\hat{F}_{ir}(t) = e^{iHt} e^{-iH_0 t} \hat{F}_i(t) e^{iH_0 t} e^{-iHt} = \mathbf{U}(0, t) \hat{F}_i(t) \mathbf{U}(t, 0). \quad (65)$$

Здесь  $\hat{F}_i(t)$  — оператор в представлении взаимодействия,  $\mathbf{U}$  — оператор развития (55). По определению

$$T_D [\hat{F}_{1r}(t_1) \dots \hat{F}_{nr}(t_n)] = \sum_P \varepsilon_P P [\theta(1 \dots n) \hat{F}_{1r}(t_1) \dots \hat{F}_{nr}(t_n)].$$

Пользуясь соотношением (65) и групповым законом  $\mathbf{U}(t_1, t_2) \times \times \mathbf{U}(t_2, t_3) = \mathbf{U}(t_1, t_3)$  для оператора развития, получаем

$$\begin{aligned} & \hat{F}_{1r}(t_1) \dots \hat{F}_{nr}(t_n) = \\ & = \mathbf{U}(0, t_1) \hat{F}_1(t_1) \mathbf{U}(t_1, t_2) \hat{F}_2(t_2) \dots \hat{F}_n(t_n) \mathbf{U}(t_n, 0). \end{aligned} \quad (66)$$

Пусть  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — произвольные числа такие, что  $\tau_2 \leq t_i \leq \tau_1$  для любого из времен  $t_i$  в произведении (66). Пользуясь равенствами  $\mathbf{U}(0, t_1) = \mathbf{U}(0, \tau_1) \mathbf{U}(\tau_1, t_1)$  и  $\mathbf{U}(t_n, 0) = \mathbf{U}(t_n, \tau_2) \times \times \mathbf{U}(\tau_2, 0)$ , получаем

$$T_D [\hat{F}_{1r}(t_1) \dots \hat{F}_{nr}(t_n)] = \mathbf{U}(0, \tau_1) M(t_1 \dots t_n; \tau_1, \tau_2) \mathbf{U}(\tau_2, 0),$$

где

$$\begin{aligned} M(t_1 \dots t_n; \tau_1, \tau_2) \equiv & \sum_P \varepsilon_P P [\theta(1 \dots n) \mathbf{U}(\tau_1, t_1) \times \\ & \times \hat{F}_1(t_1) \mathbf{U}(t_1, t_2) \dots \hat{F}_n(t_n) \mathbf{U}(t_n, \tau_2)]. \end{aligned} \quad (67)$$

Суммирование в последней формуле производится по всем одновременным перестановкам операторов  $\hat{F}_i(t_i)$  как целого и времен  $t_i$  в  $\theta$ -функции и в операторах развития  $\mathbf{U}$ .

Мы будем доказывать, что правая часть (67) равна

$$T[\mathcal{F}_1(\hat{\varphi}) \dots \mathcal{F}_n(\hat{\varphi}) \exp iS_v(\tau_1, \tau_2; \hat{\varphi})], \quad (68)$$

где  $T$  — символ виковского  $T$ -произведения;  $S_v$  — функционал взаимодействия (59);  $\mathcal{F}_i(\varphi)$  — симметричные функционалы, представляющие  $\text{Sym}$ -форму операторов  $\hat{F}_i(t_i)$  в представлении взаимодействия:  $\hat{F}_i(t_i) = \text{Sym} \mathcal{F}_i(\hat{\varphi}) = \mathcal{F}_i(\hat{\varphi})$ .

Равенство выражений (68) и (67) доказывается так же, как и аналогичное соотношение (60), а именно: правая часть (67) и (68) приводятся к  $N$ -форме и проверяется, что результаты совпадают.

Общий член (67) является произведением  $n$  операторов  $\hat{F}_i(t_i) = \mathcal{F}_i(\hat{\varphi})$  и  $n+1$  операторов развития  $\mathbf{U}$ , каждый из которых можно записать в  $N$ -форме с помощью (64). Каждый из членов суммы по перестановкам (67) можно привести к  $N$ -форме с помощью соотношения (49), введя  $2n+1$  независимых аргументов  $\varphi_i$ , которые будут располагаться в формуле приведе-

ния слева направо в порядке возрастания номеров. Показатель экспоненты полной операции приведения будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sum_i \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi_i} + \frac{1}{2} \sum_i'' \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_i} + \sum_{i < k} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} n \frac{\delta}{\delta \varphi_k}, \quad (69)$$

а в приводимом функционале каждый из операторов  $\hat{F}_i$  нужно заменить на  $\mathcal{F}_i$  и каждый из операторов  $U$  — на  $\exp iS_v$  для соответствующего интервала времени. В форме (69) первая сумма (с одним штрихом) берется по тем  $n+1$  полям  $\varphi_i$ , которые являются аргументами классических функционалов взаимодействия  $S_v$ , а множитель  $\exp(1/2 \cdot \Sigma' \dots)$  есть вклад всех операций приведения (64) для операторов развития  $U$ . Вторая группа диагональных членов (сумма с двумя штрихами) есть вклад операций приведения к  $N$ -форме всех симметричных функционалов  $\mathcal{F}_i$ ;  $t$ -локальность этих функционалов вместе с равенством (30) позволяет заменить в этих членах свертку  $n$  на  $\Delta$  точно так же, как это было сделано при доказательстве (60). Что касается недиагональных членов (69), то обычные аргументы, согласно которым поле с большим номером имеет меньшее время, сохраняют силу и для правой части (67), поскольку временные аргументы полей в функционале  $U(t_1, t_2)$  заключены между  $t_1$  и  $t_2$  (здесь существенно предположение  $\tau_2 \leq t_i \leq \tau_1$ ). Это позволяет сделать замену (63) в недиагональных членах формы (69), форма приводится к полному квадрату и все поля  $\varphi_i$  можно, как обычно, положить равными еще до дифференцирования. Произведение множителей  $\exp iS_v$  для всех операторов развития в (67) соберется тогда в полную экспоненту для интервала  $\tau_2 \leq t \leq \tau_1$ , сумма по перестановкам, как и при доказательстве (43), приведет к замене  $\theta \rightarrow 1$ , и в итоге мы приходим к правой части (68).

Доказанное утверждение можно записать следующим образом:

$$T_D [\hat{F}_{1r}(t_1) \dots \hat{F}_{nr}(t_n)] = \\ = U(0, \tau_1) T [F_1^{\hat{}}(t_1) \dots F_n^{\hat{}}(t_n) \exp iS_v(\tau_1, \tau_2; \hat{\varphi})] U(\tau_2, 0). \quad (70)$$

Отметим, что при выводе соотношений (45), (46), (60), (70) используется, в сущности, лишь то, что при  $t > t'$  свертки  $\Delta(x, x')$  и  $n(x, x')$  совпадают, а при  $t = t'$  они связаны соотношением (30). В последующих главах будут рассмотрены евклидова теория поля и квантовая статистика. В этих теориях свертки  $\Delta$  и  $n$  будут другими, но функциональный вид операций приведения и равенства  $\Delta = n$  при  $t > t'$ ,  $\Delta = n_s$  при  $t = t'$  сохраняются. Поэтому доказательства соотношений (45), (46), (60), (70) остаются в силе и для этих теорий.

Рассмотрим теперь среднее значение оператора (70) по истинному основному состоянию  $|0\rangle$ . Будем считать известны-



ми следующие асимптотические формулы нестационарной теории возмущений для дискретного невырожденного уровня: при  $\tau_1 \rightarrow \infty, \tau_2 \rightarrow -\infty$

$$U(\tau_2, 0)|0\rangle \cong \alpha(\tau_2)|0\rangle; \quad U(\tau_1, 0)|0\rangle \cong \beta(\tau_1)|0\rangle. \quad (71)$$

Здесь  $|0\rangle$  — основное состояние свободного гамильтониана, которое предполагается невырожденным;  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые фазовые множители. Доказательство формул (71) и их обобщение на случай вырожденного уровня приводится в Приложении 1.

При  $\tau_1 \rightarrow \infty, \tau_2 \rightarrow -\infty$  имеем

$$(0|U(0, \tau_1) \dots U(\tau_2, 0)|0\rangle \cong \beta^*(\tau_1)\alpha(\tau_2)\langle 0|\dots|0\rangle. \quad (72)$$

Смысл фазового множителя  $\beta^*(\tau_1)\alpha(\tau_2)$  нетрудно найти из (71):  $\beta(\tau_1)\alpha^*(\tau_2) \cong \langle 0|U(\tau_1, \tau_2)|0\rangle$  при  $\tau_1 \rightarrow \infty, \tau_2 \rightarrow -\infty$ . Поэтому

$$(0|T_D[\hat{F}_{1r}(t_1) \dots \hat{F}_{nr}(t_n)]|0\rangle = \frac{\langle 0|T\{\hat{F}_1(t_1) \dots \hat{F}_n(t_n) \exp iS_v(\hat{\varphi})\}|0\rangle}{\langle 0|T \exp iS_v(\hat{\varphi})|0\rangle}, \quad (73)$$

где  $S_v$  — функционал взаимодействия (59) для всей оси времени.\*

Знаменатель в правой части (73) есть вакуумное ожидание  $S$ -матрицы  $U \equiv U(\infty, -\infty)$ . Эта величина определяет  $\Delta E_0$  — сдвиг энергии основного состояния при включении взаимодействия, так как для любого невырожденного дискретного уровня при  $\tau_1 - \tau_2 \rightarrow \infty$

$$\ln \langle 0|U(\tau_1, \tau_2)|0\rangle = -i\Delta E_0(\tau_1 - \tau_2) + 0(1). \quad (74)$$

Доказательство этой асимптотической формулы приводится в Приложении 1. Утверждение (74) применительно к  $S$ -матрице будем записывать в виде  $\langle 0|U|0\rangle = \exp[-i\Delta E_0 \int dt]$ .

Числитель в правой части (73) называют *полной функцией Грина операторов*  $\hat{F}_{ir}$ , а частное (73) — *функцией Грина без вакуумных петель*. Смысл этой терминологии станет ясен позднее. Величины

$$G_n(x_1 \dots x_n) \equiv \langle 0|T\{\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \exp iS_v(\hat{\varphi})\}|0\rangle \quad (75)$$

являются по определению полными функциями Грина поля  $\hat{\varphi}_r$ . „Нулевая функция“  $G_0 \equiv \langle 0|T \exp iS_v(\hat{\varphi})|0\rangle$  есть число — вакуумное ожидание  $S$ -матрицы. Определенные соотношением (58) функции

$$H_n(x_1 \dots x_n) = (0|T_D[\hat{\varphi}_r(x_1) \dots \hat{\varphi}_r(x_n)]|0\rangle = G_0^{-1}G_n(x_1 \dots x_n) \quad (76)$$

\* Иногда в этой формуле вместо  $\exp iS_v(\hat{\varphi})$  пишут оператор  $S$ -матрицы. Это небрежность записи: строго говоря, символ „ $T$ -оператор“ смысла вообще не имеет в отличие от „ $T$ -операторный функционал“ (см. по этому поводу замечание в п. 2.1).

можно теперь назвать функциями Грина без вакуумных петель поля  $\hat{\varphi}_T$ .

**4. Взаимодействие, содержащее производные поля по времени.** При получении формул (60), (70), сводящих дайсоновские  $T$ -произведения к виковским, использовалось предположение об отсутствии производных поля по времени в операторе взаимодействия  $V(t)$ . Теперь мы рассмотрим общий случай, когда  $V(t)$  —  $t$ -локальный функционал, зависящий не только от самого поля  $\hat{\varphi}(x)$ , но и от производных  $\hat{\varphi}_n \equiv (\partial/\partial t)^n \hat{\varphi}$  конечного порядка. Общий случай сразу же сводится к рассмотренному, если каждую из производных  $\hat{\varphi}_n$  считать независимым полем и определять матрицу сверток системы полей  $\hat{\varphi}_n$  через дайсоновское  $T$ -произведение:

$$\Delta_{nm}(x, x') = T_D[\hat{\varphi}_n(x) \hat{\varphi}_m(x')] - N[\hat{\varphi}_n(x) \hat{\varphi}_m(x')]. \quad (77)$$

Символ  $T$  в этой формуле можно понимать и как обычное виковское  $T$ -произведение независимых полей  $\hat{\varphi}_n$ , рассматривая (77) как частный случай общего определения (28). Это значит, что на языке системы независимых полей  $\hat{\varphi}_n$  все стандартные формулы приведения остаются верными (индекс  $n$ , при желании, можно включить в аргумент  $x$ ), в частности, можно пользоваться формулами (60), (70), поскольку на языке полей  $\varphi_n$  функционал взаимодействия  $S_v(\varphi_0, \varphi_1, \dots)$ , представляющий Sum-форму квантового взаимодействия, не содержит производных полей по времени. Следовательно:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= T \exp i S_v(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \dots) = \\ &= N \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{nm} \frac{\delta}{\delta \varphi_n} \Delta_{nm} \frac{\delta}{\delta \varphi_m} \right) \exp i S_v(\varphi_0, \varphi_1, \dots) | \dots \end{aligned} \quad (78)$$

Символ  $| \dots$  указывает, что после выполнения дифференцирования каждое из классических полей  $\varphi_i$  нужно заменить на квантовое поле  $\hat{\varphi}_i$ .

Полученную теорию можно сформулировать и на языке одного поля  $\varphi \equiv \varphi_0$ , изменив определенным образом функционал взаимодействия. Чтобы это сделать, выделим из матрицы сверток  $\Delta_{nm}$  ее „виковскую часть”  $\Delta'_{nm}$ :

$$\Delta'_{nm}(x, x') \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^n \left( \frac{\partial}{\partial t'} \right)^m \Delta(x, x'); \quad \Delta_{nm} = \Delta'_{nm} + a_{nm}. \quad (79)$$

Добавка  $a_{nm}$  является  $t$ -локальной, т. е. содержит  $\delta(t-t')$  и ее производные конечного порядка. Ясно также, что  $a_{00} = 0$ .

Определим теперь функционал  $S'_v(\varphi_0, \varphi_1, \dots)$  соотношением

$$\begin{aligned} &\exp i S'_v(\varphi_0, \varphi_1, \dots) = \\ &= \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{nm} \frac{\delta}{\delta \varphi_n} a_{nm} \frac{\delta}{\delta \varphi_m} \right) \exp i S_v(\varphi_0, \varphi_1, \dots). \end{aligned} \quad (80)$$

Функционал  $S$ -матрицы в  $N$ -форме (78) выражается через  $S'_v$  следующим образом:

$$U = N \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{nm} \frac{\delta}{\delta \varphi_n} \Delta'_{nm} \frac{\delta}{\delta \varphi_m} \right) \exp i S'_v(\varphi_0, \varphi_1, \dots) \Big|_{\varphi_i = \hat{\varphi}_i} \quad (81)$$

Остается заметить, что это соотношение можно рассматривать как формулу приведения обычной вииковской  $T$ -экспоненты

$$U = N \exp \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi} \right) \exp i S_v^{\text{эф}}(\varphi) \Big|_{\varphi = \hat{\varphi}} \quad (82)$$

для взаимодействия

$$S_v^{\text{эф}}(\varphi) = S'_v(\varphi_0, \varphi_1, \dots) \Big|_{\varphi_k = \partial^k \varphi / \partial t^k} \quad (83)$$

Действительно, пусть  $\hat{\varphi}_n = K_n \hat{\varphi}$  и  $\Delta'_{nm} = K_n K_m \Delta = K_n \Delta K_m^T$ , где  $K_n$  — произвольные линейные операции (у нас  $K_n = \partial^n / \partial t^n$ ). Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\equiv \sum_{nm} \frac{\delta}{\delta \varphi_n} \Delta'_{nm} \frac{\delta}{\delta \varphi_m} = \sum_{nm} \frac{\delta}{\delta \varphi_n} K_n \Delta K_m^T \frac{\delta}{\delta \varphi_m} = \\ &= \sum_{nm} \left( K_n^T \frac{\delta}{\delta \varphi_n} \right) \Delta \left( K_m^T \frac{\delta}{\delta \varphi_m} \right), \end{aligned}$$

т. е. дифференциальная форма сводится к полному квадрату. Отсюда

$$\mathcal{D}F(\varphi_0, \varphi_1, \dots) \Big|_{\varphi_n = K_n \varphi} = \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi} F(K_0 \varphi, K_1 \varphi, \dots),$$

поскольку

$$\frac{\delta}{\delta \varphi} = \sum_n \frac{\delta \varphi_n}{\delta \varphi} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi_n} = \sum_n K_n^T \frac{\delta}{\delta \varphi_n}.$$

В правой части  $\delta / \delta \varphi_n$  понимается как частная производная по  $\varphi_n = K_n \varphi$ , в левой части  $\delta / \delta \varphi$  есть „полная производная“. Приведенные выше рассуждения доказывают формулу (82).

Замкнутое выражение для *эффективного взаимодействия* (83) можно получить тогда, когда исходный функционал взаимодействия  $S_v(\varphi_0, \varphi_1, \dots)$  зависит от производных  $\varphi_n$ ,  $n \geq 1$ , достаточно просто (линейно или квадратично). Отметим, что определенное соотношениями (80), (83) эффективное взаимодействие всегда будет иметь лагранжеву форму, т. е. представляться интегралом по времени от некоторого  $t$ -локального функционала — лагранжиана. Но этот лагранжиан в общем случае оказывается комплексным, а не вещественным, как обычно (относительно унитарности  $S$ -матрицы см. п. 5.2).

Стоит также отметить, что для большинства практически

важных случаев изложенная выше схема построения эффективного взаимодействия является избыточно общей. Действительно, оператор свободного поля, из которого строится взаимодействие, удовлетворяет  $t$ -локальному уравнению движения (2). Для обычных лагранжианов это уравнение либо первого, либо второго порядка по времени (подробнее см. гл. II). В уравнении первого порядка производная  $\dot{\varphi}_1$  выражается через само поле  $\varphi$  или его производные по другим аргументам, и в этом случае без ограничения общности можно считать, что взаимодействие вообще не содержит производных поля по времени. Для уравнения второго порядка точно так же можно исключить вторую производную поля по времени и считать, что любое взаимодействие выражается только через оператор поля и его первую производную по времени.

До сих пор мы рассматривали лишь квантовую теорию, считая  $V$  некоторым данным операторным функционалом и не интересуясь его происхождением. Скажем теперь несколько слов о квантовании классических систем, лагранжиан взаимодействия которых содержит производные поля по времени. Без ограничения общности можно считать, что лагранжиан зависит только от первых производных по времени, т. е. скоростей. Если лагранжиан невырожден (об особенностях квантования систем с вырожденными лагранжианами можно прочесть, например, в книге [4]), то по нему однозначно находится классический гамильтониан взаимодействия  $\mathcal{V}$  как функция координат и импульсов. При квантовании в шредингеровском представлении  $q$  и  $p$  заменяются на операторы, причем разным вариантам расстановки некоммутирующих множителей соответствуют разные операторы  $V = \mathcal{V}(\hat{q}, \hat{p})$ , т. е. разные „рецепты квантования” (см. пример в § II. 6). Операторную реализацию координат и импульсов в шредингеровском представлении всегда можно взять такой же, как и для свободной теории. Тогда при переходе к представлению взаимодействия зависимость этих операторов от времени будет определяться уравнениями свободной теории, так что операторы импульса в представлении взаимодействия можно выразить через производные по времени от операторов координат (свободного поля). В результате получим явное представление оператора взаимодействия  $V(t)$  в виде  $t$ -локального операторного функционала от свободного поля, и дальнейшее рассмотрение квантовой теории пойдет так, как описано выше. Разным вариантам квантования, которым соответствуют разные операторы  $V(t)$ , будут сопоставляться разные функционалы  $S_v^{\text{эф}}$ , так как этот функционал определяет  $V(t)$  однозначно. В конкретных случаях выбор рецепта квантования ограничивается различными дополнительными соображениями, например требованием релятивистской инвариантности в релятивистских теориях.

**5. Производящие функционалы  $S$ -матрицы и функций Грина.** Производящим функционалом  $S$ -матрицы будет называться функционал

$$R(\varphi) = \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi}\right) \exp i S_v(\varphi), \quad (84)$$

представляющий оператор  $S$ -матрицы в нормальной форме. Для взаимодействия с производными поля по времени  $S_v$  в этой формуле следует понимать как эффективное взаимодействие, рассмотренное в предыдущем разделе. По определению оператор  $S$ -матрицы есть  $NR(\hat{\varphi})$ . Поле  $\hat{\varphi}$  удовлетворяет свободному уравнению (2), откуда ясно, что для определения  $S$ -матрицы как оператора достаточно знать сужение функционала  $R(\varphi)$  на множество тех  $\varphi$ , которые удовлетворяют уравнению (2). Это сужение будет называться функционалом  $S$ -матрицы на поверхности масс в отличие от самого функционала (84), который представляет  $S$ -матрицу вне поверхности масс.

Определим также производящий функционал полных функций Грина (75):

$$G(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} G_n(iA)^n \equiv \\ \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_n G_n(x_1 \dots x_n) A(x_n) \dots A(x_1). \quad (85)$$

Аргумент функционала  $A(x)$  есть классический объект той же природы, что и поле  $\varphi(x)$ , т. е. обычная функция для бозонов и антикоммутирующая функция для фермионов. В последнем случае отличны от нуля лишь функции  $G_n$  с четными номерами  $n$ .

Воспользовавшись соотношениями (75), (76); получим

$$G(A) = G_0(0 | T_D \exp i \hat{\varphi}_r A | 0) = \langle 0 | T \exp i [S_v(\hat{\varphi}) + \hat{\varphi} A] | 0 \rangle. \quad (86)$$

Все обозначения стандартные и не нуждаются в пояснениях.

Обычно  $N$ -произведение определяется так, что  $\langle 0 | N[\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)] | 0 \rangle = 0$  для любого  $n \geq 1$ . Тогда для произвольного функционала

$$\langle 0 | N F(\hat{\varphi}) | 0 \rangle = F(0). \quad (87)$$

Считая это равенство верным, из (86) и (46) получаем

$$G(A) = \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi}\right] \exp i [S_v(\varphi) + \varphi A] \Big|_{\varphi=0}. \quad (88)$$

Согласно договоренности в фермионном случае производные в дифференциальных операциях приведения считаются правыми. Это удобно для записи формул приведения (45), (46), ко-

торые оказываются одинаковыми для обеих статистик. Но сейчас мы собираемся использовать формулы (10) — (12), что требует перехода к левым производным; из (9) видно, что это приведет лишь к изменению знака в показателе операции приведения. Сделав эту замену, находим с помощью (12) функционал (88) для свободной теории:

$$G^{(0)}(A) = \exp \left[ \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{\vec{\delta}}{\partial \varphi} \Delta \frac{\vec{\delta}}{\partial \varphi} \right] \exp i \varphi A \Big|_{\varphi=0} = \exp \left[ -\frac{\kappa}{2} A \Delta A \right]. \quad (89)$$

Аналогично

$$\exp i [S_v(\varphi) + \varphi A] = \exp i S_v(\kappa \vec{\delta} / \delta i A) \exp i \varphi A. \quad (90)$$

Комбинируя эти формулы, получаем

$$G(A) = \exp i S_v(\kappa \vec{\delta} / \delta i A) \exp [-\kappa A \Delta A / 2]. \quad (91)$$

Отметим, что все эти соотношения остаются верными и для взаимодействия с производными по времени, если под  $S_v(\varphi)$  понимать эффективное взаимодействие. Отметим также полезное соотношение, получаемое путем сравнения представлений (88) и (91) при  $A=0$ :

$$\exp \left( \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{\vec{\delta}}{\partial \varphi} \Delta \frac{\vec{\delta}}{\partial \varphi} \right) F(\varphi) \Big|_{\varphi=0} = F \left( \kappa \frac{\vec{\delta}}{\partial \varphi} \right) \exp \left( \frac{\kappa}{2} \varphi \Delta \varphi \right) \Big|_{\varphi=0}. \quad (92)$$

Между функционалами  $R$  и  $G$  существует простая связь. Пользуясь соотношением (10), получаем

$$G(A) = \exp \left[ \frac{\kappa}{2} \left( iA + \frac{\vec{\delta}}{\partial \varphi} \right) \Delta \left( iA + \frac{\vec{\delta}}{\partial \varphi} \right) \right] \exp i S_v(\varphi) \Big|_{\varphi=0},$$

откуда, учитывая симметричность  $\Delta$  и определение (84), находим

$$G(A) = \exp \left( -\frac{\kappa}{2} A \Delta A \right) \exp \left[ (i \Delta A) \frac{\vec{\delta}}{\partial \varphi} \right] R(\varphi) \Big|_{\varphi=0}.$$

Согласно (11) оставшаяся дифференциальная операция дает сдвиг:

$$G(A) = \exp \left( -\frac{\kappa}{2} A \Delta A \right) R(i \Delta A) = G^{(0)}(A) R(i \Delta A). \quad (93)$$

Это и есть искомое соотношение, показывающее, что знание  $S$ -матрицы вне поверхности масс равносильно знанию всех функций Грина. Сделав в (93) замену  $A \rightarrow -i \Delta^{-1} A$ , получим обратное соотношение:

$$R(A) = \exp \left( -\frac{1}{2} A \Delta^{-1} A \right) G(-i \Delta^{-1} A). \quad (94)$$

Обратим внимание на отсутствие множителя  $\kappa$  в гауссовой экспоненте.

В заключение отметим, что для комплексного поля  $\psi$ ,  $\psi^+$  производящий функционал функций Грина обычно определяют соотношением  $G(a^+, a) = \langle 0 | T \exp i [S_v(\psi^+, \psi) + \psi^+ a + a^+ \psi] | 0 \rangle$ . При переходе к универсальным обозначениям

$$A = \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^+ \end{pmatrix}, \quad \psi^+ a + a^+ \psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix} \equiv \varphi g A, \quad (95)$$

т. е. в функционале (86) нужно сделать замену  $A \rightarrow gA$ ; при этом  $A \Delta A \rightarrow Ag^T \Delta gA$ .

#### § 4. ДИАГРАММЫ

**1. Теория возмущений.** Из определения (84) получаем ряд теории возмущений для  $S$ -матрицы:

$$R(\varphi) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] \mathcal{M}^N(\varphi), \quad (96)$$

где  $\mathcal{M}(\varphi) \equiv iS_v(\varphi)$  — показатель дифференцируемой экспоненты в (84).

Действие операции приведения на  $\mathcal{M}^N(\varphi)$  удобно описывать на языке диаграмм. Множитель  $\mathcal{M}(\varphi)$  изображается графически точкой, а степени  $\mathcal{M}^N(\varphi)$  сопоставляется диаграмма, состоящая из  $N$  изолированных точек.

Операции  $(\delta/\delta\varphi)\Delta(\delta/\delta\varphi)$  графически соответствует добавление линии  $\Delta$ , соединяющей пары точек. Линия присоединяется всеми возможными способами, так как каждая из производных  $\delta/\delta\varphi$  может действовать на любой из множителей произведения  $\mathcal{M}^N(\varphi) = \mathcal{M}(\varphi) \dots \mathcal{M}(\varphi)$ . В частности, возможен случай, когда обе производные квадратичной формы действуют на один и тот же множитель  $\mathcal{M}(\varphi)$ . На языке диаграмм это значит, что выходящая из некоторой точки линия возвращается в ту же точку. Такие линии мы будем называть *закороченными*.

Результат действия полной операции приведения на  $\mathcal{M}^N(\varphi)$  представляется в виде суммы диаграмм, состоящих из  $N$  точек с любым числом добавленных линий. Точки называют *вершинами диаграммы*. Вершине, к которой присоединяется  $n$  линий, сопоставляется множитель

$$\mathcal{M}_n(x_1 \dots x_n; \varphi) \equiv \delta^n \mathcal{M}(\varphi) / \delta \varphi(x_1) \dots \delta \varphi(x_n), \quad (97)$$

поскольку добавление линии сопровождается дифференцированием по  $\varphi$  вершинного множителя. Аргументы  $x$  множителей (97) сворачиваются с соответствующими аргументами линий  $\Delta$ .

Множитель  $\mathcal{M}(\varphi) \equiv \mathcal{M}_0(\varphi)$  будет в дальнейшем называться *производящей вершиной* диаграмм. Если взаимодействия полиномиально по полю, отличными от нуля будут лишь несколько первых вершинных множителей (97). В общем случае число сходящихся в вершинах линий не ограничивается. Среди непо-

линомиальных взаимодействий особую роль играет экспоненциальное, которое будет рассмотрено отдельно в п. 5.

Воспользовавшись равенством (51), можно написать следующее представление для общего члена ряда (96):

$$\frac{1}{N!} \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi_k} \right] \mathcal{M}(\varphi_1) \dots \mathcal{M}(\varphi_N) \Big|_{\varphi_1 = \dots = \varphi_N = \varphi} \quad (98)$$

В этом выражении различные вершины  $\mathcal{M}(\varphi)$  пронумерованы аргументами  $\varphi_1 \dots \varphi_N$ , а в операции приведения явно разделены вклады операций добавления линий между различными парами вершин. Диагональные члены квадратичной формы производных отвечают за добавление закороченных линий. Их можно учесть точно, введя приведенную вершину:

$$\mathcal{M}_{\text{прив}}(\varphi) \equiv \exp \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi} \right) \mathcal{M}(\varphi) \quad (99)$$

и написав вместо (98)

$$\frac{1}{N!} \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi_k} \right] \mathcal{M}_{\text{прив}}(\varphi_1) \dots \mathcal{M}_{\text{прив}}(\varphi_N) \Big|_{\dots} \quad (100)$$

Оставшиеся члены операции приведения добавляют линии только между парами разных вершин.

Из определения (99), формулы приведения (45) и равенства (30) ясно, что приведенная вершина (99) представляет  $N$ -форму квантового взаимодействия, тогда как  $\mathcal{M}(\varphi)$  представляет его  $\text{Sum}$ -форму.

Для более четкого описания диаграммного ряда теории возмущений удобно пользоваться понятиями теории графов (см., например, [5]), которые будут введены в следующем разделе.

**2. Некоторые понятия теории графов.** По определению *графом* (графиком, диаграммой) называется некоторая совокупность точек — вершин и соединяющих их линий. В *нумерованном графе* вершины пронумерованы числами  $1 \dots N$ , граф с нумерованными вершинами называют *свободным*.

Нумерованному графу  $d$  сопоставляется матрица смежностей  $\pi(d)$ : по определению матричный элемент  $\pi_{ik}$  равен числу линий, соединяющих (непосредственно) вершины  $i$  и  $k$ . Из определения видно, что матрица смежностей всегда симметрична. Если в графе нет закороченных линий, то матрица смежностей имеет нули на диагонали.

Два нумерованных графа называются равными, если равны их матрицы смежностей.

Изменив в данном графе  $d$  нумерацию вершин, мы получим новый граф  $d'$ , матрица смежностей которого связана с исходной преобразованием подобия  $\pi' = P\pi P^T$ , где  $P$  — перестановочная матрица:  $P_{ik} = 1$ , если при перестановке  $k$  переходит в  $i$ ,



и  $P_{ik} = 0$  во всех остальных случаях. Нумерованные графы, отличающиеся лишь перестановкой номеров вершин, называются *эквивалентными*. Равные графы эквивалентны, обратное в общем случае неверно. Эквивалентные нумерованные графы соответствуют одному и тому же свободному.

*Группой симметрии* данного нумерованного графа называется подгруппа перестановок, переводящих его в себя (т. е. равный себе). Данная перестановка принадлежит группе симметрии графа тогда и только тогда, когда соответствующая ей перестановочная матрица коммутирует с матрицей смежностей рассматриваемого графа.

*Симметричным числом графа* называется порядок его группы симметрии. Эквивалентные графы имеют одинаковые симметричные числа, поскольку их группы симметрии изоморфны. Поэтому симметричное число  $s$  можно рассматривать как характеристику свободного графа.

Полное число способов нумерации вершин свободного графа равно  $N!$ . Получающиеся эквивалентные нумерованные графы разбиваются на  $N!/s$  классов, каждый из которых содержит  $s$  одинаковых нумерованных графов. Следовательно, полное число разных нумерованных графов, соответствующих данному свободному графу, равно  $N!/s$ .

**3. Симметричные коэффициенты.** Вернемся к выражению (98), представляющему общий член ряда теории возмущений, и перейдем от суммирования по  $i, k$  к суммированию по парам  $\alpha \equiv (i, k) = (k, i)$ :

$$\frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi_k} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \Delta_{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha}.$$

Здесь  $\mathcal{D}_{\alpha} \equiv \delta^2 / \delta \varphi_i \delta \varphi_k$ ,  $\Delta_{\alpha}$  — линия, соединяющая пару  $\alpha$ , числовой коэффициент  $\varepsilon_{\alpha}$  равен  $1/2$  для пар  $(i, i)$  и  $\varepsilon_{\alpha} = 1$  для пар  $i \neq k$ . Записав экспоненту суммы в виде произведения экспонент, получим

$$\prod_{\alpha} \exp[\varepsilon_{\alpha} \Delta_{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha}] = \sum_{m_1 \dots m_{\alpha} \dots} \prod_{\alpha} \left[ \frac{1}{(m_{\alpha})!} (\varepsilon_{\alpha} \Delta_{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha})^{m_{\alpha}} \right]. \quad (101)$$

Действие отдельного члена полученной суммы на произведение вершин  $\mathcal{M}(\varphi_1) \dots \mathcal{M}(\varphi_N)$  порождает нумерованный граф, матрица смежностей которого однозначно определяется набором чисел  $m_{\alpha} : \pi_{ik} = m_{\alpha}$ , где  $\alpha$  — номер пары  $(i, k)$ . Главную роль для дальнейшего играют следующие два наблюдения: во-первых, в сумме (101) нет одинаковых наборов  $m_{\alpha}$ , следовательно, разным членам этой суммы соответствуют разные нумерованные графы. Во-вторых, ясно, что ряд (101) порождает все возможные нумерованные графы. Это значит, что выражение (98) представляется в виде суммы всех возможных различных нуме-

рованных графов с  $N$  вершинами, причем каждый из этих графов входит с коэффициентом

$$C(d) = \left[ N! 2^r \prod_i \pi_{ii}! \prod_{i < k} \pi_{ik}! \right]^{-1}, \quad (102)$$

где  $\pi_{ik}$  — элементы матрицы смежностей;  $r = \sum_i \pi_{ii}$  — полное число закороченных линий в диаграмме.

Входящие в выражение (101) дифференциальные операции  $\mathcal{D}_\alpha$  превращают исходные вершины  $\mathcal{M}$  в вершины (97), не принося при этом добавочных коэффициентов. В бозонном случае все графы входят со знаком плюс, в фермионном случае знак перед диаграммой определяется четностью перестановки антикоммутирующих объектов при выполнении дифференцирования. Для взаимодействия типа Юкавы правило знаков будет сформулировано в п. 6.

Полагая в (98)  $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N \equiv \varphi$ , мы переходим тем самым к языку свободных графов. Коэффициент при свободном графе  $D$  равен

$$C(D) = \left[ s \cdot 2^r \cdot \prod_i \pi_{ii}! \prod_{i < k} \pi_{ik}! \right]^{-1}, \quad (103)$$

поскольку в (98) содержатся все возможные нумерованные графы, среди которых нет одинаковых, а полное число различных нумерованных графов, соответствующих данному свободному графу, равно  $N!/s$ .

Граф, у которого любые две вершины соединяются не более чем одной линией, а закороченных линий вообще нет, называют *майеровским*; из (103) видно, что коэффициентом при свободном майеровском графе является просто обратное симметричное число.

**4. Рекуррентное соотношение для симметричных коэффициентов.** Дифференцируя функционал (84) по параметру  $\Delta$ , получаем уравнение [6]

$$\frac{\delta}{\delta \Delta(x, x')} R(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi(x')} R(\varphi), \quad (104)$$

которым можно воспользоваться для вывода рекуррентного соотношения между симметричными коэффициентами при графиках  $R(\varphi)$ .

Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — свободные графы такие, что  $D_2$  получается присоединением одной линии к  $D_1$ . Дифференцированию по  $\Delta$  соответствует графически удаление из графа линии всеми возможными способами, следовательно, в производной по  $\Delta$  от графа  $D_2$  содержится среди прочих и граф  $D_1$  с двумя выделенными вершинами, которым соответствуют измененные (по сравнению с  $D_1$ ) вершинные множители (97). Этот граф войдет в левую часть (104) с коэффициентом  $C_2 N(D_2 \rightarrow D_1)$ , где  $C_2$  —

коэффициент при  $D_2$  в  $R(\varphi)$ ,  $N(D_2 \rightarrow D_1)$  — число способов превратить  $D_2$  в  $D_1$  удалением одной линии. В правую часть (104) тот же граф войдет с коэффициентом  $\varepsilon C_1 N(D_1 \rightarrow D_2)$ , где  $C_1$  — коэффициент при  $D_1$  в  $R(\varphi)$ ,  $N(D_1 \rightarrow D_2)$  — число способов превратить  $D_1$  в  $D_2$  добавлением одной линии, т. е. число различных пар вершин, соединение которых линией превращает  $D_1$  в  $D_2$ . Дополнительный множитель  $\varepsilon$  равен единице, если линия присоединяется к разным вершинам, — в этом случае при взятии второй производной по  $\varphi$  для данной пары вершин возникает дополнительный множитель 2, сокращающий коэффициент  $1/2$  в правой части (104). Если же присоединяемая линия является закороченной, то  $\varepsilon = 1/2$ .

Приравнивая коэффициенты при  $D_1$  в обеих частях равенства (104), получаем искомое рекуррентное соотношение

$$C_2 = C_1 \varepsilon N(D_1 \rightarrow D_2) / N(D_2 \rightarrow D_1), \quad (105)$$

которое довольно удобно при практическом вычислении симметричных коэффициентов.

#### Примеры

1. Пусть  $D_1$  — квадрат,  $D_2$  — квадрат, одна из сторон которого вдвоена. В этом случае  $N(D_2 \rightarrow D_1) = 2$ , поскольку разорвать можно одну из вдвоенных линий, и  $N(D_1 \rightarrow D_2) = 4$ , поскольку  $D_2$  получается из  $D_1$  удвоением любой из четырех сторон квадрата.

2. Пусть  $D_1$  — квадрат с одной диагональю,  $D_2$  — квадрат с двумя диагоналями. В этом случае  $N(D_1 \rightarrow D_2) = 1$ , тогда как  $N(D_2 \rightarrow D_1) = 6$ , поскольку квадрат с двумя диагоналями есть тетраэдр, у которого все шесть линий эквивалентны.

С помощью формулы (105) можно вычислить коэффициент при любом графе, отправляясь от простейшего, который состоит из  $N$  изолированных вершин с коэффициентом  $1/N!$ .

**5. Переход к майеровским графам для экспоненциального взаимодействия.** Операторному экспоненциальному взаимодействию  $V = -\rho \int dx \exp[\lambda \hat{\varphi}(0, \mathbf{x})]$  без знака нормального произведения соответствует производящая вершина  $\mathcal{M}(\varphi) = i\rho \int dx \times$

$\times \exp \lambda \varphi(x)$ . В этих формулах  $\varphi$  — бозонное поле,  $\rho$  и  $\lambda$  — произвольные числа. Общий член ряда (96) имеет тогда вид

$$\frac{(i\rho)^N}{N!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_N \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi}\right) \exp \sum_i \lambda \varphi(x_i). \quad (106)$$

Сумму всех  $\varphi(x_i)$  можно представить в виде скалярного произведения поля  $\varphi$  на функцию  $h(\mathbf{x}) = \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ ; воспользовавшись затем равенством (12), приведем выражение (106) к виду

$$\frac{(i\rho)^N}{N!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_N \exp\left\{\lambda \sum_i \varphi(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i,k} \Delta(x_i, x_k)\right\}. \quad (107)$$

Диагональные элементы квадратичной формы переопределяют вершины:

$$i\rho \exp \lambda\varphi(x) \rightarrow i\rho \exp \left[ \lambda\varphi(x) + \frac{\lambda^2}{2} \Delta(x, x) \right] \equiv m(x),$$

а ее недиагональные элементы порождают при разложении экспоненты в ряд всевозможные графы с линиями  $\Delta$ , соединяющими разные вершины.

Введем *майеровскую линию* или *суперпропагатор*

$$g(x, x') = -1 + \exp[\lambda^2 \Delta(x, x')] = \lambda^2 \Delta(x, x') + 1/2 \lambda^4 \Delta^2(x, x') + \dots$$

Выражение (107) можно тогда переписать в виде

$$\frac{1}{N!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_N \prod_i m(x_i) \prod_{i < k} (1 + g(x_i, x_k))$$

и представить конечной суммой диаграмм с вершинами  $m(x)$  и линиями  $g(x, x')$ . Все эти диаграммы — майеровские, т. е. в них нет закороченных линий и любые две вершины соединяются не более чем одной линией; коэффициент при свободном графе определяется по обычному правилу (обратное симметричное число).

Переход к майеровским линиям эквивалентен некоторому частичному суммированию графов обычной теории возмущений с линией  $\Delta$  и возможен потому, что для экспоненциального взаимодействия вершинные множители (97) зависят от числа сходящихся в вершине линий степенным образом. Подобное суммирование можно выполнить и для неэкспоненциального взаимодействия, разложив его предварительно в интеграл Фурье или Лапласа. Отметим, что графическая техника экспоненциального взаимодействия впервые была использована в равновесной статистике классического неидеального газа (подробнее см. гл. V). Отметим также, что если исходное операторное взаимодействие написать со знаком нормального произведения, то в (107) исчезнут диагональные члены квадратичной формы.

**6. Графы для взаимодействия типа Юкавы.** В универсальных обозначениях представление (84) и порождаемая им диаграммная техника одинаковы для всех теорий. Однако при практическом вычислении вкладов различных диаграмм в конечном счете все равно придется перейти от универсальных обозначений к обычным; кроме того, универсальные обозначения маскируют специфические особенности различных теорий. Поэтому мы кратко обсудим на обычном языке диаграммную технику для важного частного случая взаимодействия типа Юкавы.

В этом взаимодействии участвуют комплексное поле  $\psi$ ,  $\psi^+$ , которое может быть как бозонным, так и фермионным, и вещественное бозонное поле  $\varphi$ . Взаимодействие пишется в виде кубической формы

$$iS_\psi(\psi^+, \psi, \varphi) = \iiint dx dx' dy \psi^+(x) \Gamma(x, x', y) \psi(x') \varphi(y), \quad (108)$$

линейной по каждому из полей  $\psi^+$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ . Для обычного  $t$ -локального взаимодействия ядро  $\Gamma$  содержит  $\delta$ -функцию совпадения всех трех временных аргументов, в остальном оно совершенно произвольно (к типу (108) относится и взаимодействие квантовой электродинамики).

Свободное действие  $S_0$  поля  $\psi$ ,  $\psi^+$  является обычно билинейной формой  $\psi^+ K \psi$  с некоторым ядром  $K$ . В универсальных обозначениях (см. § 1)

$$\psi^+ K \psi = \frac{1}{2} [\psi^+ K \psi + \psi K^T \psi^+] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & xK^T \\ K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^+ \end{pmatrix}.$$

Соотношение (31), связывающее пропагатор с ядром свободного действия, принимает в данном случае вид

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & xK^T \\ K & 0 \end{pmatrix}^{-1} = i \begin{pmatrix} 0 & K^{-1} \\ xK^{-1T} & 0 \end{pmatrix} \quad (109)$$

и определяет матрицу сверток поля  $\psi \equiv \psi_1$ ,  $\psi^+ \equiv \psi_2$ : свертка  $\psi$  с  $\psi^+$  есть  $\Delta_{12} = iK^{-1}$ , свертка  $\psi^+$  с  $\psi$  есть  $\Delta_{21} = x\Delta_{12}^T$ , свертки  $\psi$  с  $\psi$  и  $\psi^+$  с  $\psi^+$  равны нулю.

Универсальная квадратичная форма производных в операции приведения для поля  $\psi$ ,  $\psi^+$  записывается теперь следующим образом:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta/\delta\psi \\ \delta/\delta\psi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta/\delta\psi \\ \delta/\delta\psi^+ \end{pmatrix} = \frac{\delta}{\delta\psi} \Delta_{12} \frac{\delta}{\delta\psi^+}$$

(использовано соотношение (40) и равенство  $\Delta_{21} = x\Delta_{12}^T$ ), а представление (84) для функционала  $S$ -матрицы принимает вид

$$R(\psi^+, \psi, \varphi) = \exp \left[ \frac{\delta}{\delta\psi} \Delta_{12} \frac{\delta}{\delta\psi^+} + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta' \frac{\delta}{\delta\varphi} \right] \exp i S_v(\psi^+, \psi, \varphi), \quad (110)$$

где  $\Delta'$  — пропагатор поля  $\varphi$ .

Соответствующие (110) диаграммы содержат два типа линий: обычные линии поля  $\varphi$  и *направленные* или *ориентированные* линии, изображающие свертки поля  $\psi$  с  $\psi^+$  (линия выходит из той вершины, из которой взято поле  $\psi$ , и приходит в ту, из которой взято поле  $\psi^+$ ). Полная диаграмма является наложением обычного графа, изображающего линии поля  $\varphi$ , и *ориентированного графа*, изображающего линии поля  $\psi$ ,  $\psi^+$ . Любую нумерованную диаграмму можно однозначно задать с помощью пары матриц  $\pi$ ,  $\bar{\pi}$ , где  $\pi$  есть обычная матрица смежностей графа линий  $\varphi$ , а  $\bar{\pi}$  — матрица смежностей ориентированного графа линий  $\psi$ ,  $\psi^+$ . По определению матричный элемент  $\bar{\pi}_{ik}$  равен числу ориентированных линий, выходящих из вершины  $i$  и приходящих в вершину  $k$ . В отличие от  $\pi$  матрица  $\bar{\pi}$  не обязательно симметрична.

Введенные в п. 2 понятия равенства, эквивалентности, группы симметрии нумерованного графа обобщаются очевидным образом, если вместо матрицы  $\pi$  говорить всегда о паре матриц  $\pi, \bar{\pi}$ . Графы равны, если пара  $\pi, \bar{\pi}$  равна паре  $\pi', \bar{\pi}'$ , т. е.  $\pi = \pi'$  и  $\bar{\pi} = \bar{\pi}'$ . При перестановке вершин  $(\pi, \bar{\pi}) \rightarrow (P\pi P^T, \bar{P}\bar{\pi}P^T)$ , где  $P$  — перестановочная матрица; группа симметрии диаграммы является, очевидно, пересечением групп симметрии обычного графа, описываемого матрицей  $\pi$ , и ориентированного графа, описываемого матрицей  $\bar{\pi}$ .

Как и раньше, в разложении (110) содержатся все возможные нумерованные диаграммы, среди которых нет одинаковых; повторяя рассуждения п. 3, нетрудно получить следующую формулу для симметричного коэффициента при свободной диаграмме:

$$C(D) = \left[ s \cdot 2^r \prod_i \pi_{ii}! \prod_{i < k} \pi_{ik}! \prod_{i, k} \bar{\pi}_{ik}! \right]^{-1}. \quad (111)$$

Здесь  $s$  — симметричное число диаграммы, т. е. порядок ее группы симметрии;  $r = \sum_i \pi_{ii}$  — полное число закороченных ф-линий в диаграмме.

Для взаимодействия (108) формула (111) существенно упрощается, поскольку в этом случае закороченных ф-линий вообще нет, а любой из матричных элементов  $\pi_{ih}, \bar{\pi}_{ih}$  является либо нулем, либо единицей. Поэтому коэффициентом при свободной диаграмме для взаимодействия Юкавы является просто обратное симметричное число.

Специфический вид взаимодействия (108) в некоторых случаях существенно упрощает вычисление самих симметричных чисел. Для дальнейшего полезно ввести еще несколько понятий теории графов.

Назовем *степенью вершины* набор следующих трех чисел: число присоединяющихся к ней ф-линий, число входящих ф-линий и число выходящих ф-линий. Для взаимодействия (108) каждое из этих чисел либо ноль, либо единица. Будем говорить, что вершина *уникальна*, если ее степень отличается от степени любой другой вершины диаграммы.

Вершины  $i$  и  $k$  нумерованной диаграммы называются *подобными*, если в группе симметрии имеется перестановка, переводящая  $i$  в  $k$ . Вершину, подобную только самой себе, называют *неподвижной*. Подобные вершины обязательно имеют одинаковые степени, так что всякая уникальная вершина неподвижна. Если все вершины диаграммы неподвижны, то в ее группе симметрии содержится только тождественная перестановка и симметричное число  $s$  равно единице.

Диаграмму называют *связной*, если в ней, следуя по линиям, можно из любой вершины попасть в любую другую. Для взаи-

действия (108) справедливо следующее утверждение: если одна из вершин связанной диаграммы неподвижна, то неподвижны все вершины и  $s=1$ .

Действительно, пусть вершина  $i$  неподвижна. Поскольку граф связный, найдется линия, присоединяющаяся к этой вершине. Допустим для определенности, что это линия поля  $\varphi$ , соединяющая вершину  $i$  с некоторой вершиной  $k$ . Пусть  $P$  — произвольная перестановка:  $(i, k) \rightarrow (i', k')$ ,  $\pi \rightarrow \pi' = P\pi P^T$ . По предположению  $\pi_{ih} = \pi'_{i'k'} = 1$ . Если  $P$  принадлежит группе симметрии диаграммы, а вершина  $i$  неподвижна, то  $\pi' = \pi$  и  $i' = i$ , откуда  $\pi_{ih} = \pi_{i'k'} = 1$ . Остается заметить, что для взаимодействия (108) в любой строке матрицы  $\pi$  имеется не больше одного ненулевого матричного элемента, так как из вершины выходит не больше одной  $\varphi$ -линии. Поэтому из равенства  $\pi_{ih} = \pi_{i'k'} = 1$  следует, что  $k' = k$ , а поскольку это верно для любой перестановки из группы симметрии диаграммы, заключаем, что вершина  $k$  неподвижна.

Итак, любая вершина  $k$ , связанная  $\varphi$ -линией с неподвижной вершиной  $i$ , также неподвижна. Ясно, что рассуждение остается верным и в том случае, когда вершина  $k$  связана с вершиной  $i$  ориентированной линией  $\psi$ -поля, поскольку для взаимодействия (108) в каждой строке и в каждом столбце матрицы  $\pi$  также не больше одного ненулевого матричного элемента. Переходя последовательно от вершины к вершине, мы докажем, что из неподвижности одной из них следует неподвижность всех.

Отсюда следует, что если хотя бы одна вершина связанной диаграммы уникальна, то симметричное число диаграммы равно единице.

Обсудим теперь вопрос о знаках при графиках для случая фермионного поля  $\psi, \psi^+$ . По этому полю взаимодействие (108) является квадратичной формой вида  $\psi^+ L \psi$  с ядром  $L(x, x') = \int dy \Gamma(x, x', y) \varphi(y)$ . Дифференцирование по  $\psi, \psi^+$  в (110) можно выполнить явно, воспользовавшись соотношением (его доказательство см. в п. 6. 5)

$$\exp \frac{\delta}{\delta \psi} \Delta_{12} \frac{\delta}{\delta \psi^+} \exp \psi^+ L \psi = \det [1 - L \Delta_{12}]^{-1} \exp \psi^+ [L^{-1} - \Delta_{12}]^{-1} \psi, \quad (112)$$

в котором  $\det M$  обозначает определитель линейной операции  $M$ .

Обозначим  $Q \equiv [L^{-1} - \Delta_{12}]^{-1} = L + L \Delta_{12} L + \dots$ . Квадратичная форма  $\psi^+ Q \psi$  изображается графически в виде прогрессии

$$\dots \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow \dots, \quad (113)$$

в которой направленным линиям соответствует пропагатор  $\Delta_{12}$ , а точкам — вершинные множители (97) для взаимодействия (108).

Воспользовавшись хорошо известной формулой  $\det M = \exp \operatorname{tr} \ln M$ , выражающей определитель линейной операции через след ее логарифма, напомним:  $\det [1 - L\Delta_{12}]^{-\kappa} = \exp \kappa \mathcal{P}(\varphi)$ . Функционал  $\mathcal{P}(\varphi) \equiv -\operatorname{tr} \ln (1 - L\Delta_{12})$  представляется графически в виде суммы замкнутых петель:

$$\mathcal{P}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tr} (L\Delta_{12})^n \equiv \bigcirc + \frac{1}{2} \bigcirc + \frac{1}{3} \bigcirc + \dots, \quad (114)$$

в вершинах которых остается лишь поле  $\varphi$ . Представление (110) для функционала  $S$ -матрицы можно теперь переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} R(\psi^+, \psi, \varphi) &= \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta' \frac{\delta}{\delta \varphi} \right) \exp [\kappa \mathcal{P}(\varphi) + \psi^+ Q \psi] = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta' \frac{\delta}{\delta \varphi} \right) [\psi^+ Q \psi]^N \exp [\kappa \mathcal{P}(\varphi)]. \end{aligned} \quad (115)$$

Оставшаяся операция приведения по  $\varphi$  добавляет всеми возможными способами линии  $\Delta'$  между вершинами цепочек (113) и колец (114).

Если поле  $\psi, \psi^+$  бозонное, то  $\kappa=1$  и все диаграммы в (115) входят со знаком плюс. Если же поле  $\psi, \psi^+$  фермионное, то  $\kappa=-1$  и появляется дополнительный знаковый множитель  $-1$  на каждую замкнутую фермионную петлю (114). Этот множитель полностью определяет знак перед диаграммой при условии, что остающиеся в  $R$  несвернутые антикоммутирующие поля  $\psi, \psi^+$  сгруппированы, как в (115), в коммутирующие между собой блоки  $\psi^+ Q \psi$ . Каждому из этих блоков соответствует сплошная цепочка  $\psi$ -линий, проходящая через всю диаграмму.

Слагаемые с  $N=1$  в (115) имеют только одну сплошную цепочку  $\psi$ -линий, так что ее концы будут уникальными вершинами в диаграммах. Из предыдущего анализа симметричных коэффициентов следует, что все свободные диаграммы с одной сплошной цепочкой  $\psi$ -линий входят в (115) с единичным коэффициентом. Если же число сплошных цепочек больше единицы, то группа симметрии диаграммы может быть нетривиальной, но в нее могут входить лишь такие перестановки, при которых сплошные цепочки  $\psi$ -линий переставляются как целое. Эти соображения существенно упрощают подсчет симметричных коэффициентов для взаимодействия типа Юкавы.

**7. Графы для парного взаимодействия.** В нерелятивистской теории часто рассматривается парное взаимодействие комплексного поля  $\psi, \psi^+$ . Его гамильтониан приводится в следующей главе (см. формулу (II. 29)), а производящая вершина с точ-



ностью до несущественных квадратичных по полю членов имеет вид

$$iS_v(\psi, \psi^+) = \frac{1}{2} \iint dx dx' \psi^+(x) \psi^+(x') \Gamma(x, x') \psi(x') \psi(x). \quad (116)$$

Для гамильтониана (II.29)  $\Gamma(x, x') = -i\delta(t-t') \mathcal{V}'(x, x')$ , где  $\mathcal{V}'$  — симметричный потенциал парного взаимодействия. Вместо (110) имеем

$$R(\psi, \psi^+) = \exp \left[ \frac{\delta}{\delta\psi} \Delta_{12} \frac{\delta}{\delta\psi^+} \right] \exp iS_v(\psi, \psi^+). \quad (117)$$

С помощью стандартной диаграммной техники п. 1 функционал (117) можно представить в виде суммы ориентированных графов, вершинам которых сопоставляются производные (116) — аналоги вершинных множителей (97).

На практике, однако, чаще используется другая диаграммная техника, в которой взаимодействию сопоставляется не одна, а две вершины диаграммы. Ее исходной точкой является следующее представление функционала (117):

$$R(\psi, \psi^+) = \exp \left[ \frac{\delta}{\delta\psi} \Delta_{12} \frac{\delta}{\delta\psi^+} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} \Gamma \frac{\delta}{\delta\varphi} \right] \exp \rho\varphi \Big|_{\varphi=0}, \quad (118)$$

в котором  $\varphi(x)$  — введенное дополнительно бозонное поле,  $\rho(x) \equiv \psi^+(x) \psi(x)$  и  $\rho\varphi \equiv \int dx \rho(x) \varphi(x)$ . Согласно (12) имеем

$$\exp \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} \Gamma \frac{\delta}{\delta\varphi} \right) \exp \rho\varphi \Big|_{\varphi=0} = \exp \left( \frac{1}{2} \rho \Gamma \rho \right) = \exp iS_v(\psi^+, \psi),$$

что доказывает эквивалентность представлений (117) и (118).

Правая часть (118) имеет вид функционала  $S$ -матрицы для взаимодействия типа Юкавы и может быть представлена соответствующими графиками. Ядро взаимодействия  $\Gamma(x, x')$  играет роль пропагатора поля  $\varphi$ , а условие  $\varphi=0$  в (118) означает, что рассматриваются лишь такие диаграммы, в которых все поля  $\varphi$  свернуты. Взаимодействие (116) изображается теперь не одной, а двумя вершинами диаграммы, соединенными между собой линией  $\Gamma$ . Количество диаграмм при этом увеличивается, но этот недостаток компенсируется простотой вычисления симметричных коэффициентов и, самое главное, наличием четкого правила знаков для случая фермионного поля  $\psi, \psi^+$ .

**8. Связность логарифма  $R(\varphi)$ .** Мы будем доказывать следующее топологическое утверждение, впервые установленное в рамках равновесной статистики классического неидеального газа и известное там под названием *первой теоремы Майера* [7, 8]:

$$\ln R(\varphi) = \text{связная часть } R(\varphi). \quad (119)$$

Напомним, что связным называют такой граф, в котором, следуя по линиям, можно из любой вершины попасть в любую

другую. Функционал  $R(\varphi)$  имеет вид 1+графики, среди которых имеются как связные, так и несвязные; вклад несвязного графика равен произведению вкладов его связных компонент. Связной частью  $R(\varphi)$  называют сумму вкладов всех связных графиков  $R(\varphi)$  со своими коэффициентами и знаками.

При доказательстве утверждения (119) мы будем использовать универсальные обозначения, в которых диаграммная техника одинакова для всех теорий, и ограничимся случаем бозонного поля, чтобы не обсуждать вопрос о знаках при графиках. Рассмотрим выражение  $\exp \sum_{\alpha} C_{\alpha} d_{\alpha}$ , в котором суммирование производится по всем связным свободным графам,  $d_{\alpha}$  — вклад такого графа в  $R(\varphi)$ ,  $C_{\alpha}$  — коэффициент при нем. Мы должны показать, что рассматриваемая величина совпадает с самим функционалом  $R(\varphi)$ :

$$R(\varphi) = \prod_{\alpha} \exp(C_{\alpha} d_{\alpha}) = \sum_{\dots m_{\alpha} \dots} \prod_{\alpha} \left[ \frac{1}{m_{\alpha}!} C_{\alpha}^{m_{\alpha}} d_{\alpha}^{m_{\alpha}} \right]. \quad (120)$$

Общий член ряда в правой части представляет диаграмму, в которой связный граф  $d_1$  повторен  $m_1$  раз, граф  $d_2$  —  $m_2$  раз, и т. д. Эта диаграмма будет связной, если одно из чисел  $m_{\alpha}$  равно единице, а все прочие — нулю; ясно, что связная диаграмма  $d_{\alpha}$  входит в (120) с правильным коэффициентом  $C_{\alpha}$ . Остается убедиться, что и для несвязных графиков коэффициенты в правой части (120) точно такие же, как и в  $R(\varphi)$ . Если это так, то

$$C(\dots d_{\alpha}^{m_{\alpha}} \dots) = \prod_{\alpha} \left[ 1/m_{\alpha}! \cdot C_{\alpha}^{m_{\alpha}} \right], \quad (121)$$

где  $C(\dots d_{\alpha}^{m_{\alpha}} \dots)$  — коэффициент при диаграмме, содержащей  $m_1$  раз граф  $d_1$ ,  $m_2$  раз граф  $d_2$ , и т. д. Воспользовавшись формулой (103), равенство (121) можно переписать в виде соотношения между симметричными числами:

$$s(\dots d_{\alpha}^{m_{\alpha}} \dots) = \prod_{\alpha} \left[ m_{\alpha}! s_{\alpha}^{m_{\alpha}} \right], \quad (122)$$

справедливость которого уже очевидна, поскольку группа симметрии рассматриваемого несвязного графа состоит из групп симметрии каждой его связной компоненты (что дает  $\prod_{\alpha} (s_{\alpha}^{m_{\alpha}})$ ) и перестановок как целого всех вершин одинаковых связных компонент (что дает  $\prod_{\alpha} (m_{\alpha}!)$ ). Убедившись в справедливости равенства (122), мы доказали тем самым искомое утверждение (119).

Для фермионной теории следовало бы еще показать, что знак при несвязной диаграмме равен произведению знаков всех ее связных компонент. Для взаимодействия типа Юкавы это очевидно, если вспомнить правило знаков — минус единица на каждую замкнутую фермионную петлю. Этим замечанием мы здесь и ограничимся, а в п. 7.4 будет приведен такой вариант



доказанной в предыдущем разделе теоремы Майера следует, что

$$W(A) \equiv \ln G(A) = \text{связная часть } G(A). \quad (126)$$

Связные функции Грина  $W_n(x_1 \dots x_n)$  определяются как коэффициенты в аналогичном (85) разложении функционала  $W(A)$ :

$$W(A) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n! \cdot W_n(iA)^n \quad (127)$$

(в сокращенной записи (85)). Таким образом,  $W(A)$  является по определению производящим функционалом связанных функций Грина  $W_n$ .

Из (126) следует, что  $W_n$  являются связными частями полных функций Грина  $G_n$  и получаются из (125) отбрасыванием вкладов всех несвязных графиков (и единицы при  $n=0$ ). Чтобы пояснить это, напомним, что  $G(A)$  есть сумма единицы и графиков и потому  $W(A) = \ln G(A)$  состоит только из графиков. Вследствие этого все степени  $W^2(A)$ ,  $W^3(A)$  и т. д. связанных графиков вообще не содержат (здесь важно, что в  $W(A)$  нет слагаемого типа единицы), так что в правой части равенства  $G(A) = \exp W(A) = 1 + W(A) + W^2(A)/2 + \dots$  связанные графики входят лишь в слагаемое  $W(A)$ . Отбрав в этом равенстве коэффициент при  $(iA)^n/n!$ , слева получим по определению полную функцию  $G_n$ , а справа —  $W_n$  от  $W(A)$  плюс вклады более высоких степеней  $W(A)$ . Последние, как отмечалось выше, содержат только несвязные графики, следовательно, связанные графики  $G_n$  и  $W_n$  совпадают. С другой стороны, из (126) следует, что все графики  $W_n$  связны, так что  $W_n$  есть просто сумма вкладов всех связанных графиков  $G_n$ .

Из (89) видно, что для свободной теории  $W(A) = -xA\Delta A/2$ . Сравнивая это выражение с квадратичным слагаемым  $W_2(iA)^2/2$  в разложении (127), необходимо учитывать, что принятый в (85) порядок аргументов не соответствует матричной записи квадратичной формы и при перестановке полей  $A$  появляется дополнительный знаковый множитель:  $W_2 A^2 = xA W_2 A$ . Учитывая это, получаем, что для свободной теории  $W_2 = \Delta$ , а прочие связанные функции  $W_n$  равны нулю.

Графики  $W_0$ , не имеющие внешних линий  $\Delta$  со свободными аргументами, называют связными вакуумными петлями; графики  $W_1$  с одной свободной внешней линией называют „головастиками“ (tadpole). Мы этим термином пользоваться не будем. Вторую связную функцию  $W_2(x, x')$  называют полным пропагатором в отличие от затравочного пропагатора  $\Delta(x, x')$  (хронологической свертки). Выше было показано, что для свободной теории полный пропагатор совпадает с затравочным.

Возвращаясь к соотношению (126), отметим, что из него следует равенство  $G_0 = \exp W_0$  для нулевых функций Грина. Нулевая функция  $G_0$  есть вакуумное ожидание  $S$ -матрицы

(см. п. 3.3). Полученное выше равенство показывает, что его логарифм есть сумма всех связанных вакуумных петель.

Константа  $W_0$  входит в (127) аддитивно и выделяется в виде множителя  $G_0 = \exp W_0$  из каждой полной функции Грина:  $G_n = H_n \exp W_0$ . Сравнение с (76) показывает, что  $H_n$  являются функциями Грина (58). Ясно, что функции  $H_n$  получаются из  $G_n$  отбрасыванием всех графиков, содержащих в качестве несвязных поддиаграмм вакуумные петли, что и объясняет термин „функции Грина без вакуумных петель“. Соответствующий производящий функционал  $H(A)$  выражается через связанные функции  $W_n$  с  $n > 0$ :

$$H(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n (iA)^n = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} W_n (iA)^n. \quad (128)$$

Сравнивая коэффициенты при степенях  $iA$ , получаем

$$H_0 = 1, \quad H_1 = W_1, \quad H_2 = W_2 + W_1 W_1, \quad (129)$$

а общая формула записывается следующим образом:

$$H_n(x_1 \dots x_n) = (-i)^n \left[ \frac{\vec{\delta} W}{\delta A(x_1)} + \frac{\vec{\delta}}{\delta A(x_1)} \right] \dots \dots \left[ \frac{\vec{\delta} W}{\delta A(x_n)} + \frac{\vec{\delta}}{\delta A(x_n)} \right] \cdot 1 \Big|_{A=0}. \quad (130)$$

Приведем также определение *ампутированных функций Грина*  $W_n^{\text{am}}$ :

$$W_n(x_1 \dots x_n) = \int \dots \int dx'_1 \dots dx'_n D(x_1, x'_1) \dots \dots D(x_n, x'_n) W_n^{\text{am}}(x'_1 \dots x'_n). \quad (131)$$

В этой формуле ядро  $D(x, x')$  обозначает полный пропагатор  $W_2(x, x')$ . Это обозначение будет часто использоваться, а равенства типа (131) в дальнейшем будут записываться сокращенно:  $W_n = D^n W_n^{\text{am}}$ ,  $W_n^{\text{am}} = D^{-n} W_n$ .

Пользуясь определениями (85), (131), нетрудно показать, что  $(D^n W_n^{\text{am}}) A^n = W_n A^n = W_n^{\text{am}} (D^T A)^n$ , т. е. переброс линейной операции с ядра  $W_n^{\text{am}}$  на аргументы  $A$  сопровождается ее транспонированием. Учитывая это, получаем следующие формулы связи для производящих функционалов:

$$W(A) = W^{\text{am}}(D^T A), \quad W^{\text{am}}(A) = W(D^{-T} A). \quad (132)$$

Вследствие симметричности пропагатора  $D^T$  можно заменить на  $\kappa D$ .

В заключение отметим, что функционал  $W(A)$  можно просто связать с логарифмом  $S$ -матрицы, воспользовавшись соотношением (93).

## § 5. УНИТАРНОСТЬ S-МАТРИЦЫ

**1. Операция сопряжения.** Обсудим свойства операции сопряжения, которая понадобится в дальнейшем для формулировки условия унитарности.

Мы будем понимать эту операцию как *обычное эрмитово сопряжение для операторов, комплексное сопряжение для бозонных классических полей и определенную формально операцию инволюции на грасмановой алгебре для антикоммутирующих классических фермионных полей*. Операция инволюции на грасмановой алгебре обладает такими же свойствами, как эрмитово сопряжение операторов, в частности  $(AB)^+ = B^+A^+$ .

Если все рассматриваемые поля вещественны, то сопряжение есть тождественное преобразование. В общем случае при использовании универсальных обозначений сопряжение есть некоторое линейное преобразование  $\varphi \rightarrow \varphi^+ = I\varphi$  единого поля  $\varphi$ , поскольку в соответствии с договоренностью  $\varphi$  включает в качестве независимых компонент как поля  $\varphi_\alpha$ , так и  $\varphi_\alpha^+$ . Ядро линейной операции  $I$  является матрицей по тем дискретным индексам, которые, будучи включены в аргументы  $x$ , различают компоненты  $\varphi_\alpha$  и  $\varphi_\alpha^+$ . По остальным аргументам, в том числе по времени, ядро  $I$  кратно единичной операции. Отметим также равенство  $I^*I = 1$  (для линейных операций звездочкой обозначается комплексное сопряжение), означающее, что двукратное сопряжение есть тождественное преобразование.

Равенство  $F(\hat{\varphi})^+ = F^+(\hat{\varphi})$  является определением сопряженного операторного функционала. Нетрудно убедиться, что свойство симметричности ядер  $F_n$  при сопряжении сохраняется.

Из определения (24) и равенства  $\hat{\varphi}^+ = I\hat{\varphi}$  нетрудно получить

$$\{\text{Sym} [\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)]\}^+ = \text{Sym} \{[\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)]^+\}. \quad (133)$$

Это показывает, что операции сопряжения и симметризации перестановочны. Аналогичное (133) равенство для  $N$ -произведения будет справедливо тогда, когда слагаемые  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  в разложении  $\hat{\varphi} = \hat{a} + \hat{b}$  (см. п. 1.4) переходят при сопряжении друг в друга с точностью до линейного преобразования. Обычно это условие выполняется (единственным исключением является  $N$ -произведение, которое будет введено в п. II. 1.2), и в дальнейшем мы будем считать, что

$$\{N[\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)]\}^+ = N\{[\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)]^+\}. \quad (134)$$

Из (133) и (134) следует, что  $[NF(\hat{\varphi})]^+ = NF^+(\hat{\varphi})$  и аналогично для Сум-произведения. Для  $T$ -произведения подобное равенство неверно.

В дальнейшем нам понадобятся также правила преобразования производных при сопряжении. Непосредственно из определений получаем

$$\left[ \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\varphi} F(\varphi) \right]^+ = \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\varphi^+} F^+(\varphi) = \left[ I^+ \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\varphi} \right] F^+(\varphi). \quad (135)$$

Формула написана для более сложного случая фермионного поля: правые производные переходят в левые, и наоборот. Последнее равенство в (135) вытекает из соотношения  $I^* = I^{-1}$  и правила  $\delta/\delta(M\varphi) = M^{-1T}\delta/\delta\varphi$ , справедливого для любой линейной замены переменной. Для бозонного поля правые и левые производные в (135) не различаются.

Пользуясь соотношениями (135) и (9), получаем

$$\left[ \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\varphi} L \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\varphi} F(\varphi) \right]^+ = \left[ \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\varphi^+} L^* \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\varphi^+} \right] F^+(\varphi) \equiv \left[ \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\varphi} \bar{L} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\varphi} \right] F^+(\varphi), \quad (136)$$

где обозначено  $\bar{L} \equiv \kappa I^* L^* I^+$ . Запишем эту формулу для обеих статистик сокращенно, в фермионном случае считая все производные правыми:

$$\left[ \frac{\delta}{\delta\varphi} L \frac{\delta}{\delta\varphi} \right]^+ = \frac{\delta}{\delta\varphi} \bar{L} \frac{\delta}{\delta\varphi}, \quad \bar{L} \equiv \kappa I^* L^* I^+. \quad (137)$$

В заключение приведем полезную формулу для простой свертки  $n$ . Рассмотрев сопряжение равенства (16) при учете (134) и соотношения  $\hat{\varphi}^+ = I\hat{\varphi}$ , получим  $n = I^* n^+ I^+$ . Отсюда легко показать, что определенная соотношением (25) симметричная часть простой свертки  $n_s$  инвариантна по отношению к операции (137), т. е.  $n_s = \kappa I^* n_s^+ I^+ \equiv \bar{n}_s$ .

**2. Формальная унитарность S-матрицы вне поверхности масс.** Оператор S-матрицы  $\mathbf{U}$ , будучи формальным пределом унитарного оператора развития (55), должен удовлетворять условию унитарности  $\mathbf{U}^+ \mathbf{U} = 1 = \mathbf{U} \mathbf{U}^+$  в каждом порядке теории возмущений. В теории поля большего, конечно, требовать нельзя, потому что в строгом смысле искомый предел оператора развития, как правило, не существует.

Для взаимодействия, не содержащего производных по времени, оператор S-матрицы дается формулой (64), причем входящий в нее функционал взаимодействия  $S_v(\varphi)$  является вещественным вследствие эрмитовости квантового гамильтониана взаимодействия. По правилам предыдущего раздела получаем

$$\mathbf{U}^+ = N \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} \bar{\Delta} \frac{\delta}{\delta\varphi} \right] \exp [-i S_v(\varphi)] \Big|_{\varphi=\hat{\varphi}}, \quad (138)$$

где  $\bar{\Delta} \equiv \kappa I^* \Delta^* I^+$ . Призвдя произведение  $\mathbf{U}^+ \mathbf{U}$  к N-форме с по-

мощью (49), получим  $U+U = NQ(\hat{\varphi})$ , где  $Q(\varphi)$  имеет следующий вид:

$$\exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi_1} \bar{\Delta} \frac{\delta}{\delta \varphi_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi_2} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi_2} + \frac{\delta}{\delta \varphi_1} n \frac{\delta}{\delta \varphi_2} \right] \times \\ \times \exp i [S_v(\varphi_2) - S_v(\varphi_1)] \Big|_{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi}. \quad (139)$$

Для справедливости операторного равенства  $U+U = NQ(\hat{\varphi}) = = 1$  достаточно, чтобы функционал  $Q(\varphi)$  обращался в единицу на поверхности масс, т. е. на множестве решений свободного уравнения (2). Но в действительности оказывается, что в порядках теории возмущений функционал  $Q(\varphi)$  равен единице тождественно. Это свойство, более сильное, чем обычная операторная унитарность, называют *унитарностью вне поверхности масс*.

Переходя к доказательству, введем для сокращения записи двухкомпонентное поле  $\Phi \equiv (\varphi_1, \varphi_2)$  и симметризуем квадратичную форму производных в (139):

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \Phi} \begin{pmatrix} \bar{\Delta} & 2n \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \frac{\delta}{\delta \Phi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \Phi} \begin{pmatrix} \bar{\Delta} & n \\ \chi n^T & \Delta \end{pmatrix} \frac{\delta}{\delta \Phi} \equiv \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \Phi} M \frac{\delta}{\delta \Phi}.$$

Разложим функционал (139) в ряд\* по степеням  $S_v(\varphi_2) - S_v(\varphi_1)$ . Поскольку вклад нулевого порядка равен, очевидно, единице, мы должны показать, что для всех  $n \geq 1$  и любых  $\varphi$

$$\exp \left[ \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \Phi} M \frac{\delta}{\delta \Phi} \right] (S_v(\varphi_2) - S_v(\varphi_1))^n \Big|_{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi} = 0. \quad (140)$$

Перейдем от переменных  $\varphi_1, \varphi_2$  к полусумме  $\psi_1 \equiv (\varphi_1 + \varphi_2)/2$  и разности  $\psi_2 \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ . Записав эту замену в матричной форме  $\psi = g\Phi$ , получим

$$\frac{\delta}{\delta \Phi} = g^T \frac{\delta}{\delta \psi}, \quad \frac{\delta}{\delta \Phi} M \frac{\delta}{\delta \Phi} = \frac{\delta}{\delta \psi} g M g^T \frac{\delta}{\delta \psi}.$$

По известным матрицам  $M$  и  $g$  находим матрицу  $\tilde{M} \equiv g M g^T$ :  $\tilde{M}_{11} = (\bar{\Delta} + \Delta + n + \chi n^T)/4$ ,  $\tilde{M}_{22} = \bar{\Delta} + \Delta - n - \chi n^T$ ,  $\tilde{M}_{12} = \chi \tilde{M}_{21}^T = = (\bar{\Delta} - \Delta + \chi n^T - n)/2$ . Пользуясь определением (137) для  $\bar{\Delta}$ , связью (29) между свертками  $\Delta$  и  $n$  и формулой  $n = I^* n^+ I^+$ , приведенной в конце предыдущего раздела, получим следующие явные выражения для матричных элементов  $\tilde{M}$ :

$$\tilde{M}_{11} = \frac{1}{2}(n + \chi n^T), \quad \tilde{M}_{22} = 0, \quad \tilde{M}_{12} = \chi \tilde{M}_{21}^T = \theta(12) [\chi n^T - n]. \quad (141)$$

\* В работе [9] предложен красивый технический прием, позволяющий избежать разложения в ряд. Это достигается использованием тождества  $\exp i [S_v(\varphi_2) - S_v(\varphi_1)] = 1 - i \int dt [\mathcal{V}(\varphi_2, t) - \mathcal{V}(\varphi_1, t)] \exp i [S_v(t, -\infty; \varphi_2) - S_v(t, -\infty; \varphi_1)]$  (в обозначениях (59)) и формул типа (51), причем роль одного из множителей  $F$  играет  $\mathcal{V}(\varphi_2, t) - \mathcal{V}(\varphi_1, t)$ , а второго —  $\exp i [S_v(t, -\infty; \varphi_2) - S_v(t, -\infty; \varphi_1)]$ . Но мы будем придерживаться традиционной схемы доказательства.



Из определений ясно, что  $\widetilde{M}$  имеет смысл матрицы сверток для поля  $\psi$ , и для дальнейшего важно отметить, что компонента  $\psi_2$  имеет отличную от нуля свертку только с  $\psi_1$ , причем эта свертка является опережающей:  $\widetilde{M}_{21}(x, x') = 0$  при  $t > t'$ .

Выражение (140) совпадает с точностью до множителя с общим членом (96) ряда теории возмущений для производящего функционала  $S$ -матрицы пары полей  $\psi_1, \psi_2$  со свертками (141) и взаимодействием  $S_v(\psi_2) - S_v(\psi_1)$ . После выполнения дифференцирования в (140) поле  $\psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$  полагается равным нулю, другими словами, рассматриваются лишь такие диаграммы, в которых все поля  $\psi_2$  свернуты.

Исключение диаграмм с закороченными линиями осуществляется, как обычно, путем перехода к приведенной вершине (99), которая в данном случае совпадает с левой частью (140) при  $n=1$  до перехода к  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Перекрестные члены формы производных не дают вклада и мы получаем

$$\exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi_2} \bar{\Delta} \frac{\delta}{\delta \varphi_2} \right] S_v(\varphi_2) - \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi_1} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi_1} \right] S_v(\varphi_1). \quad (142)$$

Эта приведенная вершина, как и исходная, нечетна относительно перестановки  $\varphi_1 \rightleftharpoons \varphi_2$ . Действительно, ввиду  $t$ -локальности взаимодействия свертку  $\Delta$  в (142) можно заменить на  $n_s$  (см. (30)) и аналогично  $\bar{\Delta} \rightarrow \bar{n}_s$ . Остается воспользоваться равенством  $n_s = \bar{n}_s$ , о котором говорилось в конце предыдущего раздела.

После перехода к приведенному взаимодействию (142) в (140) остаются лишь диаграммы без закороченных линий. Вследствие нечетности функционала (142) по аргументу  $\psi_2$  и условия  $\psi_2 = 0$  из каждой вершины диаграммы должна выходить хотя бы одна направленная линия, изображающая свертку  $\psi_2$  с  $\psi_1$ . Отсюда следует, что в любой диаграмме с необходимостью будет присутствовать замкнутый цикл направленных линий  $\widetilde{M}_{21}$ , а так как соответствующая свертка (141) является опережающей, вклад диаграммы равен нулю. Это верно для любой диаграммы, что и доказывает искомое утверждение.

Приведенное выше доказательство унитарности опирается на  $t$ -локальность и эрмитовость взаимодействия и на общую формулу связи (29) между простой и хронологической свертками. Напомним, что мы исходили из представления (64) для производящего функционала  $S$ -матрицы и предполагали, что функционал взаимодействия не содержит производных поля по времени. Доказательство обобщается непосредственно и на взаимодействия с производными по времени, если они рассматриваются на языке системы независимых полей  $\hat{\varphi}_n \equiv \partial^n \hat{\varphi} / \partial t^n$  (см. п. 3.4). Но на языке эффективного взаимодействия (83) дело обстоит сложнее.

Как указывалось в п. 3.4, эффективное взаимодействие всегда имеет лагранжеву форму, но соответствующий лагранжиан в общем случае неэрмитов. Эта неэрмитовость должна, казалось бы, приводить к нарушению унитарности. Но для взаимодействия с производными по времени есть еще один эффект, ведущий к нарушению унитарности, и эти два эффекта взаимно компенсируют друг друга. Суть второго эффекта в следующем: мы считали очевидным, что наличие внутри диаграммы замкнутого цикла опережающих функций означает обращение в нуль вклада диаграммы. Но это верно лишь тогда, когда заранее известно, что соответствующее диаграмме выражение не может быть сингулярным настолько, чтобы содержать  $\delta$ -образные особенности при совпадении всех или части временных аргументов  $t_i$  (приписываемых вершинам диаграммы). Если же такие особенности есть и замкнутый цикл опережающих функций накладывается на одну из них, то получающееся выражение, строго говоря, не определено, но после разумного доопределения может оказаться отличным от нуля. Именно так обстоит дело в тех случаях, когда функционал взаимодействия содержит производные поля по времени, и при эрмитовом взаимодействии этот эффект приводил бы к нарушению унитарности. Как уже говорилось выше, в случае эффективного взаимодействия (83) наличие производных по времени компенсируется неэрмитовостью и функционал  $S$ -матрицы оказывается унитарным в порядках теории возмущений (подробнее см., например, [10—12]).

## § 6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

**1. Гауссовы интегралы.** В следующих разделах будут рассмотрены представления различных величин функциональными (континуальными) интегралами, а сейчас мы обсудим простейшие из таких интегралов — гауссовы.

Напомним сначала правила вычисления гауссовых интегралов на конечномерных пространствах. Пусть  $x, y$  — вещественные  $n$ -мерные векторы,  $xy \equiv \sum x_i y_i$  — вещественное скалярное произведение,  $xKx \equiv \sum x_i K_{ij} x_j$  — положительно определенная квадратичная форма,  $Dx = dx_1 \dots dx_n$ . Тогда

$$\begin{aligned} J(K, y) &\equiv \int Dx \exp \left[ -\frac{1}{2} xKx + xy \right] = \\ &= \det \left[ \frac{K}{2\pi} \right]^{-1/2} \exp \left[ \frac{1}{2} yK^{-1}y \right], \end{aligned} \quad (143)$$

где  $K^{-1}$  — обратная к  $K$  матрица. При вычислении интеграла делается замена  $x = x' + K^{-1}y$ , устраняющая линейный член в показателе экспоненты:  $xKx - 2xy = x'Kx' - yK^{-1}y$ . Множитель  $\exp [yK^{-1}y/2]$  выносится за знак интеграла, а остающийся интеграл  $J(K, 0)$  вычисляется с помощью замены

$x' = K^{-1/2} x''$ : якобиан  $Dx'/Dx'' = \det K^{-1/2}$  выделяется множителем, остается интеграл  $J(1, 0)$ , который равен  $(2\pi)^{n/2}$ , где  $n$  — размерность пространства. Множители  $2\pi$  мы ввели под знак  $\det$ , пользуясь тем, что  $\det[\lambda K] = \lambda^n \det K$ . Для комплексных переменных аналогичная (143) формула выглядит следующим образом:

$$\int D \operatorname{Re} z D \operatorname{Im} z \exp[-z^+ K z + y^+ z + z^+ y] = \det [K/\pi]^{-1} \exp[y^+ K^{-1} y]. \quad (144)$$

В дальнейшем мы будем использовать соотношения (143), (144) не только для положительно определенных, но и для любых невырожденных матриц  $K$ . Это равносильно доопределению несобственных гауссовых интегралов посредством аналитического продолжения по матричным элементам  $K$ . Формулы (143), (144) очевидным образом обобщаются на бесконечномерные функциональные пространства:

$$\int D\varphi \exp\left[-\frac{1}{2} \varphi K \varphi + \varphi A\right] = \det [K/2\pi]^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2} A K^{-1} A\right], \quad (145)$$

$$\int D \operatorname{Re} \varphi D \operatorname{Im} \varphi \exp[-\varphi^+ K \varphi + \varphi^+ A + A^+ \varphi] = \det [K/\pi]^{-1} \exp[A^+ K^{-1} A]. \quad (146)$$

Символ  $\int D\varphi \dots$  понимается как интеграл по некоторому линейному пространству функций,  $\varphi K \varphi$  — невырожденная квадратичная форма на этом пространстве,  $K^{-1}$  — обратная к  $K$  операция,  $\varphi A \equiv \int dx \varphi(x) A(x)$  — линейная форма, функция  $A$  играет роль параметра.

Определители линейных операций вычисляют обычно с помощью формулы  $\ln \det K = \operatorname{tr} \ln K$ . Если  $K = 1 + M$ , то логарифм операции  $1 + M$  можно разложить в ряд  $M - M^2/2 + M^3/3 - \dots$ . След общего члена ряда легко вычислить, если  $M$  — линейная интегральная операция с известным ядром  $M(x, x')$ : произведению операций соответствует свертка ядер, след линейной интегральной операции с ядром  $L(x, x')$  равен  $\int dx L(x, x)$ . Для вычисления определителей полезна также формула

$$\frac{d}{d\lambda} \operatorname{tr} \ln [K - \lambda u] = -\operatorname{tr} u [K - \lambda u]^{-1}, \quad (147)$$

в которой  $\lambda$  — число,  $u$  — некоторая операция, которую желательно выбрать так, чтобы можно было явно найти ядро операции  $[K - \lambda u]^{-1}$  (при  $u = 1$  это резольвента  $K$ ), а по нему — правую часть (147). Вычислив затем первообразную правой части, мы найдем  $\operatorname{tr} \ln [K - \lambda u] = \ln \det [K - \lambda u]$  с точностью до не завися-

щей от  $\lambda$  аддитивной постоянной, чего часто бывает достаточно (см. пример в п. V. 1.11).

Возвращаясь к формулам (145), (146), покажем, что в универсальных обозначениях, в которых  $\varphi$  и  $\varphi^+$  считаются независимыми компонентами единого поля  $\Phi$ , формулой (145) можно пользоваться и для комплексного поля. Записав показатель интегрируемой экспоненты в (146) в виде

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & K^T \\ K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A^+ \end{pmatrix} \equiv -\frac{1}{2} \Phi \mathcal{H} \Phi + \Phi g \mathcal{A},$$

возьмем интеграл (146) по правилу (145). При этом нужно учесть, что в одномерном случае замене  $\varphi, \varphi^+ \rightarrow \text{Re } \varphi, \text{Im } \varphi$  соответствует формально якобиан  $-2i$ , так что  $D \text{Re } \varphi D \text{Im } \varphi \equiv (-2i)^{-\nu} D\Phi$ , где  $D\Phi \equiv D\varphi D\varphi^+$ ,  $\nu$  — „размерность“ пространства  $\varphi$  (размерность численно равна следу единичного оператора в данном пространстве). Таким образом, вычислив записанный в универсальных обозначениях интеграл в левой части (146) по правилу (145), получим  $(-2i)^{-\nu} \det [\mathcal{H}/2\pi]^{-1/2} \times \times \exp \left[ \frac{1}{2} \mathcal{A} g^T \mathcal{H}^{-1} g \mathcal{A} \right]$ . Мы хотим показать, что это выражение совпадает с правой частью (146). Равенство показателей экспонент легко проверяется:

$$\frac{1}{2} \mathcal{A} g^T \mathcal{H}^{-1} g \mathcal{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A \\ A^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & K^{-1} \\ K^{-1T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A^+ \end{pmatrix} = A^+ K^{-1} A,$$

а в совпадении предэкспоненциальных множителей нетрудно убедиться, воспользовавшись равенством

$$\det \mathcal{H} = \det \begin{pmatrix} 0 & K^T \\ K & 0 \end{pmatrix} = (-1)^\nu \det K^2 \quad (148)$$

и приняв во внимание, что  $\mathcal{H}$  — операция в пространстве размерности  $2\nu$  и потому  $\det [\mathcal{H}/2\pi] = (2\pi)^{-2\nu} \det \mathcal{H}$ .

Итак, мы убедились, что при использовании универсальных обозначений все гауссовы интегралы можно вычислять по правилу (145).

Формулы (145), (146) рассматриваются в дальнейшем как определение функционального гауссова интеграла. Это определение не может, конечно, претендовать на математическую строгость, но в известном смысле оно „более однозначно“, чем использованное еще Фейнманом (который первым ввел в физику функциональные интегралы) определение посредством процедуры интерполяции [13].\* В дальнейшем мы будем обращать

\* При этом функциональная переменная интегрирования  $\varphi$  аппроксимируется некоторой интерполирующей функцией, которая задается конечным набором числовых параметров (например, близкой кусочно-линейной). Интеграл по всем  $\varphi$  заменяется обычным многократным интегралом по этим параметрам, затем исследуется предел при возрастании точности аппрокси-

ся с функциональными интегралами точно так же, как с хорошо сходящимися обычными интегралами: в частности, будем делать в них замены переменных интегрирования и дифференцировать по параметру под знаком интеграла. Не пытаюсь обосновать законность подобных действий, отметим только, что именно таким путем можно быстро получать различные замкнутые соотношения, которые в теории возмущений выводятся с помощью бесконечных суммирований диаграмм.

**2. Интегралы на грассмановой алгебре.** Интеграл на конечномерной грассмановой алгебре (см. п. 1.3) с образующими  $\varphi \equiv \varphi_1 \dots \varphi_n$  определяется как линейный функционал  $I(f)$  на пространстве функций (6), заданный на базисных мономах  $\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}$  следующими соотношениями [2]:

$$I(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}) = 0 \quad \text{при } k < n, \quad I(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n) = (2\pi)^{-n/2}. \quad (149)$$

Эти соотношения считаются верными при любом выборе образующих, т. е. „интеграл не зависит от обозначения переменных интегрирования”. Если записывать символ  $I(f)$  в виде  $\int D\varphi f(\varphi)$  и понимать его как повторный интеграл ( $D\varphi \equiv D\varphi_n \dots D\varphi_1$ ), то определение (149) можно переформулировать в виде следующего правила вычисления однократных интегралов для каждой из образующих  $\varphi_i$ :  $\int D\varphi_i = 0$ ,  $\int D\varphi_i \varphi_i = (2\pi)^{-1/2}$ . Символы  $D\varphi_i$  считаются при этом антикоммутирующими друг с другом и с образующими  $\varphi_k$ ,  $k \neq i$ . Можно также рассматривать интегралы не по всем, а по части образующих; те  $\varphi_k$ , по которым не производится интегрирование, можно выносить за знак интеграла, не забывая при этом об их антикоммутативности с символами  $D\varphi_i$ .

Из определения (149) вытекает, что для любой  $f(\varphi)$

$$\int D\varphi (\vec{\partial} f(\varphi) / \partial \varphi_i) = \int D\varphi (\vec{\partial} f(\varphi) / \partial \varphi_i) = 0, \quad (150)$$

поскольку вклад в интеграл дает лишь старший моном  $\varphi_1 \dots \varphi_n$ , которого заведомо нет в производной  $\vec{\partial} f / \partial \varphi_i$ .

Выведем формулу линейной замены переменных в интеграле  $I(f)$ . Пусть  $\varphi = L\psi$ , где  $L$  — произвольная невырожденная (т. е.  $\det L \neq 0$ ) матрица. Если бы  $\varphi$  и  $\psi$  были обычными переменными, а не образующими грассмановой алгебры, то мы могли бы написать

$$\int D\varphi f(\varphi) = \int JD\psi f(L\psi), \quad (151)$$

маши. Если предел существует, то он и считается по определению значением функционального интеграла. Хорошо известно (см., например, [14, 15]), что это определение неоднозначно: ответ явно зависит от выбора способа интерполяции. Поэтому мы не будем его использовать, а положим в основу формулы типа (145), которые обеспечивают однозначность хотя бы при вычислении с помощью функциональных интегралов членов ряда теории возмущений (см. также замечание в § 11. 4).

где  $J = D\varphi/D\psi = \det L$  — якобиан преобразования. Для грассмановой алгебры соотношение (151) сохраняется, но теперь  $J$  — неизвестная величина, которую нужно найти, исходя из (151) и определения (149).

Правило (151) можно пояснить следующим образом. Интеграл является линейным функционалом на некотором пространстве функций; последнее можно воспринимать геометрически, считая исходную функцию  $f(\varphi)$  и сложную функцию  $f(\varphi(\psi))$ , получающуюся при замене переменных  $\varphi = \varphi(\psi)$ , различными представителями одной и той же точки пространства. Смысл формулы (151) сводится к тому, что интеграл также является геометрическим объектом, т. е. значение  $I(f)$  зависит лишь от выбора самой точки  $f$ , а не ее представителя. Это требование и определяет закон преобразования  $D\varphi = JD\psi$  дифференциала объема.

Для нахождения  $J$  в частном случае линейной замены возьмем в качестве  $f$  старший моном  $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$ . Тогда

$$(2\pi)^{-n/2} = \int D\varphi \varphi_1 \dots \varphi_n = \int JD\psi \sum_{i_1 \dots i_n} L_{1i_1} \dots L_{ni_{i_n}} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_n}.$$

Предположив, что  $J = \text{const}$ , и вынеся ее за знак интеграла, получим

$$1 = J \sum_{i_1 \dots i_n} \varepsilon_p L_{1i_1} \dots L_{ni_{i_n}}, \quad (152)$$

где  $\varepsilon_p = \pm 1$  в зависимости от четности перестановки  $i_1 \dots i_n \rightarrow 1 \dots n$ . Входящая в (152) сумма есть  $\det L$ , откуда  $J = \det L^{-1}$ . Ясно, что такой вид  $J$  гарантирует справедливость равенства (151) для любой функции  $f(\varphi)$ , поскольку вклад в интеграл дает лишь старший моном.

Итак, для интеграла на грассмановой алгебре роль якобиана в (151) играет не определитель  $L$ , а обратный определитель.

Пусть теперь  $\varphi \equiv \varphi_1 \dots \varphi_n$  и  $a \equiv a_1 \dots a_n$  — полный набор образующих грассмановой алгебры, т. е. все  $\varphi_i$  и  $a_i$  попарно антикоммутируют. Пользуясь определением интеграла, нетрудно показать, что

$$\int D\varphi f(\varphi) = \int D\varphi f(\varphi + a), \quad (153)$$

т. е.  $D\varphi = D(\varphi + a)$ . Соотношение (153) показывает, что интеграл на грассмановой алгебре, так же как и обычный интеграл, инвариантен по отношению к трансляциям переменной интегрирования.

В заключение выпишем формулы прямого и обратного преобразований Фурье ( $n$  — число образующих  $\varphi$ ):

$$\begin{aligned} F(a) &= \int D\varphi f(\varphi) \exp i\varphi a, \\ f(\varphi) &= (2\pi)^n \int Da F(a) \exp(-i\varphi a). \end{aligned} \quad (154)$$

Первое из этих равенств является определением функции  $F(a)$ , а второе можно доказать при условии, что число образующих  $n$  четно, а функция  $f(\varphi)$  состоит лишь из четных мономов.

**3. Гауссовы интегралы на грассмановой алгебре.** Рассмотрим гауссов интеграл

$$I(K, a) \equiv \int D\varphi \exp \left[ \frac{1}{2} \varphi K \varphi + \varphi a \right] \quad (155)$$

на конечномерной грассмановой алгебре с образующими  $\varphi \equiv \varphi_1 \dots \varphi_n$  и  $a \equiv a_1 \dots a_n$ . Число  $n$  образующих  $\varphi$  предполагается четным, а матрица  $K$  — антисимметричной и невырожденной.

Для выделения зависимости от  $a$  нужно сделать трансляцию  $\varphi = \varphi' - K^{-1}a$  переменной интегрирования. Пользуясь правилом (153), антисимметричностью матрицы  $K$  и равенством  $\varphi a = -a\varphi$ , получаем

$$I(K, a) = I(K, 0) \exp \left( \frac{1}{2} a K^{-1} a \right). \quad (156)$$

Для вычисления интеграла  $I(K, 0)$  делается замена  $\varphi = L\psi$ , при которой  $K \rightarrow K' = L^T K L$ . Известно, что для любой антисимметричной матрицы  $K$  четной размерности  $n = 2m$  найдется унимодулярная (т. е. имеющая единичный определитель) матрица  $L$  такая, что  $K' = L^T K L$  представляется квазидиагональной матрицей, составленной из  $m$  двумерных блоков вида  $\begin{pmatrix} 0 & \lambda_i \\ -\lambda_i & 0 \end{pmatrix}$ ; произведение  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$  называется *пфаффианом матрицы  $K$*  и обозначается  $\text{Пф}K$ . С точностью до знака пфаффиан  $K$  совпадает с корнем из  $\det K = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \dots \lambda_m^2$ . В частности, нетрудно убедиться, что

$$\text{Пф} \begin{pmatrix} 0 & -B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{m(m+1)/2} \det B, \quad (157)$$

где  $m$  — размерность матрицы  $B$ .

Возвращаясь к вычислению интеграла  $I(K, 0)$ , сделаем замену  $\varphi = L\psi$ , выбрав матрицу  $L$  именно такой, как указано выше. Вследствие унимодулярности  $L$  имеем  $I(K, 0) = I(K', 0)$ . Напишем

$$\exp \left( \frac{1}{2} \varphi K' \varphi \right) = \prod_{k=1}^m \exp (\lambda_k \varphi_{2k-1} \varphi_{2k}) = \prod_{k=1}^m (1 + \lambda_k \varphi_{2k-1} \varphi_{2k}).$$

Вклад в интеграл по  $\varphi$  дает лишь произведение вторых слагаемых в каждой скобке, откуда

$$I(K, 0) = (2\pi)^{-m} \prod_{k=1}^m \lambda_k = \text{Пф} \left( \frac{K}{2\pi} \right) = \varepsilon \det \left( \frac{K}{2\pi} \right)^{1/2}, \quad (158)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$  — знаковый множитель, отличающий ПФК от  $\det K^{1/2}$ .\*

В дальнейшем считается, что формулы (156) — (158) справедливы и в бесконечномерном случае, т. е. для антикоммутирующего поля  $\varphi$  (все фермионные поля комплексны и потому их размерность всегда можно считать четной):

$$\int D\varphi \exp \left[ \frac{1}{2} \varphi K \varphi + \varphi A \right] = \varepsilon \det \left( \frac{K}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left( \frac{1}{2} A K^{-1} A \right). \quad (159)$$

Интеграл  $\int D\psi D\psi^+ \exp [\psi^+ K \psi + \psi^+ A + A^+ \psi]$  сводится к написанному выше при переходе к универсальным обозначениям:

$$\psi^+ K \psi + \psi^+ A + A^+ \psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -K^T \\ K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A^+ \end{pmatrix}.$$

Обобщив соотношение (157), мы выразим с точностью до знака пфаффиан двумерной матрицы через определитель  $K$  и получим

$$\begin{aligned} \int D\psi D\psi^+ \exp [\psi^+ K \psi + \psi^+ A + A^+ \psi] &= \\ &= \varepsilon \det \left( \frac{K}{2\pi} \right) \exp (-A^+ K^{-1} A). \end{aligned} \quad (160)$$

Формулы (145), (159) можно объединить в одну:

$$\int D\varphi \exp \left[ -\frac{1}{2} \varphi K \varphi + \varphi A \right] = \varepsilon \det \left( \frac{K}{2\pi} \right)^{-\kappa/2} \exp \left[ \frac{\kappa}{2} A K^{-1} A \right]. \quad (161)$$

**4. Гауссовы интегралы в теории поля.** Если вычислить формально по правилу (161) интеграл от  $\exp i [\varphi K \varphi / 2 + \varphi A]$ , где  $\varphi K \varphi / 2$  — квадратичная форма свободного действия (4), то с точностью до не зависящего от  $A$  множителя получим  $\exp[-\kappa A \Delta A / 2]$ , где  $\Delta = iK^{-1}$ . Сравнив это выражение с (89) и приняв во внимание последнее равенство (31), находим, что мы пришли к производящему функционалу функций Грина рассматриваемой свободной теории.

Это и есть желаемый результат, но приведенный выше вывод нуждается в существенном уточнении. Дело в том, что  $K$  в (161) предполагается невырожденной линейной операцией на пространстве полей  $\varphi$ , по которому производится интегрирование, — в противном случае символ  $K^{-1}$  теряет смысл. В нашем случае  $K$ , рассматриваемая как операция на множестве „всех полей“, вырождена, поскольку уравнение  $K\varphi = 0$  имеет нетривиальные решения — свободные поля. Если же в качестве пространства интегрирования взять, например, множество хорошо убывающих функций, то операция  $iK^{-1}$  будет определена однозначно, но мы не знаем, совпадет ли ее ядро с хронологической

\* Отметим, что сходимость интеграла в отличие от бозонного случая не связана со свойствами знакоопределенности  $K$ .



сверткой  $\Delta$ , входящей в функционал (89) (ниже убедимся, что это сомнение основательно).

Поэтому задачу нужно поставить следующим образом: пусть  $\Delta(x, x')$  — некоторое наперед выбранное решение уравнения  $K\Delta = i$ , т. е. одна из функций Грина (оговорка „с точностью до  $i$ ” подразумевается) линейной операции  $K$ . Требуется подобрать такое пространство интегрирования  $E(\Delta)$ , что  $K$  на нем — невырожденная операция, а ядром однозначно определенной операции  $iK^{-1}$  оказывается выбранная нами функция  $\Delta$ .

В приложениях роль  $\Delta$  будет играть определенная независимо соотношением (29) хронологическая свертка, являющаяся согласно (31) одной из функций Грина для операции  $K$ .

Покажем, как построить искомое пространство  $E(\Delta)$ . При вычислении интеграла от  $\exp i[\varphi K\varphi/2 + \varphi A]$  делается сдвиг  $\varphi \rightarrow \varphi - \varphi_0$  переменной интегрирования, который, во-первых, не должен менять области интегрирования, что равносильно требованию  $\varphi_0 \in E(\Delta)$ , и, во-вторых, должен устранять линейные по  $\varphi$  члены в показателе интегрируемой экспоненты, что при условии симметричности  $K$  на  $E(\Delta)$  равносильно требованию  $K\varphi_0 = A$ . Формальное решение этого уравнения имеет вид  $\varphi_0 = K^{-1}A \equiv -i\Delta A$ , и мы хотим, чтобы дополнительное условие  $\varphi_0 \in E(\Delta)$  однозначно приводило бы к выбору наперед заданной функции  $\Delta$ .

Из сказанного ясно, что пространство  $E(\Delta)$  должно быть инвариантно по отношению к сдвигам на функции вида  $i\Delta A$ , где  $\Delta$  — выбранная функция Грина. Функциональный аргумент  $A$  играет в гауссовом интеграле роль параметра, и мы будем считать, что  $A$  принадлежит пространству  $E$  хорошо убывающих полей с должными (в зависимости от теории) свойствами вещественности. Естественным кандидатом на роль  $E(\Delta)$  является тогда пространство  $i\Delta E$ , т. е. множество всех функций вида  $\varphi = i\Delta\varphi'$ , где  $\varphi'$  — произвольная функция из  $E$ . Проверим, что определенное таким образом пространство  $E(\Delta)$  удовлетворяет всем необходимым требованиям. Во-первых, форма  $\varphi_1 K\varphi_2$  определена для любых  $\varphi_{1,2} \in E(\Delta)$ . Действительно, представив каждую из функций  $\varphi_\alpha$  в виде  $i\Delta\varphi'_\alpha$  и воспользовавшись равенством  $K\Delta = i$ , мы придем к выражению  $\Delta\varphi'_1 \cdot \varphi'_2$ , конечность которого обеспечена условиями  $\varphi_{1,2} \in E$ . Во-вторых, если выбранная функция  $\Delta$  симметрична, то  $K$  — симметричная операция на  $E(\Delta)$ , т. е.  $\varphi_1 \cdot K\varphi_2 = K^T\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \kappa K\varphi_1 \cdot \varphi_2$ , в чем нетрудно убедиться с помощью подстановки  $\varphi_\alpha = i\Delta\varphi'_\alpha$ . Отметим, что свойство симметричности  $K$  нетривиально, поскольку функции из  $E(\Delta)$ , как мы увидим ниже, не являются хорошо убывающими при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Перенос дифференциальной операции  $K$  на другой аргумент подразумевает интегрирование по частям, и симметричность означает, что при таком переносе не появляются внеинтегральные члены. Следует подчеркнуть, что приведенное выше доказательство симметричности относится только

к самой операции  $K$ , а вовсе не ко всякой дифференциальной операции—в общем случае интегрирование по частям для функций из  $E(\Delta)$  приводит к появлению внеинтегральных членов.

В-третьих, операция  $K$  на  $E(\Delta)$  невырождена, т. е. однородное уравнение  $K\varphi=0$  не имеет нетривиальных решений в  $E(\Delta)$ . Действительно, взяв  $\varphi=i\Delta\varphi'$  и потребовав  $K\varphi=0$ , получим  $\varphi'=0$ , откуда  $\varphi=0$ . Поэтому неоднородное уравнение  $K\varphi=A$  с условием  $\varphi \in E(\Delta)$  имеет единственное решение  $\varphi=i\Delta A$ , чего мы и добивались. Требование  $\varphi \in E(\Delta)$  равносильно, как мы сейчас убедимся, постановке определенных асимптотических условий для уравнения  $K\varphi=A$ .

Пространство  $E(\Delta)$  содержит в себе пространство хорошо убывающих функций  $E$ , в чем можно убедиться, взяв в качестве  $\varphi'$  в представлении  $\varphi=i\Delta\varphi'$ , функцию вида  $K\varphi''$ ,  $\varphi'' \in E$ , для которой  $\varphi=-\varphi'' \in E$ . Но в общем случае функции из  $E(\Delta)$  не являются хорошо убывающими при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Действительно, из (29) и условия  $\varphi' \in E$  следует, что функция  $\varphi=i\Delta\varphi'$  имеет при  $t \rightarrow \infty$  асимптотику  $\varphi^{(+)}=in\varphi'$ , а при  $t \rightarrow -\infty$  — асимптотику  $\varphi^{(-)}=in\varphi'$ . Из (31) видно, что каждая из этих асимптотик является решением свободного уравнения:  $K\varphi^{(+)}=K\varphi^{(-)}=0$ . Решения  $\varphi^{(\pm)}$  в общем случае различны, но не вполне независимы, так как обе асимптотики определяются одной и той же функцией  $\varphi' \in E$ . С физической точки зрения решения свободного уравнения не принадлежат классу хорошо убывающих полей, поскольку таким решениям соответствуют отличные от нуля потоки (числа частиц, энергии и т. п.) при  $t=\pm\infty$ . Поэтому мы не имеем права определять интересующий нас гауссов интеграл как интеграл по пространству хорошо убывающих полей—в общем случае сдвиги на  $i\Delta A$ ,  $A \in E$  выводят из этого пространства и пользоваться формулой (161) нельзя.

Сведения об асимптотиках функций из  $E(\Delta)$  для различных конкретных теорий приводятся в § II. 5.

В заключение отметим, что в бозонных теориях осцилляторного типа (см. следующую главу) гауссов интеграл можно определять посредством регуляризации  $K \rightarrow K_\epsilon = K + i\epsilon$ , которая делает однозначной операцию  $\Delta_\epsilon = iK_\epsilon^{-1}$ . В таких теориях определенная соотношением (29) свертка  $\Delta$  совпадает с пределом при  $\epsilon \rightarrow 0$  операции  $\Delta_\epsilon$  при должном выборе знака  $\epsilon$ , причем этот знак всегда оказывается таким, что добавка  $i\epsilon$  вводит в интегрируемое выражение режущий, а не растущий множитель, делая гауссов интеграл формально „сходящимся“. Регуляризованная свертка  $\Delta_\epsilon$  оказывается хорошо убывающей при  $|t-t'| \rightarrow \infty$ , и потому все функции вида  $i\Delta_\epsilon\varphi'$ , образующие пространство  $E(\Delta_\epsilon)$ , также будут хорошо убывающими. Но эта процедура неуниверсальна: есть случаи, когда  $\Delta \neq \lim \Delta_\epsilon$  при  $\epsilon \rightarrow 0$  (см. п. II. 1.2) или приходится использовать разные  $\Delta$  для одной и той же операции  $K$  (см. § II. 2).

**5. Представления производящих функционалов S-матрицы и функций Грина функциональными интегралами.** Рассуждения предыдущего раздела позволяют представить производящий функционал функций Грина свободной теории (89) в виде гауссова интеграла по пространству функций  $E(\Delta)$ :

$$G^{(0)}(A) = \exp\left(-\frac{z}{2} A\Delta A\right) = c \int_{\Delta} D\varphi \exp i[S_0'(\varphi) + \varphi A]. \quad (162)$$

Здесь  $S_0' \equiv \varphi K \varphi / 2$  — квадратичная форма свободного действия, которая, как это объяснялось в п. 1.2, отличается от самого функционала свободного действия  $S_0$  внеинтегральными членами. Символ  $\int_{\Delta} D\varphi \dots$  в (162) обозначает интегрирование по  $E(\Delta)$ , а постоянная  $c$  определена равенством

$$c^{-1} = \int_{\Delta} D\varphi \exp iS_0'(\varphi). \quad (163)$$

Для теории с взаимодействием, пользуясь формально соотношениями (91), (162) и (12), получаем представление

$$G(A) = \exp iS_v\left(x \frac{\vec{\delta}}{\delta A}\right) G^{(0)}(A) = c \int_{\Delta} D\varphi \exp i[S(\varphi) + \varphi A], \quad (164)$$

в котором  $S(\varphi) = S_0'(\varphi) + S_v(\varphi)$ . Будем называть этот функционал *действием*, но нужно помнить, что, во-первых, функционал  $S_0'(\varphi)$ , как уже говорилось выше, отличается от свободного действия, и, во-вторых, функционал  $S_v(\varphi)$  для случая взаимодействия с производными поля по времени представляет эффективное взаимодействие, о котором говорилось в п. 3.4.

Формула (164) равносильна следующему представлению полных функций Грина (75):

$$G_n(x_1 \dots x_n) = c \int_{\Delta} D\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \exp iS(\varphi). \quad (165)$$

Перейдем теперь к производящему функционалу S-матрицы (84). Интегральное представление для этого функционала можно получить, подставив представление (164) в соотношение (94). Более поучителен другой вывод, который основан на следующем представлении входящей в определение (84) дифференциальной операции приведения:

$$\exp\left(\frac{z}{2} \cdot \frac{\vec{\delta}}{\delta \varphi} \Delta \frac{\vec{\delta}}{\delta \varphi}\right) = c \int_{\Delta} D\psi \exp \left[ iS_0'(\psi) + \psi \frac{\vec{\delta}}{\delta \varphi} \right]. \quad (166)$$

Пространство интегрирования и постоянная  $c$  те же, что и в (162). Для фермионов мы перешли с помощью (9) к левым производным, чтобы пользоваться затем соотношением (11), показывающим, что  $\exp[\psi \vec{\delta}/\delta \varphi]$  есть операция сдвига на  $\psi$ , как и в бозонном случае. Поэтому

$$\exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi}\right) F(\varphi) = c \int_{\Delta} D\psi F(\varphi + \psi) \exp iS_0'(\psi) \quad (167)$$

для любого функционала  $F$ . В частном случае производящего функционала  $S$ -матрицы (84) получаем

$$R(A) = c \int_{\Delta} D\varphi \exp i [S'_0(\varphi) + S_{\sigma}(\varphi + A)]. \quad (168)$$

Если представления (164), (168) считаются известными, то соотношение (93), связывающее производящие функционалы  $S$ -матрицы и функций Грина, легко получается с помощью сдвига  $\varphi \rightarrow \varphi - A$  переменной интегрирования в (168), не выводящего из  $E(\Delta)$  при условии  $A \in E \subseteq E(\Delta)$ .

Было бы ошибкой воспринимать формулы типа (164), (168) как некие точные представления, совершенно свободные от связи с теорией возмущений. Это не совсем так: указание области интегрирования  $E(\Delta)$ , которая определяется лишь свободной частью действия, равносильно скрытому предположению об использовании соответствующей теории возмущений. Не следует поэтому удивляться появлению внутренних противоречий в подобных формулах в тех случаях, когда теория возмущений заведомо некорректна, что на языке классической теории означает качественное различие в асимптотическом поведении решений точного и свободного уравнений движения, а на языке квантовой теории — качественное различие спектров соответствующих гамильтонианов. Например, мы можем попытаться вычислить функционал (162) по теории возмущений, разбив искусственно форму  $\varphi K \varphi$  на „свободную часть”  $\varphi K' \varphi$  и „взаимодействие”  $\varphi(K - K')\varphi$ . В результате вместо (162) получим гауссов интеграл от того же выражения, но по другой области  $E(\Delta')$ , что само по себе противоречиво.

Можно думать, что в правильных формулах типа (164), (168) пространство интегрирования должно определяться асимптотиками решений классического уравнения движения для полного действия, а не его свободной части, и теория возмущений корректна лишь тогда, когда включение взаимодействия не меняет пространство интегрирования. Отметим, что так и обстоит дело в ренормированной теории возмущений [1].

На практике об определении области интегрирования в (164), (168) особо не заботятся, потому что представления такого типа используются в основном для упрощения вывода различных замкнутых соотношений, которые на обычном языке получаются путем суммирования диаграммных рядов теории возмущений. Опыт показывает, что для воспроизведения подобных результатов достаточно манипулировать формально с функциональными интегралами, не обращая при этом внимания на области интегрирования. В качестве примера рассмотрим вычисление входящего в (112) функционала

$$I(\Delta, M, \varphi) \equiv \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi}\right) \exp\left(\frac{1}{2} \varphi M \varphi\right).$$

С помощью (167) приводим это выражение к гауссовому интегралу ( $K = i\Delta^{-1}$ ):

$$c \int D\psi \exp \left[ -\frac{1}{2} \psi \Delta^{-1} \psi + \frac{1}{2} (\varphi + \psi) M (\varphi + \psi) \varphi \right]. \quad (169)$$

Применяя формально правило (161) для вычисления гауссовых интегралов (163), (169), получаем ответ

$$I(\Delta, M, \varphi) = \det(1 - M\Delta)^{-\nu/2} \exp \left[ \frac{1}{2} \varphi (M^{-1} - \Delta)^{-1} \varphi \right],$$

совпадающий с результатом прямого суммирования диаграмм теории возмущений для функционала  $I(\Delta, M, \varphi)$ .

**6. Метод стационарной фазы.** Допустим, что вместо (164) написано представление

$$G_\lambda(A) = c_\lambda \int_\Delta D\varphi \exp i\lambda^{-1} [S(\varphi) + \varphi A], \quad (170)$$

в котором  $\lambda$  — некоторый числовой параметр, а нормировочная постоянная  $c_\lambda$  отличается от  $c$  заменой  $S_0 \rightarrow \lambda^{-1} S'_0$  в (163). В реальной ситуации роль  $\lambda$  играет постоянная Планка  $\hbar$ , которую мы приняли за единицу.

В диаграммах  $G$  введение  $\lambda$  сводится к умножению на  $\lambda$  каждой из линий и делению на  $\lambda$  каждой из вершин (123), так что диаграмма получает множитель  $\lambda^p$  в степени  $N - V$ , где  $N$  — число линий,  $V$  — число вершин. Для связной диаграммы величина  $p \equiv N - V + 1$  есть число петель, т. е. число независимых замкнутых контуров в диаграмме. В трансляционно-инвариантной теории  $p$  есть число независимых импульсов интегрирования: каждой линии приписывается импульс,  $\delta$ -функция по импульсам в каждой вершине, выражающая сохранение импульса при взаимодействии, уменьшает число независимых импульсов на единицу, но полное число независимых импульсов равно  $N - V + 1$ , а не  $N - V$ , поскольку одна (в связной диаграмме)  $\delta$ -функция выделяется в виде общего множителя, выражающего закон сохранения внешних импульсов.

Отсюда ясно, что разложение  $W_\lambda = \ln G_\lambda$  по степеням  $\lambda$

$$W_\lambda(A) = \lambda^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p W^{(p)}(A) \quad (171)$$

является одновременно разложением по числу петель: общий член ряда есть сумма всех связных диаграмм, имеющих  $p$  петель.

Рассмотрим теперь процедуру вычисления интеграла (170) по методу стационарной фазы. Допустим, что для любого фиксированного  $A \in E$  функционал  $S(\varphi) + \varphi A$  имеет единственную точку стационарности  $\psi = \psi(A)$  в пространстве  $E(\Delta)$ , по которому производится интегрирование в (170). Разложив тогда показатель экспоненты в (170) в ряд Тэйлора в точке стационарности

$\psi$  и сделав затем сдвиг  $\varphi \rightarrow \varphi + \psi$ , не меняющий области интегрирования ввиду линейности  $E(\Delta)$ , получим

$$G_\lambda(A) = \exp i\lambda^{-1} [S(\psi) + \psi A] c_\lambda \int_\Delta D\varphi \times \\ \times \exp \left\{ i\lambda^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{\delta^n S(\psi)}{\delta \psi^n} \varphi^n \right\}. \quad (172)$$

Входящий сюда интеграл, умноженный на нормировочную постоянную  $d_\lambda$ :

$$d_\lambda^{-1} = \int_\Delta D\varphi \exp \left[ \frac{i}{2} \lambda^{-1} \frac{\delta^2 S(\psi)}{\delta \psi^2} \varphi^2 \right], \quad (173)$$

представляется обычным образом в виде суммы единицы и всех графиков с линией  $\lambda \Delta$  и вершинами  $\lambda^{-1} \mathcal{M}_n$ ,  $n \geq 3$ , где

$$\Delta = i \left( \frac{\delta^2 S(\psi)}{\delta \psi^2} \right)^{-1} = \left[ \Delta^{-1} - i \frac{\delta^2 S_v(\psi)}{\delta \psi^2} \right]^{-1}$$

и  $\mathcal{M}_n \equiv i \delta^n S_v(\psi) / \delta \psi^n$ ,  $n \geq 3$ .

Логарифмируя равенство (172), получаем

$$W_\lambda(A) = i\lambda^{-1} [S(\psi) + \psi A] + \ln(c_\lambda/d_\lambda) + \widetilde{W}_\lambda(A), \quad (174)$$

где  $\widetilde{W}_\lambda(A)$  обозначает сумму всех связанных графиков, линии и вершины которых определены выше. Классифицируя эти графики по числу петель, напомним.

$$\widetilde{W}_\lambda(A) = \lambda^{-1} \sum_{p=2}^{\infty} \lambda^p \widetilde{W}^{(p)}(A). \quad (175)$$

Разложение начинается с  $p=2$ , так как любой график  $\widetilde{W}$  имеет не менее двух петель ввиду отсутствия вершины  $\mathcal{M}_1$ ; по той же причине число графиков  $\widetilde{W}$  с заданным  $p$  конечно для любого  $p$ .

Вычислив гауссовы интегралы (163), (173) по правилу (161), получаем

$$\ln(c_\lambda/d_\lambda) = -(\alpha/2) \operatorname{tr} \ln(\Delta^{-1} \Delta). \quad (176)$$

Сравнивая затем представления (171) и (174)–(176), заключаем, что

$$W^{(0)}(A) = i[S(\psi) + \psi A], \quad W^{(1)}(A) = -(\alpha/2) \operatorname{tr} \ln(\Delta^{-1} \Delta) \quad (177)$$

и  $W^{(p)}(A) = \widetilde{W}^{(p)}(A)$  для  $p \geq 2$ . Таким образом, вычисление функционального интеграла в (170) по методу стационарной фазы автоматически дает разложение функционала  $W_\lambda = \ln G_\lambda$  в виде ряда по числу петель.

В линии и вершины диаграмм  $\widetilde{W}$  в качестве параметра входит точка стационарности  $\psi$ , которая находится из уравнения

$$\delta S(\psi) / \delta \psi + A = K\psi + \delta S_v(\psi) / \delta \psi + A = 0 \quad (178)$$

с дополнительным условием  $\psi \in E(\Delta)$ . Отметим, что установленная в п. 4 симметричность операции  $K$  на пространстве  $E(\Delta)$  обеспечивает отсутствие внеинтегральных членов в вариации формы  $\varphi K \varphi$  для вариаций  $\delta \varphi$  из  $E(\Delta)$ :  $\delta(\varphi K \varphi) = \delta \varphi \cdot K \varphi + \varphi \cdot K \delta \varphi = 2 \delta \varphi \cdot K \varphi$ .

Уравнение (178) можно решать итерациями по степеням  $S_0$ , что приведет к представлению  $\psi$  в виде бесконечной суммы беспетлевых диаграмм, подстановка которых в правую часть (174) возвратит нас, конечно, к исходному диаграммному представлению  $W_\lambda(A)$ . В теории поля беспетлевые диаграммы принято называть *деревьями*, в теории графов — *деревьями Кэйли*.

Применение метода стационарной фазы для вычисления интеграла (168), представляющего функционал  $S$ -матрицы, приводит к уравнению

$$K\varphi + \delta S_0(\varphi + A)/\delta \varphi = 0 \quad (179)$$

с условием  $\varphi \in E(\Delta)$ . Если аргумент  $A$  принадлежит поверхности масс, т. е. является решением свободного уравнения  $KA=0$ , то в (179) можно перейти к переменной  $\psi = \varphi + A$ , для которой  $\delta S(\psi)/\delta \psi = 0$  с условием  $\psi \in E(\Delta) + A$ . Непосредственно в (168) замена  $S_0(\varphi) \rightarrow S_0(\varphi + A)$  недопустима, так как  $\varphi KA=0$ , но  $AK\varphi \neq K^T A \cdot \varphi = 0$  для  $\varphi \in E(\Delta)$ .

**7. Теорема Доминисиса—Энглерта.** Интеграл (164) формально решает задачу определения функций Грина по заданному функционалу действия  $S(\varphi)$ . Формальное решение обратной задачи можно очень просто получить, заметив [16, 17], что интеграл (164) является функциональным преобразованием Фурье, и написав формулу обратного преобразования ( $\nu$  — размерность пространства  $\varphi$ ):

$$(2\pi)^{\nu} c \exp iS(\varphi) = \int DAG(A) \exp(-i\varphi A). \quad (180)$$

Для фермионов мы воспользовались обобщением формул (154), условия применимости которых выполнены, поскольку фермионное поле в действительности всегда комплексно и его размерность можно считать четной, а функционал действия всегда предполагается бозонным.

Сделав в (180) подстановку  $G = \exp W$  и переобозначив переменные, получим

$$(2\pi)^{\nu} c \exp iS(-A) = \int D\varphi \exp [W(\varphi) + iA\varphi]. \quad (181)$$

Сравнивая это равенство со (164), замечаем, что с точностью до нормировочного множителя правая часть (181) имеет вид производящего функционала функций Грина теории с действием  $S'(\varphi) = -iW(\varphi)$ . Это показывает, что между функционалами  $S$  и  $W$  имеется некоторый дуализм: для теории с действием  $S$  функционал  $W$  представляет связанные функции Грина,

а для теории с действием  $S' = -iW$  связанные функции Грина представляются функционалом  $iS$  (с точностью до нормировок).

Теория возмущений для интеграла (181) дает диаграммную технику для вычисления функционала действия  $S$  по известному функционалу  $W$ , т. е. по функциям Грина. Если же считать известным функционал  $S$ , то полученные таким путем соотношения можно рассматривать как систему уравнений для определения неизвестных функций Грина.

Умножим обе части равенства (181) на постоянную  $d$ , определенную соотношением  $d^{-1} = \int D\varphi \exp(-\chi\varphi D\varphi/2)$ , в котором  $D$  — полный пропагатор (см. определения в п. 4.9). Воспользовавшись затем формулой (167), получим

$$(2\pi)^{\chi\kappa} cd \exp iS(-A) = \\ = \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\varphi} D^{-1} \frac{\delta}{\delta\varphi}\right) \exp\left\{iA\varphi + \sum_{n \neq 2} \frac{1}{n!} W_n(i\varphi)^n\right\} \Big|_{\varphi=0}. \quad (182)$$

Согласно общим правилам п. 4.1 правая часть этого равенства представляется в виде суммы единицы и всех графиков с линией  $D^{-1}$  и вершинными множителями  $i^n W_n + iA\delta_{n1}$ , где  $W_n$  — коэффициенты в разложении (127) функционала  $W(A)$ , т. е. связанные функции Грина теории с действием  $S$ . Прологарифмировав (182) и приравняв затем коэффициенты при всех степенях  $A$  в двух частях получающегося равенства, мы сможем представить затравочные величины, т. е. коэффициенты в разложении функционала  $S$ , в виде сумм скелетных графиков с «одетыми» линиями и вершинами, о которых говорилось выше. Мы не будем на этом задерживаться, так как подобные соотношения гораздо лучше получать с помощью техники функциональных преобразований Лежандра (см. гл. VI).

Отметим, что логарифм предэкспоненциального множителя в (182) легко найти, вычислив определяющие  $c$  и  $d$  гауссовы интегралы по правилу (161):  $\ln [cd (2\pi)^{\chi\kappa}] = -(\chi/2) \text{tr} \ln (D^{-1}\Delta)$  (напомним, что  $\Delta$  и  $\bar{D}$  — соответственно затравочный и полный пропагаторы). Множитель  $(2\pi)^{\chi\kappa}$  от преобразования Фурье сократился с аналогичными множителями от гауссовых интегралов.

## § 7. УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИОННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

**1. Уравнения Швингера.** Хорошо известные уравнения Швингера [18] представляют собой точные соотношения, связывающие различные функции Грина. Все эти соотношения могут быть сформулированы в виде одного уравнения в вариаци-



онных производных, которое проще всего выводится [13] с помощью равенства

$$0 = \int D\varphi \vec{\delta} \exp i [S(\varphi) + \varphi A] / \delta \varphi (x), \quad (183)$$

выражающего инвариантность меры  $D\varphi$  по отношению к трансляциям  $\varphi \rightarrow \varphi + \epsilon$  на хорошо убывающие функции  $\epsilon(x)$  (подробнее см. п. 3). В обоснование равенства (183) для фермионов можно сослаться на формулы (150).

Дифференцируя экспоненту в (183), получаем

$$0 = \int D\varphi \left[ \frac{\vec{\delta} S(\varphi)}{\delta \varphi (x)} + A(x) \right] \exp i [S(\varphi) + \varphi A].$$

В бозонном случае умножение подынтегрального выражения на  $\varphi$  равносильно дифференцированию интеграла по  $iA$ , а в фермионном, как видно из (12), — по  $-iA$ . Это позволяет вынести функционал  $\vec{\delta} S / \delta \varphi$  за знак интеграла в виде дифференциальной операции, что и дает искомое уравнение Швингера:

$$\left\{ \frac{\vec{\delta} S(\varphi)}{\delta \varphi (x)} \Big|_{\varphi = x \vec{\delta} / \delta iA} + A(x) \right\} G(A) = 0. \quad (184)$$

С этого момента и до конца главы мы будем приводить все формулы для случая бозонного поля, но это делается только для упрощения записи. При обобщении на фермионы требуется лишь следить за типом (левые — правые) и порядком написания производных, и в каждом конкретном случае это нетрудно сделать.

Для теории с полиномиальным по полю действием (184) есть уравнение конечного порядка в вариационных производных. Уравнение определяет решение лишь с точностью до числового множителя — однозначно определяется функционал  $H(A) = G_0^{-1} G(A)$ . Сделав в (184) подстановку  $G(A) = \exp W(A)$  и сократив после выполнения дифференцирования множитель  $\exp W$ , получим уравнение Швингера для производящего функционала связанных функций Грина (см. определения в п. 4.9). Приравняв нулю почленно коэффициенты при всех степенях  $iA$  в полученных уравнениях, мы придем к бесконечной системе зацепляющихся уравнений для функций Грина.

В качестве примера рассмотрим уравнения для связанных функций Грина в теории с действием  $S(\varphi) = \varphi K \varphi / 2 + \lambda \int dx \varphi^3(x) / 6$ . Уравнение Швингера (184) для такой теории принимает вид:

$$\left\{ \int dx' K(x, x') \delta / \delta iA(x') + \frac{\lambda}{2} \delta^2 / \delta (iA(x))^2 + A(x) \right\} G(A) = 0. \quad (185)$$

Подставив сюда  $G = \exp W$ , получаем уравнение для  $W$ , которое



если не пользоваться универсальными обозначениями, превращается в систему уравнений — по одному на каждое независимое поле  $\varphi$ .

**2. Линейные уравнения для связанных функций Грина.** Уравнение Швингера (184) линейно по отношению к полным функциям Грина  $G_n$ , но нелинейно по отношению к их связным частям  $W_n$ . Линейные уравнения для связанных функций можно получить из формулы Доминисиса — Энглерта (181) точно таким же образом, каким из интеграла (164) получаются уравнения Швингера:

$$0 = \int D\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \exp [W(\varphi) + iA\varphi].$$

Отсюда при учете равенства (181) находим искомое уравнение

$$\left\{ \frac{\delta W(\varphi)}{\delta\varphi(x)} \Big|_{\varphi=\delta/iA} + iA(x) \right\} \exp iS(-A) = 0. \quad (190)$$

Умножив его на  $\exp(-iS(-A))$  и обозначив

$$Q_n(x_1 \dots x_n; A) \equiv \exp[-iS(-A)] \frac{\delta^n}{\delta A(x_1) \dots \delta A(x_n)} \exp[iS(-A)],$$

получаем

$$A(x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \times \\ \times \int \dots \int dx_2 \dots dx_n W_n(x_1 x_2 \dots x_n) Q_{n-1}(x_2 \dots x_n; A) = 0. \quad (191)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при всех степенях  $A$ , получаем бесконечную систему уравнений для связанных функций Грина  $W_n$ . Эти уравнения в отличие от уравнения Швингера (184) линейны по каждой из функций  $W_n$ , но зато они „зацепляют” сразу все функции  $W_n$  даже для полиномиального действия  $S$ , тогда как уравнения Швингера в этом случае „зацепляют” лишь конечное число связанных функций. Такова плата за выигранную линейность.

**3. Общий метод вывода уравнений.** Рассмотрим функционал действия самого общего вида:

$$iS(\varphi) \equiv A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n \varphi^n \equiv \\ \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_n A_n(x_1 \dots x_n) \varphi(x_n) \dots \varphi(x_1). \quad (192)$$

Симметричные функции  $A_n(x_1 \dots x_n)$ , которые будут называться *потенциалами*, могут быть как обычными функциями, так и обобщенными. Конкретной теории соответствует выбор

определенных значений потенциалов  $A \equiv \{A_0 A_1 \dots\}$ . В фермионном случае нечетные потенциалы  $A_{2k+1}$  следовало бы считать величинами фермионного типа, а четные — бозонного, чтобы функционал (192) всегда был бозонным. Интеграл

$$G(A) = \int D\varphi \exp iS(\varphi) = \int D\varphi \exp A(\varphi) \quad (193)$$

является функционалом от всех потенциалов  $A$ . Очевидно, что этот функционал удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\frac{\delta G}{\delta A_n(x_1 \dots x_n)} = \frac{1}{n!} \frac{\delta^n G}{\delta A_1(x_1) \dots \delta A_1(x_n)}, \quad n \neq 1 \quad (194)$$

(для  $n=1$  получаем тождество), которые в дальнейшем будут называться *уравнениями связи* и записываться сокращенно:

$$\frac{\delta G}{\delta A_n} = \frac{1}{n!} \left( \frac{\delta}{\delta A_1} \right)^n G, \quad n \neq 1.$$

Кроме того, функционал (193) удовлетворяет уравнению Швингера (184):

$$0 = \int D\varphi \frac{\delta}{\delta \varphi} \exp A(\varphi) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} A_n \left( \frac{\delta}{\delta A_1} \right)^{n-1} \right\} G(A). \quad (195)$$

Здесь и далее мы не указываем явно аргумент  $x$ , подразумеывая, что

$$[A_n \varphi^{n-1}](x_1) \equiv \int \dots \int dx_2 \dots dx_n A_n(x_1 \dots x_n) \varphi(x_n) \dots \varphi(x_2).$$

Уравнение Швингера определяет  $G(A)$  с точностью до множителя, не зависящего от потенциала  $A_1$ , тогда как вся система (194), (195) определяет  $G(A)$  с точностью до числового множителя.

Допустим, что функционал  $A(\varphi)$  содержит только четные потенциалы  $A_{2n}$ , и поставим вопрос: каким образом написать полную систему уравнений для  $G(A)$  в терминах только четных потенциалов? Такая постановка задачи имеет смысл для фермионной теории, если мы хотим полностью избавиться от антикоммутирующих переменных.

Уравнения связи пишутся в этом случае очевидным образом:

$$\frac{\delta G}{\delta A_{2n}} = \frac{2^n}{(2n)!} \left( \frac{\delta}{\delta A_2} \right)^n G, \quad n \neq 1,$$

а аналог уравнения Швингера можно вывести из равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \int D\varphi \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} [\varphi(x') \exp A(\varphi)] = \\ &= \int D\varphi \left[ \delta(x-x') + \varphi(x') \frac{\delta A(\varphi)}{\delta \varphi(x)} \right] \exp A(\varphi). \end{aligned}$$

Выражение внутри квадратной скобки в последнем интеграле содержит только четные степени поля, и потому его можно вынести за знак интеграла в виде функционала от производной  $\delta/\delta A_2$ .

Обсудим теперь уравнения типа (184), (195) с более общей точки зрения. Допустим, что в интеграле (193) сделана замена  $\varphi(x) = F(x; \varphi')$ , где  $F$  — некоторый функционал от  $\varphi'$ , зависящий параметрически от  $x$ . Допустим, что при замене  $\varphi \rightarrow \varphi'$  пространство полей, по которому производится интегрирование в (193), переходит в себя. В фермионном случае мы ограничились бы линейными неоднородными преобразованиями поля, которые были изучены в п. 6.2.

Якобиан замены  $J = D\varphi/D\varphi'$  равен  $\det M^*$ , где  $M$  — линейная операция с ядром  $M(x, x') = \delta\varphi(x)/\delta\varphi'(x')$ . Это ядро, а вместе с ним и  $J$ , зависит функционально от  $\varphi'$ , если замена нелинейна. В дальнейшем рассмотрим важную роль будут играть те преобразования  $\varphi \rightarrow \varphi'$ , для которых якобиан  $D\varphi/D\varphi'$  равен единице. Такие преобразования составляют, очевидно, группу, которую мы будем называть *группой движений пространства  $\varphi$* .

Всякая регулярная замена  $\varphi = \varphi(\varphi')$  индуцирует преобразование потенциалов  $A \rightarrow A'$ :

$$A(\varphi) = A(\varphi(\varphi')) \equiv A'(\varphi'). \quad (196)$$

Ясно, что интеграл (193) инвариантен относительно всех преобразований  $A \rightarrow A'$ , индуцируемых группой движений пространства  $\varphi$ :

$$G(A) = \int D\varphi \exp A(\varphi) = \int D\varphi' \exp A'(\varphi') = G(A'). \quad (197)$$

Простейшими элементами группы движений являются трансляции на некоторую фиксированную хорошо убывающую функцию  $\varepsilon^*$ :  $\varphi(x) = \varphi'(x) + \varepsilon(x)$ . Эти преобразования составляют группу, а уравнение Швингера (195), как мы сейчас убедимся, выражает инвариантность функционала  $G(A)$  по отношению к индуцированной группе преобразований потенциалов. Действительно, обсуждаемая инвариантность выражается равенством

$$G(A) = \int D\varphi \exp A(\varphi) = \int D\varphi \exp A(\varphi + \varepsilon) \equiv G(A^\varepsilon),$$

которое показывает, что функционал  $G(A^\varepsilon)$  в действительности от  $\varepsilon$  не зависит. Его первая вариация по  $\varepsilon$  в окрестности  $\varepsilon = 0$

$$\delta_\varepsilon G = \int dx \varepsilon(x) \int D\varphi \delta/\delta\varphi(x) \cdot \exp A(\varphi),$$

откуда видно, что равенство (195) эквивалентно требованию инвариантности  $G(A)$  по отношению к инфинитезимальным преобразованиям индуцированной группы  $A \rightarrow A^\varepsilon$ .

---

\* Напомним, что определенные в п. 6.4 пространства  $E(\Delta)$  инвариантны по отношению к таким трансляциям.

Пусть теперь  $\varphi(x) = F(x, \varepsilon; \varphi')$  — некоторая группа Ли с параметрами (числовыми или функциональными)  $\varepsilon$ , являющаяся подгруппой группы движений. Будем считать, что  $\varphi = \varphi'$  при  $\varepsilon = 0$ . Инвариантность функционала (193) относительно инфинитезимальных преобразований индуцированной группы  $A \rightarrow A^\varepsilon$  выражается равенством

$$0 = \int D\varphi \delta_\varepsilon \exp A(\varphi) = \int D\varphi \delta_\varepsilon \varphi \frac{\delta A(\varphi)}{\delta \varphi} \exp A(\varphi), \quad (198)$$

где  $\delta_\varepsilon \dots$  обозначает первую вариацию по  $\varepsilon$  в точке  $\varepsilon = 0$ . Легко видеть, что в нормальных условиях (смысл этой оговорки поясняется ниже) получающееся отсюда уравнение для  $G(A)$  является следствием уравнения Швингера. Действительно, при получении из (198) уравнения множитель  $\delta_\varepsilon \varphi [\delta A(\varphi)/\delta \varphi]$  выносится за знак интеграла в виде дифференциальной операции с заменой  $\varphi \rightarrow \delta/\delta A_1$ , и мы получаем уравнение  $LL'G = 0$ , где  $L$  и  $L'$  — операции, порождаемые соответственно множителями  $\delta_\varepsilon \varphi$  и  $\delta A(\varphi)/\delta \varphi$ . Уравнение Швингера в этих обозначениях имеет вид  $L'G = 0$ , так что равенство  $LL'G = 0$  является его автоматическим следствием.

Если  $L$  и  $L'$  — дифференциальные операции конечного порядка, то может оказаться, что порядок операции  $LL'$  меньше, чем порядок  $L'$ , поскольку символ  $\delta_\varepsilon \varphi \cdot [\delta A(\varphi)/\delta \varphi]$  обозначает не простое произведение, а свертку по аргументам  $\delta_\varepsilon \varphi(x)$  и  $\delta/\delta \varphi(x)$ . В частности, так будет тогда, когда старшая степень полиномиального действия  $A(\varphi)$  инвариантна относительно рассматриваемого преобразования и потому не дает вклада в вариацию  $\delta_\varepsilon A(\varphi)$ . В таких случаях из (198) получается уравнение более низкого порядка, чем уравнение Швингера; уравнения такого типа называют *тождествами Ворда* (см. примеры в гл. III).

Сказанное выше не относится к так называемой аномальной ситуации, в которой имеет место явление спонтанного нарушения симметрии. На нашем языке суть этого явления в том, что равенство  $LL'G = 0$  оказывается неверным несмотря на то, что уравнение Швингера  $L'G = 0$  выполняется. Это возможно, грубо говоря, тогда, когда при сворачивании операции  $L$  с  $L'G$  в получающемся выражении возникают расходимости и эта „дополнительная бесконечность“ сокращает „нуль“  $L'G$ . Обычный механизм появления этой бесконечности — голдстоуновские частицы (см. гл. VI).

**4. Итерационное решение уравнений.** В этом разделе мы проанализируем итерационное решение уравнений движения (194), (195) и на основе этого анализа дадим еще один вариант доказательства теоремы о связности логарифма (первый вариант см. в п. 4.8).

Умножив уравнения (194), (195) на  $G^{-1} = \exp(-W)$ , получим

$$\delta W / \delta A_n = H_n / n!, \quad n \neq 1; \quad (199)$$

$$A_1 + \sum_{n=2}^{\infty} [1/(n-1)!] A_n H_{n-1} = 0. \quad (200)$$

Мы ввели функции  $H_n$  (аргументы  $x_1 \dots x_n$  подразумеваются):

$$H_n = \exp(-W) \left( \frac{\delta}{\delta A_1} \right)^n \exp W = \left( \frac{\delta W}{\delta A_1} + \frac{\delta}{\delta A_1} \right)^n \cdot 1, \quad (201)$$

являющиеся полиномиальными формами производных  $W_n \equiv \equiv \delta^n W / \delta A_1^n$ ,  $n \geq 1$ . По смыслу производные  $W_n$  являются связными функциями Грина, а  $H_n$  — полными функциями Грина без вакуумных петель для теории с действием (192).

Уравнения (199), (200) можно итерировать, строя решение в виде кратного степенного ряда по вершинам  $A_n$ ,  $n \geq 3$ . Для определения нулевого приближения  $W^{(0)}$  получаем из (199), (200) систему уравнений


$$A_1 + \frac{1}{2} A_2 W_1 = 0, \quad \delta W / \delta A_0 = 1, \quad \delta W / \delta A_2 = (W_2 + W_1^2) / 2 \quad (202)$$

(мы подставили  $H_0 = 1$ ,  $H_1 = W_1$ ,  $H_2 = W_2 + W_1^2$ ), решение которой имеет вид

$$W^{(0)} = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \Delta + \frac{1}{2} A_1 \Delta A_1 + A_0 \quad (203)$$

с точностью до несущественной аддитивной постоянной. Величина  $\Delta = -A_2^{-1}$  в (203) является затравочным пропагатором. Пользуясь равенством  $A_2^{-1} = \delta \text{tr} \ln A_2 / \delta A_2$ , нетрудно убедиться, что (203) действительно удовлетворяет уравнениям (202). Отметим, что в фермионном случае  $\text{tr} \ln \Delta$  вошел бы в (203) с другим знаком.

Для определения разности  $W - W^{(0)}$  достаточно уравнений (199) с  $n \geq 3$ , которые удобно свернуть с соответствующими потенциалами  $A_n$ :

$$A_n \frac{\delta W}{\delta A_n} = \frac{1}{n!} A_n H_n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \dots \cdot \text{Diagram} \quad (204)$$


Мы изобразили графически общую структуру правой части, обозначив кружком с  $k$  внешними линиями производную  $W_k$ . Точке соединения всех  $n$  линий в (204) сопоставляется вершина  $A_n$ , несущественные для дальнейшего числовые коэффициенты опущены.

При построении итерационного решения блоки  $W_k$  в правых частях (204) вычисляются по найденному ранее приближению  $W$ . Исходной точкой является нулевое приближение (203), в котором

$$W_1 = \delta W / \delta A_1 = \Delta A_1 = \text{---} ; \quad W_2 = \delta^2 W / \delta A_1^2 = \Delta = \text{---}$$

и  $W_k = 0$  для  $k \geq 3$ . Отбрасывая в (201) вклады  $W_k$  с  $k \geq 3$ , получаем  $H_3 = 3W_2W_1 + W_1^3$ ,  $H_4 = 3W_2^2 + 6W_2W_1^2 + W_1^4$ , и т. д. Подставляя эти величины в правые части (204), находим

$$A_3 \frac{\delta W}{\delta A_3} = \frac{1}{6} \text{Y} + \frac{1}{2} \text{O} ; \quad A_4 \frac{\delta W}{\delta A_4} = \frac{1}{24} \text{X} + \frac{1}{4} \text{R} + \frac{1}{8} \text{O} ; \quad (205)$$

и т. д. (обычно рассматриваются теории с  $A_n = 0$  для  $n > 4$ , так что из системы (204) остается только два уравнения). Определение функционалов  $A_n \delta W / \delta A_n$  равносильно определению  $W$ , поскольку соответствующие графики различаются лишь числовым коэффициентом — при графике  $A_n \delta W / \delta A_n$  имеется дополнительный множитель, равный числу вершин  $A_n$ . В частности, графики первого порядка (205) входят в  $W$  с такими же, как и в (205), коэффициентами.

На следующем шаге итерационной процедуры мы определим графики  $W$  второго порядка, и т. д. Зная  $W$ , мы можем затем найти функционал  $G = \exp W = \det \Delta^{1/2} \exp \tilde{W}$  (мы выделили из  $W$  слагаемое с  $\text{tr} \ln \Delta$ , которое не представляется графиком). Ясно, что в конечном итоге мы придем к тому же самому графическому представлению, которое можно получить прямо из (193) с помощью соотношения (167) и общей техники § 4. Поэтому мы не будем останавливаться на анализе графиков и обсудим только один вопрос — доказательство теоремы о связности логарифма, в данном случае функционала  $\tilde{W} = \ln G$ . В п. 4.8 мы доказывали эту теорему, опираясь на знание симметричных коэффициентов при графиках. Сейчас мы убедимся, что гораздо проще это сделать с помощью уравнений движения (204). Доказательство сводится к наблюдению, что уравнения обладают *свойством сохранения связности*, а именно: если все графики  $\tilde{W}$  вплоть до некоторого порядка являются связными, то получаемые при итерациях уравнений (204) графики следующего порядка также будут связными. Это очевидно из общей структуры правой части (204): входящие в нее блоки  $W_k$  являются кратными производными по  $A_1$  от связных по предположению графиков  $\tilde{W}$ , а дифференцирование по  $A_1$  не нарушает связности; присоединяя связные блоки  $W_k$  к вершине  $A_n$ , как показано в (204), мы получим, конечно, связный график. Тем самым по индукции доказывается связность всех графиков  $\tilde{W}$ .

Остается убедиться, что  $\tilde{W}$  содержит все связные графики, которые есть в  $\tilde{G}$ , и притом с теми же коэффициентами. Для этого напишем

$$\tilde{G} = \exp \tilde{W} = 1 + \tilde{W} + \tilde{W}^2/2 + \dots$$



и отберем затем связную часть этого равенства. По доказанному связная часть  $\widetilde{W}$  совпадает с самим  $\widetilde{W}$ , а все графики любой из степеней  $\widetilde{W}^n$ ,  $n > 1$ , несвязны (как произведения графиков на графики). Отсюда немедленно следует искомое утверждение:  $\widetilde{W}$  есть связная часть  $\widetilde{G}$ .

Этот способ доказательства обладает тем преимуществом, что он не требует знания симметричных коэффициентов при графиках и очевидным образом обобщается на любые теории с фермионами.

## § 8. 1-НЕПРИВОДИМЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

**1. Определения.** Рассмотрим функционал  $W(A) = \ln G(A)$ , где  $G(A)$  — интеграл (193). Производная

$$\delta W(A) / \delta A_1(x) \equiv \alpha_1(x) \quad (206)$$

имеет смысл первой связной функции Грина теории с действием (192). Равенство (206) выражает  $\alpha_1$  как функционал от всех потенциалов  $A$ .

Преобразованием Лежандра  $W$  по  $A_1$  называют функционал

$$\Gamma(\alpha_1, A'') = W(A) - \alpha_1 A_1, \quad (207)$$

где обозначено  $\alpha_1 A_1 = \int dx \alpha_1(x) A_1(x)$  и предполагается, что потенциал  $A_1$  в правой части равенства выражен как функционал от  $\alpha_1$  и  $A'' = \{A_n, n \neq 1\}$  с помощью уравнения (206).

Функционал (207) иногда называют эффективным действием, но мы предпочтем термин *первое преобразование Лежандра*, имея в виду *преобразование по первому потенциалу*. Более сложные преобразования рассматриваются в гл. VI.

Дифференцируя (207) по  $\alpha_1$  и учитывая (206), получаем равенство

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \alpha_1(x)} = \int dx' \frac{\delta W}{\delta A_1(x')} \frac{\delta A_1(x')}{\delta \alpha_1(x)} - \frac{\delta}{\delta \alpha_1(x)} (\alpha_1 A_1) = -A_1(x), \quad (208)$$

определяющее явно (при известном  $\Gamma$ ) потенциал  $A_1$  как функционал от  $\alpha_1$  и  $A''$  и неявно —  $\alpha_1$  как функционал от потенциалов  $A$ . Из уравнения (208) видно, что функционал

$$\Phi(\alpha_1, A) = \Gamma(\alpha_1, A'') + \alpha_1 A_1 \quad (209)$$

в точке  $\alpha_1(A) = \delta W(A) / \delta A_1$  стационарен по отношению к вариациям  $\alpha_1$  при фиксированных потенциалах  $A$ :

$$\delta \Phi(\alpha_1, A) / \delta \alpha_1 |_{\alpha_1(A)} = 0. \quad (210)$$

Ясно также, что значение  $\Phi$  в точке стационарности совпадает с  $W(A)$ .

Пользуясь соотношениями (206) и (208), получаем равенство

$$\begin{aligned} \delta(x-y) &= \frac{\delta A_1(x)}{\delta A_1(y)} = \int dz \frac{\delta A_1(x)}{\delta \alpha_1(z)} \cdot \frac{\delta \alpha_1(z)}{\delta A_1(y)} = \\ &= - \int dz \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \alpha_1(x) \delta \alpha_1(z)} \cdot \frac{\delta^2 W}{\delta A_1(z) \delta A_1(y)}, \end{aligned} \quad (211)$$

показывающее, что вторые производные  $\Gamma$  и  $W$  являются ядрами взаимно-обратных с точностью до знака операций. В дальнейшем соотношения типа (206), (208), (211) будут записываться сокращенно:

$$\frac{\delta W}{\delta A_1} = \alpha_1, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \alpha_1} = -A_1, \quad \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \alpha_1^2} \cdot \frac{\delta^2 W}{\delta A_1^2} = -1. \quad (212)$$

Кратные производные  $W_n \equiv \delta^n W / \delta A_1^n$  (аргументы  $x_1 \dots x_n$  подразумеваются) являются связными функциями Грина теории с действием (192). В терминах  $\Gamma$  первая связная функция  $W_1 = \alpha_1$  становится независимой переменной, а высшие связные функции  $W_n$ ,  $n > 1$ , можно представить в виде функционалов от  $\alpha_1$  и  $A''$ , воспользовавшись вытекающим из определения  $W_n$  рекуррентным соотношением  $\delta W_n / \delta A_1 = W_{n+1}$  и выразив входящий в него *повышающий оператор*  $\mathcal{D} \equiv \delta / \delta A_1$  в переменных  $\alpha_1, A''$ :

$$\mathcal{D} = \frac{\delta \alpha_1}{\delta A_1} \cdot \frac{\delta}{\delta \alpha_1} = \frac{\delta^2 W}{\delta A_1^2} \cdot \frac{\delta}{\delta \alpha_1} = - \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \alpha_1^2} \right)^{-1} \frac{\delta}{\delta \alpha_1} \quad (213)$$

(мы учли соотношения (212)). Для  $n \geq 1$  имеем

$$W_n = \mathcal{D}^{n-1} W_1 = \left[ - \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \alpha_1^2} \right)^{-1} \frac{\delta}{\delta \alpha_1} \right]^{n-1} \cdot \alpha_1. \quad (214)$$

Тем самым функции  $W_n$  выражаются в переменных  $\alpha_1, A''$ .

Кратные производные  $\delta^n \Gamma / \delta \alpha_1^n \equiv \Gamma_n$  (аргументы  $x_1 \dots x_n$  подразумеваются) называются *1-неприводимыми функциями Грина* (в переменных  $\alpha_1, A''$ ) теории с действием (192). Чтобы выразить эти функции в переменных  $A$ , нужно сделать замену  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_1(A)$ .

Соотношения (214) позволяют явно выразить связные функции  $W_n$  через 1-неприводимые функции  $\Gamma_n$ . При  $n=2$  соотношение (214) совпадает с (211) и служит для определения полного пропагатора  $D \equiv W_2 = -\Gamma_2^{-1}$ . При вычислении старших функций  $W_n$ ,  $n > 2$ , нужно пользоваться следующим правилом дифференцирования обратной операции:  $(L^{-1})' = -L^{-1}L'L^{-1}$ . С его помощью получим

$$\mathcal{D}[-\Gamma_2^{-1}] = \Gamma_3[-\Gamma_2^{-1}]^3 \equiv \text{штрихованный кружок} \quad (215)$$

Здесь и далее жирная линия обозначает полный пропагатор  $D = -\Gamma_2^{-1}$ , заштрихованный кружок, от которого отходит  $n \geq 3$



(201) функции  $H_n$ , которые теперь нужно выразить через  $\Gamma$  с помощью соотношений (206) и (213):

$$H_n = [\alpha_1 + \mathcal{D}]^n \cdot 1 = \left[ \alpha_1 - \Gamma_2^{-1} \frac{\delta}{\delta \alpha_1} \right]^{n-1} \cdot \alpha_1. \quad (220)$$

Отметим, что  $H_n$  содержит слагаемое  $\alpha_1^n$ .

Выразив потенциал  $A_1$  в уравнении Швингера (200) через  $\Gamma$  с помощью соотношения (208), получаем (напомним, что  $\Delta = -A_2^{-1}$ )

$$\delta \Gamma / \delta \alpha_1 = -\Delta^{-1} \alpha_1 + \sum_{n=3}^{\infty} [1/(n-1)!] A_n H_{n-1}. \quad (221)$$

В уравнения связи (199) помимо  $H_n$  входят частные производные  $W$  по потенциалам  $A_n$ ,  $n \neq 1$ . Чтобы выразить эти производные через  $\Gamma$ , продифференцируем равенство (207) по некоторому потенциалу  $A_n$  с  $n \neq 1$ , считая при этом  $\alpha_1$  независимой переменной, а  $A_1$  — функционалом от  $\alpha_1$  и остальных потенциалов  $A'' = \{A_n, n \neq 1\}$ :

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_n} = \frac{\delta W}{\delta A_n} + \frac{\delta W}{\delta A_1} \cdot \frac{\delta A_1}{\delta A_n} - \alpha_1 \frac{\delta A_1}{\delta A_n} = \frac{\delta W}{\delta A_n}. \quad (222)$$

В левой части равенства  $\delta/\delta A_n$  есть частная производная в переменных  $\alpha_1, A''$ , а в правой — в переменных  $A = \{A_1, A''\}$ . Равенство (222) позволяет переписать уравнения связи (199) в виде

$$\delta \Gamma / \delta A_n = H_n / n!, \quad n \neq 1. \quad (223)$$

Система (221), (223), вместе с (220) определяет функционал  $\Gamma$  с точностью до аддитивной постоянной.

**3. Итерационное решение уравнений, доказательство 1-неприводимости.** Систему (221), (223) можно итерировать, строя решение в виде степенного ряда по вершинам  $A_n$ ,  $n \geq 3$ . Для нулевого приближения из (220), (221), (223) получаем:  $\delta \Gamma / \delta \alpha_1 = -\Delta^{-1} \alpha_1$ ;  $\delta \Gamma / \delta A_0 = 1$ ;  $\delta \Gamma / \delta A_2 = (\alpha_1^2 - \Gamma_2^{-1})/2$ . Эта система легко решается (ср. с (203)):

$$\Gamma^{(0)} = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \Delta + A_0 - \frac{1}{2} \alpha_1 \Delta^{-1} \alpha_1, \quad (224)$$

где  $\Delta = -A_2^{-1}$ . Для определения разности  $\Gamma' \equiv \Gamma - \Gamma^{(0)}$  достаточно уравнений (223) с  $n \geq 3$ . Рассмотрим первые шаги итерационной процедуры на простом примере теории типа  $\varphi^3$  с единственной отличной от нуля вершиной  $A_3$ . Свернув для удобства уравнение (223) для  $n=3$  с  $A_3$ , имеем

$$A_3 \frac{\delta \Gamma'}{\delta A_3} = \frac{1}{6} A_3 H_3 = \frac{1}{6} \text{ (шарик) } + \frac{1}{2} \text{ (волна) } + \frac{1}{6} \text{ (шарик) } \dots \quad (225)$$

Здесь использованы графические обозначения предыдущего раздела: жирная линия — полный пропагатор  $D = -\Gamma_2^{-1}$ , заштрихованный кружок —  $\Gamma_3$ . Кроме того, введен „хвостик“  $\rightsquigarrow$  для обозначения переменной  $\alpha_1$ , а точка соединения трех линий или „хвостиков“ обозначает  $A_3$ .

В нулевом приближении из (224) находим:  $D = \Delta$ ,  $\Gamma_3 = 0$ . Подставив эти величины в правую часть (225), определяем гра-

фики  $\Gamma$  первого порядка:  $\Gamma \ni \frac{1}{6} \text{штрихованный кружок} + \frac{1}{7} \text{штрихованный кружок с хвостиком}$ . Линия в этих гра-

фиках обозначает затравочный пропагатор  $\Delta$ . При вычислении следующих порядков величину  $D$  следует представлять в виде ряда  $D = -\Gamma_2^{-1} = (\Delta^{-1} - \Gamma_2')^{-1} = \Delta + \Delta \Gamma_2' \Delta + \dots$ , где  $\Gamma_2' \equiv \delta^2 \Gamma' / \delta \alpha_1^2$ . Если сравнить это равенство с определением собственной энергии  $\Sigma = \Delta^{-1} - D^{-1}$ , видно, что  $\Gamma_2' = \Sigma$  в переменных  $\alpha_1, A''$ .

Вычислив  $D$  и  $\Gamma_3$  с учетом найденных ранее графиков первого порядка, нетрудно найти графики  $\Gamma$  второго порядка

$$\frac{1}{12} \text{штрихованный кружок} + \frac{1}{4} \text{штрихованный кружок с хвостиком}, \text{ и т. д.}$$

Все приведенные графики  $\Gamma$  являются *1-неприводимыми*, т. е. остаются связными при разрыве любой одной линии. Нетрудно понять, что в процессе итераций уравнения (225) *1-приводимые* графики вообще появиться не могут, поскольку это уравнение обладает свойством *сохранения 1-неприводимости*, подобно тому как уравнения (204) обладали свойством сохранения связности: если все графики  $\Gamma$  вплоть до некоторого порядка являются *1-неприводимыми*, то возникающие при итерациях (225) графики следующего порядка также будут *1-неприводимыми*. Причина проста: в аналогичных уравнениях (204) для  $W$  *1-приводимые* графики порождались при итерациях теми слагаемыми полиномов  $H_n$ , которые содержали множители  $W_1$ , изображавшиеся в (204) блоком, соединенным одной линией с вершиной  $A_n$ . При переходе к  $\Gamma$  весь блок  $W_1$  становится независимой переменной  $\alpha_1$  и перестает участвовать в итерациях. Это соображение справедливо для взаимодействия с любыми потенциалами  $A$ .

Доказав таким образом *1-неприводимость* всех графиков  $\Gamma$ , обсудим теперь вопрос о коэффициентах при этих графиках. Для этого перепишем определение (207), выделив из функционалов  $W$  и  $\Gamma$  соответствующие нулевые приближения (203), (224) ( $W = W^{(0)} + W'$ ,  $\Gamma = \Gamma^{(0)} + \Gamma'$ ):

$$-\frac{1}{2} \alpha_1 \Delta^{-1} \alpha_1 + \Gamma' = \frac{1}{2} A_1 \Delta A_1 + W' - \alpha_1 A_1. \quad (226)$$

Будем считать независимой переменной  $\alpha_1$ , тогда  $A_1$  — функционал от  $\alpha_1$ , определенный соотношением (208):

$$A_1 = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \alpha_1} = \Delta^{-1} \alpha_1 - \frac{\delta \Gamma'}{\delta \alpha_1} \equiv \Delta^{-1} \alpha_1 - \Gamma'_1. \quad (227)$$

Подставив  $A_1$  в таком виде в (226), получим

$$\Gamma' = \frac{1}{2} \Gamma'_1 \Delta \Gamma'_1 + W'. \quad (228)$$

Теперь возьмем 1-неприводимую (1-н.) часть этого равенства. Первое слагаемое в правой части состоит из двух блоков  $\Gamma'_1$ , соединенных одной линией  $\Delta$ , так что все эти графики 1-приводимы. Учитывая доказанную ранее 1-неприводимость  $\Gamma'_1$ , заключаем, что  $\Gamma'$  совпадает с 1-н. частью функционала  $W'$ , в котором переменная  $A_1$  выражена через  $\alpha_1$  посредством соотношения (227). Потенциал  $A_1$  входит в графики  $W'$  в виде вершины, к которой присоединяется одна линия  $\Delta$ . Ясно, что если при подстановке (227) мы учтем хотя бы один раз добавку  $\Gamma'_1$ , то полученный график окажется 1-приводимым, поскольку он будет содержать блок  $\Gamma'_1$ , соединенный одной линией с остальной частью графика. Отсюда

$$\Gamma'(\alpha_1, A'') = \text{1-н. часть } W'(A_1 = \Delta^{-1} \alpha_1, A''). \quad (229)$$

Доказанное утверждение делает излишним итерационное построение функционала  $\Gamma'$ : достаточно взять все графики  $W'$ , сделать в них замену  $A_1 = \Delta^{-1} \alpha_1$  и затем отбросить те из полученных таким образом графиков, которые окажутся 1-приводимыми. Полезно напомнить, что  $W'$  содержит все возможные связанные графики со стандартными симметричными коэффициентами.\*

Графики  $\Gamma$  можно классифицировать не по числу вершин, а по каким-нибудь другим признакам, например по числу петель. В беспетлевом приближении (приближение деревьев) в правой части (229) удерживаются лишь вклады графиков первого порядка по вершинам  $A_n$ ,  $n \geq 3$ . Вместе с нулевым приближением (224) это дает

$$\Gamma_{\text{дер}} = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \Delta + \sum_{n \neq 1} \frac{1}{n!} A_n \alpha_1^n. \quad (230)$$

При переходе к варьируемому функционалу (209) добавится линейный член  $A_1 \alpha_1$  и сумма по  $n$  сгруппируется в полное действие (192):

$$\Phi(\alpha_1, A)_{\text{дер}} = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \Delta + i S(\alpha_1). \quad (231)$$

\* Графики функционалов  $\Gamma$  и  $W$  в нескольких порядках приводятся в Приложении 2.

Это приближение для  $\Gamma$  соответствует ведущему члену приближения стационарной фазы (см. п. 6.6) в функциональном интеграле.

### § 9. РЕНОРМИРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Мы будем называть *ренормировочным* любое невырожденное линейное неоднородное преобразование оператора гайзенберговского поля  $\hat{\varphi}_\Gamma(x)$ :

$$\hat{\varphi}_\Gamma = Z \hat{\varphi}'_\Gamma + a, \quad \hat{\varphi}'_\Gamma = Z^{-1}(\hat{\varphi}_\Gamma - a), \quad (232)$$

где  $Z$  — линейная операция с  $\det Z \neq 0$  (чаще вместо  $Z$  пишут  $Z^{1/2}$ ),  $a(x)$  — параметр трансляции, подобный классическому полю  $\varphi(x)$ , т. е. обычная функция для бозонов и антикоммутирующая — для фермионов.

Цель этого раздела — вывод формул индуцированных (232) преобразований для различных функционалов. Исходной точкой является соотношение (58), определяющее функции Грина без вакуумных петель поля  $\hat{\varphi}_\Gamma$ . Заменяя в (58)  $\hat{\varphi}_\Gamma$  на  $\hat{\varphi}'_\Gamma$ , получаем функции Грина поля  $\hat{\varphi}'_\Gamma$ . Введя соответствующий производящий функционал

$$\sqrt{H'(A)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H'_n(iA)^n = (0 | T_D \exp i(\hat{\varphi}'_\Gamma A) | 0)$$

(мы вернулись к обозначениям п. 4.9) и выразив в нем  $\hat{\varphi}'_\Gamma$  через  $\hat{\varphi}_\Gamma$  с помощью (232), с учетом равенства  $Z^{-1}\hat{\varphi}'_\Gamma = \hat{\varphi}_\Gamma Z^{-1\Gamma}$  получаем

$$H'(A) = H(Z^{-1\Gamma}A) \exp[-iaZ^{-1\Gamma}A]. \quad (233)$$

Согласно (86) производящий функционал полных функций Грина  $G(A)$  отличается от  $H(A)$  множителем  $G_0$ , представляющим вакуумные петли. Положим по определению  $G'_0 = G_0$ ; тогда функционал  $G$  будет преобразовываться точно так же, как и  $H$ . Переходя к логарифму, находим закон преобразования производящего функционала связанных функций Грина:

$$W'(A) = W(Z^{-1\Gamma}A) - iaZ^{-1\Gamma}A. \quad (234)$$

Отсюда видно, что при сдвиге  $\hat{\varphi}'_\Gamma = \hat{\varphi}_\Gamma - a$  изменяется только первая связанная функция ( $W'_1 = W_1 - a$ ), тогда как все прочие  $W_n$ ,  $n \neq 1$ , остаются неизменными. При растяжении  $\hat{\varphi}'_\Gamma = Z^{-1}\hat{\varphi}_\Gamma$  любая из функций  $W_n$  получает множитель  $Z^{-1}$  на каждый аргумент  $x$ :  $W'_n = Z^{-n}W_n$  (см. замечание после формулы (131)). В частности, полный пропагатор  $D = W_2$  преобразуется по правилу  $D' = Z^{-2}D$ . Если понимать  $D$  как ядро линейной операции, то формулу преобразования следует записывать в матричном виде:  $D' = Z^{-1}DZ^{-1\Gamma}$ .

Исходя из определения (132) производящего функционала ампутированных функций Грина и известных законов преобразования связанных функций, легко получаем

$$W^{\text{ам}}(A) = W^{\text{ам}}(ZA) - iaD^{-1\tau}ZA. \quad (235)$$

Остается найти формулу преобразования производящего функционала 1-неприводимых функций. В обозначениях этого раздела определения (206), (207) принимают вид  $\Gamma(x) = W(A) - ixA$ ,  $ix = \delta W / \delta A$ . Закон преобразования  $\Gamma(x)$  нетрудно найти по известному закону преобразования  $W(A)$ . Мы приведем лишь результат, предоставив его доказательство читателю:

$$\Gamma'(x) = \Gamma(Zx + a). \quad (236)$$

Пользуясь полученными формулами, всякое уравнение в вариационных производных для любого из рассмотренных выше функционалов можно переписать в терминах преобразованного функционала.

В различных физических задачах ренормировочное преобразование (232) используется для перехода от исходного гайзенберговского поля  $\hat{\varphi}_r$  к *ренормированному полю*  $\hat{\varphi}'_r \equiv \hat{\varphi}_{\text{рен}}$ , удовлетворяющему некоторым добавочным требованиям, с помощью которых фиксируется вид преобразования (232). Если теория обладает некоторой симметрией (трансляционная, релятивистская или иная инвариантность), то обычно всегда требуется, чтобы ренормировочное преобразование не нарушало этой симметрии. Параметр сдвига  $a$  фиксируется обычно требованием  $W'_1 = \langle 0 | \hat{\varphi}_{\text{рен}} | 0 \rangle = 0$ , что при учете (234) дает  $a = \langle 0 | \hat{\varphi}_r | 0 \rangle = W_1$ ; операция растяжения  $Z$  фиксируется каким-либо условием, накладываемым на ренормированный пропагатор  $D_{\text{рен}} = Z^{-1}DZ^{-1\tau}$ . Для релятивистских взаимодействий перенормировка сопровождается перестройкой рядов теории возмущений и устранением ультрафиолетовых расходимостей [1], но эти вопросы выходят за рамки данной книги.

В заключение получим формулу ренормировочного преобразования для функционала действия. Исходной точкой будет представление (164): напишем  $G'(A) = c' \int D\varphi \exp i[S'(\varphi) + \varphi A]$  и будем искать преобразованный функционал действия  $S'(\varphi)$  и нормировочную постоянную  $c'$  по известному функционалу  $G'(A)$ . Из (164) и аналогичной (233) формулы преобразования для  $G$  получаем

$$G'(A) = c \int D\varphi \exp i[S(\varphi) + (\varphi - a)Z^{-1}A], \quad (237)$$

где  $c$  — постоянная, определенная соотношением (163). Сделав замену  $\varphi = Z\varphi' + a$  переменной интегрирования в (237), находим

$$G'(A) = c \det Z \int D\varphi \exp i[S(Z\varphi + a) + \varphi A].$$



Константа  $\det Z$  есть якобиан замены. Следовательно,

$$c' = c \det Z, \quad S'(\varphi) = S(Z\varphi + a). \quad (238)$$

Множитель  $\det Z$  можно, конечно, присоединить в виде аддитивной добавки к преобразованному действию  $S'$ , но мы предпочтем форму записи (238).

Итак, ренормировочное преобразование (232) гайзенберговского поля эквивалентно преобразованию (238) функционала действия, так что преобразованные (ренормированные) функции Грина можно вычислять по обычным правилам исходя из преобразованного должным образом функционала действия. Преобразование (238) на языке [1] соответствует введению контрчленов в лагранжиан.

### § 10. АНОМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА, СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ

До сих пор всегда считалось, что функции Грина однозначно определяются функционалом действия, и если бы ряды теории возмущений сходились, то так оно, конечно, и было бы. Имеется, однако, большой класс очень важных в практическом отношении задач (например, вся теория фазовых переходов в статистической физике), для которых ряды теории возмущений заведомо расходятся. Здесь можно было бы возразить, что исходное соотношение (58) определяет функции Грина однозначно и независимо от теории возмущений. Но это верно лишь тогда, когда все входящие в (58) величины математически корректны, а это далеко не всегда так. В интересующем нас сейчас случае речь идет, как правило, о трансляционно-инвариантных системах, рассматриваемых в бесконечном объеме, а для таких систем обычный операторный формализм квантовой теории не может быть вполне корректным хотя бы уже потому, что энергия основного состояния в силу трансляционной инвариантности должна быть пропорциональной объему системы, следовательно, бесконечной.

Поэтому возникает потребность дать новое определение функциям Грина. Это можно сделать, взяв за основу систему уравнений движения (194), (195) и сказав, что эти уравнения описывают динамику системы с заданным действием, а искомые функции Грина, точнее, их производящий функционал, есть по определению решение уравнений движения.\* Такое определение уже не предполагает однозначности функций Грина — решений может быть много.

Теории возмущений соответствует итерационное решение уравнений, которое называют *нормальным*; всякое другое решение, если оно существует, считается *аномальным*. Аномальное

\* Такой подход положен в основу определения функций Грина, например, в книге [19].

решение не может представляться степенным рядом по вершинам  $A_n$  (мы будем пользоваться обозначениями п. 7.3), поскольку уравнения движения определяют степенной ряд однозначно: это ряд обычной теории возмущений и никакой другой. Следовательно, всякое аномальное решение должно содержать „неаналитичность” по вершинам  $A_n$ ,  $n \geq 3$ .

Нормальное решение представляется функциональным интегралом (193) и инвариантно относительно всех преобразований потенциалов, индуцируемых группой движений поля; аномальное решение может не обладать этим свойством вследствие спонтанного нарушения симметрии (см. формулы (197), (198) и следующее за ними обсуждение). Спонтанное нарушение симметрии всегда сопровождается вырождением решения (термин „вырождение” понимается как „неединственность”): если  $G(A)$  — некоторое решение уравнений движения и  $A \rightarrow A^\varepsilon$  — некоторое преобразование потенциалов, индуцируемое элементом  $\varepsilon$  группы движений поля, то „сдвинутый функционал”  $G^\varepsilon(A) \equiv G(A^\varepsilon)$  также является решением уравнений движения. Это эквивалентно утверждению об инвариантности уравнений движения по отношению ко всем таким сдвигам: „решение переходит в решение”. Мы не будем сейчас останавливаться на доказательстве, поскольку все эти вопросы подробно обсуждаются в гл. VI.

Практическое построение аномальных решений представляется трудной задачей, если учесть, что единственным эффективным вычислительным методом в теории поля является теория возмущений, а нас интересует решение, не разлагающееся в ряд теории возмущений. Обычно в уравнениях движения делают какие-либо приближения, стремясь упростить эти уравнения до такой степени, чтобы их можно было решить точно. Поступая так, необходимо иметь уверенность, что сделанные приближения лишь упрощают задачу, но не искажают ее до неузнаваемости.

Более регулярным методом построения аномальных решений является вариационный, которому в сущности и посвящена вся гл. VI. Идея этого метода состоит в следующем: исходная задача решения уравнений движения сводится к вариационной путем конструирования такого функционала, для которого уравнения движения играют роль уравнений Эйлера, определяющих точку стационарности. На этом языке вырождение решения означает неединственность точки стационарности, а спонтанному нарушению симметрии отвечает такая ситуация, когда варьируемый функционал инвариантен по отношению к некоторой группе симметрии, но имеет неинвариантную (и потому обязательно вырожденную) точку стационарности.

С вычислительной точки зрения преимущество этого метода состоит в том, что варьируемый функционал можно строить по теории возмущений, не потеряв при этом возможности находить

аномальные решения. Это нетрудно понять: координаты точки стационарности аналитической по некоторым параметрам функции, например, полинома могут зависеть от этих параметров неаналитически.

Иллюстрацией этой общей идеи может послужить обсуждавшийся в п. 8.1 метод вычисления связных функций Грина  $W_n$  по известному функционалу  $\Gamma(\alpha_1, A'')$  (все обозначения такие же, как в п. 8.1). В этом методе первая связная функция  $W_1$  находится как точка стационарности функционала (209), 1-неприводимые функции Грина определяются значениями производных функционала (209) в точке стационарности, а связные функции  $W_n$  с  $n \geq 2$  строятся по простому правилу (214) из 1-неприводимых. При таком способе вычислений появляется возможность найти аномальное решение для  $W_1 = \alpha_1$  даже тогда, когда варьируемый функционал (209) взят в некотором конечном порядке теории возмущений. Наличие или отсутствие таких решений зависит, конечно, от явного вида варьируемого функционала, а он в свою очередь определяется функционалом действия. В конкретных вычислениях, например в модели Голдстоуна [20], варьируемый функционал строится в виде ряда по числу петель, а аномальное решение, если оно есть, появляется уже в самом низшем беспетлевом приближении (231).

На этом и остановимся, поскольку обсуждению спонтанного нарушения симметрии и вариационных методов посвящена отдельная гл. VI, а здесь мы хотели лишь определить соответствующие понятия и указать, что введенное в предыдущих разделах преобразование Лежандра имеет самое непосредственное отношение к проблеме спонтанного нарушения симметрии.

В заключение сделаем замечание, которое следует помнить, читая гл. IV и V. В этой главе все формулы писались применительно к обычной (псевдоевклидовой) квантовой теории поля, но сами по себе технические методы — диаграммные представления, функциональные интегралы, уравнения в вариационных производных — совершенно универсальны. Рассматривая в последующих главах евклидову теорию поля и статистическую физику, мы не будем считать себя обязанными каждый раз повторять стандартные построения этой главы. Обсуждаться будут лишь специфические особенности тех или иных представлений. Поэтому читатель должен ясно понимать и помнить следующее: *если для некоторого объекта, к какой-бы теории он ни относился, получено представление типа (84), то отсюда автоматически следует, что для него справедливы стандартные диаграммные представления § 4, представление в виде функционального интеграла, получаемое по формулам (166), (167), наконец, для него всегда можно написать уравнения в вариационных производных (уравнения Швингера) по стандартному рецепту (183)*. Все эти построения элементарны и мы на них, как правило, останавливаться не будем.

## ГЛАВА II. || КОНКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Три первых параграфа этой главы содержат краткие справочные сведения о различных полях и свертках, а три последних дополняют гл. I. Такое размещение материала объясняется тем, что в последних параграфах существенно используются сведения трех первых.

### § 1. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Изложенный в предыдущей главе полевой формализм вполне приложим и к обычной квантовой механике систем с конечным числом степеней свободы. Простейший пример — частица в заданном внешнем поле. Соответствующий классический лагранжиан имеет вид  $\mathcal{L} = m\dot{q}^2/2 - \mathcal{V}(q)$ , где  $q$  — координата частицы,  $\dot{q} \equiv dq/dt$  — скорость,  $\mathcal{V}$  — заданный потенциал.

В зависимости от вида потенциала в квантовой механике ставится либо задача о нахождении уровней энергии и соответствующих волновых функций, либо задача рассеяния. Обе можно решать с помощью полевых объектов: производящих функционалов  $S$ -матрицы и функций Грина.

С технической точки зрения существенно, каким образом полный лагранжиан  $\mathcal{L}$  разбивается на свободную часть  $\mathcal{L}_0$  и взаимодействие. Наибольшее сходство с традиционным аппаратом теории поля достигается тогда, когда в качестве  $\mathcal{L}_0$  берется осцилляторный лагранжиан, а остальная часть потенциала считается лагранжианом взаимодействия (ангармонический осциллятор). С физической точки зрения такое разбиение оправданно для задач с чисто дискретным спектром (надеяться на сходимость рядов теории возмущений можно лишь тогда, когда взаимодействие не приводит к качественному изменению спектра). Второй вариант разбиения, когда за  $\mathcal{L}_0$  берется только кинетический член  $m\dot{q}^2/2$ , удобен для задачи рассеяния.

Эти два случая мы рассмотрим отдельно.

**1. Осциллятор.** Классическое свободное действие для осциллятора с частотой  $\omega$  имеет вид

$$S_0(q) = (m/2) \int dt (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2), \quad (1)$$

а ядром соответствующей квадратичной формы (I.4) служит операция  $K = -m(\partial^2/\partial t^2 + \omega^2)$ . Действию (1) сопоставляется квантовый гамильтониан  $H_0 = \hat{p}^2/2m + m\omega^2 \hat{q}^2/2 = \omega(a^+ a + 1/2)$ , где  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$  — операторы координаты и импульса в шредингеровском представлении,  $a^+$  и  $a \equiv a^-$  — операторы рождения и уничтожения в том же представлении:

$$a^\pm = (\hat{q} \sqrt{\omega m} \mp i \hat{p} / \sqrt{\omega m}) / \sqrt{2}, \quad (2)$$

удовлетворяющие каноническому коммутационному соотношению  $[a, a^+] = 1$ .

Основным состоянием  $H_0$  является „вакуум“  $|0\rangle$ , определенный соотношением  $a|0\rangle = 0$ ; возбужденные („ $n$ -частичные“) состояния  $|n\rangle = (n!)^{-1/2} (a^+)^n |0\rangle$  в одномерной теории невырождены и имеют энергии  $\omega(n + 1/2)$ . Играющий роль свободного поля  $\hat{\varphi}(t) \equiv \hat{q}(t)$  оператор координаты в представлении взаимодействия имеет вид

$$\hat{\varphi}(t) = e^{iH_0 t} \hat{q} e^{-iH_0 t} = (ae^{-i\omega t} + a^+ e^{i\omega t}) / \sqrt{2\omega m}. \quad (3)$$

Нормальное произведение полей определяется обычными правилами п. I. 1.4, роль операторов  $\hat{a}(t)$  и  $\hat{b}(t)$  в разложении поля играют соответственно первое и второе слагаемые в правой части (3) (т. е.  $a^+$  — налево,  $a$  — направо). Определенные соотношениями (I.13), (I.29) простая и хронологическая свертки имеют следующий вид:

$$n(t, t') = (2\omega m)^{-1} \exp i\omega(t' - t), \quad (4)$$

$$\Delta(t, t') = (2\omega m)^{-1} [\theta(t - t') \exp i\omega(t' - t) + \theta(t' - t) \exp i\omega(t - t')]. \quad (5)$$

Свертка  $\Delta$  непрерывна при  $t = t'$ , так что соотношение (I.30) удовлетворяется автоматически. В энергетическом представлении

$$\Delta(t, t') = \frac{i}{2\pi m} \int dE \frac{\exp iE(t' - t)}{E^2 - \omega^2 + i0}, \quad (6)$$

откуда видно, что свертка  $\Delta$  действительно является функцией Грина для приведенной выше операции  $K$  в соответствии с общим правилом (I.31). Отметим также, что введенное нормальное произведение обладает свойствами (I.87) и (I.134).

Производящие функционалы  $S$ -матрицы и функций Грина для ангармонического осциллятора определяются обычными со-

отношениями п. I.3.5. Понятно, что для задачи с чисто дискретным спектром, который сдвигается при включении взаимодействия, оператор  $S$ -матрицы в строгом смысле слова не существует. В действительности нас интересуют сдвиги энергии уровней и точные волновые функции. Их можно находить с помощью асимптотических формул нестационарной теории возмущений для дискретного уровня (см. Приложение 1), используя представление (I.64) для оператора развития. В частности, сдвиг энергии основного состояния выражается согласно (I.74) через логарифм вакуумного ожидания  $S$ -матрицы, который в диаграммной теории возмущений представляется в виде суммы всех связанных вакуумных петель.

Отметим, что функции Грина поля в отличие от  $S$ -матрицы хорошо определены и с их помощью также можно находить точные энергии и точные волновые функции (первые — по положениям полюсов в спектральных представлениях, вторые — по вычетам в этих полюсах).

**2. Свободная частица.** В этом случае  $\mathbf{H}_0 = \hat{p}^2/2m$ , а свободное поле — оператор координаты в представлении взаимодействия — имеет вид

$$\hat{\varphi}(t) = e^{iH_0 t} \hat{q} e^{-iH_0 t} = \hat{q} + \hat{p}t/m. \quad (7)$$

Обычная полевая техника операторов рождения — уничтожения здесь непригодна и мы должны дать какое-либо иное определение нормального произведения. Это можно сделать по общим правилам п. I.1.4, взяв в качестве  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  в разложении  $\hat{\varphi}(t) = \hat{a}(t) + \hat{b}(t)$  первое и второе слагаемые в правой части (7) соответственно (т. е. импульсы — налево, координаты — направо). Это разбиение удовлетворяет, очевидно, всем нужным требованиям п. I.1.4, но принятый выбор, разумеется, не является единственно возможным.

По формулам (I.13), (I.29) находим свертки для данного  $N$ -произведения:

$$n(t, t') = [\hat{a}(t), \hat{b}(t')] = im^{-1}t', \quad (8)$$

$$\Delta(t, t') = im^{-1}[t'\theta(t-t') + t\theta(t'-t)]. \quad (9)$$

Они не являются, в отличие от (4), (5) функциями разности  $t-t'$ , потому что выбранные нами операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  смешиваются при развитии во времени.

Свертка  $\Delta$  непрерывна при  $t=t'$  и поэтому удовлетворяет автоматически условию (I.30). Операция  $K$  в свободном уравнении движения (I.2) имеет в нашем случае вид  $-m\partial^2/\partial t^2$ , и общее соотношение (I.31), как легко проверить, выполняется:  $K\Delta = i$ .

Обозначим  $|x\rangle$  и  $|k\rangle$  нормированные на  $\delta$ -функцию собственные состояния операторов координаты и импульса с соб-

ственными значениями  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{k}$  соответственно. Основным состоянием  $\mathbf{H}_0$  является плоская волна  $|\mathbf{k}\rangle$  с  $\mathbf{k}=0$ ; это состояние принадлежит сплошному, а не дискретному спектру, так что обычные определения функций Грина теряют смысл и эти объекты не следует рассматривать. Но это не мешает нам пользоваться техникой теоремы Вика для приведения различных операторов к  $N$ -форме и вычисления матричных элементов; в частности, оператор  $S$ -матрицы в  $N$ -форме определяется по общей формуле (I.64).

При вычислении матричных элементов удобнее иметь дело не с самим оператором поля  $\hat{\varphi}(t) \equiv \hat{q}(t)$ , а с экспонентой  $\exp i \hat{\varphi} A \equiv \exp i \int dt \hat{\varphi}(t) A(t)$ . Из определения  $N$ -произведения получаем

$$N \exp i \hat{\varphi} A = \exp(i \hat{p} \bar{t} \bar{A} / m) \exp(i \hat{q} \bar{A}), \quad (10)$$

где  $\bar{A} \equiv \int dt A(t)$  и  $\bar{t} \bar{A} \equiv \int dt t A(t)$ . Учитывая, что в координатном представлении  $\exp i \hat{q} c$  есть операция умножения, а  $\exp i \hat{p} c$  — операция сдвига на  $c$ , получаем

$$\langle \mathbf{k}_1 | N \exp i \hat{\varphi} A | \mathbf{k}_2 \rangle = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \bar{A}) \exp(i \mathbf{k}_1 \bar{t} \bar{A} / m), \quad (11)$$

$$\langle x_1 | N \exp i \hat{\varphi} A | x_2 \rangle = \delta(x_1 - x_2 + \bar{t} \bar{A} / m) \exp(i x_2 \bar{A}). \quad (12)$$

Эти формулы заменяют соотношение (I.87), которое для рассматриваемого нами  $N$ -произведения не выполняется (как и (I.134)).

При вычислении матричных элементов  $S$ -матрицы для рассеяния на потенциале  $\mathcal{V}$  последний удобно записать в виде интеграла Фурье:  $\mathcal{V}(q) = \int d\lambda \tilde{\mathcal{V}}(\lambda) \exp i \lambda q$ . Подставив в (I.64) функционал взаимодействия  $S_v(\varphi) = - \iint dt d\lambda \tilde{\mathcal{V}}(\lambda) \exp i \lambda \varphi(t)$ , приходим к следующему представлению для функционала  $S$ -матрицы в  $N$ -форме:

$$\begin{aligned} R(\varphi) &= \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta\varphi}\right) \exp i S_v(\varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int \Pi_i(\tilde{\mathcal{V}}(\lambda_i) d\lambda_i dt_i) \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{ks} \lambda_k \lambda_s \Delta(t_k, t_s) + \right. \\ &\quad \left. + i \sum_k \lambda_k \varphi(t_k)\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Для вычисления матричного элемента оператора  $S$ -матрицы  $U \equiv NR(\hat{\varphi})$  в импульсном представлении нужно пользоваться соотношением (11):

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{k}_1 | U | \mathbf{k}_2 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int \prod_i (\tilde{\mathcal{V}}(\lambda_i) d\lambda_i dt_i) \times \\
&\times \delta \left( \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \sum_s \lambda_s \right) \times \\
&\times \exp \left[ - (1/2) \sum_{ks} \lambda_k \lambda_s \Delta(t_k, t_s) + i(\mathbf{k}_1/m) \sum_k \lambda_k t_k \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

Взяв интегралы по  $t_1 \dots t_n$ , мы приходим к обычным резольвентным формулам теории возмущений.

Хотя, как уже говорилось, функции Грина для рассматриваемой теории не имеют смысла, формально можно вычислить их производящий функционал (I.86). Для свободной теории с помощью (11) получаем

$$G^{(0)}(A) \equiv \langle 0 | T \exp i \hat{\varphi} A | 0 \rangle = \delta(\bar{A}) \exp \left[ - \frac{1}{2} A \Delta A \right], \quad (15)$$

где  $|0\rangle$  — состояние  $|\mathbf{k}\rangle$  с  $\mathbf{k}=0$ . Для теории со взаимодействием нужно воспользоваться соотношением (I.90). Явная неаналитичность функционала (15) по аргументу  $A$  свидетельствует о невозможности корректного определения функций Грина.

В заключение выведем простую формулу, связывающую функционал  $S$ -матрицы на поверхности масс с матричными элементами оператора  $S$ -матрицы в импульсном представлении. Прежде всего вычислим с помощью (11) матричный элемент того же, что и в (15), оператора между состояниями с произвольными импульсами:

$$\langle \mathbf{k}_1 | T \exp i \hat{\varphi} A | \mathbf{k}_2 \rangle = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \bar{A}) \exp \left[ - A \Delta A / 2 + i \mathbf{v}_1 \bar{t} A \right] \quad (16)$$

(здесь и далее  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{k}'/m$ ). Представив  $\delta$ -функцию в (16) числовым интегралом Фурье, а множитель  $\exp[-A \Delta A / 2]$  — функциональным гауссовым интегралом (I.162), приведем правую часть (16) к виду

$$c(2\pi)^{-d} \int da \int_{\Delta} D\varphi \exp i [S'_0(\varphi) + \mathbf{a}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + A(\varphi + f)], \quad (17)$$

где  $d$  — размерность  $\mathbf{k}$ ,  $S'_0(\varphi) = \varphi K \varphi / 2$  — квадратичная форма свободного действия и  $f(t) = \mathbf{v}_1 t - \mathbf{a}$  — функция, принадлежащая поверхности масс (у нас  $\varphi K \varphi = -m \int dt \varphi \ddot{\varphi}$ , а поверхность масс есть множество всех линейных функций). Согласно (I.90), для перехода к матричному элементу  $S$ -матрицы  $U = T \exp i S_v(\hat{\varphi})$  нужно подействовать на (17) операцией  $\exp i S_v(\delta/\delta i A)$  и затем положить  $A=0$ . Этот прием оправдан, видимо, лишь для тех потенциалов, у которых классические траектории выходят (и достаточно быстро) на свободные асимптоты.



тотикн, что и будет предполагаться ниже (тем самым кулоновский потенциал исключается). После перехода к  $S$ -матрице форма  $A(\varphi + f)$  в (17) заменяется на  $S_v(\varphi + f)$ , интеграл по  $\varphi$  собирается в производящий функционал  $S$ -матрицы (I.168) и в итоге получаем:  $\langle \mathbf{k}_1 | \mathbf{U} | \mathbf{k}_2 \rangle = (2\pi)^{-d} \int da R(f) \exp ia(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ .

Если взаимодействие  $S_v(\varphi)$  не зависит явно от времени, то из матричного элемента должна выделяться энергетическая  $\delta$ -функция:  $\langle \mathbf{k}_1 | \mathbf{U} | \mathbf{k}_2 \rangle = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) - i2\pi\delta(E_1 - E_2) T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , где  $E \equiv \mathbf{k}^2/2m$ ,  $T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  — амплитуда рассеяния. Полученное выше представление матричного элемента неудобно для выделения  $\delta$ -функции, так как последняя связана с временными трансляциями, а функциональное пространство, по которому производится интегрирование в (17), не инвариантно по отношению к таким трансляциям (см. § 5).

Более удобно другое представление, полученное А. В. Кузьменко и автором (см. также [87]):

$$\langle \mathbf{k}_1 | \mathbf{U} | \mathbf{k}_2 \rangle = c \int_{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} D\varphi \exp iF(\varphi). \quad (18)$$

Пространство интегрирования  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  состоит из функций с асимптотиками  $\varphi_+(t) = \mathbf{v}_1 t + \mathbf{a}_1$ ,  $\varphi_-(t) = \mathbf{v}_2 t + \mathbf{a}_2$  (скорости  $\mathbf{v}_i = \mathbf{k}_i/m$  фиксированы, параметры  $\mathbf{a}_i$  произвольны), а  $F(\varphi) = S_0(\varphi) + S_v(\varphi) + (\mathbf{k}_2 \mathbf{a}_2 - \mathbf{k}_1 \mathbf{a}_1)/2$ . Для достаточно хорошо убывающих потенциалов функционал  $F(\varphi)$  конечен на функциях из пространства  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  и стационарен на классической траектории с заданными  $\mathbf{k}_{1,2}$  по отношению ко всем вариациям с  $\delta \mathbf{k}_1 = \delta \mathbf{k}_2 = 0$  (внеинтегральные члены вариации действия сокращаются вариацией добавки  $\mathbf{k}_2 \mathbf{a}_2 - \mathbf{k}_1 \mathbf{a}_1$ ). Нормировочная константа  $c$  в (18) будет определена ниже.

Для вывода представления (18) достаточно показать, что его правая часть для функционала  $F_A(\varphi) = S'_0(\varphi) + \varphi A + (\mathbf{k}_2 \mathbf{a}_2 - \mathbf{k}_1 \mathbf{a}_1)/2$  совпадает с правой частью (16). Прежде всего, выделим из интеграла (18) содержащуюся в (16)  $\delta$ -функцию. Для этого рассмотрим группу трансляций  $\varphi(t) \rightarrow \varphi_a(t) = \varphi(t) + \mathbf{a}$ , при которых, как легко проверить,  $F_A(\varphi_a) = F_A(\varphi) + \mathbf{a}[\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \bar{A}]$ , а пространство  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  переходит в себя. Выберем связь  $\Phi(\varphi) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$  и введем под знак интеграла (18) выражение  $2 \int da \delta[\Phi(\varphi_a)] = 2 \int da \delta[\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}] = 1$ . Сделав затем сдвиг  $\varphi \rightarrow \varphi_a$  переменной интегрирования, мы сможем взять явно интеграл по  $\mathbf{a}$ , который даст искомую  $\delta$ -функцию, и получим

$$2(2\pi)^{d\delta} [\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + A] c \int_{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} D\varphi \delta[\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2] \exp iF_A(\varphi).$$

Оставшийся интеграл берется с помощью замены  $\varphi(t) = \varphi'(t) + h(t) + \mathbf{v}_1 t + t\bar{A}/2$ , где  $h = i\Delta$ ,  $\Delta$  — свертка (9). Эта

замена меняет пространство интегрирования: зная асимптотики  $h_+(t) = -\overline{tA}/m$ ,  $h_-(t) = -tA/m$ , находим  $\varphi'_+(t) = \mathbf{a}_1 + \overline{tA}/m$ ,  $\varphi'_-(t) = \mathbf{a}_2 - \overline{tA}/m$  (при  $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \overline{A} = 0$ ). Нетрудно проверить (учитывая все внеинтегральные члены и равенства  $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 + \overline{A} = 0$ ,  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = 0$ ), что функционал  $F_A(\varphi)$  после замены принимает вид  $S'_0(\varphi') + i\mathbf{v}_1 \overline{tA} - \Delta A$  2. Два последних члена выносятся за знак интеграла и дают экспоненту в правой части (16), оставшийся интеграл не зависит ни от  $A$ , ни от импульсов  $\mathbf{k}_{1,2}$  и определяет нормировочную постоянную  $c$  в (18):

$$2c(2\pi)^d \int_{(00)} D\varphi \delta[\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2] \exp iS'_0(\varphi) = 1,$$

где (00) есть пространство  $(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)$  при  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = 0$ .

Итак, представление (18) доказано. Оно удобно тем, что пространство интегрирования задается параметрами, нумерующими квантовые асимптотические состояния, и инвариантно по отношению к временным трансляциям  $\varphi(t) \rightarrow \varphi_\tau(t) = \varphi(t + \tau)$ . Это позволяет при необходимости легко выделить из (18) все нужные  $\delta$ -функции. Первый член ряда теории возмущений для  $\exp iF(\varphi) = \exp i[F_0(\varphi) + S_\nu(\varphi)]$  порождает в правой части (18) слагаемое  $\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ , вклады остальных членов содержат лишь энергетическую  $\delta$ -функцию. Как уже говорилось, последняя связана с временными трансляциями, при которых  $\mathbf{a}_i \rightarrow \mathbf{a}_i + \mathbf{v}_i \tau$  и  $F(\varphi_\tau) = F(\varphi) + i\tau(E_2 - E_1)$  вследствие инвариантности действия. Выбрав, например, связь  $\Phi(\tau) = \mathbf{v}_1 \mathbf{a}_1$  (скалярное произведение векторов), вводим под знак интеграла единицу  $\mathbf{v}_1^2 \int d\tau \delta[\Phi(\varphi_{-\tau})] = \mathbf{v}_1^2 \int d\tau \delta(\mathbf{v}_1 \mathbf{a}_1 - \tau \mathbf{v}_1^2)$ . Сделав сдвиг  $\varphi \rightarrow \varphi_\tau$ , можно взять интеграл по  $\tau$ , который даст искомую  $\delta$ -функцию, и получить интегральное представление непосредственно для амплитуды рассеяния ( $\mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_2^2$ ):

$$T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = ic \mathbf{v}_1^2 \int_{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} D\varphi \delta(\mathbf{v}_1 \mathbf{a}_1) [\exp iF(\varphi) - \exp iF_0(\varphi)]. \quad (19)$$

Предварительное выделение  $\delta$ -функции необходимо, например, при вычислении амплитуды методом стационарной фазы (квазиклассическое приближение), так как наличие законов сохранения, выражающихся  $\delta$ -функциями, автоматически влечет вырождение ядра квадратичной формы второй вариации действия в окрестности классической траектории. Вырождение приводит к необратимости ядра и препятствует построению стандартной теории возмущений по степеням  $\hbar$  (разложение по числу петель). Аналогичные трудности встречаются в теории калибровочных полей (гл. III), откуда мы и заимствовали способ их преодоления посредством введения связи (см. формулу (III.6)). Связь снимает вырождение ядра и позволяет корректно

определить соответствующий пропагатор (обратное ядро) и детерминант, т. е. предэкспоненту в квазиклассическом приближении.

## § 2. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Нерелятивистская теория поля есть квантовая механика систем с произвольным числом тождественных частиц в формализме вторичного квантования. В классической теории такие системы описываются комплексным полем  $\psi$ ,  $\psi^+$ , которое является обычной или антикоммутирующей функцией в зависимости от статистики частиц, получающейся при квантовании. Последнее осуществляется с помощью обычных канонических перестановочных соотношений, а в фермионном случае — антиперестановочных соотношений.

Функционал действия свободной теории имеет следующий вид:

$$S_0(\psi^+, \psi) = \int dx \psi^+(x) \left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{E} \right] \psi(x) \equiv \psi^+ K \psi, \quad (20)$$

где  $x \equiv (t, \mathbf{x})$ ,  $\mathcal{E}$  — заданный *одночастичный гамильтониан* — линейный оператор, действующий только на аргумент  $\mathbf{x}$  и имеющий смысл обычного квантовомеханического гамильтониана для одной частицы рассматриваемой системы:  $\mathcal{E} = \hat{p}^2/2m + + \mathcal{V}(\mathbf{x}) - \mu$ . Первое слагаемое есть кинетическая энергия частицы, второе — потенциал внешнего поля (например, потенциал решетки для электронов в твердом теле), вводимая для удобства в качестве произвольного параметра постоянная  $\mu$  называется химическим потенциалом. Для бесспиновых частиц аргумент  $\mathbf{x}$  есть вектор пространства, на котором рассматривается поле, для частиц со спином  $\mathbf{x}$  включает и спиновый значок в соответствии с соглашениями п. I. 1.1.

Из (20) видно, что величина  $i\dot{\psi}^+$  является импульсом, канонически сопряженным с координатой  $\psi$ , т. е. в данном случае единое поле  $\varphi \equiv (\psi, \psi^+)$  представляет не обобщенные координаты, а все фазовое пространство — координаты и импульсы. Канонические перестановочные соотношения для операторов в шредингеровском представлении принимают вид  $\hat{\psi}(\mathbf{x})\hat{\psi}^+(\mathbf{x}') - - \mathbf{x}\hat{\psi}^+(\mathbf{x}')\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , где, как обычно,  $\mathbf{x} = \pm 1$  в зависимости от статистики. Если разложить классическое поле  $\psi(\mathbf{x})$  по полной ортонормированной системе  $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$  собственных функций оператора  $\mathcal{E}$ , то для коэффициентов разложения  $\psi(\mathbf{x}) = \sum_\alpha a_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{x})$ ,  $\psi^+(\mathbf{x}) = \sum_\alpha a_\alpha^+ \Phi_\alpha^*(\mathbf{x})$  получим при квантовании стандартные перестановочные соотношения операторов рождения — уничтожения:  $a_\alpha a_\beta - \mathbf{x} a_\beta a_\alpha = a_\alpha^+ a_\beta^+ - \mathbf{x} a_\beta^+ a_\alpha^+ = 0$ ,  $a_\alpha a_\beta^+ - \mathbf{x} a_\beta^+ a_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$ . Реализация  $a_\alpha$ ,  $a_\alpha^+$  операторами в фоков-

ском пространстве общеизвестна, и мы не будем на ней останавливаться.

Соответствующий действию (20) гамильтониан имеет вид

$$\mathbf{H}_0 = \int d\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \mathcal{E} \hat{\psi}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} a_{\alpha}^+ a_{\alpha}, \quad (21)$$

где  $\varepsilon_{\alpha}$  — собственные значения  $\mathcal{E}$  на  $\Phi_{\alpha}$ :  $\mathcal{E}\Phi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}\Phi_{\alpha}$ . Для дискретного уровня  $\alpha$  оператор числа частиц  $a_{\alpha}^+ a_{\alpha}$  в состоянии  $\alpha$  имеет лишь два собственных значения 0 и 1 в случае фермионного поля, а в случае бозонного поля его собственным значением может быть любое целое неотрицательное число. Для сплошного спектра  $a_{\alpha}^+ a_{\alpha}$  имеет смысл оператора плотности числа частиц в состоянии  $\alpha$ .

Если поле бозонное, то всегда предполагается неотрицательность всех одночастичных энергий  $\varepsilon_{\alpha}$ . В противном случае гамильтониан (21) будет существенно неограниченным снизу, что физически соответствует неустойчивости системы относительно конденсации бесконечно большого числа частиц на уровнях с отрицательными энергиями. Если нет дискретных уровней с  $\varepsilon = 0$ , то основным состоянием  $\mathbf{H}_0$  для бозонного поля будет фоковский вакуум  $|0a\rangle$ , для которого  $a_{\alpha}|0a\rangle = 0$ . Если же дискретные уровни с  $\varepsilon = 0$  имеются, то основное состояние  $\mathbf{H}_0$  бесконечнократно вырождено.

В фермионном случае система устойчива и при наличии уровней с отрицательными  $\varepsilon_{\alpha}$ . Если нет дискретных уровней с  $\varepsilon = 0$ , то основным состоянием  $\mathbf{H}_0$  будет то, в котором все уровни с отрицательными энергиями заполнены, а все уровни с положительными энергиями свободны. Если есть дискретные уровни с  $\varepsilon = 0$ , то основное состояние  $\mathbf{H}_0$  вырождено с кратностью  $2^n$ , где  $n$  — число состояний с нулевыми  $\varepsilon$ .

В представлении взаимодействия  $a_{\alpha}^{\pm}(t) = a_{\alpha}^{\pm} \exp(\pm i\varepsilon_{\alpha}t)$ , где  $a_{\alpha}^{-} \equiv a_{\alpha}$ , а операторы свободного поля принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \sum_{\alpha} a_{\alpha} \Phi_{\alpha}(x) \exp(-i\varepsilon_{\alpha}t), \\ \hat{\psi}^{\dagger}(x) &= \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} \Phi_{\alpha}^*(x) \exp(i\varepsilon_{\alpha}t), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $x \equiv t, x$ .

Для ферми-частиц часто делается каноническое преобразование „частица — дырка“, при котором множество всех уровней  $\alpha$  разбивается на две группы 1, 2 и вводятся операторы  $b_{\alpha}$ ,  $b_{\alpha}^{\dagger}$  [21]:

$$b_{\alpha} = a_{\alpha}, \quad b_{\alpha}^{\dagger} = a_{\alpha}^{\dagger} \quad \text{для } \alpha \in 1; \quad b_{\alpha} = a_{\alpha}^{\dagger}, \quad b_{\alpha}^{\dagger} = a_{\alpha} \quad \text{для } \alpha \in 2. \quad (23)$$

Обычно разбиение осуществляется в соответствии со знаком энергии:  $\alpha \in 1$ , если  $\varepsilon_{\alpha} \geq 0$ , и  $\alpha \in 2$ , если  $\varepsilon_{\alpha} < 0$ . Но это не обязательно: преобразование (23) является каноническим (только для фермионов) при любом разбиении на множества 1 и 2.

Разложение (22) для  $\hat{\psi}$  можно переписать следующим образом:

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{\alpha} [\chi_1(\alpha) b_{\alpha} + \chi_2(\alpha) b_{\alpha}^+] \Phi_{\alpha}(x) \exp(-i\varepsilon_{\alpha}t), \quad (24)$$

где  $\chi_{1,2}$  — характеристические функции множеств 1, 2 соответственно:  $\chi_1(\alpha) = 1$ , если  $\alpha \in 1$ , и  $\chi_1(\alpha) = 0$ , если  $\alpha \in 2$ , и аналогично для  $\chi_2$ .

Нормальное произведение операторов свободного поля определяется по общим правилам п. I. 1.4, причем роль  $\hat{a}(t)$  и  $\hat{b}(t)$  играют вклады всех операторов уничтожения и рождения соответственно. Для фермионов возможны разные  $N$ -произведения;  $N_a$  и  $N_b$ . Мы будем приводить формулы для более общего  $N_b$ -произведения, считая разбиение на множества 1 и 2 произвольным. В частном случае  $N_a$ -произведения множество 2 пусто.

Считая, как обычно,  $\psi$  и  $\psi^+$  соответственно первой и второй компонентами единого поля  $\varphi \equiv (\psi, \psi^+)$ , для матрицы простых свертков (I.16) получаем  $n_{11}^b = n_{22}^b = 0$  и

$$\begin{aligned} n_{12}^b(x, x') &\equiv \hat{\psi}(x)\hat{\psi}^+(x') - N_b [\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^+(x')] = \\ &= \sum_{\alpha} \chi_1(\alpha) \Phi_{\alpha}(x) \Phi_{\alpha}^*(x') \exp i\varepsilon_{\alpha}(t' - t), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} n_{21}^b(x, x') &\equiv \hat{\psi}^+(x)\hat{\psi}(x') - N_b [\hat{\psi}^+(x)\hat{\psi}(x')] = \\ &= \sum_{\alpha} \chi_2(\alpha) \Phi_{\alpha}^*(x) \Phi_{\alpha}(x') \exp i\varepsilon_{\alpha}(t - t'), \end{aligned}$$

а для хронологических согласно (I.29) находим  $\Delta_{11}^b = \Delta_{22}^b = 0$  и

$$\Delta_{12}^b(x, x') = \sum_{\alpha} [\chi_1\theta_{t't'} + \chi_2\theta_{t't}] \Phi_{\alpha}(x) \Phi_{\alpha}^*(x') \exp i\varepsilon_{\alpha}(t' - t),$$

$$\Delta_{21}^b(x, x') = \sum_{\alpha} [\chi_2\theta_{t't'} + \chi_1\theta_{t't}] \Phi_{\alpha}^*(x) \Phi_{\alpha}(x') \exp i\varepsilon_{\alpha}(t - t'). \quad (26)$$

Для сокращения записи опущен аргумент  $\alpha$  у  $\chi_{1,2}$  и обозначено  $\theta(t - t') \equiv \theta_{t't'}$ . Симметричность матрицы  $\Delta$  выражается равенством  $\Delta_{21} = \kappa \Delta_{12}^T$ .

В энергетическом представлении

$$\begin{aligned} \Delta_{12}^b(x, x') &= \frac{i}{2\pi} \int dE \sum_{\alpha} \left[ \frac{\chi_1}{E - \varepsilon_{\alpha} + i0} - \frac{\chi_2}{E - \varepsilon_{\alpha} - i0} \right] \times \\ &\quad \times \Phi_{\alpha}(x) \Phi_{\alpha}^*(x') \exp iE(t' - t), \\ \Delta_{21}^b(x, x') &= \frac{i}{2\pi} \int dE \sum_{\alpha} \left[ \frac{\chi_2}{E + \varepsilon_{\alpha} + i0} - \frac{\chi_1}{E + \varepsilon_{\alpha} - i0} \right] \times \\ &\quad \times \Phi_{\alpha}^*(x) \Phi_{\alpha}(x') \exp iE(t' - t). \end{aligned} \quad (27)$$

В (27) можно положить  $\kappa = -1$ , поскольку  $\kappa$  входит только в комбинации  $\kappa \chi_2$ , а  $\chi_2$  может быть отличным от нуля лишь для фермионного поля. Положив в (27)  $\kappa = -1$ , видим, что способ разбиения на множества 1 и 2 отражается только в знаках добавок  $\pm i0$  в энергетических знаменателях.

Соотношение (I.31) принимает теперь матричную форму (I.109), роль  $K$  в (I.109) играет в нашем случае ядро свободного действия (20), т. е.  $K = i\partial_t \partial_t - \mathcal{E}$ . Согласно (I.109)  $\Delta_{12}^b = iK^{-1}$ ; в фермионном случае разным вариантам разбиения на множества 1 и 2, приводящим к разным  $\Delta_{12}^b$ , соответствует разный выбор функции Грина  $K^{-1}$ .

Свертки  $\Delta$  имеют разрыв при  $t = t'$  и доопределяются обычным правилом (I.30) в матричной форме.

Рассматриваемое нормальное произведение обладает свойством (I.134), а равенство (I.87) для  $N_b$ -произведения справедливо для состояния  $|0b\rangle \equiv \prod_2 a_{\alpha+} |0a\rangle$ , в котором все уровни группы 2 заполнены, а уровни группы 1 свободны:  $b_{\alpha} |0b\rangle = 0$  для любого  $\alpha$ . Для  $N_{\alpha}$ -произведения равенство (I.87) справедливо для фоковского вакуума  $|0a\rangle$ .

Ниже мы несколько детализируем это общее рассмотрение.

**1. Квантовый бозе- или ферми-газ.** В этом случае в одночастичном гамильтониане отсутствует слагаемое с потенциалом:  $\mathcal{E} = \mathbf{p}^2/2m - \mu$ . Собственные функции  $\mathcal{E}$  — плоские волны — нумеруются импульсом  $\mathbf{p}$  и спиновым значком  $s$ , если частицы имеют спин:  $\Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} e_s \exp i \mathbf{p} \mathbf{x}$ , где  $d$  — размерность пространства,  $e_s$  — полная ортонормированная система спиновых состояний. Для бозонного поля условие положительности  $\epsilon(\mathbf{p}) \equiv \mathbf{p}^2/2m - \mu$  требует  $\mu \leq 0$ , для фермионного поля допустим любой знак  $\mu$ . При  $\mu > 0$  основным состоянием  $\mathbf{H}_0$  является то, в котором все уровни с  $\mathbf{p}^2/2m < \mu$  заполнены, а уровни с  $\mathbf{p}^2/2m > \mu$  свободны, т. е.  $\mu$  имеет смысл энергии Ферми.

Если разбиение на множества 1 и 2 производится в соответствии со знаком  $\epsilon(\mathbf{p})$ , то свертка  $\Delta_{12}^b$  в (27) принимает следующий вид:

$$\Delta_{12}^b(x, x') = \frac{i\delta_{ss'}}{(2\pi)^{d+1}} \int dE \int d\mathbf{p} \frac{\exp i[E(t' - t) - \mathbf{p}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})]}{E - \epsilon(\mathbf{p}) + i0 \cdot \text{Sgn } \epsilon(\mathbf{p})}, \quad (28)$$

где  $\text{Sgn } \epsilon(\mathbf{p}) \equiv \pm 1$  в соответствии со знаком  $\epsilon(\mathbf{p})$ ,  $x \equiv t, \mathbf{x}, s$ .

Для таких систем обычно рассматривается парное взаимодействие, гамильтониан которого в шредингеровском представлении имеет вид

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \int \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{x}) \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{x}') \mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{\psi}(\mathbf{x}') \hat{\psi}(\mathbf{x}), \quad (29)$$

где  $\mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  — симметричный потенциал парного взаимодействия. Оператор (29) записан в  $N_{\alpha}$ -форме, а соответствующий

ему классический функционал взаимодействия (I.59) представляется, как указывалось в п. I.3.2, сум-форму оператора —  $\int dt \mathbf{V}(t)$ , которую легко найти с помощью (I.45), исходя из известной  $N_a$ -формы того же оператора. Отметим, что из (I.45) вытекает следующее правило перехода от  $N_a$ -формы к  $N_b$ -форме:

$$N_a F(\hat{\varphi}) = N_b \left\{ \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \varphi} (n^b - n^a) \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] F(\varphi) \right\} \Big|_{\varphi = \hat{\varphi}}. \quad (30)$$

Здесь  $\varphi \equiv (\psi, \psi^+)$ ,  $n^a$  и  $n^b$  — соответствующие матрицы сверток (25). Если работать с  $N_b$ -произведением, то роль приведенной производящей вершины (см. п. I. 4.1) в диаграммах теории возмущений будет играть  $N_b$ -форма оператора  $-i \int dt \mathbf{V}(t)$ . Главный член функционала взаимодействия имеет вид (I. 116) и может быть сведен, как было показано в п. I. 4.7, к взаимодействию типа Юкавы.

**2. Атом.** Это система с любым числом электронов, находящихся в кулоновском поле ядра:  $\mathcal{E} = \hat{p}^2/2m + v(x)$ ,  $\Phi_\alpha(x)$  — волновые функции электрона в кулоновском поле,  $\epsilon_\alpha$  — соответствующие энергии. Индекс  $\alpha$  пробегает как дискретный, так и сплошной спектр. Дискретные уровни энергии вырождены, совокупность всех состояний с одинаковой энергией называют оболочкой.

Важной задачей является определение энергии основного и возбужденных состояний атома с заданным числом электронов, взаимодействующих между собой посредством парного кулоновского взаимодействия (29).

Эту задачу можно решать методами теории поля исходя из формулы (I.74), которая справедлива для любого невырожденного собственного состояния свободного гамильтониана. Для оператора (21) невырожденными будут только такие состояния, в которых часть оболочек полностью заполнена, а остальные полностью свободны. Если хотя бы одна оболочка заполнена лишь частично, то соответствующий уровень  $\mathbf{H}_0$  заведомо вырожден, так как энергия не меняется при изменении способа размещения электронов в частично заполненной оболочке.

Для состояния  $|0b\rangle$  с полностью заполненными оболочками можно ввести соответствующее  $N_b$ -произведение и стандартным образом представить входящий в (I.74) логарифм ожидания  $S$ -матрицы в виде суммы связанных вакуумных петель. Не вдаваясь в подробности, отметим, что энергии состояний, отличающихся на одну частицу или дырку от состояния  $|0b\rangle$  с полностью заполненными оболочками, можно найти из спектрального представления функции Грина  $\langle 0b | T_D [\hat{\psi}_r(x) \hat{\psi}_r^+(x')] | 0b \rangle$ , где  $|0b\rangle$  — собственное состояние полного гамильтониана, переходящее в  $|0b\rangle$  при выключении взаимодействия между электронами. Эту функцию Грина можно вычислять стандартными

диаграммными методами исходя из соотношения (I.73), которое справедливо для любого невырожденного состояния.

Для кулоновского поля условие невырожденности является существенным ограничением, так как кратность вырождения очень высока. Нужно, однако, сказать, что на практике энергии уровней вычисляют обычно не с помощью обычной теории возмущений по межэлектронному взаимодействию, а методом самосогласованного поля Хартри — Фока [22, 23], о котором будет немного сказано в п. VI.2.7. Формулы нестационарной теории возмущений для вырожденного уровня, обобщающие соотношение (I.74), выводятся в Приложении I.

**3. Электроны в твердом теле, фононы.** В этом случае  $\mathcal{E} = \hat{p}^2/2m + \mathcal{V} - \mu$ , где  $\mathcal{V}$  — периодический потенциал решетки;  $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$  — волновые функции электронов в заданном периодическом поле;  $E_\alpha$  — соответствующие энергии (как известно, образующие зоны),  $\varepsilon_\alpha = E_\alpha - \mu$ . В основном состоянии  $\mathbf{H}_0$  все уровни с  $E_\alpha < \mu$  ( $\mu$  — энергия Ферми) заполнены, должным выбором  $\mu$  можно получить любую наперед заданную концентрацию электронов. В простых моделях часто пренебрегают потенциалом решетки и рассматривают электроны проводимости как свободный газ.

Помимо кулоновского парного взаимодействия (29) между электронами важную роль в твердом теле играет взаимодействие электронов с колебаниями решетки — фононами. Его гамильтониан в шредингеровском представлении пишут [21] в виде  $\mathbf{V} = g \int d\mathbf{x} \sum_s \hat{\psi}_s^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}_s(\mathbf{x}) \hat{\varphi}(\mathbf{x})$ . В этой формуле  $\mathbf{x}$  обозначает только пространственную координату,  $s$  — спиновый индекс,  $g$  — константа связи,  $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$  — эрмитов оператор фононного поля. В представлении взаимодействия

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int d\mathbf{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{2}} [a^+(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) + a(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})], \quad (31)$$

где  $x \equiv (t, \mathbf{x})$ ;  $d$  — размерность пространства  $\mathbf{x}$ ;  $kx \equiv \varepsilon_k t - \mathbf{k}\mathbf{x}$ ;  $\varepsilon_k = \lambda |\mathbf{k}|$ ; константа  $\lambda$  — скорость звука;  $a^+(\mathbf{k})$  и  $a(\mathbf{k})$  — бозонные операторы рождения и уничтожения фонона с импульсом  $\mathbf{k}$ . Поле  $\varphi(x)$  имеет смысл плотности связанного заряда, которая пропорциональна дивергенции векторного поля деформаций решетки. Из трех акустических ветвей поля деформаций вклад в дивергенцию дает лишь продольная. Приведенный выше гамильтониан  $\mathbf{V}$  моделирует сильно экранированное кулоновское взаимодействие электронов со связанным зарядом, возникающим при деформациях решетки.

Нормальное произведение полей (31) определяется обычным разбиением на операторы рождения и уничтожения и обладает свойствами (I.87), (I.134). Соответствующие свертки определя-



ются общими правилами (I.13) и (I.29). Мы приведем лишь хронологическую:

$$\Delta(x, x') = i(2\pi)^{-d-1} \iint dE d\mathbf{k} \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 \exp i[E(t' - t) - \mathbf{k}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})]}{E^2 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + i0}. \quad (32)$$

Электрон-фоонное взаимодействие является частным случаем взаимодействия Юкавы, диаграммная техника которого рассматривалась в п. I.4.6.

### § 3. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Квантование релятивистски-ковариантных полей подробно излагается в [1], так что мы ограничимся лишь перечислением соответствующих свободных систем с указанием функционала действия и свертков. Нормальное произведение для всех релятивистских полей определяется обычным образом через операторы рождения — уничтожения и обладает свойствами (I.87), (I.134), причем состояние  $|0\rangle$  в (I.87) всегда является фоковским вакуумом и одновременно основным состоянием свободного гамльтониана. Явный вид разложений полей по операторам рождения — уничтожения нам не понадобится и мы приводить их не будем.

В этом параграфе используются обычные для релятивистских теорий обозначения:  $x \equiv \{x^\alpha, \alpha = 0, 1, 2, 3\}$ ,  $x^0 \equiv t$ ,  $\{x^i, i = 1, 2, 3\} \equiv \mathbf{x}$ . По повторяющемуся греческому индексу подразумевается суммирование от 0 до 3, по повторяющемуся латинскому индексу — от 1 до 3. Метрический тензор  $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$  определен равенствами  $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = -1$ ,  $g_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ; тензор  $g_{\alpha\lambda} g^{\lambda\beta} = g_{\alpha}^{\beta}$  есть символ Кронекера. Ковариантный вектор  $B_\alpha$  строится из контравариантного вектора  $B^\alpha$  по правилу  $B_\alpha = g_{\alpha\beta} B^\beta$ ; инвариантное скалярное произведение  $x_\alpha y^\alpha = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = x^0 y^0 - \mathbf{x}\mathbf{y}$  обозначается  $x\mathbf{y}$ . Наконец,  $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x^\alpha$  и  $\int dx \dots \equiv \int dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \dots$ , интегрирование по каждой  $x^\alpha$  производится от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Простейшей релятивистски-инвариантной системой является вещественное скалярное поле  $\varphi(x)$ , для которого

$$S_0(\varphi) = \frac{1}{2} \int dx [\partial_\alpha \varphi(x) \partial^\alpha \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x)], \quad (33)$$

а ядром соответствующей квадратичной формы (I.4) является оператор Клейна — Гордона  $K = -\partial_\alpha \partial^\alpha - m^2 \equiv -\square - m^2$ . Свертки поля имеют вид

$$n(x, x') = (2\pi)^{-3} \int dp \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \exp ip(x' - x), \quad (34)$$

$$\Delta(x, x') = i(2\pi)^{-4} \int dp \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} \exp i p(x' - x), \quad (35)$$

где  $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2$  в соответствии с договоренностью. Свертки явно трансляционно-инвариантны, т. е. зависят лишь от разности  $y \equiv x - x'$ . В отличие от квантовой механики и нерелятивистской теории выражения (34), (35) не обычные, а обобщенные функции, имеющие сингулярности на поверхности  $y^2 = 0$  (на световом конусе). Наиболее сильная сингулярность находится в точке  $y = 0$ .

Полезны следующие представления сверток:

$$\Delta(x, x') = d(y^2) + if(y^2), \quad n(x, x') = d(y^2) + i\varepsilon(y_0)f(y^2), \quad (36)$$

где  $y \equiv x - x'$ ;  $d$  и  $f$  — вещественные обобщенные функции переменной  $y^2$ ;  $\varepsilon(y_0) = \theta(y_0) - \theta(-y_0)$  — знаковая функция. Функция  $f$  отлична от нуля лишь внутри световых конусов, т. е. в области  $y^2 \geq 0$ . Представление (36) для  $n$  является формальным, поскольку  $f$  сингулярна на поверхности  $y^2 = 0$ , имеющей общую точку  $y = 0$  с плоскостью  $y_0 = 0$ , где  $\varepsilon$  терпит скачок. Вполне корректными представления (36) становятся лишь после регуляризации, о которой будет сказано ниже.

Для комплексного скалярного поля  $\varphi$ ,  $\varphi^+$  свободное действие  $S_0(\varphi, \varphi^+)$  пишется в виде  $\int dx [\partial_\alpha \varphi^+(x) \partial^\alpha \varphi(x) - m^2 \varphi^+(x) \varphi(x)]$ . Свертки  $\varphi$  с  $\varphi^+$ , равно как и  $\varphi^+$  с  $\varphi$ , совпадают со свертками (34), (35) вещественного поля.

Для вещественного векторного поля  $B^\alpha(x)$

$$S_0(B) = -\frac{1}{4} \int dx [F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(x) + 2m^2 B_\alpha(x) B^\alpha(x)], \quad (37)$$

где  $F_{\alpha\beta}(x) \equiv \partial_\alpha B_\beta(x) - \partial_\beta B_\alpha(x)$ , а форма (1.4) имеет вид  $B^\alpha K_{\alpha\beta} B^\beta / 2$  с ядром

$$K_{\alpha\beta} = (\square + m^2) g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta. \quad (38)$$

Соответствующие уравнения движения эквивалентны системе  $(\square + m^2) B^\alpha = 0$ ,  $m^2 \partial_\alpha B^\alpha = 0$ . Из последнего уравнения видно, что для массивного поля всякое решение является четырехмерно-поперечным:  $\partial_\alpha B^\alpha = 0$ .

Свертки поля  $B^\alpha(x)$  имеют вид

$$n^{\alpha\beta}(x, x') = \mathcal{D}_x^{\alpha\beta} n(x, x'), \quad \Delta^{\alpha\beta}(x, x') = \mathcal{D}_x^{\alpha\beta} \Delta(x, x'), \quad (39)$$

где  $n$  и  $\Delta$  — свертки (34), (35), а  $\mathcal{D}$  — дифференциальный оператор:

$$\mathcal{D}_x^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} - m^{-2} \partial^\alpha \partial^\beta. \quad (40)$$

Отметим, что общее соотношение (1.31) в данном случае имеет ковариантную форму:  $K_{\alpha\lambda} \Delta^{\lambda\beta} = i g_\alpha^\beta$ . Оно не допускает перехода к случаю безмассового поля, так как операция  $K_{\alpha\beta}$  становится тогда существенно вырожденной: при  $m = 0$  имеем  $K_{\alpha\beta} \partial^\beta \varphi = 0$  для любой функции  $\varphi(x)$ . Безмассовое векторное поле рассматривается в следующей главе.

Скалярное и векторное поля являются бозонными и описывают (после квантования) частицы со спином 0 и 1 соответственно. Частицы со спином  $1/2$  описываются фермионным дираковским полем, т. е. четырехкомпонентным комплексным спинорным полем  $\psi \equiv \psi_1, \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \equiv \psi_2$  ( $\gamma^0$  — одна из матриц Дирака  $\gamma^\alpha$ , действующих на спиновые индексы поля). Свободное действие имеет вид

$$S_0(\psi_1, \psi_2) = \int dx \psi_2(x) [i\gamma^\alpha \partial_\alpha - m] \psi_1(x), \quad (41)$$

а отличные от нуля элементы матриц свертки единого поля  $(\psi_1, \psi_2) \equiv (\psi, \bar{\psi})$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} n_{12}(x, x') &= \mathcal{D}_x n(x, x'), \quad n_{21}(x, x') = -\mathcal{D}_x n(x, x'), \\ \Delta_{12}(x, x') &= \mathcal{D}_x \Delta(x, x'), \quad \Delta_{21}(x, x') = -\mathcal{D}_x \Delta(x, x'), \end{aligned} \quad (42)$$

в которых  $n$  и  $\Delta$  — свертки (34), (35), и  $\mathcal{D}_x \equiv i\gamma^\alpha \partial / \partial x^\alpha + m$ .

В заключение сделаем замечание относительно регуляризации. Как уже говорилось, определенные выше свертки полей являются не обычными, а обобщенными функциями. Произведение обобщенных функций с накладывающимися сингулярностями не имеет смысла даже как обобщенная функция, и по этой причине вклады диаграмм теории возмущений, содержащие многократные произведения пропагаторов  $\Delta$ , в релятивистских теориях часто оказываются бессмысленными. В импульсном представлении это проявляется в форме хорошо известных „ультрафиолетовых“ расходимостей интегралов в области больших импульсов.

Регуляризацией называют любую процедуру, придающую строгий смысл вкладу каждой из диаграмм теории возмущений. Типичным примером является регуляризация Паули — Вилларса [1], состоящая в замене  $n$  и  $\Delta$  во всех формулах этого параграфа регуляризованными свертками  $n_{\text{per}}, \Delta_{\text{per}}$ . Последние определяются соотношениями

$$n_{\text{per}} = n + \sum_{i=1}^N c_i n_i, \quad \Delta_{\text{per}} = \Delta + \sum_{i=1}^N c_i \Delta_i, \quad (43)$$

в которых  $n_i, \Delta_i$  — обычные свертки (34), (35) с заменой  $m \rightarrow M_i; M_1 \dots M_N$  — произвольные параметры, а численные коэффициенты  $c_i$  в (43) определяются следующей системой уравнений:

$$m^{2k} + \sum_{i=1}^N c_i M_i^{2k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (44)$$

В импульсном представлении

$$\tilde{\Delta}_{\text{per}} = i \left[ \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} + \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{p^2 - M_i^2 + i0} \right], \quad (45)$$

а условия (44) означают, что после приведения суммы (45) к общему знаменателю коэффициенты при всех степенях  $p^2$ , кро-

ме нулевой, в числителе обращаются в нуль. Поэтому  $\widetilde{\Delta}_{\text{пер}}(p^2)$  убывает на бесконечности достаточно быстро и ее фурье-образ  $\Delta_{\text{пер}} = d_{\text{пер}} + i f_{\text{пер}}$  (см. (36)) будет уже не обобщенной, а обычной функцией, имеющей некоторое, зависящее от  $N$ , число гладких производных. Из (36) и (43) ясно, что свертка  $n_{\text{пер}}$  связана с  $\Delta_{\text{пер}}$  тем же соотношением (36), которое теперь вполне корректно, поскольку функция  $f_{\text{пер}}$ , обращающаяся в нуль вне световых конусов, вследствие своей гладкости на самой поверхности конусов должна иметь нуль конечного порядка. Отсюда, в частности, следует, что для регуляризованных сверток соотношение (I.30) выполняется автоматически. Отметим также, что приведенное в п. I.5.2 доказательство унитарности  $S$ -матрицы в порядках теории возмущений для регуляризованной теории будет справедливым независимо от наличия производных поля по времени в эрмитовом функционале взаимодействия.

Переход к регуляризованной теории в формулах типа (I.164) осуществляется с помощью замены  $K \rightarrow K_{\text{пер}}$ , где  $K_{\text{пер}} = i \Delta_{\text{пер}}^{-1}$  в соответствии с (I.31).

#### § 4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АМПЛИТУДЫ ПЕРЕХОДА

Для обычной квантовой механики с гамильтонианом  $\mathbf{H}$  величина

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \tau_1; \mathbf{x}_2, \tau_2) \equiv \langle \mathbf{x}_1 | \exp i\mathbf{H}(\tau_2 - \tau_1) | \mathbf{x}_2 \rangle \quad (46)$$

имеет смысл амплитуды перехода в координатном представлении для конечного интервала времени  $\tau_2 \leq t \leq \tau_1$ , а  $\theta(\tau_1 - \tau_2) \times \times \mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \tau_1; \mathbf{x}_2, \tau_2)$  есть запаздывающая функция Грина нестационарного уравнения Шредингера (ядро операции  $i[i\partial/\partial t - \mathbf{H}]^{-1}$ , доопределенной условием запаздывания) в том же представлении.

Исторически именно амплитуды (46) были первыми объектами, для которых Р. Фейнман получил представления функциональными интегралами [24]. Оригинальный вывод Фейнмана опирается на определение функционального интеграла посредством известной процедуры интерполяции (см. [14, 15]), которым мы договорились не пользоваться ввиду его неоднозначности. Поэтому будем выводиться формулу Фейнмана, пользуясь лишь сформулированными в п. I.6.1 правилами вычисления гауссовых интегралов.

В качестве  $\mathbf{H}_0$  возьмем, как в п. I.2, только кинетический член  $\hat{p}^2/2m$ . Представив  $\exp i\mathbf{H}_0\tau$  гауссовым интегралом

$$\exp i\mathbf{H}_0\tau = \exp \left[ i \frac{\hat{p}^2\tau}{2m} \right] = \left( \frac{im}{2\pi\tau} \right)^{d/2} \int d\lambda \exp \left[ -\frac{im\lambda^2}{2\tau} + i\hat{p}\lambda \right], \quad (47)$$

в котором  $d$  — размерность  $p$ , и приняв во внимание, что операция сдвига  $\exp i \hat{p} \lambda$  переводит  $|x\rangle$  в  $|x-\lambda\rangle$ , для свободной теории получим

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{x}_1, \tau_1; \mathbf{x}_2, \tau_2) = \left[ \frac{m}{2\pi i (\tau_1 - \tau_2)} \right]^{d/2} \exp \left[ \frac{im(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{2(\tau_1 - \tau_2)} \right]. \quad (48)$$

Для теории с взаимодействием входящий в (46) оператор развития в шредингеровском представлении можно выразить с помощью (I.55) через оператор развития в представлении взаимодействия, который представляется  $T$ -экспонентой (I.64). Собираясь воспользоваться впоследствии соотношением (I.90), вычислим функционал

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \tau_1; \mathbf{x}_2, \tau_2; A) \equiv \langle \mathbf{x}_1 | \exp(-i\mathbf{H}_0\tau_1) T \exp(i\hat{\varphi} A) \exp(i\mathbf{H}_0\tau_2) | \mathbf{x}_2 \rangle, \quad (49)$$

имеющий смысл амплитуды перехода для свободной частицы в поле произвольной внешней силы  $A(t)$ . Свободное поле  $\hat{\varphi}$  в (49) обозначает оператор координаты в представлении взаимодействия (7), а интегрирование по времени в линейной форме  $\hat{\varphi} A$  производится, как и всюду в дальнейшем, только по конечному интервалу от  $\tau_2$  до  $\tau_1$ .

Для вычисления амплитуды (49) нужно привести  $T$ -экспоненту к  $N$ -форме по правилу (I.46), а результат действия операции  $\exp(i\mathbf{H}_0\tau)$  на  $|x\rangle$  следует представить гауссовым интегралом с помощью (47); матричный элемент  $N$ -экспоненты можно затем найти по формуле (12). Опуская элементарные выкладки,\* приведем результат: амплитуда (49) отличается от (48) заменой показателя экспоненты в (48) выражением

$$\frac{im\tau_2}{2\tau_1(\tau_1 - \tau_2)} \left( \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \frac{i\bar{A}}{m} - \frac{\tau_1\bar{A}}{m} \right)^2 + \frac{im}{2\tau_1} \left( \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \frac{i\bar{A}}{m} \right)^2 + i\mathbf{x}_2\bar{A} - \frac{1}{2} A\Delta A, \quad (50)$$

в котором  $\Delta$  обозначает свертку (9) и  $\bar{A} \equiv \int dt A(t)$ ,  $i\bar{A} \equiv \int dt iA(t)$ , причем как здесь, так и в форме  $A\Delta A$ , интегрирования по времени проводятся лишь по заданному конечному интервалу.

Собрав вместе квадратичные и линейные по  $A$  вклады в (50), полученный результат можно записать следующим образом:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \tau_1; \mathbf{x}_2, \tau_2; A) = \mathcal{A}_0(\mathbf{x}_1, \tau_1; \mathbf{x}_2, \tau_2) \exp \left[ -\frac{1}{2} A\tilde{\Delta}A + iAf \right]. \quad (51)$$

\* Вычисления заметно упростятся, если положить  $\tau_1 = \tau$ ,  $\tau_2 = 0$ , что по существу не ограничивает общности.

Здесь  $f$  — линейная функция:  $f(t) = \mathbf{x}_2 + \mathbf{v}(t - \tau_2)$ ,  $\mathbf{v} \equiv (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/(\tau_1 - \tau_2)$  и

$$\tilde{\Delta}(t, t') = \Delta(t, t') + i[\tau_2(t + t') - tt' - \tau_1\tau_2]/m(\tau_1 - \tau_2). \quad (52)$$

Отметим, что при определении из (50) ядра квадратичной формы  $\tilde{\Delta}(t, t')$  нужно сделать симметризацию  $t \rightleftharpoons t'$ . Функция (52) отличается от  $\Delta(t, t')$  на решение классического свободного уравнения  $K\varphi = 0$  по переменной  $t$  (у нас  $K = -m\partial^2/\partial t^2$ ). Отсюда следует, что  $\tilde{\Delta}$ , как и  $\Delta$ , является функцией Грина свободного уравнения:  $K\tilde{\Delta} = i$ . Эта функция Грина выделена среди прочих тем, что она удовлетворяет, как нетрудно увидеть из (9) и (52), условиям  $\tilde{\Delta}(\tau_1, t') = \tilde{\Delta}(\tau_2, t') = 0$ , откуда ясно, что  $\tilde{\Delta}$  является функцией Грина для уравнения  $K\varphi = \psi$  с дополнительными условиями  $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2) = 0$ . Это свойство однозначно выделяет  $\tilde{\Delta}$  среди множества всех функций Грина свободного уравнения.

Для дальнейшего важно также отметить, что входящая в (51) функция  $f$  является решением однородного уравнения  $Kf = 0$ , удовлетворяющим условиям  $f(\tau_i) = \mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2$ , которые определяют это решение однозначно.

Отвлечемся теперь от амплитуды (49) и рассмотрим интеграл

$$\int_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} D\varphi \exp i \int_{\tau_2}^{\tau_1} dt \left[ \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 + \varphi A \right] \equiv \int_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} D\varphi \exp i [S_0(\varphi) + \varphi A]. \quad (53)$$

Символ  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  указывает, что интегрирование производится по множеству (не являющемуся линейным пространством) вещественных функций  $\varphi(t)$  на отрезке  $\tau_2 \leq t \leq \tau_1$ , удовлетворяющих краевым условиям  $\varphi(\tau_i) = \mathbf{x}_i$ . Отметим, что в (53) входит само свободное действие  $S_0(\varphi)$ , а не его квадратичная форма  $S_0' = \varphi K\varphi/2$ .

Сделаем в (53) замену переменной  $\varphi \rightarrow \varphi + f$ , где  $f$  — та же самая линейная функция, что и в (51). Новая переменная  $\varphi$  будет тогда удовлетворять нулевым условиям на концах, откуда, в частности, следует, что перекрестные члены формы  $(\varphi + f)^2$  не дают вклада в действие. Поэтому интеграл (53) можно переписать в виде

$$\exp i [S_0(f) + Af] \int_{(0,0)} D\varphi \exp i [S_0(\varphi) + \varphi A]. \quad (54)$$

Нулевые условия для  $\varphi$  на концах приводят также к обращению в нуль внеинтегральных членов при интегрировании по частям в форме  $S_0(\varphi)$ , что позволяет записать ее в виде  $\varphi K\varphi/2$ . Поэтому гауссов интеграл в (54) можно взять с помощью

сдвига  $\varphi \rightarrow \varphi + i\widetilde{\Delta}A$ , не выводящего из класса вещественных функций с нулевыми условиями на концах. После сдвига из интеграла (54) выделится множитель  $\exp[-\widetilde{A}\Delta A/2]$ , а оставшийся интеграл  $J \equiv \int_{(00)} D\varphi \exp i S_0(\varphi)$  уже не зависит от  $A$ . Сравним получающееся из (54) выражение с (51) и приняв во внимание, что  $S_0(f)$  совпадает, как нетрудно проверить, с показателем экспоненты в (48), заключаем, что величины (54) и (51) пропорциональны:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \tau_1; \mathbf{x}_2, \tau_2; A) = \text{const} \int_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} D\varphi \exp i [S_0(\varphi) + \varphi A]. \quad (55)$$

Нормировочная постоянная численно равна отношению предэкспоненциального множителя в (48) к определенному выше гауссову интегралу  $J$  и зависит лишь от  $m$  и  $\tau_1 - \tau_2$ .

Чтобы найти амплитуду перехода для теории с произвольным взаимодействием  $S_v(\varphi)$ , мы должны согласно (1.90) подействовать на правую часть (55) операцией  $\exp i S_v(\delta/\delta iA)$  и затем положить  $A = 0$ . Получим

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \tau_1; \mathbf{x}_2, \tau_2) = \text{const} \int_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} D\varphi \exp i S(\varphi), \quad (56)$$

где  $S(\varphi) = S_0(\varphi) + S_v(\varphi)$  — полный функционал действия для интервала  $[\tau_1, \tau_2]$ . Возможно стоит пояснить, что область интегрирования по  $t$  в функционале  $S_v(\varphi)$  оказывается конечной потому, что такова она в линейной форме  $\varphi A$ , на которую действует операция  $S_v(\delta/\delta iA)$ .

Как уже неоднократно отмечалось, для теории с производными по времени во взаимодействии роль  $S_v(\varphi)$  играет эффективное взаимодействие, определенное в п. 1.3.4 и явно зависящее от выбора способа квантования классической теории. Отметим, что при определении функционального интеграла посредством процедуры интерполяции функционал  $S$  в (56) всегда считается классическим, а различие квантовых амплитуд (56) для разных способов квантования достигается путем использования различных вариантов интерполяции. Это проверено [14, 15] для нескольких простых рецептов квантования, но общего правила, позволяющего каждому данному выбору квантового оператора взаимодействия  $V$  сопоставить определенный способ интерполяции подобно тому, как мы сопоставляем ему функционал  $S_v^{\text{эф}}(\varphi)$ , не существует.

Обобщение квантовомеханической формулы (56) на бозонные теории поля будет непосредственным в „координатном представлении“, в котором диагонален оператор поля  $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$  в шредингеровском представлении: аргументы  $\mathbf{x}$  в (56) заменя-

ются „конфигурациями”  $\alpha(x)$ , которые нумеруют собственные состояния оператора  $\hat{p}(x)$  подобно тому, как  $x$  нумерует собственные состояния оператора координаты в квантовой механике. В этом представлении роль волновых функций  $\psi(x)$  играют функционалы  $F(\alpha)$ , скалярное произведение которых определено интегралом  $\int D\alpha F_1^*(\alpha)F_2(\alpha)$ ; операторы координаты  $\hat{q}(x)$  и импульса  $\hat{p}(x)$  в шредингеровском представлении реализуются как операции умножения на  $\alpha(x)$  и дифференцирования по  $i\alpha(x)$  соответственно.

В заключение обратим внимание на два существенных различия между формулами (56) и (I.164). Во-первых, в (56) входит настоящее свободное действие  $S_0(\varphi)$ , а не соответствующая ему квадратичная форма, как в (I.164). Во-вторых, и это более важно, пространство функций, по которому производится интегрирование в (56), не зависит в отличие от (I.164) от способа разбиения полного действия на свободную часть и взаимодействие. Эта выгодная особенность представления (56) позволяет рассматривать его как действительно точное соотношение, не опирающееся даже в скрытой форме на теорию возмущений, чего нельзя сказать про (I.164).

Вычислив функциональный интеграл (55) методом стационарной фазы (см. п. I.6.6) и ограничившись первыми двумя членами в аналогичном (I.171) разложении, получим известное квазиклассическое приближение для амплитуды перехода. Условие стационарности действия  $S(\varphi) = \int dt [m\dot{\varphi}^2/2 - \mathcal{V}(\varphi)]$  есть уравнение классической траектории  $m\ddot{\varphi} + \mathcal{V}'_{\varphi} = 0$  (здесь и далее  $f_z \equiv \partial_z f \equiv df/dz$ ), дополненное краевыми условиями  $\varphi(\tau_1) = x_1$ ,  $\varphi(\tau_2) = x_2$ . Допустим, что искомая траектория единственна (в противном случае результат нужно просуммировать по всем траекториям), и обозначим ее  $q$ . Первый член аналогичного (I.171) разложения дает в амплитуду (56) множитель  $\exp iS(q)$ , а второй определяет предэкспоненту, которая будет пропорциональна  $\det K^{-1,2}$ , где  $K = -m\partial_t^2 - \mathcal{V}''_{qq} \equiv K_0 + u$  — ядро второй вариации действия на траектории.  $K_0$  и  $K$  рассматриваются как линейные операции в пространстве квадратично интегрируемых функций на отрезке  $\tau_2 \leq t \leq \tau_1$ , определенные на плотном множестве дважды дифференцируемых функций с нулевыми краевыми значениями и квадратично интегрируемой второй производной. Известно, что симметричная операция  $K_0 = -m\partial_t^2$  на такой области самосопряжена. Операция умножения на  $u = -\mathcal{V}''_{qq}$  ограничена (предполагается, что траектория не проходит через точки сингулярности потенциала), поэтому  $K = K_0 + u$  также самосопряжена.

В строгом смысле  $\det$  существует лишь для операций вида  $1 + B$ , где  $B$  — ядерный оператор (сумма модулей собственных чисел конечна). Ядерным будет оператор  $K_0^{-1}$  (интегральная операция с ядром  $-i\Delta(t, t')$ ), так как его собственные числа убывают как  $1/n^2$ . Произведение ядерного оператора на непрерывный есть ядерный, поэтому  $\det K_0^{-1}K = \det(1 + K_0^{-1}u)$  хорошо определен. Его можно вычислить явно, выразив ответ в терминах классической траектории. Приводимое ниже доказательство принадлежит В. С. Буслаеву.

Рассмотрим для простоты одномерный случай и воспользуемся для вычисления определителя формулой (I.147):  $\partial_\lambda \ln \det K_0^{-1}(K - \lambda) = -\text{tr } G_\lambda$ , где



$G_\lambda \equiv (K - \lambda)^{-1}$  — резольвента операции  $K$ . Это интегральная операция с ядром  $G_\lambda(t, t') = [\theta_{it'} y_1(t) y_2(t') + \theta_{it} y_2(t) y_1(t')] m\omega$ , где  $\theta_{it'} \equiv \theta(t - t')$ ,  $y_1$  и  $y_2$  — решения уравнения  $(K - \lambda)y = 0$  с условиями  $y_i(\tau_i) = 0$ ,  $\dot{y}_i(\tau_i) = 1$  для  $i = 1, 2$  соответственно, постоянная  $\omega = y_1 \dot{y}_2 - y_2 \dot{y}_1$  — их вронскиан. При  $t = \tau_1$  с учетом краевых условий для  $y_i$  получаем  $\omega = -y_2(\tau_1, \lambda)$  (мы указали явно зависимость от параметра  $\lambda$ ). Ядро  $G_\lambda(t, t')$  непрерывно при  $t = t'$ , и  $\text{tr } G_\lambda = (m\omega)^{-1} \int dt y_1 y_2$ . Этот интеграл можно взять, воспользовавшись равенством  $y_1 y_2 = m \partial_t [y_1 \partial_\lambda \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \partial_\lambda y_2]$ , для вывода которого нужно написать уравнения для  $y_1(t, \lambda)$  и  $y_2(t, \lambda')$ , умножить первое на  $y_2(t, \lambda')$ , а второе — на  $y_1(t, \lambda)$ , затем вычесть их друг из друга и отбросить члены первого порядка малости по разности  $\lambda' - \lambda$ . Итак,  $\text{tr } G_\lambda = \omega^{-1} [y_1 \partial_\lambda \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \partial_\lambda y_2] |_{\dots}$ , где  $|_{\dots}$  обозначает разность значений на концах интервала. Учитывая равенство  $\omega = -y_2(\tau_1, \lambda)$ , краевые условия для  $y_i$  и вытекающие из них условия для  $\partial_\lambda y_2$ , получаем  $\text{tr } G_\lambda = -\partial_\lambda \ln y_2(\tau_1, \lambda)$ . Интегрируя по  $\lambda$ , находим  $\det K_0^{-1}(K - \lambda) = y_2(\tau_1, \lambda) / y_2^0(\tau_1, 0)$ , где  $y_2^0$  — аналогичное  $y_2$  решение для задачи без потенциала:  $K_0 y_2^0 = 0$ ,  $y_2^0(\tau_2) = 0$ ,  $\dot{y}_2^0(\tau_2) = 1$ . Оно легко находится:  $y_2^0(t) = t - \tau_2$ , откуда  $y_2^0(\tau_1) = \tau_1 - \tau_2 \equiv \tau$ ,  $\det K_0^{-1}(K - \lambda) = y_2(\tau_1, \lambda) / \tau$ .

Нас интересует  $\det K_0^{-1}K = y_2(\tau_1, 0) / \tau$ . Решение  $y_2(t, 0)$  можно связать с классической траекторией  $q$ . Для этого рассмотрим семейство траекторий  $q(t; x_2, v_2)$ , где  $x_2$  и  $v_2$  — начальные координата и скорость соответственно:  $q(\tau_1; x_2, v_2) = x_2$ ,  $\dot{q}(\tau_1; x_2, v_2) = v_2$ . Из этих условий следует, что производная  $q_v \equiv \partial q / \partial v_2$  удовлетворяет краевым условиям для  $y_2$ :  $q_v(\tau_2) = \partial x_2 / \partial v_2 = 0$ ,  $\dot{q}_v(\tau_2) = \partial v_2 / \partial v_2 = 1$ . Дифференцируя по параметру  $v_2$  уравнение  $m\ddot{q} + \mathcal{V}'_q = 0$ , видим, что  $q_v$  удовлетворяет и уравнению для  $y_2$ :  $m\dot{q}_v + \mathcal{V}''_{qq} q_v = 0$ . Поэтому  $q_v = y_2$  и  $q_v(\tau_1; x_2, v_2) / \tau = \det K_0^{-1}K$ . По смыслу  $q(\tau_1; x_2, v_2) = x_1$  — конечная координата, а  $q_v = \partial x_1 / \partial v_2$  — производная конечной координаты по начальной скорости. Если считать независимыми переменными  $x_1$  и  $x_2$ , то  $\partial x_1 / \partial v_2 \rightarrow (\partial v_2 / \partial x_1)^{-1} = -[m \partial^2 S(q) / \partial x_1 \partial x_2]^{-1}$ , где  $S(q)$  — действие на классической траектории с заданными  $x_1$  и  $x_2$  (учтено равенство  $\partial S(q) / \partial x_2 = -mv_2$ ).

Учитывая нормировку амплитуды для свободной теории, окончательный результат можно записать следующим образом:

$$\mathcal{A}(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) |_{\text{квазикл}} = \left[ \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{\partial^2 S(q)}{\partial x_1 \partial x_2} \right]^{1/2} \exp iS(q).$$

При обобщении на многомерный случай выражение в квадратной скобке становится матрицей по индексам, нумерующим  $x_1$  и  $x_2$ , а  $[\dots]$  следует понимать как определитель этой матрицы.

Квазиклассическое приближение используется и тогда, когда  $K_0^{-1}K$  имеет отрицательные собственные значения. Каждое из них дает вклад  $-\pi/2$  в фазу  $\det(K_0^{-1}K)^{-1/2}$ , следовательно,  $(\partial x_1 / \partial v_2)^{-1,2} = |\partial x_1 / \partial v_2|^{-1,2} \cdot \exp(-i\pi/2)$ , где  $\nu$  — число отрицательных собственных значений (индекс Морса). По теореме Морса  $\nu$  равно числу фокальных (по отношению к семейству  $q(t; x_2, v_2)$ ) точек траектории, т. е. числу таких значений  $t$  в интервале  $\tau_2 \leq t \leq \tau_1$ , для которых  $\partial q(t; x_2, v_2) / \partial v_2 = 0$  (в многомерном случае — нуль определителя с учетом его кратности). Действительно, если рассматривать задачу на интервале  $\tau_2 \leq t \leq t'$  с переменным верхним пределом  $t' \leq \tau_1$ , то собственные значения  $K_0^{-1}K$  становятся функциями  $t'$ , а фокаль-

ные точки по определению суть те, в которых одно из собственных значений обращается в нуль (в многомерном случае нуль может быть кратным). Из классической механики известно, что при достаточно малых  $t' - \tau_2$  все собственные числа положительны, а с ростом  $t'$  изменяются строго монотонно. Поэтому число отрицательных собственных значений при  $t' = \tau_1$  равно числу "прохождений через нуль" для задачи с переменным верхним пределом  $t' \leq \tau_1$ .

## § 5. ПРОСТРАНСТВО $E(\Delta)$ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ

При вычислении гауссова интеграла в (54) однозначность определения функции Грина  $iK^{-1}$  достигалась постановкой крайних условий. В случае бесконечного интервала времени аналогичную роль играют асимптотические условия при  $t \rightarrow \pm \infty$  для функций, по которым производится интегрирование. Как объяснялось в п. I.6.4, эти условия содержатся в требовании  $\varphi \in E(\Delta)$ , где  $E(\Delta)$  — линейное пространство, состоящее из функций вида  $i\Delta A$ ,  $A \in E$ ,  $E$  — пространство хорошо убывающих функций с должными свойствами вещественности,  $\Delta$  — наперед выбранная функция Грина, которую мы хотим получить при вычислении гауссова интеграла. В качестве  $\Delta$  мы всегда берем определенную соотношением (I.28) хронологическую свертку и в этом случае асимптотиками функции  $\varphi = i\Delta A$  при  $t \rightarrow \pm \infty$  являются соответственно  $\varphi_{(+)} = inA$  и  $\varphi_{(-)} = i\kappa n^T A$ , где  $n$  — простая свертка,  $\kappa = \pm 1$  в зависимости от статистики. Обе асимптотики  $\varphi_{(\pm)}$  являются решениями уравнения  $K\varphi = 0$ .

Мы хотим сейчас описать явно эти асимптотики для различных конкретных теорий. Начнем с рассмотренного в п. I.1 квантовомеханического осциллятора. В этом случае двумя базисными решениями свободного уравнения  $K\varphi = 0$  являются гармоника  $\exp(\pm i\omega t)$ , а асимптотики  $\varphi_{(\pm)}$ , как ясно из (4), имеют вид  $i c_{(\pm)} \exp(\mp i\omega t)$ , причем константы  $c_{(+)}$  и  $c_{(-)}$  взаимно сопряжены вследствие вещественности входящей в определение обеих асимптотик функции  $A \in E$  (но при этом функции  $\varphi = i\Delta A \in E(\Delta)$  оказываются комплексными — см. по этому поводу замечание в § IV.2). Так же обстоит дело и в других бозонных теориях осцилляторного типа, например в теории вещественного скалярного поля (§ 3): асимптотика  $\varphi_{(+)}$  является произвольным отрицательно частотным решением уравнения Клейна — Гордона, а  $\varphi_{(-)}$  — сопряженным положительно частотным решением.

Обратимся теперь к рассмотренной в п. I.2 квантовой механике свободной частицы, не принадлежащей к теориям осцилляторного типа. В этом случае двумя базисными решениями свободного уравнения являются 1 и  $t$ , а для асимптотик  $\varphi_{(\pm)}$  с помощью (8) получаем  $\varphi_{(+)} = c_{(+)}$ ,  $\varphi_{(-)} = c_{(-)}t$ , где  $c_{(\pm)}$  — произвольные вещественные константы. Эта теория отличается от осцилляторной тем, что все функции пространства  $E(\Delta)$  оказываются вещественными, а асимптотики при  $t \rightarrow \pm \infty$  совершенно независимы.

В случае рассмотренной в § 2 нерелятивистской теории свободного уравнение движения является уравнением первого, а не второго порядка по времени. Поэтому для каждой из функций  $\psi$ ,  $\psi^+$  на одну степень свободы приходится только одно решение, а именно  $\exp(-i\epsilon t)$  для  $\psi$  и  $\exp(i\epsilon t)$  для  $\psi^+$ . В таких теориях одна из асимптотик каждой из функций  $\psi$ ,  $\psi^+$  оказывается нулевой, а другая — решением свободного уравнения; нулевая асимптотика будет либо при  $t \rightarrow \infty$ , либо при  $t \rightarrow -\infty$ , в зависимости от того, заполнен или нет рассматриваемый уровень, а соотношения взаимной сопряженности связывают асимптотики  $\psi_{(+)}$  и  $\psi_{(-)}^+$ , и наоборот. В фермионных теориях разным вариантам заполнения уровней соответствуют разные пространства  $E(\Delta)$ , и выбор  $E(\Delta)$  однозначно определяет функцию Грина  $\Delta = iK^{-1}$  в интеграле (I.162).

Полезно отметить, что асимптотическое поведение функций из пространства  $E(\Delta)$  весьма существенно с точки зрения метода стационарной фазы, о котором говорилось в п. I.6.6. Рассмотрим в качестве примера вычисление этим методом производящего функционала  $S$ -матрицы на поверхности масс. Как пояснялось в конце п. I.6.6, для определения искомой точки стационарности нужно найти решение классического уравнения движения, принадлежащее многообразию  $E(\Delta) + f$ , где  $f$  — некоторое фиксированное решение свободного уравнения движения. Допустим для конкретности, что речь идет о квантовой механике п. I.2, где решениями свободного уравнения являются линейные функции  $a + bt$ , а пространство  $E(\Delta)$  состоит из функций с асимптотикой  $c$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $c't$  при  $t \rightarrow -\infty$ , причем  $c$  и  $c'$  произвольны. При хорошем потенциале решение точного классического уравнения имеет свободные асимптотики  $a_{(\pm)} + b_{(\pm)}t$  и условие  $\varphi \in E(\Delta) + f$  фиксирует лишь два из четырех параметров асимптотик, а именно  $b_{(+)}$  и  $a_{(-)}$ . Если бы мы заменили  $E(\Delta)$  пространством хорошо убывающих функций  $E$ , то тем самым мы пытались бы фиксировать все четыре параметра асимптотик и искомой траектории за редкими исключениями (отсутствием расщепления) не существовало бы.

Отметим также, что рассмотренный пример ясно свидетельствует о неудовлетворительности такой ситуации, когда точное и свободное классические уравнения имеют асимптотики разного типа,\* на что уже указывалось в п. I.6.5.

## § 6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ФАЗОВОМУ ПРОСТРАНСТВУ

Для систем с уравнениями движения второго порядка единое поле  $\varphi$ , по которому производится интегрирование в формулах типа (56); (I.164), представляет лишь обобщенные коор-

\* Точнее, о неприменимости теории возмущений в таких условиях.

динаты системы. При желании число переменных всегда можно удвоить, перейдя к интегралам по траекториям в фазовом пространстве координат и импульсов. Мы покажем, как это делается на примере квантовой механики; соответствующие построения послужат одновременно хорошей иллюстрацией и дополнением к материалу п. I.3.4, посвященного теориям с производными поля по времени во взаимодействии.

Рассмотрим классическую систему с гамильтонианом общего вида  $\mathcal{H}(q, p) = p^2/2m + \mathcal{V}(q, p)$ . При квантовании  $q$  и  $p$  становятся операторами, причем квантовый гамильтониан взаимодействия  $\mathbf{V}$  определяется неоднозначно ввиду произвола в расстановке некоммутирующих множителей  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$ . Одним из возможных вариантов квантования является выбор  $\mathbf{V} = \text{Sym} \mathcal{V}(\hat{q}, \hat{p})$ , обеспечивающий эрмитовость  $\mathbf{V}$ .

При переходе к представлению взаимодействия  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$  в гамильтониане  $\mathbf{V}$  заменяются на соответствующие операторы  $\hat{q}(t)$  и  $\hat{p}(t)$ . Оператор  $\hat{q}(t)$  имеет вид (7), а  $\hat{p}(t)$  в представлении взаимодействия от времени в действительности не зависит:  $\hat{p}(t) = \hat{p} = m \dot{\hat{q}}(t)$ .

На языке одного поля  $\varphi \equiv q$  оператор  $\text{Sym} \mathcal{V}(\hat{\varphi}, m \dot{\hat{\varphi}})$  содержит производные по времени и нужно строить, как пояснялось в п. I.3.4, соответствующее эффективное взаимодействие, которое и играет роль  $S_{\varphi}(\varphi)$  в формулах (56), (I.164). Но можно поступить иначе, посчитав  $\hat{q}(t)$  и  $\hat{p}(t)$  двумя независимыми полями. На языке двухкомпонентного поля  $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$  ( $\varphi_0 \equiv q$ ,  $\varphi_1 \equiv p$ ) гамильтониан взаимодействия  $\mathbf{V}$  уже не содержит производных по времени и потому соответствующий ему функционал взаимодействия (I.59) совпадает с классическим выражением:  $S_{\varphi}(\varphi_0, \varphi_1) = - \int dt \mathcal{V}(\varphi_0, \varphi_1)$ . Второй путь естественно приведет нас к интегралам по всему фазовому пространству.

Прежде всего вычислим по стандартным правилам ( $N$ -произведение определено в п. I.2) матрицы простых ( $n$ ) и хронологических ( $\Delta$ ) сверток для двухкомпонентного поля  $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1) \equiv (q, p)$ :

$$n(t, t') = \frac{i}{m} \begin{pmatrix} t' & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta(t, t') = \frac{i}{m} \begin{pmatrix} t' \theta_{tt'} + t \theta_{t't} & m \theta_{tt'} \\ m \theta_{t't} & 0 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Для сокращения записи обозначено  $\theta_{tt'} \equiv \theta(t - t')$ .

Классическим свободным действием для  $\varphi$  будем считать выражение

$$S_0(\varphi) = \int dt [p \dot{q} - p^2/2m] \equiv \int dt [\varphi_1 \dot{\varphi}_0 - \varphi_1^2/2m]. \quad (58)$$

Ему соответствует свободное уравнение  $K\varphi = 0$  с матричной операцией  $K$ :  $K_{00} = 0$ ,  $K_{10} = -K_{01} = \partial/\partial t$ ,  $K_{11} = -1/m$ . Нетрудно

проверить, что матрица хронологических сверток (57) является, как обычно, функцией Грина свободного уравнения:  $K\Delta = i$ . Приведем также соответствующую действию (58) квадратичную форму (I.4):

$$S'_0(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi K \varphi = \frac{1}{2} \int dt [p\dot{q} - q\dot{p} - p^2/m]. \quad (59)$$

Все соотношения пп. I.6.4—I.6.6 справедливы, разумеется, и для двухкомпонентного поля  $\varphi$ . Пространство интегрирования  $E(\Delta)$  определяется по общим правилам п. I.6.4. По известной матрице сверток (57) нетрудно найти асимптотики двухкомпонентных функций  $\varphi \in E(\Delta)$ :  $\varphi_0 = c$ ,  $\varphi_1 = 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $\varphi_0 = c't$ ,  $\varphi_1 = mc'$  при  $t \rightarrow -\infty$ ;  $c$  и  $c'$  — произвольные вещественные постоянные.

Если нас интересуют лишь функции Грина компоненты  $\varphi_0$  (т. е. оператора координаты), то в (I.164) можно взять линейную форму частного вида  $\varphi_0 A_0$  и выполнить функциональное интегрирование по  $\varphi_1$ , т. е. по импульсу. Мы приходим тогда к обычному интегралу по траекториям в координатном пространстве, но вместо простого классического функционала взаимодействия  $S_v(\varphi_0, \varphi_1)$  получим то самое эффективное взаимодействие, о котором говорилось в п. I.3.4 (если  $S_v$  действительно зависит от  $\varphi_1$ ).

При получении аналога формулы (56) нужно сначала вычислить амплитуду (49) для двухкомпонентного поля  $\varphi$ , положив в (49)  $\hat{\varphi}A = \hat{\varphi}_0 A_0 + \hat{\varphi}_1 A_1$ . Результат, который мы приведем без вывода, является непосредственным обобщением (51) на случай двухкомпонентного поля: в линейную форму  $Aj \equiv A_0 j_0 + A_1 j_1$  войдет решение свободного уравнения  $Kj = 0$  с  $j_0 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{v}(t - \tau_2)$ ,  $j_1 = m\mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v} \equiv (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/(\tau_1 - \tau_2)$  — скорость на прямолинейной траектории. Матрица  $\Delta$  оказывается функцией Грина задачи с нулевыми краевыми условиями для компоненты  $\varphi_0$  без каких-либо ограничений на краевые значения компоненты  $\varphi_1$ .

Обозначим  $E_0$  пространство двухкомпонентных функций  $\varphi$ , удовлетворяющих этим условиям, и рассмотрим функциональный интеграл по многообразию  $E_0 + f$  от  $\exp i[S_0(\varphi) + A\varphi]$ . Нетрудно проверить, что для любого  $\varphi \in E_0$  значения  $S_0(\varphi)$  и  $S'_0(\varphi)$  совпадают и  $S_0(\varphi + f) = S_0(\varphi) + S_0(f)$ , причем  $S_0(f)$  совпадает с показателем экспоненты в (48). Поэтому доказательство пропорциональности выражений (51) и (53) переносится и на рассматриваемый случай, и мы получаем

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \tau_1; \mathbf{x}_2, \tau_2) = \text{const} \int_{\text{По всем}} Dp \int_{(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2)} Dq \exp iS_{\text{кл}}(q, p). \quad (60)$$

Этот интеграл представляет амплитуду перехода для квантовой теории с гамильтонианом  $\mathbf{H} = \hat{p}^2/2m + \text{Sum } \varphi(\hat{q}, \hat{p})$ ; входящий

в (60) функционал  $S_{\text{кл}} = S_0 + S_v = \int dt [p\dot{q} - \mathcal{H}(q, p)]$  является классическим действием на фазовом пространстве для рассматриваемой теории.

Формулу (60) иногда рассматривают как универсальный рецепт „правильного квантования“, правильного в том смысле, что оно автоматически обеспечивает эрмитовость квантового гамильтониана взаимодействия и, как следствие, унитарность оператора развития. Но это, конечно, всего лишь один из таких рецептов, когда в качестве  $\mathbf{V}$  берется  $\text{Sym } \mathcal{V}(\hat{q}, \hat{p})$ . Если квантовать иначе, положив, например,  $\mathbf{V} = \text{Re } N \mathcal{V}(\hat{q}, \hat{p})$ , где  $\text{Re}$  обозначает эрмитову часть оператора, то в (60) вместо  $S_{\text{кл}}$  войдет другой функционал, который можно явно найти по  $\text{Sym}$ -форме  $\mathbf{V}$ .

В заключение остановимся на вопросе о канонической инвариантности представлений типа (60). Каноническая инвариантность означает, что (60) останется верным, если пару  $q, p$  заменить любой другой парой канонических переменных  $q', p'$ , взяв при этом  $S'_{\text{кл}}(q', p') = \int dt [p' \dot{q}' - \mathcal{H}'(q', p')]$ , где  $\mathcal{H}'(q', p') = \mathcal{H}(q, p)$ . Частный случай преобразования  $q' = p, p' = -q$  соответствует переходу от координатного к импульсному представлению в (60). При этом  $S'_{\text{кл}}(q', p') = \int dt [-q\dot{p} - \mathcal{H}(q, p)] = S_{\text{кл}}(q, p) - p_1 q_1 + p_2 q_2$ , где  $q_i, p_i$  — крайевые значения  $q$  и  $p$  соответственно.

Не считая каноническую инвариантность самоочевидной, отметим, что импульсный аналог представления (60) (и (56)) действительно можно получить тем же методом, как и представление (18): рассматривается задача с линейным источником, с помощью связи выделяется  $\delta$ -функция, оставшийся гауссов интеграл со связью берется с помощью подходящего сдвига. Отсюда, видимо, следует, что представление (60) действительно инвариантно относительно линейных канонических преобразований декартовых переменных  $p, q$ , но в иных случаях (например, при переходе от  $p, q$  к переменным действие — угол для осциллятора) формулы типа (60) нужно всякий раз доказывать заново (если это вообще возможно).

В этой главе мы кратко обсудим специфические особенности теории безмассовых векторных (калибровочных) полей.

§ 1. КВАНТОВАНИЕ ПОЛЯ ЯНГА — МИЛЛСА

**1. Классическая теория.** Пусть  $\Gamma$  — группа унитарных матриц  $\Omega$ , действующих в некотором конечномерном пространстве,  $T_1 \dots T_N$  — набор соответствующих эрмитовых генераторов, нормированных условием  $\text{tr} [T_a T_b] = \delta_{ab}$ . Ассоциированное с данной группой поле Янга—Миллса [25] представляет собой набор  $N$  вещественных векторных полей  $B_a^\alpha(x)$  (всюду в этой главе используются стандартные релятивистские обозначения § II.3), который удобно описывать единой матричной функцией  $B^\alpha(x) = \sum_a T_a B_a^\alpha(x)$ . На множестве матриц  $B^\alpha(x)$  задается

группа калибровочных преобразований  $\Gamma_x$ , элементы которой параметризуются функцией  $\Omega(x)$  со значениями в  $\Gamma$ :

$$B^\alpha(x) \rightarrow B_\Omega^\alpha(x) = \Omega(x) B^\alpha(x) \Omega^{-1}(x) + i\varepsilon^{-1} \partial^\alpha \Omega(x) \cdot \Omega^{-1}(x). \quad (1)$$

Вещественный параметр  $\varepsilon$  играет в теории роль константы связи.

Для инфинитезимального преобразования вида  $\Omega(x) = 1 - i\varepsilon u(x)$  из (1) получим  $B_\Omega^\alpha(x) = B^\alpha(x) + \mathcal{D}^\alpha(x) u(x)$ , где  $\mathcal{D}^\alpha$  — линейная операция на пространстве матричных функций (ковариантная производная):

$$\mathcal{D}^\alpha \equiv \partial^\alpha + i\varepsilon [B^\alpha, \dots]. \quad (2)$$

Классическим действием для поля Янга—Миллса считается функционал

$$S(B) = -\frac{1}{4} \int dx \text{tr} [F_{\alpha\beta}^\alpha(x) F^{\alpha\beta}(x)], \quad (3)$$

в котором  $F^{a\beta} = \partial^a B^\beta - \partial^\beta B^a + i\varepsilon [B^a, B^\beta]$  — тензор поля. Из (1) нетрудно получить закон преобразования для  $F$ :  $F_{\Omega}^{a\beta} = \Omega F^{a\beta} \Omega^{-1}$ . Отсюда ясно, что действие (3) калибровочно-инвариантно. В порядке справки отметим, что калибровочно-инвариантное взаимодействие поля Янга — Миллса с мультиплетом других полей  $\varphi$  вводится посредством замены производных  $\partial^a \rightarrow \nabla^a \equiv \equiv \partial^a + i\varepsilon B^a$  в лагранжиане поля  $\varphi$  (тогда  $\nabla\varphi \rightarrow \Omega\nabla\varphi$  при одновременном преобразовании  $\varphi \rightarrow \Omega\varphi$ ,  $B \rightarrow B_\Omega$ ).

Классическое уравнение движения для действия (3) имеет вид  $\mathcal{D}_a F^{a\beta} = 0$ ; нетрудно также убедиться, что из калибровочной инвариантности действия вытекает равенство  $\mathcal{D}_a \mathcal{D}_\beta F^{a\beta} = 0$  для любого  $B$ .

Если исходная группа  $\Gamma$  абелева, то все коммутаторы обращаются в нуль, калибровочное преобразование (1) превращается в *градиентное преобразование*  $B^a \rightarrow B^a + \partial^a u$ , а действие (3) превращается в обычную квадратичную форму (II.37) для системы безмассовых векторных полей.

**2. Общий рецепт квантования.** Каноническое квантование теории (3) нетривиально, потому что соответствующий лагранжиан относится к числу вырожденных (или сингулярных), т. е. таких, у которых нет взаимно-однозначной связи между скоростями и импульсами. Действительно, из определения  $S(B)$  ясно, что эта величина вообще не содержит одной из скоростей, а именно  $\dot{B}^0 = \partial_0 B^0$ , и соответствующий импульс равен нулю тождественно.

Квантование систем с вырожденными лагранжианами есть особая, в настоящий момент решенная (см., например, [26]) задача, и соответствующие построения применительно к полю Янга—Миллса подробно изложены в книге [4]. Поэтому мы не будем на них останавливаться и ограничимся, следуя работам [27, 28], простыми эвристическими соображениями, приводящими к правильным формулам.

В обычной теории с невырожденным лагранжианом функции Грина поля представляются функциональными интегралами от произведения полей с весом  $\exp iS(\varphi)$  (см. п. I.6.5). На том уровне строгости, на котором мы собираемся работать, нет смысла уточнять область интегрирования в функциональных интегралах и отличать свободное действие от его квадратичной формы (I.4). Свободным действием для (3) считается квадратичное по полю  $B$  слагаемое, которое имеет вид  $S_0(B) = KV/2$ , где  $K$  является матрицей по двойному индексу  $a, \alpha$  ( $a$  — "изотопический" значок,  $\alpha$  — векторный). Эта матрица имеет вид  $\delta_{ab} K_{\alpha\beta}$ , где  $K_{\alpha\beta}$  есть операция (II.38) при  $m = 0$ . Как уже отмечалось, эта операция существенно вырожденная — в импульсном представлении форма  $K_{\alpha\beta} = -p^2 g_{\alpha\beta} + p_\alpha p_\beta$  поперечна, т. е. четырехмерно ортогональна вектору  $p$ :  $K_{\alpha\beta} p^\beta = p^\alpha K_{\alpha\beta} = 0$ .



Это обстоятельство и является непосредственным препятствием для использования стандартной техники теории возмущений, основанной на формуле

$$\int DB F(B) \exp i S(B) = \left\{ \int DB \exp \left[ i S_0(B) + B \frac{\delta}{\delta A} \right] \right\} F(A) \exp i S_v(A) \Big|_{A=0}, \quad (4)$$

в которой  $S(B) = S_0(B) + S_v(B)$  — полное действие (3),  $F$  — произвольный функционал. В обычных условиях гауссов интеграл в правой части (4) берется и дает операцию приведения  $\exp [1/2 \cdot (\delta/\delta A) \Delta (\delta/\delta A)]$  с  $\Delta = iK^{-1}$ , что позволяет строить стандартные диаграммные представления § 1.4. В нашем случае вследствие вырожденности ядра  $K$  операция  $\Delta = iK^{-1}$  не существует и гауссов интеграл в (4) теряет смысл.

В работах [27, 28] был предложен технический прием, с помощью которого интеграл в левой части (4) при калибровочно-инвариантном функционале  $F$  (считается, что непосредственный физический смысл могут иметь лишь калибровочно-инвариантные величины) можно преобразовать таким образом, чтобы не испытывать впоследствии трудностей с построением теории возмущений. В основе лежит наблюдение, что интеграл от инвариантной величины пропорционален объему группы инвариантности, в данном случае калибровочной. Бесконечный множитель  $\int D\Omega(x)$  нужно сначала выделить явно и лишь потом строить теорию возмущений.

Прием состоит в следующем: рассматривается поверхность  $f(x; B) = 0$  в пространстве всех полей  $B(x)$ . Поверхность задается матричной функцией  $f(x; B) = \sum_a T_a f_a(x; B)$ , коэффициенты которой являются некоторыми функционалами от поля  $B$  (в дальнейшем аргумент  $x$  у  $f$  не выписывается); равенство нулю матричной функции понимается, конечно, как равенство нулю коэффициентов при всех генераторах  $T_a$ . Поверхность  $f$  должна выбираться так, чтобы для любого  $B(x)$  нашелся и притом единственным образом элемент  $\Omega(x) \in \Gamma_x$ , для которого  $f(B_\Omega) = 0$ . Геометрически это означает, что любая орбита группы (т. е. множество точек  $B_\Omega$ ,  $\Omega$  пробегает  $\Gamma_x$ ) имеет одну и только одну общую точку с поверхностью  $f$ . Для дальнейшего также существенно, чтобы эта общая точка всегда была точкой пересечения, а не точкой касания. Для тех относительно простых поверхностей, с которыми имеют дело на практике, эти условия всегда выполняются.

Следующее равенство определяет с точностью до множителя функционал  $\bar{\omega}_f(B)$ :

$$\bar{\omega}_f(B) \int D\Omega \delta [f(B_\Omega)] = \text{const}. \quad (5)$$

Функциональный интеграл  $\int D\Omega \dots$  следует понимать как интеграл по инвариантной мере на группе  $\Gamma_x$ , а символ  $\delta$  обозначает функциональную  $\delta$ -функцию, т. е.  $\prod_{a, x} \delta[f_a(x; B_\Omega)]$ .

Вследствие инвариантности меры  $D\Omega$  определенный соотношением (5) функционал  $\bar{\omega}_f$  является калибровочно-инвариантным; постоянная в правой части (5) определяет нормировку  $\bar{\omega}_f$ , которая будет фиксирована позднее.

Для выделения объема группы из интеграла  $\int DB F(B) \equiv J$  от некоторого калибровочно-инвариантного функционала  $F$  под знак интеграла следует ввести множителем левую часть (5), что равносильно согласно (5) введению постоянного множителя. В результате получим, что  $J = \text{const} \int DB \int D\Omega F(B) \times \bar{\omega}_f(B) \delta[f(B_\Omega)]$ . В этом интеграле следует поменять порядок интегрирования и сделать затем замену переменной  $B_\Omega \rightarrow B$ . Мера  $DB$  относительно такой замены инвариантна, поскольку калибровочное преобразование (1) является комбинацией трансляции и унитарного поворота; функционалы  $F(B)$  и  $\bar{\omega}_f(B)$  также инвариантны, и мы получаем искомое представление с выделенным объемом группы:

$$\int DB F(B) = \text{const} \left[ \int D\Omega \right] \int DB F(B) \bar{\omega}_f(B) \delta[f(B)], \quad (6)$$

справедливое для любого калибровочно-инвариантного функционала  $F(B)$  при любом выборе поверхности  $f$  (говорят „при любом выборе калибровки“).

Введение  $\delta$ -функции под знак функционального интеграла в (4) приведет к возможности использования теории возмущений, поскольку гауссов интеграл с  $\delta$ -функцией

$$C_f^{(0)}(A) \equiv \text{const} \int DB \delta[f(B)] \exp i \left[ \frac{1}{2} BKB + AB \right] \quad (7)$$

оказывается хорошо определенным (см. следующий раздел). Нормировочную постоянную в (7) мы будем фиксировать условием  $G_f^{(0)}(0) = 1$ .

Эти рассуждения наводят на мысль определить производящий функционал функций Грина поля  $B$  формулой

$$G_f(A) = \text{const} \int DB \delta[f(B)] \bar{\omega}_f(B) \exp i [S(B) + AB] \quad (8)$$

с нормировкой  $G_f(0) = 1$  для свободной теории. Функционал (8) зависит от выбора поверхности  $f$ , поскольку добавка  $AB$  к показателю не является калибровочно-инвариантной. С этим нужно примириться, так как дело не в определении, а в самой природе рассматриваемого объекта—функции Грина поля не явля-

ются калибровочно-инвариантными величинами. Непосредственный физический смысл имеет лишь  $S$ -матрица на поверхности масс (точнее, ренормированная  $S$ -матрица), которая описывает реальные процессы рассеяния, и лишь от этого объекта мы можем ожидать калибровочной инвариантности, т. е. независимости от калибровки. Так оно в действительности и оказывается.

Формула (8) отличается от обычного представления (I.164), во-первых, наличием  $\delta$ -функции, которая сводит интеграл по всем полям  $B$  к интегралу по поверхности  $f$ , и, во-вторых, появлением дополнительного множителя  $\overline{\omega}_f$ , что равносильно добавке  $\delta S_f(B) = -i \ln \overline{\omega}_f(B)$  к функционалу действия (3).

В заключение напомним, что строгое обоснование формулы (8) содержится в общей теории квантования систем с вырожденными лагранжианами.

**3. Теория возмущений для калибровок  $nB + c = 0$ .** Для построения теории возмущений нужно для выбранной калибровки вычислить функционал  $\overline{\omega}_f(B)$  и гауссов интеграл (7). Последнее можно сделать лишь для простых линейных калибровок вида  $n_a B^a + c = 0$ , где  $c(x) = \sum_a T_a c_a(x)$  — заданная матричная функция,  $n_a$  — линейная операция на пространстве матричных функций. Мы будем считать  $n$  либо некоторым числовым вектором, либо операцией дифференцирования типа  $\partial_a$ . Калибровку  $\partial_a B^a = 0$  называют *лоренцевой* или *поперечной*,  $\partial_i B^i = 0$  — *кулоновской* или *радиационной*, калибровку  $B^0 = 0$  с числовым вектором  $n = (1, 0, 0, 0)$  называют *аксиальной*.

При вычислении интеграла (7) в линейных калибровках зависимость от  $c$  легко выделить, сделав сдвиг  $B^\alpha \rightarrow B^\alpha + l^\alpha$  на продольную функцию  $l^\alpha = \partial^\alpha \varphi$ , которую следует выбрать так, чтобы сократить слагаемое  $c$  в аргументе  $\delta$ -функции. Ясно, что нужно взять  $\varphi = -(nd)^{-1}c$ . При таком сдвиге из (7) выделится множитель  $\exp iAl$ , а квадратичное слагаемое  $BKB$  не изменится вследствие поперечности  $K$ . Оставшийся интеграл можно взять с помощью сдвига  $B \rightarrow B + i\Delta A$ , подобрав матрицу  $\Delta$  так, чтобы, во-первых, сдвиг не менял аргумента  $\delta$ -функции, что равносильно требованию  $n\Delta A = 0$  при любом  $A$ , и, во-вторых, чтобы сдвиг устранял перекрестные (т. е. содержащие  $B$  и  $A$ ) члены в показателе интегрируемой экспоненты на поверхности  $nB = 0$ . Нетрудно убедиться, что эти требования определяют матрицу  $\Delta$  однозначно, если не касаться вопроса о расстановке добавок  $\pm i0$  в знаменателях (который следовало бы решать правильной постановкой асимптотических условий по общей схеме п. I.6.4). Получающаяся матрица  $\Delta$  зависит лишь от  $n$  и в импульсном представлении имеет вид

$$\Delta_n^{a\alpha, b\beta} = \delta_{ab} \frac{i}{k^2 + i0} \left[ \frac{k^\alpha n^\beta + n^\alpha k^\beta}{nk} - g^{\alpha\beta} - n^2 \frac{k^\alpha k^\beta}{(nk)^2} \right]. \quad (9)$$

Таким образом, интеграл (7) в калибровке  $nB + c = 0$  оказывается равным

$$G_f^{(0)}(A) = \exp(-A\Delta_n A, 2 + iAl), \quad (10)$$

где  $\Delta_n$  и  $l$  определены выше. Матрица  $\Delta_n$ , которая будет играть роль пропагатора в диаграммах теории возмущений, симметрична по значкам  $\alpha, \beta$  и четна относительно замены  $k \rightarrow -k$ ; следует также отметить, что эта матрица вырождена, поскольку она ортогональна вектору  $n$  по каждому индексу:  $\Delta_n n = n \Delta_n = 0$ . Подставив в (9) конкретные значения  $n$ , получим явные выражения для пропагатора в выбранной калибровке; в частности, при  $n_\alpha = k_\alpha$  получается стандартное выражение для пропагатора в поперечной калибровке.

Перейдем теперь к вычислению функционала  $\bar{\omega}_f(B)$ , определенного соотношением (5). Этот функционал входит в (8) в комбинации с  $\delta[f(B)]$ , и поэтому нам достаточно знать лишь его значение на поверхности  $f(B) = 0$ . На этой поверхности аргумент  $\delta$ -функции в (5) обращается в нуль при  $\Omega = 1$ , что позволяет ограничиться окрестностью единицы при вычислении интеграла по  $\Omega$ . В этой окрестности  $\Omega = 1 - i\epsilon u$ ,  $D\Omega \sim Du$ ,  $B_u^z = B^z + \mathcal{D}^z u$ . Взяв  $f(B) = nB + c$  при учете равенства  $f(B) = 0$ , получаем  $f(B_u) = n_z \mathcal{D}^z u \equiv Mu$  и  $\int D\Omega \delta[f(B_u)] \sim \int Du \delta(Mu) = \det M^{-1}$  (мы воспользовались обобщением известной для обычных интегралов формулы). Выбрав должным образом нормировочную постоянную в (5), можно утверждать, что интересующий нас функционал  $\bar{\omega}_f(B)$  на поверхности  $nB + c = 0$  совпадает с функционалом

$$\omega_f(B) = \det M / \det M_0 = \det [n_z \mathcal{D}^z] / \det [n_z \delta^z], \quad (11)$$

который зависит от  $B$  через посредство второго слагаемого в (2) и нормирован условием  $\omega_f(B) = 1$  при  $\epsilon = 0$ . Для абелевой группы функционал (11) обращается в единицу.

Правая часть (11) определяет функционал  $\omega_f$  при любых  $B$ , а не только на поверхности  $f$ , но вне этой поверхности функционалы  $\bar{\omega}_f$  и  $\omega_f$  различаются: первый из них является калибровочно-инвариантным и явно зависит от параметра  $c$  в калибровочном условии, тогда как второй от  $c$  не зависит, но не является калибровочно-инвариантным (нетрудно увидеть, что  $\bar{\omega}(B; n, c)$  при  $c = -n_\alpha B^\alpha$  совпадает с  $\omega(B; n)$  для всех  $B$ ).

На практике в (8) всегда используется функционал (11), а не  $\bar{\omega}_f$ . Как уже говорилось, введение множителя  $\omega_f$  равносильно добавке  $\delta S_f = -i \ln \omega_f$  к функционалу действия. Эту добавку можно представить как результат взаимодействия поля  $B$  с некоторым вспомогательным комплексным фермионным полем  $\psi, \psi^\dagger$ , записав множитель  $\omega_f \sim \det M$  гауссовым интегралом

const  $\int D\psi^+ D\psi \exp i \psi^+ M \psi$  (для бозонного поля  $\psi$ ,  $\psi^+$  мы получили бы из (I.161) не  $\det M$ , а  $\det M^{-1}$ ). В форме  $\psi^+ M \psi = \psi^+ n_\alpha (\partial^\alpha + i\varepsilon [B^\alpha, \dots]) \psi$  слагаемое  $\psi^+ n_\alpha \partial^\alpha \psi$  играет роль свободного действия для поля  $\psi$ ,  $\psi^+$ , а слагаемое с коммутатором соответствует взаимодействию типа Юкавы (см. п. I.4.6) скалярного фермионного поля  $\psi$ ,  $\psi^+$  с векторным полем  $B$ . Роль пропагатора (свертка  $\psi$  с  $\psi^+$ ) для фермионного поля играет величина  $i(n\partial)^{-1} \equiv iM_0^{-1}$ . Обозначив  $i\varepsilon n_\alpha [B^\alpha, \dots] \equiv L$ , для  $\delta S_f = -i \operatorname{tr} \ln [M_0^{-1}(M_0 + L)]$  получаем ряд

$$-i \operatorname{tr} \left\{ M_0^{-1} L - \frac{1}{2} M_0^{-1} L M_0^{-1} L + \dots \right\}, \quad (12)$$

представляющий графически аналогичную (I.114) сумму замкнутых петель поля  $\psi$ ,  $\psi^+$  и имеющий смысл поляризационной добавки к действию поля  $B$  из-за его взаимодействия с полем  $\psi$ ,  $\psi^+$ . Символ  $\operatorname{tr}$  в (12) обозначает след линейной операции в пространстве матричных функций  $u(x) = \sum_a T_a u_a(x)$ . Переходя к „координатам“  $u_a(x)$ , любую такую операцию можно представить в виде матрицы по изотопическим значкам  $a, b$ . Операции  $n_\alpha$ ,  $\partial^\alpha$ ,  $M_0$  по изотопическим значкам кратны единичной матрице, а для операции  $[B^\alpha, \dots]$  из определения

$$[B^\alpha, \dots] u = [B^\alpha, u] = \sum_{bc} B_{cb}^\alpha u_b [T_c, T_b] = \sum_{abc} B_{cb}^\alpha u_b f_{cba} T_a$$

( $f_{cba}$  — структурные постоянные группы) получаем  $[B^\alpha, \dots]_{ab} = \sum_c B_{cb}^\alpha f_{cba}$ . След этой матрицы по изотопическим значкам равен нулю вследствие антисимметричности структурных постоянных  $f_{abc}$ .

Отметим, что в калибровке  $nB=0$  с некоторым числовым вектором  $n$  (например, в аксиальной калибровке) функционал (11) на поверхности  $nB=0$  обращается в единицу, поскольку  $n_\alpha [B^\alpha, \dots] = [n_\alpha B^\alpha, \dots] = 0$ . В таких теориях дополнительные диаграммы  $\delta S_f$  отсутствуют.

Преобразовав функционал (8) по правилу (4) и приняв во внимание определение (7), получим

$$G_f(A) = G_f^{(0)}(\delta/\delta iB) \exp i [S_{vf}(B) + AB] |_{B=0}, \quad (13)$$

где  $S_{vf}(B)$  обозначает функционал взаимодействия вместе с поляризационной добавкой  $\delta S_f(B)$ . Воспользовавшись затем явным выражением (10) для  $G_f^{(0)}$  в калибровке  $nB+c=0$  и выполнив сдвиг  $\exp(i\delta/\delta B)$ , имеем

$$G_f(A) = \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta B} \Delta_n \frac{\delta}{\delta B} \right] \exp i [S_{vf}(B+l) + A(B+l)] |_{B=0}. \quad (14)$$

С точностью до множителя  $\exp iAl$  это выражение совпадает с обычной формулой (I.88) для производящего функционала функций Грина теории с взаимодействием  $S_{vf}(B + l)$ , что приводит к стандартным диаграммным представлениям § 1.4 для функционала (14). Обратим внимание, что изменение параметра  $c$  в калибровочном условии меняет функционал взаимодействия, но не меняет линии диаграмм.

**4. Обобщенная фейнмановская калибровка.** Усреднив функционал (8) для калибровки  $nB + c = 0$  по параметру  $c$  с весом  $\exp i c d c$ , где  $d$  — произвольное ядро, мы приходим к функционалу (интеграл по  $c$  снимается  $\delta$ -функцией)

$$G_{nd}(A) = \text{const} \int DB \omega_f(B) \exp i [S(B) + Bn^T dn B + AB], \quad (15)$$

представляющему функции Грина в обобщенной фейнмановской калибровке. Возникающую в показателе квадратичную добавку можно отнести к свободному действию, что равносильно изменению  $K \rightarrow K' \equiv K + 2n^T dn$  его ядра. В отличие от  $K$  ядро  $K'$  оказывается невырожденным, что позволяет использовать для вычисления интеграла (15) обычную теорию возмущений с пропагатором  $\Delta' = iK'^{-1}$ . В частном случае  $n_\alpha = \delta_\alpha$ ,  $d = -1/2\rho$  ( $\rho$  — число) пропагатор  $\Delta'$  в импульсном представлении оказывается равным

$$\delta_{ab} \frac{i}{k^2 + i0} \left[ (1 - \rho) \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} - g^{\alpha\beta} \right]. \quad (16)$$

При  $\rho = 1$  он совпадает с обычным выражением для пропагатора электромагнитного поля в фейнмановской калибровке, почему эти калибровки и называют обобщенными фейнмановскими.

Функционал (15) не совпадает, конечно, ни с одним из функционалов (8), но если  $S$ -матрица на поверхности масс для функционала (8) не зависит от  $c$  (как оно и есть на самом деле), то она будет точно такой же и для функционала (15) при любом выборе  $d$ .

**5. Производящий функционал  $S$ -матрицы.** Сравнивая формулу (13) с обычными представлениями (I.84), (I.88) для  $S$ -матрицы и функций Грина и учитывая, что входящая в эти представления дифференциальная операция приведения есть не что иное, как  $G^{(0)}(\delta/\delta i\varphi)$ , естественно определить соответствующий функциям Грина (8) производящий функционал  $S$ -матрицы (вне поверхности масс) формулой [29]

$$R_f(A) = G_f^{(0)}(\delta/\delta iA) \exp i S_{vf}(A). \quad (17)$$

Повторяя дословно вывод соотношения (I.93), нетрудно убедиться, что оно остается справедливым и в рассматриваемом случае:

$$G_f(A) = G_f^{(0)}(A) R_f(i\Delta_n A). \quad (18)$$

Однако обратное соотношение (I.94) теряет теперь смысл, так как пропагатор (9) является вырожденным и обратная матрица  $\Delta_n^{-1}$  не существует. Для функционала (15) с невырожденным пропагатором (16) подобных проблем не существует и все обычные соотношения гл. I сохраняют силу.

Вырожденность пропагатора в калибровке  $nB + c = 0$  приводит к специфическому эффекту — неоднозначности связи между  $S$ -матрицей вне поверхности масс и функциями Грина. Из (18) видно, что функционал  $R_f$  определяет  $G_f$  однозначно, но обратное неверно: разным функционалам  $R_f$  может соответствовать один и тот же функционал  $G_f$ . Действительно, из (18) видно, что диаграммы  $G_f$  получаются из диаграмм  $R_f$  домножением на  $i\Delta_n$  по каждому аргументу  $A$  ("по каждой внешней линии"), и если мы добавим к  $R_f$  слагаемое, по векторному значку пропорциональное  $n$ , хотя бы для одной внешней линии, то эта добавка не даст вклада в  $G_f$  в силу равенства  $n\Delta_n = 0$ .

Представив дифференциальную операцию в (17) функциональным интегралом (7) и выполнив сдвиг  $\exp(B\delta/\delta A)$ , получим

$$R_f(A) = \text{const} \int DB \delta[f(B)] \exp i \left[ \frac{1}{2} BKB + S_{\omega_f}(B + A) \right]. \quad (19)$$

Сделав теперь замену  $B \rightarrow B - A$  переменной интегрирования, находим

$$R_f(A) = \exp \left[ \frac{i}{2} AKA \right] \text{const} \int DB \delta[f(B - A)] \times \\ \times \exp i [S_f(B) - AKB]. \quad (20)$$

Это равенство напоминает аналог соотношения (I.94), но оно получено законными (на нашем уровне строгости) преобразованиями без употребления бессмысленного символа  $\Delta_n^{-1}$ .

Необходимо отметить, что при определении функционала  $S$ -матрицы существует проблема выбора множителя  $\omega_f$ , порождающего дополнительные диаграммы. Имеется в виду следующее: в интеграл (8) множитель  $\omega_f$  входил в комбинации с  $\delta[f(B)]$ , и на этом основании мы могли заменить  $\omega_f$  любым другим функционалом, совпадающим с  $\omega_f$  на поверхности  $f(B) = 0$  (чем один раз и воспользовались). Но в (20) это уже не так, поскольку множитель  $\omega_f(B)$  входит теперь в комбинации с  $\delta[f(B - A)]$ , причем  $A$  произвольно. Поэтому разному выбору функционала  $\omega_f$  в (8) будут соответствовать разные  $S$ -матрицы (20), что является частным проявлением неоднозначности связи между  $S$ -матрицей и функциями Грина, о которой уже говорилось выше. Обсуждая свойства функционала  $S$ -матрицы, нужно четко зафиксировать вид множителя  $\omega_f$ . Мы будем брать в качестве  $\omega_f$  определитель (11), и в этом случае дополнительные диаграммы  $S$ -матрицы имеют такой же вид, как и в функциях Грина.

## § 2. КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

**1. Тождества Ворда — Славнова.** Тождествами Ворда — Славнова называют различные дифференциальные соотношения, описывающие зависимость функционалов типа (8), (15), (20) от выбора калибровки. Их получают с помощью подходящей замены  $B \rightarrow B + \delta B$  переменной интегрирования, которую сопровождают, если нужно, бесконечно малыми преобразованиями параметров  $A, c$  или  $n$ . Если в качестве замены переменной берется обычное калибровочное преобразование  $B^\alpha \rightarrow B^\alpha + \mathcal{L}^\alpha u$ , то  $DB = DB'$ ,  $\delta S(B) = 0$ , но  $\delta \omega_f(B) \neq 0$  вследствие неинвариантности функционала (11). Основная идея работы [30] состоит в том, что более удобна замена с  $\delta B^\alpha = \mathcal{L}^\alpha M^{-1} \varphi$ , имеющая вид калибровочного преобразования с зависящим функционально от  $B$  параметром  $u = M^{-1} \varphi$  (напомним, что  $M \equiv n_\alpha \mathcal{D}^\alpha$ ). При такой замене вариация калибровочно-инвариантных величин в первом порядке по  $\varphi$  остается равной нулю, но якобиан преобразования  $DB'/DB$  теперь уже отличен от единицы, причем оказывается, что этот якобиан в точности компенсирует вариацию  $\omega_f(B)$ , т. е. произведение  $DB \omega_f(B)$  относительно такой замены инвариантно.

Если замена  $B \rightarrow B + \mathcal{D}M^{-1}\varphi$  делается в интеграле (15), то нужно учитывать лишь приращения  $\delta(Bn^T dnB) = 2Bn^T dn \mathcal{D}M^{-1}\varphi = 2Bn^T d\varphi$  и  $\delta(AB) = A \mathcal{D}M^{-1}\varphi$ , что ведет к тождеству Славнова [30]

$$\langle 2Bn^T d\varphi + A \mathcal{D}M^{-1}\varphi \rangle = 0. \quad (21)$$

Символом  $\langle F \rangle$  мы обозначили интеграл (15), под знак которого введен дополнительно множитель  $F$ . Этот множитель можно обычным образом вынести за знак интеграла в виде дифференциальной операции с заменой  $B \rightarrow \delta/\delta iA$  (см. п. 1.7.1).

При замене  $B \rightarrow B + \mathcal{D}M^{-1}\varphi$  в интеграле (8) аргумент  $\delta$ -функции  $nB + c$  получает приращение  $n \mathcal{D}M^{-1}\varphi = \varphi$ , которое можно скомпенсировать сдвигом  $c \rightarrow c - \varphi$  параметра  $c$  в калибровочном условии. В итоге получим тождество, выражающее вариацию функционала (8) при изменении параметра  $c$  через интеграл типа (21) от приращения единственной неинвариантной величины  $AB$ .

Аналогичные тождества для производящего функционала  $S$ -матрицы будут рассмотрены в следующих разделах.

**2. Поперечность и калибровочная инвариантность  $S$ -матрицы в электродинамике.** Электромагнитное поле есть поле Янга — Миллса для однопараметрической абелевой группы  $\Gamma$ . В этом случае преобразование (1) сводится к градиентному, функционал (11) обращается в единицу, а калибровочная инвариантность некоторого функционала  $F(B)$  означает его поперечность:  $F(B + \delta u) = F(B)$ .

Рассмотрим функционал  $S$ -матрицы (20) с произвольным поперечным функционалом действия  $S_f \equiv S$ , не зависящим от



выбора калибровки, т. е. от  $n$  и  $c$ . Из (20) видно, что при градиентном преобразовании  $A \rightarrow A + du$  изменяется лишь аргумент  $\delta$ -функции и это изменение равносильно сдвигу  $c \rightarrow c - pdu$  параметра  $c$ :  $R(A + du; n, c) = R(A; n, c - pdu)$ . С другой стороны, аргумент  $\delta$ -функции не изменится, если градиентное преобразование  $A \rightarrow A + du$  сопроводить аналогичным преобразованием  $B \rightarrow B + du$  переменной интегрирования; последнее не меняет функционалов  $S(B)$  и  $AKB$  вследствие их поперечности, что и доказывает поперечность (вне массовой поверхности) функционала  $S$ -матрицы (20) и, как следствие, его независимость от  $c$  и независимость  $S$ -матрицы в обобщенной фейнмановской калибровке от выбора способа усреднения, в частности от выбора ядра  $d$ .

Изменение  $n \rightarrow n'$  вектора  $n$  в калибровочном условии также можно воспроизвести градиентным преобразованием  $B$ , положив:  $B' = B + du$ , где  $u = (n'\partial)^{-1}(n - n')$ . Якобиан этого преобразования не единица, а некоторая константа, которая компенсируется соответствующим преобразованием нормировочной постоянной перед интегралом (20) (последняя в (7), (8) и (20) одинакова), и мы приходим к выводу, что нормированный функционал (20) не зависит от  $n$ . Тем самым мы доказали поперечность и калибровочную инвариантность (точнее, независимость от выбора калибровки) функционала  $S$ -матрицы (20) вне поверхности масс при любом поперечном действии  $S(B)$ .

В реальной квантовой электродинамике помимо электромагнитного поля  $B$  имеется спинорное дираковское поле  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  (см. § II.3). Аргументами функционала  $S$ -матрицы будут теперь  $A$ ,  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$ , где  $\eta$  и  $\bar{\eta}$  — антикоммутирующие переменные, соответствующие фермионному полю  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ . Множитель перед интегралом в правой части (20) заменится на  $\exp i[AKA/2 + \bar{\eta}K'\eta]$ , где  $\bar{\eta}K'\eta$  — функционал свободного действия (II.41) для фермионного поля, а интеграл (20) примет вид

$$\text{const} \int D\bar{\psi} D\psi DB \delta[n(B - A) + c] \exp i \times \\ \times [S(\bar{\psi}, \psi, B) - AKB - \bar{\psi}K'\eta - \bar{\eta}K'\psi], \quad (22)$$

где  $S(\bar{\psi}, \psi, B)$  — полный функционал действия для электромагнитного и спинорного полей. В квантовой электродинамике этот функционал инвариантен относительно совместного калибровочного преобразования

$$B^a \rightarrow B^a + \partial^a u, \quad \psi \rightarrow \psi \exp(i\epsilon u), \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp(-i\epsilon u). \quad (23)$$

Константа связи  $\epsilon$  имеет смысл заряда фермионной частицы.

При нулевых значениях аргументов  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$  все сводится к рассмотренному ранее случаю, только вместо градиентного преобразования поля нужно говорить о совместном калибровочном преобразовании (23). Это доказывает поперечность и независи-

мость от выбора калибровки чисто векторной части  $S$ -матрицы (диаграмм без внешних фермионных линий) вне поверхности масс. При отличных от нуля  $\eta$  и  $\bar{\eta}$  доказательство теряет силу вследствие неинвариантности слагаемых  $\bar{\psi}K'\eta$  и  $\bar{\eta}K'\psi$  в показателе (22), которые в первом порядке по  $u$  получают приращения  $-i\epsilon\psi u K'\eta$  и  $i\epsilon\bar{\eta}K'u\psi$  соответственно. Сделаем замену  $A \rightarrow A + \delta u$  и сопроводив ее калибровочным преобразованием (23) так, чтобы не изменился аргумент  $\delta$ -функции в (22), получим тождество Ворда для производящего функционала  $S$ -матрицы:

$$\delta_u R(A, \bar{\eta}, \eta) = \exp(\dots) \langle \epsilon \bar{\eta} K' u \psi - \epsilon \bar{\psi} u K' \eta \rangle, \quad (24)$$

где  $\exp(\dots)$  обозначает приведенный выше множитель перед интегралом, а символ  $\langle F \rangle$  обозначает интеграл (22) с введенным дополнительно под знак интеграла функционалом  $F$ . В нашем случае  $F$  есть приращение в первом порядке по  $u$  показателя экспоненты в (22).

Допустим теперь, что аргументы  $\eta, \bar{\eta}$  находятся на своей поверхности масс, т. е. удовлетворяют свободному уравнению  $K'\eta = \bar{\eta}K' = 0$ . Мы хотим показать, что в этом случае правая часть (24) обращается в нуль, т. е. функционал  $S$ -матрицы на поверхности масс для фермионов является поперечным по векторному аргументу  $A$ . На первый взгляд это кажется очевидным, поскольку, например, интеграл  $\langle \bar{\eta}K'u\psi \rangle$  казалось бы равен нулю тождественно при условии  $\bar{\eta}K' = 0$ . В конечном счете это верно, но не столь просто, — аналогичное суждение относительно интеграла  $\langle \bar{\eta}K'\psi \rangle$  было бы уже неверным. Дело в том, что при взятии функционального интеграла поле  $\psi$  из формы  $\bar{\eta}K'\psi$  свернется с каким-нибудь полем  $\bar{\psi}$  и даст линию — фермионный пропагатор  $\Delta' = iK'^{-1}$ . В итоге появится выражение  $\bar{\eta}K'\Delta' \dots$ , представляющее собой неопределенность типа  $0 \cdot \infty$ : в импульсном представлении нуль  $\bar{\eta}K'$  умножается на полюс  $\Delta' = iK'^{-1}$  и ответ зависит от способа раскрытия неопределенности.

В нашем случае подобной проблемы не возникает ввиду наличия множителя  $u(x)$ , разделяющего нуль  $\bar{\eta}K'$  и полюс  $\Delta'$ . Вставка этого множителя в импульсном представлении означает наличие передачи импульса между  $\bar{\eta}K'$  и  $\Delta'$ , так что полюс  $\Delta'$  оказывается полюсом по другому (сравнительно с  $\bar{\eta}K'$ ) импульсу и не может сократить нуль  $\bar{\eta}K'$ .

Эти рассуждения доказывают поперечность по аргументу  $A$  функционала  $S$ -матрицы на массовой поверхности фермионных аргументов  $\eta, \bar{\eta}$ . Как обычно, из поперечности следует незави-

симось от выбора параметра  $c$  в калибровочном условии и, как следствие, независимость  $S$ -матрицы в обобщенной фейнмановской калибровке от выбора ядра  $d$ .

Столь же просто показать, что изменение вектора  $n$  в калибровочном условии сводится к ренормировочному преобразованию фермионных аргументов: на фермионной поверхности масс  $R(A, \bar{\eta}, \eta; n) = R(A, \bar{\eta}\bar{Z}, Z\eta; \partial)$ , где  $R(A, \bar{\eta}, \eta; \partial)$  — функционал  $S$ -матрицы в лоренцовой калибровке с  $n = \partial$ ,  $Z$  — линейная операция на множестве решений свободного уравнения  $K'\eta = 0$ ,  $\bar{Z} = \gamma^0 Z + \gamma^0$  — дираковски сопряженная операция. Операция  $Z$  играет роль ренормировочного растяжения (см. § 1.9) и явно зависит от выбора  $n$  в калибровочном условии. Мы говорим „операция”, а не „константа перенормировки”, так как при  $n \neq \partial$  лоренц-инвариантность нарушена и  $Z$  — некоторая нетривиальная матрица по спинорным значкам  $\eta$ .

Таким образом, ренормированная  $S$ -матрица на фермионной поверхности масс поперечна и не зависит от параметров  $n$  и  $c$  в калибровочном условии (относительно связи поперечности и физической унитарности смотри следующий раздел).

**3. Поперечность и калибровочная инвариантность  $S$ -матрицы на поверхности масс для поля Янга — Миллса.** Под массовой поверхностью для векторного поля  $A$  понимается, как обычно, множество решений свободного уравнения  $KA = 0$ . Вследствие поперечности  $K$  любой чисто продольный вектор  $di$  является решением. Общее решение является суперпозицией некоторого чисто продольного вектора и вектора, принадлежащего *физической поверхности масс*. Последняя определяется как множество всех решений волнового уравнения  $\square A = 0$ , удовлетворяющих одновременно и лоренцову, и кулоновскому калибровочным условиям:  $\partial_\alpha A^\alpha = \partial_i A^i = 0$  (два реальных состояния фотона с поперечной поляризацией). Полная массовая поверхность инвариантна относительно градиентных преобразований, что позволяет говорить о поперечности  $S$ -матрицы на поверхности масс.

Первое доказательство поперечности для  $S$ -матрицы поля Янга — Миллса в лоренцовой калибровке содержится в работе [31]. Здесь мы приведем без вывода результаты [29] для калибровок с произвольными  $n$  и  $c$ . Они получаются, как и в электродинамике, путем анализа тождеств Ворда — Славнова для функционала  $S$ -матрицы (20). Отметим, что использование этих тождеств непосредственно для функционала  $S$ -матрицы, а не для функций Грина существенно упрощает все доказательства.

Как и в электродинамике, поперечность, независимость от  $c$  и независимость  $S$ -матрицы в обобщенной фейнмановской калибровке от выбора  $d$  есть вещи эквивалентные, так как из (20) видно, что градиентное преобразование аргумента  $A$  равносильно сдвигу параметра  $c$ .

Тождество Ворда — Славнова получается стандартным способом: изменения на  $\delta n$  и  $\delta c$  параметров калибровочного условия компенсируются в аргументе  $\delta$ -функции в (20) преобразованием  $B \rightarrow B - \mathcal{D}M^{-1}[\delta n(B-A) + \delta c]$  переменной интегрирования. Величина  $DB\omega_f(B)$  инвариантна относительно этого преобразования с точностью до несущественного числового множителя, который компенсируется соответствующим преобразованием нормировочного коэффициента в (20), так что под знаком интеграла (20) приращение получает только форма  $A\bar{K}B$ . Анализируя получающееся тождество, можно показать, что на массовой поверхности функционал (20) является поперечным по аргументу  $A$  при любом  $n$  со всеми вытекающими отсюда последствиями (см. выше) и что при тех же условиях вся зависимость от выбора  $n$  содержится в ренормировке волновой функции:  $R(A; n) = R(ZA; \partial)$ , где  $R(A; \partial)$  — функционал  $S$ -матрицы в лоренцовой калибровке,  $Z$  — некоторая зависящая от  $n$  линейная операция на поверхности масс  $A$ , т. е. на множестве решений уравнения  $KA = 0$ .

Свойство поперечности  $S$ -матрицы на поверхности масс позволяет заменить в аналогичном (I.139) выражении простую свертку  $n^{\alpha\beta}$  для векторного поля  $B^\alpha$  на  $\{PnP\}^{\alpha\beta}$ , где  $P$  — проектор на физическую поверхность масс. Это равносильно исключению нефизических промежуточных состояний (с продольными и временными фотонами) из условия унитарности.

Следует сказать, что для поля Янга — Миллса все рассуждения об  $S$ -матрице относятся лишь к формально определенному соотношению (20) функционалу. В отличие от электродинамики физически корректного определения асимптотических состояний и  $S$ -матрицы здесь нет (инфракрасные расходимости).

## ГЛАВА IV. || ЕВКЛИДОВА ТЕОРИЯ ПОЛЯ

### § 1. ЕВКЛИДОВ РАЗВОРОТ

**1. Определения.** Евклидову теорию можно формально определить как то, что получается из обычной (псевдоевклидовой) теории при замене  $t \rightarrow -it$ . Эта замена переводит операцию  $K$  в уравнении (1.2) в *евклидову операцию*  $K_e$ , а квантовое уравнение Шредингера переходит в уравнение типа теплопроводности  $i \partial \psi / \partial t = \mathbf{H} \psi \rightarrow -\partial \psi / \partial t = \mathbf{H} \psi$  (предполагается, что  $\mathbf{H}$  не зависит явно от времени).

Евклидов оператор развития  $\exp \mathbf{H}(\tau_2 - \tau_1)$  в шредингеровском представлении совпадает с *матрицей плотности*  $\rho = \exp(-\beta \mathbf{H})$ , причем время развития определяет температуру  $T$ :  $\beta \equiv 1/kT = \tau_1 - \tau_2$ , где  $k$  — постоянная Больцмана. Поэтому евклидова теория представляет с точки зрения физики самостоятельный интерес как теория  $\rho$ -матрицы.

Зависимость от времени операторов в представлении взаимодействия, в частности операторов свободного поля, определяется в евклидовой теории соотношением  $a(t) = \exp(t \mathbf{H}_0) \times \times a \exp(-t \mathbf{H}_0)$ ; заменив  $\mathbf{H}_0$  на  $\mathbf{H}$ , получим *евклидово* или *температурное гайзенберговское представление*. Отметим, что преобразование  $a \rightarrow a(t)$  неунитарно и меняет свойства эрмитовости: если оператор  $a$  эрмитов, то  $a(t)$  обладает свойством не обычной, а *комбинированной эрмитовости*:  $a(t) = a^+(-t)$ .

Евклидов оператор развития в представлении взаимодействия

$$U_e(\tau_1, \tau_2) = \exp(\tau_1 \mathbf{H}_0) \exp \mathbf{H}(\tau_2 - \tau_1) \exp(-\tau_2 \mathbf{H}_0) \quad (1)$$

удовлетворяет уравнению  $-\partial U_e(\tau_1, \tau_2) / \partial \tau_1 = \mathbf{V}(\tau_1) U_e(\tau_1, \tau_2)$ , в котором  $\mathbf{V}(\tau)$  — гамильтониан взаимодействия в евклидовом представлении взаимодействия. Решение этого уравнения с условием  $U_e(\tau, \tau) = 1$  представляется аналогичной (1.57) дайсоновой  $T$ -экспонентой:

$$U_e(\tau_1, \tau_2) = T_D \exp \left( - \int_{\tau_2}^{\tau_1} dt \mathbf{V}(t) \right). \quad (2)$$

Евклидовы функции Грина определяются обычным соотношением (I.58), но операторы поля под знаком  $T$ -произведения берутся теперь в евклидовом гайзенберговском представлении.

Различные формулы приведения для операторных функционалов от свободного поля (теоремы Вика) и правила перехода от дайсоновых  $T$ -произведений к виковским в операторе развития и функциях Грина справедливы и для евклидовой теории. Разница лишь в самом операторе свободного поля, который получается из обычного (псевдоевклидового) стандартной заменой  $t \rightarrow -it$ , что приводит к изменению простой ( $n$ ) и хронологической ( $\Delta$ ) сверток:

$$\begin{aligned} n_e(x, x') &\equiv n_e(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = n(-it, \mathbf{x}; -it', \mathbf{x}'), & (3) \\ \Delta_e(x, x') &= \theta(t - t') n_e(x, x') + x \theta(t' - t) n_e(x', x). \end{aligned}$$

В спектральных представлениях типа (II.6), (II.27) переход  $\Delta \rightarrow \Delta_e$  соответствует одновременной замене  $t \rightarrow -it$ ,  $E \rightarrow iE$ ,  $dE \rightarrow idE$ .

Соотношения (I.31), устанавливающие связь между свертками и ядром свободного действия  $K$ , принимают в евклидовом варианте следующий вид:  $K_e n_e = K_e n_e^\dagger = 0$ ,  $K_e \Delta_e = -1$ .

## 2. Формальный евклидов разворот функционала действия.

В этом разделе мы рассмотрим процедуру евклидового разворота, с помощью которой данной псевдоевклидовой теории ставится в соответствие некоторая евклидова теория — евклидов образ исходной теории. Все построения будут совершенно формальными, в конкретных случаях законность тех или иных операций должна обосновываться особо.

Разворачивать произвольную функцию  $F(x_1 \dots x_n)$  мы будем следующим техническим приемом Швингера: для вещественного числа  $z$  определим функцию  $F^{(z)}(x_1 \dots x_n) = F(x_1^z \dots x_n^z)$ , где  $x^z = (zt, \mathbf{x})$ . Допустим, не стремясь обосновывать подобные предположения, что  $F^{(z)}$  как функция  $z$  допускает аналитическое продолжение на комплексные  $z$ , и назовем *развернутой функцией* продолжение в точку  $z = -i$ , для которого примем специальное обозначение  $F^{(-i)} \equiv \bar{F}$ .

Интегралы будем разворачивать по следующему правилу:

$$\begin{aligned} &\int \dots \int dx_1 \dots dx_n F(x_1 \dots x_n) = \\ &= \int \dots \int dx_1^z \dots dx_n^z F(x_1^z \dots x_n^z) = \\ &= z^n \int \dots \int dx_1 \dots dx_n F^{(z)}(x_1 \dots x_n) = \\ &= (-i)^n \int \dots \int dx_1 \dots dx_n \bar{F}(x_1 \dots x_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Для функции одной переменной это правило справедливо тогда, когда контур интегрирования по  $t$  можно развернуть так, чтобы

он шел по мнимой оси сверху вниз, отбросив при этом интегралы по дугам.

В импульсном представлении  $p \rightarrow p^z \equiv (z^{-1} p_0, \mathbf{p})$  и  $\int dp_0 \dots \dots \rightarrow i \int dp_0 \dots$ , т. е. после разворота контур интегрирования по  $p_0$  идет по мнимой оси снизу вверх. Форма преобразования Фурье не меняется:  $px = p^z x^z = p_0 t - \mathbf{p} \mathbf{x}$ .

Взяв функционал действия общего вида

$$S(\varphi) = \sum_n \frac{1}{n!} A_n \varphi^n \equiv \\ \equiv \sum_n \frac{1}{n!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_n A_n(x_1 \dots x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)$$

и развернув все интегралы по правилу (4), получим

$$iS(\bar{\varphi}) = \sum_n \frac{1}{n!} A_n \bar{\varphi}^n \equiv S_e(\bar{\varphi}), \quad (5)$$

где  $\bar{\varphi}$  — развернутое поле  $\varphi$ ,  $A_{ne} \equiv (-i)^{n-1} \bar{A}_n$ . Евклидову теорию с действием  $S_e$  будем называть *евклидовым образом псевдоевклидовой теории с действием S*.

Рассмотрим в качестве примера разворот соотношений (1.31). Согласно определению евклидова операция  $K_e$  есть  $\bar{K}$ , а из (3) видно, что евклидова свертка  $\Delta_e$  совпадает с  $\bar{\Delta}$ , поскольку  $\theta$  — функция при развороте — не меняется:  $\theta(zt) \equiv \theta(t)$ . Ядро единичной операции в правой части соотношения  $K\Delta = i$  содержит  $\delta(t-t')$ , которая получает при развороте множитель  $i$ :  $\delta(zt) = z^{-1} \delta(t)$ . Поэтому соотношение  $K\Delta = i$  переходит при развороте в  $K_e \Delta_e = -1$ .

**3. Евклидов разворот функций Грина.** Из сказанного в п. 1 следует, что в евклидовой теории производящие функционалы  $S$ -матрицы и функций Грина определяются обычными соотношениями (1.84), (1.88) с заменой  $\Delta \rightarrow \Delta_e$  и  $iS_v \rightarrow S_{ve}$ , где  $S_{ve}$  — *евклидов функционал взаимодействия*, представляющий Sum-форму квантового оператора  $-\int dt \mathbf{V}(t)$ , являющегося показателем экспоненты в (2).

Если оператор  $\mathbf{V}(t)$  не зависит явно от времени и не содержит производных поля по времени, то представляющий его Sum-форму операторный функционал будет точно таким же, как и в псевдоевклидовой теории, а изменится лишь его аргумент — оператор свободного поля:  $\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\varphi}_e$ . В этом случае евклидов функционал взаимодействия будет совпадать с псевдоевклидовым:  $S_{ve}(\varphi) = S_v(\varphi)$ . Отметим, что это согласуется с общим правилом разворота (5), согласно которому  $iS_v(\varphi) = S_{ve}(\bar{\varphi})$ . В нашем случае замена  $t \rightarrow -it$  проявляется лишь в двух местах: во-первых,  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ , во-вторых,  $i \int dt \dots \rightarrow \int dt \dots$ , откуда видно, что

развернутый по правилам предыдущего раздела функционал  $iS_v(\varphi)$  перейдет в  $S_v(\bar{\varphi})$ , что и утверждалось. Те же аргументы доказывают, что содержащая одно интегрирование по времени квадратичная форма  $iS_0'(\varphi) \equiv i\varphi K\varphi/2$  переходит при развороте в евклидову форму  $S'_{0e}(\bar{\varphi}) \equiv \bar{\varphi} K_e \bar{\varphi}/2$ .

Рассмотрим произвольную диаграмму полной функции Грина  $G_n(x_1 \dots x_n)$  псевдоевклидовой теории с действием  $S(\varphi)$ . Выполним евклидов разворот аргументов  $x_1 \dots x_n$  одновременно с аргументами интегрирования и собрав возникающие при этом множители  $\pm i$ , нетрудно убедиться, что мы придем к соответствующей диаграмме евклидовой функции Грина  $G_{ne}$ , иначе говоря, функции Грина псевдоевклидовой теории переходят при развороте в функции Грина ее евклидоваго образа:

$$\bar{G}_n(x_1 \dots x_n) = G_{ne}(x_1 \dots x_n). \quad (6)$$

Это рассуждение можно провести компактно на языке функциональных интегралов: сделав в представлении (I.165) замену  $x_i \rightarrow x_i^z$ , перейдя затем в точку  $z = -i$  и воспользовавшись равенством (5), придем к интегралу  $\text{const} \int D\varphi \bar{\varphi}(x_1) \dots \varphi(x_n) \times \times \exp S_e(\bar{\varphi})$ , в котором можно сделать замену  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$  переменной интегрирования. Якобиан замены есть несущественная постоянная: при вещественном  $z$  якобиан  $D\varphi/D\varphi^{(z)}$  является определителем линейной операции с ядром  $\delta\varphi(x)/\delta\varphi^{(z)}(x') = \delta(x - x^{(z)})$ , которое не зависит функционально от  $\varphi$ .

Таким образом, мы приходим к равенству

$$\bar{G}_n(x_1 \dots x_n) = \text{const} \int D\bar{\varphi} \bar{\varphi}(x_1) \dots \bar{\varphi}(x_n) \exp S_e(\bar{\varphi}) \quad (7)$$

с нормировкой  $\bar{G}_0 = 1$  для свободной теории. Это равенство доказывает (6), так как правая часть (7) представляет (во всяком случае в теории возмущений) функцию Грина  $G_{ne}$  евклидовой теории с действием  $S_e$  (подробнее см. § 2).

Отбывая связанные части  $G_n$  в (6), получаем

$$\bar{W}_n(x_1 \dots x_n) = W_{ne}(x_1 \dots x_n). \quad (8)$$

При  $n = 0$  величина  $W_0$  есть константа (сумма связанных вакуумных петель), не содержащая аргументов  $x$ , так что  $\bar{W}_0 = W_0$  и из (8) следует  $W_0 = W_{0e}$ . В трансляционно-инвариантных по времени теориях последнее равенство заведомо некорректно. Действительно, в псевдоевклидовой теории величина  $W_0$ , совпадающая с логарифмом вакуумного ожидания  $S$ -матрицы, определяет согласно (I.74) сдвиг энергии основного состояния при включении взаимодействия:  $W_0 = -i \Delta E \int dt$ . Евклидов сдвиг  $\Delta E_e$  определяется аналогично:  $W_{0e} = -\Delta E_e \int dt$ . Ниже будет показано, что величины  $\Delta E_e$ , как и  $\Delta E$ , вещественна. Следовательно,  $W_0$  — чисто мнимая величина, а  $W_{0e}$  — чисто вещественная, и равенство между ними невозможно.



Дело в том, что при получении (6), (8) делался разворот всех времен интегрирования в диаграммах, в частности, был развернут и интеграл  $\int dt$ , выделяющийся в виде множителя из каждой связной вакуумной петли. Разворачивая этот множитель по правилу (4), мы в сущности постулировали равенство  $\int dt = z \int dt = -i \int dt$ , являющееся, конечно, некорректным. Ясно, что именно эта подстановка превращает чисто мнимую величину  $W_0$  в чисто вещественную величину  $W_{0e}$ .

В действительности следовало бы разворачивать коэффициент при  $\int dt$ , т. е.  $\Delta E$ , и сравнивать результат с соответствующим коэффициентом при  $\int dt$  в евклидовых диаграммах. В итоге мы пришли бы к равенству  $\Delta E = \Delta E_e$ , являющемуся корректным заменителем равенства  $W_0 = W_{0e}$ .

Случай  $n = 0$  в (8) особый — при  $n > 0$  равенства (8) не содержат подобных некорректностей.

Мы рассматривали процедуру евклидового разворота формально, но при определенных предположениях ее можно обосновать совершенно строго (см., например, [32]).

**4. Свойства полей  $\bar{\varphi}$  и действия  $S_e(\bar{\varphi})$ .** Свойства вещественности развернутых полей  $\bar{\varphi}$  в интеграле (7) отличаются от свойств исходных полей  $\varphi$ . Например, если  $\varphi$  вещественно, то  $\bar{\varphi}$ , будучи аналитическим продолжением  $\varphi$  на мнимую ось  $t$ , обладает свойством *комбинированной вещественности*  $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}^*(-t, x) \equiv \bar{\varphi}^+(x)$ , взаимная сопряженность полей  $\varphi_2 = \varphi_1^*$  переходит после разворота в *комбинированную сопряженность*  $\bar{\varphi}_2(x) = \bar{\varphi}_1^*(-t, x) \equiv \bar{\varphi}_1^+(x)$ , и т. д. Свойства комбинированной вещественности в точности соответствуют свойствам комбинированной эрмитовости операторов поля в представлении взаимодействия.

Обратимся теперь к функционалу  $S_e(\bar{\varphi})$  и покажем, что для действия, представляющегося интегралом по времени от вещественного лагранжиана, соответствующее *евклидово действие*  $S_e(\bar{\varphi})$  также вещественно.

Действительно, разворачивая интеграл  $iS(\varphi) = i \int dt \mathcal{L}(t)$  по правилу (4), придем к интегралу  $\int dt \bar{\mathcal{L}}(t)$ , представляющему согласно (5) евклидово действие  $S_e(\bar{\varphi})$ . Из вещественности  $\mathcal{L}(t)$  следует комбинированная вещественность  $\bar{\mathcal{L}}(t)$ ; действие  $S_e(\bar{\varphi})$ , будучи интегралом по симметричному промежутку от комбинированно-вещественной функции, вещественно.

Одновременная вещественность  $S_e(\bar{\varphi})$  и  $S(\varphi)$  находится в очевидном противоречии с равенством (5), что говорит о незаконности формального евклидового разворота действия (тем не менее, выведенные, исходя из (5), равенства (8) при  $n \neq 0$  являются верными).

Следует подчеркнуть, что вещественность евклидового действия гарантирована лишь тогда, когда  $S_e$  записывается в виде функционала от развернутых полей  $\bar{\varphi}$ . В частности, в евклидовом варианте  $\varphi_2 K_e \varphi_1 = \int dx \varphi_2 (-\partial/\partial t - \mathcal{E}) \varphi_1$  нерелятивистской формы (II.20) поля  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  следует считать не просто комплексно- (как в псевдоевклидовой теории), а комбинированно-сопряженными. В этом случае форма  $\int dx \varphi_2 \cdot \partial \varphi_1 / \partial t$  будет вещественной, тогда как для комплексно-сопряженных  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$  эта форма является чисто мнимой. Форма  $\int dx \varphi_2 \mathcal{E} \varphi_1$ , равно как и функционалы (II.1), (II.33), для которых операция  $K$  содержит лишь производные второго порядка по времени, вещественна как для исходных, так и для развернутых полей.

В заключение отметим еще одно свойство  $S_e(\bar{\varphi})$ : отсутствие знакоопределенности квадратичных форм свободного действия. Рассмотрим в качестве примера евклидов вариант квантовомеханического осциллятора (II.1), для которого  $S'_{0e}(\bar{\varphi}) = = \bar{\varphi} K_e \bar{\varphi} / 2$ , где  $K_e = m(\partial^2/\partial t^2 - \omega^2)$ . Если бы поле  $\varphi$  было вещественным, то эта форма была бы отрицательно-определенной (в импульсном представлении  $K_e = -m(E^2 + \omega^2)$ ). Но для развернутого поля  $\bar{\varphi}$ , обладающего свойством комбинированной вещественности, это уже не так. Равенство  $\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}^*(-t)$  показывает, что независимой переменной можно считать комплексную функцию  $\bar{\varphi}(t)$  только на одной полуоси времени, например на полуоси  $t \geq 0$ . Выразив действие через независимые переменные  $\theta(t)\bar{\varphi}$ ,  $\theta(t)\bar{\varphi}^*$  при учете четности  $K_e$  относительно замены  $t \rightarrow -t$ , получаем  $2S'_{0e}(\bar{\varphi}) = \int dt \theta(t) [\bar{\varphi} K_e \bar{\varphi} + \bar{\varphi}^* K_e \bar{\varphi}^*]$ . Введя двухкомпонентное поле  $\Phi = (\bar{\varphi}, \bar{\varphi}^*)$ , приходим к форме

$$S'_{0e}(\Phi) = \frac{1}{2} \int dt \theta(t) \Phi^* \begin{pmatrix} 0 & K_e \\ K_e & 0 \end{pmatrix} \Phi. \quad (9)$$

Эрмитовость входящей сюда двумерной матрицы обеспечивает вещественность формы, но в то же время видно, что она не знакоопределена: собственные значения двумерной матрицы равны  $\pm |K_e|$ , где  $|K_e|$  — абсолютные величины собственных значений  $K_e$ . Можно сказать, что форма (9) является „максимально неопределенной” — ее собственные значения расположены симметрично относительно нуля.

Нетрудно убедиться, что это верно для любой евклидовой формы  $S'_{0e}(\bar{\varphi})$ .

**5. Разворот группы Лоренца в  $O_4$ .** В этом разделе мы покажем, что любое лоренц-инвариантное действие  $S(\varphi)$  переходит при евклидовом развороте в  $O_4$ -инвариантное (или евклидово инвариантное) действие  $S_e(\bar{\varphi})$ .

Обозначим через  $\mathbf{R}$  пространство всех вещественных четырехмерных векторов  $\mathbf{x} = t, \mathbf{x}$ ;  $\mathbf{C}$  — пространство комплексных  $\mathbf{x}$ ;  $\mathbf{C}_e \subset \mathbf{C}$  — подмножество векторов вида  $e\mathbf{x}$ , где  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$ , а  $e$  — диагональная матрица с элементами  $e_{00} = i, e_{11} = e_{22} = e_{33} = 1$ .

Преобразование Лоренца описывается  $4 \times 4$ -матрицей  $\Lambda$ , удовлетворяющей условию  $\Lambda^T g \Lambda = g$ , где  $g = -e^2$  — метрический тензор. Обозначим через  $L$  группу собственных преобразований Лоренца (вещественные  $\Lambda$  с  $\det \Lambda = 1$  и  $\Lambda_{00} > 0$ );  $L_c$  — группу комплексных преобразований с  $\det \Lambda = 1$ ;  $L_e$  — подгруппу  $L_c$ , состоящую из всех комплексных матриц  $\Lambda \in L_c$ , переводящих  $\mathbf{C}_e$  в себя. Ясно, что  $L_e$  состоит из тех  $\Lambda \in L_c$ , у которых элементы  $\Lambda_{0i}$  и  $\Lambda_{j0}$  чисто мнимые, а прочие элементы вещественны. Такие  $\Lambda$  унитарны, и обратно: всякая унитарная матрица  $\Lambda \in L_c$  содержится в  $L_e$ .

Сопоставим каждой  $\Lambda \in L_e$  матрицу  $\Lambda_e = e \Lambda e^{-1}$ . Матрицы  $\Lambda_e$  вещественны, ортогональны

$$(\Lambda_e^T \Lambda_e = e^{-1} \Lambda^T e^2 \Lambda e^{-1} = -e^{-1} \Lambda^T g \Lambda e^{-1} = 1)$$

и имеют единичный определитель, так что соответствие  $\Lambda \rightarrow \Lambda_e$  есть изоморфизм между  $L_e$  и  $O_4$ . Поэтому всякое представление  $L_c$  в качестве подпредставления содержит представление  $L_e \sim O_4$ .

Обозначим через  $\mathcal{N}_R(\theta)$ ,  $\mathcal{N}_c(\theta)$  пространства соответственно вещественных и комплексных полей, заданных на области  $\theta$  (т. е.  $\mathbf{x} \in \theta$ ). Пусть  $\varphi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$  — некоторое поле (у многокомпонентного поля подразумевается значок), на котором задано линейное представление группы  $L$ :

$$\varphi_\Lambda(\mathbf{x}) = Q(\Lambda) \varphi(\Lambda^{-1}\mathbf{x}). \quad (10)$$

Расширим исходное пространство полей  $\varphi(\mathbf{x})$  до  $\mathcal{N}_c(\mathbf{C})$ . Если поле было комплексным, то расширяется лишь область определения, причем расширение с  $\mathbf{R}$  до  $\mathbf{C}$  понимается как аналитическое продолжение  $\varphi(\mathbf{x})$ ; если же исходное поле было вещественным, то расширяется и область значений  $\varphi$ :  $\mathcal{N}_R \rightarrow \mathcal{N}_c$ .

В пространстве  $\mathcal{N}_c(\mathbf{C})$  представление (10) естественным путем продолжается до представления комплексной группы  $L_c$ ; сузив затем область определения  $\varphi(\mathbf{x})$  до  $\mathbf{C}_e$  и ограничившись  $\Lambda \in L_e$ , получим представление  $L_e$  на пространстве  $\mathcal{N}_e(\mathbf{C}_e)$ .

Сопоставим теперь каждой  $\varphi \in \mathcal{N}_c(\mathbf{C}_e)$  функцию  $\bar{\varphi} \in \mathcal{N}_c(\mathbf{R})$  („евклидов образ“), определенную соотношением

$$\bar{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(-it, \mathbf{x}) = \varphi(e^{-1}\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}. \quad (11)$$

Представление  $L_e$  на  $\mathcal{N}_c(\mathbf{C}_e)$  изоморфно представлению  $O_4$  на  $\mathcal{N}_c(\mathbf{R})$ . Действительно, из (10) имеем  $\varphi_\Lambda(\mathbf{x}) = Q(\Lambda) \varphi(\Lambda^{-1}\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_e$ ,  $\Lambda \in L_e$ . Согласно определению,  $\bar{\varphi}(e\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$  и  $\overline{(\varphi_\Lambda)}(e\mathbf{x}) = \overline{\varphi_\Lambda}(\mathbf{x})$ , откуда

$$\overline{(\varphi_\Lambda)}(e\mathbf{x}) = Q(\Lambda) \varphi(\Lambda^{-1}\mathbf{x}) = Q(\Lambda) \bar{\varphi}(e\Lambda^{-1}\mathbf{x}) = Q(\Lambda) \bar{\varphi}(e\Lambda^{-1}e^{-1}e\mathbf{x}).$$

Введя вместо  $x \in C_e$  вещественную независимую переменную  $y = ex \in \mathbf{R}$ , перепишем предыдущее соотношение в виде  $(\overline{\varphi_\Lambda})(y) = Q(\Lambda) \overline{\varphi}(e\Lambda^{-1}e^{-1}y)$ ,  $\Lambda \in L_e$ ,  $y \in \mathbf{R}$ . Изоморфизм между  $L_e$  и  $O_4$  позволяет рассматривать это равенство как представление  $O_4$  и писать для любых  $\Lambda_e \in O_4$ ,  $y \in \mathbf{R}$ :  $(\overline{\varphi})_{\Lambda_e}(y) = Q(e^{-1}\Lambda_e e) \overline{\varphi}(\Lambda_e^{-1}y) \equiv \overline{Q}(\Lambda_e) \overline{\varphi}(\Lambda_e^{-1}y)$ .

Все эти рассуждения можно коротко суммировать формулой  $(\overline{\varphi_\Lambda}) = (\overline{\varphi})_{\Lambda_e}$ , определяющей представление  $O_4$  на развернутом поле  $\overline{\varphi}$  по представлению  $L_e$  на исходном поле  $\varphi$ . Всякий лоренц-инвариантный функционал  $S(\varphi)$  переходит при развороте по правилу (5) в  $O_4$ -инвариантный функционал  $S_e(\overline{\varphi})$ , поскольку равенство  $S(\varphi) = S(\varphi_\Lambda)$ ,  $\Lambda \in L_c$  после разворота принимает вид  $S_e(\overline{\varphi}) = S_e((\overline{\varphi_\Lambda})) = S_e((\overline{\varphi})_{\Lambda_e})$ .

При продолжении различных соотношений, включающих операцию комплексного сопряжения, следует соблюдать осторожность. Например, равенство  $\varphi(x) = \varphi^*(x)$  нужно сначала переписать в виде  $\varphi(x) = \varphi^*(x^*)$ , после чего его уже можно продолжать на все  $x \in \mathbf{C}$  (при переходе к  $\overline{\varphi}$  это равенство превращается в условие комбинированной вещественности). Точно так же свойство вещественности исходного представления  $Q(\Lambda)$  продолжается на все  $\Lambda \in L_c$  в форме  $Q(\Lambda) = Q^*(\Lambda^*)$ . Для  $\Lambda \in L_e$  имеем  $\Lambda^* = T\Lambda T^{-1}$ , где  $T = -g$  — матрица отражения времени, и условие вещественности  $Q(\Lambda)$  принимает вид  $\overline{Q}(\Lambda_e) = \overline{Q}^*(T\Lambda_e T^{-1})$ .

В комплексном случае  $\varphi$  и  $\varphi^*$  следует рассматривать как два независимых поля  $\varphi \equiv \varphi_1$ ,  $\varphi^* \equiv \varphi_2$ , на которых действуют представления  $Q_1(\Lambda)$  и  $Q_2(\Lambda)$ ; каждое из них продолжается независимо описанным выше способом. Равенство  $\varphi_2 = \varphi_1^*$  продолжается в виде  $\varphi_2(x) = \varphi_1^*(x^*)$  и переходит во взаимную комбинированную сопряженность развернутых полей. Соотношение  $(\varphi_\Lambda)^* = (\varphi^*)_\Lambda$ , или, эквивалентно,  $Q_2(\Lambda) = Q_1^*(\Lambda)$  продолжается в виде  $Q_2(\Lambda) = Q_1^*(\Lambda^*)$  и для развернутых полей принимает форму  $\overline{Q}_2(\Lambda_e) = \overline{Q}_1^*(T\Lambda_e T^{-1})$ . Если же  $\varphi_2(x) = \gamma \varphi_1^*(x)$ , где  $\gamma$  — некоторая фиксированная матрица (например,  $\gamma^0$  для дираковских спиноров), то аналогично получаем  $\overline{Q}_2(\Lambda_e) = \gamma \overline{Q}_1^*(T\Lambda_e T^{-1}) \gamma^{-1}$ .

**6. Примеры.** Конкретизируем приведенную выше общую схему на случай скалярного, векторного и спинорного полей (см. § 11 п. 3).

Для скалярного поля  $Q(\Lambda) = 1$ , а ядром евклидовой квадратичной формы  $\overline{\varphi} K_e \overline{\varphi} / 2$  свободного действия является операция  $K_e = \partial_a \partial_a - m^2 \equiv \square_e - m^2$ , отрицательно определенная на вещественных полях.

Для контравариантного векторного поля  $Q(\Lambda) = \Lambda$ , для ковариантного —  $Q(\Lambda) = \Lambda^{-1T} = g \Lambda g$ . Расширение на  $L_c$  тривиально, для развернутого контравариантного поля получаем  $\bar{Q}(\Lambda_e) = e^{-1} \Lambda_e e$ . Комплексное поле преобразуется так же, как вещественное.

Можно сделать линейное преобразование, перейдя от развернутого поля  $\bar{B}(x)$  (контравариантного) к полю  $\mathcal{B}(x) = e \bar{B}(x)$ , которое преобразуется подобно  $O_4$ -вектору:  $\mathcal{B}_{\Lambda_e}(x) = \Lambda_e \mathcal{B}(\Lambda_e^{-1} x)$ . Инвариантная квадратичная форма становится тогда евклидовой:  $\bar{B} g \bar{B} = -\mathcal{B} \mathcal{B}$ .

Ядро  $K_{\alpha\beta}^e$  евклидовой квадратичной формы свободного действия получается из (II.38) стандартной заменой  $t \rightarrow -it$ , т. е.  $\partial \rightarrow e\partial$ . При замене  $\bar{B} \rightarrow \mathcal{B}$  имеем  $\bar{B}^\alpha K_{\alpha\beta}^e \bar{B}^\beta = \mathcal{B}^\alpha q_{\alpha\beta} \mathcal{B}^\beta$ , где

$$q_{\alpha\beta} = (e^{-1} K^e e^{-1})_{\alpha\beta} = (\square_e - m^2) \delta_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta \quad (12)$$

— вещественное и отрицательно определенное на вещественных полях ядро (в импульсном представлении  $q_{\alpha\beta} = -(p^2 + m^2) \delta_{\alpha\beta} + p_\alpha p_\beta$ , где  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера,  $p^2 \equiv p_0^2 + \mathbf{p}^2$  — евклидов квадрат длины вектора).

Обратимся теперь к четырехкомпонентному дираковскому спинорному полю  $\psi_1(x) \equiv \psi(x)$ ,  $\psi_2(x) \equiv \gamma^0 \psi^*(x)$  (представление  $\gamma$ -матриц предполагается таким, что  $\gamma^0$  симметрична). Развернутые поля  $\bar{\psi}_1$  и  $\bar{\psi}_2$  (в этой главе обозначение  $\bar{\psi}$  используется только для развернутого поля и его не следует путать с дираковским сопряжением) связаны между собой соотношением  $\bar{\psi}_2(x) = \gamma^0 \bar{\psi}_1^*(-t, \mathbf{x}) = \gamma^0 \bar{\psi}_1^\dagger(x)$ .

Приведем сначала необходимые предварительные сведения относительно параметризации комплексной группы Лоренца. Пусть  $x$  — произвольный вектор из  $\mathbf{C}$ ,  $\sigma_\alpha$  — набор четырех эрмитовых  $2 \times 2$ -матриц:  $\sigma_0 = 1$ ,  $\sigma_i$  — матрицы Паули. Поскольку определитель матрицы  $\hat{x} \equiv x^\alpha \sigma_\alpha$  совпадает, как легко проверить, с инвариантной формой  $x g x = x^\alpha g_{\alpha\beta} x^\beta$ , всякое преобразование  $\hat{x} \rightarrow \hat{x}' = a \hat{x} b^+$  с произвольными унитарными (т. е. имеющими единичный определитель) матрицами  $a$  и  $b$  является преобразованием Лоренца  $x \rightarrow x' = \Lambda x$  для вектора  $x$ . Воспользовавшись равенством  $2x^\alpha = \text{tr}(\hat{x} \sigma_\alpha)$ , нетрудно найти матрицу  $\Lambda$ :

$$\Lambda_{\alpha\beta}(a, b) = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_\alpha a \sigma_\beta b^+) \quad (13)$$

(индекс  $\alpha$  в действительности контравариантный). Можно показать, что множество матриц  $\Lambda(a, b)$  исчерпывает всю группу  $L_c$ , и убедиться с помощью (13) в справедливости равенств  $\Lambda^*(a, b) = \Lambda(b, a)$ ,  $\Lambda^T(a, b) = \Lambda(b^+, a^+)$ ,  $\Lambda^{-1}(a, b) = \Lambda(a^{-1}, b^{-1})$ .

Вещественным преобразованиям  $\Lambda \in L$  соответствует  $a = b$ .

Возвратимся теперь к спинорному полю. Представление (10) комплексной группы  $L_c$  на спинорах  $\psi \equiv \psi_1$  можно задать  $4 \times 4$ -матрицей  $Q_1(\Lambda) = Q_1(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b^{-1+} \end{pmatrix}$ , положив при этом  $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Для поля  $\psi_2 = \psi_1^* \gamma^0$  матрицу  $Q$  условимся писать справа:  $(\psi_2)_\Lambda(x) = \psi_2(\Lambda^{-1}x) Q_2(\Lambda)$ . При вещественных  $x$  и  $\Lambda$  справедливо соотношение  $Q_2(\Lambda) = \gamma^0 Q_1^* \gamma^0$ , которое продолжается на комплексные  $\Lambda \in L_c$  в виде  $Q_2(\Lambda) = \gamma^0 Q_1^* (\Lambda^*) \gamma^0$ . Из (14) ясно, что замена  $\Lambda \rightarrow \Lambda^*$  эквивалентна перестановке  $a$  и  $b$ , откуда следует, что  $Q_2(\Lambda) = Q_2(a, b) = \gamma^0 Q_1^+ (b, a) \gamma^0 = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^+ \end{pmatrix}$ .

Билинейные формы, инвариантные относительно вещественной группы  $L$ , оказываются автоматически инвариантными относительно  $L_c$ . Например,  $(\psi_2)_\Lambda (\psi_1)_\Lambda = \psi_2 Q_2(\Lambda) Q_1(\Lambda) \psi_1 = \psi_2 \psi_1$ . Соотношения, выражающие тензорные свойства  $\gamma$ -матриц, также автоматически продолжаются на  $L_c$ . Отсюда ясно, что свободное действие (II.41)  $L_c$ -инвариантно.

Как указывалось в предыдущем разделе, подгруппа  $L_e \subset L_c$  состоит из всех унитарных матриц  $\Lambda \in L_c$ . Из (14) видно, что унитарность  $\Lambda(a, b)$  эквивалентна унитарности матриц  $a$  и  $b$ , поэтому представления  $Q_{1,2}(\Lambda) \equiv \bar{Q}_{1,2}(\Lambda_e)$ ,  $\Lambda \in L_e$ ,  $\Lambda_e \in O_4$  оказываются унитарными.

Свободное евклидово действие получается из (II.41) заменой  $t \rightarrow -it$ , что равносильно переходу к развернутым полям  $\bar{\psi}_{1,2}$  и замене  $\gamma^\alpha \partial_\alpha \rightarrow \gamma^\alpha (e\partial)_\alpha$  в операции  $K$ . Производная  $\partial$  на развернутых полях преобразуется уже как евклидов вектор:  $\partial \rightarrow \Lambda_e \partial$ . Можно ввести и „евклидовы  $\gamma$ -матрицы“  $\gamma_e^\alpha \equiv (e\gamma)^\alpha$ , т. е.  $\gamma_e^0 = i\gamma^0$ ,  $\gamma_e^k = \gamma^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , которые также преобразуются как евклидов вектор; форма  $\gamma^\alpha (e\partial)_\alpha = \gamma_e^\alpha \partial_\alpha$  на развернутых полях явно  $O_4$ -инвариантна.

## § 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Рассмотрим гауссов интеграл с евклидовой квадратичной формой

$$G_e^{(0)}(A) = \text{const} \int D\varphi \exp \left[ \frac{1}{2} \varphi K_e \varphi + \varphi A \right], \quad (15)$$

нормированный условием  $G_e^{(0)}(0) = 1$ . Интеграл берется формально с помощью сдвига  $\varphi \rightarrow \varphi - K_e^{-1}A$ , но, чтобы придать ему точный смысл, мы должны, руководствуясь общими правилами п. I.6.4, уточнить пространство функций, по которому произво-

дится интегрирование в (15), что эквивалентно доопределению операции  $K_e^{-1}$ . Разумеется, мы хотим, чтобы это доопределение привело нас к известному заранее евклидовому пропагатору  $\Delta_e$ , который, как видно из равенства  $K_e \Delta_e = -1$ , является одной из функций Грина  $-K_e^{-1}$  для операции  $K_e$ .

Общая схема п. I.6.4 полностью приложима и к рассматриваемому случаю, и из нее следует, что искомое пространство интегрирования  $E(\Delta_e)$  можно определить как множество всех функций вида  $\Delta_e \varphi'$ , где  $\varphi'$  пробегает то пространство, из которого берется аргумент  $A$  в (15).

В п. I.6.4 мы считали, что  $A$  принадлежит пространству  $E$  хорошо убывающих на бесконечности функций, обладающих такими же, как у поля  $\varphi$ , свойствами вещественности. В евклидовой теории естественно рассмотреть еще одну возможность:  $A$  принадлежит пространству  $\bar{E}$  хорошо убывающих функций со свойствами вещественности развернутых полей  $\bar{\varphi}$ . Оба варианта допустимы с точки зрения общей схемы п. I.6.4 и оба дают для  $G_e^{(0)}(A)$  выражение  $\exp[\kappa A \Delta_e A / 2]$ , совпадающее с производящим функционалом функций Грина евклидовой свободной теории (как всегда,  $\kappa = \pm 1$  в зависимости от статистики). Стандартные аргументы п. I.6.5 позволяют тогда написать следующее интегральное представление для производящего функционала функций Грина евклидовой теории с произвольным взаимодействием:

$$G_e(A) = \text{const} \int D\varphi \exp [S_e(\varphi) + \varphi A]. \quad (16)$$

Здесь  $S_e = S_{0e}' + S_{ve}$  — полное евклидово действие;  $S_{0e}'(\varphi) = \varphi K_e \varphi / 2$  — квадратичная форма свободного действия;  $S_{ve}(\varphi)$  — евклидов функционал взаимодействия. Представление (16) возможно в двух вариантах: *по исходным полям*, когда  $A \in E$ , а интегрирование производится по пространству  $E(\Delta_e) = \Delta_e E$ , и *по развернутым полям*, когда  $A \in \bar{E}$ , а интегрирование производится по пространству  $\bar{E}(\Delta_e) = \Delta_e \bar{E}$ .

Обсудим эти пространства подробнее. Важным отличием евклидовой теории от псевдоевклидовой является то, что для всех рассмотренных в гл. II систем, за исключением квантовомеханической свободной частицы (п. II.1.2), евклидова свертка  $\Delta_e(x, x')$  оказывается хорошо (экспоненциально) убывающей функцией разности времени  $t-t'$ . Вследствие этого линейная операция с ядром  $\Delta_e$  не выводит из класса хорошо убывающих функций, так что функции из пространств  $E(\Delta_e)$  и  $\bar{E}(\Delta_e)$  оказываются хорошо убывающими. Для нерелятивистской фермионной свертки (II.26) сказанное верно тогда, когда разбегние уровней на группы 1 и 2 производится в соответствии со знаком энергии: уровни с положительной энергией свободны, а с отрицательной — заполнены. Так и будет, если функции

Грина определяются аналогичными (I.58) средними по основному состоянию.

Квантовомеханическая свободная частица (п. II.1.2) является исключением. В этом случае евклидова и псевдоевклидова свертки различаются лишь множителем  $i$ , а функции из пространств  $E(\Delta_e)$  и  $\bar{E}(\Delta_e)$  имеют ненулевые асимптотики  $\varphi_{(\pm)}$  при  $t \rightarrow \pm \infty$ . Нетрудно указать, какие именно:  $\varphi_{(+)} = c$ ,  $\varphi_{(-)} = c't$ , причем для пространства  $E(\Delta_e)$  обе константы  $c$ ,  $c'$  вещественны, а для пространства  $\bar{E}(\Delta_e)$  константа  $c'$  будет вещественной, а  $c$  — чисто мнимой.

Что касается свойств вещественности функций из  $E(\Delta_e)$  и  $\bar{E}(\Delta_e)$ , то коротко можно сказать так: для всех систем, исключая опять-таки свободную теорию п. II.1.2, при подходящем (см. ниже) определении пространств  $E$  и  $\bar{E}$  переменные интегрирования в (16) обладают „правильными” свойствами вещественности, т. е. такими же, как у исходных ( $E(\Delta_e)$ ) или развернутых ( $\bar{E}(\Delta_e)$ ) полей. В особом случае свободной частицы п. II.1.2 функции из  $E(\Delta_e)$  вещественны, но для  $\bar{E}(\Delta_e)$  правильная (в данном случае комбинированная) вещественность гарантирована лишь для тех функций, которые имеют нулевые асимптотики при  $t \rightarrow \pm \infty$ . Уместно напомнить, что в псевдоевклидовой теории правильные свойства вещественности нарушались не для свободной частицы, а для осциллятора: функции из пространства  $E(\Delta) = i\Delta E$  ( $E$  вещественно) с отличными от нуля асимптотиками  $\varphi_{(\pm)}$  были невещественными. Этот факт можно отметить как любопытное проявление сопротивления самого аппарата постановке неподходящей задачи:  $S$ -матричная постановка псевдоевклидовой теории естественна для свободной частицы, но неестественна для осциллятора, имеющего дискретный спектр, тогда как евклидова теория, рассматривающая в сущности  $\rho$ -матрицу и статусумму (подробнее см. гл. V), естественна для осциллятора и неестественна для свободной частицы. На постановку неестественной для данной системы задачи аппарат реагирует искажением правильных свойств вещественности полей, по которым производится функциональное интегрирование.

Поясним смысл сделанной выше оговорки о „подходящем выборе” пространств  $E$  и  $\bar{E}$  на примере нерелятивистской теории § II.2. В этой теории исходные поля  $\psi \equiv \varphi_1$ ,  $\psi^* \equiv \varphi_2$  комплексно-сопряжены, а для развернутых полей  $\varphi_{1,2}$  „правильная вещественность” означает комбинированную сопряженность. Нетрудно проверить, что вектор  $\varphi = \Delta_e A$ , где  $A \equiv (A_1, A_2)$ ,  $\Delta_e$  — евклидов вариант матрицы сверток (II.26), будет обладать свойством  $\varphi_2^+ = \varphi_1$  тогда и только тогда, когда  $A_2 = \kappa A_1^+$ , что и является в данном случае определением „подходящего пространства”  $\bar{E}$ . В действительности это совершенно естественное определение, если писать линейную форму  $\varphi A = \varphi_1 A_1 + \varphi_2 A_2$



в (16) в обычном для комплексного поля виде  $\psi^+ a + a^+ \psi = \psi^+ a + \psi a^+$ .

Для релятивистской векторной теории удобнее иметь дело не с полем  $\bar{B}^\alpha(x)$ , а с полем  $\mathcal{B}(x) = e \bar{B}(x)$  (см. обсуждение векторного поля в п. 1.6). Вместо функционала  $S_e(B)$  следует тогда писать  $\tilde{S}_e(\mathcal{B})$ , а форма  $BA = B^\alpha g_{\alpha\beta} A^\beta$  переходит в евклидово скалярное произведение  $-\mathcal{B}\mathcal{A}$ . Соответствующая полю  $\mathcal{B}$  евклидова свертка  $\tilde{\Delta}_e = e \Delta_e e$ , где  $\Delta_e$  — евклидов вариант (II.39), вещественна и отрицательно определена на вещественных полях.

В заключение сравним два варианта представления (16), исключив из рассмотрения особый случай квантовомеханической свободной частицы. Достоинство интеграла *по развернутым полям* — простота свойств функционала действия, который, как было показано ранее, всегда будет вещественным и  $O_4$ -инвариантным, если исходное псевдоевклидово действие было лоренц-инвариантным. Недостатком таких интегралов является то, что они всегда „расходятся“, и это верно даже для свободной теории ввиду отсутствия знакоопределенности евклидовой квадратичной формы свободного действия для развернутых полей (см. п. 1.4). Расходимость интегралов не позволяет воспринимать множитель  $D\varphi \exp S_e(\varphi)$  как некоторую положительную меру на пространстве полей несмотря на его формальную положительность, вытекающую из вещественности действия. Важнейшим свойством меры является положительность среднего значения положительной величины, а для определенного формально посредством сдвига гауссова интеграла с невырожденной, но не знакоопределенной квадратичной формой это свойство, как нетрудно убедиться, не выполняется.

Обратимся теперь к интегралам *по исходным полям*, причем для векторной теории в соответствии с договоренностью вещественной переменной интегрирования будем считать поле  $\mathcal{B}(x)$ . Функционал  $S_e(\varphi)$  с неразвернутым полем  $\varphi$  не обязан быть вещественным, но во многих случаях он таковым, тем не менее, оказывается. Например, евклидов функционал взаимодействия, как правило, совпадает с псевдоевклидовым функционалом (см. п. 1.3), что гарантирует его вещественность. Квадратичные формы свободного действия для квантовомеханических теорий § II.1, а также для релятивистских скалярного и векторного ( $\mathcal{B}$ ) полей оказываются не только вещественными, но и знакоопределенными\* (отрицательно), и в этих случаях экспонента в гауссовом интеграле (15) оказывается режущей. Добавка взаимодействия  $S_{ve}(\varphi)$  к показателю экспоненты может испортить „сходимость“ интеграла. Если этого не происходит и мно-

\* Для свободной теории п. II. 1.2 знакоопределенность нестрогая.

житель  $\exp S_e(\varphi)$  остается режущим, то мы будем называть соответствующую теорию *квазивероятностной* (см. § 3).

В нерелятивистских теориях § II.2 свободное действие  $\varphi_2 K_e \varphi_1$  с комплексно-сопряженными  $\varphi_2 = \varphi_1^*$  не вещественно: производная по времени в операции  $K_e = -\partial/\partial t - \mathcal{E}$  дает чистый вклад в функционал действия, а одночастичный гамильтониан  $\mathcal{E}$  дает вещественный вклад. Так же обстоит дело и в релятивистской спинорной теории.

Наиболее привлекательной чертой интегралов по неразвернутым полям является наличие четкой корреляции между сходимостью интеграла для бозонной теории и устойчивостью (или ограниченностью снизу гамильтониана) соответствующей физической системы. Это очевидно для осцилляторных свободных теорий: сходимость интеграла и ограниченность снизу квантовомеханического гамильтониана обеспечивается одновременно положительностью квадрата частоты; в нерелятивистской бозонной теории, в которой сходимость определяется вещественной частью действия, аналогичную роль играет требование положительности одночастичного гамильтониана  $\mathcal{E}$ . Для ангармонического осциллятора с потенциалом взаимодействия  $\varphi^n = \lambda \varphi^n$  сходимость интеграла требует четности  $n$  и положительности  $\lambda$ . Это именно те условия, которые обеспечивают ограниченность снизу квантовомеханического гамильтониана.

Представляется правдоподобным, что эти наблюдения носят общий характер и что в бозонных евклидовых теориях сходимость интеграла (16) по неразвернутым полям является критерием устойчивости соответствующей физической системы. Стабильность фермионных систем при любых знаках одночастичных энергий хорошо согласуется с фактом сходимости гауссовых интегралов на грассмановой алгебре независимо от свойств знакоопределенности квадратичной формы в показателе интегрируемой экспоненты.

### § 3. СВОЙСТВА ВЫПУКЛОСТИ

**1. Квазивероятностные теории.** В предыдущем параграфе мы назвали квазивероятностными такие бозонные евклидовы теории, в которых функционал действия  $S_e(\varphi)$  для неразвернутых полей является вещественным, а множитель  $\exp S_e(\varphi)$  — режущим, что позволяет говорить о „сходимости” интеграла (16).

Такие теории можно истолковать на языке классической физики, понимая их как теории классического случайного поля — последнее принимает разные значения („конфигурации”) с разной степенью вероятности, величина  $D\varphi \exp S_e(\varphi)$  определяет положительную нормированную меру на множестве конфигураций, множитель  $\exp S_e(\varphi)$  пропорционален плотности вероятности для конфигурации  $\varphi$ . Интегралы  $\text{const} \int D\varphi F(\varphi) \times \exp S_e(\varphi) \equiv \langle F \rangle$ , нормированные условием  $\langle 1 \rangle = 1$ , можно

тогда понимать как обычные средние значения, а евклидовы функции Грина без вакуумных петель приобретают смысл корреляционных функций классического случайного поля  $\varphi(x)$ . К сожалению, строгая математическая теория случайного поля — *обобщенный случайный процесс* в терминологии [33] — существует лишь для очень ограниченного класса „хороших мер“, а выражения типа  $D\varphi \exp S_e(\varphi)$  не относятся, как правило, к их числу. Тем не менее мы будем считать, не претендуя на строгость, что символ  $D\varphi \exp S_e(\varphi)$  обладает простейшими свойствами положительной меры, а именно: интеграл  $\int D\varphi \exp S_e(\varphi)$  положителен, среднее значение любого неотрицательного функционала неотрицательно. Из положительности среднего значения квадрата вытекает положительность дисперсии  $\langle |F|^2 \rangle - |\langle F \rangle|^2$  для любого функционала  $F(\varphi)$ .

Из условия положительности меры вытекают различные следствия, касающиеся свойств выпуклости (т. е. знакоопределенности второй вариации) производящих функционалов функций Грина. Действительно, предполагая линейную форму  $\varphi A$  в (16) вещественной (для комплексного поля  $\varphi A$  понимается как  $\varphi^+ A + A^+ \varphi$ ) и составив вторую вариацию по  $A$  функционала (16), увидим, что она пропорциональна среднему значению квадрата  $\delta(\varphi A)$  и потому неотрицательна; вторая вариация функционала  $W_e(A) = \ln G_e(A)$  сводится к дисперсии  $\delta(\varphi A)$  и поэтому также неотрицательна. Это доказывает, что  $G_e(A)$  и  $W_e(A)$  являются выпуклыми вниз функционалами  $A$ :  $\delta^2 G_e \geq 0$ ,  $\delta^2 W_e \geq 0$ .

Можно сформулировать более общее утверждение. Пусть

$$S_e(\varphi) = \sum_n \frac{1}{n!} A_n \varphi^n \equiv \\ \equiv \sum_n \frac{1}{n!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_n A_n(x_1 \dots x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \quad (17)$$

— вещественный функционал с такими потенциалами  $A \equiv \equiv \{A_0 A_1 \dots\}$ , что символ  $D\varphi \exp S_e(\varphi)$  можно считать положительной мерой. Тогда интеграл  $G_e(A) = \text{const} \int D\varphi \exp S_e(\varphi)$ , равно как и его логарифм  $W_e(A)$ , имеет неотрицательную вторую вариацию по отношению к любым не нарушающим вещественности действия (17) вариациям потенциалов  $A$ . Можно сказать, что  $G_e$  и  $W_e$  — выпуклые вниз функционалы любых переменных, входящих линейно в функционал действия.

Полезно отметить, что в теориях с лагранжианами, квадратично зависящими от скоростей (первых производных по времени), показатель весового множителя  $\exp S_e(\varphi)$  имеет простой физический смысл: при переходе от псевдоевклидовой теории к евклидовой изменяется лишь знак при квадратах скоростей,

так что евклидов лагранжиан оказывается равным классическому псевдоевклидовому гамильтониану со знаком минус. В таких теориях  $S_e(\varphi) = -\int dt \mathcal{H}(t)$ , где  $\mathcal{H}$  — классический гамильтониан.

**2. Выпуклость и спектральные представления.** Результаты предыдущего раздела справедливы лишь для чисто бозонных квазивероятностных теорий и не обобщаются на теории с фермионами или на нерелятивистскую бозонную теорию § II.2 с невещественным действием. Существуют, однако, утверждения о выпуклости, справедливые для всех теорий.

Пусть  $S'(\varphi)$  — функционал действия некоторой трансляционно-инвариантной по времени псевдоевклидовой теории и  $S''(\varphi) = \int dt \mathcal{L}(t)$ , где

$$\mathcal{L}(t) = \sum_n \int \dots \int dx_1 \dots dx_n A_n(x_1 \dots x_n) \varphi(t, x_1) \dots \varphi(t, x_n) \quad (18)$$

— вещественный функционал с потенциалами  $A_n$ , не зависящими от времени. Псевдоевклидова теория с действием  $S = S' + S''$  после разворота переходит в евклидову теорию с действием  $S_e = S'_e + S''$ , так как форма (18) сохраняется при развороте. Интеграл  $\text{const} \int D\varphi \exp iS(\varphi) \equiv G(A)$ , нормированный условием  $G(0) = 1$ , определяет согласно (1.74) сдвиг энергии основного состояния вследствие добавки взаимодействия (18):  $\ln G(A) = -i\varepsilon(A) \int dt$ . В евклидовом варианте  $G_e(A) = \text{const} \int D\varphi \exp S_e(\varphi) = \exp \left[ -\varepsilon(A) \int dt \right]$ , где  $\varepsilon(A)$  — тот же самый функционал (сдвиг энергии), что и в псевдоевклидовой теории (см. п. 1.3). Если евклидова теория с действием  $S_e$  является квазивероятностной, то выпуклость вниз по потенциалам  $A$  функционалов  $G_e(A)$  и  $W_e(A) = \ln G_e(A)$  прямо следует из результатов предыдущего раздела. Но теперь можно дать, оставаясь в рамках псевдоевклидовой теории, независимое доказательство выпуклости функционала  $\varepsilon(A)$ . Доказательство, к которому мы переходим, основано на использовании спектральных представлений для функций Грина и справедливо для всех, а не только квазивероятностных, теорий. При этом мы будем пользоваться удобными терминами *среднее значение* и *дисперсия* и для псевдоевклидовых функциональных интегралов с весом  $\exp iS(\varphi)$ .

Из определений ясно, что удвоенная вторая вариация по потенциалам  $A$  псевдоевклидового функционала  $W(A) = \ln G(A)$  равна дисперсии функционала  $i\delta S''(\varphi) = i \int dt \delta \mathcal{L}(t)$ . С другой стороны, из результатов пп. 1.3.3, 1.6.5 следует, что функциональное среднее от произведения  $\delta \mathcal{L}(t) \delta \mathcal{L}(t')$  совпадает с вакуумным ожиданием дайсонова  $T$ -произведения соот-

ветствующих операторов в гайзенберговском представлении, откуда

$$\delta^{(2)}W(A) = -\frac{1}{2} \int \int dt dt' \langle 0 | T_D [\delta \hat{\mathcal{L}}(t) \delta \hat{\mathcal{L}}(t')] | 0 \rangle_{\text{св}}, \quad (19)$$

где  $|0\rangle$  — точное основное состояние для теории с действием  $S = S' + S''$ , а индекс „св” обозначает „связную часть”, т. е. вычитание квадрата среднего  $\delta \hat{\mathcal{L}}(t)$  из матричного элемента (19).

Если вариации потенциалов  $A$  не нарушают вещественности  $\mathcal{L}(t)$ , что мы будем предполагать, то оператор  $\delta \hat{\mathcal{L}}(t)$ , отличающийся от соответствующего классического функционала лишь заменой аргумента  $\varphi(x)$  на оператор поля в гайзенберговском представлении, будет эрмитовым.

Напишем теперь стандартное спектральное представление [1]:

$$\langle 0 | T_D [\delta \hat{\mathcal{L}}(t) \delta \hat{\mathcal{L}}(t')] | 0 \rangle_{\text{св}} = \frac{i}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \int dE \frac{2\varepsilon_n \rho_n \exp iE(t' - t)}{E^2 - \varepsilon_n^2 + i0}. \quad (20)$$

Здесь  $\rho_n \equiv |\langle 0 | \delta \hat{\mathcal{L}} | n \rangle|^2$ ,  $\delta \hat{\mathcal{L}}$  — оператор в шредингеровском представлении,  $|n\rangle$  — ортонормированная система собственных состояний полного гамильтониана,  $\varepsilon_n = E_n - E_0$  — энергия возбуждения. Числа  $\varepsilon_n$  неотрицательны, поскольку  $|0\rangle$  — основное состояние. Условие  $n \neq 0$  в (20) исключает вакуумное промежуточное состояние, что равносильно отбору связной части, т. е. вычитанию квадрата среднего.

По определению  $W(A) = -i\varepsilon(A) \int dt$ , так что  $\delta^{(2)}W = -i\delta^{(2)}\varepsilon \int dt$ . Интеграл по  $t$  и  $t'$  от выражения (20) также пропорционален  $\int dt$ . В (19) этот бесконечный множитель сокращается и мы получаем

$$\delta^{(2)}\varepsilon(A) = - \sum_{n \neq 0} (\rho_n / \varepsilon_n) \leq 0, \quad (21)$$

что доказывает выпуклость вверх функционала  $\varepsilon(A)$ . Этот результат слабее, чем утверждения о выпуклости предыдущего раздела, поскольку сейчас речь идет о выпуклости по отношению к более узкому классу потенциалов, не зависящих от времени, но зато он справедлив для всех стабильных (имеющих основное состояние) теорий.\* Отметим также, что в правой

\* Для пространственно-однородных систем очевидным следствием (21) является выпуклость вверх плотности энергии основного состояния  $\varepsilon/V$  как функции константы связи  $\lambda$  при взаимодействии. Если энергия основного состояния свободной теории приписывается равной нулю (что обычно в теории поля), а вклад первого порядка по  $\lambda$  в энергию также равен нулю (что столь же обычно), то из выпуклости следует, что  $\varepsilon(\lambda)$  имеет максимум при  $\lambda = 0$  и отрицательна при всех  $\lambda \neq 0$ . Другими словами, взаимодей-

части (21) возникает специфическая „голдстоуновская бесконечность”, если основное состояние не отделено энергетической щелью от всех прочих, т. е. не соответствует изолированному невырожденному уровню полного гамильтониана.

---

ствие понижает энергию основного состояния от нуля до отрицательной величины. С точки зрения статистической физики (см. гл. V) отрицательность  $\beta$  означает положительность давления, развиваемого системой при нулевой температуре. Продолжая рассуждения Р. Фейнмана о роли энергии основного состояния в теории поля (с. 266, 267 в [13]), при развитом воображении можно связать положительность давления с расширением вселенной, но настаивать здесь, конечно, не следует (хотя бы потому, что нет уверенности в приложимости к макромасштабам теории, созданной для описания микропроцессов). Отметим, что в [13] обсуждалась не энергия взаимодействия, а свободная энергия вакуумных колебаний, которая положительна и соответствует отрицательному давлению. Обычно ее просто отбрасывают, соответственно переопределив гамильтониан.

## ГЛАВА V. || СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Эта глава посвящена исключительно равновесной теории. Сначала рассматривается квантовая статистика систем типа бозе- или ферми-газа, затем решеточные спиновые системы и классический неидеальный газ.

### § 1. КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА ПОЛЕВЫХ СИСТЕМ

**1. Определения.** В квантовой статистике равновесное состояние системы при температуре  $T$  описывается *матрицей плотности*  $\rho = \text{e}^{\text{tr}[-\beta \mathbf{H}]}$ , где  $\beta \equiv 1/kT$ ,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\mathbf{H}$  — *обобщенный гамильтониан*. Для канонического ансамбля обобщенный гамильтониан совпадает с обычным, а для большого канонического ансамбля  $\mathbf{H} = \mathbf{H}' - \mu \mathbf{N}$ , где  $\mathbf{H}'$  — обычный гамильтониан (оператор энергии),  $\mathbf{N}$  — оператор числа частиц,  $\mu$  — постоянная, называемая химическим потенциалом. В дальнейшем мы будем называть  $\mathbf{H}$  просто гамильтонианом.

По определению статсумма  $Z$  есть след матрицы плотности:  $Z = \text{tr} \rho$ . Среднее значение  $\langle \langle \mathbf{a} \rangle \rangle$  произвольного оператора  $\mathbf{a}$  определяется равенством  $\langle \langle \mathbf{a} \rangle \rangle = Z^{-1} \text{tr}(\rho \mathbf{a})$ .

Термодинамика системы полностью определяется статсуммой или эквивалентными ей функциями  $\ln Z \equiv W = -\beta \Omega$ ; функцию  $\Omega$  называют термодинамическим потенциалом.

В трансляционно-инвариантных системах  $\ln Z$  пропорционален полному (бесконечному) объему  $\int dx$  и нужно переходить к удельным величинам; равенство  $\ln Z = \beta p \int dx$  определяет давление  $p$  для газообразных или жидких пространственно-одно-родных систем.

Важным объектом изучения для полевых систем являются *температурные функции Грина поля*, которые определяются как средние значения дайсоновского  $T$ -произведения [34—36]:

$$H_{n\beta}(x_1 \dots x_n) = \langle \langle T_D [\hat{\varphi}_\Gamma(x_1) \dots \hat{\varphi}_\Gamma(x_n)] \rangle \rangle, \quad (1)$$

где  $\hat{\varphi}_\Gamma(x)$  — операторы поля в евклидовом гайзенберговском представлении. Сразу же оговоримся, что равенство (1) считается определением функций Грина лишь при условии, что временные аргументы всех операторов поля заключены внутри интервала  $[0, \beta]$  (об их продолжениях см. п. 5).

При нулевой температуре вклад в средние значения дает лишь основное состояние и температурные функции (1) переходят в евклидовы функции Грина без вакуумных петель, которые рассматривались в гл. IV.

Отношение  $\rho$ -матриц  $\rho_0^{-1}\rho = \exp[\beta\mathbf{H}_0] \exp[-\beta\mathbf{H}] \equiv \mathbf{U}_e(\beta, 0)$  совпадает с евклидовым оператором развития (IV.1) для интервала времени  $[0, \beta]$ . Представив его обычной  $T$ -экспонентой (IV.2), получим

$$\rho = \rho_0 \mathbf{U}_e(\beta, 0) = \rho_0 T_D \exp \left[ - \int_0^\beta dt \mathbf{V}(t) \right]. \quad (2)$$

Переход к представлению взаимодействия в (1), (2) осуществляется с помощью формул (I.60), (I.70), которые справедливы и для евклидовых операторов поля (см. замечание после формулы (I.70)). Учитывая, что времена полей в (1) заключены по предположению внутри интервала  $[0, \beta]$ , в соотношении (I.70) можно положить  $\tau_1 = \beta$ ,  $\tau_2 = 0$ . Получим

$$\begin{aligned} & T_D [\hat{\varphi}_\Gamma(x_1) \dots \hat{\varphi}_\Gamma(x_n)] = \\ & = \mathbf{U}_e^{-1}(\beta, 0) T [\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \exp S_{v\beta}(\hat{\varphi})], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\hat{\varphi}(x)$  — евклидовы операторы поля в представлении взаимодействия;  $S_{v\beta}$  — температурный функционал взаимодействия, представляющий  $\text{Sum}$ -форму показателя экспоненты в (2). Функционал  $S_{v\beta}$  отличается от евклидового функционала  $S_{ve}$  только тем, что в нем интегрирование по времени производится не по всей оси, а лишь по интервалу  $[0, \beta]$ .

Равенство (I.60) позволяет заменить дайсоновскую  $T$ -экспоненту в (2) на виковскую  $T \exp S_{v\beta}(\hat{\varphi})$ . В функциях Грина оператор развития из (3), группируясь с точной  $\rho$ -матрицей в операции усреднения в (1), превращает ее в свободную  $\rho$ -матрицу согласно (2), и мы получаем

$$H_{n\beta}(x_1 \dots x_n) = \frac{\langle\langle T [\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \exp S_{v\beta}(\hat{\varphi})] \rangle\rangle}{\langle\langle T \exp S_{v\beta}(\hat{\varphi}) \rangle\rangle}. \quad (4)$$

Символом «...» здесь и далее обозначается усреднение со свободной  $\rho$ -матрицей  $\exp[-\beta\mathbf{H}_0]$ .

Числитель в правой части (4) будем называть *полной температурной функцией Грина* и обозначать  $G_{n\beta}$ , сами  $H_{n\beta}$  есть



функции Грина без вакуумных петель. Знаменатель в (4) равен отношению статусам:

$$Z/Z_0 = \langle\langle U_e(\beta, 0) \rangle\rangle = \langle\langle T \exp S_{\text{эф}}(\hat{\varphi}) \rangle\rangle. \quad (5)$$

Виковские  $T$ -произведения в (4), (5) можно, как обычно, привести к нормальной форме, соответствующей сверткой будет евклидов пропагатор (IV.3). В аналогичные (4), (5) формулы теории поля входило вакуумное ожидание, которое для операторов в  $N$ -форме очень просто вычислялось по правилу (I.87). Теперь же нужно найти заменяющую (I.87) формулу для вычисления средних значений от операторов в  $N$ -форме, что будет сделано в п. 3.

С точки зрения физики большой интерес представляют не температурные функции (1), а так называемые *временные функции Грина при конечной температуре*, которые отличаются от (1) только тем, что операторы под знаком  $T$ -произведения берутся не в евклидовом, а в обычном гайзенберговском представлении. Равенство (3) остается верным и в этом случае, но все величины в нем становятся псевдоевклидовыми; комбинация псевдоевклидового оператора  $U^{-1}(\beta, 0)$  в (3) с евклидовой  $\rho$ -матрицей, по которой производится усреднение в (1), не дает простого объекта, что не позволяет построить простую диаграммную технику для вычисления временных функций. На практике их находят путем аналитического продолжения по всем временам температурных функций (1), для которых оказывается возможным построить, исходя из (4), диаграммную технику.

**2. Свободная теория.** Рассмотрим наиболее важную для статистики нерелятивистскую теорию § II.2 и для простоты предположим, что одночастичный гамильтониан  $\mathcal{E}$  имеет чисто дискретный спектр.

Операторы свободного поля и их свертки получаются из соответствующих выражений § II.2 стандартной заменой  $t \rightarrow -it$ , свободный гамильтониан  $H_0$  определен соотношением (II.21). В этой главе нормальное произведение будет пониматься в его простейшей форме  $N_\alpha$  как для бозонов, так и для фермионов.

Приведем для удобства явные выражения для полей и свертки  $\Delta_e \equiv (\Delta_{12}^0)_e$ :

$$\hat{\psi}(x) = \sum_\alpha a_\alpha \Phi_\alpha(x) \exp[-\varepsilon_\alpha t], \quad \hat{\psi}^+(x) = \sum_\alpha a_\alpha^+ \Phi_\alpha^*(x) \exp[\varepsilon_\alpha t], \quad (6)$$

$$\Delta_e(x, x') \equiv (\Delta_{12}^0)_e(x, x') = \theta(t - t') \sum_\alpha \Phi_\alpha(x) \Phi_\alpha^*(x') \exp \varepsilon_\alpha [t' - t].$$

Нам понадобятся также явные выражения для логарифма

статсуммы и средних значений операторов  $a_\alpha^+ a_\alpha$ , которые для гамильтониана (II.21) легко находятся [37]:

$$W_0 \equiv \ln Z_0 = -\kappa \sum_\alpha \ln [1 - \kappa \xi_\alpha], \quad \xi_\alpha \equiv \exp [-\beta \varepsilon_\alpha], \quad (7)$$

$$\langle\langle a_\alpha^+ a_\alpha \rangle\rangle \equiv \bar{n}_\alpha = \xi_\alpha / (1 - \kappa \xi_\alpha). \quad (8)$$

Как всегда,  $\kappa = \pm 1$  в зависимости от статистики. Формулы (7), (8) обобщаются непосредственно на случай сплошного спектра.

Рассмотрим теперь простейшие функции Грина (1) для свободного поля. Среднее значение одного оператора  $\hat{\psi}$  или  $\hat{\psi}^+$  равно, очевидно, нулю. Для двух операторов

$$g(x, x') \equiv \langle\langle T[\hat{\psi}(x) \hat{\psi}^+(x')] \rangle\rangle = \Delta_e(x, x') + \langle\langle N[\hat{\psi}(x) \hat{\psi}^+(x')] \rangle\rangle, \quad (9)$$

где  $\Delta_e$  — евклидов пропагатор (6). В универсальных обозначениях  $\psi \equiv \varphi_1$ ,  $\psi^+ \equiv \varphi_2$ , свертка  $g$  есть  $g_{12}$ ,  $g_{21} = \kappa g_{12}^T$ ,  $g_{11} = g_{22} = 0$ . Среднее от нормального произведения в (9) выражается через  $\bar{n}_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \langle\langle N[\hat{\psi}(x) \hat{\psi}^+(x')] \rangle\rangle &= \kappa \langle\langle \hat{\psi}^+(x') \hat{\psi}(x) \rangle\rangle = \\ &= \kappa \sum_\alpha \bar{n}_\alpha \Phi_\alpha(x) \Phi_\alpha^*(x') \exp \varepsilon_\alpha (t' - t). \end{aligned} \quad (10)$$

Добавив сюда  $\Delta_e$ , получим явное выражение для температурной функции.

**3. Среднее значение оператора в  $N$ -форме.** Для вычисления среднего значения произвольного оператора в  $N$ -форме достаточно вычислить функционал  $\langle\langle N \exp \hat{\varphi} A \rangle\rangle$  и затем пользоваться соотношениями типа (I.12). Для комплексного поля  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{\psi}^+$  символ  $\hat{\varphi} A$  понимается как  $\hat{\psi}^+ A + A^+ \hat{\psi} = \sum_\alpha (a_\alpha^+ c_\alpha + c_\alpha^+ a_\alpha)$ ,

где

$$\begin{aligned} c_\alpha &\equiv \int dx A(x) \Phi_\alpha^*(x) \exp \varepsilon_\alpha t, \\ c_\alpha^+ &\equiv \int dx A^+(x) \Phi_\alpha(x) \exp(-\varepsilon_\alpha t). \end{aligned} \quad (11)$$

Мы будем считать, что интегрирование по времени в линейной форме  $\hat{\varphi} A$  и, следовательно, в (11) производится только по интервалу  $[0, \beta]$ .

Для бозонного поля величины  $c_\alpha$ ,  $c_\alpha^+$  являются обычными, а для фермионного — антикоммутирующими числами, т. е. образующими грассмановой алгебры. Спектр одночастичного гамильтониана  $\mathcal{E}$  опять предполагается чисто дискретным.

Очевидно, что среднее значение  $N \exp \hat{\phi} A$  распадается на произведение средних для каждого  $\alpha$  и потому достаточно вычислить среднее для одноуровневой задачи:

$$F(c, c^+) \equiv \langle\langle \exp a^+ c \exp c^+ a \rangle\rangle = \\ = Z^{-1} \text{tr} [\exp(-\beta \varepsilon a^+ a) \exp a^+ c \exp c^+ a], \quad (12)$$

где обозначено  $Z \equiv \text{tr} \exp(-\beta \varepsilon a^+ a)$  и учтено, что  $N \exp(a^+ c + c^+ a) = \exp a^+ c \exp c^+ a$ . Для фермионов вычислить (12) просто. Вследствие антикоммутативности символов  $c, c^+$  и  $a, a^+$  (под знаком  $N$ -произведения) имеем  $\exp a^+ c = 1 + a^+ c$  и  $\exp c^+ a = 1 + c^+ a$ , откуда

$$F(c, c^+) = 1 + c c^+ \langle\langle a^+ a \rangle\rangle = 1 - \bar{n} c^+ c = \exp(-\bar{n} c^+ c).$$

Перемножив эти экспоненты для всех уровней  $\alpha$  и воспользовавшись явными выражениями (11) для  $c, c^+$ , окончательно получим

$$\langle\langle N \exp[\hat{\psi}^+ A + A^+ \hat{\psi}] \rangle\rangle = \exp A^+ dA, \quad (13)$$

причем ядро квадратичной формы  $d(x, x')$  оказывается в точности равным среднему  $N$ -произведения (10) для фермионного поля.

В бозонном случае функцию (12) вычислить сложнее, но окончательный ответ (13) не изменяется. Приведем это вычисление.

Величина  $Z$  в правой части (12) известна:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta \varepsilon n) = (1 - \xi)^{-1}, \quad (14)$$

где  $\xi \equiv \exp(-\beta \varepsilon)$ . Остается вычислить сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \langle n | \exp a^+ c \exp c^+ a | n \rangle,$$

которую удобно переписать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^n \left( \frac{\partial^2}{\partial y^+ \partial y} \right)^n \langle 0 | \exp y^+ a \exp a^+ c \exp c^+ a \exp a^+ y | 0 \rangle \Big|_{y=y^+=0}, \quad (15)$$

воспользовавшись тем, что  $|n\rangle = (n!)^{-1/2} (a^+)^n |0\rangle$ .

Произведение операторных экспонент приводится к нормальной форме по правилу (I.49), причем свертка  $a$  с  $a^+$  считается равной единице, а все прочие — нулю. В результате для матричного элемента в (15) получим выражение  $\exp[y^+ a +$

$+ y^+c + c^+y]$ , подставив которое в (15) и сделав сдвиг  $y \rightarrow y+c$ ,  $y^+ \rightarrow y^+ + c^+$ , приведем (15) к виду

$$\exp(-c^+c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^n \left( \frac{\partial^2}{\partial y^+ \partial y} \right)^n \exp(y^+y) \Big|_{y=c, y^+=c^+}.$$

Представив затем множитель  $\exp(y^+y)$  гауссовым интегралом

$$\exp(y^+y) = \text{const} \int dx dx^+ \exp[-x^+x + y^+x + x^+y],$$

можно выполнить явно дифференцирование по  $y, y^+$  и потом собрать ряд по  $n$ . В результате опять получится гауссов интеграл, взяв который и поделив результат на (14), получим ответ  $F(c, c^+) = \exp(\bar{n}c^+c)$ , где  $\bar{n} \equiv \xi/1-\xi$  — среднее значение (8) для бозонов. Отсюда точно так же, как и для фермионов, придем к формуле (13), причем ядро  $d$  окажется теперь средним значением (10) для бозонного поля.

Итак, для обеих статистик ответ дается формулой (13). При выводе предпологалась дискретность спектра одночастичной задачи, но ответ (точнее, ядро  $d$ ) допускает прямой предельный переход к непрерывному спектру и мы будем считать его верным для любого спектра.

Мы получили (13) для конкретного поля (6), но вполне ясно, что равенство такого типа будет иметь место в любой теории. Действительно, при доказательстве того, что среднее  $N \exp \hat{\varphi} A$  собирается в гауссову экспоненту, использовались лишь линейность полей по операторам  $a, a^+$  и свойства последних, так что эта часть доказательства остается в силе для любой теории осцилляторного типа (свободную частицу п. II.1.2 мы исключим пока из рассмотрения). С другой стороны, если уже получена формула типа (13) с некоторым неизвестным ядром  $d$ , то последнее обязательно определяется соотношением типа (10), что ясно из сравнения квадратичных по  $A$  вкладов в обеих частях равенства. Эти рассуждения доказывают формулу

$$\langle\langle N \exp \hat{\varphi} A \rangle\rangle = \exp(\kappa A d A / 2), \quad (16)$$

в которой  $d(x, x') = \langle\langle N [\hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x')] \rangle\rangle$ . Формула (16) записана в универсальных обозначениях и справедлива для любой теории, исключая квантовомеханическую свободную частицу п. II.1.2.

Из (16) с помощью соотношений (I.12), (I.92) получим формулу

$$\langle\langle N F(\hat{\varphi}) \rangle\rangle = \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} d \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] F(\varphi) \Big|_{\varphi=0}, \quad (17)$$

которую можно интерпретировать как теорему Вика для средних значений операторов в  $N$ -форме. В фермионном случае обе

производные квадратичной формы считаются, как обычно, правыми.

**4. Диаграммные представления статсуммы и функций Грина.** С помощью (17) легко вычисляются средние значения  $T$ -произведений:

$$\begin{aligned} \langle\langle TF(\hat{\varphi}) \rangle\rangle &= \langle\langle N \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} \Delta_e \frac{\delta}{\delta\varphi}\right] F(\varphi)|_{\varphi=\hat{\varphi}} \rangle\rangle = \\ &= \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} (\Delta_e + d) \frac{\delta}{\delta\varphi}\right] F(\varphi)|_{\varphi=0}. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, две операции: приведение к  $N$ -форме (1.46) и усреднение  $N$ -формы (17) — собираются в единую операцию, имеющую вид теоремы Вика со сверткой  $g \equiv \Delta_e + d$ , где  $\Delta_e$  — евклидов пропагатор,  $d$  — среднее  $N$ -произведения. Мы будем называть  $g$  *температурной сверткой или температурным пропагатором*. В отличие от евклидова пропагатора  $g$  зависит явно от температуры через посредство входящих в  $d$  средних значений  $\bar{n}_\alpha$ .

Пользуясь (18), получаем следующие представления для статсуммы:

$$Z/Z_0 = \langle\langle \mathbf{U}_e(\beta, 0) \rangle\rangle = \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} g \frac{\delta}{\delta\varphi}\right) \exp S_{v\beta}(\varphi)|_{\varphi=0} \quad (19)$$

и для производящего функционала полных функций Грина:

$$\begin{aligned} G_\beta(A) &\equiv \langle\langle T \exp[S_{v\beta}(\hat{\varphi}) + \hat{\varphi}A] \rangle\rangle = \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi} g \frac{\delta}{\delta\varphi}\right) \exp[S_{v\beta}(\varphi) + \varphi A]|_{\varphi=0}. \end{aligned} \quad (20)$$

Во всех выражениях интегрирование по времени производится только по интервалу  $\{0, \beta\}$ . Полная аналогия между (19), (20) и формулами (1.84), (1.88) теории поля позволяет автоматически перенести все результаты § 1.4 относительно диаграммных представлений на объекты (19), (20). Правая часть (19), если не полагать в ней  $\varphi = 0$ , имеет вид производящего функционала  $S$ -матрицы, частное  $Z/Z_0$  аналогично вакуумному ожиданию  $S$ -матрицы, и т. д. Разумеется, все утверждения топологического характера, например связность логарифмов  $Z/Z_0$  и  $G_\beta$  или сокращение вакуумных петель в отношениях (4), остаются в силе.

**5. Периодические продолжения функций Грина.** В определении (1) оговаривалось условие  $0 \leq t \leq \beta$  для времени каждого из полей. Правая часть (1) имеет смысл для всех времен и ее можно было бы рассматривать как естественное продолжение  $H_{n\beta}$  на любые значения  $t_1 \dots t_n$ , но тогда равенство (3) и его следствие (4) станут несправедливыми. Более удобным оказывается другое, а именно периодическое продолжение, которое для полей определяется правилом [34—36]:

$$\varphi(t + n\beta, \mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}), \quad (21)$$

где  $n$  — любое целое число,  $\kappa$  имеет обычный смысл. Периодическое продолжение (21) произвольной функции, заданной на интервале  $[0, \beta]$ , дается рядом Фурье:

$$f(t) = \sum_n f_n \exp i \omega_n t, \quad f_n = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta dt f(t) \exp(-i \omega_n t), \quad (22)$$

в котором  $\omega_n = \pi n / \beta$ , а суммирование производится только по четным значениям  $n$  для четного продолжения ( $\kappa = 1$  в (21)) и только по нечетным  $n$  для нечетного продолжения ( $\kappa = -1$ ). Всюду в дальнейшем суммирование по частотам понимается именно таким образом.

Функции многих переменных продолжают рядом Фурье по каждому аргументу. В частности, продолжение температурной свертки  $g(x, x')$  дается двойным рядом с коэффициентами:

$$g_{nm}(x, x') = \frac{1}{\beta^2} \int_0^\beta \int_0^\beta dt dt' g(x, x') \exp[-i \omega_n t - i \omega_m t']. \quad (23)$$

Воспользовавшись явными выражениями (6), (10), можно вычислить коэффициенты (23), которые оказываются отличными от нуля лишь при  $m = -n$ . Опуская простые выкладки, приведем результат: продолжение  $g$  имеет вид

$$g(x, x') = \frac{1}{\beta} \sum_{nz} \frac{\Phi_\alpha(x) \Phi_\alpha^*(x')}{\epsilon_\alpha - i \omega_n} \exp i \omega_n (t' - t) \quad (24)$$

и формально одинаково для обеих статистик, разница между которыми проявляется лишь в условиях на частоты  $\omega_n$  — четные для бозонов и нечетные для фермионов. Нетрудно заметить, что (24) получается простой заменой интегрирования на суммирование по частотам  $\omega_n$  в спектральном представлении евклидового пропагатора (6):

$$1/2\pi \cdot \int dE \dots \rightarrow 1/\beta \cdot \sum_{\omega_n} \dots \quad (25)$$

Напомним, что в соответствии с общими правилами п. IV.1.1 спектральное представление евклидового пропагатора получается из псевдоевклидового представления (II.27) стандартными заменами  $t \rightarrow -it$ ,  $E \rightarrow iE$ ,  $dE \rightarrow i dE$ .

Правая часть (25) является римановой суммой для интеграла в левой части. Действительно, интервал между соседними частотами одинаковой четности равен  $2\pi/\beta = \Delta\omega$ , так что при  $\beta \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \dots = \frac{1}{2\pi} \sum_{\omega_n} \Delta\omega \dots \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int dE \dots \quad (26)$$

Установим теперь связь между температурным пропагатором  $g$  и линейной операцией  $K_e$ , являющейся ядром евклидова свободного действия. Для рассматриваемой сейчас теории  $K_e = -\partial/\partial t - \mathcal{E}$ , где  $\mathcal{E}$  — одночастичный гамильтониан. Подействовав операцией  $K_e$  на первый аргумент свертки (24) с учетом равенства  $\mathcal{E}\Phi_\alpha = \varepsilon_\alpha\Phi_\alpha$ , получим

$$-\frac{1}{\beta} \sum_{n\alpha} \Phi_\alpha(\mathbf{x}) \Phi_\alpha^*(\mathbf{x}') \exp i\omega_n(t' - t) = \\ = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{1}{\beta} \sum_n \exp i\omega_n(t' - t). \quad (27)$$

Сумма по  $\alpha$  собралась в  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , поскольку  $\Phi_\alpha$  — полная ортонормированная система. Теперь заметим, что деленная на  $\beta$  сумма по частотам в правой части (27) есть не что иное, как ядро единичной операции на пространстве периодических функций  $t$ , поскольку эта величина совпадает, как нетрудно проверить, со стандартным периодическим продолжением  $\delta(t - t')$ . Тем самым мы доказали справедливость равенства  $K_e g = -1_n$ , правую часть которого нужно понимать как единичную операцию на пространстве периодических функций времени. Напомним, что в евклидовой теории поля имелось соотношение  $K_e \Delta_e = -1$ , но тогда правая часть была единичной операцией на пространстве всех функций времени без каких-либо требований периодичности.

Равенство  $K_e g = -1_n$  и правило (25) оказываются справедливыми для всех теорий. В качестве еще одного примера рассмотрим квантовомеханический осциллятор п. II.1.1. Евклидова свертка  $\Delta_e(t, t')$  получается из (II.6) отбрасыванием множителя  $i$  и заменой  $\omega^2 \rightarrow -\omega^2$ ; ядро  $d(t, t') \equiv \langle\langle N[\hat{\varphi}(t)\hat{\varphi}(t')] \rangle\rangle$  нетрудно вычислить, воспользовавшись явным выражением (II.3) для оператора поля, в котором нужно сделать замену  $t \rightarrow -it$ . В результате получим  $d(t, t') = (\bar{n}/\omega m) \cdot \text{ch } \omega(t - t')$ , где  $\bar{n} \equiv \langle\langle a^+ a \rangle\rangle = \exp(-\beta\omega)/1 - \exp(-\beta\omega)$ . Представив температурный пропагатор двойным рядом Фурье и вычислив по известным функциям  $\Delta_e$  и  $d$  коэффициенты ряда, найдем

$$g(t, t') = \frac{1}{m\beta} \sum_n \frac{1}{\omega^2 + \omega_n^2} \exp i\omega_n(t' - t) \quad (28)$$

(сумма по четным частотам). Ряд в правой части (28) получается из евклидова пропагатора  $\Delta_e$  посредством той же замены (25). Соотношение  $K_e g = -1_n$ , где  $K_e = m[\partial^2/\partial t^2 - \omega^2]$ , также выполняется.

В заключение укажем те изменения, которые следует внести в формулы (19), (20) при их обобщении на продолженную теорию. Напомним, что представления (19), (20) были выведены

для теории на конечном интервале времени  $[0, \beta]$  и все интегрирования по времени производились лишь по этому интервалу. Формулы останутся верными и для продолженной теории, если считать аргумент  $A$  произвольной функцией, заданной на всей оси времени, а оператор поля  $\hat{\varphi}$ , его классический аналог  $\varphi$  и свертку  $g$  понимать как периодические продолжения с интервала  $[0, \beta]$ ; интегрирования по времени в формах  $\hat{\varphi}A$ ,  $\varphi A$  и в квадратичной форме производных следует производить по всей оси.

С математической точки зрения красивее и естественнее считать интервал  $[0, \beta]$  не отрезком прямой, а кольцом, и понимать поля и прочие величины как функции на кольце, однозначные для бозонов и двузначные для фермионов. Этот язык эквивалентен языку периодических продолжений.

**6. Представления функциональными интегралами.** Установленное в предыдущем разделе соотношение  $K_e g = -1_{\pi}$  позволяет перенести на рассматриваемый случай результаты § IV.2 относительно интегральных представлений различных функционалов в евклидовой теории. Разница будет лишь в том, что теперь функциональное интегрирование будет производиться по пространству полей с должными (в соответствии со статистикой) свойствами периодичности, а интегрирование по времени в квадратичной форме свободного действия  $S_{0\beta}(\varphi) = \varphi K_e \varphi / 2$  и в функционале взаимодействия  $S_{v\beta}(\varphi)$  — по конечному интервалу  $[0, \beta]$ . Для свободной теории

$$G_{\beta}^{(0)}(A) = \exp \left[ \frac{\alpha}{2} AgA \right] = \text{const} \int D\varphi \exp \left[ \frac{1}{2} \varphi K_e \varphi + \varphi A \right], \quad (29)$$

а в общем случае

$$G_{\beta}(A) = \text{const} \int D\varphi \exp [S_{\beta}(\varphi) + \varphi A], \quad (30)$$

где  $S_{\beta} = S_{0\beta} + S_{v\beta}$  — полный функционал действия (евклидов) для интервала  $[0, \beta]$ . Условие периодичности позволяет отбрасывать внеинтегральные члены при интегрировании по частям в функционале свободного действия, что позволяет считать  $K_e$  симметричной операцией на пространстве периодических функций времени; это же условие обеспечивает однозначность определения обратной операции  $-K_e^{-1} = g$ , возникающей при вычислении гауссова интеграла (29) с помощью сдвига.

Интеграл (30) нормируется обычным условием  $G_{\beta}(0) = 1$  для свободной теории, для теории с взаимодействием величина  $G_{\beta}(0)$  равна, как видно из (19), (20), отношению статусм  $Z/Z_0$ .

Для продолженной теории параметр  $A$  в (29), (30) следует считать произвольной функцией, заданной на всей оси времени, а интегрирование по времени в линейной форме  $\varphi A$  производить по всей оси.

С точки зрения свойств вещественности полей, по которым производится функциональное интегрирование, представления



(29), (30) возможны в двух вариантах: по исходным и по развернутым полям, о чем подробно говорилось в § IV.2.

Коротко можно заключить так: квантовая статистика есть евклидова теория поля на конечном интервале времени с дополнительным условием периодичности для полей.

**7. Предельный переход к нулевой температуре.** Из (26) видно, что в пределе нулевой температуры температурный пропагатор переходит в евклидов: при  $\beta \rightarrow \infty$

$$g(x, x') \rightarrow \Delta_e(x, x'). \quad (31)$$

Сходимость поточечная, т. е. утверждение (31) верно для любых фиксированных  $x, x'$ .

В формулы предыдущих разделов входил функционал действия для интервала  $[0, \beta]$ , и потому на первый взгляд кажется, что при  $\beta \rightarrow \infty$  квантовая статистика должна переходить в евклидову теорию поля на положительной полуоси времени. С другой стороны, считая действие функционалом от периодических полей и учитывая, что евклидов лагранжиан, будучи величиной бозонного типа, имеет четное продолжение, мы можем переписать функционал действия в виде интеграла по симметричному промежутку:

$$S_\beta = \int_0^\beta dt \mathcal{L}_e(t) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \mathcal{L}_e(t). \quad (32)$$

При такой записи формальный предельный переход  $\beta \rightarrow \infty$  приведет нас к обычной евклидовой теории на всей оси времени.

Несмотря на то, что равенство (32) действительно верно, два формальных предела — теория на полуоси времени и теория на всей оси — существенно различны. Это доказывает лишь то, что формальный предельный переход является, вообще говоря, незаконным. Последнее понятно: диаграммам теории возмущений соответствуют многократные интегралы от произведений пропагаторов, а поточечная сходимость (31) не является достаточно хорошей для того, чтобы обеспечить возможность предельного перехода под знаком интеграла.

Более подробный анализ показывает, что один из формальных пределов — теория на всей оси времени — все же является правильным. Не останавливаясь подробно на доказательстве, приведем лишь простой пример, иллюстрирующий это утверждение.

Пусть  $F(t)$  — произвольная функция, заданная на всей оси,  $f(\omega)$  — ее Фурье-образ:  $F(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega f(\omega) \exp i\omega t$ . Определим периодическую функцию  $F_\beta(t)$ :

$$F_\beta(t) = \sum_n f(\omega_n) \exp i\omega_n t \quad (33)$$

(сумма по четным частотам), которая переходит в  $F(t)$  в пределе  $\beta \rightarrow \infty$ . Вследствие периодичности интегралы от  $F_\beta(t)$  по промежуткам  $[0, \beta]$  и  $[-\beta/2, \beta/2]$  совпадают. Из (33) ясно, что каждый из них равен  $f(0)$  и не зависит от  $\beta$ . С другой стороны, формальными пределами соответствующих интегралов являются интегралы от предельной функции  $F(t)$  по полуоси и по всей оси соответственно. Бвиду произвольности  $F(t)$  эти пределы существенно различны и второй из них (по всей оси), равный  $f(0)$ , оказывается правильным, т. е. совпадает с пределом интеграла по конечному промежутку.

**8. Формула Фейнмана — Каца.** Повторяя дословно рассуждения § II.4, можно вывести евклидов аналог соотношения (II.56). Результат, как обычно, получается стандартными заменами  $t \rightarrow -it$ ,  $iS \rightarrow S_e$  из псевдоевклидового, и мы приведем его без вывода:

$$\langle x | \exp \mathbf{H}(\tau' - \tau) | x' \rangle = \text{const} \int_{(xx')} D\varphi \exp S_e(\varphi).$$

Функционал  $S_e(\varphi)$  в правой части — евклидово действие на интервале  $\tau' \leq t \leq \tau$ , а интегрирование производится по траекториям с заданными краевыми значениями  $x$ ,  $x'$  на концах интервала.

Если положить  $\tau = \beta$ ,  $\tau' = 0$ , то левую часть можно истолковать как координатное представление матрицы плотности  $\rho = \exp(-\beta \mathbf{H})$ :

$$\rho(x, x') = \text{const} \int_{(xx')} D\varphi \exp S_\beta(\varphi). \quad (34)$$

Вычисляя след матрицы плотности, получаем статистику  $Z$ :

$$Z = \text{tr} \rho = \text{const} \int dx \int_{(xx)} D\varphi \exp S_\beta(\varphi). \quad (35)$$

Этот результат справедлив, в частности, и для квантовомеханической свободной теории п. II.1.2, которая до сих пор исключалась из рассмотрения. Отметим, что правая часть (35) является, как и (30), интегралом по всем периодическим полям: условие периодичности (21) для бозонного поля  $\varphi(t)$  означает  $\varphi(\beta) = \varphi(0)$ , а интегрирование по полям, удовлетворяющим условию  $\varphi(\beta) = \varphi(0) = x$ , вместе с последующим интегрированием по  $x$  эквивалентно, очевидно, интегрированию по всем периодическим полям (т. е. по замкнутым траекториям).

Соотношение (34) в отличие от большинства подобных формул допускает математически корректное истолкование [38], а именно: для свободной теории п. II.1.2, в которой действие  $S_{0\beta}$  есть просто интеграл по времени от кинетической энергии с минусом, символ

$$\text{const} \int_{(x_1, x_2)} D\varphi \exp S_{0\beta}(\varphi) \dots \quad (36)$$

действительно определяет меру Вигнера  $\mu(\varphi; \beta; x_1, x_2)$  на пространстве непрерывных, но не обязательно дифференцируемых функций с заданными краевыми условиями. Подчеркивая этот факт, соотношение (34) переписывают в виде

$$\rho(x_1, x_2) = \int D\mu(\varphi; \beta, x_1, x_2) \exp S_{\varphi\beta}(\varphi) \quad (37)$$

и называют формулой Фейнмана — Каца. Мера  $\mu$  оказывается при этом сосредоточенной на недифференцируемых функциях, так что запись (36) чисто символическая.\* Математическая корректность представления (37) для достаточно хороших  $S_{\varphi\beta}$  позволяет использовать его для получения различных строгих результатов, касающихся, например, существования термодинамического предела в квантовой статистике [39].

**9. Свойства выпуклости.** Функциональные интегралы в статистике отличаются от интегралов евклидовой теории поля лишь конечностью области интегрирования по времени в функционале действия и требованиями периодичности для полей. Соображения п. IV.3.1 остаются в силе, и потому можно утверждать, что в квазивероятностных теориях  $G_\beta(A)$  и его логарифм являются выпуклыми вниз функционалами  $A$  и прочих переменных, входящих линейно в действие.

В действительности единственной практически важной для статистики квазивероятностной теорией является квантовая механика с хорошим потенциалом. Релятивистские квазивероятностные теории скалярного и векторного полей представляют, видимо, лишь академический интерес, а наиболее важная в практическом отношении нерелятивистская теория § II.2 не является квазивероятностной.

Как и в теории поля, в статистике существует универсальное свойство выпуклости по отношению к потенциалам, не зависящим от времени, — аналог соотношения (IV.21). Доказательство, к которому мы переходим, почти дословно повторяет рассуждения п. IV.3.2. Пусть  $S_\beta = S'_\beta + S''_\beta$ , где  $S''_\beta$  — интеграл по времени от 0 до  $\beta$  от вещественного (при неразвернутых полях) функционала (IV.18), пусть  $G_\beta(A) = \text{const} \int D\varphi \exp S_\beta(\varphi)$  — функционал, нормированный условием  $G_\beta(0) = 1$ . Мы хотим показать, что  $G_\beta(A)$  и его логарифм  $W_\beta(A)$  являются выпуклыми вниз функционалами потенциалов  $A_n$  в (IV.18). Прежде всего заметим, что сам функционал  $G_\beta$  положителен, поскольку он равен отношению статсумм теорий с действием  $S_\beta$  и  $S'_\beta$  соответственно, а всякая статсумма неотрицательна как след положительного оператора  $\exp[-\beta H]$ .

Далее, очевидно, что вторая вариация  $G_\beta$  пропорциональна функциональному среднему с весом  $\exp S_\beta(\varphi)$  от квадрата

\* Напомним, что  $S_{\varphi\beta}(\varphi)$  содержит производную  $\dot{\varphi}$  по времени.

вариации действия  $\delta S_\beta^*$ , а вторая вариация логарифма  $G_\beta$  пропорциональна соответствующей дисперсии; положительность дисперсии является автоматическим следствием положительности среднего значения квадрата.

Вариация действия  $\delta S_\beta^*$  есть интеграл по времени от вариации лагранжиана  $\delta \mathcal{L}(t)$ . Поэтому функциональное среднее от квадрата  $\delta S_\beta^*$  выражается двойным интегралом по  $t$  и  $t'$  от функционального среднего произведения  $\delta \mathcal{L}(t) \delta \mathcal{L}(t')$ . Последнее можно выразить через статистическое среднее дайсонова  $T$ -произведения соответствующих операторов в евклидовом гайзенберговском представлении, пользуясь связью между функциональными интегралами и виковскими  $T$ -произведениями и правилами перехода к представлению взаимодействия в функциях Грина (аналог формулы (3)):

$$\langle \delta \mathcal{L}(t) \delta \mathcal{L}(t') \rangle = (T_D [\delta \hat{\mathcal{L}}(t) \delta \hat{\mathcal{L}}(t')]). \quad (38)$$

Символом  $\langle \dots \rangle$  обозначено функциональное среднее с весом  $\exp S_\beta(\varphi)$ ,  $\delta \hat{\mathcal{L}}(t)$  — соответствующий функционалу  $\delta \mathcal{L}(t)$  оператор в евклидовом гайзенберговском представлении. Если вариация потенциалов не выводит  $\mathcal{L}(t)$  из класса вещественных (в псевдоевклидовом варианте) лагранжианов, что мы будем предполагать, то шредингеровский оператор  $\delta \hat{\mathcal{L}} = \delta \hat{\mathcal{L}}(0)$  эрмитов, тогда как  $\delta \hat{\mathcal{L}}(t)$  обладает комбинированной эрмитовостью. Покажем, что в этом случае среднее значение в правой части (38) неотрицательно; этого более чем достаточно для доказательства свойств выпуклости.

Действительно, считая лагранжиан  $\mathcal{L}(t)$  и его вариацию  $\delta \mathcal{L}$  бозонными величинами, имеем  $T_D [\delta \hat{\mathcal{L}}(t) \delta \hat{\mathcal{L}}(t')] = \theta(t - t') \times \times \delta \hat{\mathcal{L}}(t) \delta \hat{\mathcal{L}}(t') + (t \gtrsim t')$ . Рассмотрим среднее значение произведения  $\delta \hat{\mathcal{L}}(t) \delta \hat{\mathcal{L}}(t')$ , которое пропорционально следу оператора  $\delta \hat{\mathcal{L}}(t) \delta \hat{\mathcal{L}}(t') \exp[-\beta \mathbf{H}]$ , где  $\mathbf{H}$  — полный гамильтониан теории с действием  $S_\beta$ . Искомый след представляется в виде двойного рода

$$\sum_{nm} |(n | \delta \hat{\mathcal{L}} | m)|^2 \exp[-\beta E_n + (E_n - E_m)(t - t')], \quad (39)$$

где  $|n\rangle$  — полная система собственных состояний  $\mathbf{H}$ ;  $E_n$  — соответствующие собственные значения;  $\delta \hat{\mathcal{L}}$  — оператор в шредингеровском представлении. Все члены ряда (39) положительны; предположив, что ряд сходится, заключаем, что его сумма положительна, и это доказывает искомое утверждение, поскольку второе слагаемое  $T$ -произведения отличается лишь перестановкой аргументов  $t$  и  $t'$ .

Итак, мы доказали неотрицательность вторых вариаций по потенциалам функционалов  $G_\beta(A)$  и  $W_\beta(A) = \ln G_\beta(A)$ . Функционал  $\Omega_\beta(A)$ , определенный соотношением  $W_\beta(A) = -\beta\Omega_\beta(A)$ , имеет смысл сдвига термодинамического потенциала из-за добавки взаимодействия  $S_\beta''$  и аналогичен сдвигу энергии основного состояния в теории поля. Из сказанного выше следует, что  $\Omega_\beta(A)$  является, как и сдвиг энергии  $\epsilon(A)$ , выпуклым вверх функционалом потенциалов, т. е. его вторая вариация отрицательна.

Как и в п. IV.3.2, в процессе доказательства неявно предполагается устойчивость рассматриваемой системы, т. е. ограниченность снизу гамильтониана. Действительно, ряд (39) определяет функцию Грина в области  $0 \leq t' \leq t \leq \beta$ . Во всех точках этой области коэффициенты при энергиях  $E_n$  и  $E_m$  в показателе экспоненты в (39) отрицательны. Отсюда видно, что рост ( $E_n \rightarrow \infty$ ) собственных значений благоприятствует сходимости ряда, но если гамильтониан  $\mathbf{H}$  не является ограниченным снизу и существует последовательность  $E_n \rightarrow -\infty$ , то ряд заведомо расходится и доказательство теряет силу.

**10. Выпуклость логарифма статсуммы.** Обсудим важный частный случай доказанного в предыдущем разделе общего утверждения — свойства выпуклости  $W = \ln Z$  по отношению к числовым параметрам, входящим линейно в показатель  $\rho$ -матрицы. Пусть  $\mathbf{a} \equiv -\beta\mathbf{H} = \sum_i x_i \mathbf{a}_i$ , где  $x_i$  — вещественные числовые коэффициенты,  $\mathbf{a}_i$  — некоторые эрмитовы операторы. Параметры  $x_i$  будут рассматриваться как независимые переменные. В качестве одного из них может быть взят сам множитель  $\beta$ , прочие  $x_i$  могут иметь разный смысл — химический потенциал, однородное внешнее поле и т. п. Например, для большого канонического ансамбля  $-\beta\mathbf{H} = -\beta\mathbf{H}' + \beta\mu\mathbf{N}$ , где  $\mathbf{H}'$  — обычный гамильтониан,  $\mathbf{N}$  — оператор числа частиц. В этом случае можно взять  $x_1 = -\beta$ ,  $x_2 = \beta\mu$ ,  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{N}$ .

Логарифмические производные статсуммы  $\alpha_i \equiv \partial W / \partial x_i = ((\mathbf{a}_i))$  определяют переменные  $\alpha_i$ , термодинамически сопряженные с  $x_i$ . В приведенном выше примере с переменной  $x_1$  сопряжено среднее значение энергии, а с  $x_2$  — среднее значение числа частиц.

Выпуклость вниз  $W$  как функции переменных  $x$  формально следует из результатов предыдущего раздела, но мы приведем еще один вариант доказательства. Имеем

$$\delta W = \sum_i \frac{\partial W}{\partial x_i} \delta x_i = \sum_i ((\mathbf{a}_i)) \delta x_i \equiv ((\delta \mathbf{a})) = Z^{-1} \text{tr} [\delta \mathbf{a} \exp \mathbf{a}].$$

Воспользовавшись затем хорошо известной формулой

$$\delta \exp \mathbf{a} = \int_0^1 dt \exp [\mathbf{a}(1-t)] \delta \mathbf{a} \exp [t\mathbf{a}], \quad (40)$$

нетрудно получить следующее выражение для второй вариации:

$$\delta^{(2)} W = \frac{1}{2i} \int_0^{\hbar} dt [ ((\delta a(t) \delta a(0))) - ((\delta a))^2 ], \quad (41)$$

в котором  $\delta a(t)$  — оператор  $\delta a$  в евклидовом гайзенберговском представлении,  $\delta a(0) = \delta a$ . Правая часть (41) имеет вид дисперсии, а положительность соответствующего среднего значения квадрата, т. е. первого слагаемого в правой части (41), немедленно следует из доказанной в предыдущем разделе положительности функции  $((\delta a(t) \delta a(0)))$  для эрмитового при  $t=0$  оператора  $\delta a$ ; как уже неоднократно говорилось, положительность дисперсии является формальным следствием положительности среднего значения квадрата.

Из (39) видно, что среднее квадрата может обратиться в нуль лишь тогда, когда оператор  $\delta \mathcal{L}$  равен нулю; отсюда следует, что дисперсия (41) может обратиться в нуль только если  $\delta a(t) - ((\delta a)) = 0$ , т. е. тогда и только тогда, когда оператор  $\delta a$  кратен единичному.

Требование выпуклости вниз функции  $W(x)$  содержит в себе все обычные условия положительности термодинамики, такие, как положительность теплоемкости, восприимчивости и т. п. Приведенное выше доказательство положительности второй вариации (41) будет вполне строгим лишь тогда, когда  $\rho$ -матрица действительно является хорошо определенным оператором с конечным следом и все рассматриваемые величины математически корректны. Такими свойствами обладают системы, заключенные в конечном объеме, при определенных предположениях относительно характера взаимодействия [40]. Требование выпуклости автоматически переносится и на бесконечно протяженные системы, если при этом величина  $W(x)$  определяется путем строгого предельного перехода из конечного объема.

**11. Представление статсуммы свободной теории функциональным интегралом.** Покажем, что при правильном определении свободного действия справедлива формула

$$Z = \text{const} \int D\varphi \exp S_{\bar{r}}(\varphi), \quad (42)$$

в которой нормировочная постоянная не зависит ни от вида взаимодействия, ни от одночастичных энергий. Отличие от формул п. 6 в том, что в (42) определяется сама статсумма, а не только отношение  $Z/Z_0$ .

Поскольку мы знаем, что отношение статсумм равно отношению входящих в (42) интегралов, достаточно проверить справедливость утверждения (42) для свободных теорий.

Начнем с одномерного квантовомеханического осциллятора, для которого

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[ -\beta \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] = \left[ 2 \operatorname{sh} \frac{\beta \omega}{2} \right]^{-1}. \quad (43)$$

С другой стороны, для осциллятора  $2S_B = \varphi K_{\text{эф}}$ , где  $K_e = = m[\partial^2/\partial t^2 - \omega^2]$ . Вычислив гауссов интеграл в правой части (42) по правилу (I.145), получим  $\text{const det } K_e^{-1/2}$ . Здесь и далее const обозначает любую постоянную, не зависящую от одночастичных энергий, в данном случае от  $\omega$ .

Операция  $K_e$  действует на пространстве периодических функций (22) с четными гармониками. Последние являются собственными функциями  $K_e$  с собственными значениями  $-m[\omega_n^2 + \omega^2]$ , где  $\omega_n = 2\pi n/\beta$ . Вычисляя определитель как произведение собственных чисел, получаем

$$\det K_e^{-1/2} = \text{const} \left[ \omega \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{\omega_n^2 \beta^2}{4\pi^2 m^2} \right) \right]. \quad (44)$$

Мы выделили множитель с  $n=0$  и учли удвоение по знаку  $n$ .

Бесконечное произведение в квадратной скобке вместе с множителем  $\omega$  сходится к  $2\beta^{-1} \operatorname{sh}[\beta\omega/2]$ , так что гауссов интеграл в правой части (42) пропорционален (43), что и требовалось доказать.

Обратимся теперь к нерелятивистской теории § II.2, для которой  $S_B = \psi^+ K_e \psi$ , где  $K_e = -\partial/\partial t - \mathcal{E}$ . Вычислив гауссов интеграл в (42) для комплексного поля  $\psi$ ,  $\psi^+$  по формулам (I.146), (I.160), получим  $\det K_e^{-z}$  с точностью до несущественного множителя. Как обычно,  $z = \pm 1$  в зависимости от статистики. Определитель  $K_e$  можно найти, как и для осциллятора, через произведение собственных чисел, но для разнообразия мы поступим иначе, воспользовавшись формулой типа (I.147).

Допустим, что одночастичный гамильтониан  $\mathcal{E}$  имеет чисто дискретный спектр  $\varepsilon_\alpha$ . Определитель  $K_e$  распадается, очевидно, на произведение по всем уровням  $\alpha$ , так что нам достаточно решить одноуровневую задачу, т. е. вычислить определитель операции  $K \equiv -\partial/\partial t - \varepsilon$ , действующей на пространстве комплексных периодических функций времени.

Используя  $\varepsilon$  как параметр  $\lambda$  в формуле типа (I.147), напишем

$$\partial \operatorname{tr} \ln K \partial \varepsilon = -\operatorname{tr} K^{-1} = \operatorname{tr} g. \quad (45)$$

Здесь  $g = -K^{-1}$  — температурный пропагатор для одноуровневой задачи (являющийся резольвентой линейной операции  $-\partial/\partial t$  на пространстве периодических функций). Ядро  $g$  известно из формул (6), (9), (10):  $g(t, t') = [\delta(t-t') + \kappa n] \exp \varepsilon(t-t')$ ,

где  $n$  — среднее число заполнения — известная из (8) функция  $\epsilon$ :  $n = \exp(-\beta\epsilon) / [1 - \kappa \exp(-\beta\epsilon)]$ .

Чтобы найти след  $g$ , нужно проинтегрировать функцию  $g(t, t)$  по  $t$  в интервале  $[0, \beta]$ . Наше ядро  $g(t, t')$  содержит разрывную  $\theta$ -функцию, которую следует доопределять как полусумму предельных значений в точке разрыва:  $\theta(t-t) = 1/2$ . При таком доопределении  $g(t, t) = \kappa n + 1/2$  не зависит от  $t$  и  $\text{tr} g = \beta[\kappa n + 1/2]$ . Вычислив по известной функции  $n(\epsilon)$  первообразную по  $\epsilon$ , получим  $\text{tr} \ln K = \text{const} + \ln[1 - \kappa \exp(-\beta\epsilon)] + \beta\epsilon/2$ . Умноженная на  $-\kappa$  сумма таких выражений для всех уровней  $\alpha$  должна совпадать, если формула (42) верна, с логарифмом статсуммы рассматриваемой свободной теории. Но сравнение с формулами (7) показывает, что в действительности совпадения нет. Различие — в слагаемых  $\beta\epsilon/2$ , которых нет в (7).

Тому, кто припишет это правилу доопределения  $\theta(t-t) = 1/2$  и усомнится в нем, можно сразу же возразить, что непосредственное вычисление определителя как произведения собственных чисел подтверждает полученные выше формулы. Дело здесь в самом определении свободного действия. До сих пор мы не интересовались возможностью добавления к свободному лагранжиану константы — во всех формулах, исключая (42), такая константа просто поглотилась бы различными нормировочными множителями. Но в соотношениях типа (42), определяющих саму статсумму (или энергию основного состояния в теории поля), а не ее сдвиг при включении взаимодействия, такая константа существенна. Чтобы ее учесть, нужно распространить на свободный гамильтониан правило, сформулированное в п. I.3.2 для гамильтониана взаимодействия: *квантовому оператору сопоставляется классический функционал, представляющий Sum-форму квантового оператора*. Тогда получится, что обычная квадратичная форма  $\psi^+ K \psi$ , которую мы всегда брали в качестве свободного действия, соответствует в действительности не оператору  $\mathbf{H}_0 = \sum \epsilon_\alpha a_\alpha^+ a_\alpha$ , а оператору  $\text{Sum} \sum \epsilon_\alpha a_\alpha^+ a_\alpha = \mathbf{H}_0 + E_0$ . Константа  $E_0 = \kappa \sum \epsilon_\alpha / 2$  есть сумма энергий вакуумных колебаний всех осцилляторов поля. Чтобы убрать эту константу и получить правильный гамильтониан  $\mathbf{H}_0$ , к свободному лагранжиану нужно добавить константу  $E_0$ , что дает добавку  $\beta E_0$  к действию  $S_\beta$ . Эта добавка сократит ненужные слагаемые  $\beta\epsilon_\alpha/2$  в логарифмах гауссовых интегралов и восстановит соответствие с формулами (7). Отметим, что для осциллятора подобный вопрос не возник, потому что его гамильтонианом считается именно Sum-форма.

При нулевой температуре, т. е. в теории поля, формулы типа (42) определяют энергию основного состояния с точностью до аддитивной постоянной, не зависящей от одночастичных энергий. В аналогичную (45) формулу для фермионной теории § II.2 вместо температурного пропагатора  $g$  войдет пропагатор (II.26) одноуровневой задачи:  $\Delta(t, t') = \theta(t-t') \exp i\epsilon(t'-t)$ , если



уровень свободен, и  $\Delta(t, t') = -\theta(t'-t) \exp i \varepsilon(t'-t)$ , если он занят. При  $t' = t$  получим соответственно  $\Delta(t, t) = \pm 1/2$ , что даст  $\varepsilon$  для разности энергий, как и требуется.

## § 2. РЕШЕТОЧНЫЕ СПИНОВЫЕ СИСТЕМЫ

**1. Модель Изинга.** В этой модели каждому узлу  $i$  некоторой пространственной решетки сопоставляется оператор момента  $s_i$ , имеющий лишь два собственных значения  $\pm 1$  (спин вверх, спин вниз). Операторы  $s_i$  разных узлов коммутируют между собой, так что в этой системе вообще нет некоммутирующих операторов и ее можно считать классической.

В качестве гамильтониана берется следующее выражение [41]:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} \sum_{ik} s_i \mathcal{V}_{ik} s_k - \sum_i s_i h_i \equiv -\frac{1}{2} s \mathcal{V} s - h s, \quad (46)$$

первое слагаемое которого представляет обменное взаимодействие моментов, а второе — взаимодействие с неоднородным внешним полем  $h$ . Взаимодействие задается вещественной симметричной матрицей  $\mathcal{V}$ , имеющей нули на диагонали. Обычно рассматриваются трансляционно-инвариантные системы, для которых  $\mathcal{V}_{ik}$  зависит лишь от разности координат узлов  $i$  и  $k$ , а внешнее поле  $h_i$  однородно, т. е. не зависит от  $i$ . Однако с технической точки зрения удобнее считать вначале  $\mathcal{V}$  и  $h$  произвольными параметрами, конкретные значения которым приписываются лишь в окончательных формулах. Для сокращения записи обозначим  $A \equiv \{A_i = \beta h_i\}$  и  $\Delta \equiv \{\Delta_{ik} = \beta \mathcal{V}_{ik}\}$ . Тогда

$$Z = \text{tr} \exp \left[ \frac{1}{2} s \Delta s + A s \right] = \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta A} \Delta \frac{\delta}{\delta A} \right] Z^{(0)}(A), \quad (47)$$

где  $Z^{(0)}(A) = \text{tr} \exp A s$ . При получении второго равенства мы воспользовались тем, что дифференцирование по  $A_i$  равносильно умножению на  $s_i$  под знаком  $\text{tr}$  ввиду коммутативности всех  $s_i$ . Функционал  $Z^{(0)}$  распадается в произведение по узлам и легко вычисляется: он равен произведению множителей  $2 \text{ch} A_i$ . Отсюда

$$\mathcal{H}(A) \equiv \ln Z^{(0)}(A) = \sum_i \ln 2 \text{ch} A_i \equiv \ln 2 \text{ch} A. \quad (48)$$

Правая часть (47) имеет вид производящего функционала  $S$ -матрицы (I.84), что позволяет перенести на статсумму модели Изинга все результаты § I.4, касающиеся диаграммных представлений  $S$ -матрицы: статсумма  $Z$  есть сумма единицы и всех графиков с линией  $\Delta$  и производящей вершиной (48), а ее логарифм  $\mathcal{W} = \ln Z$  есть сумма всех связанных графиков. В данной теории взаимодействием считается линия, а не вершина. Линия  $\Delta$  содержит множитель  $\beta$ , так что классифицируя диаграммы

по числу линий, мы приходим к высокотемпературным разложениям по степеням  $\beta$ .

Производящая вершина (48) представляется в виде суммы по узлам, поэтому вершинные множители (I.97) оказываются локальными: производные  $\mathcal{M}_n(i_1 \dots i_n) \equiv \partial^n \mathcal{M} / \partial A_{i_1} \dots \partial A_{i_n}$  отличны от нуля лишь при совпадении всех индексов  $i_1 \dots i_n$ . Например,  $\mathcal{M}_1(i) = \text{th } A_i$ ,  $\mathcal{M}_2(ik) = \delta_{ik}(1 - \text{th}^2 A_i)$ , и т. д.

Помимо самой статсуммы  $Z$  и ее логарифма  $W$  физический интерес представляют производные этих функционалов по переменной  $A$ . Наиболее важны производные  $\partial W / \partial A_i = \langle (s_i) \rangle$ , определяющие среднее значение момента  $s_i$ , т. е. намагниченность узла  $i$ , и вторые производные  $\partial^2 W / \partial A_i \partial A_k = \langle (s_i s_k) \rangle - \langle (s_i) \rangle \langle (s_k) \rangle$ , представляющие матрицу корреляций моментов. Диаграммные представления для этих величин получаются автоматически из диаграммного представления  $W$ .

При практическом расчете коэффициентов высокотемпературных разложений в нулевом внешнем поле обычно используется не фейнмановская диаграммная техника, о которой говорилось выше, а так называемая техника диаграмм на решетке, которая опирается на специфический вид обменного взаимодействия (т. е. матрицы  $\mathcal{V}$ ) и слабо связана со стандартным формализмом теории поля. Мы не будем на ней останавливаться, а отошлем интересующегося читателя к книгам [42, 43].

Приведем интегральное представление для статсуммы, получаемое обычным образом из (47) и вполне подобное представлению  $S$ -матрицы (I.168):

$$Z = \text{const} \int D\varphi \exp \left[ -\frac{1}{2} \varphi \Delta^{-1} \varphi + \ln 2 \text{ch}(\varphi + A) \right]. \quad (49)$$

Здесь  $\varphi \equiv \{\varphi_i\}$  — вещественное поле на решетке,  $D\varphi = \prod_i d\varphi_i$ , а нормировочная постоянная определена так, чтобы правая часть (49) обращалась в единицу при отбрасывании  $\ln 2 \text{ch}(\varphi + A)$ .

Отметим, что приближение стационарной фазы для интеграла (49) приводит к хорошо известному уравнению самосогласованного поля Вейсса для намагниченности; последняя, будучи логарифмической производной  $Z$  по  $A$ , представляется как функциональное среднее от  $\text{th}(\varphi + A)$ .

Определение (47) можно понимать как еще одно интегральное представление статсуммы:

$$Z = \text{const} \int D\varphi \delta(\varphi^2 - 1) \exp \left[ \frac{1}{2} \varphi \Delta \varphi + A\varphi \right],$$

где  $\delta(\varphi^2 - 1) \equiv \prod_i \delta(\varphi_i^2 - 1)$ . Представив эту  $\delta$ -функцию функциональным интегралом Фурье  $\sim \int D\psi \exp i\psi(\varphi^2 - 1)$ , получим для  $Z$  представление в виде интеграла по паре полей  $\varphi, \psi$ .

Приведем в заключение дифференциальные уравнения для  $Z$ . Обычное уравнение Швингера (п. 1.7.1) для интеграла (49) неэффективно ввиду неполиномиальности взаимодействия  $\ln 2\text{ch}$ , но искомые уравнения очень просто получаются непосредственно из определения (47):

$$2\partial\bar{Z}/\partial\Delta_{ik} = \partial^2 Z / \partial A_i \partial A_k, \quad i \neq k; \quad \partial^2 Z / \partial A_i \partial A_i = Z. \quad (50)$$

Второе из них выражает условие  $s_i^2 = 1$ . Итерируя эти уравнения по степеням  $\Delta$  с известным нулевым приближением  $Z^{(0)}(A) = \exp \ln 2\text{ch} A$ , мы придем к стандартным диаграммным представлениям для  $Z$ .

Упомянем еще классическую модель Гайзенберга, которая отличается от модели Изинга тем, что каждому узлу решетки сопоставляется классический  $d$ -мерный вектор момента единичной длины  $\mathbf{s}$ , а статсумма определяется интегралом по направлениям всех векторов  $\mathbf{s}_i$ ; в частном случае  $d = 1$  мы возвращаемся к модели Изинга. Диаграммные представления статсуммы будут точно такими же, как и для модели Изинга, разница лишь в появлении дополнительных спиновых значков и в явном виде аналогичной (48) производящей вершины  $\mathcal{M}(A)$ .

**2. Квантовый ферромагнетик Гайзенберга.** В этой модели каждому узлу  $i$  сопоставляется квантовомеханический оператор спина  $s_{i\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , с заданным значением  $s$ , где  $s$  — любое целое или полуцелое положительное число. Операторы  $s_{i\alpha}$  понимаются как матрицы, действующие в конечномерном пространстве состояний одного узла размерности  $2s + 1$ . Операторы разных узлов коммутируют между собой, а операторы одного узла удовлетворяют перестановочным соотношениям группы вращений:  $[s_{i\alpha}, s_{i\beta}] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_{i\gamma}$ .

Гамильтониан опять пишется в виде квадратичной формы [41]:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i\alpha, k\beta} s_{i\alpha} \mathcal{V}_{i\alpha, k\beta} s_{k\beta} - \sum_{i\alpha} h_{i\alpha} s_{i\alpha} \equiv -\frac{1}{2} s \mathcal{V} s - h s, \quad (51)$$

причем предполагается, что матричные элементы  $\mathcal{V}_{i\alpha, k\beta}$  обращаются в нуль при  $i = k$ , т. е. взаимодействуют только спины разных узлов. В этом случае не возникает вопроса о порядке множителей  $s_{i\alpha} s_{k\beta}$ .

По определению

$$Z = \text{tr} \exp [-\beta \mathbf{H}] = \text{tr} \exp \left[ \frac{\beta}{2} s \mathcal{V} s + \beta h s \right]. \quad (52)$$

Отличие от рассматривавшихся ранее классических спиновых систем состоит в том, что теперь множитель  $\exp[\beta s \mathcal{V} s / 2]$  нельзя вынести за знак  $\text{tr}$  в виде дифференциальной операции вследствие некоммутативности операторов спина. Поэтому для построения теории возмущений нужно переходить к представле-

нию взаимодействия. Исходной точкой является формула (2) для матрицы плотности  $\rho = \exp[-\beta \mathbf{H}]$ , из которой

$$Z/Z_0 = \ll T_D \exp \left[ - \int_0^{\beta} dt \mathbf{V}(t) \right] \gg. \quad (53)$$

Свободным гамильтонианом считается второе слагаемое (51), а взаимодействием — первое; напомним, что символ  $\ll \dots \gg$  обозначает усреднение со свободной  $\rho$ -матрицей, а  $\mathbf{V}(t)$  — гамильтониан взаимодействия в евклидовом представлении взаимодействия. Символ  $T_D$  в (53) обозначает обычное дайсоново  $T$ -произведение операторов взаимодействия, но при желании его можно понимать как хронологическое упорядочение  $T$  самих операторов спина  $s(x) \equiv s_{i\alpha}(t)$  в представлении взаимодействия

$$T[s(x_1) \dots s(x_n)] = \sum_P P[\theta(1 \dots n) s(x_1) \dots s(x_n)]. \quad (54)$$

При совпадении всех или части временных аргументов  $t_1 \dots t_n$  символ  $T$  доопределяется как Сум-произведение (см. п. I.2.2). Замена в (53) символа  $T_D$  на  $T$  не ведет к недоразумениям, поскольку спиновые операторы с одинаковыми  $t$  в (53) коммутируют (взаимодействуют лишь спины разных узлов).

Введем вспомогательную переменную  $A(x) \equiv A_{i\alpha}(t)$  и определим функционал

$$Z(A)/Z_0 = \ll T \exp \left[ A s - \int_0^{\beta} dt \mathbf{V}(t) \right] \gg, \quad (55)$$

в котором  $As \equiv \int dx A(x) s(x) \equiv \sum_{i\alpha} \int_0^{\beta} dt A_{i\alpha}(t) s_{i\alpha}(t)$ .

Операторы спина под знаком  $T$ -произведения ведут себя подобно классическим коммутирующим объектам и это позволяет вынести квадратичное по спину слагаемое с  $\mathbf{V}(t)$  в показателе экспоненты (55) в виде дифференциальной операции:

$$Z(A)/Z_0 = \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta A} g \frac{\delta}{\delta A} \right] \ll T \exp As \gg, \quad (56)$$

где, как обычно,  $\frac{\delta}{\delta A} g \frac{\delta}{\delta A} \equiv \int \int dx dx' \frac{\delta}{\delta A(x)} g(x, x') \frac{\delta}{\delta A(x')}$ , а „свертка“  $g(x, x') = \delta(t - t') \mathcal{V}_{i\alpha, i'\alpha'}$  определяется матрицей обменного взаимодействия в гамильтониане (51).

Правая часть (56) имеет вид производящего функционала  $S$ -матрицы (I.84) для теории с пропагатором  $g$  и производящей вершиной

$$\mathcal{M}(A) = \ln \ll T \exp As \gg \quad (57)$$

и потому допускает стандартные диаграммные представления § 1.4. Чтобы получить величину  $Z/Z_0$ , которая аналогична ва-

куумному ожиданию  $S$ -матрицы в теории поля, нужно положить  $A = 0$  в (56).

С точки зрения обычной теории поля выражение (56) подобно производящему функционалу  $S$ -матрицы, но в действительности оно является производящим функционалом полных температурных функций Грина операторов спина  $s(x)$ : пользуясь, как и выше, заменой  $T_D$  на  $T$ , нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} & ((T_D [s_\Gamma(x_1) \dots s_\Gamma(x_n)])) = \\ & = \text{const} \ll T \left[ s(x_1) \dots s(x_n) \exp \left( - \int_0^\beta dt \mathbf{V}(t) \right) \right] \gg. \end{aligned} \quad (58)$$

Эта формула аналогична (4),  $s_\Gamma(x)$  — операторы спина в евклидовом гайзенберговском представлении, символ  $((\dots))$  обозначает усреднение с точной  $\rho$ -матрицей, нормировочная постоянная в правой части (58) определена условием  $((1)) = 1$  и равна численно  $Z_0/Z$ .

Диаграммные представления функций Грина операторов спина однозначно определяются известным диаграммным представлением производящего функционала (55). В практических расчетах наиболее трудным является вычисление вершинных множителей, т. е. кратных производных функционала (57) при  $A=0$ ; из сравнения (58) и (57) видно, что эти множители имеют смысл связанных функций Грина операторов спина для свободной теории. Среднее  $T \exp A s$  распадается, очевидно, в произведение по всем узлам, следовательно, производящая вершина (57) распадается на сумму по узлам; поэтому вершинные множители  $\mathcal{A}_n(x_1 \dots x_n; A)$  „локальны по узлам“, т. е. отличны от нуля лишь при совпадении всех индексов  $i_1 \dots i_n$  (напомним, что  $x \equiv t, i, \alpha$ ). При нулевом  $A$  коэффициент при  $\delta$ -символе по узлам не зависит от номера (общего для всех) узла решетки, так что вся трудность состоит в вычислении функционала (57) и его коэффициентов разложения по  $A$  для одного оператора спина. Для вычисления этих коэффициентов разработана своя диаграммная техника („теорема Вика для операторов спина“), с которой можно ознакомиться по книге [44]. Изложенная нами выше диаграммная техника впервые была сформулирована в работе [45]. В заключение отметим, что нахождение в замкнутом виде функционала (57) для одного узла эквивалентно точному решению задачи о спине в произвольном зависящем от времени внешнем поле.

### § 3. КЛАССИЧЕСКИЙ НЕИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

**1. Газ с парными силами.** Статсумма  $Z_N$  системы  $N$  классических точечных частиц в  $d$ -мерном пространстве определяется, как известно (см., например, [7, 8]), интегралом

$$Z_N = \frac{1}{N! (2\pi)^{Nd}} \int \dots \int d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N dx_1 \dots dx_N \exp(-\beta \mathcal{H}_N) \quad (59)$$

(как всегда  $\hbar = 1$ ), в котором  $\mathcal{H}_N$  — полный гамильтониан  $N$  частиц:

$$\mathcal{H}_N(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_N, \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N) = \sum_i \left( \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \varphi_1(\mathbf{x}_i) \right) + \sum_{i < k} \varphi_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k).$$

Функция  $\varphi_1(\mathbf{x})$  представляет потенциал внешнего поля, симметричная функция  $\varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  — потенциал парного взаимодействия частиц; суммирование по  $i, k$  производится от единицы до  $N$ , т. е. по всем частицам, интегрирования по  $\mathbf{x}$  — по заданному объему системы, в трансляционно-инвариантной теории — по всему пространству.

Взяв гауссов интеграл по импульсам в (59), получаем

$$Z_N = (N! \lambda^{Nd})^{-1} \int \dots \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N \times \exp \left[ \sum_i A_1(\mathbf{x}_i) + \sum_{i < k} A_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) \right], \quad (60)$$

где обозначено  $A_1 \equiv -\beta \varphi_1$ ,  $\lambda \equiv (2\pi\beta m)^{1/2}$  — тепловая длина волны.

Статсумма  $Z$  большого канонического ансамбля определяется рядом

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} Z_N \exp(\beta \mu N), \quad (61)$$

в котором  $Z_0 = 1$  и введен дополнительно параметр  $\mu$  — химический потенциал.

Коэффициент при интеграле в общем члене ряда (61) равен  $a^N/N!$ , где  $a = \lambda^{-d} \exp \beta \mu$  — параметр, называемый активностью. Множитель  $a^N$  можно включить в виде аддитивной добавки  $\ln a$  к потенциалу  $A_1$  и потому мы будем его опускать, рассматривая  $A_1$  и  $A_2$  как независимые функциональные переменные, конкретные значения которым приписываются лишь в окончательных формулах. Итак, положим

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int \dots \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N \exp \left\{ \sum_i A_1(\mathbf{x}_i) + \sum_{i < k} A_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) \right\}. \quad (62)$$

Отсутствию внешнего поля соответствует теперь  $A_1(\mathbf{x}) = \ln a$ , а не  $A_1 = 0$ .

Дифференцирование общего члена ряда (62) по  $A_1(\mathbf{x})$  эквивалентно умножению подынтегрального выражения на  $\sum \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ ; наблюдаемая (случайная величина)  $n(\mathbf{x})$ , представляемая в каждом  $N$ -частичном секторе в виде операции умножения на  $\sum \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ , имеет смысл плотности числа частиц в точке  $\mathbf{x}$ . Это поясняет смысл кратных вариацион-

ных производных по  $A_1$  функционала  $Z$  и его логарифма  $W$ :  $\delta^n Z / \delta A_1(x_1) \dots \delta A_1(x_n) = Z((n(x_1) \dots n(x_n)))$ , где  $((\dots))$  обозначает усреднение по точному распределению. Производные  $Z$  являются аналогами полных функций Грина в теории поля. Поделив их на  $Z$ , приходим к аналогам функций Грина без вакуумных петель, кратные производные функционала  $W = \ln Z$  являются аналогами связных функций Грина. Наибольший интерес представляют две первые производные  $W$ :  $\delta W / \delta A_1(x) = ((n(x)))$  — средняя плотность числа частиц в точке  $x$  (обычно ее называют просто плотностью, но не нужно путать со случайной величиной  $n(x)$ ) и  $\delta^2 W / \delta A_1(x) \delta A_1(x') = ((n(x) n(x'))) - ((n(x))) ((n(x'))))$  — корреляционная функция флуктуаций плотности.

Сравнив производную  $Z$  по  $A_2(x, x')$  со второй производной по  $A_1$ , нетрудно получить следующее уравнение:

$$\frac{\delta Z}{\delta A_2(x, x')} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta^2 Z}{\delta A_1(x) \delta A_1(x')} - \delta(x - x') \frac{\delta Z}{\delta A_1(x)} \right]. \quad (63)$$

Второе слагаемое в правой части появилось потому, что суммирование парных вкладов  $A_2(x_i, x_k)$  в (62) производится по  $i \neq k$ . Уравнение (63) понадобится нам в следующей главе.

Перейдем теперь к диаграммным представлениям. Введем майеровскую линию (или „суперпропатор“)  $g_{ik} \equiv -1 + \exp A_2(x_i, x_k)$ , перепишем (62):

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_N \prod_i \exp A_1(x_i) \prod_{i < k} (1 + g_{ik}). \quad (64)$$

Общий член этого ряда представляется в виде суммы всевозможных пронумерованных диаграмм (см. п. I.4.2) с  $N$  вершинами; каждой из вершин сопоставляется множитель  $\exp A_1(x)$ , а линии, соединяющей вершины  $i$  и  $k$ , сопоставляется суперпропатор  $g_{ik}$ . Все диаграммы являются майеровскими, т. е. любая пара вершин соединяется не более чем одной линией, а замкнутых линий нет вообще.

Сравнение с формулами п. I.4.5 показывает, что мы имеем дело с обычными диаграммами теории поля с экспоненциальным взаимодействием в  $N$ -форме. Аналогия становится очевидной, если переписать (62) следующим образом:

$$Z = \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta A_1} A_2 \frac{\delta}{\delta A_1} \right] \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_N \times \\ \times \exp \sum_i \left[ A_1(x_i) - \frac{1}{2} A_2(x_i, x_i) \right]. \quad (65)$$

При действии вынесенной дифференциальной операции на  $\exp \sum A_1(x_i)$  возникает множитель  $\exp [1/2 \cdot \sum A_2(x_i, x_i)]$ , ненуж-

ные диагональные члены формы сокращаются дополнительными слагаемыми  $A_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)$  в (65).

Просуммировав ряд по  $N$  в (65), приходим к формуле типа (I.84):

$$Z = \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta A_1} A_2 \frac{\delta}{\delta A_1} \right] \exp \mathcal{M} \quad (66)$$

с производящей вершиной

$$\mathcal{M} = \int d\mathbf{x} \exp \left[ A_1(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} A_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right]. \quad (67)$$

Итак, статсумма  $Z$  совпадает с производящим функционалом  $\mathcal{S}$ -матрицы теории поля с линией  $A_2$  и производящей вершиной (67). Экспоненциальный характер взаимодействия позволяет пересуммировать обычные графики с линией  $A_2$  в майеровские графики с линией  $g$ , как это подробно объяснялось в п. I.4.5. Ясно также, что замена  $A_1(\mathbf{x}) \rightarrow A_1(\mathbf{x}) - A_2(\mathbf{x}, \mathbf{x})/2$  в производящей вершине служит для исключения графиков с замкнутыми линиями. На операторном языке теории поля вершине (67) соответствует экспоненциальное взаимодействие  $\int d\mathbf{x} \exp A_1(\mathbf{x})$  со знаком нормального произведения, а функционал (67) представляет его  $\text{Sym}$ -форму. Соответствующая приведенная вершина (I.99) является простой экспонентой:

$$\mathcal{M}_{\text{прив}} = \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta A_1} A_2 \frac{\delta}{\delta A_1} \right] \mathcal{M} = \int d\mathbf{x} \exp A_1(\mathbf{x}). \quad (68)$$

Именно в статистике неидеального газа впервые были использованы те топологические понятия теории графов и симметричных коэффициентов, о которых говорилось в гл. I; там же впервые была доказана теорема о связности логарифма (первая теорема Майера). Значительно позднее эта техника появилась в квантовой теории поля в связи с диаграммами Фейнмана и уже оттуда была заимствована в аппарат квантовой статистики. Довольно любопытная история.

**2. Газ с многочастичными силами.** Эта задача представляет для нас интерес главным образом потому, что она приводит к диаграммной технике, не укладывающейся в рамки обычной теории графов. В этом отношении классический газ с многочастичными силами сложнее любой квантовой теории поля.

Введем в показатель в (62) многочастичные потенциалы:

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int \dots \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N \exp \left\{ \sum_i A_1(\mathbf{x}_i) + \sum_{i < k} A_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) + \sum_{i < k < m} A_3(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m) + \dots \right\}. \quad (69)$$

Число потенциалов  $A_n$  не ограничивается, но в интеграле с заданным  $N$  содержатся, естественно, лишь  $A_n$  с  $n \leq N$ . Для данного  $A_n$  суммирование в (69) производится по всевоз-



можным различным группам из  $n$  попарно несозпадающих индексов, набор  $i_1 < i_2 < \dots < i_n$  однозначно параметризует такую группу. Введя майеровские потенциалы  $g_{i_1 \dots i_n} \equiv -1 + \exp A_n(x_{i_1} \dots x_{i_n})$ , перепишем (69) в виде

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_N \times \\ \times \prod_i \exp A_1(x_i) \prod_{i < k} (1 + g_{ik}) \prod_{i < k < m} (1 + g_{ikm}) \dots \quad (70)$$

Диаграммы, соответствующие отдельным членам произведения (70), будем называть *суперграфами* [46]. Для задания нумерованного суперграфа с  $N$  вершинами нужно указать, какие пары вершин связаны потенциалом (линией)  $g_{ik}$ , какие тройки вершин — потенциалом  $g_{ikm}$ , какие четверки — потенциалом  $g_{ikms}$ , и т. д. В обычных графах вершины связываются только парными потенциалами, т. е. линиями, и каждый нумерованный граф однозначно задается матрицей смежности  $\pi$  (см. п. I.4.2): по определению  $\pi_{ik} = 1$ , если вершины  $i$  и  $k$  связаны линией, и  $\pi_{ik} = 0$  в противном случае. Для задания нумерованного суперграфа нужно ввести более сложный объект — *показатель смежности* [46]:  $\pi \equiv \{\pi_{ik}, \pi_{ikm}, \dots\}$ . По определению символ  $\pi_{i_1 \dots i_n}$  симметричен относительно любых перестановок индексов и для заданного набора индексов принимает значение 1 или 0 в зависимости от того, связана или нет соответствующая группа вершин суперграфа потенциалом  $g_{i_1 \dots i_n}$ . В частности,  $\pi_{ik}$  есть обычная матрица смежности. Символы  $\pi_{i_1 \dots i_n}$  являются тензорами по отношению к группе перестановок вершин:  $\pi_{i_1 \dots i_n} = P_{i_1 k_1} \dots P_{i_n k_n} \pi_{k_1 \dots k_n}$ , где  $P$  — перестановочная матрица (см. п. I.4.2).

Определенные в п. I.4.2 понятия равенства, эквивалентности, группы симметрии нумерованных графов непосредственно обобщаются на суперграфы, если заменить повсюду термин „матрица смежности” на „показатель смежности”. Число эквивалентных, но различных нумерованных суперграфов определяется тогда обычной формулой  $N!/s$ , где  $s$  — симметричное число — порядок группы симметрии суперграфа. В произведении (70) содержатся, очевидно, все возможные нумерованные суперграфы, среди которых нет одинаковых, так что коэффициент при свободной диаграмме (суперграфе) определяется обычной формулой  $(1/N!)(N!/s) = 1/s$ . Вследствие этого доказательства обеих теорем Майера (первая теорема есть утверждение о связности  $\ln Z$ , вторая касается вириального разложения и будет подробно обсуждаться в следующей главе) непосредственно обобщаются на системы с многочастичными силами [46].

§ 1. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

**1. Введение.** Теория фазовых переходов является, бесспорно, одним из интереснейших разделов статистической физики. Чтобы дать общее определение фазового перехода в рамках рассматриваемого нами формализма, необходимо привлечь введенные в § I.10 понятия нормального и аномального решений и спонтанного нарушения симметрии, которые переносятся в евклидову теорию поля и статистическую физику без каких-либо изменений.

Фазовый переход на этом языке можно коротко определить как смену решения. На практике это выглядит следующим образом: для некоторой физической системы, рассматриваемой в широком интервале температур  $T$ , в области  $T > T_c$  реализуется нормальное решение для функций Грина, а в области  $T < T_c$  — аномальное решение. В критической точке  $T = T_c$  происходит смена решения — переход от нормального к аномальному. Этот переход сопровождается, как правило, спонтанным нарушением какой-нибудь симметрии, что выражается в появлении отличных от нуля функций Грина или средних значений, которые в нормальных условиях должны быть равны нулю в силу симметрии теории. Перечислим некоторые из наиболее известных фазовых переходов.

**1. Сверхтекучесть.** Система: квантовый бозе-газ с подходящим парным взаимодействием, отличные от нуля при  $T < T_c$  аномальные средние — первые функции Грина ( $\langle \hat{\psi}(x) \rangle$ ) и ( $\langle \hat{\psi}^+(x) \rangle$ ), нарушаемая симметрия — калибровочная группа  $\psi(x) \rightarrow \hat{\psi}(x) \exp i\theta$ ,  $\psi^+(x) \rightarrow \hat{\psi}^+(x) \exp(-i\theta)$ .

**2. Сверхпроводимость.** Система: квантовый ферми-газ электронов с подходящим парным взаимодействием или же взаимодействующий с фононами, аномальные средние — функции Грина ( $\langle T_D [\hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x')] \rangle$ ) и ( $\langle T_D [\hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^+(x')] \rangle$ ), нарушаемая группа та же.

3. *Ферромагнетизм.* Классическая или квантовая спиновая система с изотропным взаимодействием в нулевом внешнем поле, аномальное среднее — намагниченность, т. е. среднее значение оператора момента (спина)  $s$ , нарушаемая симметрия — группа вращений для изотропного ферромагнетика Гайзенберга и отражение  $s$  для модели Изинга.

4. *Конденсация пар — жидкость.* Классический неидеальный газ с подходящим взаимодействием. Здесь нет спонтанного нарушения какой-либо симметрии: просто при  $T \leq T_c$  решение расщепляется на две ветви, соответствующие жидкости и газу. Неединственность решения означает, что оно является аномальным в смысле определения § I.10.

Из сказанного ясно, что задача о фазовых переходах является частным случаем общей задачи построения аномальных решений, о которой говорилось в § I.10. Там же было отмечено, что подобные задачи естественно решать вариационным методом, которому в сущности и посвящена вся эта глава. Его общую идею лучше всего пояснить на простом примере обычной термодинамики, что и будет сделано в следующих разделах.

2. **Переход к вариационной задаче в термодинамике.** Под термодинамикой мы будем понимать исследование статсуммы  $Z$  или эквивалентных ей величин как функций различных числовых параметров — температуры, внешнего поля, химического потенциала и т. п. В квантовой теории  $Z = \text{tr} \exp[-\beta \mathbf{H}]$ , и мы будем, как и в п. V.1.10, считать, что числовые параметры  $x \equiv \{x_i\}$  являются коэффициентами в линейном разложении показателя экспоненты, т. е.  $-\beta \mathbf{H} = \sum_i x_i \mathbf{a}_i$ , где  $\mathbf{a}_i$  — некоторые

операторы. Без ограничения общности операторы  $\mathbf{a}_i$  можно считать независимыми в следующем смысле: никакая линейная комбинация  $\mathbf{a}_i$  не является кратной единичному оператору (в противном случае один из операторов  $\mathbf{a}_i$  можно было бы исключить). В этом разделе мы будем предполагать, что система заключена в конечном объеме  $V$  (для решетки роль  $V$  играет число узлов) и ее статсумма  $Z$ , равно как и средние значения операторов  $\mathbf{a}_i$  корректно определены. Последнее предположение очевидным образом выполняется для решеточных спиновых систем с конечным числом узлов, а в иных случаях его следует считать некоторым физически разумным ограничением на вид взаимодействия [40].

Положим  $W(x) = V^{-1} \ln Z$  и определим сопряженные с  $x$  переменные

$$\alpha_i \equiv \partial W / \partial x_i \equiv V^{-1} \partial \ln Z / \partial x_i \equiv V^{-1} \langle (\mathbf{a}_i) \rangle, \quad (1)$$

имеющие смысл удельных средних значений тех операторов, коэффициентами при которых являются переменные  $x_i$ .

Задачей теории является вычисление средних значений  $\alpha$  и величины  $W$  по заданным значениям переменных  $x$ . Эту за-

дачу можно сформулировать как вариационную, если перейти к преобразованию Лежандра  $\Gamma(\alpha)$  функции  $W(x)$ :  $\Gamma(\alpha) = W(x) - \sum_i x_i \partial W / \partial x_i \equiv W - x\alpha$ . В этом определении имеется

в виду, что переменные  $x$  в правой части равенства выражены через  $\alpha$  с помощью уравнений (1), неявно определяющих  $x_i$  как функции от  $\alpha$ . Дифференцируя  $\Gamma(\alpha)$  по переменным  $\alpha_i$ , которые считаются при этом независимыми, получаем уравнения

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha_i} = \sum_k \frac{\partial W}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} - \sum_k \left( \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \alpha_k + x_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \alpha_i} \right) = -x_i, \quad (2)$$

дающие явные выражения  $x$  через  $\alpha$  при известной функции  $\Gamma(\alpha)$ . Уравнениями (2) можно воспользоваться и для определения неизвестных  $\alpha$  по заданным  $x$ , а именно: искомые значения  $\alpha(x)$  есть та точка в пространстве переменных  $\alpha$ , в которой первые производные  $\partial \Gamma / \partial \alpha_i$  принимают заданные значения  $-x_i$ . Введя функцию  $\Phi(\alpha; x) = \Gamma(\alpha) + \alpha x$ , можно сказать, что искомые значения  $\alpha(x)$  есть точка стационарности  $\Phi(\alpha; x)$  по отношению к вариациям  $\alpha$  при фиксированных  $x$ ; из определений  $\Gamma$  и  $\Phi$  ясно, что значение  $\Phi$  в точке стационарности совпадает с  $W(x)$ .

Таким образом, на языке преобразования Лежандра  $\Gamma$  задача определения средних значений  $\alpha$  и величины  $W(x)$  является вариационной: требуется найти точку стационарности функции  $\Phi(\alpha; x)$  и ее значение в точке стационарности. Переход к вариационной задаче позволяет, естественно, ввести такие понятия, как вырождение (неединственность) решения и спонтанное нарушение симметрии. Вырождение означает неединственность решения вариационной задачи, т. е. неединственность точки стационарности, а спонтанному нарушению симметрии отвечает такая ситуация, когда инвариантная относительно некоторой группы преобразований переменных  $\alpha$  функция  $\Phi(\alpha; x)$  имеет неинвариантные точки стационарности. Спонтанное нарушение симметрии автоматически влечет вырождение, поскольку „сдвинутая группой” точка стационарности также будет точкой стационарности: ясно также, что само значение  $\Phi$  в точке стационарности одинаково для всех точек, связанных групповым сдвигом вследствие предполагаемой инвариантности  $\Phi$ .

Следует сразу же сказать, что вырождение и спонтанное нарушение симметрии могут возникнуть лишь после предельного перехода к бесконечному объему. Для систем в конечном объеме, удовлетворяющим сформулированным в начале этого раздела требованиям, функция  $W(x)$  является строго выпуклой вниз (см. доказательство в п. V.1.10), т. е. матрица вторых производных  $\partial^2 W / \partial x_i \partial x_k$  строго положительно определена. Это обеспечивает разрешимость уравнений (1) относительно  $x$  и взаимодуоднозначность соответствия между переменными  $x$  и  $\alpha$ , что исключает вырождение.

Пользуясь соотношениями (1), (2), получаем равенство

$$\delta_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_s} \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_k} = - \sum_s \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \alpha_i \partial \alpha_s} \frac{\partial^2 W}{\partial x_s \partial x_k}, \quad (3)$$

которое показывает, что матрицы вторых производных функции  $W(x)$  и ее преобразования Лежандра  $\Gamma(\alpha)$  взаимно обратны с точностью до знака. Свойство знакоопределенности сохраняется при переходе к обратной матрице, следовательно, для теории в конечном объеме преобразование Лежандра  $\Gamma(\alpha)$ , равно как и  $\Phi(\alpha; x) = \Gamma + x\alpha$  являются строго выпуклыми вверх функциями переменных  $\alpha$ .

Можно рассматривать преобразования Лежандра не по всем, а по части аргументов  $x$  („неполные преобразования“). Допустим, что все  $x_i$  разбиты на две группы:  $x'$ ,  $x''$ , и переход к сопряженным переменным  $\alpha'$  сделан только для аргументов  $x'$ :  $\Gamma(\alpha', x'') = W(x) - \sum_i x'_i \alpha'_i$ . Ясно, что соотношения (2), (3) остаются верными для аргументов первой группы. Далее, считая  $\alpha'$  и  $x''$  независимыми переменными, а  $x'$  — функциями от них, получаем

$$\frac{\partial \Gamma(\alpha', x'')}{\partial x'_i} = \frac{\partial W(x)}{\partial x'_i} + \sum_k \frac{\partial W(x)}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_k}{\partial x'_i} - \sum_k \frac{\partial x'_k}{\partial x''_i} \alpha'_k = \frac{\partial W(x)}{\partial x'_i}. \quad (4)$$

Производные в двух частях этого равенства имеют разный смысл: слева стоит производная  $\Gamma$  при фиксированных  $\alpha'$ , а справа — производная  $W$  при фиксированных  $x'$ .

Для полноты приведем также соотношения, связывающие матрицы вторых производных  $\Gamma$  и  $W$  по своим ( $\alpha'$ ,  $x''$  для  $\Gamma$  и  $x'$ ,  $x''$  для  $W$ ) аргументам:  $\Gamma_{11} W_{11} = -1$ ,  $\Gamma_{22} = W_{22} - \Gamma_{21} W_{12}$ ,  $\Gamma_{12} = -\Gamma_{11} W_{12}$ . Мы обозначили сокращенно  $\Gamma_{11}$ ,  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{22}$  и аналогично для  $W$  матрицы вторых производных по аргументам первой и второй групп соответственно ( $1 = \alpha'$ ,  $2 = x''$  для  $\Gamma$  и  $1 = x'$ ,  $2 = x''$  для  $W$ ).

В заключение сформулируем и докажем одно простое свойство выпуклых функций, которое будет часто использоваться в дальнейшем. Пусть  $f(\alpha)$  — выпуклая функция, имеющая конечные кусочно-непрерывные вторые производные. Множество точек стационарности такой функции выпукло, т. е. вместе с любыми двумя точками  $\alpha^{(1)}$  и  $\alpha^{(2)}$  содержит целиком и соединяющий их отрезок прямой  $c_1 \alpha^{(1)} + c_2 \alpha^{(2)}$ ,  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2 \geq 0$ ,  $c_1 + c_2 = 1$ .

Обозначим через  $f_1$  производную по направлению этого отрезка,  $f_2$  — производную по одному (любому) из ортогональных  $1$  направлений. По предположению на концах отрезка  $f_1 = f_2 = 0$ .

Приращение  $\Delta f_1$  при переходе от одной из крайних точек отрезка к любой его внутренней точке равно интегралу от  $f_{11}$

по соответствующему промежутку. Учитывая знакоопределенность  $f_{11}$  (выпуклость) и то, что для всего отрезка  $\Delta f_1 = 0$  (стационарность крайних точек), заключаем, что  $f_1 = f_{11} = 0$  на протяжении всего отрезка. Отсюда при учете неравенства  $|f_{12}|^2 \leq f_{11}f_{22}$ , вытекающего из знакоопределенности матрицы вторых производных  $f$  (выпуклость), и предполагаемой конечности вторых производных  $f_{22}$  следует, что и смешанная производная  $f_{12}$  равна нулю на протяжении всего отрезка, и потому  $f_2 = 0$  на отрезке, поскольку приращение этой производной выражается интегралом от  $f_{12}$ . Сказанное верно для любого ортогонального 1 направления 2, следовательно, на протяжении всего отрезка все первые производные  $f$  равны нулю, что и требовалось доказать. Из процесса доказательства видно, что вырождение (неединственность) точки стационарности возможно лишь тогда, когда выпуклость является нестрогой. Ясно также, что при наличии отрезка стационарности функция  $f$  является постоянной на отрезке.

Итак, множество всех точек стационарности выпуклой функции образует некоторую выпуклую „область стационарности”  $\mathcal{O}$  и  $f$  — постоянная на этой области. Из непрерывности первых производных  $f$  следует, что область  $\mathcal{O}$  является также и замкнутой, т. е. содержит все свои предельные точки. Для строго выпуклой функции  $\mathcal{O}$  может состоять только из одной точки.

Уточним смысл переменных  $x$  и  $\alpha$  для нескольких конкретных систем. Начнем с модели Изинга в однородном внешнем поле  $h$ , для которой, согласно (V.46),  $-\beta\mathbf{H} = -\beta\mathbf{H}_{\text{обм}} + \beta h\mathbf{s}$ , где  $\mathbf{H}_{\text{обм}}$  — гамильтониан обменного взаимодействия моментов,  $\mathbf{s} \equiv \sum s_i$  — полный момент, т. е. сумма моментов всех узлов решетки. Если взять  $x_1 = -\beta$  и  $x_2 = \beta h$  (приведенное внешнее поле), то сопряженными переменными  $\alpha$  будут соответственно среднее значение обменной энергии и среднее значение момента (намагниченность) в расчете на один узел. Нежелание использовать традиционные переменные температура — внешнее поле объясняется, конечно, тем, что в таких переменных простое и универсальное свойство выпуклости  $W$  приняло бы неоправданно сложную форму.

Функция  $W(x)$  является четной по  $x_2$ , т. е. инвариантной относительно перемены знака поля, а ее преобразование Лежандра является четным по намагниченности  $\alpha_2$ . При нулевом внешнем поле варьируемая функция  $\Phi(\alpha; x) = \Gamma(\alpha) + \alpha_1 x_1$  четна по  $\alpha_2$ , спонтанное нарушение симметрии выражается в появлении точки стационарности с ненулевым значением намагниченности  $\alpha_2$ , вырожденной по знаку  $\alpha_2$  вследствие четности  $\Phi$ .

Классический и квантовый ферромагнетика Гайзенберга отличаются от ферромагнетика Изинга лишь тем, что приведенное внешнее поле и сопряженная переменная — намагниченность — становятся трехмерными векторами, а инвариантность относительно перемены знака этих величин переходит в инва-

риантность по отношению к вращениям соответствующих векторов (при изотропном обменном взаимодействии спинов). При наличии спонтанного нарушения симметрии в нулевом внешнем поле решение вырождено по всем направлениям вектора намагниченности.

Рассмотрим теперь нерелятивистский квантовый бозе-газ (см. § II.2) с гамильтонианом  $\mathbf{H}_0 - \mu\mathbf{N} + \mathbf{V}$ , где  $\mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{V}$  являются операторами соответственно одночастичной энергии, числа частиц и взаимодействия, а постоянная  $\mu$  — химический потенциал (отметим, что свободный гамильтониан (II.21) есть  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}'_0 - \mu\mathbf{N}$ ). Гамильтониан предполагается инвариантным относительно калибровочных преобразований  $\hat{\psi}(\mathbf{x}) \rightarrow \hat{\psi}(\mathbf{x}) \exp i\theta$ ,  $\hat{\psi}^+(\mathbf{x}) \rightarrow \hat{\psi}^+(\mathbf{x}) \exp(-i\theta)$  операторов поля.

Введем в гамильтониан дополнительное неинвариантное слагаемое вида  $h^+ \int d\mathbf{x} \hat{\psi}(\mathbf{x}) + h \int d\mathbf{x} \hat{\psi}^+(\mathbf{x})$ , где  $h$  — произвольное комплексное число; поле  $\psi$  предполагается бесспиновым. Для реальной системы  $h = h^+ = 0$ , но вначале удобно считать  $h$  независимой переменной.

Естественными переменными  $x_i$  формы  $-\beta\mathbf{H}$  для гамильтониана с неинвариантной добавкой являются  $-\beta$ ,  $\beta\mu$ ,  $-\beta h^+$  и  $-\beta h$ , которым сопряжены соответственно удельные средние значения операторов энергии  $\mathbf{H}'_0 + \mathbf{V}$ , числа частиц  $\mathbf{N}$  и добавок  $\int d\mathbf{x} \hat{\psi}(\mathbf{x})$ ,  $\int d\mathbf{x} \hat{\psi}^+(\mathbf{x})$ . Последние две переменные, которые мы обозначим  $\lambda$ ,  $\lambda^+$ ; поскольку они, очевидно, взаимно сопряжены, являются аналогом намагниченности, тогда как переменные  $h$ ,  $h^+$  являются аналогом внешнего поля. Функция  $W$  инвариантна по отношению к калибровочным преобразованиям  $h$ ,  $h^+$ , а ее преобразование Лежандра инвариантно по отношению к таким же преобразованиям  $\lambda$ ,  $\lambda^+$ . Для реальной задачи с  $h = h^+ = 0$  варьируемая функция  $\Phi$  также инвариантна, при спонтанном нарушении симметрии решение вырождено по фазе  $\lambda$  и точки стационарности образуют окружность в плоскости комплексной переменной  $\lambda$  (а если  $\Phi$  выпукла, то весь круг).

Сверхпроводимость можно рассмотреть совершенно аналогично, только теперь к гамильтониану следует добавлять неинвариантные добавки типа  $h^+ \int d\mathbf{x} \hat{\psi}(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x}) + \text{эрмитово сопряженные}$ .

В качестве последнего примера рассмотрим классический неидеальный газ в нулевом внешнем поле. Согласно формулам § V.3 статсумма  $Z$  большого канонического ансамбля имеет вид

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int \cdots \int \prod_i \frac{d\mathbf{p}_i d\mathbf{x}_i}{(2\pi)^d} \exp[-\beta \mathcal{H}_N + \beta \mu N],$$

где  $\mathcal{H}_N$  — классический гамильтониан для  $N$  частиц;  $\mu$  — химический потенциал. Если взять  $x_1 = -\beta$  и  $x_2 = \beta\mu$ , то сопря-

женными переменными будут  $\alpha_1$  — удельное среднее значение энергии и  $\alpha_2$  — удельное среднее значение числа частиц, т. е. плотность. Смысл фазового перехода проще всего пояснить на языке неполного преобразования Лежандра  $\Gamma(x_1, \alpha_2)$ , являющегося функцией температуры и плотности. При заданных значениях температуры и химического потенциала равновесное значение плотности находится путем решения уравнения  $\partial\Gamma/\partial\alpha_2 = -x_2$  относительно  $\alpha_2$ . Оказывается, что при высоких температурах уравнение имеет единственное решение, а при некоторой критической температуре решение раздваивается на ветви, соответствующие жидкости и газу. В отличие от всех предыдущих примеров вырождение решения не связано со спонтанным нарушением какой-либо симметрии.

**3. Предельный переход к бесконечному объему.** В этом разделе мы обсудим, не претендуя на математическую строгость, предельный переход к бесконечному объему или, как его часто называют, термодинамический предел.

Как уже говорилось, при разумных предположениях функции  $W$ ,  $\Gamma$  и  $\Phi$  для теории, рассматриваемой в конечном объеме, — строго выпуклы и соответствие между сопряженными переменными  $x$  и  $\alpha$  взаимоднозначно. Это запрещает спонтанное нарушение симметрии, так что средние значения  $\alpha$  для теории в конечном объеме всегда удовлетворяют всем требованиям, вытекающим из симметрии задачи. Например, намагниченность конечной решетки спинов в нулевом внешнем поле всегда будет равна нулю. Напомним, что речь идет о равновесной статистике: реальные конечные магниты существуют в состояниях, не являющихся равновесными в смысле строгого определения.

Допустив существование пределов при  $V \rightarrow \infty$  удельного логарифма статсуммы  $W$  и средних значений  $\alpha$ , появление аномальных решений в пределе  $V \rightarrow \infty$  можно объяснить следующим образом: предельная функция  $W(x)$  конечна, но не является всюду гладкой как функция параметров  $x$ . В некоторых особых точках первые производные  $W$  по  $x$  становятся многозначными, т. е. пределы первых производных при подходе кособой точке по разным направлениям различны. Аномальными средними  $\alpha$  как раз и будут эти неоднозначные значения производных предельной функции  $W(x)$ , не совпадающие с однозначными пределами производных (1) функции  $W(x)$  для конечного объема.

Например, для ферромагнетика Изинга особой точкой будет значение  $\beta h = 0$  (нулевое поле) при температурах ниже критической; производные предельной функции  $W$  по приведенному внешнему полю  $\beta h$  будут стремиться к двум разным (отличающимся знаком) конечным пределам при стремлении к точке  $\beta h = 0$  со стороны  $h > 0$  и со стороны  $h < 0$ . Эти два разных предела соответствуют двум возможным значениям спонтанной намагниченности в нулевом поле, тогда как предел намагничен-



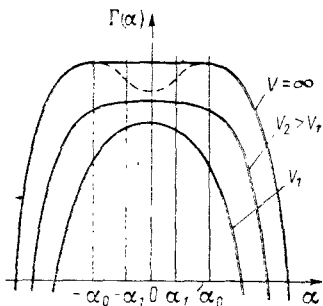
пости конечной решетки в нулевом поле равен, очевидно, нулю (как предел нуля).

Обсудим теперь механизм появления аномальных решений в пределе бесконечного объема на языке вариационной задачи. Для теории в конечном объеме функции  $\Gamma$  и  $\Phi$  строго выпуклы, и поэтому их пределы при  $V \rightarrow \infty$  также будут выпуклыми. Но выпуклость предельных функций не обязана быть строгой, что и объясняет возможность появления аномальных решений для предельной теории: искомые значения средних  $\alpha(x)$  определяются как точка стационарности предельной функции  $\Phi(\alpha; x)$ , а нестрого выпуклая функция может иметь более одной точки стационарности. Как было показано ранее, множество всех точек стационарности выпуклой (хотя бы нестрого) функции выпукло, а сама функция постоянна на этом множестве.

Картина изменения функции  $\Gamma$  при  $V \rightarrow \infty$  показана схематически на рисунке для случая четной функции одной переменной  $\alpha$ . Примером такой функции может послужить преобразование Лежандра по приведенному внешнему полю в модели Изинга, рассматриваемое как функция намагниченности  $\alpha$  при фиксированной температуре ниже критической. Та же картина пригодна и для модели Гайзенберга, если понимать под  $\alpha$  длину вектора намагниченности и ограничиваться полуосью  $\alpha > 0$ .

Таким образом, на языке вариационной задачи вырождение решения в пределе бесконечного объема становится возможным потому, что преобразование Лежандра перестает быть строго выпуклым и на поверхности  $\Gamma$  появляются плоские участки — „плато“. При соответствующих значениях параметров  $x$  (на рисунке при  $d\Gamma/d\alpha = -x = 0$ ) мы вместо точки стационарности  $\alpha(x)$  получаем целую выпуклую область стационарности  $\mathcal{O}_x$ . На рисунке такой областью является отрезок  $|\alpha| \leq \alpha_0$ , крайним точкам которого соответствуют „чистые состояния“ со спонтанной намагниченностью  $\pm \alpha_0$ , а его внутренним точкам можно сопоставить статистические смеси двух чистых состояний с определенным направлением спонтанной намагниченности (подробнее см. следующие разделы).

Забегая вперед, сравним описанную выше картину поведения функции  $\Gamma$ , полученную исходя из общих соображений, с результатами приближенного вычисления этой функции, например по методу самосогласованного поля. Приближенные вычисления будут подробно обсуждаться в дальнейшем, а здесь мы хотели бы только отметить, что все простые приближения, как правило, дают для функции  $\Gamma$  вместо плато яму, показанную на рисунке пунктиром. Крайние участки ямы (интервалы



$\alpha_1 \leq |\alpha| \leq \alpha_0$  на рисунке), внутри которых вычисленная приближенно функция все еще имеет правильную выпуклость, называются *областями метастабильности*, а внутреннюю часть ямы, где полученная функция имеет неправильную выпуклость, — *областью абсолютной неустойчивости*; в теории конденсации метастабильным участкам соответствуют области переохлаждения и перегрева, в магнитных системах — петли гистерезиса.

На самом деле подобное поведение  $\Gamma$  в рамках равновесной теории невозможно и является всегда результатом приближенного характера вычислений. Учет поправок к простому приближению самосогласованного поля будет приводить к постепенному заполнению ямы; кроме того, по мере роста точности приближения поведение приближенной функции в области ямы становится все более сложным (возникают многочисленные осцилляции), так что сама классификация по выпуклости теряет смысл. На практике, вычислив приближенно функцию  $\Gamma$ , ее затем следует просто заменить на выпуклую огибающую (что приведет, в частности, к известному правилу равных площадей Максвелла [8] в теории конденсации).

В заключение напомним, что для жидких и газообразных систем величина  $W$  в пределе  $V \rightarrow \infty$  определяет давление среды. Действительно, давление  $p_v$  для системы в объеме  $V$  определяется известной формулой  $\beta p_v = \partial \ln Z_v / \partial V$  [37]. Если предел  $W \equiv \lim V^{-1} \ln Z_v$  существует и  $V^{-1} \ln Z_v = W + o(1/V)$ , то  $W = \beta p$ , где  $p$  — давление бесконечно протяженной среды.

**4. Особые и критические точки.** В этом разделе мы обсудим подробнее свойства поверхности  $\Gamma(\alpha)$  в пределе бесконечного объема и введем несколько понятий, полезных при описании фазовых переходов.

Для теории, рассматриваемой в конечном объеме, функцию  $W(x)$  естественно считать бесконечно дифференцируемой по параметрам  $x$ , поскольку ее кратные производные сводятся к различным функциям Грина (см. п. V.1.10) и в „хорошей” теории должны быть конечными. Гладкость и строгая выпуклость  $W$  обеспечивают гладкость ее преобразования Лежандра.

При появлении аномальных решений в пределе бесконечного объема функции  $W$  и  $\Gamma$  теряют свойство бесконечной дифференцируемости: согласно принятой в предыдущем разделе точке зрения, предельная функция  $W(x)$  при некоторых особых значениях  $x$  имеет разрывы первых производных, что соответствует появлению плоских участков на предельной поверхности  $\Gamma(\alpha)$ . В момент выхода на „плато” первые производные  $\Gamma(\alpha)$  остаются непрерывными (так как эти производные, согласно (2), определяют общее для всех аномальных решений значение  $x$ ), но некоторые из вторых производных  $\Gamma$  должны иметь разрыв вследствие скачкообразного изменения кривизны поверхности  $\Gamma$ . В дальнейших рассуждениях мы будем считать, что других нарушений гладкости  $\Gamma$  нет, исходя из предположения о „макси-

мально допустимой гладкости": все, что может оставаться гладким в пределе бесконечного объема, — остается.

Пусть  $n$  — полное число вещественных переменных  $x$  (и  $\alpha$ ),  $D_x, D_\alpha$  — области изменения переменных  $x, \alpha$  соответственно. Для каждого  $x \in D_x$  соответствующие значения  $\alpha$  определяются как точка стационарности выпуклой функции  $\Phi(\alpha; x)$ . Если данному  $x$  соответствует не одна точка, а целая область стационарности  $\mathcal{O}_x$ , то мы скажем, что точка  $x$  является *особой*; замыкание (в топологии  $D_x \cap \mathbb{R}_n$ ) множества особых точек  $x$  обозначим  $M_x$  и назовем *особой областью* в  $D_x$ . Всякую точку  $x$ , не принадлежащую  $M_x$ , назовем *неособой*; для любой неособой  $x$  точка стационарности функции  $\Phi(\alpha; x)$  единственна, и мы обозначим ее  $\alpha(x)$ . Неособые точки образуют открытое множество в топологии  $D_x \cap \mathbb{R}_n$ , т. е. для каждой неособой точки найдется достаточно малая окрестность, целиком лежащая в области неособых точек.

Каждая из областей  $\mathcal{O}_x$  является выпуклой и замкнутой (последнее вытекает из предполагаемой непрерывности первых производных  $\Gamma$ ). Ясно также, что области  $\mathcal{O}_x$  для разных  $x$  не пересекаются — из (2) видно, что одна и та же точка  $\alpha$  не может быть точкой стационарности двух функций  $\Phi(\alpha; x)$  с разными  $x$ . При движении точки  $x$  внутри особой области  $M_x$  соответствующая область  $\mathcal{O}_x$  также движется, изменяя свою форму и положение. Поскольку области  $\mathcal{O}_x$  для близких, но разных  $x$  не пересекаются, ясно, что область  $\mathcal{O}_x$  должна иметь меньше измерений, чем пространство всех переменных  $\alpha$  (т. е. меньше  $n$ ).

Объединение областей  $\mathcal{O}_x$  для всех  $x \in M_x$  назовем *особой областью* в  $D_\alpha$  и обозначим  $M_\alpha$ . Когда  $x$  пробегает  $M_x$ , соответствующая область  $\mathcal{O}_x$  пробегает  $M_\alpha$ . Если движение является гладким, что мы предположим, то размерность (число измерений) области  $M_\alpha$  равна сумме размерностей области  $\mathcal{O}_x$  и области  $M_x$ , т. е.  $\dim M_x + \dim \mathcal{O}_x = \dim M_\alpha \leq n$ .

Для всех рассмотренных в п. 2 систем оказывается, что  $\dim M_\alpha = n$ . Для модели Изинга и классического газа  $n = 2$ , а область стационарности  $\mathcal{O}_x$  представляет собой отрезок прямой, соединяющей две крайние точки стационарности. Следовательно,  $\dim \mathcal{O}_x = 1$  и  $\dim M_x = 1$ , т. е. особые точки в  $D_x$  образуют линию. Для ферромагнетика Гайзенберга  $n = 4$  (температура и трехмерный вектор внешнего поля), при наличии вырождения область  $\mathcal{O}_x$  представляет собой трехмерный шар, следовательно, особые точки в  $D_x$  также образуют линию. Для квантового газа  $n = 4$  (температура, химический потенциал и дополнительный комплексный параметр, играющий роль внешнего поля), при наличии вырождения область  $\mathcal{O}_x$  есть двумерный шар — круг в комплексной плоскости, и поэтому  $\dim M_x = 2$ , т. е. особые точки образуют некоторое двумерное многообразие

в  $D_x$  (область на плоскости температура — химический потенциал при нулевом внешнем поле).

Определим теперь понятие *критической точки*. При движении  $x$  по особой области  $M_x$  размер соответствующей области  $\mathcal{O}_x$  непрерывно меняется. Критическими назовем те точки  $x^c \in M_x$ , при стремлении к которым из  $M_x$  размер  $\mathcal{O}_x$  стремится к нулю, т. е.  $\mathcal{O}_x$  стягивается в точку. Обычно оказывается, что критические точки лежат на границе  $M_x$ . Например, если  $M_x$  представляет собой линию, которая оканчивается где-то внутри  $D_x$ , то точка окончания оказывается критической. Второй конец особой линии лежит обычно на границе  $D_x$  (например, при нулевой температуре) и эта точка окончания не будет критической.

**5. Описание фазовых переходов.** Допустим, что точка  $x$  движется по некоторой гладкой траектории в  $D_x$  и в некоторой точке  $\bar{x}$  траектория пересекает особую область  $M_x$  (напомним, что  $\dim M_x < \dim D_x$ ). Все точки траектории, кроме  $\bar{x}$ , являются неособыми, так что каждой из них однозначно соответствует некоторая точка стационарности  $\alpha(x)$ ; особой точке  $\bar{x}$  соответствует выпуклая замкнутая область стационарности  $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ . При подходе к особой точке  $\bar{x}$  с двух сторон соответствующие траектории  $\alpha(x)$ , лежащие вне особой области  $M_{\alpha}$ , подходят к двум, в общем случае различным, точкам границы  $\mathcal{O}_{\bar{x}}$  (попасть сразу внутрь  $\mathcal{O}_{\bar{x}}$  траектория не может, если особая область  $M_{\alpha}$ , являющаяся объединением непересекающихся областей  $\mathcal{O}_x$ , имеет полную размерность  $n$ ). В момент перехода через особую точку  $\bar{x}$  соответствующая точка стационарности „перескакивает“ через область  $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ . Говорят, что в точке  $\bar{x}$  происходит *фазовый переход первого рода*.

Допустим теперь, что траектория  $x$  из области неособых точек приходит в критическую точку  $x^c$  и затем идет по области особых точек  $M_x$ . До прихода в  $x^c$  соответствующая траектория  $\alpha(x)$  однозначна, в точке  $x^c$  происходит разветвление траектории  $\alpha(x)$ , поскольку каждому из последующих  $x \in M_x$  соответствует целая область стационарности  $\mathcal{O}_x$ . Говорят, что в  $x^c$  происходит *фазовый переход второго рода*.

Крайними или экстремальными точками некоторой выпуклой области  $\mathcal{O}$  называют те, которые не являются внутренними точками ни для какого отрезка прямой, целиком лежащего в  $\mathcal{O}$ . Все крайние точки лежат на границе  $\mathcal{O}$ , но не каждая точка границы обязательно является крайней: например, если  $\mathcal{O}$  треугольник, то крайними точками будут лишь его вершины. Отметим, что области стационарности такого типа могут появиться в реальных физических задачах. Например, для анизотропного ферромагнетика Гайзенберга с обменным взаимодействием, инвариантным относительно поворотов на угол  $2\pi/3$  вокруг оси 3,

область стационарности будет не шаром, как при изотропном взаимодействии, а равносторонним треугольником.

С физической точки зрения крайние точки области стационарности  $\mathcal{O}_x$  соответствуют чистым состояниям, а остальные — их статистическим смесям. В условиях конкретного опыта при данном  $x \in M_x$  реализуется некоторое определенное состояние, соответствующее одной из точек области  $\mathcal{O}_x$ , но выбор этой точки определяется внешними условиями (постановкой эксперимента, процедурой приготовления) и не может быть сделан в рамках самой равновесной теории. Чтобы пояснить сказанное, обсудим кратко постановку эксперимента для различных систем.

В случае ферромагнетика независимыми переменными, которые можно реально менять, являются температура  $T$  и внешнее магнитное поле  $h$ . Особые точки образуют линию  $h = 0$ ,  $0 \leq T \leq T_c$ , точка  $h = 0$ ,  $T = T_c$  является критической. Фазовый переход первого рода можно наблюдать, плавно меняя  $h$  при фиксированной температуре  $T < T_c$  таким образом, чтобы значение  $h$  проходило через нуль. В момент перехода происходит скачкообразное изменение намагниченности (если отвлечься от явления гистерезиса, невозможного в рамках равновесной теории).

Фазовый переход второго рода наблюдается при постепенном понижении температуры в нулевом внешнем поле. При переходе через критическое значение  $T_c$  (температура Кюри) возникает спонтанная намагниченность. В реальном образце образуются относительно большие участки — домены — с определенным направлением спонтанной намагниченности, но для разных доменов эти направления распределены хаотически. Когда говорят, что в ферромагнетике при  $T < T_c$  образуется чистое состояние с определенной намагниченностью, то имеют в виду отдельный домен, а не весь образец.

Обратимся теперь к неидеальному классическому газу. С формальной точки зрения эта система аналогична ферромагнетику Изинга (если не принимать во внимание отсутствие соответствующей симметрии), но в постановке реального эксперимента имеется весьма существенное различие. Дело в том, что для газа реальной независимой переменной является не химический потенциал — аналог внешнего поля, а сопряженная переменная — плотность, являющаяся аналогом намагниченности. Особые точки для газа образуют линию  $\mu_0(T)$ ,  $T \leq T_c$  на плоскости  $\mu$ — $T$ , оканчивающуюся в критической точке  $T = T_c$ ,  $\mu = \mu_0(T_c)$ . Если бы мы могли при  $T < T_c$  плавно менять химический потенциал  $\mu$ , то при переходе через значение  $\mu_0(T)$  мы наблюдали бы скачкообразное изменение плотности, аналогичное скачкообразному изменению намагниченности ферромагнетика. Однако на практике мы можем менять не  $\mu$ , а саму плотность (сжимая газ), и экспериментальная картина фазового

перехода меняется: сжимая газ при фиксированной температуре  $T < T_c$ , мы плавно меняем его плотность  $\rho$ , что соответствует плавному изменению химического потенциала и давления. При некотором значении плотности  $\rho_1(T)$  химический потенциал достигает значения  $\mu_0(T)$ , т. е.  $x$  выходит на линию особых точек  $M_x$ , а траектория  $\alpha(x)$  выходит на границу области стационарности  $\mathcal{O}$ , соответствующей особой точке  $T, \mu_0(T)$ . Область  $\mathcal{O}$  является отрезком прямой, соединяющим две крайние точки, и при последующем плавном изменении плотности точка стационарности плавно проходит по всему этому отрезку. Во время этого движения химический потенциал и давление остаются постоянными (напомним, что давление определяется значением функции  $\Phi(\alpha; x)$  в точке стационарности, а значение  $\Phi(\alpha; x)$  на области стационарности  $\mathcal{O}_x$  постоянно). Отметим, что постоянство давления в области  $\mathcal{O}$  позволяет изображать линию особых точек (в переменной давление — температура, как это обычно и делается).

При достижении значения плотности  $\rho_2(T)$ , соответствующего второму концу  $\mathcal{O}$ , точка стационарности выходит из  $\mathcal{O}$  в область неособых точек — химический потенциал и давление снова начинают плавно меняться.

Таким образом, в рассматриваемом случае точка стационарности не перескакивает область  $\mathcal{O}$ , а плавно проходит через нее. Крайние точки соответствуют чистым состояниям — жидкости и газу, а внутренние — их статистической смеси, которая на практике реализуется как двухфазная система, причем отношение объемов жидкости и газа определяется заданной плотностью.

Обсудим теперь фазовые переходы в квантовом бозе- или ферми-газе, которые имеют общие черты с ферромагнетизмом Гайзенберга: вырождение решения в обоих случаях непрерывно (фаза аномального среднего на сверхпроводящем или сверхтекучем состоянии аналогична направлению спонтанной намагниченности ферромагнетика). Однако и здесь имеется существенное различие в постановке эксперимента. Для квантового газа мы вводили четыре параметра: температуру, химический потенциал и комплексное „внешнее поле”, но в действительности единственной независимой переменной, которую можно непрерывно менять, является температура. Вводимое искусственно в гамильтониан внешнее поле для реальной системы равно нулю, а химический потенциал также нельзя считать реальной независимой переменной, поскольку сопряженная ему величина — плотность  $\rho$  — в условиях опыта фиксирована. Дополнительное условие  $\rho = \text{const}$  выделяет из двумерного многообразия особых точек на плоскости  $\mu$ — $T$  особую линию, точка окончания которой является критической. Наблюдать на опыте можно лишь фазовый переход второго рода, аналогичный переходу в ферромагнетике при нулевом внешнем поле.

В заключение следует предупредить читателя, что изложенная выше феноменология фазовых переходов не является общепринятой. Обычно фазовые переходы связывают с особенностями термодинамических функций, но нам кажется, что язык вариационного принципа и выпуклых функций является более наглядным и универсальным.

**6. Критические и голдстоуновские флуктуации.** Как уже неоднократно говорилось, варьируемая функция  $\Phi$  постоянна на всякой области стационарности  $\mathcal{O}_x$ . Отсюда следует, что в любой внутренней точке  $\alpha \in \mathcal{O}_x$  равны нулю вторые (и прочие) вариации  $\Phi$  для всех тех направлений вариаций  $\delta\alpha$ , которые не выводят из  $\mathcal{O}_x$ . Вследствие выпуклости области  $\mathcal{O}_x$  множество таких направлений одинаково для всех ее внутренних точек; и мы обозначим его  $L_x$ ;  $L_x$  есть некоторое линейное подпространство той же размерности, что и  $\mathcal{O}_x$ , показывающее ориентацию области  $\mathcal{O}_x$  в пространстве переменных  $\alpha$ .

Мы будем говорить, что поверхность  $\Phi$  имеет нулевую кривизну по направлениям  $L_x$  в любой внутренней точке  $\mathcal{O}_x$ . То же самое можно сказать и про поверхность  $\Gamma$ , поскольку функции  $\Phi$  и  $\Gamma$  различаются на линейное по  $\alpha$  слагаемое.

Рассмотрим теперь некоторую точку  $\alpha$ , лежащую на гладком участке границы области  $\mathcal{O}_x$  (например, если  $\mathcal{O}_x$  треугольник, то не в вершине). Среди векторов  $L_x$  можно выделить один, направленный по нормали к границе  $\mathcal{O}_x$ , все ортогональные ему векторы  $L_x$  направлены по касательным к границе  $\mathcal{O}_x$ . О касательных имеет смысл говорить только тогда, когда  $\dim \mathcal{O}_x > 1$ . Для одномерной области  $\mathcal{O}_x$ , являющейся отрезком прямой (модель Изинга и классический неидеальный газ), в  $L_x$  имеется единственное направление, которое следует считать нормальным к границе.

Для всех рассмотренных в п. 2 систем поверхность  $\Gamma$  имеет конечный скачок кривизны в точках выхода на плоский участок  $\mathcal{O}_x$  из-за того, что вторые производные по направлению нормали к границе терпят на границе конечный скачок. Величина этого скачка уменьшается по мере приближения к критической точке  $x^c$ , а в самой точке  $x^c$  обращается в нуль. В то же время вторые производные по направлениям касательных к границе оказываются непрерывными на границе; из непрерывности и равенства нулю этих производных внутри  $\mathcal{O}_x$  следует, что производные по касательным к границе направлениям  $L_x$  стремятся к нулю и при подходе к граничной точке  $\mathcal{O}_x$  со стороны особых точек.

Таким образом, в граничных точках  $\mathcal{O}_x$  кривизна поверхности  $\Gamma$  по касательным к границе направлениям  $L_x$  обращается в нуль („голдстоуновский нуль“); направления нулевой кривизны определяются выбором области  $\mathcal{O}_x$ , т. е. выбором  $x$ , и выбором точки  $\alpha$  на границе  $\mathcal{O}_x$ .

Как уже говорилось выше, при стремлении особой точки  $x$  к  $x^c$  стремятся к нулю скачки вторых производных по направлению нормали к границе  $\mathcal{C}_x$  для любой точки границы, так что в самой критической точке и эти производные обращаются в нуль. Отсюда ясно, что в критической точке поверхность  $\Gamma$  имеет нулевую кривизну по всем направлениям  $L_{x^c}$  („критический нуль“). Разумеется, мы предполагаем, что при  $x \rightarrow x^c$  пространство  $L_x$ , характеризующее ориентацию области  $\mathcal{C}_x$ , непрерывно поворачивается, стремясь к некоторому предельному  $L_{x^c}$ .

Покажем теперь, что кривизна поверхности  $\Gamma$  определяет величину флуктуаций в системе. Обозначим через  $\Gamma''$  матрицу вторых производных  $\Gamma$  в некоторой точке  $\alpha^0$  и через  $W''$  — матрицу вторых производных  $W$  в соответствующей точке  $x^0$  ( $\alpha^0$  определяет  $x^0$  однозначно, хотя обратное в общем случае неверно). Пусть  $e$  — вектор, в направлении которого поверхность  $\Gamma$  в точке  $\alpha^0$  имеет нулевую кривизну. Это значит, что среднее значение матрицы  $\Gamma''$  по вектору  $e$  равно нулю. Поскольку матрица  $\Gamma''$  знакоопределена ( $\Gamma'' \leq 0$ ), можно утверждать, что  $e$  является ее собственным вектором с нулевым собственным значением, а множество всех ортогональных  $e$  векторов есть инвариантное подпространство матрицы  $\Gamma''$ , т. е. перекрестные матричные элементы между этим подпространством и  $e$  равны нулю. Далее, согласно равенству (3), матрицы  $\Gamma''$  и  $W''$  взаимно-обратны с точностью до знака, следовательно,  $e$  будет также собственным вектором  $W''$  с собственным значением  $+\infty$ . Строже следовало бы сказать так: при стремлении  $x$  к  $x^0$  из области неособых точек один из собственных векторов положительно определенной матрицы  $W''$  стремится к  $e$ , а соответствующее собственное значение стремится к бесконечности.

При анализе выпуклости  $W$  в п. V.1.10 мы видели, что вторая вариация  $W$  по направлению  $e$  пропорциональна „температурной дисперсии“ (V.41) оператора  $a_e = \sum_i e_i a_i$ , где  $a_i$  — те операторы, удельными средними значениями которых являются переменные  $\alpha_i$ . Если все операторы  $a_i$  взаимно коммутируют, то температурная дисперсия совпадает с обычной. Поэтому бесконечность второй вариации  $W$  принято обозначать термином *бесконечность флуктуаций*.

Из предыдущего анализа кривизны поверхности  $\Gamma$  можно заключить, что в тех случаях, когда область стационарности  $\mathcal{C}_x$  имеет более одного измерения, при подходе к особой точке  $x$  из области неособых точек  $x$  в системе возникают бесконечные *голдстоуновские флуктуации*. Направления, для которых флуктуации обращаются в бесконечность, определяются точкой границы  $\mathcal{C}_x$ , в которую приходит идущая из области неособых точек траектория  $\alpha(x)$ , а последняя, в свою очередь, определяет траекторией подхода точки  $x$  к  $x$ .



Голдстоуновские флуктуации связывают обычно со спонтанным нарушением некоторой непрерывной группы симметрии. В этом случае граница  $\mathcal{C}_x$  состоит из точек, получаемых групповыми сдвигами одной (любой) из граничных точек, а направления касательных к границе совпадают с направлениями групповых сдвигов. Отметим, что обращение в нуль кривизны поверхности  $\Gamma$  по направлениям групповых сдвигов в точках стационарности  $\Phi$  (в частности, на границе  $\mathcal{C}_x$ ) является теперь автоматическим следствием симметрии функции  $\Phi$ , так что предположение о непрерывности вторых производных по направлениям касательных к границе  $\mathcal{C}_x$  заведомо выполняется. Следует, однако, отметить, что спонтанное нарушение непрерывной группы симметрии является достаточным, но вовсе не необходимым условием появления бесконечных голдстоуновских флуктуаций, хотя мы не имеем ни одного примера конкретной системы с голдстоуновскими флуктуациями, но без спонтанного нарушения симметрии.

В критической точке  $x^c$  обращаются в бесконечность флуктуации по всем направлениям  $L_{x^c}$  — *критические флуктуации*. Для модели Изинга и классического неидеального газа с одномерной областью  $\mathcal{C}$  возможны лишь критические флуктуации; в  $L_{x^c}$  имеется лишь одно направление, соответствующая вторая производная  $W$  имеет смысл восприимчивости для магнетика и сжимаемости для газа. В критической точке эти величины обращаются в бесконечность.

Вторые производные  $W$  по направлениям, ортогональным  $L_{x^c}$ , могли бы в принципе оставаться конечными, но для всех реальных систем почему-то оказывается, что в критической точке и эти производные обращаются в бесконечность (для модели Изинга и газа это соответствует бесконечности теплоемкости). Универсального и убедительного объяснения причины этого явления до сих пор не существует.

За последние годы широкую популярность получила феноменологическая гипотеза подобия или скэйлинга [42, 43, 47]. Эта гипотеза представляет собой некоторое общее утверждение относительно поведения термодинамических функций типа  $W(x)$  в окрестности критической точки, хорошо согласующееся с большим количеством экспериментальных данных (хотя и не без исключений — см. лекцию М. Фишера в сборнике [48]). Второй важной идеей, также сравнительно недавней, является утверждение об универсальности критического поведения: термодинамические функции подобных по числу переменных систем, например магнетика Изинга и классического газа, ведут себя практически одинаково в окрестности критической точки.

Все эти обнаруженные экспериментально общие закономерности критического поведения еще не получили четкого и убедительного объяснения на уровне микротемории.

На этом мы закончим обсуждение фазовых переходов и вариационной формулировки в термодинамике. Конечно, мы лишь затронули эту интересную и практически необъятную тему, но нас она касается лишь постольку, поскольку здесь в полном объеме содержится вся идеология вариационного принципа. Рассматривая в дальнейшем более сложные функциональные варианты этого принципа, мы будем обращать основное внимание на чисто техническую сторону вопроса, считая, что общий смысл уже ясен.

## § 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА ПРОИЗВОДЯЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА СВЯЗНЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

### 1. Функциональные формулировки вариационного принципа.

Рассмотрим теорию поля или квантовую статистику полевого типа, не касаясь пока ферромагнетиков и классического газа. В интересующих нас случаях динамика системы определяется функционалом действия  $S(\varphi)$ , который состоит из свободной части и взаимодействия. Мы будем пользоваться универсальными обозначениями и считать единое поле  $\varphi(x)$  бозонным. Это ограничение несущественно: при обобщении на фермионы нужно лишь следить за типом (левые — правые) и порядком написания производных.

Пусть  $S'(\varphi)$  — функционал действия интересующей нас теории,  $S''(\varphi)$  — добавка к действию, являющаяся интегралом по времени от вещественного лагранжиана (IV.18). Входящие в этот лагранжиан симметричные „потенциалы”  $A_n(x_1 \dots x_n)$  будут в дальнейшем рассматриваться как независимые переменные, играющие роль числовых параметров  $x$  в термодинамике; как обычно, будут рассматриваться лишь такие вариации потенциалов  $A$ , которые не нарушают вещественности лагранжиана (IV.18).

В теории поля аналогом термодинамической функции  $W(x)$  будет определенный в п. IV.3.2 функционал  $\varepsilon(A)$  — сдвиг энергии основного состояния из-за добавки действия  $S''$ . Напомним, что в псевдоевклидовой теории этот функционал определяется равенством  $\ln G(A) = -i\varepsilon(A) \int dt$ , в котором  $G(A) = \text{const} \int D\varphi \exp iS(\varphi)$ , где  $S \equiv S' + S''$  — полное действие с добавкой, а нормировочная постоянная фиксируется условием  $G(0) = 1$ . В евклидовом варианте теории тот же самый функционал  $\varepsilon(A)$  определяется равенством  $\ln G_e(A) = -\varepsilon(A) \int dt$ , в котором  $G_e(A) = \text{const} \int D\varphi \exp S_e(\varphi)$  с обычной нормировкой, а  $S_e = S'_e + S''_e$  — евклидов функционал действия ( $S''_e = S''$ ).

Для квантовой статистики при конечной температуре аналогом  $\varepsilon(A)$  будет определенный в п. V.1.9 функционал  $\Omega(A)$ , имеющий смысл сдвига термодинамического потенциала из-за добавки  $S''$ . Напомним его определение:  $\ln G_{\beta}(A) = -\beta\Omega(A)$ , где  $G_{\beta}(A) = \text{const} \int D\varphi \exp S_{\beta}(\varphi)$  с обычной нормировкой,  $S_{\beta} = S'_{\beta} + S''_{\beta}$  — полное температурное действие, т. е. евклидово действие для интервала времени  $[0, \beta]$ . При стремлении температуры к нулю  $\beta \rightarrow \int dt$  и  $\Omega(A) \rightarrow \varepsilon(A)$ .

Как было показано в пп. IV.3.2 и V.1.9,  $\varepsilon$  и  $\Omega$  являются выпуклыми вверх функционалами потенциалов  $A$ .

При переходе к вариационной задаче вводятся переменные  $\alpha$ , сопряженные с потенциалами  $A$ . В теории поля  $\alpha_n(x_1 \dots x_n) = \delta\varepsilon(A) / \delta A_n(x_1 \dots x_n)$ . Пользуясь общими правилами связи между функциональными и операторными конструкциями (пп. I.3.3 и I.6.5), нетрудно убедиться, что в теории поля

$$\alpha_n(x_1 \dots x_n) = -\frac{1}{n!} \langle 0 | \hat{\varphi}(t, x_1) \dots \hat{\varphi}(t, x_n) | 0 \rangle, \quad (5)$$

где  $|0\rangle$  — основное состояние полного гамильтониана теории с действием  $S = S' + S''$ ,  $\hat{\varphi}$  — оператор поля этой теории. Вакуумное ожидание (5) от времени в действительности не зависит, так что оператор поля может быть взят в любом представлении. В квантовой статистике вместо вакуумного ожидания (5) получилось бы среднее значение.

Все соотношения п. 1.2 очевидным образом обобщаются на рассматриваемый случай — функции заменяются на функционалы, обычные производные — на вариационные. Для преобразования Лежандра

$$\Gamma(\alpha) = \varepsilon(A) - \sum_n \int \dots \int dx_1 \dots dx_n A_n(x_1 \dots x_n) \alpha_n(x_1 \dots x_n) \quad (6)$$

справедлив аналог соотношения (3), что доказывает выпуклость вниз функционала  $\Gamma(\alpha)$ . Аналогичные (2) уравнения стационарности  $\delta\Gamma/\delta\alpha_n = -A_n$  служат для определения неизвестных  $\alpha$  по известным  $A$ . Исходной теории с действием  $S'$  соответствует точка  $A = 0$  в пространстве потенциалов. Если эта точка является особой в смысле определения п. I.4, то решение вариационной задачи вырождено и вместо точки стационарности  $\alpha$  мы получим целую выпуклую область стационарности  $\theta$  со всеми вытекающими отсюда последствиями. В частности, всякое непрерывное вырождение решения сопровождается появлением бесконечных голдстоуновских флуктуаций. Из спектрального представления (IV.21) второй вариации функционала  $\varepsilon(A)$  видно, что эта величина обращается в бесконечность тогда, когда в гильбертовом пространстве состояний соответствующей

квантовомеханической теории имеются отличные от основного состояния с такой же или сколь угодно близкой энергией. Это значит, что основное состояние не может соответствовать изолированному невырожденному уровню гамильтониана: либо имеется вырождение, либо уровень не является изолированным, т. е. в спектре гамильтониана нет щели, отделяющей основное состояние от всех прочих. [49]. Сказанное выше есть осторожная формулировка хорошо известной в релятивистской теории теоремы Голдстоуна [50], утверждающей, что всякое спонтанное нарушение непрерывной группы симметрии сопровождается появлением в теории безмассовых частиц. Спонтанное нарушение нужно лишь постольку, поскольку оно автоматически влечет непрерывное вырождение, а безмассовая частица есть релятивистский вариант бесщелевого возбуждения. Аналог теоремы Голдстоуна для квантовой статистики при конечной температуре получен в работе [51].

Существенной чертой описанного выше вариационного принципа было то, что потенциалы и сопряженные им переменные зависели лишь от координат  $x_i$ , но не от времени. Теперь мы переходим к формулировке вариационного принципа с потенциалами самого общего вида. Введем функционал

$$A(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n \varphi^n \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_n A_n(x_1 \dots x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \quad (7)$$

с произвольными симметричными потенциалами  $A_n(x_1 \dots x_n)$ . В псевдоевклидовой теории мы будем считать, что  $A(\varphi) = iS(\varphi)$ , где  $S(\varphi)$  — функционал действия, а в евклидовой теории и квантовой статистике мы будем считать функционалом действия сам  $A(\varphi)$ , чтобы во всех случаях функциональные интегралы писались с весом  $\exp A(\varphi)$ . Для статистики конечных температур поля  $\varphi$  и потенциалы  $A_n$  следует, разумеется, считать периодическими функциями по каждому из временных аргументов, а интегрирование по этим аргументам производить лишь по интервалу  $[0, \beta]$ . Мы будем рассматривать только бозонные теории. При обобщении на фермионы потенциалы с четными номерами следовало бы считать величинами бозонного типа, а с нечетными — фермионного.

Определим функционалы  $G(A)$  и  $W(A)$  равенством

$$G(A) = \exp W(A) = \text{const} \int D\varphi \exp A(\varphi). \quad (8)$$

Числовой множитель перед интегралом фиксирует нормировку  $G$ .

Величины  $G(A)$  и  $W(A)$  являются производящими функционалами полных и связных функций Грина соответственно для

теории с действием  $A(\varphi)$  (евклидов вариант) или  $-iA(\varphi)$  (псевдоевклидов вариант): указанные функции Грина являются кратными производными соответствующего функционала по потенциалу  $A_1(x)$ .

Функционал  $W$  в дальнейшем играет ту же роль, что и функция  $W(x)$  в термодинамике. С потенциалом  $A_n$  сопряжена переменная

$$\alpha_n(x_1 \dots x_n) \equiv \delta W(A) \delta A_n(x_1 \dots x_n) = (1/n!) \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle, \quad (9)$$

где  $\langle \dots \rangle$  обозначает функциональное среднее с весом  $\exp A(\varphi)$ . В теории поля это среднее имеет смысл полной функции Грина без вакуумных петель (функции  $H_n$  разделов I.3.1 и I.4.9), а в квантовой статистике это будет температурная функция Грина без вакуумных петель (V.1).

Преобразованием Лежандра порядка  $m$  будем называть преобразование по первым  $m$  потенциалам  $A' \equiv \{A_1 \dots A_m\} \rightarrow \alpha \equiv \{\alpha_1 \dots \alpha_m\}$ :

$$\Gamma(\alpha; A'') = W(A) - \sum_{k=1}^m A_k \delta W / \delta A_k = W(A) - \sum_{k=1}^m A_k \alpha_k, \quad (10)$$

где  $A''$  — набор „старших“ потенциалов, по которым не сделано преобразование, а произведение  $A_k \alpha_k$  подразумевает, конечно, свертку по всем аргументам  $x$ . Уравнения (2) принимают вид

$$\delta \Gamma / \delta \alpha_k = -A_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (11)$$

и их решения  $\alpha(A)$  являются точками стационарности функционала

$$\Phi(\alpha; A) = \Gamma(\alpha; A'') + \sum_{k=1}^m A_k \alpha_k, \quad (12)$$

принимаящего значение  $W(A)$  в точке стационарности.

Остальные соотношения п. 1.2 столь же просто обобщаются. В дальнейшем нам понадобятся аналоги (3) и (4):

$$\sum_{s=1}^m \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \alpha_i \partial \alpha_s} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial A_s \partial A_k} = -\delta_{ik}; \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta A_n} = \frac{\delta W}{\delta A_n} \quad \text{при } n > m. \quad (13)$$

Произведение вторых производных понимается теперь как свертка. Как и раньше, матрицы вторых производных  $\Gamma$  и  $W$  по аргументам  $\alpha$ ,  $A'$  соответственно представляют взаимно-обратные операции, но теперь их следует понимать как линейные интегральные операции на пространстве „столбцов“ симметричных функций с возрастающим числом аргументов  $x$ , а единицу в правой части первого из соотношений (13) нужно понимать как единичную операцию на таком пространстве.

В отличие от предыдущих формулировок вариационного принципа рассматриваемые функционалы уже не будут в общем случае выпуклыми. Выпуклость обеспечена лишь в квазивероятностных евклидовых теориях (пп. IV.3.1 и V.1.9), иначе говоря, вторую вариацию  $W(A)$  можно считать положительно определенной в тех точках пространства потенциалов  $A$ , для которых символ  $D\varphi \exp A(\varphi)$  обладает свойствами положительной меры на множестве полей  $\varphi$  и интегралы с весом  $\exp A(\varphi)$  „сходятся“.

Отсутствие выпуклости компенсируется одним весьма существенным достоинством, которым обладают преобразования Лежандра (10), — относительной простотой построения итерационных диаграммных разложений для этих функционалов. Это очень важно, поскольку с практической точки зрения преобразования Лежандра нужны для того, чтобы находить с помощью вариационного принципа аномальные, т. е. неитерационные решения для  $W(A)$ , а это предполагает умение строить хотя бы приближенные, но явные выражения для  $\Gamma$ . Разумеется, никто не предполагает, что функционал  $\Gamma$  можно определить точно, но этого и не требуется: построив  $\Gamma$  в некотором приближении, мы все равно можем надеяться найти аномальное решение для функций Грина  $\alpha$  (точек стационарности), но для этого, конечно, сами уравнения стационарности следует решать не итерациями, а точно. На практике эта программа оказывается достаточно эффективной — во всяком случае все известные на данный момент аномальные решения получены или могут быть получены именно таким способом, причем варьируемый функционал всякий раз достаточно взять в самом низшем приближении. Отметим, что эта программа уже обсуждалась нами подробно для частного случая первого преобразования Лежандра, т. е. для преобразования по одной переменной  $A_1$ , с помощью которого можно находить вариационным методом функцию Грина  $\alpha_1$  — среднее значение поля. Диаграммное представление этого функционала было построено в п. I.8.3; во всех конкретных моделях типа модели Голдстоуна [20] аномальное решение для  $\alpha_1$  находят, беря функционал  $\Gamma$  в первом порядке теории возмущений, что соответствует беспетлевому приближению (I.230).

Относительная простота диаграммной техники для функционалов (10) объясняется тем, что исходные переменные — потенциалы  $A$  — простым образом входят в диаграммные представления функционала  $W$ : с точностью до аддитивной нормировочной постоянной  $W$  представляется в виде суммы  $1/2 \cdot \text{tr} \ln \Delta$  и всех связанных графиков с линией  $\Delta = -A_2^{-1}$  (затравочный пропагатор) и вершинами  $A_n$ ,  $n \neq 2$  (см. п. I.7.4). Сопряженные „одетые“ переменные  $\alpha_h$  так же просто представляются диаграммными рядами с затравочными линиями и вершинами. Разрешая итерациями эти уравнения относительно  $m$  первых затравочных переменных  $A' \equiv \{A_1 \dots A_m\}$ , мы представим их бесконечными

рядами скелетных графиков с одетыми линиями и вершинами вплоть до  $m$ -хвостки и затравочными вершинами  $A_n$ ,  $n > m^*$ . Подстановка полученных диаграммных рядов для первых потенциалов  $A'$  в правую часть (10) приведет к искомым диаграммным представлениям  $\Gamma$ . Именно таким прямым методом Доминисис и Мартин [52] проанализировали диаграммные представления первого, второго, третьего и четвертого преобразований Лежандра.

В этой книге мы будем строить диаграммные представления  $\Gamma$  другим способом, а именно: мы получим сначала полную систему уравнений в вариационных производных (уравнений движения) для функционалов  $\Gamma$  и затем построим искомые диаграммные разложения как итерационные решения системы уравнений движения. Такой способ действий значительно упрощает комбинаторный анализ диаграмм  $\Gamma$ ; важно и то, что полная система уравнений движения для  $\Gamma$  определяет этот функционал независимо от его диаграммного разложения подобно тому, как уравнения Швингера определяют функции Грина. Отметим, что для преобразований (6) подобная программа невозможна, поскольку нельзя написать полную систему уравнений в терминах потенциалов, не зависящих от времени.

Закончим этот раздел краткой исторической справкой. Техника функциональных преобразований Лежандра разрабатывалась практически полностью в рамках статистической физики с целью построения аппарата, приспособленного для описания фазовых переходов. Первым примером использования этой техники следует считать полученное в тридцатых годах известное вириальное разложение в статистике классического неидеального газа [7, 8] (см. § 3). Техника работы с аномальными средними типа  $\alpha_1$  (первое преобразование Лежандра) была разработана Беляевым [53] для описания квантового бозе-газа при наличии конденсата. Объекты типа второго преобразования в различных вариационных формулировках квантовой статистики исследовались в работах Янга и Ли [54], Латтинджера и Ворда [55], Доминисиса [56]. Наконец, в фундаментальных работах Доминисиса и Мартина [52] была впервые четко сформулирована общая схема вариационного принципа для квантовой статистики и явно построены диаграммные представления первых четырех преобразований Лежандра. Иона-Лазинио сразу же отметил [57], что вариационные методы [52] могут быть использованы и в квантовой теории поля и очень удобны для описания спонтанного нарушения симметрии. В работах Дамэна и Иона-Лазинио [58] было впервые получено уравнение движения для одного из преобразований Лежандра и предпринята попытка неитерационного решения этого уравнения.

\* Мы будем называть скелетным любой график, в котором хотя бы один из элементов является одетым. Более точным, но менее привычным был бы термин " $m$ -скелетный".

Здесь надо отметить, что авторы работ [52, 58] исходили при определении различных функционалов из операторной формулировки. При таком подходе тождественность соответствующих функциональных конструкций квантовой статистики и теории поля не вполне очевидна, что и побудило авторов [58] переформулировать заново основные соотношения [52] на языке квантовой теории поля. Если же исходить, как в этой книге, из функциональных интегралов, то сразу видно, что в отношении вариационного принципа между статистикой и квантовой теорией поля вообще нет какого-либо существенного различия.

Метод анализа диаграмм  $\Gamma$  с помощью уравнений движения впервые был использован в [59] для первого преобразования. Общие уравнения движения для преобразований Лежандра любого порядка были получены в работах [60, 61]. В работах [62—64] с помощью этих уравнений были воспроизведены и обобщены результаты [52] относительно первых четырех преобразований Лежандра; в работах [65, 66] таким же способом построены диаграммные представления преобразований сколь угодно высокого порядка.

Отметим, что развитый в [59, 62—66] метод анализа преобразований Лежандра с помощью уравнений движения успешно применяется и к объектам другого типа — преобразованиям Лежандра логарифма производящего функционала  $S$ -матрицы, о которых пойдет речь в следующем параграфе.

**2. Уравнения движения в связанных переменных [60].** Исходной точкой служат уравнения движения для функционала  $G(A)$ , которые выводятся непосредственно из определения (8) и уже приводились в п. 1.7.3. Это уравнения связи (I.194) с  $n > 1$  (мы не ввели в действие (7) тривиальное слагаемое  $A_0$ ) и уравнение Швингера (I.195), которое очевидным образом линейризуется с помощью уравнений связи. В терминах функционала  $W(A) = \text{In } G(A)$  уравнения движения принимают следующий вид:

$$A_1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{\delta W}{\delta A_{n-1}} = 0; \quad \frac{\delta W}{\delta A_n} = \frac{1}{n!} H_n, \quad n > 1. \quad (14)$$

Для сокращения записи мы опускаем аргументы  $x_i$ , но нужно помнить, что в уравнении Швингера имеется один свободный аргумент  $x$ , а в уравнении связи с данным  $n$  подразумевается  $n$  аргументов  $x_1 \dots x_n$ . В правые части уравнений связи входят величины  $H_n$ , имеющие смысл полных функций Грина без вакуумных петель, представленных в виде полиномиальных форм связанных функций Грина  $\beta_k \equiv \delta^k W / \delta A_1^k$ ,  $k > 0$ . Явные выражения для полиномов  $H_n$  даются формулой (I.201).

Наша задача состоит в том, чтобы переписать уравнения (14) в терминах преобразования Лежандра  $\Gamma$  и его переменных.



Мы будем считать, что  $m > 1$ , поскольку первое преобразование рассматривалось в гл. I.

По серьезным причинам, которые мы сейчас поясним,  $\Gamma$  желательнее рассматривать не как функционал переменных  $\alpha$ , имеющих смысл несвязных функций Грина, а как функционал от эквивалентного набора первых связных функций Грина  $\beta \equiv \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ . Дело в том, что мы собираемся строить с помощью уравнений движения диаграммные представления  $\Gamma$ , а вершины и линии диаграмм будут определяться, конечно, функциональными аргументами  $\Gamma$ . Желая иметь диаграммы со связными вершинами и линиями, мы должны работать не с переменными  $\alpha$ , хотя именно они непосредственно сопряжены с потенциалами  $A$ , а с их связными компонентами  $\beta$ .

Итак, определив сначала функционал  $\Gamma(\alpha; A'')$  соотношениями (9), (10), мы хотим теперь сделать замену независимых переменных  $\alpha \rightarrow \beta$ . Из определений  $\alpha$ ,  $\beta$  и соотношений (14), (I.201) ясно, что переменные  $\alpha$  выражаются через  $\beta$  следующим образом:

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} H_n = \frac{1}{n!} \left( \beta_1 + \frac{\delta}{\delta A_1} \right)^n \cdot 1, \quad \delta \beta_n / \delta A_1 = \beta_{n+1}, \quad (15)$$

т. е.  $\alpha_1 = \beta_1$ ,  $\alpha_2 = (\beta_2 + \beta_1 \beta_1) / 2$ , и т. д. Напомним, что первая связная функция  $\beta_1 = \alpha_1$  есть среднее значение поля, вторая функция  $\beta_2$  — полный пропагатор,  $\beta_k$  — связная  $k$ -хвостка.

Получим несколько полезных при выполнении замены  $\alpha \rightarrow \beta$  формул. Введем вспомогательную полевую переменную  $\varphi = \varphi(x)$  и функционалы

$$\alpha(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi^n, \quad \beta(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \beta_n \varphi^n. \quad (16)$$

Переменные  $\alpha_n$  считаются определенными при любом  $n$  соотношением (15), в частности  $\alpha_0 = 1$ . Очевидно, что вся система уравнений (15) эквивалентна следующему функциональному равенству:

$$\alpha(\varphi) = \exp \beta(\varphi). \quad (17)$$

Продифференцируем это равенство по  $\beta_k$ , считая функции  $\beta$  независимыми переменными, а  $\alpha$  — функционалами от них:

$$\delta \alpha(\varphi) / \delta \beta_k = \alpha(\varphi) \delta \beta(\varphi) / \delta \beta_k = \alpha(\varphi) \varphi^k / k!. \quad (18)$$

Поле  $\varphi$  — произвольный параметр, и мы можем приравнять коэффициенты при каждой степени  $\varphi$  в обеих частях равенства. Это даст

$$\delta \alpha_n / \delta \beta_k = \alpha_{n-k} / k!. \quad (19)$$

Здесь и далее подразумевается, что  $\alpha_s = 0$  при  $s < 0$ .

Во избежание недоразумений следует сказать, что обе части равенства (19) содержат  $n+k$  аргументов  $x$ . Слева это  $n$  аргументов  $\alpha_n$  и  $k$  аргументов  $\beta_k$ , а правую часть нужно почитать следующим образом:  $k$  аргументов  $\beta_k$  и  $k \leq n$  аргументов  $\alpha_n$  (неважно каких ввиду симметричности  $\alpha_n$ ) входят в правую часть (19) в виде произведения  $k$  штук  $\delta$ -функций, представляющего ядро единичной операции на пространстве симметричных функций  $k$  переменных. Оставшиеся  $n-k$  аргументов  $\alpha_n$  являются аргументами функции  $\alpha_{n-k}$  в правой части (19).

Без крайней необходимости мы не будем выписывать явно аргументы  $x$  и ядра единичных операций — иначе формулы станут столь громоздкими, что при всем желании будет трудно что-либо понять. Мы надеемся, что заинтересованный читатель без особого труда разберется в расстановках аргументов, руководствуясь простым „законом сохранения”: полное число аргументов  $x$  должно быть одинаково в обеих частях равенства.

Дифференцируя равенство (18) по  $\beta_s$  и опять сравнив коэффициенты при  $\varphi^n$ , получаем

$$\delta^2 \alpha_n / \delta \beta_k \delta \beta_s = \alpha_{n-k-s} / k! s! \quad (20)$$

Производные  $\delta \beta / \delta \alpha$  не имеют простого вида — для их вычисления нужно обращать матрицу (19). В дальнейшем из обратных производных нам понадобятся только  $\delta \beta_n / \delta \alpha_m$  при  $n \leq m$ . Эти производные легко вычислить вследствие треугольности матрицы (19):

$$\delta \beta_n / \delta \alpha_m = m! \delta_{nm} \quad \text{при } n \leq m. \quad (21)$$

Приведем еще одну полезную формулу, которая следует из (19):

$$\frac{\delta}{\delta \beta_k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta \alpha_n}{\delta \beta_k} \cdot \frac{\delta}{\delta \alpha_n} = \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{n-k} \frac{\delta}{\delta \alpha_n}. \quad (22)$$

Если функционал, на который действует эта производная, зависит лишь от  $\alpha_n$  с  $n \leq m$  (как и будет у нас), то суммировать нужно до  $n = m$ .

Возвратимся теперь к уравнениям движения (14) и постараемся переписать их в терминах  $\Gamma$ . Для линейного уравнения Швингера это можно сделать сразу же с помощью соотношений (9), (11), (13):

$$-\frac{\delta \Gamma}{\delta \alpha_1} - \sum_{n=2}^m \alpha_{n-1} \frac{\delta \Gamma}{\delta \alpha_n} + A_{m+1} \alpha_m + \sum_{n=m+2}^{\infty} A_n \frac{\delta \Gamma}{\delta \alpha_{n-1}} = 0. \quad (23)$$

В этом уравнении  $\Gamma$  считается функционалом первых функций  $\alpha = \{\alpha_1 \dots \alpha_m\}$  и старших потенциалов  $A''$ . Сравнивая с (22), видим, что сумма всех производных по  $\alpha$  собирается в произ-

водную по  $\beta_1$ , так что для  $\Gamma$  в переменных  $\beta = \{\beta_1 \dots \beta_m\}$  и  $A''$  уравнение (23) принимает вид

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \beta_1} = A_{m+1} \alpha_m + \sum_{n=m+2}^{\infty} A_n \frac{\delta \Gamma}{\delta A_{n-1}}. \quad (24)$$

Несвязная переменная  $\alpha_m$  в правой части предполагается выраженной через независимые переменные  $\beta$  соотношением (15) с  $n = m$ .

Перейдем теперь к уравнениям связи (14) и разобьем их на две группы: уравнения с  $n \leq m$  и уравнения с  $n > m$ . Займемся сначала уравнениями первой группы. Их правые части  $H_n$  являются известными полиномами от связанных функций  $\beta_1 \dots \beta_m$ , являющихся нашими независимыми переменными. С другой стороны, левые части этих уравнений сводятся к  $\alpha$  согласно равенству (9); выразив  $\alpha$  через  $\beta$  по формулам (15), мы получим вместо содержательных уравнений простые тождества.

На первый взгляд это кажется странным, но дело в том, что при получении соотношений (15) мы в сущности воспользовались уравнениями связи и потому не удивительно, что совместное использование этих уравнений и соотношений (15) приводит к тождествам. Отсюда ясно, что соотношения (15) с  $n \leq m$  в действительности эквивалентны уравнениям связи первой группы и задача состоит в том, чтобы представить заключенную в уравнениях (15) информацию в виде некоторых уравнений для функционала  $\Gamma$ . Начнем с того, что напомним тождества

$$\delta_{1k} = \frac{\delta A_k}{\delta A_1} = \sum_{n=1}^m \frac{\delta \beta_n}{\delta A_1} \cdot \frac{\delta A_k}{\delta \beta_n}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (25)$$

Подчеркнем, что эти уравнения не содержат в себе никакой информации о виде функционала  $\Gamma$ : это тождества, выражающие лишь тот факт, что переменные  $A' = \{A_1 \dots A_m\}$  заменены на  $\beta = \{\beta_1 \dots \beta_m\}$ . Но если мы сумеем объединить тождества (25) с уравнениями (15), то мы тем самым введем в систему исковую информацию и можем получить нетривиальные уравнения для  $\Gamma$ .

Именно так мы и поступим, воспользовавшись в (25) рекуррентным соотношением (15):  $\delta \beta_n / \delta A_1 = \beta_{n+1}$ . Поскольку в (25)  $n \leq m$ , то лишь одна производная  $\delta \beta_m / \delta A_1$  не является независимой переменной. Мы можем ее исключить, разрешив уравнение (25) с  $k = m$  относительно  $\beta_{m+1}$  и подставив полученные выражения в остальные уравнения с  $k < m$ :

$$\beta_{m+1} = \delta \beta_m / \delta A_1 = - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\delta \beta_n}{\delta A_1} \cdot \frac{\delta A_m}{\delta \beta_n} \left( \frac{\delta A_m}{\delta \beta_m} \right)^{-1}, \quad (26)$$

$$\delta_{1k} = \sum_{n=1}^{m-1} \beta_{n+1} \left[ \frac{\partial A_k}{\partial \beta_n} - \frac{\partial A_m}{\partial \beta_n} \left( \frac{\partial A_m}{\partial \beta_m} \right)^{-1} \frac{\partial A_k}{\partial \beta_m} \right]. \quad (27)$$

Выразим теперь переменные  $A_k$  через  $\Gamma$  с помощью (11):

$$A_k = - \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha_k} = - \sum_{s=1}^m \frac{\partial \beta_s}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta_s}. \quad (28)$$

В частном случае  $k = m$ , учитывая (21), получаем

$$A_m = -m! \cdot \delta \Gamma / \delta \beta_m. \quad (29)$$

Дифференцируя выражения (28), (29), находим

$$\frac{\partial A_k}{\partial \beta_n} = - \sum_{s=1}^m \left[ \Gamma_{ns} \frac{\partial \beta_s}{\partial \alpha_k} + \Gamma_s \frac{\partial}{\partial \beta_n} \left( \frac{\partial \beta_s}{\partial \alpha_k} \right) \right], \quad (30)$$

$$\frac{\partial A_m}{\partial \beta_n} \left( \frac{\partial A_m}{\partial \beta_m} \right)^{-1} \frac{\partial A_k}{\partial \beta_m} = - \sum_{s=1}^m \Gamma_{nm} \Gamma_{m m}^{-1} \left[ \Gamma_{ms} \frac{\partial \beta_s}{\partial \alpha_k} + \Gamma_s \frac{\partial}{\partial \beta_m} \left( \frac{\partial \beta_s}{\partial \alpha_k} \right) \right], \quad (31)$$

где  $\Gamma_n \equiv \delta \Gamma / \delta \beta_n$  и  $\Gamma_{nk} \equiv \delta^2 \Gamma / \delta \beta_n \delta \beta_k$ .

Из треугольности матрицы производных  $\partial \beta_s / \partial \alpha_r$  ясно, что  $\beta_s$  выражается через  $\alpha_r$  с  $r \leq s$ , следовательно, производная  $\partial \beta_s / \partial \alpha_k$  выражается через  $\alpha_r$  с  $r \leq s - k$ , а в переменных  $\beta$  — через  $\beta_r$  с  $r \leq s - k$ . Учитывая, что в (31)  $s - k < m$ , заключаем, что производная по  $\beta_m$  в правой части (31) равна нулю, так что слагаемое с  $\Gamma_s$  можно отбросить. Подставив затем (30), (31) в (27), получаем

$$-\delta_{1k} = \sum_{n=1}^{m-1} \beta_{n+1} \sum_{s=1}^m \left[ Q_{ns} \frac{\partial \beta_s}{\partial \alpha_k} + \Gamma_s \frac{\partial}{\partial \beta_n} \left( \frac{\partial \beta_s}{\partial \alpha_k} \right) \right], \quad (32)$$

где  $Q_{ns} \equiv \Gamma_{ns} - \Gamma_{nm} \Gamma_{m m}^{-1} \Gamma_{ms}$ . Система (32) содержит  $m - 1$  независимых уравнений, т. е. ровно столько же, сколько было уравнений связи первой группы. При  $k = m$  (32) обращается в тождество.

Чтобы упростить уравнения (32), свернем их с соответствующей производной  $\partial \alpha_k / \partial \beta_r$  и просуммируем затем по  $k$  от 1 до  $m$ . Слева, учитывая (19), получим  $-\delta_{1r}$ , а в правую часть войдут суммы

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial \beta_s}{\partial \alpha_k} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta_r} = \delta_{sr} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta_r} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta_n} \left( \frac{\partial \beta_s}{\partial \alpha_k} \right).$$

Для вычисления второй из них перебросим производную  $\delta / \delta \beta_n$  на первый сомножитель. Получим

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \beta_n} \left[ \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta_r} \cdot \frac{\partial \beta_s}{\partial \alpha_k} \right] - \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \alpha_k}{\partial \beta_n \partial \beta_r} \cdot \frac{\partial \beta_s}{\partial \alpha_k}.$$

Первое слагаемое не дает вклада, поскольку выражение в квадратных скобках сводится к  $\delta_{sr}$ , второе слагаемое вычисляется с помощью (20), (22):

$$\sum_{k=1}^m \frac{\delta^2 \alpha_k}{\delta \beta_n \delta \beta_r} \cdot \frac{\delta \beta_s}{\delta x_k} = \frac{(n+r)!}{n! r!} \cdot \frac{\delta \beta_s}{\delta \beta_{n+r}} = \frac{(n+r)!}{n! r!} \delta_{s, n+r}.$$

В итоге приводим уравнения (32) к окончательному виду:

$$\delta_{1r} = \sum_{n=1}^{m-r} \frac{(n+r)!}{n! r!} \beta_{n+1} \Gamma_{n+r} - \sum_{n=1}^{m-1} \beta_{n+1} Q_{nr}. \quad (33)$$

Это уравнения связи первой группы для функционала  $\Gamma(\beta; A'')$ .

Перейдем теперь к уравнениям второй группы, т. е. к уравнениям связи (14) с  $n > m$ . Согласно второму из равенств (13) левые части уравнений могут быть записаны в виде  $\delta\Gamma/\delta A_n$ ,  $n > m$ . Правая часть уравнения с данным  $n$  является полиномом по связным функциям  $\beta_k$  с  $k \leq n$ . Первые из этих функций с  $k \leq m$  — наши независимые переменные, а старшие функции  $\beta_k$  с  $k > m$  должны быть выражены через функционал  $\Gamma$  или его производные, что и приведет к искомым уравнениям. Ввиду наличия рекуррентного соотношения (15) между связными функциями  $\beta_k$  задача сводится к тому, чтобы записать в нужных терминах *повышающий оператор*  $\mathcal{D} \equiv \delta/\delta A_1$  (частная производная в переменных  $A$ ). Это нетрудно сделать, написав

$$\mathcal{D} \equiv \delta/\delta A_1 = \sum_{k=1}^m \frac{\delta \beta_k}{\delta A_1} \cdot \frac{\delta}{\delta \beta_k} = \sum_{k=1}^m \beta_{k+1} \frac{\delta}{\delta \beta_k}$$

и подставив сюда получаемое с помощью (26) и (29) выражение для производной  $\beta_{m+1}$ :

$$\mathcal{D} = \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{k+1} \left[ \frac{\delta}{\delta \beta_k} - \Gamma_{km} \Gamma_{mm}^{-1} \frac{\delta}{\delta \beta_m} \right]. \quad (34)$$

Действуя последовательно повышающим оператором  $\mathcal{D}$  на независимую переменную  $\beta_m$ , мы выразим любую из связных функций  $\beta_n$  с  $n > m$  через производные функционала  $\Gamma$ . Отметим, что при  $k < m$  из (34) получаем  $\mathcal{D}\beta_k = \beta_{k+1}$ , как и требуется.

Уравнения связи (14) второй группы ( $n > m$ ) можно записать в виде

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_n} = \frac{1}{n!} \exp[-W] \mathcal{D}^n \exp[W] = \frac{1}{n!} (\beta_1 + \mathcal{D})^n \cdot 1, \quad (35)$$

подразумевая, что  $\mathcal{D}$  есть оператор (34). Отметим, что для первого преобразования Лежандра повышающий оператор



$\beta \equiv \beta_1 \dots \beta_m$  к 1-неприводимым переменным, которые мы будем обозначать  $\gamma \equiv \gamma_1 \dots \gamma_m$ .

Положим по определению  $\gamma_1 = \beta_1$ , а в качестве остальных переменных  $\gamma_k$  с  $k > 1$  возьмем 1-неприводимые функции Грина, определенные в п. I.8.1 соотношением (I.218). Напомним, что согласно определению  $\gamma_2 = -\beta_2^{-1}$  — обратный полный пропагатор со знаком минус,  $\gamma_3$  — ампутированная функция  $\beta_3$ ,  $\gamma_4$  — ампутированная  $\beta_4$  за вычетом всех графиков, содержащих одностичные особенности (см. (I.217)), и т. д. Связные функции выражаются через 1-неприводимые формулами (I.214), обратными к формулам (I.218); для удобства читателя мы перепишем эти соотношения в обозначениях данного раздела. Определим функционал

$$\bar{\beta}(\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \beta_n \varphi^n = \beta(\varphi) - \beta_1 \varphi \quad (40)$$

и построим его преобразование Лежандра по переменной  $\varphi(x)$ :

$$\psi(x) = \delta \bar{\beta}(\varphi) / \delta \varphi(x), \quad \gamma(\psi) = \bar{\beta}(\varphi) - \varphi \psi. \quad (41)$$

Отсюда обычным образом получаем (аргументы  $x$  опускаются)

$$\delta \gamma(\psi) / \delta \psi = -\varphi; \quad \frac{\delta^2 \gamma}{\delta \psi^2} \cdot \frac{\delta^2 \bar{\beta}}{\delta \varphi^2} = -1. \quad (42)$$

Ввиду того, что разложение (40) начинается с  $\varphi^2$ , между переменными  $\varphi$  и  $\psi$  имеется соответствие  $0 \leftrightarrow 0$ , а разложение  $\gamma(\psi)$  также начинается со второй степени  $\psi$ . Интересующие нас функции  $\gamma_n$  являются коэффициентами в разложении функционала  $\gamma(\psi)$ :

$$\gamma(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \gamma_n \psi^n. \quad (43)$$

Эти формулы эквивалентны определениям п. I.8.1; соотношения (I.218) и (I.214) в новых обозначениях принимают вид:

$$\gamma_n = \left( \frac{\delta}{\delta \psi} \right)^n \gamma(\psi) \Big|_{\psi=0} = - \left[ \left( \frac{\delta^2 \bar{\beta}}{\delta \varphi^2} \right)^{-1} \frac{\delta}{\delta \varphi} \right]^{n-1} \varphi \Big|_{\varphi=0}, \quad (44)$$

$$\beta_k = \left( \frac{\delta}{\delta \varphi} \right)^k \bar{\beta}(\varphi) \Big|_{\varphi=0} = \left[ - \left( \frac{\delta^2 \gamma}{\delta \psi^2} \right)^{-1} \frac{\delta}{\delta \psi} \right]^{k-1} \psi \Big|_{\psi=0}. \quad (45)$$

Эти равенства позволяют выразить явно  $\gamma$  через  $\beta$ , и наоборот. С их помощью можно также вычислять различные производные типа  $\delta \gamma / \delta \beta$ , которые необходимо знать для выполнения замены переменных  $\beta \rightarrow \gamma$  в уравнениях движения. Мы опустим громоздкие вспомогательные выкладки, отсылая интересующегося читателя к работе [61], и приведем лишь окончательный результат—







что эквивалентно записи повышающего оператора  $\mathcal{D}$  в переменных  $\gamma$ . Искомое представление имеет вид

$$\mathcal{D} = \beta_2 \left[ \frac{\delta}{\delta \gamma_1} + \sum_{k=2}^m \gamma_{k+1} \frac{\delta}{\delta \gamma_k} \right], \quad (56)$$

где  $\beta_2 = -\gamma_2^{-1}$ , а  $\gamma_{m+1}$  нужно понимать следующим образом:

$$\gamma_{m+1} = m \left( \text{diagram} \right) \dots \sum_{k=2}^{m-1} \left( \text{diagram} \right). \quad (57)$$

Согласно (15)  $\mathcal{D}$  является повышающим оператором для связанных функций  $\beta$ :  $\mathcal{D}\beta_k = \beta_{k+1}$ . Действуя им последовательно на  $\beta_m = \beta_m(\gamma)$ , мы найдем все старшие функции  $\beta_n$  как функционалы от  $\gamma$  и  $A''$ .

Повышающий оператор для 1-неприводимых функций определен соотношением (I.219). В обозначениях этого параграфа

$$\gamma_{n+1} = \mathcal{D}_1 \gamma_n = \beta_2^{-1} \mathcal{D} \gamma_n, \quad n > 1. \quad (58)$$

Для  $m \geq 3$  оператор  $\mathcal{D}_1$  совпадает с выражением в квадратных скобках в (56) (в формулах этого раздела предполагается  $m \geq 3$ ), а при построении  $\mathcal{D}_1$  для второго преобразования  $\mathcal{D}$  нужно взять в форме (34).

**4. Линейные уравнения и их общие решения.** Уравнение Швингера (24) является линейным неоднородным уравнением в частных вариационных производных, и его общее решение есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения — произвольного функционала от его первых интегралов.

Прежде чем проанализировать таким образом уравнение Швингера, выведем еще одно линейное уравнение для  $\Gamma$ . Конечно, если такое уравнение существует, то оно является следствием полной системы уравнений движения, но в нашем случае проще и полезнее вывести его заново.

Это нетрудно сделать по общим рецептам § I.7, написав:

$$\begin{aligned} 0 &= \int dx \int D\varphi \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} [\varphi(x) \exp A(\varphi)] = \\ &= \left[ \text{tr } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\delta}{\delta A_n} \right] G(A). \end{aligned} \quad (59)$$

Число  $\text{tr } 1 = \int dx \delta(x-x)$  есть след единичной операции на пространстве полей  $\varphi(x)$  („размерность” этого пространства). При получении (59) мы вынесли множитель  $\varphi(x) \delta A(\varphi) / \delta \varphi(x)$  за знак функционального интеграла в виде дифференциальной операции.

Переходя к  $W = \ln G$ , находим

$$\text{tr } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\partial W}{\partial A_n} = 0, \quad (60)$$

откуда с помощью (9), (11), (13) получаем уравнение для  $\Gamma(\alpha; A'')$ :

$$\text{tr } 1 - \sum_{n=1}^m n \alpha_n \frac{\delta \Gamma}{\delta \alpha_n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} n A_n \frac{\delta \Gamma}{\delta A_n} = 0. \quad (61)$$

Теперь нужно сделать замену  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ . Мы сделаем необходимые для этого выкладки, поскольку они служат хорошей иллюстрацией техники, используемой при выводе уравнений движения для  $\Gamma(\gamma; A'')$ . Имеем

$$\sum_{n=1}^m n \alpha_n \frac{\delta \Gamma}{\delta \alpha_n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n \sum_{k=1}^m \frac{\delta \gamma_k}{\delta \alpha_n} \frac{\delta \Gamma}{\delta \gamma_k}. \quad (62)$$

Мы распространили суммирование по  $n$  до бесконечности, так как в (62)  $k \leq m$ , а  $\delta \gamma_k / \delta \alpha_n = 0$  при  $n > k$ . При  $k=1$  вклад в (62) дает лишь слагаемое с  $n=1$ . Поскольку  $\gamma_1 = \beta_1 = \alpha_1$ , ясно, что производная  $\Gamma$  по  $\gamma_1$  входит в сумму (62) в виде  $\gamma_1 \delta \Gamma / \delta \gamma_1$ .

Остается вычислить коэффициенты при производных  $\delta \Gamma / \delta \gamma_k$  с  $k > 1$ . Учитывая определения (41), (43), можно написать:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n \frac{\delta \gamma_k}{\delta \alpha_n} &= \left( \frac{\delta}{\delta \psi} \right)^k \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n \frac{\delta \gamma(\psi)}{\delta \alpha_n} \Big|_{\psi=0} = \\ &= \left( \frac{\delta}{\delta \psi} \right)^k \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n \frac{\delta}{\delta \alpha_n} [\bar{\beta}(\psi) - \psi \psi] \Big|_{\psi=0}. \end{aligned} \quad (63)$$

В этом соотношении  $\psi$  считается независимой переменной, а  $\varphi = -\delta \gamma / \delta \psi$  — функционалом от  $\psi$ , зависящим параметрически от  $\gamma_n$  и тем самым от  $\alpha_n$ . Из (40) и (17) следует, что  $\bar{\beta}(\psi) - \psi \psi = \ln \alpha(\varphi) - \beta_1 \varphi - \varphi \psi$ . Дифференцируя эту величину по  $\alpha_n$ , получаем следующее выражение:

$$\frac{1}{\alpha(\varphi)} \varphi^n - \frac{1}{\alpha(\varphi)} \frac{\delta \alpha(\varphi)}{\delta \varphi} \frac{\delta \varphi}{\delta \alpha_n} - \delta_{n1} \varphi - \beta_1 \frac{\delta \varphi}{\delta \alpha_n} - \psi \frac{\delta \varphi}{\delta \alpha_n}. \quad (64)$$

При дифференцировании  $\alpha(\varphi)$  учтено, что этот функционал зависит от  $\alpha_n$  как явно (отсюда первое слагаемое (64)), так и неявно через  $\varphi$ . Независимая переменная  $\psi$  не дифференцируется, а  $\delta \beta_1 / \delta \alpha_n = \delta_{n1}$ . Далее,

$$\frac{\delta \alpha(\varphi)}{\delta \varphi} = \alpha(\varphi) \frac{\delta \bar{\beta}(\varphi)}{\delta \varphi} = \alpha(\varphi) \left[ \frac{\delta \bar{\beta}(\varphi)}{\delta \varphi} + \beta_1 \right] = \alpha(\varphi) [\psi + \beta_1]. \quad (65)$$

Мы воспользовались соотношениями (17), (40) и учли, что величина  $\delta\bar{\beta}(\varphi)/\delta\varphi$  при подстановке  $\varphi = -\delta\gamma(\psi)/\delta\psi$  обращается в  $\psi$  согласно определению преобразования Лежандра (41), (42). Подставив (65) в (64), увидим, что слагаемые с производными  $\delta\varphi/\delta\alpha_n$  взаимно сокращаются и выражение (64) оказывается равным  $\varphi^n/\alpha(\varphi) - \delta_{n1}\varphi$ . При подстановке этого результата в (63) возникает ряд по  $n$ , который можно собрать:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n \left[ \frac{\varphi^n}{\alpha(\varphi)} - \delta_{n1}\varphi \right] = \frac{1}{\alpha(\varphi)} \varphi \frac{\delta\alpha(\varphi)}{\delta\varphi} - \beta_1\varphi, \quad (66)$$

поскольку умножение на  $n$  коэффициентов степенного ряда по  $\varphi$  эквивалентно применению операции  $\varphi\delta/\delta\varphi$ . Воспользовавшись затем еще раз соотношениями (17), (40) — (42), приводим (66) к виду  $\varphi\delta\bar{\beta}(\varphi)/\delta\varphi = -\psi\delta\gamma(\psi)/\delta\psi$ . В итоге получаем следующий простой результат (напомним, что  $k > 1$ ):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n \frac{\delta\gamma_k}{\delta\alpha_n} = \left( \frac{\delta}{\delta\psi} \right)^k \left[ -\psi \frac{\delta\gamma(\psi)}{\delta\psi} \right] \Big|_{\psi=0} = -k\gamma_k \quad (67)$$

и искомое линейное уравнение

$$\text{tr } 1 - \gamma_1 \frac{\delta\Gamma}{\delta\gamma_1} + \sum_{k=2}^m k\gamma_k \frac{\delta\Gamma}{\delta\gamma_k} + \sum_{n=m+1}^{\infty} nA_n \frac{\delta\Gamma}{\delta A_n} = 0. \quad (68)$$

Опишем теперь решения уравнений (24), (68). Прямой проверкой нетрудно убедиться, что в качестве частного решения неоднородного уравнения (68) можно взять  $\text{tr} \ln \beta_2$  с коэффициентом  $1/2$ , а общим решением однородного уравнения будет произвольный функционал от первых интегралов:

$$\bar{\gamma}_1 \equiv \gamma_1 \lambda^{-1}; \quad \bar{\gamma}_k \equiv \lambda^k \gamma_k, \quad 3 \leq k \leq m; \quad \bar{A}_n \equiv \lambda^n A_n, \quad n > m, \quad (69)$$

где  $\lambda \equiv \beta_2^{1/2}$  — «корень из пропагатора», определяемый равенством  $\lambda^{\Gamma}\lambda = \beta_2^*$ , а произведения  $\lambda^k \gamma_k$  и т. п. понимаются как свертки типа (I.131) (см. замечание после формулы (I.131)). Первые интегралы (69) будут называться в дальнейшем *инвариантными вершинами*.

Рассмотрим произвольный график, состоящий из вершин, линий и „хвостиков”  $\gamma_1$ , которые присоединяются непосредственно к вершинам без промежуточной линии. Будем считать, что линии сопоставляется полный пропагатор  $\beta_2 = -\gamma_2^{-1}$ , а вершине, к которой присоединяется  $n$  линий и  $k$  „хвостиков”  $\gamma_1$ , со-

\* Это определение предполагает равенство  $\beta_2 = \beta_2^{\Gamma}$ , справедливое для бозонного поля. Отметим также, что равенство  $\lambda^{\Gamma}\lambda = \beta_2$  определяет  $\lambda$  лишь с точностью до преобразования  $\lambda \rightarrow u\lambda$ , где  $u$  — произвольная ортогональная операция:  $u^{\Gamma}u = 1$ .

поставляется  $\gamma_{n+k}$ , если  $n+k \leq m$ , и  $A_{n+k}$ , если  $n+k > m$ . Ясно, что получаемое выражение будет функционалом от инвариантных вершин (69). Это становится очевидным, если разделить каждую из линий пополам и отнести эти половинки к вершинам, а в точках соединения „хвостиков”  $\gamma_1$  с вершинами вставить  $\lambda^{-1}\lambda=1$ , отнеся первый множитель к  $\gamma_1$ , а второй — к вершине. Следовательно, любая сумма графиков такого типа автоматически удовлетворяет однородному уравнению (68). Отсюда, конечно, не следует обратное — представимость решения графиками равносильна добавочному предположению о разложимости функционала в степенной ряд по инвариантным вершинам.

Обратимся теперь к уравнению Швингера (24). Неоднородный член в этом уравнении содержит функцию  $\alpha_m$ , которая предполагается выраженной через независимые переменные  $\gamma_1 \dots \gamma_m$ . Чтобы построить частное решение неоднородного уравнения, определим функционал

$$x^{(m)}(\varphi) = \exp \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} \beta_n \varphi^n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n^{(m)} \varphi^n. \quad (70)$$

Коэффициентные функции  $\alpha_n^{(m)}$  отличаются от обычных функций  $\alpha_n$  тем, что в них отброшены все вклады, содержащие хотя бы одну из старших функций  $\beta_k$  с  $k > m$ . Величины  $\alpha_n^{(m)}$  являются известными функционалами от независимых переменных  $\gamma$ , причем  $\alpha_n^{(m)} = z_n$  при  $n \leq m$ .

Вспомнив вывод равенства (19), нетрудно понять, что оно будет справедливым и для функций  $\alpha_n^{(m)}$ , в частности  $\delta \alpha_n^{(m)} \delta \beta_1 = \alpha_{n-1}^{(m)}$ . Используя это соотношение, можно показать, что функционал  $\mathcal{F} \equiv \sum_{n>m} A_n \alpha_n^{(m)}$  является частным решением неоднородного уравнения (24). Действительно,

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \beta_1} = \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \frac{\delta \alpha_n^{(m)}}{\delta \beta_1} = A_{m+1} \alpha_m^{(m)} + \sum_{n=m+2}^{\infty} A_n \alpha_{n-1}^{(m)},$$

что и требуется, так как  $\alpha_m^{(m)} = z_m$  и  $\alpha_{n-1}^{(m)} = \delta \mathcal{F} / \delta A_{n-1}$ . Столь же просто убедиться, что первыми интегралами однородного уравнения (24) будут подобные старшим потенциалам вершины  $\omega_n(x_1 \dots x_n)$  с  $n > m$ :

$$\omega_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} i_{n+k} \gamma_1^k = \mathbb{A} + \frac{1}{2} \mathbb{A}^2 + \dots \quad (71)$$

Уравнения (24) и (68) в сущности устраняют  $\gamma_1$  и  $\gamma_2 = -\beta_2^{-1}$  как независимые переменные: из (24) следует, что  $\gamma_1$  может

входить лишь в определенных комбинациях (71) со старшими потенциалами, а из (68) следует, что линия  $\beta_2$  входит лишь в определенной комбинации с вершинами. Если рассматривается теория с конечным числом отличных от нуля потенциалов  $A_n$  и делается полное преобразование Лежандра по всем потенциалам, то правая часть (24) обращается в нуль, и в этом случае функционал  $\Gamma$  от переменной  $\gamma_1$  вообще не зависит. Если же порядок преобразования Лежандра на единицу меньше, чем у полного, то в правой части (24) остается лишь первое слагаемое и вся зависимость от  $\gamma_1$  содержится в частном решении  $A_{m+1}\alpha_{m+1}^{(m)}$ , где  $A_{m+1}$  — самый старший потенциал.

Впоследствии мы будем строить итерационное решение уравнений движения, которое представляется в виде суммы  $1/2 \cdot \text{tr} \ln \beta_2$  и графиков, о которых говорилось выше. При этом графики будут классифицироваться по числу линий, а исходной точкой итерационной процедуры будет определение графиков, содержащих 0 линий. Такие графики есть, и все они содержатся в частном решении  $\mathcal{F}$ : выражая функции  $\alpha_n^{(m)}$  через независимые переменные  $\gamma$ , мы получим среди прочих слагаемое  $\gamma_1^n/n!$ , тогда как все другие вклады в  $\alpha_n^{(m)}$  обязательно содержат хотя бы одну линию  $\beta_2$ . Отсюда ясно, что в качестве нулевого приближения по числу линий нужно брать

$$\Gamma^{(0)}(\gamma; A'') = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \beta_2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n \gamma_1^n. \quad (72)$$

Общий член суммы представляет затравочную вершину  $A_n$  с  $n > m$ , все аргументы которой свернуты с „хвостиками”  $\gamma_1$ . Любой другой график обязательно содержит хотя бы одну линию.

**5. Итерационное решение уравнений.** Отправляясь от нулевого приближения (72), можно построить итерационное решение уравнений движения, представляющее функционал  $\Gamma$  в виде суммы графиков с одетыми вершинами  $\gamma_3 \dots \gamma_m$  и затравочными вершинами  $A_n$ ,  $n > m$ . Полное число уравнений движения совпадает с числом независимых переменных  $\Gamma$ , но для построения итерационного решения нет нужды рассматривать всю систему уравнений движения. Дело в том, что в обычных условиях, итерируя, например, уравнение вида  $\delta\Gamma/\delta\gamma_k = \dots$ , мы на каждом шаге можем добавить к решению произвольный функционал, не зависящий от  $\gamma_k$ , но любым образом зависящий от остальных переменных. Для доопределения этого функционала нужны дополнительные уравнения, содержащие производные по другим переменным. Но если мы заранее знаем, что искомым функционал представляется в виде суммы нулевого приближения (72) и графиков, содержащих хотя бы одну линию  $\beta_2$ , то для определения этих графиков достаточно одного уравнения вида

$\delta\Gamma/\delta\gamma_2 = \dots$ . Произвольный функционал, который мы могли бы добавить к решению этого уравнения, не должен зависеть от  $\beta_2 = -\gamma_2^{-1}$ , и поэтому не представим графиками.

Чтобы выделить из системы (50), (51) искомое уравнение,

умножим (50) справа на  $\beta_2 = \dots$ , а каждое из уравнений

(51) — на величину  $\gamma_{r+1}\beta_2 \equiv \dots$ , иначе говоря, сведем в одну

точку все  $r$  правых внешних линий в блоках (51) и к полученной точке присоединим линию  $\beta_2$ . Если затем просуммировать все полученные уравнения, то слагаемые с первыми производными  $\Gamma_k$ ,  $k > 2$ , взаимно сократятся и мы придем к уравнению нужного типа:

$$2\Gamma_2 = -\gamma_2^{-1} + \sum_{k, r=2}^{\infty} \left[ \text{diagram with } k \text{ and } r \text{ lines} \right] - \sum_{s, n_1, \dots, n_k} A_{n_1, \dots, n_k}^s \left[ \text{diagram with } s \text{ lines} \right] \quad (73)$$

Изображая последнее слагаемое в правой части, мы включили добавленную правую вершину  $\gamma_{r+1}$  в общий набор вершин, стоящих на сплошной нижней линии, так что теперь число этих вершин не меньше двух. Множитель  $(r-1)!$  в (52) в точности соответствует остальным множителям  $(n_i-2)!$ , так как для последней вершины  $n_k = r+1$ . Следовательно, симметричный коэффициент  $A_{n_1, \dots, n_k}^s$  в (73) определяется формулой

$s! \left[ \prod_i (n_i - 2)! \right]^{-1}$ . Напомним, что суммирование по  $s$  в (73)

производится от 2 до  $m$ , каждое из чисел  $n_i$  может принимать значения от 3 до  $m$ , а суммирование производится по всем вариантам расстановок не менее двух вершин с условием  $\sum (n_i - 2) = s$ .

Обсудим теперь процедуру итерационного решения уравнения (73). Прежде всего отметим, что первое слагаемое нулевого приближения (72) порождается затравочным слагаемым  $-\gamma_2^{-1}$  в правой части (73), но остальные члены (72) не могут быть получены из уравнения (73) и должны вноситься извне как известное из других соображений нулевое приближение.

В левую часть (73) входит производная  $\Gamma_2 \equiv \delta\Gamma/\delta\gamma_2$ . Для нулевого приближения  $2\Gamma_2^{(0)} = -\gamma_2^{-1}$ , а остальные графики  $\Gamma$  зависят от  $\gamma_2$  через посредство линии  $\beta_2 = -\gamma_2^{-1}$ , для которой  $\delta\beta_2/\delta\gamma_2 = \beta_2^2$ . Подробнее:  $\delta\beta_2(x, x')/\delta\gamma_2(y, y') = \text{Sym} \beta_2(x, y) \beta_2(x', y')$ ,

где  $\text{Sym}$  обозначает симметризацию относительно перестановки  $x \rightleftharpoons x'$  или  $y \rightleftharpoons y'$ , что эквивалентно. Графически дифференцирование линии по  $\gamma_2$  эквивалентно разрыву этой линии по середине, а производная графика по  $\gamma_2$  есть сумма вкладов, получаемых при разрыве каждой из его линий. Отметим, что каждый из графиков производной имеет две внешние линии — половинки той линии, которая разрывается при дифференцировании. Отметим также, что если бы мы дифференцировали не по  $\gamma_2$ , а по  $\beta_2$ , то этой операции соответствовало бы простое удаление, а не разрыв линии, и производная не имела бы внешних линий. Полезно также указать, что не всякая сумма графиков вида  $\Gamma_2$  действительно является производной по  $\gamma_2$  от некоторого графика или суммы графиков — последнее предполагает определенные соотношения между типами и коэффициентами в исходном наборе графиков. Смысл этих дополнительных „условий интегрируемости“ прост: дифференцируя график, мы должны получить сумму вкладов от разрывов каждой из линий. Если из этой суммы отбросить часть вкладов, то оставшаяся часть уже не может быть производной ни от какого графика, если только она не окажется пропорциональной всей исходной сумме (как будет, например, тогда, когда все линии дифференцируемого графика эквивалентны и разрыв любой из них приводит к одному и тому же графику).

Соединяя вместе концы разорванной линии в любом из графиков производной  $\Gamma_2$ , мы возвращаемся, очевидно, к исходному графику  $\Gamma$ , который был дифференцирован. Следовательно, свертка  $\Gamma_2 \beta_2^{-1}$  (ампутируется лишняя внешняя линия) отличается от  $\Gamma$  лишь коэффициентами при графиках (дополнительным множителем  $n$  для графика с  $n$  линиями). Это значит, что по известным вместе с коэффициентами графикам производной  $\Gamma_2$  мы без каких-либо вычислений легко можем найти соответствующие графики  $\Gamma$  вместе с коэффициентами.

Допустим, что мы знаем все графики  $\Gamma$  вплоть до порядка  $N$  по числу линий и хотим найти графики следующего порядка  $N + 1$  (исходная точка — знание графиков (72) порядка 0). Вычислим по известным графикам  $\Gamma$  все блоки, входящие в правую часть (73). Эти блоки составляют известным образом (см. (46) — (49)) из производных  $\Gamma$  по переменным  $\gamma$ . Дифференцирование по  $\gamma_2$  мы уже обсуждали, дифференцирование по  $\gamma_1$  соответствует графически отрыв „хвостика“  $\gamma_1$ , а дифференцирование по вершине  $\gamma_k$ ,  $k > 2$ , соответствует вырывание этой вершины из графика всеми возможными способами. Входящее в (73) ядро  $\Gamma_{mm}^{-1}$  всегда можно найти в виде ряда, затравочное слагаемое которого порождается содержащимся в  $\Gamma$

графиком  $\gamma_m \beta_2^m \gamma_m \equiv \textcircled{\phantom{m}}$  Вклад этого графика в производ-



ную  $\Gamma_{mm}$  равен  $2c\beta_2^m = 2c \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \odot$ , где  $c$  — коэффициент при исходном графике  $\Gamma$ ; поэтому

$$\Gamma_{mm}^{-1} = \left[ 2c \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \odot \right]^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \frac{1}{(2c)^2} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \odot + \frac{1}{(2c)^3} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \odot \odot - \dots \quad (74)$$

Сплошная линия обозначает  $\beta_2$ , пунктирная —  $\beta_2^{-1}$ , заштрихованный блок вместе с внешними линиями обозначает вклад в  $\Gamma_{mm}$  всех графиков, кроме выделенного.

Итак, по известным вплоть до порядка  $N$  графикам  $\Gamma$  мы можем вычислить все блоки в правой части (73), определив тем самым „правую часть в приближении  $N$ “. Ввиду нелинейности по  $\Gamma$  правой части (73) это приближение не соответствует какому-либо определенному порядку по числу линий, но посмотрев внимательно на уравнение (73) и оценив число линий в различных блоках, нетрудно убедиться, что правая часть в приближении  $N$  обязательно содержит все графики, получаемые дифференцированием по  $\gamma_2$  графиков  $\Gamma$  до порядка  $N+1$  включительно. Это значит, что по известной правой части в приближении  $N$  мы можем найти все интересующие нас графики  $\Gamma$  порядка  $N+1$  по числу линий. В правой части (73) им соответствуют графики, имеющие  $N+2$  линий, из которых две внешние. Вклады графиков более низких порядков нас не интересуют, поскольку они предполагаются известными, а вклады графиков более высоких порядков в правую часть (73) нужно просто отбросить. Попытка за один шаг итераций продвинуться больше, чем на один порядок по числу линий, бесполезна: хотя правая часть в приближении  $N$  действительно содержит вклады графиков более высокого, чем  $N+1$ , порядка, это всего лишь часть таких вкладов, а не все. Наличие всех нужных графиков гарантировано только до порядка  $N+1$  включительно, но этого, конечно, вполне достаточно для того, чтобы итерировать уравнение (73).

**6. Второе преобразование Лежандра.** Для анализа второго преобразования воспользуемся уравнениями п. 2 (уравнения п. 3 написаны в предположении  $m > 2$ ). При  $m = 2$  в системе (38) имеется единственное уравнение с  $r = 1$ :

$$2\Gamma_2 = \beta_2^{-1} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \square = \beta_2^{-1} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \odot - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \square \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \odot, \quad (75)$$

в котором  $\Gamma_2$  обозначает производную  $\Gamma$  по  $\beta_2$ , а блоки в правой части изображают производные  $\Gamma$  по переменным  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (см. (37)). Итерируя это уравнение с нулевым приближением (72) по общей схеме предыдущего раздела, мы представим  $\Gamma$  графи-

ками с одетыми линиями  $\beta_2$ , затравочными вершинами  $A_n$ ,  $n > 2$ , и „хвостиками”  $\beta_1 = \gamma_1$ , которые присоединяются непосредственно к вершинам. Для второго преобразования сумма по  $n$  в (72) начинается с трех, а затравочное слагаемое в разложении типа (74) обратной операции  $\Gamma_{22}^{-1}$  порождается слагаемым  $1/2 \cdot \text{tr} \ln \beta_2$  нулевого приближения (72):

$$\Gamma_1^{(0)} = \frac{1}{2} \beta_2^{-1}, \quad \Gamma_{22}^{(0)} = \frac{1}{2} \beta_2^{-2} = -\frac{1}{2} \dots \dots \dots$$

Мы предлагаем читателю проделать самостоятельно первые шаги итерационной процедуры и приведем лишь ответ для простого и наиболее важного частного случая теории, в которой отличны от нуля только вершины  $A_3$  и  $A_4$ . С точностью до пяти порядков по числу линий

$$\Gamma = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \beta_2 + \frac{1}{8} \text{---} + \frac{1}{24} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} + \frac{1}{12} \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} + \frac{1}{12} \text{---} + \frac{1}{40} \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} + \dots \quad (76)$$

Все приведенные здесь графики являются 2-неприводимыми, т. е. остаются связными при разрыве любой пары линий. Это не случайное явление: посмотрев внимательно на правую часть уравнения (75), нетрудно понять, что это уравнение обладает свойством *сохранения 2-неприводимости* аналогично тому, как уравнения (I.204) для функционала  $W$  обладали свойством сохранения связности, а уравнения (I.223) для первого преобразования Лежандра — свойством сохранения 1-неприводимости.

Свойство сохранения состоит в следующем: если все графики  $\Gamma$  вплоть до некоторого порядка являются 2-неприводимыми, то получаемые путем итераций уравнения (75) графики следующего порядка также будут 2-неприводимыми. Это наблюдение с учетом известной неприводимости первых графиков позволяет с помощью индукции доказать 2-неприводимость всех графиков второго преобразования Лежандра. Утверждение, конечно, остается верным для теории с любым числом отличных от нуля потенциалов  $A_n$ .

Прежде чем обсуждать вопрос о коэффициентах при графиках, рассмотрим уравнения стационарности (11), которые у нас принимают вид

$$-A_k = \delta \Gamma / \delta \alpha_k = \sum_{i=1}^2 \Gamma_i \delta \beta_i / \delta \alpha_k, \quad (77)$$

где  $i, k = 1, 2$ ,  $\Gamma_i$  — производные  $\Gamma$  по  $\beta_i$ . Из (15) имеем  $\alpha_1 = \beta_1$ ,  $\alpha_2 = (\beta_2 + \beta_1 \beta_1) / 2$ ; разрешив эти уравнения относительно  $\beta$ , можно

вычислить производные  $\delta\beta_i/\delta x_k$  и привести уравнения (77) к виду

$$-A_1 = \Gamma_1 - 2\Gamma_2\beta_1, \quad -A_2 = 2\Gamma_2. \quad (78)$$

В вариационном подходе эти уравнения служат для определения неизвестных „одетых“ переменных  $\beta_1$  и  $\beta_2$  по известным затравочным  $A_{1,2}$ .

Написав  $2\Gamma = \text{tr} \ln \beta_2 + 2\bar{\Gamma}$ ,  $2\Gamma_2 = \beta_2^{-1} + 2\bar{\Gamma}_2$  и вспомнив, что потенциал  $A_2$  связан с затравочным пропагатором  $\Delta$  соотношением  $\Delta = -A_2^{-1}$ ; видим, что второе из уравнений стационарности (78) есть обычное уравнение Дайсона  $\beta_2^{-1} = \Delta^{-1} - 2\bar{\Gamma}_2$ , в котором собственная энергия  $\Sigma = 2\bar{\Gamma}_2$  представлена не в виде суммы затравочных графиков, а в виде суммы диаграмм с затравочными вершинами, но с одетыми линиями и „хвостиками“  $\beta_1$ . Подобные уравнения нетрудно вывести путем суммирования затравочных графиков  $\Sigma$ , но гораздо труднее показать, что полученная таким образом сумма графиков  $\Sigma$  действительно является вариационной производной по  $\beta_2$  от некоторого функционала, другими словами, что уравнение Дайсона является в действительности некоторым уравнением стационарности.

Возвращаясь к анализу диаграмм  $\Gamma$ , обсудим вопрос о коэффициентах при графиках. Прежде всего перепишем определение (10) для  $m = 2$ , выразив переменные  $\alpha$  через  $\beta$ :

$$\Gamma = W - A_1\beta_1 - A_2(\beta_2 + \beta_1^2)2. \quad (79)$$

Мы знаем (см. п. I.7.4), что функционал  $W$  есть сумма  $1/2 \cdot \text{tr} \ln \Delta$  и всех связанных графиков с линией  $\Delta$  и вершинами  $A_n$ ,  $n \neq 2$ . Напишем  $W = 1/2 \cdot \text{tr} \ln \Delta + 1/2 \cdot A_1\Delta A_1 + \bar{W}$ , выделив

из  $W$  график  $\frac{1}{2} \text{---} \text{---} = \frac{1}{2} A_1\Delta A_1$ , и подставим  $W$  в таком виде

в правую часть (79):

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{2} A_1\Delta A_1 - A_1\beta_1 - \frac{1}{2} A_2(\beta_2 + \beta_1^2) + \frac{1}{2} \text{tr} \ln \Delta - \frac{1}{2} \text{tr} \ln \beta_2 + \bar{W}. \quad (80)$$

Затравочные величины  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\Delta$  выразим через  $\beta$  с помощью (78):

$$A_1 = \beta_2^{-1}\beta_1 + 2\Gamma_2\beta_1 - \bar{\Gamma}_1, \quad A_2 = -\beta_2^{-1} - 2\Gamma_2,$$

$$\Delta = -A_2^{-1} = [\beta_2^{-1} + 2\bar{\Gamma}_2]^{-1} = \beta_2 - \beta_2 2\bar{\Gamma}_2 \beta_2 + \dots \quad (81)$$

Пользуясь этими формулами, нетрудно убедиться, что сумма трех первых слагаемых в правой части (80) равна

$$1/2 \cdot \text{tr} 1 + \beta_2 \bar{\Gamma}_2 + 1\text{-приводимые графики}. \quad (82)$$

Явный вид 1-приводимых графиков нас не интересует, поскольку мы собираемся отобразить 2-неприводимую часть (сокращенно

2-н. часть) равенства (80), другими словами, приравнять суммы 2-неприводимых графиков в обеих частях этого равенства. Все 2-, а тем более 1-приводимые графики при этом просто отбрасываются.

Собирая логарифмы в (80) и учитывая (81), получаем

$$-1 \cdot 2 \cdot \text{tr} \ln (\beta_2 \Delta^{-1}) = -1 \cdot 2 \cdot \text{tr} \ln (1 + 2\beta_2 \bar{\Gamma}_2). \quad (83)$$

Первый член в разложении логарифма является 2-неприводимым и в точности сокращает слагаемое  $\beta_2 \bar{\Gamma}_2$  в (82) (в наших обозначениях  $\beta_2 \bar{\Gamma}_2 = \text{tr} \beta_2 \bar{\Gamma}_2$ ), а все прочие члены в разложении логарифма (83) являются 2-приводимыми, так как они представляются графически в виде колец с собственно энергетическими вставками.

Эти рассуждения совместно с доказанной ранее 2-неприводимостью всех графиков  $\Gamma$  доказывают равенство  $\Gamma = 1/2 \cdot \text{tr} 1 +$  2-н. часть  $\bar{W}$ , в правой части которого затравочные величины  $A_1$  и  $\Delta$  предполагаются выраженными через  $\beta$  соотношениями (81). Ясно, что при отборе 2-н. части линию  $\Delta$  можно просто заменить на  $\beta_2$ , поскольку учет дополнительных слагаемых в выражении (81) для  $\Delta$  приводит к заведомо 2-приводимым графикам с собственно энергетическими вставками. По тем же причинам затравочный потенциал  $A_1$ , который входит в графики  $\bar{W}$  в виде вершины, соединенной одной линией  $\Delta$  с остальной частью графика, можно заменить просто на  $\beta_2^{-1} \beta_1$ . Окончательный результат можно записать следующим образом:

$$\Gamma = 1/2 \cdot \text{tr} 1 + 1/2 \cdot \text{tr} \ln \beta_2 + 2\text{-н. часть } \bar{W} (A_1 = \beta_2^{-1} \beta_1, \Delta = \beta_2). \quad (84)$$

Это равенство, являющееся аналогом (I.229) для первого преобразования, устанавливает взаимоднозначное соответствие между графиками  $\Gamma$  и 2-неприводимыми графиками  $\bar{W}$ . С его помощью мы можем строить графики  $\Gamma$ , не итерируя уравнение (75), а просто отбирая нужные графики в известном диаграммном разложении  $\bar{W}$ . Отметим, что при замене  $\Delta \rightarrow \beta_2$ ,  $A_1 \rightarrow \beta_2^{-1} \beta_1$  происходит ампутация линии, соединяющей в графиках  $\bar{W}$  вершину  $A_1$  с остальной частью диаграммы, т. е. после такой замены „хвостик”  $\beta_1$  будет присоединяться непосредственно к вершинам  $A_n$ ,  $n > 2$ , без промежуточной линии.

В сущности уравнение (75) нужно нам лишь постольку, поскольку с его помощью можно просто доказать 2-неприводимость всех графиков  $\Gamma$ . Без этого нам было бы трудно получить соотношение (84), но после того, как (84) получено, уже нет никакого смысла строить графики  $\Gamma$  итерациями уравнений движения. Напомним, что точно такую же роль играли уравнения движения и при анализе  $\bar{W}$  (доказательство связности), и при анализе первого преобразования Лежандра (доказательство 1-неприводимости).

**7. Приближение самосогласованного поля.** Как уже говорилось в п. I.8.3, для первого преобразования Лежандра простейшим является беспетлевое приближение (I.230), эквивалентное первому порядку теории возмущений по вершинам  $A_n$ ,  $n > 2$ , для функционала  $\Gamma$ . Именно оно используется в конкретных моделях при поиске аномальных решений для  $\beta_1$ . Аномалия состоит обычно в том, что  $\beta_1 \neq 0$ , тогда как симметрия теории требует  $\beta_1 = 0$ . Все релятивистские полевые модели со спонтанным нарушением типа  $\beta_1 = \langle 0 | \hat{\phi} | 0 \rangle \neq 0$  являются вариантами известной модели Голдстоуна [20]. Упомянем также модели Хиггса [67] и Киббла [68]. В этих работах показано, что безмассовое поле Янга — Миллса (в [67] группа абелева, в [68] произвольная), взаимодействующее с мультиплетом скалярных полей  $\varphi_a$ , приобретает массу при появлении аномальных средних  $\langle 0 | \varphi_a | 0 \rangle \neq 0$ .

Из нерелятивистских моделей такого типа наиболее важной в практическом отношении является квантовый бозе-газ (см. п. II.2.1), появление отличных от нуля аномальных средних для комплексного поля  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{\psi}^+$  приводит к сверхтекучести. Мы уже отмечали, что техника работы с аномальными средними типа  $\beta_1$  впервые была разработана [53] именно в связи с задачей о сверхтекучести гелия. Аналогичные релятивистские модели появились значительно позднее.

Следующей по сложности после  $\beta_1$  является аномалия в пропагаторе  $\beta_2$  и для ее изучения необходимо уже не первое, а второе преобразование Лежандра. Как правило, аномалии такого типа ищутся в „четных“, в частности, в фермионных теориях, для которых все функциональные переменные  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  с нечетными номерами равны нулю. В таких теориях было бы проще и естественнее с самого начала формулировать задачу на языке одних только четных переменных, что вполне можно сделать, исходя из приведенной в п. I.7.3 полной системы уравнений движения в четных переменных. Если же пользоваться обычной формулировкой п. I, в которой нечетные потенциалы  $A_n$  с  $n \leq t$  сначала считаются произвольными, то переход к четной теории осуществляется лишь в момент решения уравнений стационарности (11): нечетные потенциалы в этих уравнениях полагаются равными нулю и ищется решение с нулевыми значениями нечетных функций Грина  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . В частном случае второго преобразования первое из уравнений стационарности (78) при  $A_1 = 0$  имеет тривиальное решение:  $\beta_1 = 0$ , а второе совпадает с обычным уравнением Дайсона:  $\hat{\beta}_2^{-1} = \Delta^{-1} - \Sigma(\beta_2)$ , в котором собственная энергия  $\Sigma$  представлена в виде суммы диаграмм с одетыми линиями  $\beta_2$ . Разумеется, это верно как для бозонных, так и для фермионных теорий. При обобщении вариационной формулировки п. I на фермионную теорию все функциональные переменные с нечетными индексами следовало

бы, конечно, считать антикоммутирующими величинами фермионного типа, а четные переменные — величинами бозонного типа.

Аналогом беспетлевого приближения для первого преобразования Лежандра для второго преобразования будет приближение самосогласованного поля Хартри—Фока, в котором удерживаются лишь графики первого порядка по вершинам (т. е. по потенциалам  $A_n, n \geq 3$ ) в функционале  $\Gamma$ :

$$\Gamma|_{\text{сам. поле}} = \text{const} + 1/2 \cdot \text{tr} \ln \beta_2 + \sum_{n=3}^{\infty} A_n \alpha_n^{(2)}. \quad (85)$$

Входящая сюда сумма есть частное решение однородного уравнения Швингера (24) для  $m = 2$ , функции  $\alpha_n^{(2)}$  определены в п. 4. В приближении (85) уравнение (24) удовлетворяется точно, а уравнения связи (33), (35) — лишь в низшем порядке по вершинам. Для уравнений связи второй группы (35) низшим порядком является нулевой, и в данном приближении функции  $\alpha_n$  в правых частях (35) заменяются на  $\alpha_n^{(2)}$ , что равносильно отбрасыванию вкладов всех старших связанных функций  $\beta_k$  с  $k \geq 3$ .

Удержав в  $\Gamma$  конечное число графиков, мы можем построить повышающие операторы  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{D}_\gamma$  для связанных и 1-неприводимых функций соответственно (см. замечание в конце п. 3). Вследствие нелинейностей в выражениях (34), (56) в эти операторы войдут бесконечные диаграммные ряды даже при конечном числе графиков в  $\Gamma$ . Но было бы неверным утверждать, что полученные по формулам (15), (58) с приближенной операцией  $\mathcal{D}$  старшие функции  $\beta_n, \gamma_n$  как раз и будут соответственно связными и 1-неприводимыми функциями в данном приближении. Это означало бы незаконное превышение точности: перейдя ко второму преобразованию Лежандра, мы отказались тем самым от теории возмущений для  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , но это не касалось старших функций  $\beta_n, \gamma_n$  с  $n > 2$ . Последние все еще предполагаются представимыми в виде диаграммных рядов теории возмущений, хотя и с одетыми линиями  $\beta_2$  и хвостиками  $\beta_1$ . Строя эти функции с помощью повышающего оператора, мы получим достоверные ответы лишь до того порядка, до которого вычислен  $\Gamma$ , а в более высоких порядках мы получим только часть диаграмм, а не все. Отсутствие части диаграмм приведет к тому, что приближенные функции  $\beta_n, \gamma_n$  не будут даже полностью симметричными по своим аргументам  $x_1 \dots x_n$ .

Возвратимся теперь к приближению самосогласованного поля (85). В уравнении стационарности для пропагатора оно соответствует первому порядку теории возмущений в собственной энергии  $\Sigma$ . Для четной теории с единственной отличной от нуля вершиной  $A_4$  это уравнение имеет вид

$$\hat{\Gamma}^{-1} = \Delta^{-1} - \frac{1}{2} \mathcal{Q}. \quad (86)$$

В случае комплексного поля  $\varphi = (\psi, \psi^+)$  (например, для электронов) пропагаторы  $\Delta$  и  $\beta_2$  следует считать  $2 \times 2$ -матрицами, причем для нормального решения отличны от нуля лишь их недиагональные элементы, т. е. функции Грина  $\psi\psi^+$  и  $\psi^+\psi$ . Для сравнения с обычной формой приближения Хартри — Фока для функций Грина (см., например, [19]) отметим, что в случае парного взаимодействия (II.29) симметризованный потенциал  $A_4$  в (86) включает как прямой, так и обменный вклады. Отметим также, имея в виду теорию атома, что решение уравнения (86) всегда неоднозначно вследствие произвола в выборе знаков  $\pm i0$  в знаменателях пропагатора. Разному выбору соответствуют разные варианты заселения уровней. Энергия атома определяется значением варьируемого функционала в выбранной точке стационарности. В нулевом приближении эта величина пропорциональна  $\text{tr} \ln \Delta = \ln \det \Delta$  и для разных вариантов заполнения уровней принимает, естественно, разные значения (см. вычисление в конце п. V.1.11).

В теории сверхпроводимости ищется аномальное решение для  $\beta_2$  с отличными от нуля функциями Грина  $\psi\psi$  и  $\psi^+\psi^+$ , а (86) в этом случае совпадает с уравнениями Горькова [21]. Критерием устойчивости того или иного решения (точки стационарности) является правильная знакоопределенность второй вариации  $\Gamma$  в данной точке (подробнее см. п. 13). Это требует некоторой знакоопределенности от второй производной  $\Gamma_{22}$ , что эквивалентно знакоопределенности  $\Gamma_{22}^{-1}$ . В приближении самоогласованного поля обратное ядро  $\Gamma_{22}^{-1}$  представляется бесконечным рядом

$$= + \times + \times \times + \dots$$

(с точностью до коэффициентов), который превращается в прогрессию вида

$$\circ + \circ \circ + \circ \circ \circ + \dots \quad \text{при сворачивании}$$

каждой пары аргументов с функцией типа  $\delta(x-x')f(x)$ . По нарушению правильной знакоопределенности в такой прогрессии судят о неустойчивости решения [21]. Подчеркнем, что бесконечный ряд диаграмм возник лишь из-за перехода к обратному ядру.

В заключение упомянем феноменологическую теорию самоогласованного поля Гинзбурга — Ландау [69]. В этой теории постулируется, что искомое аномальное среднее („параметр порядка“) можно найти как точку стационарности некоторого функционала (что на языке вариационного принципа самоочевидно), и постулируется некоторая, в известном смысле simplest, форма этого функционала. При строгом подходе

варьируемый функционал следовало бы находить из микротеории — в этом вся разница.

**8. Третье преобразование Лежандра.** При анализе графиков третьего преобразования мы будем исходить из уравнения (73), которое при  $m = 3$  принимает вид

$$2 \Gamma_2 = -\gamma_2' + \sum_{k, n=1}^2 \text{diagram} - 2 \text{diagram} - 6 \text{diagram} \quad (87)$$

Различные блоки в правой части определены соотношениями (46) — (49).

Итерационное решение этого уравнения строится по общей схеме п. 5 без каких-либо принципиальных затруднений. Графики первых восьми порядков по числу линий в теории с вершинами  $A_3$  и  $A_4$  выглядят следующим образом:

$$\Gamma = \text{const} + \frac{1}{2} \text{tr} \ln \beta_2 + \frac{1}{24} \text{diagram} + \frac{1}{4} \text{diagram} + \frac{1}{8} \text{diagram} + \frac{1}{6} \text{diagram} - \frac{1}{12} \text{diagram} + \frac{1}{48} \text{diagram} + \frac{1}{8} \text{diagram} + \frac{1}{48} \text{diagram} + \frac{1}{24} \text{diagram} + \frac{1}{8} \text{diagram} + \frac{1}{728} \text{diagram} + \frac{1}{32} \text{diagram} + \frac{1}{8} \text{diagram} + \dots \quad (88)$$

В соответствии с общими правилами линии, „хвостики” и вершина с  $n = 3$  в этих графиках являются одетыми, а вершина с  $n = 4$  — затравочной.

Назовем  $k$ -сечением графика всякий набор  $k$  штук его линий, одновременный разрыв которых приводит к разделению графика на две несвязанные между собой части. Связность есть отсутствие 0-сечений, 1-неприводимость есть отсутствие 0- и 1-сечений, 2-неприводимость есть отсутствие 0-, 1- и 2-сечений. Начиная с  $k = 3$  неприводимость уже не имеет смысла определять как отсутствие всех  $s \leq k$ -сечений, поскольку, например, любой график с вершинами  $\gamma_3$  всегда имеет 3-сечения: наборы тех трех линий, которые соединяют вершину  $\gamma_3$  с остальной частью графика. Поэтому начиная с  $k = 3$  вводится понятие *нетривиального  $k$ -сечения* [52]: по определению сечение считается нетривиальным, если разрыв соответствующих линий приводит к разделению графика на две нетривиальные части. Для  $k = 3$  тривиальной считается часть, являющаяся простой верши-

ной  $\gamma_3 \equiv \text{diagram}$ , а при  $k = 4$  тривиальной считается, во-пер-

вых, простая вершина  $\gamma_4 \equiv \text{diagram}$ , во вторых, „борновский



график”  $\gamma_3 \beta_2 \gamma_3 \equiv \text{diagram}$ . Для  $k > 4$  тривиальная часть вклю-

чает уже бесконечное число графиков [66], но в этой книге мы будем иметь дело только с 3- и 4-неприводимостью.




Итак,  $k$ -неприводимость есть отсутствие нетривиальных  $s$ -сечений для всех  $s \leq k$ .

Рассматривая графики (88), нетрудно заметить, что все они являются 3-неприводимыми и первые из них получаются из (76) по следующему рецепту: 1) отбрасываются все 3-приводимые графики; 2) отбрасываются два *особых* 3-неприводимых

графика  , которые выделены тем, что произ-

водная от них по вершине несвязна; 3) изменяется знак при

графике  4) остальные графики (76) и коэффициенты

при них остаются неизменными, только вершину с  $n = 3$  следует теперь считать одетой, т. е.  $A_3 \rightarrow \gamma_3$ .

Эти правила справедливы в действительности для всех порядков теории возмущений. Чтобы сформулировать точное утверждение, выделим из  $W$  прообразы тех графиков, которые претерпевают существенные изменения:

$$w(A) = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \Delta + \frac{1}{2} \text{tr} \text{---} + \frac{1}{6} \text{tr} \text{---} + \frac{1}{2} \text{tr} \text{---} + \frac{1}{12} \text{tr} \text{---} + \bar{w}(A). \quad (89)$$

Тогда

$$\Gamma = \frac{1}{2} \text{tr} 1 + \frac{1}{2} \text{tr} \ln \beta_2 - \frac{1}{i_2} \text{---} + \text{3-н. часть } \bar{w}(A_1 \rightarrow \beta_2^{-1} \beta_1; \Delta \rightarrow \beta_2; A_3 \rightarrow \gamma_3). \quad (90)$$

Доказательство строится все по той же схеме: на первом этапе с помощью уравнений движения доказывается 3-неприводимость всех графиков  $\Gamma$ , а на втором этапе производится сравнение 3-неприводимых графиков  $\Gamma$  и  $W$  путем отбора 3-н. части равенства (10) для  $m = 3$ .

Этот путь не является единственно возможным — полный анализ графиков  $\Gamma$  можно выполнить, как это и было впервые сделано Доминиссом и Мартином [52], непосредственно из определений (9), (10). Для этого нужно подставить в (9) функционал  $W$  в виде диаграммного ряда, разрешить итерациями полученные уравнения относительно затравочных переменных  $A_n$ , представив их тем самым диаграммными рядами в одетых переменных, наконец, подставить полученные ряды для  $A_n$  в правую часть (10) и проверить, что все приводимые графики взаимно сокращаются. Точным аналогом такого доказательства для 0-неприводимости (т. е. связности) является прямая проверка компенсаций всех несвязных графиков в разложении  $\ln G(A)$ , эквивалентная приведенному в п. I.4.8 доказательству связности логарифма  $R(\varphi)$ .




необходимостью содержатся и такие графики, которые порождаются разрывом одной из линий 3-сечения, т. е. графики вида




с нетривиальными блоками. Мы будем называть

их *графиками с нетривиальным 2-сечением в прямом канале* или просто „*опасными*” *графиками*. Если мы сумеем доказать, что вычисленная в некотором приближении правая часть (87) не содержит опасных графиков, то отсюда будет следовать, что возникающие в процессе итераций графики следующего порядка являются 3-неприводимыми. Суть идеи проста: если бы не было компенсации графиков типа (91), то в правой части (87) с необходимостью присутствовали бы и графики с нетривиальным 2-сечением в прямом канале, и если мы убедились, что последних нет, то мы тем самым косвенно доказали взаимную компенсацию графиков типа (91).

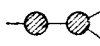
Доказывать будем, как всегда, по индукции: допустим, что все графики  $\Gamma$  вплоть до некоторого порядка являются 3-неприводимыми, и покажем, что построенная по этим графикам правая часть (87) не может содержать опасных графиков с нетривиальным 2-сечением в прямом канале, следовательно, графики следующего порядка также будут 3-неприводимыми.


Доказательство сводится к последовательному разбору вариантов. Например, допустим, что последний член в правой части (87) содержит опасный график вида . Ясно,

что это возможно лишь тогда, когда блок  $\Gamma_3 \equiv \delta\Gamma/\delta\gamma_3$  содержит

график типа . Но это противоречит предположению

о 3-неприводимости тех графиков, по которым вычислена производная  $\Gamma_3$ . Действительно, дифференцирование графика по  $\gamma_3$  эквивалентно вырыванию всеми возможными способами вершины  $\gamma_3$ , откуда ясно, что соединив вместе вершиной  $\gamma_3$  внешние линии производной  $\Gamma_3$ , мы возвращаемся с точностью до коэффициентов к исходным графикам. Если в производной  $\Gamma_3$  имеют

ся графики вида  то среди дифференцируемых гра-

фиков  $\Gamma$  должны быть графики вида , 2-приводимость

которых противоречит индукционному предположению.

Тем самым мы доказали, что последний член в правой части (87) не может содержать опасных графиков. Рассмотрим теперь предпоследний член. Он имеет 2-сечение, отделяющее блок



блоков, а вторая — другому. Но полное число возможных типов 2-сечений конечно, и результат будет один: присутствие опасных 2-сечений в правой части (87) противоречит предположению о 3-неприводимости графиков, из которых строятся входящие в (87) блоки. На этом мы будем считать доказательство 3-неприводимости законченным, отсылая интересующегося подробностями читателя к работе [63].

Вторая часть доказательства (90) — сравнение коэффициентов при 3-неприводимых графиках  $\Gamma$  и  $W$  — также совершенно стандартна: нужно отобразить 3-н. часть равенства (10) для  $m=3$ , выделив предварительно из  $W$  особые графики (89), а из  $\Gamma$  — слагаемое  $1/2 \cdot \text{tr} \ln \beta_2$  и выразив потенциалы  $A_1, A_2, A_3$  в правой части (10) через  $\Gamma$  с помощью уравнений стационарности (11).

Приведем без вывода обобщения соотношений (I.229), (84) и (90). При переходе от универсальных обозначений к обычным слагаемые типа  $\text{tr} \ln \Delta, \text{tr} \ln \beta_2$  войдут от каждого из полей, причем для фермионных составляющих — с обратным знаком. Если поле комплексное, а под пропагатором понимается функция Грина  $\psi\psi^+$ , то коэффициент при  $\text{tr} \ln$  удваивается. Например, для рассмотренного в п. I.4.6 взаимодействия Юкавы (включая квантовую электродинамику) вместо  $1/2 \cdot \text{tr} \ln \beta_2$  следует писать  $1/2 \cdot \text{tr} \ln \beta_2 - \text{tr} \ln \beta_2'$ , где  $\beta_2$  — пропагатор бозонного поля  $\varphi$ ,  $\beta_2'$  — фермионный пропагатор  $\psi\psi^+$ .

Правила построения графиков  $\Gamma$  обобщаются непосредственно: преобразование Лежандра содержит все неприводимые скелетные графики с обычными (как в  $W$ ) коэффициентами и знаками со следующими исключениями, касающимися только полностью одетых (т. е. не содержащих затравочных переменных) графиков. Во-первых, отбрасываются все неприводимые *особые* графики, имеющие несвязную производную по какой-нибудь из одетых переменных; во-вторых, изменяется знак при графиках, квадратичных по одетым вершинам.

**9. Четвертое преобразование.** Уравнение (73) для четвертого преобразования принимает вид [64]:

$$2\Gamma_2 = -\gamma_2^{-1} + \sum_{k,r=1}^3 \text{diagram} - \mathcal{X}, \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \mathcal{X} = & 2 \text{diagram} + 6 \text{diagram} + 3 \text{diagram} + 3 \text{diagram} + 12 \text{diagram} + \\ & + 12 \text{diagram} + 12 \text{diagram} + 6 \text{diagram} + 24 \text{diagram}. \end{aligned} \quad (94)$$

Получаемые при итерациях (93) графики первых восьми порядков по числу линий для теории с вершинами  $A_3$  и  $A_4$  имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma = & \text{const} + \frac{1}{2} \text{tr} \ln \beta_2 - \frac{1}{12} \text{diagram} - \frac{1}{48} \text{diagram} + \frac{1}{48} \text{diagram} + \\ & + \frac{1}{24} \text{diagram} + \frac{1}{8} \text{diagram} + \frac{1}{8} \text{diagram} - \frac{1}{128} \text{diagram} + \dots \end{aligned} \quad (95)$$

В такой теории четвертое преобразование — полное, поэтому  $\Gamma$  не зависит от  $\gamma_1 = \beta_1$ , а все вершины и линии в (95) будут одетыми.

Все графики (95), за исключением последнего, являются 4-неприводимыми, т. е. не имеют нетривиальных 4-поддиаграмм. Напомним, что для  $n = 4$  тривиальными считаются простая вершина

$\times$  и график  $\text{---} \times \text{---}$ .

Анализ свойств неприводимости графиков  $\Gamma$  производится точно так же, как и в предыдущих разделах. Предположив, что первые графики  $\Gamma$  являются 3-неприводимыми, и проверив, что вычисленная по этим графикам правая часть (93) не может

содержать опасных 2-сечений вида  $\text{---} \text{---} \text{---}$  с двумя нетри-

виальными (т. е. отличными от простой вершины  $\gamma_3$ ) блоками, мы докажем тем самым 3-неприводимость всех графиков  $\Gamma$ .

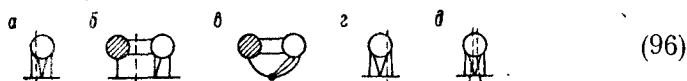
Последовательный анализ вариантов показывает, что в условиях индукционного предположения (3-неприводимость первых

графиков) блоки  $\text{---} \langle k | r \rangle \text{---}$  и первые пять слагаемых (94)

не могут содержать не только 2-, но и 3-сечений вида

$\text{---} \text{---} \text{---}$  с двумя нетривиальными блоками. Рассмотрим в

качестве примера пятое слагаемое (94) и предположим, что в нем имеется 3-сечение, показанное пунктиром в графике (96а) и более детально в графике (96б):



Согласно индукционному предположению диаграмма (96в), получаемая сведением в одну точку всех внешних линий производной  $\Gamma_4$ , должна быть 3-неприводимой, т. е. все ее 3-сечения должны быть тривиальными. Это значит, что заштрихованный блок в (96б, в) должен быть простой вершиной  $\gamma_3$ . Но тогда 3-сечение (96 б) не опасно, поскольку левый из отсекаемых бло-

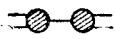
ков является тривиальным графиком  $\text{---} \times \text{---}$ .

Другие варианты 3-сечений данной диаграммы показаны в (96г, д). Сечение (96г) аналогично (96а), остается рассмотреть

лишь (96д). Это сечение предполагает наличие диаграмм вида




в производной  $\Gamma_4$ .

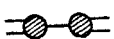
Из индукционного предположения о 3-неприводимости первых графиков следует, что оба блока диаграммы  должны быть тривиальными, поскольку блок



должен быть 3-неприводимым. Следовательно, единственной опасной диаграммой в производной  $\Gamma_4$

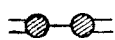
является график . Он является производной по  $\gamma_4$  от

графика пятого порядка , которого, как видно из

(95), нет в  $\Gamma$ . Следовательно, в производной  $\Gamma_4$  вообще нет опасных диаграмм вида , что и доказывает отсутствие


опасных 3-сечений в рассматриваемой диаграмме. Таким же способом можно доказать отсутствие опасных 3-сечений и для остальных членов в правой части (93), исключая последние четыре графика (94), к анализу которых мы и переходим.

Прежде всего обсудим возможность наличия в этих графиках опасных 2-сечений. Ясно, что они могут возникнуть лишь от


диаграмм вида  в производной  $\Gamma_4$ , которых, как

мы только что убедились, нет. Следовательно, в условиях индукционного предположения о 3-неприводимости первых графиков в правой части (93) не может быть диаграмм с опасными 2-сечениями, что доказывает 3-неприводимость всех графиков  $\Gamma$ .

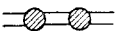
Переходя к 4-неприводимости, рассмотрим возможность наличия в последних четырех слагаемых (94) графиков с опасными 3-сечениями. Ясно, что они могут появиться лишь от графи-

ков вида  в производной  $\Gamma_4$ . Такие графики дей-

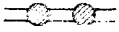
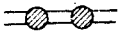
ствительно есть; в частности, приведенная в (95) диаграмма

шестого порядка дает в  $\Gamma_4$  вклад .

Если бы мы сделали индукционное предположение о 4-неприводимости, действительно справедливое для первых графи-

ков (95), то из него следовало бы только то, что блоки, входящие в опасные диаграммы  производной  $\Gamma_4$ , должны быть тривиальными. Когда речь шла о 3-неприводимости, опасная диаграмма с тривиальными блоками отсутствовала, но теперь это уже не так, — имеются следующие три 4-неприводимых графика

$$\frac{1}{4\delta} \text{ (circle with arrow) } + \frac{1}{\delta} \text{ (square with X) } + \frac{1}{\delta} \text{ (square with X) } , \quad (97)$$

которые порождают в  $\Gamma_4$  диаграммы вида , приводящие при подстановке в последние члены (94) к опасным 3-сечениям, следовательно, порождающие в следующем порядке 4-приводимые диаграммы. Последние в свою очередь также порождают вклады вида  в  $\Gamma_4$ , что приводит к появлению новых 4-приводимых диаграмм, и т. д.

Таким образом,  $\Gamma$  содержит бесконечное число 4-приводимых диаграмм, и задачу можно видеть лишь в том, чтобы полностью их охарактеризовать. Чтобы это сделать, отберем в обеих частях равенства (93) графики с опасным 3-сечением в прямом канале, которые, как мы знаем, могут содержаться лишь в четырех последних слагаемых (94):


$$2\Gamma_2|_3 = - \left\{ 12 \text{ (circle with arrow)} + 12 \text{ (circle with arrow)} + 6 \text{ (circle with arrow)} + 24 \text{ (circle with arrow)} \right\}_3 \quad (98)$$

Знак  $|_3$  указывает, что отбираются лишь графики нужного типа.

Подставив в правую часть (98) вклады графиков (97), найдем первые 4-приводимые диаграммы, а все остальные получим путем итераций уравнения (98).

Введем несимметричную вершину без внешних линий:

$$\gamma_2 = \text{ (circle with arrow) } = \text{ (X) } + \text{ (I) } + \text{ (X) } . \quad (99)$$

которая отличается от ампутированной функции  $\beta_4$  лишь отсутствием в прямом канале диаграммы . Учитывая полную




симметричность  $\Gamma_4$ , уравнение (98) можно тогда переписать в виде

$$\Gamma_2|_3 = -3 \left[ \text{diagram} \right]_3. \quad (100)$$

Рассмотрим первые шаги итерационной процедуры. Взяв  $\Gamma$  в виде суммы трех графиков (97), находим производную  $\Gamma_4 \equiv \delta\Gamma/\delta\gamma_4$ :

$$\Gamma_4 = \left\{ \frac{1}{16} \times \text{diagram} + \frac{1}{4} \times \text{diagram} + \frac{1}{8} \times \text{diagram} \right\}_{\text{sym}}, \quad (101)$$

где  $\text{sym}$  обозначает полную симметризацию по аргументам 1—4. При подстановке (101) в (100) нужно удерживать лишь те вклады в  $\Gamma_4$ , которые имеют опасное 2-сечение вида .

Например, после симметризации

$$\text{diagram}|_{\text{sym}} = \frac{1}{3} \times \text{diagram} + \frac{1}{3} \times \text{diagram} + \frac{1}{3} \times \text{diagram} \quad (102)$$

нужно удерживать лишь первое слагаемое в правой части. Для второго из графиков (101) опасное 2-сечение имеется, как и в (102), лишь в одном канале из трех, а для последнего графика (101) — в двух каналах из трех. Поэтому „опасная часть” (101) представляется в виде

$$\left\{ \frac{1}{16 \cdot 3} \times \text{diagram} + \frac{1}{4 \cdot 3} \times \text{diagram} + \frac{2}{8 \cdot 3} \times \text{diagram} \right\}_{\text{sym}} = \frac{1}{4 \cdot 8} \times \text{diagram}, \quad (103)$$

где  $\text{Sym}$  обозначает уже не полную симметризацию по аргументам 1—4, а частичную симметризацию, характерную для ядра (99):  $1 \rightleftharpoons 2$ ,  $3 \rightleftharpoons 4$ ,  $(12) \rightleftharpoons (34)$ . Подставив затем (103) в (100), получаем равенство

$$\Gamma_2|_3 = -\frac{1}{16} \times \text{diagram}. \quad (104)$$

которое должно определить первые 4-приводимые графики  $\Gamma$ .

Ясно, что правую часть (104) можно получить дифференцированием по  $\gamma_2$  восьми кольцевых линий диаграммы

$$-\frac{1}{16 \cdot 8} \times \text{diagram} \quad (105)$$



ны  $\gamma_4$  и поэтому не участвует в последующих итерациях), получаем

$$\Gamma_4 = -\frac{4}{16 \cdot 8} \left[ \text{diagram} \right]_{\text{sym}} \quad (108)$$

При подстановке этого выражения в (100) следует учесть, что к опасным графикам приводит лишь один из трех каналов (108), так что в этом приближении

$$\Gamma_2|_3 = \frac{1}{32} \left[ \text{diagram} \right],$$

откуда видно, что в данном приближении 4-приводимая часть  $\Gamma$  имеет вид кольца с пятью „перекладинами”  $\gamma_{22}$  с коэффициентом  $1/32 \cdot 10$ . На следующем шаге итераций получим кольцо с шестью „перекладинами”, и т. д. Окончательный результат:

$$\text{4-я часть } \Gamma = \frac{1}{48} \left[ \text{diagram} \right] + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 2^{n+1}} \left[ \text{diagram} \right] \quad (109)$$

Коэффициенты при кольцах соответствуют ряду логарифма, так что сумму колец можно записать компактно в виде  $1/2 \cdot \text{tr} \ln_3(1 + \gamma_{22} \beta_2^2/2)$ , где  $\ln_3$  обозначает логарифм без трех первых членов своего ряда.

Анализ 4-неприводимых графиков  $\Gamma$  производится, как обычно, отбором 4-н. части равенства (10). Мы приведем лишь результат:  $\Gamma$  содержит все 4-неприводимые графики функционала  $W(A_1 \rightarrow \beta_2^{-1} \gamma_1, \Delta \rightarrow \beta_2, A_3 \rightarrow \gamma_3, A_4 \rightarrow \gamma_4)$  со своими коэффициентами, исключая *особые графики*, которые имеют несвязные или 1-приводимые производные по какой-нибудь из переменных

$\gamma_i$ . Это, во-первых, график  $\text{---} \text{---} \text{---} = \gamma_1 \beta_2^{-1} \gamma_1$ , получаемый указанной в аргументах  $W$  заменой из графика  $\text{---} \text{---} = A_1 \Delta A_1$ .

Во-вторых, это особые 4-неприводимые графики

$$\left[ \text{diagram} \right], \left[ \text{diagram} \right], \left[ \text{diagram} \right], \left[ \text{diagram} \right], \left[ \text{diagram} \right], \left[ \text{diagram} \right],$$

имеющие несвязную производную по одной из вершин  $\gamma_3$  или  $\gamma_4$ ,

и график  $\left[ \text{diagram} \right]$ , имеющий 1-приводимую производную по  $\gamma_4$ .

В отношении коэффициентов исключениями являются квадратичные по вершинам графики  $\ominus$  и  $\odot$ , которые входят в

$\Gamma$  со знаком минус, тогда в  $\mathcal{W}$  все графики входят со знаком плюс. Отметим, что точно такие же „правила исключений” действовали и для всех низших преобразований Лежандра.

Отметим также, что эти правила, равно как и утверждение (109), справедливы для всех теорий с любым числом отличных от нуля потенциалов  $A_n$ .\*

**10. Уравнения стационарности, перенормировка, паркетные графики.** В соответствии с общей схемой п. 1 при известном  $\Gamma$  конкретные значения функций Грина ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ), соответствующие заданным потенциалам  $A$ , находятся путем решения уравнений стационарности (11). Для полного преобразования потенциалы входят лишь в правые части этих уравнений, а сам функционал  $\Gamma$  от  $A$  не зависит.

В § 1.9 было показано, что ренормировочное преобразование поля эквивалентно преобразованию (1.238) функционала действия и нормировочного коэффициента при функциональном интеграле (8). Коэффициент меняет лишь аддитивную нормировочную постоянную в функционалах  $\mathcal{W}$  и  $\Gamma$ , которая несущественна в уравнениях стационарности (11), содержащих лишь производные  $\Gamma$  (подробнее о ренормировочном преобразовании  $\Gamma$  с учетом аддитивных постоянных см. следующие разделы). Таким образом, в уравнениях стационарности ренормировочное преобразование сводится лишь к изменению их правых частей: если в качестве  $A_n$  подставляются исходные затравочные потенциалы, то решением будут соответствующие этим потенциалам функции Грина, а если в качестве  $A_n$  подставляются преобразованные (ренормированные) потенциалы, то решением будут преобразованные (ренормированные) функции Грина. Сами по себе графики  $\Gamma$  и его производных по одетым переменным в левых частях (11) не изменяются.

Если брать  $\Gamma$  в виде диаграммного ряда и решать уравнения (11) итерациями, строя искомые функции Грина в виде рядов

---

\* Это полезно иметь в виду даже при изучении теории с нулевыми  $A_n$  для  $n > 4$ . Вышние ( $n > 4$ ) потенциалы можно ввести на промежуточном этапе, а затем положить их равными нулю. Тогда можно просто получить представления скелетными графиками для высших функций  $\beta_n$ , отбирая связную часть производной  $\delta\Gamma/\delta A_n = \alpha_n$ . В этих представлениях все скелетные графики будут 4-неприводимыми (т. е. не имеющими нетривиальных 1-, 2-, 3- и 4-поддиаграмм), так как приводимая часть  $\Gamma$  (109) не содержит высших потенциалов  $A_n$  с  $n > 4$  и поэтому не дает вклада в производные по этим потенциалам. При построении высших функций  $\beta_n$  с помощью повышающего оператора (56) неприводимость получающихся диаграмм заранее совсем не очевидна.

по затравочным вершинам, то мы придем, конечно, к обычным диаграммным разложениям теории возмущений. В теориях с локальными потенциалами можно очень просто избавиться от всех затравочных и ренормировочных констант в уравнениях (11), сделав в них нужное число вычитаний так, чтобы обратить в нуль их правые части. В результате получим замкнутые уравнения, которым удовлетворяют как неренормированные, так и ренормированные функции Грина. Итерируя эти уравнения должным образом, придем к диаграммным рядам ренормированной теории возмущений; ренормированные параметры в решении появятся как вычитательные константы.

Рассмотрим подробнее случай теории с четырьмя потенциалами  $A_1 \dots A_4$ , для простоты предположив ее четной:  $A_1 = A_3 = 0$ . Для такой теории четвертое преобразование полное, а уравнения стационарности (11) всегда имеют четное решение с  $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ , так как  $\Gamma$  четен по этим переменным (от  $\gamma_1$  полное преобразование вообще не зависит). Именно это нормальное четное решение мы и будем сейчас рассматривать, отвлекаясь от моделей типа [20] со спонтанным нарушением симметрии  $\Phi \rightarrow -\Phi$ .

Ввиду инвариантности условия стационарности по отношению к любым заменам переменных уравнения (11) можно записать в виде  $\delta\Phi/\delta\gamma_k = 0$ , где  $\Phi$  — функционал (12). В интересующем нас случае содержательными будут лишь два уравнения стационарности, а именно

$$\Gamma_4 + A_4 \frac{\delta\alpha_4}{\delta\gamma_4} = 0, \quad \Gamma_2 + A_2 \frac{\delta\alpha_2}{\delta\gamma_2} + A_4 \frac{\delta\alpha_4}{\delta\gamma_2} = 0, \quad (110)$$

где, как обычно,  $\Gamma_k \equiv \delta\Gamma/\delta\gamma_k$ . Из определений  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  нетрудно получить  $\delta\alpha_4/\delta\gamma_4 = \beta_2^4/24$ , следовательно,

$$-A_4 = 24 \Gamma_4 \beta_2^{-4} = 24 \text{ (111)}$$

Блок в правой части обозначает производную  $\Gamma_4$  с ампутированными внешними линиями. Второе из уравнений стационарности (110) определяет собственную энергию  $\Sigma = \Delta^{-1} - \beta_2^{-1}$  как функционал от одетых переменных  $\beta_2$  и  $\gamma_4$ . Оно эквивалентно обычному уравнению Швингера для  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \frac{1}{\delta} \text{ (diagram)} + \frac{1}{2} \text{ (diagram)}. \quad (112)$$

в котором помеченные стрелками затравочные вершины  $A_4$  предполагаются выраженными в переменных  $\beta_2$ ,  $\gamma_4$  посредством соотношения (111).

Равенство (111) представляет  $A_4$  скелетными графиками

$$-A_4 = -X + \frac{3}{2} \left\{ \text{diagram 1} - \frac{1}{2} \text{diagram 2} + \frac{1}{4} \text{diagram 3} - \dots \right\}_{\text{sym}} + \frac{1}{24} \text{diagram 4} + \dots, \quad (113)$$

где  $\text{sym}$  обозначает полную симметризацию по аргументам 1—4. Первое слагаемое в правой части — вершина  $\gamma_4$  — порождается

графиком  $\bigcirc$ , первое слагаемое в фигурных скобках порож-

дается первым из 4-неприводимых графиков (97), остальные слагаемые — 4-приводимыми графиками (109). Отметим, что в четной теории ядро (99) совпадает с  $\gamma_4$ . Следующие за фигурной скобкой в (113) слагаемые представляют вклад 4-неприводимых графиков  $\Gamma$  выше шестого порядка по числу линий. В четной теории первым из таких вкладов является приведенный в (113) „незапечатанный конверт”, которому в  $\Gamma$  соответствует полный граф с пятью вершинами. Напомним, что *полным называют граф, в котором любая пара вершин соединена одной линией*. Группа симметрии полного графа содержит все перестановки его  $n$  вершин, симметричное число равно  $n!$ .

Таким образом, с помощью функциональных преобразований Лежандра можно автоматически получать представления типа *полная вершина есть затравочная вершина плюс сумма скелетных графиков*, причем явное определение приводимой части  $\Gamma$  содержит решение комбинаторной задачи перекрывания в вершинах, поскольку именно приводимая часть  $\Gamma$  и только она порождает в правой части (113) и аналогичных ему уравнений графики с нетривиальными вершинными поддиаграммами. Перекрывание в вершине появляется начиная с  $n = 4$ , поэтому в третьем преобразовании Лежандра и не было 3-приводимой части.

Решая уравнение (113) итерациями, мы представим одетую вершину  $\gamma_4$  в виде суммы графиков с затравочными вершинами. Если в (113) отбросить вклады всех нетривиальных 4-неприводимых диаграмм, то получим уравнение паркетного приближения (прогрессия в фигурной скобке (113) после симметризации входит с коэффициентом  $1/2$  в каждый из трех каналов). Итерации этого уравнения правильно воспроизводят все паркетные графики  $\Gamma$  вместе с коэффициентами. Паркетным называется график, минимальными 4-поддиаграммами которого являются

только  $X$  и  $\text{diagram 1}$ ; минимальной 4-поддиаграммой назы-

вается та, которая не содержит внутри себя других 4-поддиаграмм. Отметим, что в литературе паркетными часто называют

(см., например, [71]) и другие уравнения, воспроизводящие не все паркетные графики, а только некоторую их часть, которая дает главный вклад в том или ином приближении.

В релятивистской теории поля с взаимодействием  $\lambda \int dx \varphi^4(x)$  потенциал  $A_4$  имеет вид  $i \lambda \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3) \times \times \delta(x_3 - x_4)$ . Перейдя в (113) к импульсному представлению и сделав одно вычитание, мы обратим в нуль левую часть; в уравнении для собственной энергии (112) затравочный потенциал  $A_2 = -\Delta^{-1}$  устраняется двумя вычитаниями. Итерационное решение полученных уравнений приведет к рядам ренормированной теории возмущений. Одно вычитание в уравнении (113) не устраняет перекрывающихся расходимостей, которые имеются в графиках с нетривиальными вершинными поддиаграммами, но в процессе итерационного решения перекрывающиеся расходимости разных графиков будут взаимно компенсироваться в каждом порядке теории возмущений.

**11. Свойства симметрии полного преобразования Лежандра, „спонтанное взаимодействие“.** Рассмотрим определенную в § 1.9 группу ренормировочных преобразований поля  $\varphi$ , т. е. совокупность всех линейных неоднородных преобразований вида  $\varphi = Z\varphi' + c$  с отличным от нуля якобианом  $D\varphi/D\varphi' = \det Z$ .

Пусть  $A(\varphi)$  — ряд (7) с добавленным нулевым потенциалом  $A_0$ . Равенство  $A(\varphi) = A'(\varphi')$  определяет индуцированное преобразование потенциалов  $A \rightarrow A'$ . Для полиномиальной теории с конечным числом отличных от нуля потенциалов преобразование  $A \rightarrow A'$  не меняет степени полинома. Сделав замену переменной интегрирования в (8), получим  $G(A) = G(A') \det Z$ , откуда  $W(A) = W(A') + \text{tr} \ln Z$ .

Пусть  $\Gamma(\alpha)$  — преобразование Лежандра  $W(A)$  по всем потенциалам  $A$ . Константа  $A_0$  входит в  $W(A)$  аддитивно, так что сопряженная переменная  $\alpha_0 = \partial W / \partial A_0$  тождественно равна единице. В правой части (10) константа  $A_0$  сокращается.

Преобразование потенциалов  $A \rightarrow A'$  индуцирует преобразование сопряженных переменных  $\alpha$ :  $\alpha(A) \rightarrow \alpha(A') \equiv \alpha'(A)$ . Пользуясь (8), (9), нетрудно убедиться, что  $\alpha \rightarrow \alpha'$  есть обычное ренормировочное преобразование полных функций Грина без вакуумных петель (см. § 1.9), а индуцированные преобразования  $\beta \rightarrow \beta'$ ,  $\gamma \rightarrow \gamma'$  являются ренормировочными преобразованиями связанных и 1-неприводимых функций Грина соответственно:  $\beta'_1 = Z^{-1}(\beta_1 - c)$  и  $\beta'_n = (Z^{-1})^n \beta_n$ ,  $\gamma'_n = (Z^T)^n \gamma_n$  для  $n > 1$ . Определенные соотношением (69) вершины  $\bar{\gamma}_n$  инвариантны по отношению к ренормировочным преобразованиям, если определить ренормировочное преобразование величины  $\beta_2^{1,2} \equiv \lambda$  формулой  $\lambda' = \lambda Z^{-1T}$ , совместной с определением  $\beta_2 = \lambda^T \lambda$  и законом преобразования  $\beta'_2 = (Z^{-1})^2 \beta_2 = Z^{-1} \beta_2 Z^{-1T}$ . Тогда  $\bar{\gamma}'_n = (\lambda Z^{-1T})^n \times \times (Z^T)^n \gamma_n = \bar{\gamma}_n$ , что и утверждалось.

Рассмотрим теперь преобразование  $\Gamma(\alpha)$ . Величина

$$\sum_n A_n \alpha_n = \sum_n A_n \delta W / \delta A_n = \int D\varphi A(\varphi) \exp A(\varphi) / \int D\varphi \exp A(\varphi) \quad (114)$$

явно инвариантна по отношению к преобразованиям  $A \rightarrow A'$ . Считая в определении (10) независимыми переменными  $\alpha$ , учитывая (114) и полученную ранее формулу преобразования  $W$ , нетрудно показать, что  $\Gamma(\alpha') = \Gamma(\alpha) - \text{tr} \ln Z$ . К тому же выводу можно прийти иначе: в п. 4 было показано, что для полного преобразования Лежандра функционал  $\Gamma$  не зависит от  $\gamma_1 = \beta_1$  и представим в виде  $1/2 \cdot \text{tr} \ln \beta_2 + F(\bar{\gamma})$ , где  $F$  — функционал от инвариантных вершин (69). При ренормировочном преобразовании вершины  $\bar{\gamma}$  не меняются, а  $\text{tr} \ln \beta_2$  заменяется на  $\text{tr} \ln \beta_2' = \ln \det [Z^{-1} \beta_2 Z^{-1}] = \text{tr} \ln \beta_2 - 2 \text{tr} \ln Z$ .

Из полученных выше формул преобразования следует, что функционалы  $W$  и  $\Gamma$  инвариантны по отношению к тем ренормировочным преобразованиям, которые имеют единичный якобиан  $D\varphi/D\varphi' = \det Z$  (преобразования из группы движений поля  $\varphi$  в терминологии п. 1.7.3). К числу таких преобразований относятся трансляции, отражения и вращения поля  $\varphi$ ; сюда же относятся и калибровочные преобразования.

Искомые функции Грина определяются как точки стационарности функционала  $\Phi(\alpha; A) = \Gamma(\alpha) + \sum_n A_n \alpha_n$  по отношению к вариациям  $\alpha$  при фиксированных  $A$ . Функционал  $\Phi$  всегда инвариантен по отношению к одновременным преобразованиям  $A \rightarrow A'$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha'$  с  $\det Z = 1$ , но инвариантность по отношению к преобразованиям  $\alpha \rightarrow \alpha'$  при фиксированных  $A$  будет иметь место лишь тогда, когда потенциалы  $A$  сами инвариантны, т. е. тогда, когда  $A_n' = A_n$  для всех  $n$ . Инвариантность потенциалов эквивалентна инвариантности функционала действия по отношению к рассматриваемому преобразованию поля  $\varphi$ . В этом случае  $\Phi(\alpha; A) = \Phi(\alpha'; A') = \Phi(\alpha'; A)$ , и если не происходит спонтанное нарушение симметрии, то точка стационарности  $\alpha \equiv \alpha(A)$  также будет инвариантной, т. е.  $\alpha' = \alpha$ .

Обсудим теперь кратко так называемую „теорию без затравок“. Допустим, что все потенциалы  $A_n$  в (11) положены равными нулю, другими словами, вариационным методом ищутся функции Грина для теории с нулевым функционалом действия. Искомые функции Грина определяются тогда точкой стационарности функционала  $\Gamma = 1/2 \cdot \text{tr} \ln \beta_2 + F(\bar{\gamma})$ . Условие стационарности инвариантно по отношению к выбору независимых переменных; беря в качестве таковых  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\gamma$ , получаем

$$\delta\Gamma/\delta\beta_1 = 0; \quad \delta\Gamma/\delta\beta_2 = 1/2 \cdot \beta_2^{-1} = 0; \quad \delta F/\delta\gamma_n = \bar{0}. \quad (115)$$

Первое из этих уравнений является тождеством, так как  $\Gamma$  от



$\beta_1$  не зависит, а второе имеет формальное решение  $\beta_2 = \infty$ , откуда ясно, что функционал  $\Gamma$  при конечных  $\beta$  вообще не имеет точек стационарности, и нетривиальной теории с нулевым действием не существует.

Рассмотрим теперь теорию с отличными от нуля потенциалами  $A_1$  и  $A_2$ , но без взаимодействия:  $A_n = 0$  для всех  $n \geq 3$ . В этом случае

$$\Phi(\alpha; A) = \text{const} + \frac{1}{2} \text{tr} \ln \beta_2 + F(\bar{\gamma}) + A_1 \beta_1 + \frac{1}{2} A_2 (\beta_2 + \beta_1^2), \quad (116)$$

а условия стационарности в переменных  $\beta_1, \beta_2, \bar{\gamma}$  принимают вид

$$A_1 + A_2 \beta_1 = 0; \quad \beta_2^{-1} + A_2 = 0; \quad \delta F(\bar{\gamma}), \delta \bar{\gamma}_n = 0. \quad (117)$$

Первые два уравнения легко решаются:  $\beta_2 = -A_2^{-1} = \Delta$ ,  $\beta_1 = \Delta A_1$ . Это решение совпадает с функциями Грина свободной теории, так что можно сказать, что даже если последние уравнения (117) имеют нетривиальные решения с  $\bar{\gamma} \neq 0$ , то возникновение этого „спонтанного взаимодействия” никак не отражается на двух первых связанных функциях Грина, которые остаются точно такими же, как и в свободной теории. На это свойство спонтанного взаимодействия было указано в работе [16].

Уравнения  $\delta F / \delta \bar{\gamma}_n = 0$ , определяющие вершины спонтанного взаимодействия, являются типичными „уравнениями без затравок”, которые часто обсуждались в связи с проблемой скэйлинга (см., например, [72—74]) и по иным поводам („полный бутстрап”). Здесь стоит, по-видимому, отметить, что хотя подобные уравнения обладают очень высокой симметрией, было бы опасно делать отсюда какие-либо заключения о симметрии их решений, если таковые вообще имеются.\* Дело в том, что при очень высокой симметрии спонтанное ее нарушение скорее правило, чем исключение. Существуют группы симметрии, которые всегда будут спонтанно нарушенными просто потому, что для таких групп в пространстве переменных  $\alpha$  вообще нет неподвижных, т. е. инвариантных, точек. Простым примером являются преобразования, индуцированные трансляцией  $\phi \rightarrow \phi + c$  поля  $\phi$ . Можно привести и более интересный пример подобной группы.

Напомним, что функционал  $F(\bar{\gamma})$  представляется в виде суммы графиков типа вакуумных петель с одетыми линиями и

---

\* Если заменить все функциональные аргументы числами, а функциональный интеграл (8) — обычным интегралом, то мы приходим к так называемой *нульмерной теории*, которая правильно воспроизводит число графиков, но не различает их величины. В такой теории функциональные преобразования становятся числовыми, и аномальных решений заведомо нет, так как исследуемые функции строго выпуклы.

вершинами. Каждый такой график является простым „полиномом” по инвариантным вершинам. Например:

$$\Leftrightarrow = \int \int \int dx_1 dx_2 dx_3 \bar{\gamma}_3(x_1, x_2, x_3) \bar{\gamma}_3(x_1, x_2, x_3). \quad (118)$$

Рассмотрим произвольное преобразование  $x' = f(x)$  с отличным от нуля якобианом  $J_f(x) = dx'/dx$ , не меняющее области интегрирования в (118). Множество таких преобразований образует группу „всех координатных преобразований”; для четырехмерных  $x$  она содержит в качестве подгруппы группу Пуанкаре.

Сделав в (118) замену  $x_i \rightarrow x'_i$  всех аргументов, видим, что график (118) инвариантен по отношению к преобразованию  $\bar{\gamma}_3 \rightarrow \bar{\gamma}'_3$ , где по определению

$$\bar{\gamma}'_n(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^n [J_f(x_i)]^{1/2} \bar{\gamma}_n(f(x_1) \dots f(x_n)). \quad (119)$$

Очевидно, что по отношению к таким преобразованиям инвариантен любой график, а потому и сам функционал  $F(\bar{\gamma})$ ; пользуясь терминологией теории относительности, можно сказать, что уравнения без затравок (117) являются общековариантными. Однако ясно, что отличные от нуля решения этих уравнений, если они существуют, не могут быть инвариантными, потому что инвариантных по отношению ко всем преобразованиям (119) функций  $\bar{\gamma}_n \neq 0$  вообще не существует.\* Это значит, что симметрия, выражающаяся в общей ковариантности функционала  $F(\bar{\gamma})$ , всегда будет спонтанно нарушенной.

Группу всех координатных преобразований можно, конечно, сократить до какой-нибудь подгруппы, достаточно узкой, чтобы иметь неподвижные точки в пространстве переменных  $\bar{\gamma}$ , и в этом случае предположение о симметрии решения уже не будет формально противоречивым. Так в сущности и сделано в работах [72—74], посвященных обоснованию гипотезы подобия в статистической физике, которая на языке вершин  $\bar{\gamma}$  формулируется как инвариантность по отношению к подгруппе преобразований (119), индуцированных масштабными растяжениями  $x' = \lambda x$  (см. также [47]). Предполагается, что в точке фазового перехода можно пренебречь затравочными потенциалами в уравнениях, и затем та или иная симметрия уравнений (например, масштабная или конформная) автоматически переносится на их решения.

---

\* Если исключить из рассмотрения явно не подходящие по своей структуре симметризованные  $\delta$ -образные произведения вида  $\delta(x_1 - x_2) \delta(x_3 - x_4) \dots$  с четным числом аргументов  $x$ . На существование таких „общековариантных” функций обратил мое внимание А. А. Андрианов.

Но если принимать во внимание сверхвысокую симметрию „уравнений без затравок”\*, то любое суждение о совместности той или иной группы симметрии с уравнениями обесценивается — таких групп сколько угодно, но заранее известно, что большинство из них будут спонтанно нарушенными. Всякое предположение об инвариантности решения (если оно вообще существует) должно опираться на какие-либо аргументы, поясняющие, почему именно эта симметрия не будет спонтанно нарушенной.

**12. Энергия основного состояния.** Согласно определениям п. 1 в псевдоевклидовой теории  $A(\varphi) = iS(\varphi)$ , где  $S$  — функционал действия. Рассматривая преобразования Лежандра, мы сначала считаем потенциалы  $A_n$  произвольными симметричными функциями. Однако на практике нас всегда интересуют теории с потенциалами лагранжевого типа, т. е. такими, для которых функционал действия представляется в виде интеграла по времени от некоторого вещественного  $t$ -локального функционала — лагранжиана. В отсутствие нестационарных внешних полей лагранжиан не зависит явно от времени, т. е. потенциалы  $A_n$  инвариантны по отношению к временным трансляциям. Если эта симметрия не нарушается спонтанно, что мы предположим, то таким же свойством будут обладать и все функции Грина.

Согласно общим правилам п. 1.6.5 интеграл (8) пропорционален вакуумному ожиданию  $S$ -матрицы, а эта величина связана соотношением (1.74) со сдвигом энергии основного состояния. Следовательно,

$$W(A) - W_0 = -i\varepsilon(A) \int dt, \quad (120)$$

где  $W_0$  — значение  $W(A)$  для теории, которую мы считаем свободной,  $\varepsilon(A)$  — разность энергий основного состояния для полной и свободной теорий. Отметим, что вследствие трансляционной инвариантности по времени обе величины  $W$ ,  $W_0$  пропорциональны  $\int dt$ , так что этот бесконечный множитель в (120) сокращается.

Из п. 1.7.4 мы знаем, что  $W(A)$  есть сумма  $A_0 + 1/2 \cdot \text{tr} \ln \Delta$  и всех связанных графиков с линией  $\Delta = -A_2^{-1}$  и вершинами  $A_n$ ,  $n \neq 0, 2$ . Если в качестве свободной берется теория с нулевыми вершинами  $A_n$ ,  $n \neq 0, 2$ , то  $W_0 = A_0 + 1/2 \cdot \text{tr} \ln \Delta$ , и в левой части (120) эти вклады сокращаются.

В рамках вариационного подхода величину  $W(A)$  можно находить как значение варьируемого функционала (12) в точке стационарности  $\alpha = \alpha(A)$ :

$$W(A) = A_0 + \Gamma - \sum_{n=1}^m \alpha_n \delta \Gamma / \delta x_n. \quad (121)$$

\* Отметим, что функционал  $F(\bar{\gamma})$  инвариантен и по отношению к преобразованиям  $\bar{\gamma}_n \rightarrow u^n \bar{\gamma}_n$ , где  $u$  — произвольная ортогональная ( $u^T u = 1$ ) операция.

Мы учли добавку константы  $A_0$  к (7) и воспользовались уравнениями стационарности (11), чтобы выразить затравочные переменные  $A_n$  через одетые переменные  $\alpha$ .

Формула (121) содержит решение нетривиальной комбинаторной задачи пересуммирования затравочных вакуумных петель (диаграмм  $W(A)$ ) в скелетные, причем „степень одевания” определяется порядком используемого преобразования Лежандра. Если  $\Gamma$  — полное преобразование, то в правой части (121) исключены все потенциалы  $A_n$ ,  $n \neq 0$ , и величина  $W(A)$  выражается только через  $\alpha$ , т. е. через функции Грина теории.

При практическом использовании соотношения (121) желательно перейти в нем от несвязных переменных  $\alpha$  хотя бы к связным переменным  $\beta$ . Сумму по  $n$  в правой части (121) можно переписать в виде  $\sum_k a_k \Gamma_k$ , где  $\Gamma_k \equiv \delta \Gamma / \delta \beta_k$  и  $a_k = \sum_n \alpha_n \delta \beta_k / \delta \alpha_n$ . Пользуясь формулами п. 2, нетрудно показать, что  $a_k = -\partial^k \alpha^{-1}(\varphi) / \partial \varphi^k |_{\varphi=0}$ , где  $\alpha(\varphi) = \exp \beta(\varphi)$  — функционал (16).

Отсюда ясно, что коэффициенты  $a_k$  совпадают с полными функциями без вакуумных петель, в которых изменен знак при всех слагаемых, содержащих четное число связных множителей  $\beta$ :  $a_1 = \beta_1$ ,  $a_2 = \beta_2 - \beta_1^2$ ,  $a_3 = \beta_3 - 3\beta_2\beta_1 + \beta_1^3$  (симметризация по аргументам  $a_k$  подразумевается), и т. д.

В случае полного преобразования  $\Gamma$  не зависит от первой связной функции  $\beta_1$ , которая входит лишь в коэффициенты  $a_k$ . Всю зависимость от  $\beta_1$  можно выделить явно, выполнив ренормировочное преобразование  $\varphi = \varphi' + \beta_1$ . Оно индуцирует преобразование  $A(\varphi) = A'(\varphi')$  потенциалов  $A$  в функционале (7), а величина  $W$  при этом не изменяется (см. предыдущий раздел):  $W(A) = W(A')$ . Значение  $W(A')$  можно вычислить по формуле (121), заменив в ней все величины преобразованными:  $A_0 \rightarrow A'_0$ ,  $\alpha \equiv \alpha(A) \rightarrow \alpha(A') \equiv \alpha'$ , где  $A'_0 = A(\beta_1)$  — преобразованный нулевой потенциал и  $\alpha'$  — преобразованные функции Грина. Из формул § 1.9 следует, что рассматриваемое нами преобразование не меняет связных функций  $\beta_n$  с  $n \neq 1$ , но обращает в нуль первую связную функцию:  $\beta'_1 = 0$ ,  $\beta'_n = \beta_n$  при  $n \neq 1$ . Поэтому после преобразования содержащие  $\beta_1$  слагаемые  $a_k$  обращаются в нуль и вся зависимость от  $\beta_1$  оказывается сосредоточенной в преобразованном нулевом потенциале  $A'_0 = A(\beta_1) = iS(\beta_1)$  (напомним, что  $S$  — функционал действия):

$$W(A) = A(\beta_1) + \Gamma - \sum_{k=2}^m a_k \Gamma_k |_{\beta_1=0}. \quad (122)$$

Сумма по  $k$  начинается с двух, так как для полного преобразования  $\Gamma_1 = \delta \Gamma / \delta \beta_1 = 0$ .

Рассмотрим в качестве примера третье преобразование, предположим, что оно полное. Из приведенных выше формул для  $a_k$  следует, что при  $\beta_1 = 0$   $a_2 = \beta_2$  и  $a_3 = \beta_3$ , так что равенство (122) принимает вид  $W(A) = A(\beta_1) + \Gamma - \beta_2 \Gamma_2 - \beta_3 \Gamma_3$ .

В нашем случае  $\Gamma = 1/2 \cdot \text{tr} 1 + 1/2 \cdot \text{tr} \ln \beta_2 + F$ , где  $F$  есть известная (см. п. 8) сумма 3-неприводимых скелетных вакуумных петель. Поэтому  $W(A) = A(\beta_1) + 1/2 \cdot \text{tr} \ln \beta_2 + F - \beta_2 F_2 - \beta_3 F_3$ .

Операции  $\beta_2 \delta / \delta \beta_2$  и  $\beta_3 \delta / \delta \beta_3$ , действуя на  $F$ , изменяют лишь коэффициенты при графиках: первая из них вводит дополнительный множитель  $(-n_2)$ , а вторая  $-n_3$ , где  $n_2$  и  $n_3$  — числа линий и вершин соответственно (минус при  $n_2$  появляется потому, что в связанных переменных линии графика сопоставляется  $\beta_2^{-1}$ , а не  $\beta_2$ ). Для вакуумных петель рассматриваемой теории  $2n_2 = 3n_3$ , так что выражение  $F - \beta_2 F_2 - \beta_3 F_3$  есть сумма всех графиков  $F$  с добавочным комбинаторным множителем  $1 - n_2 + n_3 = 1 - n_3/2$  при графике с  $n_3$  вершинами. Отметим, что скелетные вакуумные петли инвариантны относительно ренормировочных растяжений, а  $\text{tr} \ln$  преобразуется следующим образом:  $\text{tr} \ln \beta_2 = \text{tr} \ln Z \beta_2' Z^T = \text{tr} \ln \beta_2' + 2 \text{tr} \ln Z$ .

Полученные формулы можно использовать в релятивистской теории атома (квантовая электродинамика во внешнем кулоновском поле ядра), где третье преобразование полное (см. замечание в конце п. 8). Графики  $W$  в релятивистской теории содержат ультрафиолетовые расходимости, а энергия атома есть конечная разность (бесконечных) энергий  $n$ -электронного и вакуумного состояний. Этим двум состояниям соответствует выбор двух различных решений уравнений стационарности, различающихся способом обхода полюсов в фермионном пропагаторе (см. замечание после формулы (86)). Различие в пропагаторах приводит к различию и в других функциях Грина, но обе системы функций Грина ренормируются одинаковыми константами растяжения  $Z$  и при составлении разности значений  $W$  для двух решений ренормировочные константы сокращаются.

В заключение отметим, что в статистической физике аналогичные (120) — (122) формулы определяют термодинамический потенциал  $\Omega$ .

**13. Устойчивость и свойства выпуклости функциональных преобразований Лежандра.** С помощью функциональных преобразований можно эффективно строить и другие преобразования Лежандра, о которых говорилось ранее: преобразования по числовым параметрам, входящим линейно в функционал действия, или же преобразования по потенциалам, не зависящим от времени.

Допустим для конкретности, что речь идет о наборе вещественных числовых параметров  $\lambda$ , входящих линейно в функционал  $\gamma(7)$ :  $A^\lambda(\varphi) = A^{(0)}(\varphi) + \sum_i \lambda_i A^{(i)}(\varphi)$ . Все  $A^{(i)}(\varphi)$  в этом разложении считаются фиксированными функционалами с трансляционно-инвариантными по времени потенциалами лагранжевого типа (см. определение в предыдущем разделе).

Точку  $\lambda$  в пространстве числовых параметров будем считать особой, если таковой является точка  $A^\lambda$  в пространстве потен-

циалов. По определению (см. п. 1.4) для неособых  $\lambda$  функциональная вариационная задача с потенциалами  $A^\lambda$  имеет единственное решение  $\alpha(A^\lambda)$ .

Мы будем предполагать, что почти все точки  $\lambda$  неособые, т. е. размерность множества особых точек (если они есть) меньше полной размерности пространства параметров  $\lambda$ . Предположим также, что область неособых точек  $\lambda$  связна, т. е. любые две неособые точки можно соединить траекторией, целиком лежащей в области неособых точек.

Определим числовое преобразование Лежандра функции  $\bar{W}(\lambda) \equiv W(A^\lambda)$ :

$$\mu_i = \partial \bar{W}(\lambda) / \partial \lambda_i; \quad \bar{\Gamma}(\mu) = \bar{W}(\lambda) - \sum_i \lambda_i \mu_i. \quad (123)$$

В трансляционно-инвариантной по времени теории каждая из величин  $\mu_i$ ,  $\bar{W}$ ,  $\bar{\Gamma}$  пропорциональна полному „объему времени”  $\int dt$ , и при желании этот бесконечный множитель можно повсюду сократить.

С другой стороны, мы имеем функциональное преобразование Лежандра

$$\alpha_n = \delta W(A) / \delta A_n; \quad \Gamma(\alpha) = W(A) - \sum_n A_n \alpha_n. \quad (124)$$

Если точка  $\lambda$  неособая, то значение  $\alpha(A^\lambda)$  определяется однозначно. Учитывая, что  $\bar{W}$  зависит от  $\lambda$  лишь через посредство потенциалов  $A^\lambda$ , получаем

$$\mu_i = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_i} = \sum_n \frac{\delta W(A^\lambda)}{\delta A_n^\lambda} \frac{\partial A_n^\lambda}{\partial \lambda_i} = \sum_n A_n^{(i)} \alpha_n(A^\lambda). \quad (125)$$

Отсюда ясно, что для неособых  $\lambda$  значение  $\mu(\lambda)$  однозначно определяется решением  $\alpha(A^\lambda)$  функциональной вариационной задачи.

Из п. IV.3.2 мы знаем, что величина  $\bar{W}(\lambda)$  пропорциональна выпуклой функции  $\varepsilon(A^\lambda)$ , и это доказывает, что в области неособых  $\lambda$  соотношения (125) однозначно разрешимы относительно  $\lambda$ . Следовательно, в этой области между переменными  $\lambda$  и  $\mu$  имеется взаимоднозначное соответствие; что позволяет рассматривать решение функциональной вариационной задачи как некоторую однозначную функцию  $\mu: \alpha(A^\lambda) \equiv \alpha^\mu$ .

Подставив  $\mu$  в виде (125) в правую часть определяющего  $\bar{\Gamma}(\mu)$  соотношения (123), видим, что функция  $\bar{\Gamma}(\mu)$  совпадает со значением функционала  $\Gamma(\alpha) + \sum_n A_n^{(0)} \alpha_n$  при  $\alpha = \alpha^\mu$ ,

а для варьируемой функции  $\bar{\Phi}(\mu; \lambda) = \bar{\Gamma}(\mu) + \sum_i \lambda_i \mu_i$  числового преобразования получаем

$$\bar{\Phi}(\mu; \lambda) = \left[ \Gamma(\alpha) + \sum_n A_n^\lambda x_n \right] \Big|_{x^\mu} = \Phi(\alpha; A^\lambda) \Big|_{x=\alpha^\lambda}, \quad (126)$$

где  $\Phi$  — варьируемый функционал функционального преобразования. Правая часть (126) зависит от  $\mu$  через посредство функций Грина  $\alpha^\mu$ , параметры  $\lambda$  в потенциалах  $A^\lambda$  в процессе варьирования по  $\mu$  считаются фиксированными. Вариациям  $\mu$  в функции  $\bar{\Phi}(\mu; \lambda)$  соответствуют вариации  $\alpha^\mu$ , а поскольку функционал  $\Phi(\alpha; A^\lambda)$  в точке  $\alpha^\mu$  стационарен по отношению к любым вариациям  $\alpha$ , то он стационарен и по отношению к тем вариациям частного вида, которые индуцируются вариациями числовых параметров  $\mu$ . Это доказывает, что определенные соотношениями (125) значения  $\mu$  действительно являются решениями вариационной задачи для числового преобразования Лежандра. Ясно также, что соотношения (125) можно продолжить по непрерывности и в особые точки  $\lambda$ .

Таким образом, умея вычислять в некотором приближении функциональные преобразования Лежандра и умея решать для них уравнения стационарности, мы можем эффективно строить приближенные выражения для числовых преобразований Лежандра. Не представляет труда обобщить эту конструкцию на случай потенциалов, не зависящих от времени (см. п. 1).

В теории поля с трансляционно-инвариантными по времени потенциалами лагранжевого типа значение  $\Phi$  в точке стационарности определяет с точностью до нормировки энергию основного состояния  $E$ :  $W(A) = \Phi(\alpha(A); A) = -i(E - E_0) \int dt$ , где  $E_0$  — не зависящая от потенциалов нормировочная постоянная. В квантовой статистике роль  $E$  играет термодинамический потенциал  $\Omega$ , а „объем времени“ становится конечным:  $\int dt \rightarrow \beta \equiv 1/kT$ . Из пп. IV.3.2 и V.1.9 известно, что  $E$  и  $\Omega$  суть выпуклые вверх функции параметров  $\lambda$ , следовательно, их преобразования Лежандра будут выпуклыми вниз функциями сопряженных переменных  $\mu$ . Установленное формулой (126) соответствие между числовыми и функциональными преобразованиями позволяет перенести на последние известные свойства выпуклости первых: правильно нормированный (в теории поля умноженный на  $i$  и деленный на  $\int dt$ ) функционал  $\Phi(\alpha; A)$  должен иметь неотрицательные вторые вариации в точке стационарности для тех направлений вариаций  $\delta\alpha$ , которые индуцируются вариациями числовых параметров  $\mu$  (или, что то же,  $\lambda$ ). Если бы вместо числового преобразования мы рассмотрели более общее преобразование по потенциалам, не зависящим от времени, которое также обладает универсальными свойствами выпуклости (см. пп. IV.3.2 и V.1.9), то получили бы аналогичное (126) соотношение и точно так же доказали бы выпуклость

общего функционального преобразования по отношению к тем вариациям  $\delta\alpha$ , которые индуцируются вариациями потенциалов, не зависящих от времени. Напомним, что свойства выпуклости, о которых идет речь, вытекают из стандартных спектральных представлений для функций Грина, так что их нарушение означало бы нарушение спектральных представлений.

Физический смысл этих требований выпуклости весьма прост: в теории поля искомые функции Грина, являющиеся решением вариационной задачи, доставляют минимум энергии основного состояния по отношению к определенному классу допустимых вариаций. Отметим, что из (126) и общих свойств выпуклости числовых преобразований (см. п. 1.3) следует также, что в случае вырождения решения функциональной вариационной задачи в классе трансляционно-инвариантных по времени функций различным решениям  $\alpha$ , соответствующим особой точке  $A$  в пространстве потенциалов, отвечает одна и та же энергия основного состояния.

Последнее верно лишь для точной теории, а на практике мы всегда имеем дело с некоторыми приближенными выражениями, которые получаются отбором первых графиков функциональных преобразований, и эти приближенные выражения не обладают правильными свойствами выпуклости.

При наличии вырождения точки стационарности приближенных функционалов делят на стабильные и нестабильные в соответствии с тем, выполняются или нет в данной точке сформулированные выше требования выпуклости. Обычно о нарушении выпуклости судят по нарушениям в тех или иных спектральных представлениях (типичный пример — доказательство нестабильности нормального решения для сверхпроводника в [21]).

Стабильные точки делятся в свою очередь на *абсолютно стабильные*, которым соответствует абсолютный минимум энергии основного состояния, и *метастабильные*, имеющие более высокую энергию. Точный функционал, обладающий правильными свойствами выпуклости, не может иметь ни нестабильных, ни метастабильных точек стационарности, откуда ясно, что работа с приближенными функционалами, мы должны отбирать только абсолютно стабильные решения. Это не относится, конечно, к нестационарным или неравновесным системам, но мы их и не рассматриваем.

### § 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА ЛОГАРИФМА ПРОИЗВОДЯЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА $S$ -МАТРИЦЫ

**1. Определения и общие свойства.** До сих пор мы имели дело с преобразованиями Лежандра производящего функционала связанных функций Грина. В этом параграфе будут рассмотрены объекты другого типа — преобразования Лежандра связанной части  $S$ -матрицы, т. е. функционала  $W \equiv \ln R$ , где  $R$  — про-



изводящий функционал  $S$ -матрицы (I.84). Мы будем записывать (I.84) в виде

$$R(\varphi) = \exp W(\varphi) = \exp \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] \exp \mathcal{M}(\varphi) \quad (127)$$

и называть функционал  $\mathcal{M}(\varphi)$ , как обычно, производящей вершиной.

Преобразования Лежандра логарифма  $R$  интересны главным образом для статистики спиновых систем и неидеального классического газа. Для таких систем статсумма в произвольном внешнем поле имеет вид производящего функционала  $S$ -матрицы, что существенно отличает их от систем полевого типа, у которых статсумма подобна производящему функционалу полных функций Грина. Согласно общим правилам § I.4 функционал  $\bar{W} = \ln R$  представим в виде суммы всех-связных графов с линией  $\Delta$  и производящей вершиной  $\mathcal{M}(\varphi)$  или в виде суммы всех связных графов без закороченных линий с приведенной производящей вершиной (I.99). Мы будем использовать диаграммную технику с приведенной вершиной, которую обозначим  $\mathcal{M}'(\varphi)$ , а графики будем классифицировать по числу линий.

Функционал  $W$  зависит от  $\varphi$  и  $\Delta$ . В этом разделе рассматривается его преобразование Лежандра по переменной  $\varphi$ .

Вклад нулевого порядка по числу линий в  $W(\varphi)$  есть вершина  $\mathcal{M}'(\varphi)$ , изображаемая графически отдельной точкой. Напишем  $W(\varphi) = \mathcal{M}'(\varphi) + \bar{W}(\varphi)$ , выделив вклад нулевого приближения, и приведем графики  $\bar{W}$  в трех первых порядках (см. Приложение 2):

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{12} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \quad (128)$$

Напомним, что в этих графиках любой вершине, в которой сходится  $n$  линий, сопоставляется универсальный вершинный множитель

$$\mathcal{M}'_n(\varphi) = \delta^n \mathcal{M}'(\varphi) / \delta \varphi^n \quad (129)$$

(мы опустили аргументы  $x_1, \dots, x_n$ ).

Определим теперь преобразование Лежандра  $W(\varphi)$  по переменной  $\varphi(x)$ , введя сопряженную переменную  $\alpha(x) \equiv \delta W(\varphi) / \delta \varphi(x)$  и функционал

$$\Gamma(\alpha) = W(\varphi) - \alpha \varphi. \quad (130)$$

Из этого определения вытекает (см. п. 2.1) обычное уравнение стационарности для  $\Gamma$ , а также то, что вторые производные  $W$  и  $\Gamma$  по переменным  $\varphi$  и  $\alpha$  соответственно взаимно-обратны с точностью до знака. Мы запишем эти соотношения сокращенно,

опуская аргументы  $x$  и обозначая индексами  $\varphi$ ,  $\alpha$  частные производные по соответствующим переменным:

$$W_{\varphi} = \alpha, \quad \Gamma_{\alpha} = -\varphi, \quad W_{\varphi\varphi}\Gamma_{\alpha\alpha} = -1. \quad (131)$$

Обозначим  $F(\alpha)$  нулевое приближение для  $\Gamma(\alpha)$ . Из (130) ясно, что  $F$  является преобразованием Лежандра приведенной производящей вершины  $\mathcal{M}'(\varphi)$ , играющей роль нулевого приближения для  $W(\varphi)$ :

$$F(\alpha) = \mathcal{M}'(\varphi) - \alpha\varphi, \quad \alpha = \delta\mathcal{M}'(\varphi)/\delta\varphi. \quad (132)$$

Обозначим  $\Gamma(\alpha) = F(\alpha) + \bar{\Gamma}(\alpha)$  и перепишем определение (130), выделив из  $\Gamma$  и  $W$  нулевые приближения:

$$F(x) + \bar{\Gamma}(\alpha) = \mathcal{M}'(\varphi) + \bar{W}(\varphi) - \alpha\varphi. \quad (133)$$

Выразим переменную  $\varphi$  через  $\alpha$  с помощью уравнения стационарности  $\varphi = -\Gamma_{\alpha} = \psi - \bar{\Gamma}_{\alpha}$ , где  $\psi(\alpha)$  представляет вклад в  $\varphi(\alpha)$  от нулевого приближения  $F$ . Подставив  $\varphi$  в таком виде в правую часть (133) и разложив  $\mathcal{M}'(\varphi)$  в ряд Тэйлора, получим

$$F(x) + \bar{\Gamma}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u_n (-\bar{\Gamma}_{\alpha})^n + \bar{W}(\varphi) - \alpha(\psi - \bar{\Gamma}_{\alpha}), \quad (134)$$

где обозначено

$$u_n(\alpha) \equiv \delta^n \mathcal{M}'(\psi) \delta \psi^n = \mathcal{M}'_n(\varphi) \Big|_{\varphi=\psi(\alpha)}. \quad (135)$$

Из определения  $\psi$  ясно, что эта величина совпадает с  $\varphi = \varphi(\alpha)$  в соотношении (132). Отсюда следует, что  $u_0 = F + \psi\alpha$  и  $u_1 = \alpha$ , так что вклады нулевого приближения, а также линейные по  $\bar{\Gamma}_{\alpha}$  члены в (134) сокращаются и мы получаем

$$\bar{\Gamma}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} u_n (-\bar{\Gamma}_{\alpha})^n + \bar{W}(\varphi) \Big|_{\varphi=\psi(x)}. \quad (136)$$

Для дальнейшего отметим, что все  $u_n(\alpha)$  с  $n \geq 1$  можно строить из  $u_1 = \alpha$  с помощью вытекающего из (135) рекуррентного соотношения  $u_{n+1} = \delta u_n / \delta \psi$ , которое в переменных  $\alpha$  принимает следующий вид:

$$u_1 = \alpha, \quad u_{n+1} = -F_{\alpha\alpha}^{-1} \delta u_n / \delta \alpha. \quad (137)$$

Полученное выше соотношение (136) справедливо для всех теорий, и оно позволяет строить рекуррентно графики  $\bar{\Gamma}$  по известным графикам  $\bar{W}$ . Действительно, функционалы  $\bar{\Gamma}$  и  $\bar{W}$  не содержат нулевого приближения, так что их разложения начинаются с первого порядка по  $\Delta$ . Поэтому вклад низшего (пер-

вого) порядка по  $\Delta$  в правой части (136) содержится в известных нам графиках  $\overline{W}(\varphi)$ , причем входящую в них переменную  $\varphi = \psi - \overline{\Gamma}_\alpha$  нужно брать в нулевом приближении по  $\Delta$ , т. е. в приближении  $\varphi = \psi$ . Следовательно, в первом порядке графики  $\Gamma$  и  $\overline{W}$  совпадают, но вершинные множители (129) графиков  $\overline{W}$  переходят в множители (135) для графиков  $\overline{\Gamma}$ . Определив таким образом  $\overline{\Gamma}$  в первом порядке и зная  $\overline{W}$  во втором порядке, мы можем найти с помощью (136) графики  $\overline{\Gamma}$  второго порядка, и т. д. Для трех первых порядков таким путем получим

$$\overline{\Gamma}(\alpha) = \frac{1}{2} \bullet \rightarrow + \frac{1}{4} \circ \leftarrow + \frac{1}{12} \ominus + \frac{1}{8} \Delta + \dots \quad (138)$$

В этих графиках линия есть  $\Delta$ , а вершинам сопоставляются универсальные множители (135); в частности, в графике первого порядка  $u_1 = \alpha$ .

Приведенные выше графики трех первых порядков одинаковы для всех теорий, т. е. для любой вершины  $\mathcal{M}'(\varphi)$ . Различия в графиках  $\Gamma$  для разных теорий начинают проявляться только с четвертого порядка.

Введем теперь несколько новых топологических понятий. Изучавшиеся ранее диаграммы преобразований Лежандра производящего функционала связных функций Грина обладали определенными свойствами неприводимости, которые характеризовали степень связности графика по отношению к разрывам его линий. Теперь такую же роль будут играть свойства „вершинной неприводимости“, характеризующие степень связности графика по отношению к операции удаления его вершин.

Будем говорить, что данный граф является *1-неприводимым по вершинам*, если он остается связным при удалении любой одной его вершины. Такие графы называют также *звездами* [8]. Из приведенных в (128) графиков 1-неприводимы только те, которые остались в (138).


Обобщая это определение, естественно ввести понятие *вершинного  $k$ -сечения*, имея в виду набор  $k$  штук вершин графика, одновременное удаление которых приводит к распаду графика на две (или более) не связанных между собой части. Естественно различать тривиальные и нетривиальные  $k$ -сечения. Для  $k = 2$  тривиальным следует считать сечение, разделяющее граф на две части, одна из которых является простой линией. Такие 2-сечения есть в любом графе — удаление той пары вершин, которые соединены линией, приводит к отщеплению последней. Поэтому 2-неприводимости нужно определять как отсутствие 1- и нетривиальных 2-сечений.

Для анализа преобразований Лежандра  $W(\varphi)$  достаточно определенных выше понятий 1- и 2-неприводимости. Более сильные свойства 3-, 4- и т. д. неприводимости, с которыми пока

еще никто не имел дела, должны быть, видимо, присущи объектам типа преобразований Лежандра по многочастичным потенциалам логарифма статсуммы классического газа с многочастичными силами.

В дальнейшем мы будем часто называть вершины графа, являющиеся его 1-сечениями, *аномальными*; их также называют *артикуляционными* [8].

Вернемся теперь к уравнению (136) и отберем его звездную часть, иными словами, приравняем суммы 1-неприводимых по вершинам графиков в обеих частях равенства. Зависимость от  $\alpha$  в графиках  $\bar{\Gamma}$  сосредоточена в вершинных множителях, так что производная  $\bar{\Gamma}'_{\alpha}$  представляется графиками с одной помеченной вершиной — той, которая дифференцируется по  $\alpha$ . Мы

будем изображать такие графики в виде  и называть *лепестками*.

Общий член ряда Тэйлора в (136) представляется графически в виде „цветка” с  $n \geq 2$  лепестками, которые соединяются своими помеченными вершинами. Ясно, что точка соединения является аномальной вершиной получающегося графика; следовательно, все такие графики 1-приводимы, и при отборе звездной части их нужно просто отбросить.

В графиках  $\bar{W}(\varphi)$  зависимость от  $\varphi$  содержится в вершинных множителях (129). Выражая  $\varphi$  через  $\alpha$  посредством равенства  $\varphi = \psi - \bar{\Gamma}_{\alpha}$  и учитывая определения (129), (135), получаем

$$u'_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} u_{n+k}(-\bar{\Gamma}_{\alpha})^k = \dots + \frac{1}{2} \dots \dots \dots \quad (139)$$

Ясно, что при отборе звездной части мы должны удерживать только первый член в разложениях (139), так как все следующие приводят к заведомо 1-приводимым графикам. Это доказывает, что для любой теории

$$\text{звездная часть } \bar{\Gamma}(\alpha) = \text{звездная часть } \bar{W}(\varphi)|_{\varphi=\psi(\alpha)}. \quad (140)$$

Это значит, что звездные графики  $\bar{\Gamma}$  отличаются от звездных графиков  $\bar{W}$  только тем, что универсальные вершинные множители (129) выражаются теперь через сопряженную к  $\varphi$  переменную  $\alpha$  и переходят в (135).

Таким образом, специфика конкретной теории проявляется лишь в явном виде вершинных множителей (135) и в структуре незвездных графиков. Поскольку графики (138), одинаковые для всех теорий, являются звездными, незвездные графики могут появляться только начиная с четвертого порядка по числу линий. Соотношение (136), в принципе, определяет все графики

$\bar{\Gamma}$ , в том числе и незвездные, и для любой конкретной теории в любом заданном порядке можно с помощью (136) найти все графики  $\bar{\Gamma}$ , хотя, конечно, с ростом порядка вычисления все более усложняются. В настоящее время полное описание диаграмм  $\bar{\Gamma}$  во всех порядках известно лишь для двух теорий: для классического газа [7, 8] и модели Изинга [6, 75]. Для газа ответ очень прост: незвездных графиков в  $\bar{\Gamma}$  вообще нет. В следующем разделе мы докажем это утверждение, используя, как обычно, уравнения движения для исследуемого объекта.

**2. Классический неидеальный газ, вириальное разложение.** Для газа с парными силами приведенная производящая вершина определяется формулой (V.68):  $\mathcal{M}'(\varphi) = \int dx \exp \varphi(x)$ . Это взаимодействие выделено тем, что все вершинные множители (129) совпадают между собой с точностью до  $\delta$ -функций. Нулевое приближение (132) для  $\Gamma$  легко находится:

$$\alpha(x) = \delta \mathcal{M}'(\varphi) / \delta \varphi(x) = \exp \varphi(x), \quad F(\alpha) = \int dx \alpha(x) [1 - \ln \alpha(x)], \quad (141)$$

а все вершинные множители (135) оказываются равными  $\alpha$  с точностью до  $\delta$ -функций.

Основную роль в дальнейшем будет играть уравнение (V.63). Для перехода к обозначениям предыдущего раздела в нем нужно сделать замену  $Z \rightarrow R = \exp W$ ,  $A_1 \rightarrow \varphi$ ,  $A_2 \rightarrow \Delta$ , после которой его можно будет переписать в виде  $2R_\Delta = R_{\varphi\varphi} - 1 \cdot R_\varphi$ . Как обычно, индексами обозначены частные производные по соответствующим переменным, а  $1$  обозначает ядро единичной операции, т. е.  $\delta(x - x')$ . Для  $W = \ln R$  получаем

$$2W_\Delta = W_{\varphi\varphi} + W_\varphi^2 - 1 \cdot W_\varphi. \quad (142)$$

Остается переписать это уравнение в терминах  $\Gamma$ , что нетрудно сделать, воспользовавшись равенствами (131) и аналогичным (4), (13) равенством  $W_\Delta = \Gamma_\Delta$ :

$$2\Gamma_\Delta = -\Gamma_{\alpha\alpha}^{-1} + \alpha^2 - 1 \cdot \alpha. \quad (143)$$


Выделив из  $\Gamma$  нулевое приближение (141), мы сможем представить величину  $\Gamma_{\alpha\alpha}^{-1}$  в виде ряда. Имеем  $F_\alpha = -\ln \alpha$ ,  $F_{\alpha\alpha} = -1 \cdot \alpha^{-1}$ , откуда

$$-\Gamma_{\alpha\alpha}^{-1} = [1 \cdot \alpha^{-1} - \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}]^{-1} = 1 \cdot \alpha + \alpha \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha} \alpha + \alpha \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha} \alpha \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha} \alpha + \dots$$

Подставив этот ряд в (143), получаем уравнение

$$2\bar{\Gamma}_\Delta = \alpha^2 + \alpha \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha} \alpha + \alpha \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha} \alpha \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha} \alpha + \dots, \quad (144)$$


итерационное решение которого определяет все графики  $\bar{\Gamma}$ .


Обозначив  $\Delta$  линией, множитель  $\alpha$  — точкой, а вторую производную  $\overline{\Gamma}_{\alpha\alpha}$  — блоком  и свернув равенство (144) с  $\Delta$ , получаем

$$\Delta \overline{\Gamma}_\Delta = \frac{1}{2} \longrightarrow + \frac{1}{2} \left[ \text{circle with two dots} \cdot \text{circle with two dots} \cdot \dots \right]. \quad (145)$$


Затравочный график в правой части равенства определяет  $\overline{\Gamma}$  в первом порядке по числу линий. Вычислив по известному  $\overline{\Gamma}$  блоки  $\overline{\Gamma}_{\alpha\alpha}$  в правой части, мы найдем  $\overline{\Gamma}$  во втором порядке, и т. д. Отметим, что определение  $\Delta \overline{\Gamma}_\Delta$  равносильно определению  $\overline{\Gamma}$ , так как эти две величины различаются лишь коэффициентами при графиках ( $\Delta \overline{\Gamma}_\Delta$  имеет дополнительный множитель  $k$  для графика с  $k$  линиями). Общая схема итераций уравнения (145) ничем не отличается от изложенной в п. 2.5.

Теперь перейдем к доказательству основного утверждения: все графики, получаемые при итерациях уравнения (145), звездные. Начать нужно с наблюдения, которое легко доказывается по индукции: во всех графиках, получаемых при итерациях, любой из вершин сопоставляется один и тот же вершинный множитель  $\alpha$  (с точностью до  $\delta$ -функций). Учитывая это, нетрудно убедиться, что уравнение (145) обладает свойством „сохранения звездности“, а именно: если все графики  $\overline{\Gamma}$  вплоть до некоторого порядка являются звездными, то получаемые при итерациях графики следующего порядка также будут звездными. Действительно, если предположить, что какой-либо из графиков в правой части (145) имеет вершинное 1-сечение вида

 , то отсюда будет следовать, что это сечение содержится

внутри одного из блоков  $\overline{\Gamma}_{\alpha\alpha}$  в противоречии с индукционным предположением. Здесь важно, что вершинам в графиках  $\overline{\Gamma}$  сопоставляется простой множитель  $\alpha$ , и поэтому во второй производной  $\overline{\Gamma}_{\alpha\alpha}$  две операции дифференцирования по  $\alpha$  обязательно действуют на разные вершины. Будь это не так, среди графиков  $\overline{\Gamma}_{\alpha\alpha}$  с необходимостью были бы и однолепестковые графики вида  с одной выделенной вершиной, на которую

действуют обе производные  $\delta/\delta\alpha$ . Вставка подобного графика

в цепочку (145) приводила бы к диаграммам вида  ,

которые, очевидно, 1-приводимы несмотря на то, что входящие в них блоки  $\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}$  вычислены по 1-неприводимым графикам.

Из доказанного выше утверждения и из (140) следует, что для газа

$$\bar{\Gamma}(\alpha) = \text{звездная часть } \bar{W}(\varphi \rightarrow \ln \alpha). \quad (146)$$

Это значит, что  $\bar{\Gamma}(\alpha)$  есть сумма всех звездных графиков с линией  $\Delta$  и вершинами  $u_n(\alpha) = \alpha$ . Совпадение всех вершинных множителей  $u_n$  позволяет (см. п. I.4.5) произвести суммирование по числу линий, соединяющих заданные пары вершин, и перейти к майеровским линиям  $g = -1 + \exp \Delta$ , оставив при этом лишь майеровские графики, у которых любая пара вершин соединяется не более чем одной линией.

Утверждение (146) есть хорошо известная в теории классического газа вторая теорема Майера [7, 8], использованный выше метод ее доказательства заимствован из [6]. Теорема непосредственно обобщается и на случай газа с произвольными многочастичными силами [46]. Понятие 1-неприводимости для суперграфов, с которыми приходится иметь дело в такой теории (см. п. V.3.2), определяется дословно так же, как и для обычных графов.

Для трансляционно-инвариантной (т. е. пространственно однородной) системы  $\varphi$  и  $\alpha$  — константы, не зависящие от  $x$ , линия  $\Delta(x, x')$  зависит лишь от разности  $x - x'$ , а величины  $W$  и  $\Gamma$  пропорциональны полному объему системы  $V \equiv \int dx$ , так что требуется переходить к удельным значениям. Для таких систем константа  $a \equiv \exp \varphi$  есть активность,  $\alpha$  — плотность числа частиц (в обозначениях п. V.3.1  $\varphi = A_1$  и  $\Delta = A_2$ ), а удельное значение  $W$ , как пояснялось в конце п. 1.3, связано с давлением  $p$  соотношением  $V^{-1}W = \beta p$ .

Обычное диаграммное разложение п. V.3.1 функционала  $W$  представляет величину  $\beta p$  степенным рядом по активности  $\exp \varphi$ , которая входит множителем в каждую из вершин графиков. Если же мы хотим построить разложение  $\beta p$  в ряд по степеням плотности  $\alpha$ , то нужно выразить  $W$  через  $\Gamma$  с помощью соотношений (130), (131):

$$\beta p V = W = \Gamma + \alpha \varphi = \Gamma - \alpha \Gamma_\alpha. \quad (147)$$

Для однородной системы каждый из графиков в правой части пропорционален  $V$ , так что этот бесконечный множитель в (147) сокращается.

Вклад нулевого приближения (141) в правую часть (147) равен, как легко проверить,  $\alpha V$ , и если им ограничиться, то (147) будет уравнением состояния идеального газа. Для неидеального газа добавляются вклады графиков  $\bar{\Gamma}$ ; классифицируя их по числу вершин, получаем ряд

$$\bar{\Gamma}(\alpha) = V \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n S_n, \quad (148)$$

общий член которого представляет сумму вкладов всех звездных графиков с  $n$  вершинами. Подставив (148) вместе с вкладом нулевого приближения в (147), получаем искомое разложение

$$\varphi p = \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n (1-n) S_n. \quad (149)$$

Эту формулу называют *вириальным разложением*, а величины  $(1-n)S_n$  называют *вириальными коэффициентами* [7, 8]. Числа  $S_n$  зависят лишь от вида линии  $\Delta$ , которая определяется (см. п. V.3.1) парным потенциалом и температурой.

**3. Модель Изинга** [6]. Для модели Изинга (см. п. V.2.1) роль аргумента  $x$  играет номер узла решетки  $i$ , а вершина  $\mathcal{M}'(\varphi)$  согласно (V.48) имеет вид  $\sum \ln 2 \operatorname{ch} \varphi_i$ . Отметим, что в данном случае приведенная и обычная производящие вершины не различаются вследствие равенства нулю закороченной линии  $\Delta$  (отсутствие обменного „самодействия“).

В нулевом приближении  $\alpha_i = \delta \mathcal{M}'(\varphi) / \delta \varphi_i = \operatorname{th} \varphi_i$  и  $F(\alpha) = \sum f(\alpha_i)$ ,

$$f(\alpha) \equiv \ln 2 - \frac{1}{2} [(1-\alpha) \ln(1-\alpha) + (1+\alpha) \ln(1+\alpha)]. \quad (150)$$

Для универсальных вершинных множителей (135) получаем

$$u_1(\alpha) = \alpha, \quad u_{n+1}(\alpha) = (1-\alpha^2) \delta u_n(\alpha) / \delta \alpha, \quad (151)$$

т. е.  $u_1 = \alpha$ ,  $u_2 = 1 - \alpha^2$ ,  $u_3 = -2\alpha(1 - \alpha^2)$ , и т. д. Записывая  $u_n$ , мы опустили  $\delta$ -символы по узлам решетки. Все  $u_n(\alpha)$  являются полиномами определенной четности, совпадающей с четностью номера  $n$ .

Уравнения (V.50) в обозначениях п. 1 принимают вид

$$2\partial R / \partial \Delta_{ik} = \partial^2 R / \partial \varphi_i \partial \varphi_k, \quad i \neq k; \quad \partial^2 R / \partial \varphi_i \partial \varphi_i = R.$$

Отсюда для  $W = \ln R$  имеем  $2W_{\Delta} = W_{\varphi\varphi} + W_{\varphi} W_{\varphi}$ ,  $i \neq k$ ;  $W_{\varphi\varphi} + W_{\varphi} W_{\varphi} = 1$ ,  $i = k$ ; а для преобразования Лежандра (130) получаем

$$2\Gamma_{\Delta} = -\Gamma_{\alpha\alpha}^{-1} + \alpha\alpha, \quad i \neq k; \quad -\Gamma_{\alpha\alpha}^{-1} + \alpha\alpha = 1, \quad i = k. \quad (152)$$

Как обычно, выделив из  $\Gamma$  нулевое приближение (150), для которого  $F_{\alpha\alpha} = -1 \cdot (1 - \alpha^2)^{-1}$ , представим обратную матрицу  $\Gamma_{\alpha\alpha}^{-1}$  рядом

$$-\Gamma_{\alpha\alpha}^{-1} = [1 \cdot (1 - \alpha^2)^{-1} - \bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}]^{-1} = 1 \cdot (1 - \alpha^2) + \text{штрихованные блоки} + \dots \quad (153)$$

Точка обозначает множитель  $1 - \alpha^2$ , заштрихованный блок  $-\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}$ .

При подстановке ряда (153) в уравнение (152) с  $i \neq k$  крат-



ное единичной матрице слагаемое  $1 \cdot (1 - \alpha^2)$  не даст вклада, и мы получим

$$2(\bar{\Gamma}_\Delta)_{ik} = \alpha_i \alpha_k + \text{шарик}_i + \text{шарик}_k + \dots, \quad (154)$$

тогда как уравнение (152) с  $i = k$  принимает вид

$$\text{шарик}_i + \text{шарик}_i + \dots = 0 \quad (155)$$

(по  $i$  нет суммирования). Уравнение (155) требует равенства нулю диагональных матричных элементов прогрессии блоков.

Итерируя эти уравнения, можно, в принципе, определить все графики  $\bar{\Gamma}$ , хотя нужно сказать, что в действительности строить графики  $\bar{\Gamma}$  итерациями уравнений очень трудно. Но мы и не собираемся этого делать — уравнения движения, как обычно, нужны нам только для того, чтобы с их помощью установить те или иные топологические свойства графиков  $\bar{\Gamma}$ . В данном случае речь идет о таких свойствах, которые позволили бы дать полное описание незвездных графиков. В отличие от газа в модели Изинга такие графики имеются. Они появляются начиная с четвертого порядка. В трех первых порядках графики  $\bar{\Gamma}$  для модели Изинга, как и для любой другой теории, имеют вид (138) и являются звездными. В соответствии с общими правилами п. 1, вершинам этих (и других звездных) графиков сопоставляются универсальные множители (151).

Полное описание незвездных графиков будет дано в следующем разделе, а пока мы кратко обсудим наиболее важный для практики частный случай однородной системы. В обозначениях п. V.2.1  $\varphi_i = \beta h_i$  и  $\Delta_{ik} = \beta \mathcal{V}_{ik}$ , где  $\beta = 1/kT$ ,  $h$  — внешнее поле,  $\mathcal{V}$  — матрица обменного взаимодействия моментов. В классической модели Изинга берут  $\mathcal{V}_{ik} = J \lambda_{ik}$ , где  $J$  — „обменный интеграл” (константа, имеющая размерность энергии),  $\lambda$  — матрица взаимодействия ближайших соседей:  $\lambda_{ik} = 1$ , если  $i$  и  $k$  — ближайшие соседи решетки, и  $\lambda_{ik} = 0$  в остальных случаях. Рассматриваются и более сложные взаимодействия, например такие, для которых  $\lambda_{ik} = 1$  не только для ближайших, но и для вторых соседей решетки.

Для однородной системы поле  $\varphi_i$  и сопряженная переменная — намагниченность  $\alpha_i$  — не зависят от номера узла, а каждый из графиков  $W$  и  $\Gamma$  пропорционален полному числу узлов  $V \equiv \sum 1$  и нужно, как обычно, переходить к удельным величинам. Классифицируя графики  $\bar{\Gamma}$  по числу линий  $\Delta$ , каждая из которых содержит безразмерный множитель  $\beta J$ , мы получим *высокотемпературное разложение* удельной величины

$$\gamma(\alpha, \beta) \equiv \Gamma/V = f(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta J)^n P_n(\alpha), \quad (156)$$

в котором  $f(\alpha)$  — вклад нулевого приближения (150), а общий член ряда есть сумма вкладов всех графиков  $\bar{\Gamma}$  с  $n$  линиями. Разложение (156) называется высокотемпературным, потому что  $\beta \sim 1/T$ .

Коэффициентные функции  $P_n(\alpha)$  в (156) оказываются полиномами по  $\alpha^2$ , старшей степенью  $P_n$  является  $\alpha^{2n}$ . Это очевидно для звездных графиков  $\bar{\Gamma}$  при учете явного вида вершинных множителей (151) и того факта, что всякий график содержит четное число нечетных вершин. В следующем разделе мы увидим, что это верно и для незвездных графиков.

Коэффициенты полиномов  $P_n$  (все они становятся целыми числами после умножения на  $n!$ ) имеют смысл структурных постоянных, определяемых решеткой и типом взаимодействия. Нами были вычислены коэффициенты всех полиномов  $P_n$  до  $n = 8$  включительно для двух плоских (квадратной и треугольной) и трех объемных (гранцентрированной, объемноцентрированной и простой) кубических решеток, причем объемные решетки рассматривались в двух вариантах: взаимодействие только ближайших соседей и взаимодействие ближайших и следующих соседей. Результаты этих расчетов используются для анализа критического поведения [76, 77].

**4. Анализ незвездных графиков для модели Изинга [75].** В обычных диаграммах  $W$  и  $\Gamma$  вершинам  $1 \dots n$  приписываются индексы  $i_1 \dots i_n$ , и суммирование по ним производится независимо, т. е. каждый  $i_\alpha$  пробегает всю решетку. При этом в сумме по всем  $i_1 \dots i_n$  будут, конечно, встречаться слагаемые с совпадающими подгруппами индексов.

Иногда удобнее рассматривать суммы по несовпадающим индексам, т. е. суммы с дополнительным условием  $i_\alpha \neq i_\beta$  для любой пары  $\alpha \neq \beta$ . Сумму „по всем” можно представить в виде линейной комбинации сумм „по несовпадающим”:  $n$  индексов разбиваются всеми способами на группы, внутри которых все индексы совпадают, а индексы разных групп не совпадают.

Как уже было сказано, в обычных диаграммах суммирование производится „по всем”. Можно рассматривать и такие диаграммы, в которых по условию суммирование производится только по несовпадающим индексам. Мы будем называть их для краткости *диаграммами в  $\mathcal{N}^0$ -форме* и ставить перед диаграммой знак  $\mathcal{N}^0$ . Любую диаграмму  $D$  можно переписать в  $\mathcal{N}^0$ -форме:

$$D = \mathcal{N}^0 \sum_s D_s. \quad (157)$$

Суммирование производится по всевозможным разбиениям  $s$  множества индексов диаграммы  $D$  на группы несовпадающих индексов (будем говорить „по всем вариантам стягиваний”),  $D_s$  — *стянутая диаграмма*, у которой все вершины, принадлежащие одной группе, стянуты в одну точку. Среди диаграмм  $D_s$

имеется исходная диаграмма  $D$ , соответствующая разбиению, каждая группа которого состоит из одного элемента. Различные варианты стягиваний мы будем изображать с помощью пунктирных „линий совпадения”, которым сопоставляется единичная матрица  $\delta_{ik}$  в отличие от сплошной линии  $\Delta_{ik}$ . Все вершины группы, стягиваемой в одну точку, соединяются между собой пунктирными линиями, т. е. каждой такой группе соответствует полный граф пунктирных линий.

В модели Изинга можно не рассматривать те стягивания, в которых хотя бы одна пара вершин соединяется одновременно пунктирной и сплошной линиями, — вклад такой диаграммы равен нулю вследствие равенства нулю диагональных элементов  $\Delta$ . Приведем в качестве примера переход к  $\mathcal{N}$ -форме для квадрата:

$$\square = \mathcal{N} \{ \square + \square + \square + \square \}. \quad (158)$$

Переходим теперь к доказательству основного утверждения этого раздела: *в  $\mathcal{N}$ -форме все графики  $\bar{\Gamma}$  являются звездами.*

Во избежание недоразумений уточним смысл термина звезда применительно к диаграммам в  $\mathcal{N}$ -форме. Нужно иметь в виду, что использование пунктирных линий — только удобный прием для изображения стягиваний, а в действительности стягиваемые вершины следует считать сведенными в одну точку. Эта точка будет нормальной или аномальной (т. е. 1-сечением) вершиной графика в зависимости от того, сохраняется ли связность графика при ее удалении. При использовании пунктирных линий удаление такой вершины означает одновременное удаление всех вершин, стягиваемых вместе, т. е. соединенных пунктирными линиями.

Из графиков (158) незвездными являются квадраты с одной пунктирной диагональю.


Мы будем доказывать высказанное утверждение по индукции с помощью уравнений движения (154), (155): допустим, что все графики  $\bar{\Gamma}$  вплоть до некоторого порядка являются звездами в  $\mathcal{N}$ -форме, и покажем, что получаемые при итерации уравнений (154), (155) графики следующего порядка также будут звездами в  $\mathcal{N}$ -форме. Отметим, что для графиков трех первых порядков (138) индукционное предположение выполнено.

Допустим, что в  $\bar{\Gamma}$  имеется незвездный график с аномальной вершиной типа (159а):

$$\bar{\Gamma} \ni \text{(a)} \rightarrow \partial \bar{\Gamma} / \partial \Delta_{ik} \ni \text{(б)} \quad (159)$$

Графики производной  $\bar{\Gamma}_\Delta$  в левой части (154) получаются из графиков  $\bar{\Gamma}$  удалением одной сплошной линии  $\Delta$  всеми возможными способами. Следовательно, в производной по  $\Delta_{ik}$  от незвездного графика (159а) с необходимостью будут и такие, у которых удалена линия, присоединявшаяся к аномальной вершине, иначе говоря, такие, у которых одна из выделенных вершин  $i, k$  является аномальной. Это рассуждение иллюстрировано графическим соотношением (159). Мы предположили для определенности, что аномальной оказывается вершина  $i$ , но это не ограничивает общности ввиду симметричности  $\bar{\Gamma}_\Delta$  по значкам  $i, k$ .

Итак, если мы хотим доказать, что на некотором шаге итераций не появляются незвездные (в  $\mathcal{N}$ -форме) графики, достаточно проверить, что в правой части (154) после приведения ее к  $\mathcal{N}$ -форме отсутствуют „опасные” графики с лепестком в вершине  $i$ , т. е. в крайней левой вершине цепочек блоков (154).

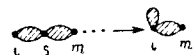
Напомним, что в цепочки (154) входят диагональные матрицы  $\delta_{ik}(1-\alpha_i^2) \equiv r_{ik}$ , сопоставляемые выделенным в (154) точкам, и матрицы  $\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}$  с элементами  $\partial^2\bar{\Gamma}/\partial\alpha_i\partial\alpha_k$ , изображаемые в (154) блоками . Индексы крайних вершин цепочки

( $i$  у левой,  $k$  у правой) фиксированы, по индексам остальных вершин производится суммирование, что соответствует обычному произведению матриц. Например, слагаемое с тремя блоками есть матричный элемент  $ik$  от произведения  $r\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}r\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}r\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}r$ .

Согласно индукционному предположению графики  $\bar{\Gamma}$ , дифференцированием которых получают блоки  $\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}$ , являются звездами в  $\mathcal{N}$ -форме, так что внутри этих блоков нет аномальных вершин. Мы должны показать, что после приведения правой части (154) к  $\mathcal{N}$ -форме не могут появиться опасные графики с лепестком в вершине  $i$  типа (159б).

На первый взгляд кажется, что такие графики обязательно появляются. Во-первых, крайний левый блок цепочки  $\partial^2\bar{\Gamma}/\partial\alpha_i\partial\alpha_s$  ( $s$  — значок суммирования) содержит вклад с  $i=s$ , получающийся при двукратном дифференцировании одной и той же вершины. Для газа таких графиков не было, потому что вершина сопоставлялся простой множитель  $\alpha$ , вторая производная которого равна нулю. Теперь это не так, точнее, мы не уверены, что так, и поэтому должны учитывать блоки с  $i=s$ . Такие блоки являются в действительности однолепестковыми и

порождают в цепочках „опасные” графики:



Есть и еще один механизм появления опасных графиков.

Отдельные блоки  $\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}$  получаются дифференцированием графиков в  $\mathcal{N}$ -форме, так что индексы разных вершин одного блока не совпадают. Но в цепочке таких блоков, являющейся обычным произведением матриц, нет никаких запретов на совпадение индексов вершин разных блоков, иными словами, такая цепочка еще не приведена полностью к  $\mathcal{N}$ -форме. Если выполнить это приведение, то появятся дополнительные диаграммы со стягиваниями вершин разных блоков. Среди них будут и „опасные” графики типа (159б). Для нас важно, что все „опасные” стягивания, приводящие к появлению лепестка в вершине  $i$ , обязательно содержат пунктирную линию, соединяющую вершину  $i$  с одной из точек сочленения блоков  $\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}$ .

Покажем теперь, что в действительности все опасные графики в правой части (154) взаимно сокращаются. Обозначив матрицу с элементами  $1-\delta_{ik}$  перечеркнутой сплошной линией (линия несовпадения), изобразим графически уравнение (155):

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots = \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \dots \quad (160)$$

В уравнении (154) по условию  $i \neq k$ , что позволяет нам при желании соединить крайние вершины  $i$  и  $k$  линией несовпадения. Приняв затем во внимание графическое равенство (160), можно провести дополнительную линию несовпадения из вершины  $i$  в ближайшую к вершине  $k$  точку сочленения блоков  $\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}$  в (154) (но это можно делать только одновременно во всех членах прогрессии блоков (154)). В результате сумма цепочек блоков в правой части (154) примет вид

$$\text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} + \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} + \dots$$

Воспользовавшись затем уравнением (160) еще раз, можно добавить линию несовпадения из вершины  $i$  во вторую справа точку сочленения блоков. Повторяя бесконечно эту операцию, мы соединим вершину  $i$  линиями несовпадения со всеми точками сочленения блоков  $\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}$ .

Остается заметить, что преобразовав таким образом правую часть (154), мы исключили оба указанных выше механизма появления опасных графиков. Действительно, крайний левый блок  $\bar{\Gamma}_{\alpha\alpha}$  сопровождается теперь линией несовпадения, что запрещает двукратное дифференцирование одной и той же вершины. Второй механизм — опасные стягивания при приведении к  $\mathcal{N}$ -форме — также исключается, поскольку все графики с опасными стягиваниями обращаются в нуль при добавлении линий несовпадения: вершина  $i$  оказывается соединенной с не-

которой точкой сочленения блоков линией совпадения и линией несовпадения одновременно.

Доказав отсутствие опасных графиков в правой части (154), мы доказали тем самым по индукции искомое утверждение: в  $\mathcal{N}$ -форме все графики  $\bar{\Gamma}$  являются звездами.

Если представлять графики  $\bar{\Gamma}$  в обычной, а не в  $\mathcal{N}$ -форме, то среди них будут и незвездные. Доказанное выше утверждение позволяет дать полную и удобную для приложений характеристику этих графиков.

Допустим, что  $\bar{\Gamma}$  представляется обычными графиками и  $\bar{\Gamma} = \Phi_1 + \Phi_2$ , где  $\Phi_1$  — звездная, а  $\Phi_2$  — незвездная части  $\bar{\Gamma}$ . Слагаемое  $\Phi_1$  известно из (140), а  $\Phi_2$  нужно определить исходя из того, что сумма  $\Phi_1 + \Phi_2$  после приведения к  $\mathcal{N}$ -форме содержит лишь звездные графики:  $\Phi_1 + \Phi_2 = \mathcal{N}\psi$ , где  $\psi$  — звезды.

Сначала убедимся, что это условие определяет  $\Phi_2$  однозначно. Предположим, что это не так и условию удовлетворяют два разных набора  $\Phi_2$  и  $\Phi_2'$  незвездных графиков. Тогда  $(\Phi_1 + \Phi_2) - (\Phi_1 + \Phi_2') = \mathcal{N}(\psi - \psi')$ , т. е. множество незвездных графиков  $\Phi_2 - \Phi_2'$  после приведения к  $\mathcal{N}$ -форме представляется звездными графиками  $\psi - \psi'$ . Но это невозможно, так как после приведения  $\Phi_2 - \Phi_2'$  к  $\mathcal{N}$ -форме мы должны получить под знаком  $\mathcal{N}$  среди прочих графиков и все исходные незвездные графики  $\Phi_2 - \Phi_2'$  (см. замечание после формулы (157)).

Тем самым мы доказали, что наше условие определяет незвездную часть  $\bar{\Gamma}$  однозначно. Это значит, что найдя каким угодно способом набор незвездных графиков, удовлетворяющий нужному условию, мы находим тем самым единственное решение задачи. Именно так мы сейчас и поступим, предложив для определения незвездных графиков „рецепт компенсации”.

Пусть  $D$  — некоторый звездный график,  $\sigma$  — множество всех вариантов стягиваний  $s$  в этом графике,  $D_s$  — стянутый график. Стягивание  $s$  назовем аномальным, если  $D_s$  — незвездный график; множество всех аномальных стягиваний обозначим  $\nu$ .

Упорядочим множество всех стягиваний, сопоставив каждому  $s \in \sigma$  число  $p = p(s)$ , равное по определению числу пунктирных линий данного стягивания. При  $p = 0$  имеем  $D_s = D$ , при  $p = 1$  стягивается одна (любая) пара вершин, при  $p = 2$  — две пары. При  $p = 3$  есть две возможности: либо стягиваются три пары вершин, либо одна тройка вершин.

Обозначив множество всех (аномальных) стягиваний с данным  $p$  соответственно  $\sigma_p(\nu_p)$ , перепишем соотношение (157) подробнее:  $D = \mathcal{N} \{ D + \sum_{s \in \sigma_1} D_s + \sum_{s \in \sigma_2} D_s + \dots \}$ . Ясно, что разность  $D^{(1)} \equiv D - \sum_{s \in \nu} D_s$  после приведения к  $\mathcal{N}$ -форме не содержит диаграмм с аномальными стягиваниями первого порядка, поскольку  $D_s = \mathcal{N} \{ D_s + \sum_{s'} [D_s]_{s'} \}$ , а все диаграм-

мы  $[D_s]_s$ , с  $p(s') \geq 1$  имеют более одного стягивания (т. е.  $p > 1$ ).

Переход от  $D$  к  $D^{(1)}$  назовем первым шагом компенсации. По построению  $D^{(1)}$  в  $\mathcal{N}$ -форме содержит лишь аномальные стягивания с  $p > 1$ .

Выделим из них аномальные стягивания наименьшего ( $p=2$ ) порядка:  $D^{(1)} = \mathcal{N} \left\{ D^{(1)} + \sum_{s \in \nu_s} D_s^{(1)} + \dots \right\}$  и составим разность (второй шаг компенсации):  $D^{(2)} = D^{(1)} - \sum_{s \in \nu_s} D_s^{(1)}$ .

По построению  $D^{(2)}$  в  $\mathcal{N}$ -форме не содержит аномальных стягиваний с  $p \leq 2$ . На третьем шаге компенсации из  $D^{(2)}$  вычитаются графики с аномальными стягиваниями третьего порядка, и т. д. Повторяя эту операцию нужное число раз, мы придем к *полностью компенсированной диаграмме*, не содержащей никаких аномальных стягиваний после приведения к  $\mathcal{N}$ -форме.

Рецепт компенсации можно коротко сформулировать следующим образом: по заданному звездному графику  $D$  строится выражение

$$D_{\text{комп}} = D + \sum_s c_s D_s, \quad (161)$$

в котором суммирование производится по всем топологически неэквивалентным вариантам аномальных стягиваний, а числовые коэффициенты  $c_s$  подбираются таким образом, чтобы выражение (161) после приведения к  $\mathcal{N}$ -форме не содержало незвездных графиков. Доказанная ранее теорема единственности позволяет утверждать, что для модели Изинга *функционал  $\bar{\Gamma}$  есть сумма всех звездных полностью компенсированных графиков*.

Согласно равенству (140) вершинные множители звездных графиков универсальны и для модели Изинга имеют вид (151). Множители, сопоставляемые точкам стягивания в компенсирующих диаграммах  $D_s$ , являются произведениями множителей (151) всех стягиваемых в данную точку вершин, и поэтому они заведомо неуниверсальны, т. е. определяются всей диаграммой в целом, а не просто числом сходящихся в вершине линий. Отсюда ясно, что все точки стягивания в компенсирующих диаграммах должны быть аномальными вершинами, так как из формулы (136) и последующих рассуждений видно; что вершинные множители могут быть неуниверсальными только для аномальных вершин. Суммирование в (161) производится по всем неэквивалентным стягиваниям, у которых хотя бы одна точка стягивания оказывается аномальной вершиной, но из сказанного выше следует, что в действительности коэффициенты  $c_s$  будут отличны от нуля лишь при тех диаграммах  $D_s$ , в которых любая точка стягивания является аномальной вершиной.

Первым из звездных графиков, имеющим аномальные стягивания, является квадрат. Из (158) видно, что для компенсации нужно добавить квадрат с одной пунктирной диагональю с коэффициентом  $-2$ . В качестве еще одного примера приведем выражение для полностью компенсированного шестиугольника:

$$\text{Шестиугольник}_{\text{комп}} = \text{Шестиугольник} - 6 \text{Шестиугольник} - 3 \text{Шестиугольник} + 3 \text{Шестиугольник} + 4 \text{Шестиугольник}.$$

При практическом вычислении вкладов различных графиков в случае однородного поля вершинные множители (151) не зависят от номера узла и их можно вынести общим множителем за знак суммы по индексам вершин. Важно то, что этот множитель одинаков для всех диаграмм в правой части (161), так что учет всех компенсирующих незвездных графиков сводится лишь к изменению правила вычисления вкладов звездных графиков с единичными вершинами.

Для классической модели Изинга из каждой линии  $\Delta$  выносятся множитель  $\beta J$  (см. обсуждение в конце предыдущего раздела). Главная трудность состоит в вычислении вклада диаграммы с единичными вершинами и линиями  $\lambda$  (напомним, что  $\lambda_{ik}$  равно единице или нулю в зависимости от того, взаимодействуют или нет узлы  $i$  и  $k$ ). Отметим, что для единичной линии  $\lambda_{ik}^n = \lambda_{ik}$ , так что вклад диаграммы не меняется при удвоении, утроении и т. д. любой из ее линий. Поэтому вычислять нужно лишь вклады звездных майеровских графов, которых сравнительно немного: в первых пяти порядках их всего 5, в шестом — 4, в седьмом — 7, в восьмом — 16, в девятом — 42, в десятом — 111 (см. Приложение 2).

Расчет показывает, что компенсирующие диаграммы важны в количественном отношении. Например, для ГЦК\*-решетки с взаимодействием ближайших соседей вклад семиугольника без компенсаций равен 403 200, а после компенсаций — 52 416. Для восьмиугольника эти цифры равны соответственно 4 038 300 и 330 588. Для восьмиугольника с взаимодействием первых и вторых соседей в той же решетке имеем соответственно 68 383 350 и 15 420 582. Для плоских решеток вклад графика после компенсаций иногда даже оказывается отрицательным.

**5. Второе преобразование Лежандра для классического газа.** Рассмотренное в предыдущих разделах преобразование Лежандра осуществляет переход от затравочных переменных к одетым в вершинах графиков статсуммы (или  $S$ -матрицы в теории поля). Для газа эта задача решена еще в тридцатых годах (см. [7]), для модели Изинга — совсем недавно [6, 75] (отметим также интересную работу [78], близкую по духу к [6]). Ни для каких других систем, включая квантовый ферромагнетик Гайзенберга, топологическая задача описания незвездных графиков еще не решена (утверждение (140), полностью характеризующее звездные графики для любой системы, доказано в [6]).

Естественным следующим шагом должен быть переход от затравочных переменных к одетым в линиях диаграмм, что требует анализа преобразования Лежандра функционала  $\mathcal{W}(\varphi, \Delta)$  по обоим переменным  $\varphi$  и  $\Delta$ .

\* Гранцептрированная кубическая.



В настоящее время эта задача решена только для газа. Впервые это было сделано в работе [79], впоследствии приводились другие варианты доказательства (см., например, [56] и имеющиеся там ссылки). Мы приведем еще один вариант, опирающийся, как и другие аналогичные доказательства этой главы, на уравнения движения для рассматриваемого объекта.

Преобразование, о котором пойдет речь, можно назвать вторым, поскольку оно оказывается тесно связанным со свойством вершинной 2-неприводимости (см. определение в п. 1). Преобразование (130) в такой классификации является первым.

Итак, рассмотрим преобразование Лежандра логарифма статсуммы  $W(\varphi, \Delta)$  по обеим переменным  $\varphi, \Delta$ , введя сопряженные переменные  $\alpha = W_\varphi, s = W_\Delta$  и построив функционал  $\mathcal{F}(\alpha, s) = W(\varphi, \Delta) - \alpha\varphi - s\Delta$  (как и раньше, индексами обозначаются частные производные по соответствующим переменным). Из определений следует, что  $\mathcal{F}_\alpha = -\varphi, \mathcal{F}_s = -\Delta$ , а матрицы вторых производных  $W$  и  $\mathcal{F}$  по переменным  $\varphi, \Delta$  и  $\alpha, s$  соответственно взаимно-обратны с точностью до знака. Равенство  $W_\Delta = \Gamma_\Delta$ , являющееся частным случаем (13), позволяет считать  $\mathcal{F}$  преобразованием Лежандра по переменной  $\Delta$  первого преобразования (130):

$$s = \Gamma_\Delta, \quad \mathcal{F}(\alpha, s) = \Gamma(\alpha, \Delta) - s\Delta. \quad (162)$$

Отметим, что это общее свойство всех преобразований типа (10): их можно строить рекуррентно, т. е. каждое следующее является преобразованием предыдущего по очередной переменной.


Из п. 2 нам известно, что для газа функционал  $\Gamma(\alpha, \Delta)$  есть сумма нулевого приближения (141) и всех звездных графиков с линиями  $\Delta$  и вершинными множителями  $\alpha$ . Графики трех первых порядков имеют вид (138). Дифференцируя их по  $\Delta$ , полу-

чаем  $2s(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \alpha(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}') + \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{2} \circ + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\circ} + \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{2} \circ + \dots$ , где вершинам (точ-

кам) соответствует множитель  $\alpha$ , линиям —  $\Delta$ , аргументы  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  помеченных вершин фиксированы.

Вместо  $s$  удобно ввести новую переменную  $\omega \equiv \alpha^{-1}[2s - \alpha\alpha]\alpha^{-1}$ , которая в низшем порядке совпадает с  $\Delta$ :

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{2} \circ + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{\circ} + \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}'}{2} \circ + \dots \quad (163)$$

Если бы мы рассматривали не газ, то на концах линии 

стояли бы вершинные множители  $u_2$  (см. (135)) и переменную  $\omega$  следовало бы определять соотношением  $2s = u_2\omega u_2 + \alpha\alpha$ , если мы хотим, чтобы  $\omega$  и  $\Delta$  в низшем порядке совпадали.

Для газа переменная  $\alpha$  имеет смысл плотности, а  $\omega$  связана с корреляционной функцией флуктуаций плотности  $W_{\varphi\varphi}$  (см. определение в п. V.3.1) следующим простым соотношением, которое вытекает из (142):

$$W_{\varphi\varphi} = 1 \cdot \alpha + \alpha\omega\alpha. \quad (164)$$

Добавка  $\alpha\omega\alpha$  к  $\delta$ -образному слагаемому  $1 \cdot \alpha$  представляет вклад в корреляцию за счет взаимодействия.

Уравнения стационарности  $\mathcal{F}_\alpha = -\varphi$ ,  $\mathcal{F}_\omega = -\Delta$  в переменных  $\alpha$ ,  $\omega$  принимают вид  $\mathcal{F}_\alpha(x) - 2\alpha^{-1}(x) \int dx' \mathcal{F}_\omega(x, x') [1 + \omega(x, x')] = -\varphi(x)$  и  $2\mathcal{F}_\omega(x, x') = -\alpha(x) \Delta(x, x') \alpha(x')$  соответственно. Запишем их сокращенно:

$$\mathcal{F}_\alpha - 2\alpha^{-1}\mathcal{F}_\omega(1 + \omega) = -\varphi, \quad 2\mathcal{F}_\omega = -\alpha\Delta\alpha. \quad (165)$$

Из равенства (163) видно, что между переменными  $\omega$  и  $\Delta$  имеется соответствие  $0 \leftrightarrow 0$ ; отсюда и из (162) следует, что нулевым приближением для  $\mathcal{F}$  является тот же функционал (141), что и для  $\Gamma$ .

Разрешая итерациями графическое уравнение (163) относительно  $\Delta$  и используя второе уравнение (165), мы найдем явно графики производной  $\mathcal{F}_\omega$ , а по ним — графики  $\mathcal{F}$ . В первых

порядках из (163) получаем  $\Delta(x, x') = \frac{x}{2} \frac{x'}{2} - \frac{1}{2} \bigcirc \frac{x}{2} \frac{x'}{2} + \dots$ , где

линия теперь  $\omega$ , а не  $\Delta$ . Подставляя это разложение во второе

уравнение (165), находим  $2\mathcal{F}_\omega(x, x') = \frac{x}{2} \frac{x'}{2} + \frac{1}{2} \bigcirc \frac{x}{2} \frac{x'}{2} + \dots$ , откуда

$$\mathcal{F}(\alpha, \omega) = F(\alpha) - \frac{1}{4} \bigcirc + \frac{1}{12} \bigcirc + \frac{1}{8} \Delta. \quad (166)$$

где  $F(\alpha)$  — нулевое приближение (141). В графиках (166) линия есть  $\omega$ , а вершины такие же, как и в графиках  $\Gamma$ , т. е. каждой из них сопоставляется простой множитель  $\alpha$ . Из вида графиков  $\bar{\Gamma}$  для газа и процедуры построения  $\mathcal{F}$  ясно, что это будет верным во всех порядках.

Отметим, что в трех первых порядках функционал  $\mathcal{F}$  будет иметь вид (166) не только для газа, но и для любой другой теории, если переменная  $\omega$  определяется так, что в низшем порядке  $\omega = \Delta$ . Но вершинные множители  $u_2$  и  $u_3$  в графиках (166) будут тогда другими в соответствии с общим правилом (135). Как и для первого преобразования, специфика конкретной теории проявляется в графиках  $\mathcal{F}$  только начиная с четвертого порядка.

Получим теперь аналог соотношения (136) для второго преобразования. Для этого выделим из  $\Gamma$  и  $\mathcal{F}$  первые графики

$$\Gamma = \mathcal{F} + \frac{1}{2} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} + \bar{\Gamma}; \quad \mathcal{F} = \mathcal{F} - \frac{1}{4} \text{---} + \bar{\mathcal{F}} \quad (167)$$

и подставим эти выражения в (162). Нулевое приближение  $F$  тогда сократится, а график первого порядка  $\text{---} = \alpha \Delta \alpha$  в  $\Gamma$

сократится одним из вкладов формы  $s\Delta = [\alpha\omega\alpha + \alpha\alpha]\Delta/2$ , и мы получим

$$-\frac{1}{4} \alpha\omega^2\alpha + \bar{\mathcal{F}}(\alpha, \omega) = \frac{1}{4} \alpha\Delta^2\alpha + \bar{\Gamma}(\alpha, \Delta) - \frac{1}{2} \alpha\omega\Delta\alpha, \quad (168)$$

где  $\alpha\omega^2\alpha$  обозначает вклад графика  $\text{---}$  с линиями  $\omega$ , и т. п.

Переменную  $\Delta$  в правой части (168) нужно выразить через  $\omega$  с помощью второго уравнения (165), которое можно переписать в виде

$$\Delta \cdot \omega - 2\alpha^{-1} \bar{\mathcal{F}}_{\omega} \alpha^{-1} \varepsilon = \text{---} + \text{---} \quad (169)$$

После подстановки в (168) и сокращений получаем искомое соотношение

$$\bar{\mathcal{F}}(\alpha, \omega) = \alpha^{-1} (\bar{\mathcal{F}}_{\omega})^2 \alpha^{-1} + \bar{\Gamma}(\alpha, \Delta), \quad (170)$$

с помощью которого можно рекуррентно строить графики  $\bar{\mathcal{F}}$  по известным графикам  $\Gamma$ .

Отберем теперь в обеих частях равенства (170) 2-неприводимые по вершинам графики. В первом слагаемом в правой части таких графиков вообще нет, поскольку оно имеет струк-

туру  $\text{---}$  и содержит указанное пунктиром нетривиальное

2-сечение. Что касается второго слагаемого, то выражая в нем  $\Delta$  через  $\omega$ , мы должны при отборе 2-н. части отбрасывать вклады  $\bar{\mathcal{F}}_{\omega}$  в  $\Delta$ , поскольку вставка в качестве линии нетривиального блока  $\text{---}$  в график  $\bar{\Gamma}(\alpha, \Delta)$  с необходимостью приводит к 2-приводимому по вершинам графику. Следовательно,

$$2\text{-н. часть } \mathcal{F}(\alpha, \omega) = 2\text{-н. часть } \bar{\Gamma}(\alpha, \omega), \quad (171)$$

что является аналогом (140) для второго преобразования. Все эти рассуждения и результат (171) справедливы для любой теории, а не только для газа. Разница будет лишь в том, что в формулы (168)—(170) вместо  $\alpha$  войдет второй вершинный множитель  $u_2(\alpha)$ .

Соотношение (171) полностью характеризует 2-неприводимые по вершинам графики для любой теории, так что вся трудность, как обычно, состоит в описании приводимых графиков. Такие графики есть даже для газа, но они имеют простой вид и могут быть полностью охарактеризованы: это, во-первых, мно-

гоугольники, во-вторых, графики вида  $\textcircled{\ominus}$ , которые мы будем называть „арбузами”. Ниже будет показано, что для газа

$$2\text{-я часть } \bar{\mathcal{F}}(\alpha, \omega) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \left[ \textcircled{n} + \frac{1}{n-1} \textcircled{\ominus}_n \right]. \quad (172)$$

Приведенные в (166) 2-неприводимые графики третьего порядка точно соответствуют вкладу с  $n = 3$  в сумму (172).

Для доказательства утверждения (172) воспользуемся, как обычно, уравнением движения для  $\mathcal{F}$ . Для получения этого уравнения нужно выразить вторую производную  $W_{\varphi\varphi}$  в (164) через производные  $\mathcal{F}$ .

Это легко сделать, зная, что матрицы вторых производных  $W$  и  $\mathcal{F}$  в переменных  $\varphi$ ,  $\Delta$  и  $\alpha$ , с соответственно взаимно-обратны с точностью до знака. Отсюда получим  $W_{\varphi\varphi}^{-1} = -\mathcal{F}_{\alpha\alpha} + \mathcal{F}_{\alpha s} \mathcal{F}_{ss}^{-1} \mathcal{F}_{s\alpha}$ . Подставим это выражение в уравнение (164), предварительно обратив последнее; выразив затем производные  $\mathcal{F}$  в переменных  $\alpha$ ,  $\omega$ , получим

$$2\mathcal{F}_{\omega} = \alpha [1 \cdot \alpha + \alpha\omega\alpha]^{-1} \alpha + \alpha \mathcal{F}_{\alpha\alpha} - 2\omega \mathcal{F}_{\omega} - h_{\alpha\omega} \mathcal{F}_{\omega\omega}^{-1} h_{\omega\alpha}, \quad (173)$$

$$\text{где} \quad h_{\alpha\omega} \equiv \alpha \mathcal{F}_{\alpha\omega} - 2\mathcal{F}_{\omega} \cdot 1. \quad (174)$$

Расстановку аргументов  $x$ ,  $x'$  в уравнении (173) пояснитса по ходу дела.

Предупредим читателя, желающего проверить формулы, что связанные с заменой  $s \rightarrow \omega$  выкладки довольно утомительны, хотя в них нет никаких серьезных трудностей. Технически проще делать замену в два шага, переходя сначала от переменной  $s(x, x')$  к переменной  $\beta(x, x')$ , определенной равенством  $2s = \beta + \alpha\alpha$  (при этом  $\mathcal{F}_{\alpha\alpha} - \mathcal{F}_{\alpha s} \mathcal{F}_{ss}^{-1} \mathcal{F}_{s\alpha} \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha\alpha} - \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\beta\beta}^{-1} \mathcal{F}_{\beta\alpha} - 2\mathcal{F}_{\beta}$ ), а уже затем от  $\beta$  к  $\omega = \alpha^{-1}\beta\alpha^{-1}$ .

В левую часть (173) входит производная по линии  $\omega(x, x')$ . Первым слагаемым в правой части является прогрессия

$\alpha [1 + \alpha + \alpha \omega \alpha]^{-1} \alpha = \dots \rightarrow + \rightarrow \dots$  с фиксированными аргумен-

тами  $x, x'$  крайних вершин цепочек. Вклад нулевого порядка из прогрессии сокращается с вкладом нулевого приближения в слагаемом  $\alpha \mathcal{F}_{\alpha\alpha} \equiv \alpha(x) \mathcal{F}_{\alpha\alpha}(x, x') \alpha(x')$ ; вклад первого по-

рядка из прогрессии порождает график  $\circ$  в  $\mathcal{F}$ , вклады

второго и выше порядков порождают треугольник (166) и 2-приводимые многоугольники (172). 2-приводимые „арбузы” (172) порождаются при итерациях слагаемыми  $\alpha \mathcal{F}_{\alpha\alpha} \alpha$  и  $\omega \mathcal{F}_{\omega} \equiv \omega(x, x') \mathcal{F}_{\omega}(x, x')$  в правой части (173) из затравочного

2-неприводимого графика  $\circ$  (ниже будет показано, что по-

следний член в правой части (173) ни „арбузов”, ни многоугольников не порождает). Приравняв коэффициенты при „арбузе” с  $n$  линиями в обеих частях (173), получим рекуррентную формулу  $(n+1)c_{n+1} = -(n-1)c_n$  для коэффициента  $c_n$  при „арбузе” с  $n$  линиями. Зная  $c_2 = -1/4$ , получаем отсюда те коэффициенты при „арбузах”, которые приведены в (172). Отметим, что эти коэффициенты аномальны, т. е. отличаются от обратного симметричного числа, которое для „арбуза” с  $n$  линиями равно  $2n!$  (совпадение во втором и третьем порядках случайное). Отметим также, что с точностью до множителя  $-1/2$  коэффициенты при „арбузах” совпадают с коэффициентами разложения функции  $(1+x)\ln(1+x)$ , так что при желании ряд „арбузов” (172) можно явно просуммировать. Многоугольники (172) легко суммируются в логарифм в пространственно-однородной теории после перехода к импульсному представлению для линии  $\omega(x-x')$ .

В последнем члене в правой части (173) все аргументы индексов  $\omega$  сворачиваются, а  $x$  и  $x'$  являются аргументами индексов  $\alpha$  в множителях  $h_{\alpha\omega}$ . Определение (174) в подробной записи имеет вид

$$h_{\alpha\omega}(x; y, y') = \alpha(x) \frac{\delta^2 \mathcal{F}}{\delta \alpha(x) \delta \omega(y, y')} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega(y, y')} [\delta(x-y) + \delta(x-y')], \quad (175)$$

а обратное ядро  $\mathcal{F}_{\omega\omega}^{-1}$  в (173) строится, как обычно, в виде ряда типа (74), затравочное слагаемое в котором порождается

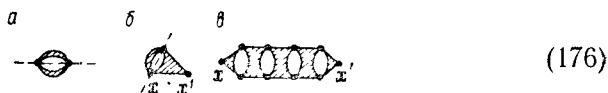
графиком  $\circ$ .

Проанализируем сначала блок  $h_{\alpha\omega}$ . Дифференцирование по  $\omega(y, y')$  равносильно удалению из графика одной линии  $\omega$  всеми возможными способами. В графиках производной  $\mathcal{F}_\omega$  будут две помеченные вершины — те, которые соединялись удаленной линией. Действуя затем на  $\mathcal{F}_\omega$  операцией  $\alpha(x)\delta/\delta\alpha(x)$ , мы метим поочередно индексом  $x$  каждую из вершин графика  $\mathcal{F}_\omega$ . Среди получающихся графиков будут и такие, в которых операция  $\alpha\delta/\delta\alpha$  метит те самые две вершины, которые уже были помечены отрывом линии  $\omega$ . Ясно, что второе слагаемое в правой части (175) в точности сокращает все такие графики, так что  $h_{\alpha\omega}$  есть та часть графиков  $\alpha\mathcal{F}_{\alpha\omega}$ , в которых операцией  $\alpha\delta/\delta\alpha$  метится новая, а не уже помеченная вершина. Все такие графики должны иметь не менее трех вершин. Двухвершинные графики — „арбузы” — вообще не дают вклада в  $h_{\alpha\omega}$ , первым графиком, дающим вклад, является приведенный в (166) трехугольник.

Из сказанного выше о структуре графиков  $h_{\alpha\omega}$  следует, что последнее слагаемое в правой части (173) не может содержать

ни простых цепочек типа  $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$ , ни „арбузов”, и поэтому не может порождать при итерациях ни многоугольников, ни „арбузов”.

Покажем теперь, что все графики  $\overline{\mathcal{F}}$ , за исключением приведенных в (172), являются 2-неприводимыми по вершинам. Назовем вершинное 2-сечение *сложным*, если хотя бы один из отсекаемых блоков не является ни простой цепочкой, ни „арбузом”. В графиках (172) сложных 2-сечений нет, а любой другой 2-приводимый график такое сечение обязательно содержит. Следовательно, наша задача состоит в доказательстве отсутствия графиков со сложными 2-сечениями. Как всегда, доказывать будем по индукции: допустим, что их нет в графиках низших порядков, и покажем, что тогда их не может быть и в графиках следующего порядка, получаемых итерациями уравнения (173). Действительно, предположим, что в  $\mathcal{F}$  появился график со сложным 2-сечением типа (176а):



Допустим для определенности, что сложным является верхний блок в (176а). Тогда в производной  $\mathcal{F}$  по  $\omega(x, x')$  должны присутствовать графики вида (176б), получаемые из графиков (176а) удалением одной из тех линий нижнего блока, которая присоединялась к одной из вершин 2-сечения.

Покажем теперь, что в условиях индукционного предположения в правой части (173) не может быть графиков типа (176б). Действительно, графики производных  $\alpha\mathcal{F}_{\alpha\alpha}$  и  $\omega\mathcal{F}_\omega$  отлича-

ются от графиков  $\mathcal{F}$ , которые были дифференцированы, только пометками вершин, так что индукционное предположение запрещает наличие в них сложных 2-сечений. Обратимся теперь к последнему члену в правой части (173). Разлагая входящую в него величину  $\mathcal{F}_{\omega\omega}^{-1}$  в ряд (см. выше), получаем прогрессию, структура одного из членов которой показана в (176в). Анализируя варианты, можно довольно быстро убедиться, что наличие в графике (176в) сложных 2-сечений типа (176б) всякий раз противоречит индукционному предположению, согласно

которому блоки  сложных 2-сечений не имеют.

Тем самым искомое утверждение доказано.

Итак, функционал  $\mathcal{F}$  для газа есть сумма 2-приводимых графиков (172) и всех 2-неприводимых по вершинам графиков  $\Gamma$ . Таких графиков в низших порядках очень мало. Помимо графиков (166) с тривиальными 2-сечениями в первых восьми порядках их только два: тетраэдр („незапечатанный конверт“) в шестом порядке и пирамида („запечатанный конверт“) в восьмом порядке. Из сорока двух звездных майеровских графов девятого порядка 2-неприводимыми по вершинам будут только три (см. Приложение 2).

Классический неидеальный газ является единственной теорией, для которой полностью описана структура 2-приводимых графиков второго преобразования. Насколько нам известно, для типичных полевых взаимодействий со степенной или полиномиальной производящей вершиной преобразования Лежандра логарифма  $S$ -матрицы вообще никем не рассматривались (ни первое, ни второе). Эти объекты популярны пока лишь в классической статистике.

**6. Уравнения стационарности и приближение самосогласованного поля.** Зная графики преобразований Лежандра  $\Gamma$  и  $\mathcal{F}$ , мы можем выразить через переменные этих функционалов все корреляционные функции, которые являются (см. определения в пп. V.2.1 и V.3.1) кратными производными логарифма статсуммы  $W(\varphi, \Delta)$  по переменной  $\varphi$ . Для этого достаточно записать повышающий оператор  $\mathcal{D} \equiv \delta/\delta\varphi$  (являющийся аналогом операторов (34), (56)) в нужных переменных. Для первого преобразования это очень просто сделать с помощью соотношений (131):  $\mathcal{D} = \delta\alpha/\delta\varphi \cdot \delta/\delta\alpha = W_{\varphi\varphi} \cdot \delta/\delta\alpha = -\Gamma_{\alpha\alpha}^{-1} \cdot \delta/\delta\alpha$ . Для второго преобразования (162) после довольно длинных, но несложных выкладок получим

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\delta}{\delta\varphi} = [\alpha\omega + 1] \left\{ \alpha \frac{\delta}{\delta\alpha} - h_{\alpha\omega} \mathcal{F}_{\omega\omega}^{-1} \frac{\delta}{\delta\omega} \right\}. \quad (177)$$

Все величины были определены в предыдущем разделе, произ-

ведение выражения в квадратных скобках на выражение в фигурных скобках нужно понимать как свертку.

Действуя повышающим оператором  $\mathcal{D}$  на первую корреляционную функцию  $W_\varphi = \alpha$ , мы выразим все старшие корреляционные функции через переменные соответствующего преобразования Лежандра —  $\alpha$ ,  $\Delta$  для  $\Gamma$  и  $\alpha$ ,  $\omega$  для  $\mathcal{F}$ . Напомним, что  $\omega$  связана со второй корреляционной функцией  $W_{\varphi\varphi}$  соотношением (164).

В соответствии с общими правилами п. 2.1 равновесные значения одетых переменных ( $\alpha$  для  $\Gamma$  и  $\alpha$ ,  $\omega$  для  $\mathcal{F}$ ) находятся по заданным значениям затравочных переменных  $\varphi$ ,  $\Delta$  путем решения уравнений стационарности. Ниже мы будем рассматривать только первое преобразование, для которого уравнение стационарности имеет вид  $\Gamma_\alpha = -\varphi$ .

Начнем с модели Изинга, в которой  $\varphi = \beta h$  — приведенное внешнее поле, а сопряженная переменная  $\alpha$  — намагниченность. Допустим, что в  $\Gamma$  удерживается лишь вклад нулевого приближения (150) и самого первого из графиков (138). Уравнение стационарности в таком приближении принимает вид  $-\varphi = F_\alpha + \Delta\alpha = -\text{arth } \alpha + \Delta\alpha$ , что с точностью до обозначений совпадает с известным уравнением Вейсса для намагниченности [41]. На языке обычных диаграмм логарифма статсуммы его получают, строя самосогласованное уравнение для намагниченности путем суммирования всех графиков типа деревьев [41], а на языке функционального интеграла (V.49) оно соответствует приближению стационарной фазы. Учет в  $\Gamma$  второго графика (138) — простой петли — на языке обычных диаграмм  $W$  дает решение следующей задачи: найти поправку к приближению Вейсса, учитывающую помимо простых деревьев все деревья со вставками в любом количестве указанной петли (в общем случае — со вставками всех тех диаграмм, которые удерживаются в  $\Gamma$ ). На языке обычных графиков подобная задача решалась в работе [80].

Отметим также, что известное приближение Орнштейна — Цернике для корреляционной функции  $W_{\varphi\varphi}$  (формула (2.77) в [41]) получается из того же приближения для  $\Gamma$ , что и уравнение Вейсса. Действительно, как было показано в начале раздела,  $W_{\varphi\varphi} = -\Gamma_{\alpha\alpha}^{-1}$ . Если в  $\Gamma$  удержать лишь вклад нулевого приближения и график первого порядка, получим

$$-\Gamma_{\alpha\alpha}^{-1} = \bullet + \bullet \text{---} \bullet + \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet + \dots,$$

где линии соответствует  $\Delta$ , а точкам — „подавляющий флуктуации” множитель  $1 - \alpha^2$ . Для однородной системы прогрессия легко суммируется после перехода к импульсному представлению и ответ с точностью до обозначений совпадает с выражением (2.77) из [41].



Всякий, кто сравнит эти выкладки с соответствующими диаграммными построениями в [41] или в [80], может судить о том, насколько упрощаются все доказательства при использовании преобразования Лежандра. В сущности все трудные комбинаторные задачи решаются тогда, когда определяется структура графиков  $\Gamma$ , а после того, как это сделано, обычные приближения и поправки к ним получаются элементарно. Но нужно сказать, что ни в каком конечном порядке для  $\Gamma$  мы не получим правильного критического поведения, так как выражение (156) в конечном порядке аналитично по  $\alpha$ ,  $\beta$  и поэтому приведет к тем же значениям критических индексов, что и классическая теория фазовых переходов Ландау. Учет конечного числа графиков  $\Gamma$  на языке обычной теории возмущений соответствует суммированию бесконечных классов диаграмм, а для получения правильного критического поведения нужно, видимо, суммировать не классы, а вообще все диаграммы (об этом говорит и гипотеза подобия). Аппарата, позволяющего это сделать (пусть приближенно, но с гарантией правильности качественных выводов), пока не существует. Техника преобразований Лежандра позволяет находить аномальное решение лишь в некотором простейшем приближении, справедливом вдали от критической точки, и затем, учитывая все больше графиков  $\Gamma$ , последовательно улучшать это приближение, что позволяет все ближе подходить к критической точке. Но поведение решения в самой критической точке нельзя, по-видимому, определить без суммирования бесконечного числа графиков  $\Gamma$ .

Переходим теперь к классическому газу. Как уже говорилось в п. 2, для пространственно-однородной системы в нулевом внешнем поле  $\alpha$  — плотность,  $a = \exp \varphi$  — активность, а удельное значение  $\gamma \equiv \Gamma/V$  представляется рядом (см. (141), (148))

$$\gamma(\alpha, \beta) = \alpha - \alpha \ln \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n S_n, \quad (178)$$

общий член которого есть сумма вкладов всех звездных графиков с  $n$  вершинами. Приближение самосогласованного поля, т. е. уравнение Ван-дер-Ваальса для давления [7, 8], получается здесь гораздо сложнее, чем во всех остальных случаях и не сводится к отбору первых графиков преобразования Лежандра. Это еще раз подтверждает, что в некоторых отношениях статистика классического неидеального газа сложнее квантовой теории поля.

Явление конденсации, описываемое уравнением Ван-дер-Ваальса, имеет место тогда, когда потенциал парного взаимодействия  $\mathcal{V}''(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  на больших расстояниях соответствует притяжению, а на малых — достаточно сильному отталкиванию. Эти две области учитываются по-разному при построении приближения самосогласованного поля. Отталкивание часто описывают моделью твердых шаров, в которой потенциал  $v$  считается равным  $+\infty$  при  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq d$ , где  $d$  — диаметр шара. При

$[x-x'] > d$  потенциал отрицателен, что соответствует притяжению.

Согласно определению п. V.3.1 линия  $\Delta$  связана с потенциалом  $\mathcal{V}$  соотношением  $\Delta = -\beta\mathcal{V}$ , и в модели твердых шаров не только можно, но и нужно переходить к майеровской линии  $g = -1 + \exp \Delta$ , принимающей конечное значение  $-1$  при  $\mathcal{V} = +\infty$ .

Для получения приближения самосогласованного поля потенциал притяжения достаточно учитывать, как и в модели Изинга, лишь в самом низшем порядке для  $\bar{\Gamma}$ , т. е. в графике

$\bar{\Gamma} = \alpha \Delta \alpha$ . Это дает в правую часть (178) слагаемое  $c\beta\alpha^2$ , где

$c$  — некоторая положительная (вследствие положительности  $\Delta$  при  $\mathcal{V} < 0$ ) константа.

С отталкиванием дело обстоит сложнее. Лучше всего было бы вычислить точно функцию (178) для модели простых твердых шаров без притяжения, но для реального трехмерного пространства это сделать не удастся. Грубому расчету статсуммы для газа твердых шаров, приводящему в итоге к уравнению Ван-дер-Ваальса (см., например, [8], с. 79), на языке преобразования Лежандра соответствует следующее выражение для  $\gamma$ :

$$\gamma_{\text{В.-В}}^{\text{отталкик}} = \alpha - \alpha \ln \alpha + \alpha \ln(1 - b\alpha), \quad (179)$$

где  $b$  — учетверенный объем твердого шара.

Выражение (179) можно понимать как результат очень грубого суммирования вкладов бесконечного числа графиков  $\bar{\Gamma}$ . Специфический вид добавки  $\alpha \ln(1 - b\alpha)$  в действительности не столь уж важен — к уравнению типа Ван-дер-Ваальса приведет любая добавка, обладающая тем свойством, что ее производная по  $\alpha$  обращается в бесконечность при некотором конечном значении  $\alpha$ . Физически это соответствует существованию некоторой предельной плотности, которую нельзя превысить, иначе говоря, учету конечности объема молекул газа. Именно эта физическая идея и лежит в основе уравнения Ван-дер-Ваальса.

Добавив к (179) вклад сил притяжения, получим

$$\gamma_{\text{В.-В}} = \alpha - \alpha \ln \alpha + \alpha \ln(1 - b\alpha) + c\beta\alpha^2. \quad (180)$$

Соответствующее уравнение стационарности  $\partial\gamma/\partial\alpha = -\varphi = -\ln a$  определяет зависимость плотности  $\alpha$  от активности  $a$ . Давление  $p$  определяется соотношением (147), подставив в которое  $\bar{\Gamma} = V\gamma$  из (180), получим  $\beta p = \gamma - \alpha\gamma_\alpha = \alpha(1 - b\alpha)^{-1} - c\beta\alpha^2$ , что с точностью до обозначений совпадает с обычным уравнением Ван-дер-Ваальса [7, 8]. Отметим, что известное правило равных площадей Максвелла, устраняющее нефизические (в равновесной теории) участки переохлаждения и перегрева, получается автоматически при замене функции (180) на ее выпуклую огибающую.

## ПРИЛОЖЕНИЕ I

### НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО УРОВНЯ

Здесь выводятся асимптотические формулы нестационарной теории возмущений для изолированного дискретного уровня, которые нужны для обоснования соотношения (1.74), выражающего сдвиг энергии уровня через  $S$ -матрицу, и соотношений (1.71), используемых при переходе от гайзенберговского представления к представлению взаимодействия в функциях Грина. Невозмущенный уровень в (1.71), (1.74) предполагался невырожденным, но мы рассмотрим для общности и случай вырожденного уровня, который особенно важен для теории атома.

Формулы нестационарной теории возмущений для дискретного уровня получают обычно в рамках адиабатического формализма Гелл-Манна — Лоу [81]; подробный вывод можно найти в [82, 83]. В адиабатической формулировке в оператор взаимодействия  $V$  вводится обрезанный множитель  $\exp(-\alpha |t|)$  и затем исследуется предел  $\alpha \rightarrow 0$ .

Введение адиабатического обрезания неудобно в нескольких отношениях. Во-первых, оно затрудняет по понятным причинам переход к импульсному представлению в диаграммах теории возмущений. Во-вторых, появление явной зависимости от времени в гамильтониане взаимодействия исключает возможность использования первого из представлений (1.55) для оператора развития. Верным остается лишь второе представление (1.55), т. е. вольтерровская  $T$ -экспонента. Наконец, сам выбор обрезанного множителя в виде  $\exp(-\alpha |t|)$  совершенно произволен. С таким же успехом можно было бы начать, например, с гауссового обрезания  $\exp(-\alpha t^2)$  или любого другого. Этот произвол не имел бы значения, если бы окончательные формулы не зависели от выбора обрезания, но в действительности это не так, во всяком случае для вырожденного уровня. Для адиабатической теории Гелл-Манна — Лоу характерно появление в окончательных формулах операции  $g d/dg$ , где  $g$  — константа связи при взаимодействии. Эта операция вводит дополнительный комбинаторный множитель  $n$  для вклада  $n$ -го порядка теории возмущений. Если бы удалось провести до конца все выкладки для гауссового обрезания, то в ответах вместо  $g d/dg$  наверняка присутствовала бы какая-нибудь другая комбинаторная операция.

Мы будем использовать "естественное обрезание", рассматривая оператор развития на конечном интервале времени и затем раздвигая этот интервал до бесконечности. При таком обрезании окончательные формулы, как мы увидим ниже, не будут содержать никаких искусственных комбинаторных операций.

Следует также отметить, что окончательным продуктом адиабатической теории для вырожденного уровня являются формулы для секулярного и волнового операторов, которые строятся через оператор развития [82, 83],

но в теории нет явных асимптотических представлений для самого оператора развития. При использовании естественного обрезания такие формулы получить можно. Это было сделано в работах [84, 85], которым мы и будем следовать с небольшими изменениями. Для случая невырожденного уровня асимптотические формулы в теории с естественным обрезанием известны давно, но получались они обычно исходя из адиабатических формул Гелл-Манна — Лоу (см., например, приложение к статье Хаббарда в [86]).

Приступим теперь к самому выводу. Пусть  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}$  — полный гамильтониан, действующий в некотором гильбертовом пространстве  $X$ ,  $\mathbf{P}$  — проектор на собственное подпространство свободного гамильтониана  $\mathbf{H}_0$ , соответствующее некоторому изолированному дискретному уровню энергии  $E_0$ ,  $X_0 = \mathbf{P}X$  — невозмущенное собственное подпространство  $\mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{P}' = \mathbf{I} - \mathbf{P}$  — проектор на ортогональное дополнение к  $X_0$ . Для невырожденного уровня подпространство  $X_0$  одномерно.

Для придания строгости получаемым формулам мы введем в теорию промежуточную регуляризацию посредством замены  $\mathbf{H}_0 \rightarrow \mathbf{H}_{0\epsilon} \equiv \mathbf{H}_0 - i\epsilon\mathbf{P}'$ ,  $\epsilon > 0$ . Эта замена не вносит в гамильтониан явной зависимости от времени и поэтому не мешает использовать представление оператора развития в виде обычного произведения экспонент (1.55). Все величины в окончательных выражениях, к которым мы придем, оказываются регулярными по  $\epsilon$  в окрестности  $\epsilon = 0$ , так что в них можно просто положить  $\epsilon = 0$ . Эту регуляризацию не следует путать с обрезанием интегралов по времени, которое у нас будет обеспечиваться просто конечностью времени развития.

Пусть  $\mathbf{U}(\tau_1, \tau_2)$  — оператор развития в представлении взаимодействия (1.55). Вследствие трансляционной инвариантности по времени, которая не нарушается введенной регуляризацией, проекция  $\mathbf{P}\mathbf{U}(\tau_1, \tau_2)\mathbf{P}$  зависит лишь от разности времен  $T \equiv \tau_1 - \tau_2$ , и мы обозначим ее  $\mathbf{U}_{PP}(T)$ . Будет показано, что при  $T \rightarrow \infty$

$$\mathbf{U}_{PP}(T) \cong \exp[-i\mathbf{Q}T]\mathbf{Z} = \mathbf{Z} \exp[-i\mathbf{Q}^+T] = \mathbf{Z}^{1/2} \exp[-i\bar{\mathbf{Q}}T]\mathbf{Z}^{1/2}. \quad (1)$$

Это асимптотическое представление, справедливое в каждом порядке теории возмущений с точностью до экспоненциально малых поправок  $\sim \exp(-\epsilon T)$ ;  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Z}$  и  $\bar{\mathbf{Q}} \equiv \mathbf{Z}^{-1/2}\mathbf{Q}\mathbf{Z}^{1/2}$  — не зависящие от  $T$  и регулярные по  $\epsilon$  в окрестности  $\epsilon = 0$  операторы в  $X_0$ , для которых будут построены явные ряды теории возмущений.

При  $\epsilon = 0$  операторы  $\mathbf{Z}$  и  $\bar{\mathbf{Q}}$  эрмитовы, а  $\mathbf{Q}$  — нет, причем

$$\mathbf{Q}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}\mathbf{Q}^+. \quad (2)$$

Эрмитовость  $\bar{\mathbf{Q}}$  является следствием этого равенства.

Для "половинных  $S$ -матриц" будут получены следующие асимптотические представления, справедливые с той же точностью, что и (1):

$$\mathbf{U}(0, -T)\mathbf{P} \cong \mathbf{Q} \exp[-i\mathbf{Q}T]\mathbf{Z}; \quad \mathbf{P}\mathbf{U}(T, 0) \cong \mathbf{Z} \exp[-i\mathbf{Q}^+T]\mathbf{Q}'. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Q}^+$ ,  $\mathbf{Z}$  — те же операторы, что и в (1),  $\mathbf{Q}$  — оператор из  $X_0$  в  $X$ ,  $\mathbf{Q}'$  — оператор из  $X$  в  $X_0$ . Из сравнения (1), (2) и (3) видно, что

$$\mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{Q}'\mathbf{P} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{Q}'\mathbf{Q} = \mathbf{Z}^{-1}. \quad (4)$$

Прежде чем доказывать формулы (1)–(3), выясним физический смысл входящих в них операторов. Напомним, что *секулярной операцией* или *секулярной матрицей* в широком смысле называют любую линейную операцию в собственном подпространстве  $X_0$ , собственными значениями которой являются искомые сдвиги энергии уровней. В узком смысле секулярной операцией называют [83] ту из них, для которой собственными векторами являются проекции точных волновых функций  $\Psi_\alpha$  в подпространство  $X_0$ . *Волновым* называют оператор из  $X_0$  в  $X$ , переводящий проекции точных волновых функций  $\mathbf{P}\Psi_\alpha$  в сами эти функции.

Допустим, что соотношения (1)—(3) справедливы, и докажем, что тогда  $\Omega$  — волновой оператор, а  $Q$  — секулярный в узком смысле.

Пусть  $\Phi$  — произвольный вектор из  $X_0$ ,  $\Phi_\alpha$  — набор собственных функций оператора  $Q^+$  в  $X_0$ ,  $\omega_\alpha$  — соответствующие собственные значения. Разложим  $\Phi$  по базису  $\Phi_\alpha$ :  $\Phi = \sum c_\alpha \Phi_\alpha$ ; воспользовавшись первым из представлений (3) и равенством (2), для вектора  $U(0, -T)\Phi \equiv \Psi(T)$  получим

$$\Psi(T) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \Omega Z \Phi_{\alpha} \exp(-i\omega_{\alpha} T). \quad (5)$$

Это асимптотическое (при  $T \rightarrow \infty$ ) представление, справедливое с точностью до экспоненциально малых в каждом порядке теории возмущений поправок (регуляризация подразумевается). С другой стороны, согласно первому из равенств (1.55)  $U(0, -T) = \exp(-iHT) \exp(iH_0 T)$  и  $U(0, -T)P = \exp i(E_0 - H)T \cdot P$  в силу равенства  $H_0 P = E_0 P$ . Отсюда ясно, что всякий вектор  $\Psi(T) = U(0, -T)\Phi$ ,  $\Phi \in X_0$  удовлетворяет уравнению Шредингера  $i\partial\Psi/\partial T = (H - E_0)\Psi$ . Подставив сюда  $\Psi(T)$  в форме (5) и учитывая произвольность  $c_\alpha$ , заключаем, что  $(H - E_0)\Omega Z\Phi_\alpha = \omega_\alpha \Omega Z\Phi_\alpha$  для любого  $\alpha$ . Это доказывает, что  $\Psi_\alpha \equiv \Omega Z\Phi_\alpha$  — собственные векторы полного гамильтониана  $H$ , т. е. точные волновые функции, а  $\omega_\alpha$  — искомые сдвиги энергии. Последнее означает, что  $Q^+$  — секулярный оператор.

Из приведенного в (4) равенства  $P\Omega = P$  следует, что векторы  $Z\Phi_\alpha$  суть проекции в  $X_0$  точных волновых функций  $\Psi_\alpha$ :  $Z\Phi_\alpha = P\Omega Z\Phi_\alpha = P\Psi_\alpha$ . Следовательно,  $\Omega$  — волновой оператор. И наконец, из определения  $\Phi_\alpha$  как собственных векторов  $Q^+$  и равенства (2) находим, что проекции  $Z\Phi_\alpha$  — собственные векторы  $Q$ :  $QZ\Phi_\alpha = ZQ^+\Phi_\alpha = \omega_\alpha Z\Phi_\alpha$ . Следовательно,  $Q$  — секулярный в узком смысле оператор, что и требовалось доказать.

Отметим, что из равенства  $i\partial U(0, -T)P/\partial T = (H - E_0)U(0, -T)P$  и представления (3) вытекают соотношения

$$\Omega Q = (H - E_0)\Omega, \quad Q = P V \Omega. \quad (6)$$

Второе равенство следует из первого при учете соотношений  $P\Omega = P$  и  $P(H - E_0) = P V$ .

Воспользовавшись асимптотическими представлениями (1) и (3), можно выразить секулярный и волновой операторы через оператор развития:

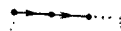
$$Q = \lim_{T \rightarrow \infty} i \frac{\partial U_{PP}(T)}{\partial T} U_{PP}^{-1}(T); \quad \Omega = \lim_{T \rightarrow \infty} U(0, -T) U_{PP}^{-1}(T). \quad (7)$$

Для невырожденного уровня подпространство  $X_0$  одномерно и все операторы в нем являются обычными числами. Число  $Q = Q^+ = \Delta E$  есть сдвиг энергии уровня, соотношение (1) после логарифмирования дает (1.74). Формулу (1.74) можно существенно уточнить: из (1) видно, что для невырожденного уровня в асимптотическом представлении логарифма ожидания оператора развития главный член имеет порядок  $T$  с коэффициентом  $-i\Delta E$ , следующий член имеет порядок  $T^0 = 1$  с коэффициентом  $\text{In } Z$ . Поправки к этим двум членам являются уже экспоненциально малыми, т. е. члены порядка  $T^{-1}$ ,  $T^{-2}$ , и т. д., появления которых можно было ожидать, на самом деле отсутствуют.

Из формул (3) для случая невырожденного уровня получим (1.71): если  $\Phi$  — нормированное невозмущенное собственное состояние, то  $\Psi = \Omega Z\Phi$  — нормированное точное собственное состояние, поскольку из унитарности оператора развития следует, очевидно, изометричность  $\Omega Z$ .

Переходим теперь непосредственно к доказательству формул (1)—(3). Исходной точкой является обычное представление (1.55) оператора развития:

$$U(\tau_1, \tau_2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{\tau_2}^{\tau_1} \dots \int dt_1 \dots dt_n \theta(t_1 \dots t_n) V(t_1) \dots V(t_n). \quad (8)$$

Общий член этого ряда можно изобразить графически цепочкой  сопоставив каждой из точек операторный множитель —  $iV(t_k)$ , а направленной линии  $\overset{i}{\rightarrow} \underline{2}$  — функцию  $\theta(t_1 - t_2)$ . По каждому времени  $t_k$  производится интегрирование от  $\tau_2$  до  $\tau_1$ .

Поставив между всеми операторами взаимодействия в (8) множитель  $1 = P + P'$ , представим ряд (8) прогрессией

$$U = 1 + \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] \overset{P}{\rightarrow} \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] \overset{P}{\rightarrow} \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] \overset{P}{\rightarrow} \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] + \dots \quad (9)$$

с операторными блоками

$$\left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] \underline{2} \equiv -i M(t, 2) = \overset{P'}{\rightarrow} \overset{P'}{\rightarrow} \overset{P'}{\rightarrow} \dots \quad (10)$$

Линии  $\theta$  в (9) содержат множителем проектор  $P$ , а линии в (10) — проектор  $P'$ . Каждый из блоков  $M$  есть функция двух аргументов, являющихся временами крайних точек цепочек (10). По временам остальных точек в (10) производится интегрирование (в конечных пределах, так как все они заключены между временами крайних точек). Аналитически ряд (10) записывается следующим образом:

$$-iM(t, t') = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int \dots \int dt_1 \dots dt_n \delta(t - t_1) \delta(t' - t_n) \theta(t_1 \dots t_n) V(t_1) P' V(t_2) \dots P' V(t_n). \quad (11)$$

Из определения видно, что оператор  $M(t, t')$  — запаздывающий, т. е. отличен от нуля лишь при  $t \geq t'$ .

В общем члене ряда (9) с  $n$  блоками имеется  $2n$  временных аргументов — по два на каждый из блоков. По всем этим аргументам производится интегрирование от  $\tau_2$  до  $\tau_1$ .

Нас интересуют проекции  $PUP$ ,  $P'UP$  и  $PUP'$ , которые мы обозначим для краткости  $U_{PP}$ ,  $U_{P'P}$  и  $U_{PP'}$ . Из (9) видно, что

$$U_{PP} = P + P \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] P + P \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] \overset{P}{\rightarrow} \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] P + \dots, \quad (12)$$

$$U_{P'P} = P' \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] P + P' \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] \overset{P}{\rightarrow} \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] P + \dots = P' \left[ \begin{array}{c} \square \\ \rightarrow \end{array} \right] \overset{P}{\rightarrow} U_{PP} \quad (13)$$

и аналогично для  $U_{PP'}$ .

Рассмотрим сначала оператор  $M(t, t')$ . Заменяя каждый из операторов  $V(t)$  в (11) на  $\exp(iH_0 t) V \exp(-iH_0 t)$  и заметив, что появляющиеся между соседними операторами  $V$  экспоненты зависят лишь от разностей времен, заключаем, что

$$M(t, t') = \exp(iH_0 t) G(t - t') \exp(-iH_0 t'), \quad (14)$$

где  $\mathbf{G}$  — запаздывающий оператор, являющийся функцией разности  $t - t'$ . Перейдя к энергетическому представлению

$$\mathbf{G}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int dE \mathbf{g}(E) \exp(-iE\tau), \quad (15)$$

нетрудно вычислить исходя из определений (11), (14), (15) оператор  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{g}(E) = \mathbf{V} + \mathbf{V} \frac{\mathbf{P}'}{E - \mathbf{H}_0 + i0} \mathbf{V} + \mathbf{V} \frac{\mathbf{P}'}{iE - \mathbf{H}_0 + i0} \mathbf{V} \frac{\mathbf{P}'}{E - \mathbf{H}_0 + i0} \mathbf{V} + \dots \quad (16)$$

Бесконечно малые мнимые добавки  $+i0$  в знаменателях присутствуют и в нерегуляризованной теории. Они появляются из стандартного спектрального представления  $\theta$ -функции и отражают свойство запаздывания  $\mathbf{G}$ . Введение регуляризации приводит к замене  $\mathbf{H}_0 \rightarrow \mathbf{H}_0 - i\epsilon \mathbf{P}'$  в (16), что равносильно замене  $i0 \rightarrow i\epsilon$ . Это показывает, что мы имеем дело с естественной регуляризацией запаздывающей функции: контур интегрирования по  $E$  в (15) с верхнего берега вещественной оси смещается в комплексную плоскость.

Замена  $i0 \rightarrow i\epsilon$  в знаменателях (16) эквивалентна замене  $E \rightarrow E - i\epsilon$  в показателе экспоненты в (15), т. е. при регуляризации

$$\mathbf{G}(\tau) \rightarrow \mathbf{G}_\epsilon(\tau) = \mathbf{G}(\tau) \exp(-\epsilon\tau). \quad (17)$$

Следовательно, регуляризованный оператор  $\mathbf{G}(\tau)$  убывает экспоненциально быстро при  $\tau \rightarrow \infty$ , так что интеграл от  $\mathbf{G}$  по  $\tau$  хорошо сходится (напомним, что  $\mathbf{G} = 0$  при  $\tau < 0$ ).

Посмотрим теперь, как отражается регуляризация на различных проекциях оператора (14). Согласно (17), оператор  $\mathbf{G}(t - t')$  получает при регуляризации режущий множитель  $\exp \epsilon(t' - t)$ ; операторные экспоненты в (14) получают при регуляризации добавочные множители лишь тогда, когда они умножаются на проектор  $\mathbf{P}'$ . Отсюда ясно, что проекция  $\mathbf{M}_{PP}(t, t')$  получает такой же множитель от регуляризации, как  $\mathbf{G}(t - t')$ , проекция  $\mathbf{M}_{P'P}(t, t')$  получает в совокупности множитель  $\exp \epsilon t'$ , а проекция  $\mathbf{M}_{PP'}(t, t')$  — множитель  $\exp(-\epsilon t)$ . Таким образом, множитель от регуляризации в проекции  $\mathbf{M}_{PP}$  всегда является режущим, в проекции  $\mathbf{M}_{P'P}$  он будет режущим лишь при  $t' < 0$ , а в  $\mathbf{M}_{PP'}$  — при  $t > 0$ . Именно поэтому проекцию  $\mathbf{U}_{PP}$  оператора развития, выражающуюся, как видно из (9), только через  $\mathbf{M}_{PP}$ , можно рассматривать на любом интервале времени, тогда как проекции  $\mathbf{U}_{P'P}$  и  $\mathbf{U}_{PP'}$  следует рассматривать соответственно на отрицательной и положительной полуосях времени (что и поясняет формулы (1), (3)).

Для дальнейшего отметим, что оператор  $\mathbf{g}(E)$  регулярен по  $E$  в окрестности точки  $E = E_0$ , поскольку мы предположили, что уровень  $E_0$  изолированный (конечно, лишь в порядках теории возмущений). Отсюда следует, что как сам  $\mathbf{g}(E)$ , так и все его производные являются эрмитовыми операторами в точке  $E = E_0$ .

Рассмотрим проекцию  $\mathbf{U}_{PP}(\tau_1, \tau_2)$ , которая, как уже говорилось, зависит лишь от разности  $T \equiv \tau_1 - \tau_2$ . Поэтому без ограничения общности можно положить  $\tau_1 = T, \tau_2 = 0$ .

Общий член ряда (9) является, очевидно, полиномом по  $T$ , старшая степень которого равна числу блоков  $\mathbf{M}_{PP}$  в цепочке (наш параметр  $T$  является аналогом  $1/\alpha$  в адиабатическом формализме). Для получения асимптотической формулы (1) мы должны выделить явно всю зависимость от  $T$  и доказать, что получающийся степенной ряд по  $T$  собирается в операторную экспоненту.

Решим сначала первую задачу. Проекция  $M_{PP}(t, t') = G(t - t') \times \exp iE_0(t - t')$  зависит лишь от разности  $t - t'$ . В энергетическом представлении

$$M_{PP}(t, t') = \frac{1}{2\pi} \int dE m(E) \exp iE(t' - t) \quad (18)$$

имеем  $m(E) = g_{PP}(E + E_0)$ . Если для каждого из блоков  $M_{PP}(t, t')$  в (9) ввести новые переменные  $x \equiv (t + t')/2$  и  $\tau \equiv t - t'$ , то зависимость от переменных  $x$  войдет лишь в аргументы  $\theta$ -функций в (9) и поэтому можно попытаться выполнить явно интегрирование по этим переменным. Для переменных  $t, t'$  интегрирование в (9) производится по области  $T > t > t' > 0$ , следовательно, при фиксированном  $\tau = t - t' > 0$  интегрирование по  $x$  производится от  $\tau/2$  до  $T - \tau/2$ . В общем члене ряда (9) с  $n$  блоками  $M_{PP}$  интеграл по переменным  $x_1 \dots x_n$  от произведения  $\theta$ -функций выглядит следующим образом:

$$\int_{\tau/2}^{T-\tau/2} dx_1 \dots \int_{\tau_n/2}^{T-\tau_n/2} dx_n \theta\left(x_1 - x_2 - \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \dots \theta\left(x_{n-1} - x_n - \frac{\tau_{n-1} + \tau_n}{2}\right).$$

Он берется явно и оказывается равным (все  $\tau_i$  неотрицательны)

$$\frac{1}{n!} \theta\left(T - \sum_{k=1}^n \tau_k\right) \left(T - \sum_{k=1}^n \tau_k\right)^n.$$

Следовательно, для проекции  $U_{PP}(T)$  получаем

$$U_{PP}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_0^T \dots \int_0^T d\tau_1 \dots d\tau_n M_{PP}(\tau_1, 0) \dots \dots M_{PP}(\tau_n, 0) \theta\left(T - \sum_{k=1}^n \tau_k\right) \left(T - \sum_{k=1}^n \tau_k\right)^n. \quad (19)$$

Это точная формула, так как мы пока не делали никаких приближений.

Регуляризованный оператор  $M_{PP}(\tau, 0)$  убывает экспоненциально при  $\tau \rightarrow \infty$ , так что все интегралы по  $\tau$  в (19) хорошо сходятся. Отсюда ясно, что отбросив в (19)  $\theta$ -функцию и распространив интегрирование по всем  $\tau_k$  до бесконечности, мы внесем лишь экспоненциально малую ошибку. Это приводит нас к асимптотической формуле

$$U_{PP}(T) \cong \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} d\tau_1 \dots d\tau_n M_{PP}(\tau_1, 0) \dots \dots M_{PP}(\tau_n, 0) \left(T - \sum_{k=1}^n \tau_k\right)^n. \quad (20)$$

Вся зависимость от  $T$  выделена явно, и остается лишь собрать степенной ряд по  $T$  в экспоненту. Воспользовавшись тождеством

$$\left(T - \sum_{k=1}^n \tau_k\right)^n = \left(T + i \frac{d}{dE}\right)^n \exp\left(iE \sum_{k=1}^n \tau_k\right) \Big|_{E=0}$$



и равенством (18), представим правую часть (20) в виде двойного ряда:

$$U_{PP}(T) \cong \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^n}{k!(n-k)!} T^k (i\mathcal{D})^{n-k} \mathbf{m}^n. \quad (21)$$

Здесь и далее  $\mathbf{m} \equiv \mathbf{m}(E)$ ,  $\mathcal{D} \equiv d/dE$  и подразумевается, что после выполнения дифференцирования нужно положить  $E=0$ .

Поменяв в (21) порядок суммирования, получаем ряд

$$U_{PP}(T) \cong \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{Z}_k (-iT)^k, \quad (22)$$

в котором

$$\mathbf{Z}_k \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{D}^n \mathbf{m}^{n+k}. \quad (23)$$

Сразу же отметим, что при  $\varepsilon=0$  все операторы  $\mathbf{Z}_k$  эрмитовы вследствие эрмитовости оператора  $\mathbf{m}(E) = \mathbf{g}_{PP}(E+E_0)$  и всех его производных в окрестности точки  $E=0$ .

Теперь покажем, что

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{Q}^k \mathbf{Z}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где  $\mathbf{Z} \equiv \mathbf{Z}_0$ , а  $\mathbf{Q}$  — оператор, определенный соотношением

$$\mathbf{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{D}^n \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q}^n. \quad (25)$$

Для доказательства воспользуемся равенством

$$\mathcal{D}^n \mathbf{m}^{1+n+k} = \sum_{s=0}^n \frac{n!}{s!(n-s)!} \mathcal{D}^{n-s} \mathbf{m} \cdot \mathcal{D}^s \mathbf{m}^{n+k},$$

подставив которое в (23), получим систему уравнений для  $\mathbf{Z}_k$ :

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{D}^n \mathbf{m} \cdot \mathbf{Z}_{n+k} = \mathbf{m} \mathbf{Z}_k + \mathcal{D} \mathbf{m} \cdot \mathbf{Z}_{k+1} + \dots \quad (26)$$

Определим повышающий оператор  $\mathbf{Q}_k$  соотношением  $\mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{Q}_k \mathbf{Z}_k$ . Этот оператор можно построить в виде ряда по  $\mathbf{m}$  с помощью уравнений (26). Из (23) видно, что минимальный порядок по  $\mathbf{m}$  в  $\mathbf{Z}_k$  равен  $k$ , так что минимальным порядком по  $\mathbf{m}$  для  $\mathbf{Q}_k$  является первый, а не нулевой. Следовательно, для определения  $\mathbf{Q}_k$  в низшем порядке по  $\mathbf{m}$  в правой части (26) нужно оставить лишь первое слагаемое, так что в этом приближении  $\mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{m} \mathbf{Z}_k$  и  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{m}$ . В следующем порядке нужно учесть в правой части (26) и вклад  $\mathbf{Z}_{k+1}$  в найденном ранее приближении, но слагаемыми с  $\mathbf{Z}_{k+2}$  и выше все еще можно пренебрегать. Следовательно, в двух первых порядках  $\mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{m} \mathbf{Z}_k + \mathcal{D} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \mathbf{Z}_k$ , т. е.  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{m} + \mathcal{D} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}$ , и т. д. Важно то, что уравнений (26) вполне достаточно для итерационного построения всех  $\mathbf{Q}_k$ . Остается заметить, что процесс итераций совершенно одинаков для всех  $k$ , так что получающийся оператор  $\mathbf{Q}_k$  в действительности от  $k$  не зависит, отсюда и следует (24).

Если просто подставить операторы  $\mathbf{Z}_k$  в виде (24) в уравнения (26), то множитель  $\mathbf{Q}^k \mathbf{Z}$  сократится и вся система (26) сведется к единственно-

му уравнению (25) для  $Q$ . Тем самым мы докажем, что  $Q_k = Q$  для всех  $k$  является решением системы (23). Но в действительности это не упрощение, так как все равно мы сначала обязаны проверить, что система (26) определяет все  $Q_k$  однозначно.

Доказав соотношения (24), мы доказали и первое из равенств (1), поскольку при подстановке (24) в (22) получается ряд экспоненты. Для получения остальных формул (1) воспользуемся известной эрмитовостью всех операторов  $Z_k$  в (22) и представлением (24). Отсюда  $Z_k = Q^k Z = Z (Q^+)^k = Z_k^+$ , что доказывает равенство (2), а с ним и прочие формулы (1).

Уравнение (25) легко решается итерациями. В четырех первых порядках по  $m$  получаем

$$Q = m + m'm + \frac{1}{2} m''mm + m'm'm + m'm'm'm + \frac{1}{2} m'm''mm + \\ + \frac{1}{2} m''m'mm + \frac{1}{2} m''mm'm + \frac{1}{6} m'''mmm + \dots, \quad (27)$$

где  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$  и  $m'''$  обозначают соответственно оператор  $m(E)$  и три первых его производных в точке  $E=0$ . Воспользовавшись определением  $m(E) = g_{PP}(E + E_0)$  и явным выражением (16) для  $g$ , получим из (27) ряд теории возмущений по степеням  $V$ . В четырех первых порядках

$$Q = PVP + PVAVP + PVAVAVP - PVA^2VPVP + PVAVAVAVP - \\ - PVAVA^2VPVP - PVA^2VAVPVP - PVA^2VPVAVP + \\ + PVA^3VPVP + \dots, \quad (28)$$

где обозначено  $A \equiv P'(E_0 - H_0)^{-1}$ . Отметим, что в (28) дают вклад лишь три первых члена (27), поскольку для любой из производных  $m$  разложение начинается со второго порядка по  $V$ , а для  $m$  — с первого. Приведем также оператор  $Z$  с точностью до членов порядка  $V^3$ :

$$Z = P - PVA^2VP - PVA^2VAVP - PVAVA^2VP + \\ + PVA^3VPVP + PVPVA^3VP + \dots$$

Полезно также отметить, что в случае невырожденного уровня, когда  $Q = \Delta E$  является простым числом, уравнение (25) можно переписать в виде  $\Delta E = m(\Delta E) = g_{PP}(E_0 + \Delta E)$ , поскольку правая часть (25) оказывается тогда обычным рядом Тэйлора.

Докажем теперь асимптотические формулы (3). Из (10) видно, что

$$U_{P'P}(0, -T) = -i \int_{-T}^0 dt \int_{-T}^t dt' M_{P'P}(t, t') U_{PP}(t', -T). \quad (29)$$

В регуляризованной теории интегралы по  $t$  и  $t'$  хорошо сходятся, так что для получения асимптотической формулы можно распространить интегрирование по  $t$  и  $t'$  до  $-\infty$ , а оператор  $U_{PP}$  заменить его асимптотическим выражением  $\exp[-iQ(t' + T)] \cdot Z$ . Получим

$$U_{P'P}(0, -T) \cong \Omega_{P'P} \exp[-iQT] \cdot Z, \quad (30)$$

где

$$\Omega_{P'P} \equiv -i \int_{-\infty}^0 dt \int_{-\infty}^t dt' \exp(iH_0 t) G_{P'P}(t - t') \exp[-i(E_0 + Q)t']. \quad (31)$$

Соотношение (30) совместно с (1) доказывает первую из асимптотических формул (3), поскольку  $U(0, -T)P = U_{PP}(0, -T) + U_{P'P}(0, -T) = [P + \Omega_{P'P}] \exp[-iQT] \cdot Z$ . Зная разложения (16), (28) для операторов  $g$

и  $\mathbf{Q}$ , можно вычислить по формуле (31) любое число членов ряда теории возмущений для волнового оператора  $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}_{P'P}$ . В трех первых порядках по  $\mathbf{V}$  получим

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & \mathbf{P} + \mathbf{AVP} + \mathbf{AVAVP} - \mathbf{A}^2\mathbf{VPVP} + \mathbf{AVAVAVP} - \\ & - \mathbf{AVA}^2\mathbf{VPVP} - \mathbf{A}^2\mathbf{VAVPVP} - \mathbf{A}^2\mathbf{VPVAVP} + \mathbf{A}^3\mathbf{VPVPVP} + \dots \quad (32) \end{aligned}$$

В согласии со вторым равенством (6) этот ряд можно просто получить, отбросив левый множитель  $\mathbf{PV}$  в (28). Разложения (28), (32) совпадают, конечно, с теми, которые получаются в адиабатической теории [83] и в стационарной теории возмущений.

Асимптотическое представление (3) для второй половины  $\mathbf{S}$ -матрицы получается совершенно аналогично.

Если не пользоваться разложениями в ряды теории возмущений, то интегрирование по  $t$  и  $t'$  в (31) можно выполнить явно лишь тогда, когда хотя бы одна из двух операторных экспонент в (31) в действительности не операторная, а числовая. Так будет, в частности, для невырожденного уровня — оператор  $\mathbf{Q}$  является тогда простым числом. Для вырожденного уровня оператор  $\mathbf{Q}$  можно заменить его собственным значением  $\omega_\alpha = \Delta E_\alpha$ , если рассматривается действие волнового оператора на собственный вектор  $\mathbf{P}\Psi_\alpha = \mathbf{Z}\Phi_\alpha$  оператора  $\mathbf{Q}$  (напомним, что  $\Psi_\alpha$  — точные волновые функции,  $\mathbf{P}\Psi_\alpha = \mathbf{Z}\Phi_\alpha$  — их проекции в  $X_0$ ,  $\Phi_\alpha$  — собственные векторы  $\mathbf{Q}^+$  в  $X_0$ ). Заменив в (31)  $\mathbf{Q}$  на  $\Delta E_\alpha$  и подставив вместо  $\mathbf{G}$  его спектральное представление (15), можно выполнить интегрирование по  $t$  и  $t'$ , а затем и интегрирование по  $E$  в (15) (по вычетам в верхней полуплоскости  $E$ ). В промежуточных формулах нужно удерживать регуляризующий параметр  $\epsilon$ , который обеспечивает сходимость интегралов по времени и определяет положение полюсов в  $E$ -плоскости; в окончательной формуле можно перейти к пределу  $\epsilon = 0$ . Мы приведем лишь результат:

$$\Psi_\alpha = \mathbf{Q}\mathbf{P}\Psi_\alpha = \mathbf{Q}\mathbf{Z}\Phi_\alpha = \left[ \mathbf{P} + \frac{1}{\epsilon_\alpha - \mathbf{H}_0} \mathbf{g}_{P'P}(\epsilon_\alpha) \right] \mathbf{Z}\Phi_\alpha.$$

Здесь  $\epsilon_\alpha \equiv E_0 + \Delta E_\alpha$  — точные собственные значения  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{g}_{P'P}(\epsilon_\alpha)$  — проекция оператора  $\mathbf{g}(E)$  при  $E = \epsilon_\alpha$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### ГРАФИКИ И СИММЕТРИЙНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Мы приведем графики разных типов в низших порядках (порядком считается число линий). Все графики сопровождаются симметричными коэффициентами.

**А.** 1-неприводимые по вершинам (звездные) майеровские графики. До шестого порядка включительно их 10:

$$\bullet + \frac{1}{2} \longrightarrow + \frac{1}{6} \triangle + \frac{1}{8} \square + \frac{1}{10} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{4} \text{ (square with diagonal)} + \frac{1}{24} \text{ (square with two diagonals)} + \frac{1}{12} \text{ (square with one diagonal)} + \frac{1}{2} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{12} \text{ (hexagon)};$$

в седьмом — 7:

$$\frac{1}{2} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{4} \text{ (square with two diagonals)} + \frac{1}{2} \text{ (hexagon)} + \frac{1}{4} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{12} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{4} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{14} \text{ (square)};$$

в восьмом — 16:

$$\frac{1}{4} \text{ (square with two diagonals)} + \frac{1}{8} \text{ (square with two diagonals)} + \frac{1}{8} \text{ (hexagon)} + \frac{1}{1} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{2} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{4} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{2} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{4} \text{ (pentagon)} + \\ + \frac{1}{4} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{4} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{4} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{2} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{48} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{2} \text{ (square)} + \frac{1}{2} \text{ (square)} + \frac{1}{16} \text{ (square)}.$$

В девятом порядке, который мы не приводим, таких графиков 42.

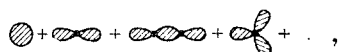
Графики А входят в первое преобразование Лежандра для классического газа (вириальное разложение) и модели Изинга.

**Б.** Все 2-неприводимые по вершинам графики до девятого порядка:

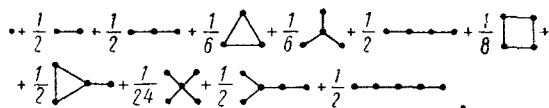
$$\bullet + \frac{1}{4} \text{ (oval)} + \frac{1}{12} \text{ (oval)} + \frac{1}{6} \triangle + \frac{1}{24} \text{ (square)} + \frac{1}{8} \text{ (square)} + \frac{1}{12} \text{ (hexagon)} + \frac{1}{12} \text{ (pentagon)} + \frac{1}{12} \text{ (square)};$$

Они входят во второе преобразование Лежандра для газа.

В. Все связанные майеровские графики, т. е. графики без закороченных и сдвоенных, строенных и т. д. линий. Они получаются из графиков А построением "деревьев звезд" [8]:

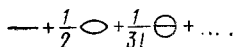


В которых каждый из блоков представляет сумму всех графиков А. До четвертого порядка включительно таких графиков 11:

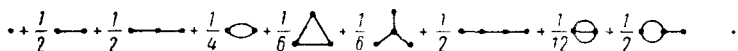


В пятом порядке таких графиков 12, в шестом — 30.

Г. Связные графики с обычными (ше майеровскими) линиями, но без закороченных. Получаются из графиков В заменой каждой из линий на

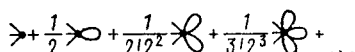


До третьего порядка включительно их 9:

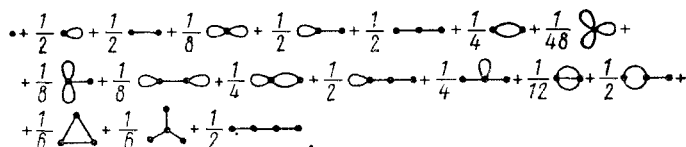


В четвертом порядке их 12, в пятом — 33, в шестом — 102.

Д. Все связанные графики (логарифм S-матрицы). Получаются из графиков Г заменой приведенных вершин (см. п. I.4.1) на обычные, т. е. добавлением в каждую из вершин закороченных линий по правилу



До третьего порядка включительно таких графиков 18:



В четвертом порядке их 30, в пятом — 95, в шестом — несколько сотен.

Е. Графики производящего функционала связанных функций Грина  $W(A)$  для теории с тройной и четверной затравочными вершинами. По определению  $W(A) = \ln G(A)$ , где  $A \equiv \{A_n, n = 1, 2, 3, 4\}$  и  $G(A) = \text{const} \int D\varphi \times \exp\left(\sum A_n \varphi^n / n!\right)$ . Известно (см. п. I.7.4), что  $W(A) = \text{const} + 1/2 \cdot \text{tr} \ln \Delta$  плюс сумма всех связанных графиков с линией  $\Delta = -A_2^{-1}$  и вершинными множителями  $A_n$  с  $n = 1, 3, 4$ . Они получаются отбором тех графиков Д, которые имеют лишь вершины с  $n = 1, 3$  и  $4$ , где  $n$  — число сходящихся в вершине линий. До четвертого порядка включительно таких графиков 15:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \infty + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \text{---} + \frac{1}{12} \text{---} \ominus + \frac{1}{6} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} + \frac{1}{48} \text{---} \text{---} \\
& + \frac{1}{6} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} + \frac{1}{24} \text{---} \times + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} + \frac{1}{16} \text{---} \text{---} + \\
& + \frac{1}{4} \text{---} \text{---}
\end{aligned}$$

**Ж.** Графики первого преобразования Лежандра функционала  $W(A)$ . По определению  $\Gamma(\alpha; A_2, A_3, A_4) = W(A) - \alpha A_1$ , где  $\alpha = \delta W / \delta A_1$ . Известно (см. п. 1.8.3), что  $\Gamma = \text{const} + 1/2 \cdot \text{tr} \ln \Delta - 1/2 \cdot \alpha \Delta^{-1} \alpha$  плюс сумма всех 1-неприводимых графиков функционала  $W(A_1 \rightarrow \Delta^{-1} \alpha, A_2, A_3, A_4)$  без первого из графиков **Е**. Графики  $\Gamma(\alpha; A_2, A_3, A_4)$  получаются из графиков **Е** заменой присоединяющихся к вершинам с  $n=3, 4$  „лучей“  $\Delta A_1$  на „хвостики“  $\alpha$ , присоединяющиеся к вершинам непосредственно, и отбрасыванием тех из полученных графиков, которые окажутся 1-приводимыми. До третьего порядка включительно таких графиков 17:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} \text{---} \text{---} + \frac{1}{24} \text{---} \times + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} + \frac{1}{16} \text{---} \text{---} + \\
& + \frac{1}{12} \text{---} \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} + \frac{1}{12} \text{---} \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} + \\
& + \frac{1}{8} \text{---} \text{---} + \frac{1}{43} \text{---} \times
\end{aligned}$$

В четвертом порядке их еще 20.

При переходе ко второму, третьему и четвертому преобразованиям Лежандра из графиков **Ж** отбрасываются те, которые не обладают нужными свойствами неприводимости. Количество графиков при этом резко сокращается. Мы не будем приводить здесь графики высших преобразований, так как их можно найти в соответствующих разделах гл. VI (для второго преобразования — до пятого порядка включительно, а для третьего и четвертого — до восьмого).

## УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. 2-е изд. М., "Наука", 1973. 416 с.
2. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М., "Наука", 1965. 236 с.
3. Hori S. On the well-ordered  $S$ -matrix. — "Prog. Theor. Phys.", 1952, vol. 7, p. 578.
4. Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. М., Атомиздат, 1972. 240 с.
5. Харари Ф. Теория графов. Пер. с англ. М., "Мир", 1973. 300 с.
6. Васильев А. Н., Раджабов Р. А. Преобразования Лежандра в модели Изинга. — "Теор. матем. физ." 1974, т. 21, с. 49.
7. Майер Дж., Гепперт-Майер М. Статистическая механика. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1952. 477 с.
8. Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. Пер. с англ. М., "Мир", 1965. 308 с.
9. Ефимов Г. В. К доказательству унитарности  $S$ -матрицы. Препринт ОИЯИ Р2—8340. Дубна, 1974. 24 с.
10. Umezawa H., Takahashi Y. The general theory of the interaction representation. Pt. I. The local field. — "Prog. Theor. Phys.", 1953, vol. 9, p. 14; Pt. II. General fields and interactions. — "Prog. Theor. Phys.", 1954, vol. 9, p. 501.
11. Медведев Б. В., Павлов В. П., Суханов А. Д. Лагранжиан и матрица рассеяния. — "Теор. матем. физ.", 1971, т. 8, с. 153.
12. Павлов В. П., Тавлуев Г. А. Гамильтониан взаимодействия в квантовой теории поля. — "Теор. матем. физ.", 1971, т. 9, с. 80.
13. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Пер. с англ. М., "Мир", 1968. 382 с.
14. Березин Ф. А. Невинеровские континуальные интегралы. — "Теор. матем. физ.", 1971, т. 6, с. 194.
15. Алимов А. Л. О фейнмановском континуальном интеграле. — Автореф. канд. дис. Л., ЛГУ, 1974. 14 с.
16. Englert F., de Dominicis C. Lagrangian field theory of Green's functions. Pt. I. Generalized perturbation theory and inversion theorems. — "Nuovo Cim.", 1968, vol. 53 A, p. 1007; Pt. II. Theory of self-generating interactions. — "Nuovo Cim.", 1968, vol. 53 A, p. 1021.
17. Englert F., de Dominicis C. Potential-correlation function duality in statistical mechanics. — "J. Math. Phys.", 1967, vol. 8, p. 2143.
18. Schwinger J. On the Green's functions of quantized fields. — "Proc. Nat. Acad. Sci.", 1951, vol. 37, p. 452.

19. Каданов Л., Бейм Г. Квантовая статистическая механика. Пер. с англ. М., "Мир", 1964. 256 с.
20. Goldstone J. Field theories with "superconductor" solutions. — "Nuovo Cim.", 1961, vol. 19, p. 154.
21. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., Физматгиз, 1962. 444 с.
22. Мак-Вини Р., Сатклиф Б. Квантовая механика молекул. Пер. с англ. М., "Мир", 1972. 380 с.
23. Таулес Д. Квантовая механика систем многих частиц. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963. 232 с.
24. Феунман Р. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. — "Rev. Mod. Phys.", 1948, vol. 20, p. 367.
25. Янг Ч., Миллс Р. Сохранение изотопического спина и изотопическая калибровочная инвариантность. — В кн.: Элементарные частицы и компенсирующие поля. М., "Мир", 1964. 322 с.
26. Фаддеев Л. Д. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов. — "Теор. матем. физ.", 1969, т. 1, с. 3.
27. Попов В. Н., Фаддеев Л. Д. Feynman diagrams for the Yang—Mills field. — "Phys. Lett.", 1967, vol. 25 B, p. 29.
28. Попов В. Н., Фаддеев Л. Д. Теория возмущений для калибровочно-инвариантных полей. Препринт ИТФ—67—36, Киев, 1967. 194 с.
29. Васильев А. Н., Письмак Ю. М. Порождающий функционал S-матрицы в теории калибровочных полей. Ч. I. — "Вестн. Ленингр. ун-та", 1975, № 10, с. 7; Ч. II. Безмассовое поле Янга—Миллса. — Там же, 1975, № 16, с. 7.
30. Славнов А. А. Тожества Уорда в калибровочных теориях. — "Теор. матем. физ.", 1972, т. 10, с. 153.
31. t'Hooft G. Renormalization of massless Yang—Mills fields. — "Nucl. Phys.", 1971, vol. 33 B, p. 173.
32. Osterwalder K., Schrader R. Axioms for Euclidean Green's functions. — "Comm. Math. Phys.", 1973, vol. 32, p. 83.
33. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции, вып. 4, М., Физматгиз, 1964. 472 с.
34. Matsubara T. A new approach to quantum-statistical mechanics. — "Prog. Theor. Phys.", 1955, vol. 14, p. 351.
35. Martin P. C., Schwinger J. Theory of many-particle system. Pt. I. — "Phys. Rev.", 1959, vol. 115, p. 1342.
36. Фрадкин Е. С. Метод функций Грина в теории квантованных полей и в квантовой статистике. — В кн.: Труды Физ. ин-та АН СССР, 1965, т. 29, с. 7.
37. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Статистическая физика. М., "Наука", 1964. 568 с.
38. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. Пер. с англ. М., "Мир", 1965. 407 с.
39. Ginibre J. Reduced density matrices of quantum gases. Pt. I. Limit of infinite volume. — "J. Math. Phys.", 1965, vol. 6, p. 238; Pt. II. Cluster property. — "J. Math. Phys.", 1965, vol. 6, p. 252.
40. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. Пер. с англ. М., "Мир", 1971. 368 с.
41. Браут Р. Фазовые переходы. Пер. с англ. М., "Мир", 1967. 288 с.
42. Фишер М. Природа критического состояния. Пер. с англ. М., "Мир", 1968.
43. Стэнли Г. Фазовые переходы и критические явления. Пер. с англ. М., "Мир", 1973. 420 с.
44. Изюмов Ю. А., Кассан-оглы Ф. А., Скрябин Ю. Н. Полевые методы в теории ферромагнетизма. М., "Наука", 1974. 224 с.
45. Stinchcombe R., Horwitz G., Englert F., Brout R. Thermodynamic behaviour of the Heisenberg ferromagnet. — "Phys. Rev.", 1963, vol. 130, p. 155.



46. Раджабов Р. А. О распространении теорем Майера на газы с многочастичными силами. — "Теор. матем. физ.", 1975, т. 23, с. 244.
47. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М., "Наука", 1975. 256 с.
48. Дайсон Ф., Монролл Э., Кац М., Фишер М. Устойчивость и фазовые переходы. Пер. с англ. М., "Мир", 1973. 374 с.
49. Васильев А. Н. Следствия выпуклости преобразований Лежандра. — "Теор. матем. физ.", 1973, т. 15, с. 320.
50. Goldstone J., Salam A., Weinberg S. Broken symmetries. — "Phys. Rev.", 1962, vol. 127, p. 965.
51. Боголюбов Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ Р-1451. Дубна, 1961. 34 с.
52. de Dominicis C., Martin P. C. Stationary entropy principle and renormalization in normal and superfluid systems. Pt. I. Algebraic formulation. — "J. Math. Phys.", 1964, vol. 5, p. 14; Pt. II. Diagrammatic formulation. — "J. Math. Phys.", 1964, vol. 5, p. 31.
53. Беляев С. Т. Применение методов квантовой теории поля к системе бозе-частиц. — "Ж. эксперим. и теор. физ.", 1958, т. 34, с. 417.
54. Lee T. D., Yang C. N. Many-body problem in quantum statistical mechanics. Pt. I. General formulation. — "Phys. Rev.", 1959, vol. 113, p. 1165; Pt. IV. Formulation in terms of average occupation number in momentum space. — "Phys. Rev.", 1960, vol. 117, p. 22.
55. Luttinger J. M., Ward J. C. Ground-state energy of a many-fermion system. Pt. II. — "Phys. Rev.", 1960, vol. 118, p. 1417.
56. de Dominicis C. Variational formulations of equilibrium statistical mechanics. — "J. Math. Phys.", 1962, vol. 3, p. 983.
57. Jona-Lasinio G. Relativistic field theories with symmetry-breaking solutions. — "Nuovo Cim.", 1964, vol. 34, p. 1790.
58. Dahmen H. D., Jona-Lasinio G. Variational formulation of quantum field theory. Pt. I. — "Nuovo Cim.", 1967, vol. 52 A, p. 807; Pt. II. A study of a functional derivative equation related to the  $gA^3$  theory. — "Nuovo Cim.", 1969, vol. 62 A, p. 889.
59. Vassiliev A. N. Etudes des symétries brisées par des méthodes fonctionnelles. — In: Cargèse lectures in physics, vol. 5. Ed. by D. Bessis. N. Y., Gordon a. Breach, 1972. 550 p.
60. Васильев А. Н., Казанский А. К. Уравнения движения для преобразования Лежандра произвольного порядка. — "Теор. матем. физ.", 1973, т. 14, с. 289.
61. Васильев А. Н., Казанский А. К., Письмак Ю. М. Уравнения для высших преобразований Лежандра в терминах 1-неприводимых вершин. — "Теор. матем. физ.", 1974, т. 19, с. 186.
62. Васильев А. Н., Казанский А. К. Преобразования Лежандра порождающих функционалов в квантовой теории поля. — "Теор. матем. физ.", 1972, т. 12, с. 352.
63. Письмак Ю. М. Доказательство 3-неприводимости третьего преобразования Лежандра. — "Теор. матем. физ.", 1974, т. 18, с. 299.
64. Васильев А. Н., Казанский А. К., Письмак Ю. М. Диаграммный анализ четвертого преобразования Лежандра. — "Теор. матем. физ.", 1974, т. 20, с. 181.
65. Письмак Ю. М. Высшие преобразования Лежандра в квантовой теории поля. — "Вестн. Ленингр. ун-та", 1974, № 16, с. 130.
66. Письмак Ю. М. Комбинаторный анализ проблемы перекрываний для вершин старших четыреххвостки. Ч. I. Некоторые топологические свойства графиков Фейнмана. — "Теор. матем. физ.", 1975, т. 24, с. 34; Ч. II. Высшие преобразования Лежандра. — Там же, 1975, т. 24, с. 177.
67. Higgs P. W. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. — "Phys. Rev.", 1966, vol. 145, p. 1156.
68. Kibble T. W. B. Symmetry breaking in non-abelian gauge theories. — "Phys. Rev.", 1967, vol. 155, p. 1554.

69. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. К теории сверхпроводимости. — "Ж. эксперим. и теор. физ.", 1950, т. 20, с. 1064.
70. Bloch C. Diagram expansions in quantum statistical mechanics. — In: Studies in statistical mechanics, vol. 3. Ed. by J. De Boer and G. E. Uhlenbeck. Amsterdam, North-Holland, 1965.
71. Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е. Фазовый переход в одноосных сегнетоэлектриках. — "Ж. эксперим. и теор. физ.", 1969, т. 56, с. 2087.
72. Поляков А. М. Микроскопическое описание критических явлений. — "Ж. эксперим. и теор. физ.", 1968, т. 55, с. 1026.
73. Поляков А. М. Свойства далеких и близких корреляций в критической области. — "Ж. эксперим. и теор. физ.", 1969, т. 57, с. 271.
74. Поляков А. М. Конформная симметрия критических флуктуаций. — "Письма в ЖЭТФ", 1970, т. 12, с. 538.
75. Васильев А. Н., Раджабов Р. А. Анализ незвездных графиков преобразования Лежандра в модели Изинга. — "Теор. матем. физ.", 1975, т. 23, с. 366.
76. Боголюбов Н. М., Васильев А. Н., Корженевский А. Л., Раджабов Р. А. Численные значения и симметричные коэффициенты майеровских звездных графиков до восьмого порядка включительно для различных решеток. — "Вестн. Ленингр. ун-та", 1976, № 4, с. 7.
77. Боголюбов Н. М., Братцев В. Ф., Васильев А. Н., Корженевский А. Л., Раджабов Р. А. Высокотемпературные разложения при произвольной намагниченности в модели Изинга. — "Теор. матем. физ.", 1976, т. 26, с. 341.
78. Bloch C., Langer J. S. Diagram renormalization, variational principles and the infinite-dimensional Ising model. — "J. Math. Phys.", 1965, vol. 6, p. 554.
79. Morita T., Hiroike K. A new approach to the theory of classical fluids. Pt. III. — "Prog. Theor. Phys.", 1961, vol. 25, p. 537.
80. Кривнов В. Я., Ольхов О. А., Провоторов Б. Н., Сарычев М. Е. Самосогласованное поле вблизи критической точки в антиферромагнитной модели Изинга. — "Теор. матем. физ.", 1970, т. 2, с. 244.
81. Gell-Mann M., Low F. Bound states in quantum field theory. — "Phys. Rev.", 1951, vol. 84, p. 350.
82. Толмачев В. В. Полевая форма теории возмущений для многоэлектронной проблемы в атомах и молекулах. Тарту, Изд-во Тартуского ун-та, 1963. 92 с.
83. Толмачев В. В. Теория ферми-газа. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973. 354 с.
84. Васильев А. Н., Китанин А. Л. Нестационарная теория возмущений для сдвигов энергии вырожденного уровня. — "Теор. матем. физ.", 1975, т. 24, с. 219.
85. Китанин А. Л. О нестационарной теории возмущений для вырожденного дискретного уровня. — "Теор. матем. физ.", 1975, т. 25, с. 414.
86. Хаббард Дж. Описание коллективных движений в системе многих частиц методами теории возмущений. Ч. I. — В кн.: Вопросы квантовой теории многих тел. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959. 266 с.
87. Campbell W. B., Finkler P., Jones C. E., Misheloff M. N. Path-integral formulation of scattering theory. — "Phys. Rev. D", 1975, vol. 12, p. 2363.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ\*

- Адиабатический формализм Гелл-Манна—Лоу *см.* Формализм
- Активность 174, 255, 274
- Алгебра грассманова *см.* Грассманова алгебра
- Ампутированная функция Грина *см.* Функция Грина
- Аномальная вершина *см.* Вершина графа
- Аномальное решение *см.* Решение аномальное
- Бесконечность флуктуаций 192
- Вакуум:**  
 физический 28  
 плотность энергии 149
- Вакуумная петля *см.* Петля вакуумная
- Вакуумное ожидание  $S$ -матрицы *см.* Ожидание вакуумное
- Вершина графа:  
 аномальная 252  
 инвариантная 212, 239  
 классического газа 176  
 модели Гайзенберга 172  
 модели Изинга 169  
 неподвижная 46  
 приведенная 40  
 производящая 39
- Вершинный множитель *см.* Множитель вершинный
- Вещественность комбинированная 137
- Вейсса поле *см.* Самосогласованное поле
- Взаимодействие эффективное 35, 58, 67, 111, 117
- Вириальное разложение *см.* Разложение
- Волновой оператор *см.* Оператор
- Ворда тождество *см.* Тождество Ворда
- Вырождение решения 90, 180
- Высокотемпературное разложение *см.* Разложение
- Гайзенберговское поле *см.* Поле
- Гамильтониан 7, 27  
 — обобщенный 151  
 — одночастичный 99
- Гелл-Манна—Лоу адиабатический формализм *см.* Формализм
- Гинзбурга—Ландау поле *см.* Самоогласованное поле
- Гипотеза подобия 193  
 — универсальности 193
- Голдстоуна теорема *см.* Теорема Голдстоуна
- Градиентное преобразование *см.* Преобразование
- Грассманова алгебра 11, 54, 61

\* В указатель не включены термины, содержащиеся в оглавлении.

- Граф:
- группа симметрии 40, 41, 45, 46
  - $k$ -неприводимость 224, 225
  - компенсированный в модели Изинга 263
  - $k$ -сечение 224
    - вершинное 251
  - майеровский 42, 44, 175
  - матрица смежности 40, 45
  - $N$ -форма в модели Изинга 258
  - ориентированный 45
  - особый 225, 229, 235
  - полный 238
  - правило знаков для взаимодействия Юкавы 48
  - связный 46
  - симметричное число 41, 47
  - скелетный 72, 199
  - стягивание 258
  - число петель 69
  - 1-неприводимость 85
  - 1- и 2-неприводимость вершинная 251
  - 2-неприводимость 218
  - 2-сечение вершинное сложное 270
- Группа движений пространства  $\Phi$  77, 90
- Давление 150, 151, 255, 274
- Действие 7, 67
  - свободное 9, 10, 45, 64, 67
- Деревья 71, 86
- Дисперсия 147
- Доопределение при совпадении времен 18, 23, 24
- Евклидов образ теории *см.* Образ евклидов теории
  - оператор развития *см.* Оператор
  - сдвиг *см.* Энергия основного состояния
- Евклидова свертка *см.* Свертка
  - функция Грина *см.* Функция Грина
- Евклидово взаимодействие *см.* Функционал
- Единое поле *см.* Поле
- Закороченная линия *см.* Линия закороченная
- Звезда 251
- Инвариантная вершина *см.* Вершина графа
- Калибровка 122
- Калибровочное преобразование *см.* Преобразование
- Квазиклассическое приближение *см.* Приближение
- Ковариантная производная *см.* Производная
- Комбинируемая вещественность *см.* Вещественность комбинируемая
  - эрмитовость *см.* Эрмитовость
- Комбинируемая сопряженная *см.* Сопряженная комбинируемая
- Линейная операция *см.* Операция
- Линия закороченная 39
  - майеровская 44, 175
- Лоренца преобразование *см.* Преобразование
- Майера теорема *см.* Теорема Майера
- Майеровская линия *см.* Линия майеровская
- Майеровский граф *см.* Граф
  - потенциал *см.* Потенциал майеровский
- Максвелла правило *см.* Правило Максвелла
- Матрица:
  - корреляции моментов 170
  - перестановочная 40
  - плотности 133, 151
- Множитель вершинный 39, 51
- Морса теорема *см.* Теорема Морса
- Намагниченность 170, 272
- Неподвижная вершина *см.* Вершина графа
- Обобщенный гамильтониан *см.* Гамильтониан обобщенный

- Обозначения универсальные 8, 44, 45, 60
- Образ евклидов теории 135
- Одночастичный гамильтониан *см.* Гамильтониан одночастичный
- Ожидание вакуумное  $S$ -матрицы 33, 52
- Оператор:
- волновой 276
  - повышающий 82, 83, 205, 206, 210, 271
  - развития 27
    - евклидов 133
    - секулярный 276
- Операторный функционал *см.* Функционал
- Операция линейная:
- определитель 47, 59, 112
  - след 59
  - транспонирование 10
  - $t$ -локальная 9
- Определитель операции *см.* Операция линейная
- Ориентированный граф *см.* Граф
- Особый граф *см.* Граф
- Перекрывающаяся расходимость *см.* Расходимость перекрывающаяся
- Переменные термодинамически сопряженные 165, 179
- Перестановочная матрица *см.* Матрица
- Петля вакуумная 52, 244
- Плотность числа частиц газа 174, 255
- Поверхность масс 24, 37, 131
- Повышающий оператор *см.* Оператор
- Поле:
- гайзенберговское 28, 87, 152
  - единое 8, 54, 60, 99
  - ренормированное 88
  - свободное 13, 14, 133
- Полная функция *см.* Функция Грина
- Полный граф *см.* Граф
- Потенциал 75, 196
  - лагранжевого типа 243
  - майеровский 177
  - термодинамический 152, 165, 195, 245, 247
  - химический 99, 102, 104, 151, 174
- Правило Максвелла 186, 274
- Преобразование:
- градиентное 120
  - калибровочное 119, 129
  - Лоренца 139
  - "частица — дырка" 100
- Приближение квазиклассическое 98, 112
- Производная ковариантная 119
- Производящая вершина *см.* Вершина графа
- Пропагатор 19, 52
  - температурный 157
- Простая свертка *см.* Свертка
- Простой функционал *см.* Функционал Пфаффиан 63
- Разложение:
- вириальное 199, 256
  - высокотемпературное 170, 257
- Расходимости перекрывающиеся 239
- Регуляризация 107
- Ренормированное поле *см.* Поле
- Решение аномальное 89, 178
- Самосогласованное поле:
- Вейсса 170, 272
  - Гинзбурга — Ландау 223
  - Хартри — Фока 104, 222, 223
- Свертка:
- евклидова 134
  - простая 14, 19, 55, 93, 101
    - симметричная часть 18, 55
  - спинов в модели Гайзенберга 172
  - температурная 157
  - хронологическая 19, 32, 65, 93, 101
- Сверхпроводимость 178, 223
- Сверхтекучесть 178, 221
- Свободное поле *см.* Поле
- Связная функция Грина *см.* Функция Грина
- Связный граф *см.* Граф
- Секулярный оператор *см.* Оператор
- Симметричность 10, 13, 15, 23
- Скелетный граф *см.* Граф

Скэйлинг *см.* Гипотеза подобия  
Собственная энергия *см.* Энергия  
Сопряжение комбинированное 137  
Статсумма 151, 173  
Суперграф 177  
Суперпропагатор *см.* Линия майеров-  
ская

Температурная свертка *см.* Свертка  
— функция Грина *см.* Функция  
Грина

Температурный пропагатор *см.* Про-  
пагатор температурный

Теорема Голдстоуна 196  
— Майера первая 49, 176, 177  
— — вторая 177, 255  
— Морса 113

Термодинамически сопряженные пе-  
ременные *см.* Переменные термо-  
динамически сопряженные

Термодинамический потенциал *см.*  
Потенциал термодинамический

Тождество Ворда 78, 128

$T$ -произведение спинов 172

$t$ -локальная операция *см.* Операция  
линейная

$t$ -локальный функционал *см.* Функ-  
ционал

Универсальные обозначения *см.* Обо-  
значения универсальные

Уравнение связи 76, 200

Ферромагнетик 179, 182

Физический вакуум *см.* Вакуум

Формализм адиабатический Гелл-

Манна—Лоу 275

Функционал:

взаимодействия 29  
— евклидов 135  
— температурный 152  
операторный 23  
— простой 28  
связная часть 50  
 $t$ -локальный 9

Функция Грина:

ампутированная 53  
без вакуумных петель 33, 53  
евклидова 134  
полная 33, 52, 67  
связная 52  
спинов 173  
температурная 151, 152  
1-неприводимая 82

Функция корреляционная флуктуа-  
ций плотности 175

Хартри—Фока поле *см.* Самосогла-  
сованное поле

Химический потенциал *см.* Потенци-  
ал химический

Хронологическая свертка *см.* Свертка

Энергия основного состояния:

минимум 89, 103, 248  
сдвиг 33, 94, 136, 148, 165, 194  
— евклидов 136

Энергия собственная 74, 85

Эрмитовость комбинированная 133

Эффективное взаимодействие *см.*

Взаимодействие эффективное

*Васильев Александр Николаевич*

**Функциональные методы  
в квантовой теории поля и статистике**

Редактор *Т. В. Мызникова*

Техн. редактор *А. В. Борщева*

Корректоры *Е. К. Терентьева, Т. Г. Павлова*

М-15036. Сдано в набор 29 I 1976 г. Подписано к печати 12 VIII 1976 г.  
Формат бумаги  $60 \times 90^{1/16}$ . Бумага типографская № 3. Печ. л. 18,5. Бум. л. 9,25.  
Уч.-изд. л. 18,97. Тираж 2980 экз. Заказ 102. Цена 1 р. 90 к.

Издательство ЛГУ им. А. А. Жданова.  
199164. Ленинград, Университетская наб., 7/9.

---

Типография ЛГУ им. А. А. Жданова. 199164, Ленинград, Университетская наб., 7/9.