

В.Вазов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Труды американского математика В.Вазова уже известны советскому читателю (Вазов В., Форсайт Д., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, 1963). Настоящая его книга посвящена методам асимптотических разложений для обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти методы могут быть использованы во многих задачах механики, электроники, астрофизики и др.

Монография содержит много примеров и задач для самостоятельного решения, а также обширную библиографию.

Книга представляет интерес как для математиков, так и для физиков, механиков и инженеров-исследователей. Она может быть использована как учебное пособие для студентов старших курсов университетов и технических вузов.

Содержание

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	9
Глава I. Некоторые основные свойства линейных дифференциальных уравнений в комплексной области	
1. Предварительные замечания	11
2. Основная теорема существования и ее следствия	13
3. Циклические соотношения относительно особых точек	20
Глава II. Регулярно особые точки	
4. Метод решения	30
5. Решения в окрестности регулярно особой точки	33
Глава III. Асимптотические степенные ряды	
6. Вводные замечания относительно иррегулярных особых точек	45
7. Определение асимптотического степенного ряда	46
8. Элементарные свойства асимптотических рядов	49
9. Существование асимптотического разложения	56
Глава IV. Иррегулярно особые точки	
10. Введение	66
11. Формальное упрощение	69
12. Аналитическое упрощение и асимптотическое решение	73
13. Различные замечания	79
14. Доказательство главной асимптотической теоремы существования в случае, когда все собственные значения различны	83
15. Явление Стокса	96
Глава V. Обобщение, получаемое при помощи жордановой канонической формы	
16. Жорданова каноническая форма	109
17. Решения в окрестности регулярно особой точки. Общий случай	115
18. Доказательство теоремы 12.1. Общий случай	121

19. Асимптотическое решение в окрестности иррегулярно особой точки. Общий случай	122
Глава VI. Некоторые специальные асимптотические методы	
20. Введение	140
21. Получение асимптотических разложений из сходящихся степенных рядов	141
22. Метод контурного интегрирования Лапласа	148
23. Метод перевала	152
Глава VII. Асимптотические разложения по параметру	
24. Введение	161
25. Формальная теория	164
26. Аналитическое упрощение	171
27. Доказательство теоремы 26.1	176
28. Срезающее преобразование	180
Глава VIII. Точки поворота	
29. Задачи, которые приводятся к уравнению Эйри. Формальная теория	186
30. Задачи, которые приводятся к уравнению Эйри. Аналитическая теория	200
31. Краткий обзор других задач, связанных с точками поворота	217
Глава IX. Нелинейные уравнения	
32. Введение	231
33. Решение в виде асимптотического степенного ряда	234
34. Преобразование в линейное дифференциальное уравнение	237
35. Решение в виде экспоненциального ряда	248
36. Нелинейные уравнения с параметром	253
Глава X. Сингулярные возмущения	
37. Краевые задачи для линейных уравнений	264
38. Краевые задачи для линейных уравнений: метод Вишика и Люстерника	274
39. Начальная задача для нелинейных уравнений. Качественная теория	287
40. Разложения в ряд для начальной задачи	301
41. Нелинейная двухточечная краевая задача	323
42. Расщепление общих линейных сингулярно возмущенных систем	339
43. Периодические решения сингулярно возмущенных задач. Общие замечания	352
44. Периодические решения сингулярно возмущенных задач. Линейная теория	358
45. Разложения в ряд для периодических решений сингулярно возмущенных задач	370
Глава XI. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью факториальных рядов	
46. Факториальные ряды и интегралы Лапласа	382
47. Решение дифференциальных уравнений ранга единица с помощью факториальных рядов	393
48. Замечания о решении дифференциальных уравнений более высокого ранга с помощью факториальных рядов	402

Добавление 1. Асимптотика решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области. М. В. Федорюк	
1. Асимптотические формулы для решений	406
2. Асимптотика решений уравнения $y'' - \lambda^2 q(z)y = 0$ в комплексной плоскости z	420
Добавление 2. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных задач, А.Б.Васильева	
1. Задача Коши	434
2. Краевые задачи	440
Литература	448

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Вниманию читателей предлагается книга профессора Висконсинского университета Вольфганга Вазова, многие годы работавшего в области асимптотических методов теории дифференциальных уравнений.

Не стоит и говорить о том, что в настоящее время асимптотические методы продолжают развиваться, несмотря на бурное развитие численных методов, вызванное появлением быстродействующих вычислительных машин, — численные и асимптотические методы не исключают, а взаимно дополняют друг друга.

В последние годы внимание ученых, занимающихся асимптотическими методами теории дифференциальных уравнений, привлекла так называемая проблема сингулярных возмущений, поставленная перед математиками интенсивным развитием таких прикладных областей, как теория автоматического регулирования, квантовая механика, газодинамика, кинетика и др. Характерной задачей этого типа является задача о построении асимптотики решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t; x, y), \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y).\end{aligned}\tag{1}$$

Пусть решение этой системы определяется некоторыми дополнительными условиями. Возникает вопрос, можно ли дать приближенную формулу для этого решения, пользуясь более простой системой уравнений, которая получается из данной, если формально положить $\varepsilon=0$. Идея сама по себе не является новой, и в случае, если система имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = F(t, z, \varepsilon),\tag{2}$$

причем правая часть зависит от параметра ε регулярным образом, ответ на поставленный вопрос был дан еще в трудах ученых прошлого века. Было установлено, что для того, чтобы найти приближенное решение системы (2) при малых ε , нужно решить систему, получающуюся из (2) при $\varepsilon=0$, при тех же дополнительных условиях, которые определяют решение полной ($\varepsilon \neq 0$) системы (2). Более того, было получено асимптотическое представление для этого решения в виде некоторых рядов по степеням малого параметра ε . Эти результаты вошли в учебники и стали классическими.

Однако, очевидно, уравнение (1) не принадлежит к типу уравнений с регулярной правой частью, так как если систему (1) переписать в виде (2), то справа появится особенность по ε при $\varepsilon=0$. Это сразу создает дополнительные и притом значительные трудности при исследовании системы (1). Одной из характерных трудностей, не возникающих для случая (2), является следующая. Решение более простого (так называемого укороченного, или вырожденного) уравнения, которое получается из (1) при $\varepsilon=0$ и имеет более низкий порядок по сравнению с исходным уравнением, принципиально не может удовлетворить *всем* дополнительным условиям, которыми определяется исследуемое решение системы (1), и поэтому, желая получить с помощью укороченного уравнения приближенную формулу для этого решения, нужно выяснить вопрос о том, какие из определяющих его условий нужно сохранить и какие отбросить для построения решения укороченного уравнения.

Эти трудности (а может быть, и недостаточность требований со стороны практики — перечисленные прикладные области начали интенсивно развиваться лишь сравнительно недавно) отодвинули решение вопросов асимптотики для уравнения (1) от решения аналогичных вопросов для (2) почти на сто лет. Однако в последнее время асимптотическая теория уравнений типа (1) развивалась весьма бурно.

Исследованию вопросов, связанных с уравнением (1) и родственными ему, посвящена обширная журнальная литература. Однако основные результаты не только не вошли в учебники, но даже до последнего времени не имелось ни одной монографии, в которой были бы освещены хотя бы основные проблемы и результаты этого направления. Книгу Вазова можно рассматривать как попытку восполнить этот пробел.

Книга состоит из нескольких глав. В первых пяти главах излагается стандартный учебный материал: сведения по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений, в частности вопросы поведения решений в окрестности особых то-

чек, и др. В отличие от многих книг здесь принята более удобная векторно-матричная форма системы дифференциальных уравнений.

Следующие главы посвящены асимптотическим методам для линейных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Здесь наряду с известным, вошедшим в учебники материалом (таким, как метод перевала) разбирается теория линейных уравнений типа (1), порядок которых понижается, если положить $\epsilon=0$. В главе VIII даются сведения об одной из труднейших проблем этой теории, имеющей большое значение для многих вопросов физики, в частности квантовой механики, — о так называемой проблеме точек поворота. Следующие две главы посвящены нелинейным уравнениям. Центральное место здесь занимает исследование решения задачи Коши для системы типа (1), в частности построение асимптотического разложения этого решения.

Целый ряд хорошо разработанных разделов теории особых возмущений остался в книге Вазова неосвещенным. Автор, например, совершенно не касается приложения метода осреднения к нелинейным задачам теории особых возмущений. Очень слабо освещена математическая теория релаксационных колебаний, представленная у нас трудами Л. С. Понтрягина, Е. Ф. Мищенко и др. Не отражено то обстоятельство, что аналогичные асимптотические закономерности имеют место для систем более общего вида (например, интегро-дифференциальных), а также для уравнений совершенно иного типа (уравнения с малым запаздыванием). Недостаточно освещен вопрос о краевых задачах для уравнения (1). Впрочем, в рамках одной книги трудно требовать систематического изложения всех современных направлений в области особых возмущений. В связи сказанным мы позволили себе написать небольшие добавления по материалу, наиболее близкому к тем вопросам, которыми занимаемся мы сами. М. В. Федорюк написал добавление 1 об асимптотике решений в комплексной плоскости уравнений с аналитическими коэффициентами, в частности о явлении Стокса. Добавление 2 об асимптотическом разложении по малому параметру решений нелинейных систем типа (1) написано А. Б. Васильевой.

Несколько слов хочется еще сказать по поводу формы изложения. Книга представляет собой как бы запись беседы с читателем, и стиль ее на первый взгляд может показаться несколько небрежным по сравнению с отработанным стилем учебника, а главы, где излагается материал в общем известный, написаны конспективно. Все это требует от читателя достаточных усилий.

В книге имеется много упражнений, полезных для самостоятельной проработки.

При переводе в текст добавлены некоторые разделы (например, 41.4), некоторые существенно переработаны. Соответствующие материалы были любезно присланы автором во время нашей работы над переводом. Переводчики и редактор русского издания выражают за это автору глубокую признательность.

А. Б. Васильева

ПРЕДИСЛОВИЕ

Важность асимптотических рядов в теории дифференциальных уравнений была ясно осознана математиками во второй половине девятнадцатого столетия, и значительная часть современной асимптотической теории была создана именно тогда. Однако только в последнее время стало ясно, насколько важны асимптотические ряды для понимания структуры решений обыкновенных дифференциальных уравнений и что они неизбежно возникают во многих вопросах прикладной математики. Число физических задач, при решении которых такие ряды используются или могут быть использованы, весьма велико и непрерывно возрастает. Сюда относятся многие вопросы квантовой механики, теории течений вязкой жидкости, упругости, электромагнитной теории, электроники, астрофизики и других областей физики.

В настоящей книге я попытался связно изложить математические методы этой теории. Читатель, который владеет основами математического анализа и теории аналитических функций, а также обладает элементарными сведениями из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории матриц, сможет, изучив эту книгу, получить достаточно полное представление об асимптотических рядах и их роли в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Это позволит ему впоследствии самостоятельно разобратся во все возрастающем потоке специальной литературы.

Эта книга не является справочником по данному предмету. На мой взгляд, написание такого справочника является неблагоприятной задачей, а возможно, и просто невыполнимой. Выбор материала отражает интересы и опыт автора. Асимптотические методы для дифференциальных уравнений рассматриваются только в тех случаях, когда можно получить бесконечные асимптотические ряды. Объем книги не позволяет нам воздать должное существующей обширной литературе по асимптотическим

разложениям решений дифференциальных уравнений частного вида, в основном по уравнениям второго порядка. Этот материал можно найти в журнальных статьях и в других книгах, и мы не много бы выиграли, если бы собрали его здесь. Дифференциальные уравнения частного вида и специальные функции использованы здесь только в качестве примеров для иллюстрации общей теории. У нас не хватило места ни для обсуждения многих увлекательных физических задач, ни для вопросов вычислительной математики. Повсюду в настоящей книге основной упор делается на математические идеи, лежащие в основе различных методов. Но даже при таких ограничениях объем книги оказался значительно большим, чем это первоначально предполагалось.

Особую благодарность я выражаю профессору К. О. Фридрихсу, который познакомил меня с этой областью много лет тому назад и чьи постоянные советы, дружба и поддержка оказали решающее влияние на мою работу.

Среди многих математиков, работы которых я использовал при написании настоящей книги, я особо выделяю профессора Й. Сибуйя.

Проницательный анализ асимптотических проблем, развитый им в ряде работ, наложил отпечаток на большинство разделов настоящей книги.

Я хочу поблагодарить многие организации и институты, которые оказывали мне финансовую или какую-либо другую поддержку. Основу книги составляют записи лекций по данному предмету, которые я читал в Израильском технологическом институте в Хаифе в 1962 г., где я был в качестве Фуллбрайтовского стипендиата. Часть последующей работы была выполнена в Математическом исследовательском центре армии США, Висконсинском университете и частично с помощью Национального научного общества. Завершение работы над этой книгой было поддержано Математическим отделом Научно-исследовательского института военно-воздушных сил.

Вольфганг Вазов

**Некоторые основные свойства
линейных дифференциальных уравнений
в комплексной области**

1. Предварительные замечания

1.1. Введение

Теория линейных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами является важной и хорошо изученной ветвью классического анализа. Помимо того, что эта теория представляет чисто математический интерес, она служит важным рабочим инструментом для многих приложений. Многие специальные уравнения этого типа изучены весьма детально по той причине, что они часто встречаются в вопросах физики и техники.

В этой книге основное внимание обращается на общие свойства определенных классов дифференциальных уравнений. Специальные уравнения будут рассматриваться только в целях иллюстрации. Литература, посвященная специальным свойствам таких основательно изученных уравнений частного вида, как гипергеометрическое уравнение, его обобщения и вырожденные формы, уравнение Бесселя, уравнение Лежандра, уравнение Матье и многие другие, заполнила бы не одну книжную полку. Даже если ограничиться только общей теорией, то предмет оказался бы слишком обширным. Наше рассмотрение будет по необходимости весьма неполным. Основное внимание будет обращено на построение решений в форме рядов, и, таким образом, на первый план выделяются скорее локальные, нежели глобальные свойства решений.

Факты, собранные в данной главе, представляют собой стандартный материал и поэтому будут даны в несколько сжатой форме.

1.2. Одно уравнение и системы уравнений

В первых семи главах будет рассматриваться одно линейное дифференциальное уравнение вида

$$u^{(n)} + a_1(x)u^{(n-1)} + \dots + a_n(x)u = g(x), \quad (1.1)$$

а также система уравнений первого порядка

$$y'_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}(x) y_k + f_j(x), \quad j=1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Коэффициенты в этих уравнениях предполагаются аналитическими функциями комплексного переменного x .

Задача интегрирования одного уравнения (1.1) может быть сведена к задаче интегрирования некоторой системы (1.2) специального вида. Это может быть сделано по-разному. Проще всего положить

$$y_j = u^{(j-1)}, \quad j=1, \dots, n \quad (1.3)$$

(здесь и в дальнейшем $u^{(0)} = u$ по определению).

Если $u(x)$ удовлетворяет (1.1), то функции $y_j(x)$, $j=1, \dots, n$, удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} y'_j &= y_{j+1}, \quad j=1, \dots, n-1, \\ y'_n &= -a_n(x) y_1 - a_{n-1}(x) y_2 - \dots - a_1(x) y_n + g(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Обратно, если $y_j(x)$, $j=1, \dots, n$, есть решение системы (1.4), то функция $y_1(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1).

Таким образом, в силу соотношения (1.3) (или некоторой другой подстановки) из каждой теоремы о системе первого порядка следует соответствующая теорема для одного уравнения n -го порядка. В этом смысле теорию систем (1.2) можно рассматривать как обобщение теории одного уравнения n -го порядка.

С другой стороны, каждая компонента $y_j(x)$ решения системы (1.2) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению порядка, не превышающего n , коэффициенты которого получаются из $a_{jk}(x)$ путем рациональных операций и дифференцирования.

Задача 1.1. Доказать последнее утверждение.

Дифференциальное уравнение для y_j , полученное таким образом, зависит, вообще говоря, от j . Кроме того, это дифференциальное уравнение обычно имеет и другие решения, которые не являются j -й компонентой решения системы (1.2). Таким образом, получение одного уравнения из системы путем исключения, как это общепринято в приложениях, часто искажает истинную природу задачи.

Системы первого порядка во многих отношениях рассматривать проще, несмотря на их большую общность. Одним из оснований для этого является большая формальная симметрия системы. Другим служит возможность эвристического подхода,

базирующегося на аналогии между одним уравнением первого порядка и системой таких уравнений. Последним по счету, но не по важности основанием является то, что рассмотрение систем первого порядка необычайно выигрывает благодаря применению теории матриц.

Использование матричных и векторных обозначений значительно упрощает запись систем. Обозначим через y вектор-столбец, т. е. матрицу, состоящую из одного столбца и n строк, компонентами которой являются y_j , $j=1, \dots, n$. Обозначим далее через $A(x)$ квадратную матрицу с элементами $a_{jk}(x)$ на пересечении j -й строки и k -го столбца. Наконец, обозначим через $f(x)$ вектор-столбец с компонентами $f_j(x)$. Тогда систему (1.2) можно записать в виде

$$y' = A(x)y + f(x).$$

2. Основная теорема существования и ее следствия

2.1. Теорема существования

Во многих стандартных учебниках доказывается следующая фундаментальная теорема. Здесь это доказательство опускается.

Теорема 2.1. Пусть квадратная матрица n -го порядка $A(x)$ и вектор-столбец $f(x)$ голоморфны в односвязной области R комплексной плоскости x . Тогда векторное дифференциальное уравнение

$$y' = A(x)y + f(x) \quad (2.1)$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$y(a) = a, \quad (2.2)$$

где a — произвольная точка R , а a — произвольный постоянный вектор. Это решение голоморфно в R .

Поясним терминологию.

Функция называется голоморфной в точке, если она является регулярной аналитической в окрестности этой точки. Функция называется голоморфной на множестве точек, если она голоморфна в каждой точке этого множества. Матрица называется голоморфной, если каждый ее элемент представляет собой голоморфную функцию. Областью называется связное открытое множество.

Заметим, что последнее утверждение теоремы, вообще говоря, не имеет места для нелинейных дифференциальных уравнений. Например, простое скалярное дифференциальное уравнение $y' = y^2$ имеет решение $y = -(x+c)^{-1}$ (c — произвольная

постоянная), которое не голоморфно при $x = -c$, несмотря на то что правая часть, очевидно, голоморфна по x и y для всех x и всех конечных y .

В силу замены (1.3) из этой теоремы вытекает следующая теорема существования для одного дифференциального уравнения n -го порядка.

Теорема 2.2. *Скалярное дифференциальное уравнение*

$$u^{(n)} + a_1(x)u^{(n-1)} + \dots + a_n(x)u = g(x), \quad (2.3)$$

коэффициенты которого голоморфны в односвязной области R , имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$u^{(j)}(a) = \alpha_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

где a — произвольная точка R , а α_j — произвольные комплексные числа. Это решение голоморфно в R .

Эти теоремы весьма полезны для эффективного построения решения линейного дифференциального уравнения по его заданному начальному значению в точке $x = a$, где коэффициенты голоморфны. В самом деле, согласно утверждению теоремы, решение (2.1) может быть разложено в степенной ряд

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r (x-a)^r, \quad (2.4)$$

радиус сходимости которого не меньше, чем расстояние ρ от a до ближайшей точки, в которой либо $A(x)$, либо $f(x)$ перестают быть голоморфными; $A(x)$ и $f(x)$ представляются рядами

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r (x-a)^r, \quad f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r (x-a)^r,$$

сходящимися в круге $|x-a| < \rho$. Подставляя эти ряды в дифференциальное уравнение (2.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x-a$ в обеих частях, приходим к рекуррентной последовательности уравнений для определения c_r ($r > 0$), а $c_0 = y(a)$ равно заданному значению α . Этот способ известен достаточно хорошо и детального разъяснения не требует.

Задача 2.1. Найти систему вида (2.1), отвечающую в соответствии с (1.3) скалярному уравнению $y'' - xy = 0$. Найти первые четыре члена разложения (2.4) при условии $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $a = 0$.

2.2. Фундаментальные системы решений однородных уравнений

Если $f(x) \equiv 0$ в (2.1) или $g(x) \equiv 0$ в (2.3), то дифференциальное уравнение называется *однородным*. В разд. 2.4 будет показано, что неоднородное уравнение может быть проинтегрировано в квадратурах, если полностью решено однородное уравнение.

Пусть $v_1(x), \dots, v_m(x)$ представляют собой m решений однородного уравнения

$$y' = A(x)y \quad (2.5)$$

($v_j(x)$ есть n -мерный вектор-столбец). Тогда любая линейная комбинация

$$\sum_{j=1}^m a_j v_j(x)$$

с постоянными комплексными коэффициентами a_j , очевидно, также является решением уравнения (2.5). Это означает с точки зрения линейной алгебры, что решения (2.5) образуют линейное векторное пространство над полем комплексных чисел. (Элементы этого пространства представляют собой упорядоченные системы из n функций от x . При каждом фиксированном численном значении x получается упорядоченная система из n чисел, которые могут быть интерпретированы как координаты вектора в некотором n -мерном пространстве. Следует отличать это пространство от пространства решений.)

Нулевым элементом в пространстве решений (2.5) является «тривиальное» решение (2.5), т. е. равное тождественно нулю. Если в произвольном линейном векторном пространстве задана конечная система элементов, то эти элементы называются *линейно зависимыми*, когда существует их линейная комбинация, представляющая собой нулевой элемент, в которой не все коэффициенты равны нулю. В данном случае m решений $v_1(x), \dots, \dots, v_m(x)$ уравнения (2.5) по определению линейно зависимы, если найдутся такие комплексные постоянные b_1, \dots, b_m , не все равные нулю, что

$$\sum_{j=1}^m b_j v_j(x) \equiv 0.$$

В противном случае эти m решений называются линейно независимыми. Если линейное векторное пространство обладает тем свойством, что существуют некоторое положительное число d и система из d линейно независимых элементов, тогда как любые $d+1$ элементов линейно зависимы, то это число d называется *размерностью* векторного пространства.

Покажем, что пространство решений дифференциального уравнения (2.5) имеет размерность n . Сначала допустим, что $m > n$. Тогда если a — некоторая точка R , то векторному уравнению

$$\sum_{j=1}^m b_j v_j(a) = 0 \quad (2.6)$$

заведомо удовлетворяют числа b_j , из которых не все равны нулю, так как (2.6) представляет собой n однородных линейных алгебраических уравнений с $m > n$ неизвестными b_j . При найденных значениях b_j вектор-функция

$$\sum_{j=1}^m b_j v_j(x)$$

представляет собой решение уравнения (2.5), обращающееся в нуль при $x = a$. Поскольку тривиальное решение при $x = a$ также равно нулю, то в силу теоремы единственности решение

$$\sum_{j=1}^m b_j v_j(x)$$

должно совпадать с тривиальным решением, т. е.

$$\sum_{j=1}^m b_j v_j(x) \equiv 0.$$

С другой стороны, пусть $v_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, — такая частная система n решений, что $v_j(a)$ представляет собой вектор, у которого все координаты равны нулю, кроме j -й, равной единице. Тогда любая линейная комбинация

$$\sum_{j=1}^n b_j v_j(x)$$

при $x = a$ обращается в вектор-столбец с координатами b_1, \dots, b_n . Таким образом,

$$\sum_{j=1}^n b_j v_j(a) = 0$$

тогда и только тогда, когда все b_j , $j = 1, \dots, n$, равны нулю. Это означает, что $v_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, линейно независимы, что и требовалось доказать.

В любом линейном векторном пространстве размерности d система d линейно независимых элементов называется *базисом*, поскольку все прочие элементы могут быть единственным образом представлены как линейные комбинации этих d элемен-

тов. Дадим доказательство применительно к рассматриваемому случаю. Пусть $v_j(x)$, $j=1, \dots, n$, суть n линейно независимых решений уравнения (2.5). Тогда $n+1$ решений $v_1(x), \dots, v_n(x), y(x)$ линейно зависимы, т. е. найдутся такие константы a_j , $j=1, \dots, n$, и c , не все равные нулю, что

$$\sum_{j=1}^n a_j v_j(x) + cy(x) \equiv 0.$$

Если бы c было нулем, то $v_j(x)$, $j=1, \dots, n$, были бы зависимы, что противоречит условию. Следовательно,

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \left(-\frac{a_j}{c} \right) v_j(x).$$

Система n линейно независимых решений дифференциального уравнения (2.5) называется *фундаментальной системой решений*. Часто оказывается полезным сопоставить системе решений $v_j(x)$ матрицу $V(x)$ из n строк и n столбцов, так чтобы столбцы представляли собой вектор-функции $v_j(x)$. Скалярная функция

$$w(x) = \det V(x)$$

называется *вронскианом* (определителем Вронского) системы решений $v_j(x)$. Если $w(x)$ обращается в нуль в какой-либо точке a области R , то система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n b_j v_j(a) = 0$$

с неизвестными b_j имеет решения, отличные от $b_j=0$, $j=1, \dots, n$. Тогда соответствующее решение

$$\sum_{j=1}^n b_j v_j(x)$$

уравнения (2.5) обращается в нуль при $x=a$ и, следовательно, представляет собой тождественный нуль по причине, которая уже разъяснялась выше, и, таким образом, $v_j(x)$ линейно зависимы. С другой стороны, если

$$\sum_{j=1}^n b_j v_j(x) \equiv 0,$$

то вронскиан тождественно равен нулю. Итак, доказано следующее:

Вронскиан n решений $v_j(x)$ дифференциального уравнения (2.5) не обращается в нуль ни в одной точке R , если эти решения образуют фундаментальную систему. В противном случае он обращается в нуль тождественно.

Представляется важным сделать замечание относительно границы области R в этом утверждении. Возьмем, например, скалярное дифференциальное уравнение $y' = x^{-1}y$. Здесь $n=1$ и решение $V(x) \equiv x$ представляет собой фундаментальную систему. Соответствующий вронскиан $\omega(x) = x$ исчезает при $x=0$, не являясь при этом тождественным нулем. Однако противоречия здесь нет, так как коэффициент x^{-1} в дифференциальном уравнении не является голоморфным при $x=0$.

Задача 2.2. Из результатов этого раздела получить аналогичные утверждения для одного уравнения (2.3).

2.3. Матричная запись

Рассмотрим матрицу $V(x)$, введенную в предыдущем разделе. Будем обозначать через $V'(x)$ матрицу, элементы которой получаются дифференцированием соответствующих элементов $V(x)$. Согласно правилу умножения матриц, имеем $V'(x) = A(x)V(x)$. Таким образом, $V(x)$ есть решение матричного дифференциального уравнения

$$Y' = A(x)Y. \quad (2.7)$$

Обратно, если квадратная матрица $Y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.7), то каждый столбец $Y(x)$ удовлетворяет векторному уравнению (2.5). Следовательно, теория уравнения (2.7) вполне эквивалентна теории уравнения (2.5).

Из теоремы 2.1 следует, что (2.7) обладает единственным решением $Y=V(x)$, принимающим начальное значение $V(a)$. Это решение голоморфно в R . Из предыдущего раздела также следует, что $\det V(x)$ либо нигде в R не обращается в нуль, либо тождественно равен нулю. В первом случае $V(x)$ назовем фундаментальным матричным решением матричного дифференциального уравнения (2.7).

В матричных обозначениях соотношение между различными фундаментальными решениями выражается особенно просто. Легко проверить, что $(Y(x)C)' = Y'(x)C$, если C — постоянная квадратная матрица n -го порядка. Умножая уравнение (2.7) на C справа, получим, что матрица $Y(x)C$ является решением (2.7), если только $Y(x)$ является решением. Если, в частности, $Y(x)$ — фундаментальное решение, то $Y(x)C$ является фундаментальным решением в том и только в том случае, когда

C — неособая матрица, т. е. $\det C \neq 0$, так как в этом и только в этом случае $\det (Y(x)C) \neq 0$.

Обратно, если $V(x)$ — фундаментальное матричное решение, а $Y(x)$ — какое-либо матричное решение уравнения (2.7), то можно определить постоянную матрицу $V^{-1}(a)V(a)$ и по предыдущему выражение $V(x)V^{-1}(a)V(a)$ также является матричным решением. Это решение совпадает с $Y(x)$ при $x=a$, и, следовательно, оно тождественно равно $Y(x)$. Этим доказано, что все матричные решения могут быть получены из какого-либо одного фундаментального матричного решения умножением справа на постоянную матрицу.

Во всех этих утверждениях существенно, что умножение на C производится *справа*.

Задача 2.3. Пусть C — неособая матрица и $Y(x)$ удовлетворяет (2.7). Найти уравнение вида $Z' = B(x)Z$, которому удовлетворяет матрица $CY(x)$.

Задача 2.4. Сумма диагональных элементов квадратной матрицы называется следом матрицы и обозначается символом tr . Пусть $Y(x)$ — решение (2.7), а $\omega(x) = \det Y(x)$. Доказать, что

$$\omega'(x) = (\text{tr } A(x)) \omega(x)$$

(указание: производная определителя вычисляется суммированием определителей, которые получаются, если в исходной матрице продифференцировать только одну строку).

2.4. Неоднородное уравнение

Упрощение, достигающееся при надлежащем использовании матричной записи, может быть ярко проиллюстрировано на примере матричной формы записи хорошо известного метода «вариации постоянных». Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$W' = A(x)W + F(x), \quad (2.8)$$

где $F(x)$ — голоморфная квадратная матрица n -го порядка. Предполагая, что найдена фундаментальная матрица $V(x)$ соответствующего однородного уравнения, попытаемся найти такую матрицу $C(x)$, чтобы

$$W(x) = V(x)C(x) \quad (2.9)$$

было решением неоднородного уравнения (2.8). Нетрудно проверить, что правило дифференцирования произведения матричных функций такое же, как для скалярных функций, нужно только сохранять порядок сомножителей. Таким образом, если

(2.9) подставить в (2.8), то сразу получится дифференциальное уравнение $VC' = F$ для $C(x)$. Интегрирование дает

$$C(x) = \int_a^x V^{-1}(t) F(t) dt.$$

В этом выражении путь интегрирования связывает некоторую фиксированную точку a области R с переменной точкой x той же области. Тем самым предполагаемое частное решение уравнения (2.8) имеет вид

$$W(x) = V(x) \int_a^x V^{-1}(t) F(t) dt.$$

Проверить это можно непосредственным дифференцированием. Такой же непосредственной проверкой можно получить и более общее утверждение о том, что

$$V(x)V^{-1}(a)K + V(x) \int_a^x V^{-1}(t) F(t) dt \quad (2.10)$$

есть решение (2.8), принимающее при $x=a$ значение K , где K — произвольная постоянная матрица. Это решение единственно; действительно, система (2.8) расщепляется на n векторных дифференциальных уравнений типа (2.1), каждое из которых соответствует некоторому столбцу $W(x)$ и обладает, согласно теореме 2.1, единственным решением, обращающимся при $x=a$ в соответствующий столбец K .

Задача 2.5. Если $V(x)$ имеет тот же смысл, что и выше, то решение $y(x)$ векторного дифференциального уравнения (2.1) с начальным условием (2.2) может быть записано в виде

$$y(x) = V(x)V^{-1}(a)\alpha + V(x) \int_a^x V^{-1}(t) f(t) dt. \quad (2.11)$$

3. Циклические соотношения относительно особых точек

3.1. Циклическая матрица

Чтобы понять структуру аналитической функции, важно изучить ее особенности. Особые точки, или точки, где функция имеет особенность, — это такие точки, в которые она не может быть аналитически продолжена. Простейшие особенности — это

изолированные особенности, когда в кольцевой окрестности особой точки функция является голоморфной («кольцевая окрестность» — это обычная окрестность точки a , из которой удалена сама точка a). Если матрица $A(x)$ имеет особенность в некоторой точке (т. е. по крайней мере один из ее элементов имеет в этой точке особенность), то решения дифференциального уравнения (2.5) будут (вообще говоря, не всегда) также иметь особенность в этой точке. Как правило, особенность решения более сложная, чем особенность $A(x)$. Простое скалярное дифференциальное уравнение $y' = \frac{1}{2}x^{-1}y$ имеет решение $x^{1/2}$, и этот пример показывает, что решения могут иметь точку ветвления там, где коэффициенты имеют изолированную особенность [однозначного характера. — *Ред.*]. В настоящем разделе будут установлены некоторые общие свойства решений в точках, где матричный коэффициент имеет изолированную особенность.

Пусть матрица $A(x)$ в уравнении (2.7) имеет изолированную особенность при $x=0$. То, что особенность предполагается именно при $x=0$, не ограничивает общности, так как любая точка может быть сделана нулем путем трансляции независимого переменного без изменения структуры дифференциального уравнения. Из теоремы 2.1 известно, что через каждую точку кольцевой окрестности точки a проходит голоморфное решение дифференциального уравнения, принимающее в этой точке наперед заданное значение. Возьмем одно из таких решений $V(x)$ и продолжим его аналитически, двигаясь по замкнутому контуру вокруг $x=0$ в положительном направлении. После возвращения в начальную точку оказывается, что функциональный элемент $V(x)$, вообще говоря, уже не будет равен своему прежнему значению, поскольку решение имеет обычно точку ветвления при $x=0$. Чтобы различать эти две ветви одной и той же аналитической матричной функции, будем обозначать ту ветвь, которая получилась в результате полного обхода, через $V^+(x)$. Так как $A(x)$ однозначна в окрестности $x=0$, то $V^+(x)$ также является решением матричного дифференциального уравнения (2.7). Следовательно, должна существовать постоянная матрица C , такая, что

$$V^+(x) = V(x)C. \quad (3.1)$$

Эта матрица называется *циклической матрицей* фундаментального решения $V(x)$ относительно особой точки $x=0$, а формула (3.1) — соответствующим *циклическим соотношением*. Обратим внимание на то, что при выводе (3.1) была существенным образом использована однозначность $A(x)$.

Если вместо $V(x)$ взять другое фундаментальное решение $W(x)$, то, как мы знаем, существует постоянная неособая матрица T , такая, что $W(x) = V(x)T$. Следовательно, циклическое соотношение для $W(x)$ имеет вид

$$W^+(x) = W(x)T^{-1}CT.$$

Другими словами, все циклические матрицы, относящиеся к одной и той же особой точке, подобны. (Слово «подобный» здесь употребляется в обычном смысле: матрицы A и B называются подобными, если найдется такая матрица T , что $B = T^{-1}AT$.)

Прежде чем продолжить исследование, необходимо разъяснить некоторые понятия из теории матриц, которые будут в дальнейшем играть важную роль.

3.2. Некоторые сведения из теории матриц. Аналитические функции от матриц

Если $p(t)$ — полином относительно аргумента t , а A — квадратная матрица n -го порядка, то достаточно ясно, что означает $p(A)$.

Пусть теперь $f(t)$ — скалярная функция комплексного переменного t , голоморфная при $t=0$, т. е. такая, что для некоторого $t_0 > 0$

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r t^r = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^m c_r t^r, \quad |t| < t_0. \quad (3.2)$$

Пусть A — матрица порядка $n \times n$. Тогда матрица $f(A)$ может быть определена соотношением

$$f(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^m c_r A^r. \quad (3.3)$$

При этом нужно опираться на какое-либо разумное определение предела последовательности матриц и считать, что в (3.3) существует предел именно в этом смысле.

Наиболее естественным определением предела последовательности матриц является следующее. Будем говорить, что бесконечная последовательность матриц имеет предел, если имеет предел каждая из n^2 скалярных последовательностей образованных соответствующими элементами этих матриц.

Чтобы изучать пределы матричных последовательностей, удобно ввести норму в пространстве матриц. В действительности используется несколько определений норм, вполне эквивалентных друг другу. Мы будем пользоваться следующим определением: пусть $A = \{a_{jk}\}$ — матрица с элементами a_{jk} на пере-

сечения j -й строки и k -го столбца ($j, k = 1, 2, \dots, n$). Положим

$$\|A\| = \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \quad (3.4)$$

и назовем $\|A\|$ *нормой* A . Нетрудно проверить, что имеют место следующие свойства $\|A\|$:

- (a) $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$;
- (b) Если I — единичная матрица, то $\|I\| = 1$;
- (c) Пусть c — скалярная комплексная величина. Тогда $\|cA\| = |c| \|A\|$;
- (d) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- (e) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;
- (f) $\lim_{r \rightarrow \infty} A_r = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{r \rightarrow \infty} \|A_r\| = 0$.

Для дальнейшего использования к этому следует добавить соответствующее определение нормы вектора: пусть v — вектор-столбец с компонентами v_1, \dots, v_n . Тогда норма $\|v\|$ определяется выражением

$$\|v\| = \max_j |v_j|.$$

Эта норма обладает следующими свойствами:

- (g) $v = 0$ тогда и только тогда, когда $\|v\| = 0$;
- (h) $\|cv\| = |c| \|v\|$;
- (i) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$;
- (j) $\|Av\| \leq \|A\| \|v\|$;
- (k) для любой матрицы A существует ненулевой вектор v , такой, что

$$\|Av\| = \|A\| \|v\|.$$

Задача 3.1. Доказать свойства (a) — (k).

Из этих свойств непосредственно следует, что сходимость ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty} \|M_r\|,$$

где M_r — матрица, влечет за собой сходимость ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty} M_r.$$

В самом деле, для любых целых положительных l и m ($m > l$)

$$\left\| \sum_{r=1}^m M_r - \sum_{r=1}^l M_r \right\| = \left\| \sum_{r=l+1}^m M_r \right\| \leq \sum_{r=l+1}^m \|M_r\|$$

в силу (d). Согласно критерию Коши, правая часть неравенства стремится к нулю, если l и m независимо друг от друга стремятся к бесконечности. Следовательно, левая часть также стремится к нулю, а это означает, что каждая из n^2 последовательностей, образованных соответствующими элементами матричной последовательности

$$\sum_{r=1}^m M_r, \quad m=1, 2, \dots,$$

представляет собой фундаментальную последовательность комплексных чисел. Отсюда вытекает сходимость ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty} M_r.$$

Для частного случая степенного матричного ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r A^r$$

можно на основании вышесказанного заключить, что его сходимость обеспечивается сходимостью степенного числового ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} |c_r| \|A\|^r,$$

поскольку он в силу (с) и (е) является мажорантным для ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} \|c_r A^r\|.$$

Возвращаясь к рядам, входящим в формулы (3.2) и (3.3), можно считать сходимость ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r A^r$$

доказанной для всех матриц A , удовлетворяющих условию $\|A\| < t_0$.

Особый интерес представляет функция

$$e^A = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} A^r, \quad (3.5)$$

определяемая таким образом для любой матрицы A .

Задача 3.2. Сосчитать матрицу

$$\exp \left\{ x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 3.3. Пусть $H = \{h_{jk}\}$ — квадратная матрица порядка n , для которой

$$h_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Сосчитать e^{xH} (указание: эта матрица оказывается полиномиальной по x).

Вообще говоря, неверно, что e^{A+B} равно $e^A \cdot e^B$. Однако

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B, \text{ если } AB = BA. \quad (3.6)$$

Задача 3.4. Доказать утверждение (3.6).

Матрица x^A определяется выражением

$$x^A = e^{(\log x) A}. \quad (3.7)$$

Эта матрица не является однозначной функцией x . Если точка x совершает положительный обход вокруг точки $x=0$, то матрица x^A приобретает множитель $e^{2\pi i A}$. Это следует непосредственно из определения (3.7) и свойства (3.6).

Степенное разложение

$$\log(1-t) = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} t^r, \quad |t| < 1, \quad (3.8)$$

справедливое для скалярного t , наводит на мысль об определении логарифмической функции от матрицы в виде ряда

$$\log(I-A) = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} A^r, \quad (3.9)$$

имеющего смысл для всех матриц A , удовлетворяющих условию $\|A\| < 1$.

Формула (3.8) определяет только одну ветвь многозначной аналитической логарифмической функции. То же самое относится и к (3.9). Однако вместо того, чтобы развивать полную теорию логарифмической функции от матрицы, исходя из (3.9), будем исходить из другого определения, называя логарифмом матрицы B любую матрицу C , такую, что

$$e^C = B. \quad (3.10)$$

Очевидно, матрица C неоднозначна. Например, $C+2\pi il$ тоже является логарифмом B . Если $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$, $b_j \neq 0$, $j=1, 2, \dots, n$, то, очевидно, $C = \text{diag}(\log b_1, \dots, \log b_n)$, причем здесь можно брать любую ветвь логарифма.

Чтобы можно было пользоваться данным определением, нужно показать, что оно совпадает с прежним определением (3.9), т. е. что

$$\exp\left(-\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} A^r\right) = I - A, \quad \|A\| < 1. \quad (3.11)$$

В самом деле, если в разложении

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} A^r\right)^s$$

формально перегруппировать члены, расположив их по степеням A , то получим $I - A$. В том, что такая перегруппировка справедлива для $\|A\| < 1$, можно убедиться точно так же, как и при доказательстве справедливости (3.11) для случая скалярного переменного t , заменяя в соответствующих рассуждениях t на $\|A\|$ (см., например, Апостол [1], стр. 414—415).

Таким образом, матрица C , удовлетворяющая уравнению (3.10), существует, если только $\|I - B\| < 1$. Существование такого C для любой неособой матрицы B может быть доказано следующим образом. Пусть $c(\alpha)$ — непрерывная скалярная комплексная функция действительного переменного α , $0 \leq \alpha \leq 1$, такая, что $c(0) = 0$, $c(1) = 1$. Положим $B(\alpha) = [1 - c(\alpha)]I + c(\alpha)B$. Если λ_j , $j=1, 2, \dots, n$, — собственные значения B , то собственные значения $B(\alpha)$ имеют вид $1 - c(\alpha) + c(\alpha)\lambda_j$, $j=1, \dots, n$. Так как ни одно из λ_j не равно нулю, то $c(\alpha)$ можно выбрать так, чтобы $B(\alpha)$ не была особой ни при одном α . Тогда для достаточно мелкого разбиения $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$

$$\|I - B(\alpha_k)B^{-1}(\alpha_{k-1})\| < 1.$$

Следовательно, существует матрица C_k , такая, что

$$e^{C_k} = B(\alpha_k)B^{-1}(\alpha_{k-1}), \quad k=1, \dots, m. \quad (3.12)$$

Матрицы $B(\alpha)$, соответствующие различным значениям α , коммутируют друг с другом. Следовательно, коммутируют правые части (3.12), соответствующие различным значениям k . А значит, матрицы C_k также коммутируют, поскольку они представляются сходящимися рядами по степеням $B(\alpha_k)B^{-1}(\alpha_{k-1})$. Поэтому можно применить формулу (3.6).

Перемножая все m уравнений (3.12), получим

$$\exp\left(\sum_{k=1}^m C_k\right) = B,$$

так что

$$C = \sum_{k=1}^m C_k$$

обладает нужным свойством. Матрица C , построенная таким образом, очевидно, может изменяться в зависимости от выбора функции $c(\alpha)$.

Дальнейшие свойства e^A , $\log A$ и x^A нельзя проанализировать, не используя канонической формы матриц. Некоторые из них будут разобраны в следующих разделах. А сейчас рассмотрим специальный случай, когда все собственные значения A различны, поскольку этот случай интересен сам по себе и значительно проще общего случая.

Из теории матриц известно, что если собственные значения λ_j , $j=1, \dots, n$, матрицы A различны, то A подобна диагональной матрице $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, т. е. существует такая матрица T , что

$$T^{-1}AT = D.$$

Кроме того, легко показать, что

$$P^{-1}e^AP = e^{P^{-1}AP} \quad (3.13)$$

для любой неособой матрицы P .

Задача 3.5. Доказать тождество (3.13).

Применяя (3.13), имеем

$$T^{-1}e^AT = e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}),$$

т. е.

$$e^A = Te^DT^{-1}.$$

Аналогичным образом

$$x^A = Te^{(\log x)D}T^{-1} = Tx^DT^{-1}, \quad (3.14)$$

т. е. элементы матрицы x^A являются линейными комбинациями функций x^{λ_j} .

Задача 3.6. Доказать, что если $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_j \neq 0$, $j=1, \dots, n$, то $T^{-1}(\log A)T = \text{diag}(\log \lambda_1, \dots, \log \lambda_n)$.

3.3. Циклические показатели

Для того чтобы глубже проникнуть в природу фундаментальной системы $V(x)$ в окрестности особой точки $x=0$, применим результаты предыдущего раздела к циклическому соотношению (3.1).

Матрица x^K , где K — произвольная матрица, после завершения положительного обхода вокруг $x=0$ умножается на $e^{2\pi i K}$. Пусть C , как и прежде, — входящая в (3.1) циклическая матрица. Полагая $K = -(1/2\pi i) \log C$, заключаем из (3.1), что матрица

$$V(x) x^{-(1/2\pi i) \log C} = S(x)$$

является однозначной функцией x в кольцевой окрестности $x=0$. Таким образом, $V(x)$ может быть записана в форме

$$V(x) = S(x) x^{(1/2\pi i) \log C}, \quad (3.15)$$

т. е. $V(x)$ представляется в виде произведения однозначного сомножителя на многозначный сомножитель, который является элементарной функцией.

В специальном случае, когда собственные значения C различны и равны, допустим, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, формула (3.15) может быть записана (см. задачу 3.6) в виде

$$V(x) = S(x) T x^{(1/2\pi i) M} T^{-1},$$

где $M = T^{-1}(\log C)T = \text{diag}(\log \mu_1, \dots, \log \mu_n)$. Это означает, что фундаментальное матричное решение уравнения (2.7), имеющее вид $W(x) = V(x)T$, обладает особенно простой структурой

$$W(x) = Q(x) x^D, \quad (3.16)$$

где $Q(x) = S(x)T$ однозначно, а D является диагональной матрицей

$$D = \frac{1}{2\pi i} M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{причем } \lambda_j = \frac{1}{2\pi i} \log \mu_j.$$

Каждый столбец $w_j(x)$ матрицы $W(x)$ является решением векторного дифференциального уравнения $y' = A(x)y$. Переформулируя результат (3.16), можно сказать, что это дифференциальное уравнение имеет фундаментальную систему решений вида

$$w_j(x) = q_j(x) x^{\lambda_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.17)$$

где $q_j(x)$ однозначны в окрестности $x=0$; λ_j иногда называют *циклическими показателями*.

Этот результат хорош с теоретической точки зрения, но он не дает никакого алгоритма для получения эффективного решения дифференциального уравнения. Матрица C , а следовательно, и M неизвестны, и самое большее, что можно сказать относительно функции $Q(x)$, — это то, что для нее справедливо лорановское разложение вида

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} Q_r x^r.$$

В весьма частном случае, когда особенность $A(x)$ при $x=0$ является *полюсом первого порядка*, изложенная теория может быть дополнена соображениями, приводящими к фактическому определению матрицы M и функции $Q(x)$. Это будет сделано в следующей главе.

Задача 3.7. Для случая постоянной матрицы A и скалярной голоморфной функции $f(x)$ доказать, что

$$(a) \quad \frac{d}{dx} (e^{Af(x)}) = Af'(x) e^{Af(x)};$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx} (x^A) = Ax^{A-1}.$$

Задача 3.8. Доказать, что матрицы $Q(x)$ и D в формуле (3.16) подчиняются соотношению $xQ' = AQ - QD$.

Регулярно особые точки

4. Метод решения

4.1. Введение

Если $A(x)$ имеет полюс первого порядка, то уравнение (2.7) в результате очевидной замены обозначений может быть записано в форме

$$xY' = A(x)Y, \quad (4.1)$$

где $A(x)$ голоморфна при $x=0$. Точка $x=0$ называется *регулярно особой точкой*, или *особой точкой первого рода*, данного дифференциального уравнения. Эта терминология не очень удачна, однако общеупотребительна. Чтобы избежать недоразумений, точки, в которых коэффициент дифференциального уравнения не имеет особенностей, обычно называют не регулярными, а обыкновенными.

Некоторые авторы употребляют терминологию, в которой различаются «регулярные» особенности и особенности «первого рода». Например, в книге Коддингтона и Левинсона [2] первый термин означает, что при $x \rightarrow 0$ ни одно решение не возрастает быстрее, чем некоторая отрицательная степень x . То, что в данной книге называется «регулярной особенностью», там называется «особенностью первого рода».

Самое важное отличительное свойство регулярно особых точек — это то, что функция $S(x)$ в представлении (3.15) оказывается голоморфной при $x=0$. Этот факт может быть доказан непосредственно, но в данной книге будет получен в результате конструктивного решения дифференциального уравнения.

4.2. Формализм

Замена переменных $Y=P(x)Z$, где $P(x)$ не имеет особенности при $x=0$, преобразует (4.1) в дифференциальное уравнение

$$xZ' = B(x)Z, \quad (4.2)$$

где

$$B(x) = P^{-1}(x)A(x)P(x) - xP^{-1}(x)P'(x). \quad (4.3)$$

Поставим целью определить $P(x)$ таким образом, чтобы $B(x)$ было по возможности более простым, желательно настолько простым, чтобы (4.2) можно было решить точно. Уравнение (4.3) эквивалентно уравнению

$$xP'(x) = A(x)P(x) - P(x)B(x) \quad (4.4)$$

в предположении $\det P(x) \neq 0$. Внешне задача (4.4) выглядит более сложной, нежели (4.1): (4.4) представляет собой дифференциальное уравнение относительно $P(x)$ с особенностью при $x=0$, к тому же P входит в правую часть уравнения и как правый, и как левый сомножитель. Однако благодаря тому факту, что $B(x)$ не является наперед заданным, подход к этой задаче становится осуществимым.

Попытаемся удовлетворить дифференциальному уравнению (4.4) функцией $P(x)$, голоморфной при $x=0$:

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r. \quad (4.5)$$

Положим

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r, \quad (4.6)$$

$$B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r x^r. \quad (4.7)$$

Если для некоторого $B(x)$ решение вида (4.5) существует, то подстановка этих рядов в (4.4), почленное перемножение и приравнивание членов с одинаковыми степенями x в обеих частях полученного равенства приводят после некоторых простых вычислений к уравнениям

$$A_0 P_0 - P_0 B_0 = 0, \quad (4.8)$$

$$(A_0 - rI) P_r - P_r B_0 = - \sum_{s=0}^{r-1} (A_{r-s} P_s - P_s B_{r-s}), \quad r > 0. \quad (4.9)$$

Таким образом, получена рекуррентная последовательность уравнений для определения P_0, P_1, \dots , причем желательно вычислить эти матрицы так, чтобы вид B_0, B_1, \dots был по возможности более простым. После того как это сделано, возникает вопрос о сходимости рядов (4.5) и (4.7), в которые подставлены найденные коэффициенты.

Прежде чем продолжить рассмотрение этой задачи, необходимо привести еще некоторые факты из алгебры матриц.

4.3. Некоторые сведения из теории матриц: уравнение $AX - XB = 0$

Пусть A и B — постоянные квадратные матрицы с комплексными элементами. Имея в виду дальнейшие приложения, допустим, что порядки A и B различны и равны соответственно n и m . Обозначим через X прямоугольную матрицу с n строками и m столбцами. Тогда можно построить произведение AX и XB и возникает вопрос: какой должна быть матрица X , чтобы эти произведения были равны? Уравнение (4.8) при заданном B как раз относится к этому типу, причем $m=n$. Полный ответ на поставленный вопрос невозможно дать, не располагая теорией приведения матриц к канонической форме. Ограничимся здесь доказательством следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Уравнение*

$$AX - XB = 0 \quad (4.10)$$

имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда у A и B имеется хотя бы одно общее собственное значение.

Доказательство.

(а) Пусть A и B имеют общее собственное значение λ . Будем обозначать транспонированную матрицу верхним индексом T ; B^T также имеет собственное значение λ . Тогда имеются соответствующие собственные векторы v и w , такие, что

$$Av = \lambda v, \quad B^T w = \lambda w; \quad (4.11)$$

v можно рассматривать как прямоугольную матрицу с n строками и одним столбцом, а w — как матрицу с m строками и одним столбцом. Так как из второго уравнения (4.11) следует, что

$$w^T B = \lambda w^T,$$

то легко убедиться, что ненулевая матрица $X = vw^T$ удовлетворяет уравнению (4.10).

(б) Пусть A и B не имеют ни одного общего собственного значения. Покажем, что тогда всякое X , удовлетворяющее (4.10), обязательно равно нулю. Пусть w — собственный вектор B , соответствующий собственному значению λ . Умножая (4.10) справа на w , находим, что

$$AXw - \lambda Xw = 0.$$

Так как λ не является собственным значением A , то отсюда следует, что Xw есть нулевой вектор для всякого собственного вектора w матрицы B . Если B обладает полной системой m ли-

нейно независимых собственных векторов, то из этого следует, что $X=0$.

В случае если B не имеет m независимых собственных векторов, для доказательства требуются более тонкие свойства матриц. Известно, что в любом случае существует система m линейно независимых «обобщенных» собственных векторов. Под обобщенным собственным вектором понимается вектор w , обладающий следующим свойством: если λ —собственное значение B , то $(B-\lambda I)^p w=0$ для некоторого целого положительного p .

Далее из (4.10) следует, что

$$(A - \lambda I_n)^p X = X (B - \lambda I_m)^p$$

для любых λ и p ; I_k здесь означает единичную матрицу порядка k . Если λ является собственным значением B , а w — соответствующим обобщенным собственным вектором, то при определенном $p > 0$ имеет место равенство

$$(A - \lambda I)^p X w = 0.$$

Так как λ не является собственным значением A , то матрица $(A - \lambda I)^p$ не является особой, а тогда Xw должно быть нулем. Таким образом, уравнению $Xz=0$ удовлетворяют m линейно независимых обобщенных собственных векторов матрицы B , а это возможно, только если $X=0$. Этим завершается доказательство.

Задача 4.1. Доказать, что число γ является собственным значением линейного оператора от X , определяемого выражением $AX - XB$, тогда и только тогда, когда $\gamma = \lambda - \mu$, где λ — собственное значение A , а μ — собственное значение B (другими словами, если ненулевая матрица X такова, что $AX - XB = \gamma X$, то $\gamma = \lambda - \mu$, и, наоборот, если $\gamma = \lambda - \mu$, то существует ненулевая матрица X , удовлетворяющая уравнению $AX - XB = \gamma X$).

Б. Решения в окрестности регулярно особой точки

Б.1. Формальное упрощение

В формуле (4.8) проще всего выбрать B_0 , полагая

$$B_0 = A_0, \quad (5.1)$$

и при таком выборе B_0 естественно удовлетворить (4.8), беря

$$P_0 = I. \quad (5.2)$$

Такой подход действительно всегда приводит к упрощению задачи но, как будет видно, не всегда к решению ее. Трудность

возникает вследствие того, что A_0 и $A_0 - rI$ могут иметь при некоторых целых положительных r общие собственные значения. Каждое уравнение (4.9) представляет собой систему n^2 скалярных уравнений относительно элементов матрицы P_r . Если $A_0 - rI$ и A_0 имеют общее собственное значение, то в силу (5.1) однородное уравнение, соответствующее (4.9), имеет, согласно теореме 4.1, нетривиальное решение. Следовательно, при таком r неоднородное уравнение (4.9), вообще говоря, не имеет решения. Если же, напротив, $A_0 - rI$ и A_0 не имеют общих собственных значений ни при каком целом положительном r , то каждое из уравнений (4.9) имеет единственное решение P_r , и все P_r могут быть найдены последовательно для $r=1, 2, \dots$, так что выбор $B_s, s>0$, при этом существенного значения не имеет. В этом случае, конечно, проще всего положить $B_s=0$ и тем самым прийти к следующей теореме.

Теорема 5.1. Если в сходящемся разложении

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r$$

матрица A_0 не имеет собственных значений, отличающихся друг от друга на целые положительные числа, то можно построить формальный ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r,$$

где $P_0=I$, такой, что формальное преобразование

$$Y = \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r \right) Z \quad (5.3)$$

приводит дифференциальное уравнение

$$xY' = A(x)Y \quad (5.4)$$

к виду

$$xZ' = A_0 Z. \quad (5.5)$$

Разъяснение точного значения термина «формальное преобразование» неявно содержится в операциях, приводящих к соотношениям (4.8) и (4.9). Вскоре будет показано, что участвующий в теореме ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r$$

сходится в окрестности $x=0$, так что это формальное преобразование на самом деле представляет собой подлинное линейное

преобразование с аналитическими матричными коэффициентами.

Если A_0 имеет собственные значения, различающиеся на целые положительные числа, то обозначим через k наибольшее из таких чисел. В этом случае можно по-прежнему положить $B_0 = A_0$ и $P_0 = I$, но среди первых k уравнений (4.9) найдутся такие, которые могут оказаться несовместными при $B_r = 0$. Тогда для каждого из таких уравнений положим $P_r = 0$, после чего определим B_r в виде

$$B_r = - \sum_{s=1}^{r-1} P_s B_{r-s} + \sum_{s=0}^{r-1} A_{r-s} P_s.$$

Это приводит к следующему обобщению теоремы 5.1.

Теорема 5.2. *Если k есть наибольшее среди неотрицательных целых чисел, на которые отличаются собственные значения A_0 , то существует формальный ряд*

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r, \quad P_0 = I,$$

такой, что формальное преобразование (5.3) приводит дифференциальное уравнение (5.4) к виду

$$xZ' = \left(\sum_{r=0}^k B_r x^r \right) Z, \quad B_0 = A_0. \quad (5.6)$$

Теорема 5.2 для случая $k > 0$ особого значения не имеет, потому что вскоре будет установлен более сильный результат, а именно теорема 5.6 и ее обобщение на произвольное n .

5.2. Аналитическое упрощение

Как уже было сказано, можно показать, что ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r,$$

участвующий в предыдущей теореме, сходится. Этот ряд представляет собой формальное решение дифференциального уравнения (4.4), где

$$B(x) = \sum_{r=0}^k B_r x^r. \quad (5.7)$$

Если ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r$$

сходится, то функция

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r$$

является решением уравнения (4.4), которое можно интерпретировать как систему n^2 линейных скалярных дифференциальных уравнений первого порядка относительно элементов $P(x)$ с регулярной особенностью при $x=0$. Произведенные формальные выкладки с формальными степенными рядами обеспечат, таким образом, фактическое упрощение дифференциального уравнения (4.1), если доказать следующую теорему.

Теорема 5.3. Пусть

$$F(x) = \sum_{r=0}^{\infty} F_r x^r$$

— матричная функция, голоморфная для $|x| < x_0$, и пусть

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

— формальный векторный ряд, формально удовлетворяющий дифференциальному уравнению относительно z

$$xz' = \left(\sum_{r=0}^{\infty} F_r x^r \right) z. \quad (5.8)$$

Тогда

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

сходится при $|x| < x_0$ и представляет собой решение уравнения (5.8).

Доказательство. То, что ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

является формальным решением, означает по определению, что все уравнения относительно a_r , получаемые подстановкой этого ряда вместо z в формулу (5.8), формальным перемножением рядов и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x , обращаются в тождества. Эти уравнения имеют вид

$$F_0 a_0 = 0, \quad (5.9)$$

$$(F_0 - rI) a_r = - \sum_{s=1}^r F_s a_{r-s}. \quad (5.10)$$

Будем пользоваться при доказательстве методом мажорантных рядов.

Пусть k — наименьшее положительное целое, такое, что $\det(F_0 - rI) \neq 0$ для всех $r > k$. Тогда для $r > k$ существует $(F_0 - rI)^{-1}$. Легко показать, что найдется постоянная $c > 0$, не зависящая от r и такая, что

$$\|(F_0 - rI)^{-1}\| \leq c \text{ для } r > k. \quad (5.11)$$

Задача 5.1. Доказать (5.11).

Из уравнений (5.10) тогда следует, что

$$\|a_r\| \leq c \sum_{s=1}^r \|F_s\| \|a_{r-s}\|, \quad r > k. \quad (5.12)$$

Определим далее скалярную голоморфную функцию $\varphi(x)$, степенным рядом

$$\varphi(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \|F_r\| x^r, \quad |x| < x_0. \quad (5.13)$$

То, что этот ряд сходится при $|x| < x_0$, доказывается так же, как и в скалярном случае: сходимость ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} F_r x^r$$

означает, что последовательность $F_r \alpha^r$ ограничена, если $|\alpha| < x_0$, т. е. $\|F_r \alpha^r\| \leq M_\alpha$, а тогда $\|F_r\| \leq M_\alpha |\alpha|^{-r}$. Следовательно,

$$\sum_{r=1}^{\infty} \|F_r\| x^r$$

сходится, если сходится

$$\sum_{r=1}^{\infty} M_\alpha \left| \frac{x}{\alpha} \right|^r,$$

т. е. при $|x| < \alpha$. Так как это справедливо для всех $\alpha < x_0$, то сходимость, таким образом, доказана для $|x| < x_0$.

Введем теперь скалярную мажорантную функцию

$$\hat{y}(x) = [1 - c\varphi(x)]^{-1} \left[\|a_0\| + \sum_{s=1}^k \left\{ \|a_s\| - c \sum_{t=1}^s \|F_t\| \|a_{s-t}\| \right\} x^s \right] \quad (5.14)$$

(при $k=0$ сумма по s отсутствует).

Мотивировка такого построения станет более понятной, если формулу (5.14) переписать в виде

$$y(x) = c\varphi(x) \hat{y}(x) + \|a_0\| + \sum_{s=1}^k \left\{ \|a_s\| - c \sum_{t=1}^s \|F_t\| \|a_{s-t}\| \right\} x^s. \quad (5.15)$$

Так как $\varphi(0) = 0$, то существует положительное число $x_1 \leq x_0$, такое, что $\hat{y}(x)$ голоморфна при $|x| < x_1$. Положим тогда

$$\hat{y}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \hat{a}_r x^r, \quad |x| < x_1. \quad (5.16)$$

Подстановка этого ряда в (5.15) и приравнивание членов с одинаковыми степенями x приводит после недолгих вычислений к рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \hat{a}_r &= \|a_r\|, & r \leq k, \\ \hat{a}_r &= c \sum_{s=1}^r \|F_s\| \hat{a}_{s-r}, & r > k. \end{aligned}$$

Сопоставление с (5.12) приводит к выводу, что

$$\|a_r\| \leq \hat{a}_r, \quad r = 0, 1, \dots$$

Таким образом, из сходимости ряда (5.16) следует сходимость ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \quad \text{для } |x| < x_1.$$

А теперь уже доказательство завершается прямым путем: так как ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

можно почленно дифференцировать при $|x| < x_1$, то функция

$$z = y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

удовлетворяет в этом круге дифференциальному уравнению (5.8), если принять во внимание рекуррентные формулы (5.9) и (5.10). А так как дифференциальное уравнение не имеет особых точек при $x_1 \leq |x| \leq x_0$, то ни одно из его решений не может иметь особенности в этом кольце. Следовательно, ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

сходится при всех $|x| \leq x_0$.

Таким образом, доказана теорема 5.3 и одновременно получено следующее аналитическое дополнение к формальной теореме 5.2.

Теорема 5.4. *Формальный ряд из теоремы 5.2*

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r$$

сходится в круге сходимости степенного ряда (4.6)

5.3. Вид решения в окрестности регуляро особой точки

Дифференциальное уравнение (5.5) очень легко решается. Результат вполне аналогичен простейшему скалярному случаю. Матрица

$$Z = e^{A \cdot \log x} = x^{A_0}$$

является фундаментальным матричным решением дифференциального уравнения (5.5). Это непосредственно проверяется (см. задачу 3.7 (b)). Сочетая этот результат с утверждениями теорем 5.1 и 5.3, приходим к следующей теореме.

Теорема 5.5. *Если $A(x)$ голоморфна при $x=0$ и если никакие два собственных значения $A(0)$ не отличаются на положительное целое, то дифференциальное уравнение*

$$xY' = A(x)Y$$

имеет фундаментальное матричное решение вида

$$Y = P(x)x^{A(0)}, \quad P(0) = I, \quad (5.17)$$

причем $P(x)$ голоморфна при $x=0$. Степенное разложение $P(x)$ можно получить при помощи рациональных операций над коэффициентами A_r разложения

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r.$$

Задача 5.2. Доказать, что если все собственные значения λ_j , $j=1, \dots, n$, матрицы $A(0)$ различны, то дифференциальное уравнение (5.4) имеет фундаментальное матричное решение вида

$$V(x) = Q(x)x^{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}, \quad (5.18)$$

где $Q(x)$ голоморфна при $x=0$ и $\det Q(0) \neq 0$. Что этот результат дает дополнительно к формуле (3.16)?

Задача 5.3. Найти решение (5.17) дифференциального уравнения

$$xY' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x^2 & 0 \end{pmatrix} Y,$$

ограничиваясь в ряде для $P(x)$

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r$$

членами до $P_2 x^2$. Выписать все четыре элемента полученного матричного решения.

Как правило, решение (5.18) удобнее считать по столбцам. Пусть

$$v_j(x) = q_j(x) x^{\lambda_j} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} q_{jr} x^r \right) x^{\lambda_j} \quad (5.19)$$

есть j -й столбец $V(x)$ в формуле (5.18). Тогда

$$xv_j' = A(x)v_j \quad (5.20)$$

и векторы q_{j0}, q_{j1}, \dots могут быть последовательно вычислены путем подстановки (5.19) вместе с рядом

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r$$

в уравнение (5.20) и приравнивания членов с одинаковыми степенями x .

Задача 5.4. Найти решение вида (5.18), ограничиваясь квадратичными членами в разложении $Q(x)$, для дифференциального уравнения

$$xY' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} - x^2 & 0 \end{pmatrix} Y.$$

Для полного исследования вопроса в случае, когда $A(0)$ имеет собственные значения, отличающиеся на положительное целое, требуется теория приведения матриц к канонической форме, за исключением случая $n=2$. Ограничимся пока рассмотрением этого частного, но важного случая. Пусть λ и $\lambda+k$, k — положительное целое, — пара собственных значений $A(0)$. Тогда существует неособая постоянная матрица T , такая, что

$$T^{-1}A(0)T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+k \end{pmatrix}.$$

А тогда преобразование

$$Y = TV \quad (5.21)$$

переводит дифференциальное уравнение $xY' = A(x)Y$ в

$$xV' = T^{-1}A(x)TV = B(x)V, \quad (5.22)$$

где

$$B(x) = \begin{pmatrix} \lambda + x\psi_{11}(x) & x\psi_{12}(x) \\ x\psi_{21}(x) & \lambda + k + x\psi_{22}(x) \end{pmatrix}$$

и все $\psi_{jk}(x)$ голоморфны при $x=0$.

Теперь произведем еще одно преобразование

$$V = S(x) W, \quad (5.23)$$

где

$$S(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix},$$

и получим новое дифференциальное уравнение

$$xW' = [S^{-1}(x)B(x)S(x) - xS^{-1}(x)S'(x)]W = C(x)W; \quad (5.24)$$

$C(x)$ можно найти путем простых вычислений

$$C(x) = \begin{pmatrix} \lambda + x\psi_{11}(x) & x^2\psi_{12}(x) \\ \psi_{21}(x) & \lambda + k - 1 + x\psi_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $C(0)$ имеет собственные значения $\lambda, \lambda + k - 1$. Повторяя эту процедуру k раз, получим уравнение

$$xZ' = F(x)Z, \quad (5.25)$$

для которого $F(0)$ имеет λ двукратным собственным значением.

Формула перехода от Y к Z имеет вид

$$Y = R(x)Z, \quad (5.26)$$

где $R(x)$ — полином по x . Заметим, что $\det R(0) = 0$, но $\det R(x) \neq 0$ для $x \neq 0$.

Уравнение (5.25) имеет решение вида

$$Z = M(x)x^F(0), \quad (5.27)$$

где $M(x)$ голоморфна при $x=0$ согласно теореме 5.4. Объединяя формулы (5.26) и (5.27), приходим, таким образом, к доказательству следующей теоремы.

Теорема 5.6. *Если $A(x)$ — матрица второго порядка, голоморфная при $x=0$, то дифференциальное уравнение $xY' = A(x)Y$ имеет фундаментальное матричное решение вида*

$$Y = P(x)x^G,$$

где $P(x)$ голоморфна при $x=0$. Разность собственных значений постоянной матрицы G не является положительным целым.

Матрица G и коэффициенты степенного разложения для $P(x)$ могут быть точно вычислены посредством алгебраических операций.

Эта теорема остается справедливой для случаев более высокого порядка, чем 2, но доказательство, если следовать той же схеме рассуждений, оказывается несколько более сложным. Оно будет дано в разд. 17.1.

Простые преобразования, такие, как (5.23), осуществляемые при помощи диагональной матрицы, часто применяются в рассматриваемом круге вопросов с целью изменения собственных значений главного члена матрицы в дифференциальной системе. Эти преобразования иногда называются «срезающими» преобразованиями¹⁾.

5.4. Скалярное уравнение порядка n

Наиболее очевидный путь получения результатов для уравнения n -го порядка из предыдущих теорем основывается на преобразовании (1.4). Однако построенная таким образом теория носит слишком специальный характер, в чем нет необходимости. Более результативен следующий путь.

Пусть

$$u^{(n)} + a_1(x)u^{(n-1)} + \dots + a_n(x)u = 0 \quad (5.28)$$

— скалярное дифференциальное уравнение n -го порядка. Определим вектор-столбец y с компонентами y_j , $j=1, 2, \dots, n$, полагая

$$y_j = x^{j-1}u^{(j-1)}, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (5.29)$$

Дифференцируя (5.29), получим

$$xy'_j = (j-1)y_j + y_{j+1}, \quad j=1, \dots, n-1. \quad (5.30)$$

Если u удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.28), то дифференцирование (5.29) дает для $j=n$

$$\begin{aligned} xy'_n &= (n-1)y_n + x^n u^{(n)} = \\ &= (n-1)y_n - xa_1(x)y_n - x^2a_2(x)y_{n-1} - \dots - x^na_n(x)y_1. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Система (5.30), (5.31) имеет регулярную особенность при $x=0$ тогда и только тогда, когда функции $x^ja_j(x)$, $j=1, 2, \dots, n$, го-

¹⁾ В оригинале shearing-transformation. Мы воспользовались русским эквивалентом, предложенным И. С. Градштейном при переводе им статьи Территина Х. [2], методом которого часто пользуется автор настоящей книги. — Прим. ред.

ломорфны при $x=0$, т. е. если $a_j(x)$ имеет самое большое полюс порядка j при $x=0$. В соответствии с этим введем следующее определение.

Будем говорить, что скалярное линейное дифференциальное уравнение порядка n имеет *регулярную особенность* при $x=0$, если оно имеет особую точку при $x=0$ и при этом имеет вид

$$u^{(n)} + \sum_{j=1}^n x^{-j} p_j(x) u^{(n-j)} = 0, \quad (5.32)$$

где коэффициенты $p_j(x)$ голоморфны при $x=0$. Особая точка, не являющаяся регулярной, называется *иррегулярной*.

Так как $u=y_1(x)$ является решением (5.32), если $y(x)$ является векторным решением системы (5.30), (5.31), то из результатов, касающихся регулярных особенностей для систем, следуют соответствующие результаты для уравнения (5.32).

Задача 5.5. Пусть $xy' = A(x)y$ — система, образованная уравнениями (5.30) и (5.31). Доказать, что характеристическое уравнение матрицы $A(0)$ имеет вид

$$\begin{aligned} p_n(0) + \lambda p_{n-1}(0) + \lambda(\lambda-1) p_{n-2}(0) + \dots \\ \dots + \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+2) p_1(0) + \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) = 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Уравнение (5.33) называется *определяющим уравнением* дифференциального уравнения (5.32) в точке $x=0$. Если среди корней λ_j , $j=1, 2, \dots, n$, этого уравнения нет таких, которые отличаются на целое число (сюда относится также и нуль), то из формулы (5.18) можно сделать заключение о том, что (5.32) обладает n линейно независимыми решениями вида $\pi_j(x)x^{\lambda_j}$, $j=1, 2, \dots, n$, где $\pi_j(x)$ — скалярные функции, голоморфные при $x=0$.

Теория одного линейного дифференциального уравнения n -го порядка с аналитическими коэффициентами в окрестности обыкновенной или регулярно особой точки имеется во многих книгах. Несмотря на то что наиболее важные факты этой теории представляют собой просто частный случай соответствующих результатов для систем, все же в действительности часто бывает удобно использовать специальные свойства скалярной системы. Это замечание относится, в частности, к вопросу о наилучшем пути построения точного степенного разложения для решений рассматриваемых уравнений. В настоящей книге не предполагается углубляться в эту область.

Задача 5.6. Преобразовать дифференциальное уравнение Бесселя

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - p^2) u = 0$$

в эквивалентную систему двух дифференциальных уравнений первого порядка с регулярной особенностью при $x=0$. Найти фундаментальную матрицу, выразив ее через цилиндрические (бесселевы) функции, и сосчитать соответствующую циклическую матрицу относительно точки $x=0$ (результат существенно зависит от входящего в дифференциальное уравнение параметра p).

Асимптотические степенные ряды

6. Вводные замечания относительно иррегулярных особых точек

Как будет видно в дальнейшем, некоторые результаты теории регулярно особых точек сохраняют силу применительно к иррегулярным особенностям. Однако при этом выпадает один из краеугольных камней теории, а именно теорема 5.3, которая утверждает, что в окрестности регулярно особой точки сходятся все степенные ряды, которые являются формальными решениями дифференциального уравнения.

Задача 6.1. Найти ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r,$$

который формально удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x^3 u'' + (x^2 + x) u' - u = 0,$$

и показать, что этот ряд расходится для всех $x \neq 0$.

Как будет видно в дальнейшем, ситуация, имеющая место в задаче 6.1, типична при одном добавлении: обычно дифференциальное уравнение вовсе не имеет формального решения в виде степенного ряда, но простое преобразование зависимого переменного, содержащее экспоненциальные функции, приводит к дифференциальному уравнению, допускающему формальные решения в виде степенных рядов.

В порядке исключения могут существовать решения, допускающие сходящиеся степенные разложения. Простейшим примером является дифференциальное уравнение

$$x^2 u'' + u' = 0,$$

обладающее решением $u = 1$.

Расходящиеся степенные ряды, которые появляются в формальных решениях дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярной точки, отнюдь нельзя считать бесполезными.

В определенном смысле, как это будет разъяснено в следующих главах, они часто не менее удобны для численных расчетов решений и для изучения их свойств, нежели сходящиеся ряды.

7. Определение асимптотического степенного ряда

7.1. Пример

Наиболее известный пример асимптотического ряда возникает в задаче вычисления так называемого «экспоненциального интеграла»

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x e^{t-1} dt, \quad x < 0. \quad (7.1)$$

Последовательным интегрированием по частям сразу получаем $\text{Ei}(x) = e^x x^{-1} [1 + x^{-1} + 2! x^{-2} + \dots + m! x^{-m} + R_m(x)]$, (7.2)

где

$$R_m(x) = (m+1)! x \int_{-\infty}^x e^{t-x} t^{-m-2} dt \quad (7.3)$$

для любого неотрицательного m .

Очевидно, этот процесс не приводит к сходящемуся ряду, но тем не менее $R_m(x)$ мало для больших отрицательных x . В самом деле, для $x < 0$ еще одно интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} |R_m(x)| &= \left| [(m+1)! x e^{t-x} t^{-m-2}]_{-\infty}^x + (m+2)! x \int_{-\infty}^x e^{t-x} t^{-m-3} dt \right| \leq \\ &\leq (m+1)! |x|^{-m-1} + (m+2)! |x| \left| \int_{-\infty}^x t^{-m-3} dt \right| \leq \\ &\leq 2(m+1)! |x|^{-m-1}, \quad x < 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Задача 7.1. Улучшить эту оценку, показав, что ошибка всегда меньше, чем $(m+1)$ -й член разложения, т. е.

$$|R_m(x)| \leq (m+1)! |x|^{-m-1}.$$

При фиксированном m и больших отрицательных x остаточный член, таким образом, является бесконечно малой порядка $O(x^{-m-1})$. Следовательно, частичная сумма

$$\sum_{r=0}^m r! x^{-r}$$

представляет собой сколь угодно хорошее приближение к функции $Ei(x)e^{-x}$, если только x достаточно большое по модулю отрицательное число. С другой стороны, если $x < 0$ фиксировано, то члены ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} r! x^{-r}$$

убывают с возрастанием r , только если $r < |x|$. Для $r > |x|$ члены ряда быстро растут с ростом r . Для заданного x ошибка, таким образом, достигает минимума при некотором значении m . Если взять большее число членов, то точность опять понижается. Это значит, что в отличие от ситуации, имеющей место для сходящихся рядов, для каждого заданного x имеется неустранимый предел точности, с которой функция может быть вычислена посредством такого ряда.

Ограничение отрицательной действительной осью в данном примере является искусственным, так как функция $Ei(x)$ может быть продолжена как аналитическая функция в комплексную плоскость. Эта аналитическая функция имеет точку ветвления бесконечного порядка при $x=0$, но та ветвь, которая действительна на действительной отрицательной полуоси x , голоморфна во всей плоскости, из которой исключен луч $x \geq 0$.

Задача 7.2. Доказать все эти последние утверждения.

Задача 7.3. Пусть S — сектор $\delta \leq \arg x \leq 2\pi - \delta$, $0 < \delta < 2\pi$. Доказать, что оценка $|R_m(x)| \leq 2(m+1)!|x|^{-m-1}$ справедлива в S для той ветви $Ei(x)$, которая действительна при действительных отрицательных x .

7.2. Определение

В рассмотренном примере нас интересовала асимптотическая природа функции, когда x стремилось к бесконечности предписанным образом. Дадим теперь общее определение, охватывающее случай, наблюдавшийся в примере. Однако в целях удобства записи будем вести рассмотрение при $x \rightarrow 0$, считая, что имеет место аналогичная ситуация. Все это видоизменяется очевидным образом применительно к случаю, когда x стремится к бесконечности или к некоторой точке a .

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве точек S комплексной плоскости x , для которого точка $x=0$ является предельной точкой. Говорят, что степенной ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

асимптотически представляет функцию $f(x)$ в S при $x \rightarrow 0$, если

$$x^{-m} \left[f(x) - \sum_{r=0}^m a_r x^r \right]$$

стремится к нулю для всех $m \geq 0$, когда $x \rightarrow 0$ на множестве S .

Формулы (7.2) и (7.4) показывают, что ряды

$$\sum_{r=0}^{\infty} r! x^{-r}$$

асимптотически представляют функцию $f(x) = \text{Ei}(x) e^{-x}$ при $x \rightarrow \infty$ на отрицательной действительной полуоси.

Выражение «функция $g(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow 0$ в S » означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется δ_ε , такое, что $|g(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in S$ и $|x| < \delta_\varepsilon$. При такой формулировке не возникает вопроса о равномерном стремлении. Если же записать x в полярных координатах $x = re^{i\theta}$, то данное выше определение означает, что

$$\lim_{r \rightarrow +0} g(re^{i\theta}) = 0$$

равномерно относительно всех θ , отвечающих точкам S .

Если S является открытым сектором, как это будет иметь место в ряде нижеследующих теорем, то, согласно определению, асимптотическое соотношение справедливо в любом замкнутом подсекторе.

Асимптотическая связь, о которой говорится в определении, обычно записывается в виде

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad x \in S, \quad x \rightarrow 0. \quad (7.5)$$

Если оказывается, что степенной ряд справа сходится к $f(x)$, то соотношение (7.5), разумеется, справедливо, а в качестве S можно взять окрестность точки $x=0$.

В определении говорится о бесконечном асимптотическом ряде, но иногда встречаются случаи, когда сказанное в определении справедливо лишь для некоторого конечного числа частичных сумм $m \leq m_0$. Для большинства приложений этого достаточно. Здесь, однако, обозначение (7.5) будет употребляться для выражения асимптотической связи с бесконечным числом членов.

Из определения, сформулированного в начале раздела, следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0, \quad x \in S, \quad (7.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-m} \left[f(x) - \sum_{r=0}^{m-1} a_r x^r \right] = a_m, \quad m > 0, \quad x \in S. \quad (7.7)$$

Соотношение (7.6) является непосредственным следствием определения применительно к $m=0$; (7.7) можно доказать методом индукции, заметив, что

$$x^{-m} \left[f(x) - \sum_{r=0}^m a_r x^r \right] = x^{-m} \left[f(x) - \sum_{r=0}^{m-1} a_r x^r \right] - a_m, \quad m > 0.$$

Обратно, если (7.6) и (7.7) справедливы, то ряд является для $f(x)$ асимптотическим. Таким образом, эти соотношения можно взять за определение асимптотического представления.

8. Элементарные свойства асимптотических рядов

8.1. Алгебраические свойства

Теорема 8.1. Функция $f(x)$ может иметь самое большое одно степенное асимптотическое представление

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r,$$

когда $x \rightarrow 0$ в заданной области S .

Доказательство. Соотношения (7.6) и (7.7) определяют коэффициенты a_r единственным образом.

Очень важно помнить, что обращение этой теоремы несправедливо. Заданный степенной ряд *никогда однозначно* не определяет функцию, для которой он является асимптотическим. Например, тривиальный степенной ряд, все коэффициенты которого равны нулю, представляет на положительной действительной полуоси две функции: $f(x) \equiv 0$ и $g(x) = e^{-1/x}$. Более того, легко убедиться, что степенной ряд, представляющий асимптотически одну функцию, асимптотически представляет бесконечное множество функций. С другой стороны, верно также и то, что разность между этими функциями стремится к нулю при $x \rightarrow 0$ на заданном множестве точек быстрее, чем любая степень x . Если представленные одним и тем же асимптотическим рядом функции являются аналитическими, то следует остерегаться ошибочного заключения, что их аналитические продолжения

за пределы S также должны быть асимптотически равны. Например, две функции 0 и $e^{-1/x}$ обладают существенно различными асимптотическими свойствами, когда $x \rightarrow 0$ на отрицательной действительной полуоси.

Асимптотические ряды можно почленно складывать и умножать на константу, т. е. справедлива

Теорема 8.2. Если $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, где α и β — константы, то из представлений

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad g(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$$

следует представление

$$h(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha a_r + \beta b_r) x^r.$$

Доказательство очевидно.

Теорема 8.3. Если

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad g(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$$

в S , то $f(x)g(x)$ асимптотически представляется в S рядом, получаемым формальным почленным перемножением заданных рядов.

Доказательство. Ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r,$$

полученный формальным умножением, имеет коэффициенты

$$c_r = \sum_{j=0}^r a_j b_{r-j}.$$

По предположению

$$f(x) = \sum_{r=0}^m a_r x^r + E_1(x, m) x^m,$$

$$g(x) = \sum_{r=0}^m b_r x^r + E_2(x, m) x^m,$$

где $E_1(x, m)$, $E_2(x, m)$ стремятся при фиксированном m к нулю, когда $x \rightarrow 0$ в S . Перемножая эти два равенства, сразу замечаем, что

$$f(x)g(x) = \sum_{r=0}^m c_r x^r + E_3(x, m) x^m,$$

где $E_3(x, m)$ стремится к нулю, когда $x \rightarrow 0$ в S . Это и доказывает теорему.

Если

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

для $x \in S$ и

$$g(u) \sim \sum_{s=0}^{\infty} b_s u^s$$

для $u \in T$, то возникает вопрос: можно ли получить асимптотическое разложение функции $h(x) = g[f(x)]$ путем формальных операций с данными рядами? Функция $h(x)$ определена в S , только если $f(x) \in T$ для $x \in S$, что мы и будем предполагать. Далее нужно потребовать, чтобы $a_0 = 0$. Без этого ограничения задача теряет смысл, поскольку в асимптотическом ряде для $g(u)$ подразумевается предельный переход $u \rightarrow 0$, а

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0.$$

Если $a_0 = 0$, то можно перестроить ряд, получаемый формальной подстановкой

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_s \left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r \right)^s,$$

если предварительно развернуть каждую степень

$$\left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r \right)^s.$$

Коэффициенты c_t при x^t в полученном таким образом ряде

$$\sum_{t=0}^{\infty} c_t x^t$$

являются полиномами относительно $a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_t$.

Теорема 8.4. Если

$$f(x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r$$

для $x \in S$,

$$g(u) \sim \sum_{s=0}^{\infty} b_s u^s$$

для $u \in T$ и если $f(x) \in T$ для $x \in S$, то

$$g[f(x)] \sim \sum_{t=0}^{\infty} c_t x^t \quad \text{для } x \in S,$$

где коэффициенты c_i определяются, если формально подставить ряд для $f(x)$ в ряд для $g(u)$ и собрать члены при одинаковых степенях x .

Доказательство может быть проведено при помощи той же самой техники, которая была использована при доказательстве теоремы 8.3, а поэтому предоставим его в качестве упражнения:

Задача 8.1. Доказать теорему 8.4.

Теорема 8.5. Если

$$h(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

и $a_0 \neq 0$ для $x \in R$, то функция $1/h(x)$ определена на той части S множества R , для которой $|x| < x_0$ (x_0 — некоторое положительное число), и

$$1/h(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \quad x \in S.$$

Коэффициенты c_i могут быть последовательно вычислены, если в развернутом выражении для

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \right)$$

коэффициенты при x^s приравнять единице для $s=0$ и нулю для $s \neq 0$.

Доказательство. Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = a_0 \neq 0$$

для $x \in R$, то функция $1/h(x)$ существует при всех достаточно малых $x \in R$, т. е. при $|x| < x_0$. Положим теперь $f(x) = h(x) - a_0$ и $g(u) = (a_0 + u)^{-1}$. Функция $g(u)$ имеет асимптотическое (даже сходящееся) разложение при $u \rightarrow 0$. Если через T обозначить круг $|u| < |a_0|$, то будут выполнены условия теоремы 8.4. Следовательно, $g[f(x)] = 1/h(x)$ имеет в S асимптотическое разложение

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i.$$

Далее, $h(x)[1/h(x)] = 1$. Согласно теореме 8.3, левая часть этого выражения имеет асимптотическое разложение, которое может быть получено формальными операциями. Из свойства единст-

венности, утверждаемого теоремой 8.1, следует, что это разложение совпадает с разложением функции, тождественно равной единице. Этим и завершается доказательство.

8.2. Аналитические свойства

Начиная с этого момента ограничимся рассмотрением аналитических функций, поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело с дифференцированием и интегрированием в комплексной плоскости. Область, в которой оказываются справедливыми нижеследующие теоремы, представляет собой сектор с вершиной в $x=0$ (если разложение ведется по степеням x). Говоря, что асимптотическое разложение справедливо в таком секторе, будем подразумевать, что в рассмотрение включаются также его границы, не считая вершины, если только специально не оговаривается противное. Для удобства обычно предполагается, что сектор ограничен дугой окружности.

Следующая теорема объясняет, почему при рассмотрении асимптотических рядов аналитических функций естественным образом появляются секторы.

Теорема 8.6. *Если $f(x)$ голоморфна по всей кольцевой окрестности $0 < |x| \leq x_0$ точки $x=0$ и если*

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad x \rightarrow 0,$$

для всех значений аргумента x , то ряд сходится к $f(x)$ в этой кольцевой окрестности.

Доказательство. Так как, согласно предположению,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0,$$

то начало координат является устранимой особой точкой, т. е. если положить $f(0) = a_0$, то определенная таким образом функция $f(x)$ является голоморфной при $x=0$, согласно известным теоремам, и, следовательно, может быть разложена в сходящийся степенной ряд при $|x| \leq x_0$. В силу теоремы единственности 8.1 этот ряд должен совпадать с рядом

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r.$$

Тот факт, что асимптотический ряд для $f(x)$ сходится в некотором секторе S , не означает, что он сходится именно к $f(x)$, за исключением того случая, когда S представляет собой кольцевую окрестность точки $x=0$. Например, функция $e^{-1/x}$ при

$x \rightarrow 0$ в правой полуплоскости асимптотически представляется степенным рядом, все коэффициенты которого равны нулю.

Во многих приложениях встречаются расходящиеся асимптотические разложения, справедливые в секторе с углом раствора, большим 2π . Это не противоречит теореме 8.6, так как такие функции не однозначны, а имеют точку ветвления при $x=0$ и, следовательно, не голоморфны в окрестности $x=0$. Такого рода секторы могут быть интерпретированы как секторы на римановой поверхности, на которой функция однозначна. Функция $E_1(x)e^{-x}$, рассмотренная в разд. 7.1, представляет собой как раз такой случай. Асимптотическое разложение для этой функции, которое было получено на отрицательной действительной оси и далее распространено на любой сектор вида $\delta \leq \arg x \leq 2\pi - \delta$, в действительности справедливо в секторе $-\frac{1}{2}\pi + \delta \leq \arg x \leq \frac{5}{2}\pi - \delta$ на соответствующей римановой поверхности. Доказательства этого факта приводить не будем.

Теорема 8.7. Если $f(x)$ голоморфна в секторе S , то из асимптотического разложения

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \quad \text{в } S$$

следует асимптотическое разложение

$$\int_0^x f(t) dt \sim \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{r+1} x^{r+1}$$

в предположении, что путь интегрирования (за исключением точки 0) лежит в S .

Доказательство. По условию

$$f(x) = \sum_{r=0}^m a_r x^r + E(x, m) x^m, \quad (8.1)$$

где

$$\lim_{x \rightarrow 0} E(x, m) = 0, \quad x \in S.$$

Так как существует

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad x \in S,$$

то интеграл от нуля до x от функции в (8.1) также существует и не зависит от пути, покуда этот путь лежит в S . Выберем в качестве пути прямолинейный отрезок. Согласно (8.1), функция $E(x, m)$ голоморфна в S . Так как она стремится к нулю при

$x \rightarrow 0$, то она будет равномерно непрерывной на замыкании S , если ей придать нулевое значение в начале координат. Отсюда следует, что подинтегральное выражение в правой части равенства

$$\int_0^x E(t, m) t^m dt = x^{m+1} \int_0^1 E(\tau x, m) \tau^m d\tau, \quad t = \tau x, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

стремится к нулю равномерно в S , когда $x \rightarrow 0$, $x \in S$. А тогда интегрирование формулы (8.1) от 0 до x приводит сразу к желаемому результату.

Однако почленно дифференцировать асимптотический ряд можно не всегда. Простейшим примером служит функция $f(x) = e^{-1/x} \sin(e^{1/x})$. Для $x > 0$ имеем $f(x) \sim 0$. Но

$$f'(x) = x^{-2} [e^{-1/x} \sin(e^{1/x}) + \cos(e^{1/x})]$$

не имеет степенного асимптотического представления на действительной положительной оси, поскольку не существует предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x).$$

Но, как будет сейчас показано, этот противоречащий пример является в определенном смысле исключительным. Почленное дифференцирование приводит к неверному результату только для функций, асимптотическое разложение которых справедливо — как в данном примере — на одном единственном луче.

Теорема 8.8. Если $f(x)$ голоморфна в секторе S , определенном неравенствами $0 < |x| \leq x_0$, $\theta_1 \leq \arg x \leq \theta_2$, где $\theta_2 > \theta_1$, и если

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad x \in S,$$

то

$$f'(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} r a_r x^{r-1}$$

в каждом собственном подсекторе $S^*: \theta_1 < \theta_1^* \leq \arg x \leq \theta_2^* < \theta_2$.

Доказательство. По предположению формула (8.1) справедлива в S . Ее дифференцирование дает

$$f'(x) = \sum_{r=0}^m a_r r x^{r-1} + m x^{m-1} E(x, m) + x^m E'(x, m).$$

Обозначим через α положительное число, настолько малое, что круг C_x радиуса $|x|\alpha$ с центром в x принадлежит S для всех x

из S^* ; пусть $M(x, m)$ — максимальное значение $|E(x, m)|$ в C_x . Тогда в силу того, что $E(x, m)$ голоморфна в C_x и на границе C_x ,

$$\left| \frac{dE(x, m)}{dx} \right| \leq \frac{M(x, m)}{|x|^a}$$

согласно формуле Коши. Следовательно,

$$\left| f'(x) - \sum_{r=0}^m a_r r x^{r-1} \right| \leq |x|^{m-1} \left[m |E(x, m)| + \frac{M(x, m)}{a} \right]$$

Выражение в скобках стремится к нулю при $x \rightarrow 0$ в S^* , что и доказывает теорему.

9. Существование асимптотического разложения

9.1. Асимптотическое разложение и формула Тейлора

Частичный ответ на вопрос о том, какие аналитические функции имеют асимптотическое разложение, непосредственно следует из формулы Тейлора, записанной в виде

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots \\ \dots + \frac{(x-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{1}{m!} \int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t) dt. \quad (9.1)$$

Если сектор S таков, что $f(x)$ в нем голоморфна и существуют пределы

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S}} f^{(r)}(x), \quad r = 0, 1, \dots, m+1,$$

то в (9.1) можно устремить a к нулю. Остаточный член в формуле (9.1) ограничен величиной

$$\sup_{x \in S} |f^{(m+1)}(x)| \frac{1}{m!} \int_0^{|x|} |x-t|^m dt = \\ = \sup_{x \in S} |f^{(m+1)}(x)| \frac{|x|^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-s)^m ds,$$

где $t = sx$. Этим доказана

Теорема 9.1. Если $f(x)$ голоморфна в секторе S и если существуют пределы

$$f_r = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S}} f^{(r)}(x), \quad r = 0, 1, \dots, \quad (9.2)$$

то

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_r}{r!} x^r, \quad x \in S. \quad (9.3)$$

Если пределы (9.2) существуют лишь для конечного числа, скажем для первых m , номеров, то $f(x)$ имеет асимптотическое разложение, содержащее m членов. Например, функция $f(x) = e^x + x^3 \log x$ обладает асимптотическим представлением из двух членов

$$e^x + x^3 \log x = 1 + x + E(x, 2)x^2,$$

но не обладает полиномиальным асимптотическим представлением с большим числом членов.

Величину f_r в (9.2) иногда обозначают $f^{(r)}(0)$. Важно, однако, помнить, что f_r — это, строго говоря, не производная. В действительности $f(x)$ имеет особенность при $x=0$, за исключением случая, когда ряд сходится.

Теорема 9.1 имеет обратную.

Теорема 9.2. Пусть $f(x)$ голоморфна в секторе S , имеющем внутренние точки, и пусть S^* — произвольный собственный подсектор S . Если

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad x \in S,$$

то

$$a_r = \frac{1}{r!} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S^*}} f^{(r)}(x).$$

Задача 9.1. Доказать теорему 9.2.

9.2. Аналитические функции с заданным асимптотическим разложением

Можно поставить вопрос: каким условиям должен удовлетворять расходящийся степенной ряд, чтобы служить асимптотическим представлением некоторой аналитической функции, и как найти эту функцию? Ответ на этот вопрос, как ни

удивительно, заключается в том, что не требуется никаких ограничений: для произвольного формального степенного ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

и любого сектора S можно построить аналитическую функцию $f(x)$, такую, что

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r.$$

В литературе имеется несколько построений такого рода. Рассматриваемое здесь принадлежит Ритту [1].

Без ограничения общности можно предположить, что сектор S делится пополам положительной действительной осью, так как если ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

является асимптотическим для функции $f(x)$ в секторе S , то ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{-i\theta r} x^r$$

является асимптотическим для функции $\varphi(x) = f(xe^{-i\theta})$ в секторе, полученном вращением S на произвольный угол θ . В соответствии с этим допустим, что S ограничен лучами $\arg x = \pm \gamma$. Для определенности предположим, что $|x| < 1$ в S , хотя это существенного значения не имеет.

Основная идея построения заключается в замене исходного ряда модифицированным рядом вида

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \alpha_r(x) x^r,$$

где «множители сходимости» $\alpha_r(x)$ выбираются таким образом, чтобы новый ряд равномерно сходиллся, но обладал бы теми же асимптотическими свойствами при $x \rightarrow 0$, что и исходный ряд. Эти требования не противоречат друг другу, так как первое из них касается зависимости $\alpha_r(x)$ от r , а второе — зависимости того же $\alpha_r(x)$ от x : $\alpha_r(x)$ для $x \neq 0$ должно быть достаточно малым в случае, если a_r велико, а с другой стороны, оно должно быстро стремиться к единице, когда $x \rightarrow 0$. Такого рода свойствами обладает, например, функция типа

$$\alpha_r(x) = 1 - \exp(-b_r/x^{\beta}), \quad b_r > 0. \quad (9.4)$$

Здесь β — некоторое число из интервала $0 < \beta < 1$. Выбирая β достаточно малым, можно быть уверенным, что показатель в (9.4) имеет отрицательную действительную часть в любом секторе S комплексной плоскости и даже в наперед заданном секторе с конечным центральным углом на бесконечнолистной римановой поверхности с точкой ветвления $x=0$. Для доказательства понадобится следующий простой факт:

$$|1 - e^z| < |z| \quad \text{для} \quad \operatorname{Re} z < 0. \quad (9.5)$$

Задача 9.2. Доказать формулу (9.5).

Если неравенство (9.5) применить к (9.4), то можно видеть, что

$$|a_r a_r(x) x^r| \leq |a_r| |b_r| |x| r^{-\beta}, \quad x \in S.$$

Следовательно, если b_r определить соотношениями

$$b_r = \begin{cases} |a_r|^{-1} & \text{для } a_r \neq 0, \\ 0 & \text{для } a_r = 0, \end{cases}$$

то ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r a_r(x) x^r$$

мажорируется для $x \in S$ рядом

$$\sum_{r=1}^{\infty} |x| r^{-\beta},$$

который равномерно сходится для $|x| \leq x_0 < 1$. Следовательно, прежний ряд равномерно сходится в любой замкнутой подобласти области $x \in S$, $|x| \leq x_0$, а это значит, что он представляет собой в любой подобласти области $x \in S$, $|x| \leq x_0$ голоморфную функцию.

Теперь нужно показать, что эта функция

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r a_r(x) x^r \quad (9.6)$$

имеет асимптотическое разложение

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad x \in S.$$

Пользуясь (9.4) и (9.6), напомним

$$\begin{aligned} x^{-m} \left[f(x) - \sum_{r=0}^m a_r x^r \right] &= \\ &= - \sum_{r=0}^m a_r \exp(-b_r/x^\beta) x^{-(m-r)} + \sum_{r=m+1}^{\infty} a_r a_r(x) x^{r-m}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю, когда $x \rightarrow 0$ в S . А так как в S для $|x| \leq x_0$

$$\left| \sum_{r=m+1}^{\infty} a_r a_r(x) x^{r-m} \right| \leq \sum_{r=m+1}^{\infty} |x|^{r-m-\beta} < \frac{|x|^{1-\beta}}{1-|x|}$$

согласно тому, что уже доказано, то второе слагаемое также стремится к нулю при $x \rightarrow 0$.

Условие $x_0 < 1$ не является необходимым. При $x_0 \geq 1$ все рассуждения остаются справедливыми для $|x| < x_0$, если положить b_r равным $|a_r x_0^r|^{-1}$.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 9.3. Для всякого формального степенного ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

и любого сектора S существует функция $f(x)$, голоморфная в S при $|x| \leq x_0$ (x_0 — произвольная постоянная) и такая, что

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \quad \text{в } S.$$

Функция $f(x)$, разумеется, определена неоднозначно. Функция частного вида, построенная указанным здесь способом, имеет точку ветвления при $x=0$, так как β не является целым.

9.3. Асимптотические разложения для функций двух переменных

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с функциями двух переменных, имеющими асимптотическое разложение по одному из этих переменных. С такими разложениями следует обращаться осторожно, так как оказывается, что формально допустимые над ними операции могут привести к неверным результатам.

В дальнейшем через S будет обозначаться сектор вида

$$\alpha \leq \arg x \leq \beta, \quad 0 < |x| \leq x_0.$$

Через T обозначим замкнутую ограниченную область на плоскости комплексного переменного y . Очевидно, S не зависит от y , а T не зависит от x . Функции $f(x, y)$, которые будут здесь рассматриваться, обладают асимптотическим разложением

$$f(x, y) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r(y) x^r \quad \text{при } x \rightarrow 0 \text{ в } S \quad (9.7)$$

для всех $y \in T$. Это означает, как уже говорилось выше, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S}} x^{-m} \left[f(x, y) - \sum_{r=0}^m a_r(y) x^r \right] = 0 \quad (9.8)$$

для всех $m > 0$ и всех $y \in T$. Если сходимость в (9.8) является равномерной относительно y для $y \in T$, то будем говорить, что асимптотическое разложение является *равномерным* относительно y для $y \in T$.

Символом $S \times T$ будем обозначать прямое произведение S и T , т. е. множество всех упорядоченных пар (x, y) , $x \in S$, $y \in T$.

Лемма 9.1. Пусть $f(x, y)$ ограничена в $S \times T$, и пусть $f(x, y)$ имеет асимптотическое разложение вида (9.7) с коэффициентами $a_r(y)$, каждый из которых ограничен в T . При этих условиях асимптотическое разложение является равномерным в T тогда и только тогда, когда функция $E_m(x, y)$, определяемая соотношением

$$f(x, y) = \sum_{r=0}^m a_r(y) x^r + E_m(x, y) x^{m+1}, \quad (9.9)$$

ограничена в $S \times T$ при каждом m .

Доказательство.

(а) Если разложение (9.7) является равномерным для $y \in T$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_m(\varepsilon) > 0$, не зависящее от y , что в $S \times T$

$$\left| x^{-m} \left[f(x, y) - \sum_{r=0}^m a_r(y) x^r \right] \right| < \varepsilon,$$

если только $|x| \leq \delta_m(\varepsilon)$. Заменяя в этом неравенстве m на $m+1$, получим сразу, что

$$\left| x^{-m-1} \left[f(x, y) - \sum_{r=0}^m a_r(y) x^r \right] \right| < \varepsilon + |a_{m+1}(y)|,$$

откуда следует ограниченность $E_m(x, y)$ в той части $S \times T$, где $|x| \leq \delta_{m+1}(\varepsilon)$. Для $|x| > \delta_{m+1}(\varepsilon)$, $(x, y) \in S \times T$ ограниченность функции

$$E_m(x, y) = \left[f(x, y) - \sum_{r=0}^m a_r(y) x^r \right] x^{-m-1} \quad (9.10)$$

следует из ограниченности $f(x, y)$ и $a_r(y)$.

(b) Если $E_m(x, y)$, определяемая формулой (9.10), ограничена, то имеем

$$x^{-m} \left[f(x, y) - \sum_{r=0}^m a_r(y) x^r \right] = E_m(x, y) x,$$

и, таким образом, это выражение равномерно в T стремится к нулю, когда $x \rightarrow 0$ в S .

Теорема 9.4. Если $f(x, y)$ голоморфна по обоим переменным в $S \times T$ и обладает равномерным асимптотическим разложением вида (9.7), то все $a_r(y)$ голоморфны в T и

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \sim \sum_{r=0}^{\infty} \frac{da_r(y)}{dy} x^r$$

равномерно на любом компактном собственном подмножестве T_1 множества T .

Доказательство.

(a) По определению равномерного асимптотического ряда

$$a_0(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S}} f(x, y)$$

равномерно относительно y для $y \in T$. А тогда в силу замкнутости и ограниченности T функция $a_0(y)$ должна быть голоморфной в T . Будем теперь рассуждать по методу индукции. Пусть $a_0(y), \dots, a_{m-1}(y)$ голоморфны в T . Так как

$$a_m(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S}} x^{-m} \left[f(x, y) - \sum_{r=0}^{m-1} a_r(y) x^r \right],$$

согласно (7.7), и так как сходимостъ является равномерной в T , то $a_m(y)$ голоморфна в T .

(b) Функции $a_r(y)$ голоморфны в T и, значит, ограничены в T , поскольку T является компактом. Кроме того, $f(x, y)$ ограничена в $S \times T$, так как она там голоморфна, и равномерно стремится к пределу $a_0(y)$ при $x \rightarrow 0$. Следовательно, применима лемма 9.1, и $E_m(x, y)$, определяемая формулой (9.10), ограничена в $S \times T$, т. е.

$$|E_m(x, y)| \leq M_m \quad \text{в } S \times T.$$

Обозначим теперь через r некоторое положительное число, не превосходящее расстояния от T_1 до границы T . Так как $E_m(x, y)$ голоморфна относительно y в $S \times T$, то, согласно интегральной формуле Коши, справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial E_m(x, y)}{\partial y} \right| \leq M_m / r \quad \text{в } S \times T_1.$$

Если теперь продифференцировать (9.9) по y и применить лемму 9.1 к результату дифференцирования, то доказательство теоремы будет закончено.

Задача 9.3. Пусть $f(x, y) = e^{-y/x}$, и пусть S и T определены соотношениями

$$S: 0 < |x| \leq 1, \quad |\arg x| \leq \pi/8,$$

$$T: |y| \leq 1, \quad |\arg y| \leq \pi/8.$$

Проиллюстрировать предыдущее, показав, что $f(x, y)$ имеет асимптотическое разложение по степеням x , которое, однако, не является равномерным в T . Показать, что не все $a_r(y)$ голоморфны в T .

Было бы неправильно заключать, что функция $f(x, y)$, имеющая равномерное асимптотическое разложение (9.7) с голоморфными коэффициентами, обязательно голоморфна по y , так как (9.7) не определяет функцию однозначно. Например, функция $e^{-1/x}|y|$ имеет равномерное асимптотическое разложение со всеми коэффициентами, равными нулю, если S — сектор, принадлежащий правой полуплоскости, а T — ограниченная область.

Голоморфная функция $f(x, y)$, имеющая асимптотическое разложение по x , разумеется, может быть разложена в сходящийся ряд по степеням y , если предположить без ограничения общности, что область T содержит круг $|y| \leq y_0$. Пусть

$$f(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(x) y^s, \quad |y| \leq y_0, \quad x \in S. \quad (9.11)$$

Если условия теоремы 9.4 для этой функции выполнены, то $a_r(y)$ из (9.7) имеет сходящееся степенное разложение

$$a_r(y) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{r,s} y^s, \quad |y| \leq y_0. \quad (9.12)$$

Подставляя этот ряд в (9.7) и формально перегруппировывая члены, приходим к ряду

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{r,s} x^r \right) y^s.$$

Естественно поставить вопрос: является ли формальный ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_{r,s} x^r$$

асимптотическим разложением $c_s(x)$ из ряда (9.11)? Это, как будет сейчас доказано, в самом деле имеет место.

Теорема 9.5. Пусть $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 9.4, и пусть T содержит круг $|y| \leq y_0$. Тогда если $c_s(x)$ и a_{rs} обозначают коэффициенты в формулах (9.11) и (9.12), то

$$c_s(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_{rs} x^r \quad \text{при } x \rightarrow 0 \text{ в } S. \quad (9.13)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{r=0}^m a_r(y) x^r + E_m(x, y) x^{m+1} = \\ &= \sum_{r=0}^m \left(\sum_{s=0}^{\infty} a_{rs} y^s \right) x^r + E_m(x, y) x^{m+1} = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^m a_{rs} x^r \right) y^s + E_m(x, y) x^{m+1}. \end{aligned}$$

Вычитая (9.11) из этого равенства, получим

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^m a_{rs} x^r - c_s(x) \right) y^s + E_m(x, y) x^{m+1} = 0.$$

Так как $E_m(x, y)$ ограничено в $S \times T$, то отсюда следует, что имеет место равномерный предельный переход

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S}} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{r=0}^m a_{rs} x^r - c_s(x) \right] x^{-m} \right\} y^s = 0. \quad (9.14)$$

В целях сокращения записи обозначим

$$g_s(x) = \left[\sum_{r=0}^m a_{rs} x^r - c_s(x) \right] x^{-m}$$

и

$$g(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} g_s(x) y^s, \quad x \in S, \quad |y| \leq y_0.$$

Доказательство можно считать законченным, если будет показано, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S}} g_s(x) = 0.$$

Но это является непосредственным следствием (9.14), т. е. равномерного для $|y| \leq y_0$ предельного соотношения

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S}} g(x, y) = 0,$$

поскольку, согласно формуле Коши, можно написать

$$g_s(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{g(x, y)}{y^{s+1}} dy,$$

где Γ представляет собой окружность $|y| = y_0$, и устремить x к нулю под знаком интеграла.

Необходимо подчеркнуть, что обращение теоремы 9.5 не имеет места. Если $f(x, y)$ голоморфна по обоим переменным в $S \times T$, как в теореме 9.5, и если коэффициенты $c_s(x)$ сходящегося разложения (9.11) имеют асимптотическое представление вида (9.13), то еще нельзя делать заключения, что перестановка порядка суммирования приведет к асимптотическому ряду по степеням x для $f(x, y)$.

Задача 9.4. Пусть

$$f(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!}{1+s!x} y^s.$$

Показать, что этот ряд определяет функцию, голоморфную по обоим переменным для $|y| \leq y_0 < 1$, $0 < |x| \leq x_0$, $|\arg x| \leq \theta < \pi$. Доказать, что ни по одному лучу в плоскости x не существует предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y),$$

т. е. $f(x, y)$ не имеет асимптотического представления по степеням x .

Впоследствии часто придется пользоваться следующим обобщением теоремы 9.3.

Теорема 9.6. Пусть функции $a_r(y)$, $r=0, 1, \dots$, голоморфны в T , где T — круг $|y| \leq y_0$, и пусть S — произвольный сектор вида $\alpha \leq \arg x \leq \beta$, $0 < |x| < x_0$. Тогда существует функция $f(x, y)$, голоморфная по обоим переменным в $S \times T$ и такая, что имеет место равномерное в T асимптотическое представление

$$f(x, y) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r(y) x^r \quad \text{при } x \rightarrow 0 \text{ в } S.$$

Задача 9.5. Доказать теорему 9.6. *Указание:* определить b_r соотношениями

$$b_r = \begin{cases} 1/\max_{y \in T} |a_r(y)|, & \text{если } a_r(y) \not\equiv 0, \\ 0, & \text{если } a_r(y) \equiv 0, \end{cases}$$

а далее действовать, как при доказательстве теоремы 9.3.

Иррегулярно особые точки

10. Введение

10.1. Постановка задачи

В большинстве представляющих интерес уравнений с иррегулярными особенностями эти особенности имеют место при $x = \infty$. Поэтому и в общей теории иррегулярно особых точек принято помещать особенность в точку $x = \infty$. Это, разумеется, не нарушает общности теории. Поведение аналитического дифференциального уравнения на бесконечности будем определять в согласии с терминологией теории аналитических функций как поведение при $z = 0$ дифференциального уравнения, полученного преобразованием $z = \frac{1}{x}$.

Мы ограничимся изучением систем дифференциальных уравнений в окрестности точки, где матрица коэффициентов имеет полюс или асимптотическое степенное представление. Линейная система, имеющая полюс в начале координат, может быть записана в матричной форме

$$z^h \frac{dY}{dz} = B(z)Y, \quad (10.1)$$

где h — положительное целое, а матрица $B(z)$ голоморфна при $z = 0$. Большинство результатов, однако, сохраняет силу, если потребовать только лишь, чтобы $B(z)$ обладала асимптотическим разложением, справедливым в некотором секторе, когда $z \rightarrow 0$ в этом секторе. Если $h > 1$, то особая точка является иррегулярной. Преобразование $x = \frac{1}{z}$ переводит (10.1) в

$$x^{-q} \frac{dY}{dx} = A(x)Y, \quad (10.2)$$

где

$$q = h - 2,$$

а $A(x) = -B(1/z)$. Матрица $A(x)$ либо голоморфна при $x = \infty$, т. е. при достаточно больших $|x|$, скажем $|x| \geq x_0$, она имеет сходящееся разложение вида

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \quad |x| > x_0, \quad (10.3)$$

либо это разложение является для $A(x)$ асимптотическим в некотором секторе S . Теорию этого последнего более общего случая необходимо построить, даже если наибольший интерес представляет случай голоморфной $A(x)$. Это необходимо, как вскоре будет видно, потому, что для исследования придется проделать ряд последовательных преобразований и уже после первого из них получится система, матричный коэффициент которой не является голоморфным при $x = \infty$.

Число $q+1$ называется *рангом* особой точки. Таким образом, ранг равен -1 для обыкновенной точки, нулю для регулярно особой точки и положителен для иррегулярно особой точки.

В случае одного уравнения n -го порядка с аналитическими коэффициентами, некоторые из которых имеют полюс при $x=0$, в то время как прочие там голоморфны, говорят, что это уравнение имеет иррегулярно особую точку при $x=0$, если оно не принадлежит типу (5.32).

Задача 10.1. Какие условия нужно наложить на коэффициенты скалярного линейного дифференциального уравнения второго порядка, чтобы точка $x = \infty$ была: (а) обыкновенной, (б) регулярно особой?

10.2. Скалярные уравнения первого порядка

Этот довольно тривиальный случай, когда Y в (10.2) является величиной скалярной, будет рассмотрен отдельно по следующим причинам: во-первых, потому, что этот результат понадобится в дальнейшем для рассмотрения общего случая, а во-вторых, потому, что это дает возможность получить некоторое предварительное представление о структуре решения, ожидаемой в общем случае.

Пусть $A(x)$ — скалярная голоморфная функция в некоторой части $x_0 < |x| < \infty$ сектора S , имеющая там асимптотическое разложение

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S.$$

Пусть a — некоторая точка S , для которой выполнено условие $|a| > x_0$. Тогда общее решение уравнения (10.2) имеет вид

$$Y = c^* \exp \left[\int_a^x t^q A(t) dt \right]$$

где c^* — произвольная постоянная. Далее,

$$t^q A(t) = \sum_{r=0}^q A_r t^{-r+q} + A_{q+1} t^{-1} + B(t),$$

где

$$B(t) \sim \sum_{r=q+2}^{\infty} A_r t^{q-r}, \quad t \rightarrow \infty, \quad t \in S.$$

Следовательно, если положить

$$Q(x) = \sum_{j=0}^q \frac{A_j}{q+1-j} x^{q+1-j},$$

$$\rho = A_{q+1},$$

то

$$Y = ce^{Q(x)} x^\rho \exp \left(\int_{\infty}^x B(t) dt \right),$$

где

$$c = c^* \exp \left[-Q(a) - \rho \log a + \int_a^{\infty} B(t) dt \right]$$

Если путь интегрирования принадлежит S , то из теоремы 8.7, очевидным образом модифицированной для случая разложения в окрестности $x = \infty$, и из теоремы 8.4 следует, что

$$\exp \left(\int_{\infty}^x B(t) dt \right)$$

имеет в S асимптотическое разложение, которое может быть получено почленным интегрированием формального разложения, а именно:

$$\exp \left[\int_{\infty}^x B(t) dt \right] \sim \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S.$$

Следовательно, соотношение

$$V(x) \sim \left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{-r} \right) x^\rho e^{Q(x)}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S, \quad (10.4)$$

является асимптотическим представлением для решения скалярного дифференциального уравнения (10.2).

В (10.4) символ « \sim » используется в несколько обобщенном смысле и, если выражаться точнее, означает, что

$$V(x)e^{-Q(x)}x^{-\rho} \sim \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S.$$

Правая часть (10.4) имеет, как выяснится в дальнейшем, точно такую же форму, какая будет иметь место для n -мерного случая, с той лишь разницей, что там степенной ряд будет асимптотическим даже тогда, когда матрица коэффициентов $A(x)$ голоморфна при $x = \infty$.

11. Формальное упрощение

Для системы n -го порядка все построение, по крайней мере вначале, вполне аналогично тому, что делалось в разд. 4.2 для случая регулярной особенности. Преобразование

$$Y = P(x)Z, \tag{11.1}$$

в котором матричная функция $P(x)$ голоморфна и имеет отличный от нуля определитель, переводит дифференциальное уравнение (10.2) в

$$x^{-q}Z' = B(x)Z, \quad q \geq 0, \tag{11.2}$$

где

$$B(x) = P^{-1}(x)A(x)P(x) - x^{-q}P^{-1}(x)P'(x), \tag{11.3}$$

т. е. в

$$x^{-q}P'(x) = A(x)P(x) - P(x)B(x). \tag{11.4}$$

Положим

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}, \tag{11.5}$$

$$B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r x^{-r} \tag{11.6}$$

и воспользуемся разложением

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S. \tag{11.7}$$

Подставляя все это в уравнение (11.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , приходим к рекуррентным формулам вида

$$A_0 P_0 - P_0 B_0 = 0, \quad (11.8)$$

$$A_0 P_r - P_r B_0 = \sum_{s=0}^{r-1} (P_s B_{r-s} - A_{r-s} P_s) - (r-q-1) P_{r-q-1}, \quad r > 0, \quad (11.9)$$

причем в (11.9) последний член отсутствует, если $r-q-1 < 0$.

Если удастся найти матрицы $P_r, B_r, r=0, 1, \dots$, так чтобы удовлетворялись все уравнения (11.8), (11.9), то можно сказать, что ряды (11.5) и (11.6) формально удовлетворяют (11.4). Так же как и при анализе регулярно особых точек, вопрос о том, дают ли эти ряды представление для матричных функций $P(x), B(x)$, удовлетворяющих (11.4), и будет ли это представление сходящимся или асимптотическим, рассматривается ниже.

Прежде чем заниматься решением уравнений (11.8) и (11.9), произведем предварительное преобразование матрицы A_0 . Заметим, что преобразование вида $P(x)$ в случае *постоянной* матрицы $P(x) = P$ является преобразованием подобия для $A(x)$: $A(x)$ переходит в $P^{-1}A(x)P$. Используем этот факт для того, чтобы придать матрице $A(0) = A_0$ форму, удобную для дальнейших расчетов. В линейной алгебре доказывается, что если собственные значения A_0 подразделяются на две группы, скажем $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$, так что $\lambda_j \neq \lambda_k$, если $j \leq p$, а $k > p$, то A_0 подобна блочно-диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} A_0^{11} & 0 \\ 0 & A_0^{22} \end{pmatrix}, \quad (11.10)$$

где A_0^{11} — квадратная матрица p -го порядка, имеющая собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, а A_0^{22} — квадратная матрица $(n-p)$ -го порядка, имеющая собственные значения $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$. Эта теорема доказывается проще, чем теорема о приведении к жордановой канонической форме, и пока что для наших целей этой теоремы будет достаточно. Не теряя общности, можно предположить, что A_0 уже имеет вид (11.10).

В этом предположении можно считать (так и сделаем), что

$$B_0 = A_0 \quad \text{и} \quad P_0 = I.$$

Формулы (11.9) тогда примут вид

$$A_0 P_r - P_r A_0 = B_r + H_r, \quad (11.11)$$

причем H_r зависит только от P_j, B_j , где $j < r$.

С этого момента прекращается аналогия со случаем регулярно особой точки. Ввиду отсутствия члена $-rP_r$ уравнение (11.11) для P_r всегда сингулярно в том смысле, что соответствующее однородное уравнение обладает нетривиальными решениями. Не будем теперь стремиться к тому, чтобы матрица $B(x)$ была простым полиномом относительно x^{-1} ; вместо этого добьемся теперь, чтобы *все* B_r были блочно-диагональными и расчленились точно так же, как матрица (11.10), т. е. покажем, что все B_r можно выбрать в виде

$$B_r = \begin{pmatrix} B_r^{11} & 0 \\ 0 & B_r^{22} \end{pmatrix}, \quad (11.12)$$

причем так, чтобы уравнения (11.11) были последовательно разрешимы. Этого действительно можно достичь при помощи матрицы P_r , имеющей специальную форму

$$P_r = \begin{pmatrix} 0 & P_r^{12} \\ P_r^{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad r > 0. \quad (11.13)$$

Такого рода прием принадлежит Сибуйя [3], который поступал подобным образом при построении асимптотического разложения по параметру (см. гл. VII). Напишем

$$H_r = \begin{pmatrix} H_r^{11} & H_r^{12} \\ H_r^{21} & H_r^{22} \end{pmatrix}. \quad (11.14)$$

Подставляя выражения (11.10), (11.12), (11.13) и (11.14) в (11.11), получим четыре уравнения

$$\begin{aligned} 0 &= B_r^{11} + H_r^{11}, & A_0^{11} P_r^{12} - P_r^{12} A_0^{22} &= H_r^{12}, \\ A_0^{22} P_r^{21} - P_r^{21} A_0^{11} &= H_r^{21}, & 0 &= B_r^{22} + H_r^{22}. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Если H_r известно, то двум из этих уравнений можно удовлетворить, полагая

$$B_r^{11} = -H_r^{11}, \quad B_r^{22} = -H_r^{22}.$$

Два других, согласно теореме 4.1, однозначно определяют P_r^{12} и P_r^{21} , поскольку A_0^{22} и A_0^{11} , согласно предположению, не имеют общих собственных значений. Таким образом, уравнения (11.15) могут быть решены последовательно, начиная с $r=1$. Тем самым доказана следующая

Теорема 11.1. Пусть собственные значения A_0 в разложении (11.7) разделяются на две группы: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ и λ_{p+1}, \dots

..., λ_n , причем $\lambda_j \neq \lambda_k$, если $j \leq p$, $k > p$. Тогда существует формальный степенной ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r},$$

где $\det P_0 \neq 0$, такой, что формальная замена переменных

$$Y = \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r} \right) Z$$

переводит дифференциальное уравнение (10.2) в формальное дифференциальное уравнение

$$x^{-q} Z' = \left(\sum_{r=0}^{\infty} B_r x^{-r} \right) Z,$$

где все B_r имеют блочно-диагональную форму (11.12).

Эта теорема может быть также сформулирована без привлечения формальных операций в следующем виде:

Следствие из теоремы 11.1. При условиях и обозначениях теоремы 11.1 преобразование

$$Y = \left(\sum_{r=0}^m P_r x^{-r} \right) Z_m$$

переводит дифференциальное уравнение (10.2) в

$$x^{-q} Z_m' = \left[\sum_{r=0}^m B_r x^{-r} + B^*(x, m) x^{-(m+1)} \right] Z_m,$$

где матрица $B^*(x, m)$ ограничена в окрестности $x = \infty$, m — произвольное неотрицательное целое число.

Задача 11.1. Доказать это следствие.

Если ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}$$

окажется сходящимся, то полученное формальное упрощение будет фактическим, если только не все собственные значения A_0 одинаковы. Если бы все собственные значения λ_j матрицы A_0 были различны, то проблема была бы полностью решена, так как повторная редукция привела бы дифференциальное уравнение (10.2) к уравнению с диагональной матрицей. Такая система эквивалентна n скалярным уравнениям первого порядка, которые могут быть непосредственно решены, как в разд. 10.2.

Однако ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r},$$

вообще говоря, расходится.

В § 14 будет показано, что этот ряд является асимптотическим по отношению к некоторой функции $P(x)$, которая фактически осуществляет желаемую редукцию. Конечно, тогда и матрица $B(x)$ в преобразованном уравнении не будет голоморфной при $x=\infty$, а будет обладать расходящимся асимптотическим разложением, но она будет действительно блочно-диагональной.

12. Аналитическое упрощение и асимптотическое решение

12.1. Вспомогательное нелинейное дифференциальное уравнение

Постараемся найти матрицы $P(x)$ и $B(x)$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (11.4), которые в действительности имеют вид, подсказанный формальными выкладками предыдущего раздела. Введем новые неизвестные матрицы $\hat{P}(x)$, $\hat{B}(x)$ при помощи соотношений

$$P(x) = I + \hat{P}(x), \quad (12.1)$$

$$B(x) = A_0 + \hat{B}(x) \quad (12.2)$$

и наложим условия

$$\hat{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{P}^{12}(x) \\ \hat{P}^{21}(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.3)$$

$$\hat{B}(x) = \begin{pmatrix} \hat{B}^{11}(x) & 0 \\ 0 & \hat{B}^{22}(x) \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

Подставляя эти выражения в (11.4), получим четыре уравнения

$$\begin{aligned} 0 &= A^{11} + A^{12} \hat{P}^{21} - A_0^{11} - \hat{B}^{11}, \\ x^{-q} (d\hat{P}^{12}/dx) &= A^{11} \hat{P}^{12} + A^{12} - \hat{P}^{12} A_0^{22} - \hat{P}^{12} \hat{B}^{22}, \\ x^{-q} (d\hat{P}^{21}/dx) &= A^{21} + A^{22} \hat{P}^{21} - \hat{P}^{21} A_0^{11} - \hat{P}^{21} \hat{B}^{11}, \\ 0 &= A^{21} \hat{P}^{12} + A^{22} - A_0^{22} - \hat{B}^{22} \end{aligned} \quad (12.5)$$

(зависимость от x в этой записи для краткости опущена). Если матрицы $\hat{P}^{jk}(x)$, $\hat{B}^{jk}(x)$ удовлетворяют (12.5), то соответствующие матрицы $P(x)$, $B(x)$ из (12.1), (12.2) удовлетворяют дифференциальному уравнению (11.4).

Величину \hat{B}^{11} можно исключить из первого и третьего уравнений (12.5). Это приводит к дифференциальному уравнению

$$x^{-q}(d\hat{P}^{21}/dx) = A^{21}(x) + A^{22}(x)\hat{P}^{21} - \hat{P}^{21}A^{11}(x) - \hat{P}^{21}A^{12}(x)\hat{P}^{21} \quad (12.6)$$

для P^{21} . Аналогично дифференциальное уравнение для P^{12} может быть получено из второго и четвертого уравнений (12.5). Очевидно, достаточно исследовать только уравнение (12.6).

На вид (12.6) представляет собой более сложную задачу, нежели (11.4), так как уравнение (12.6) нелинейно относительно $\hat{P}^{21}(x)$ и к тому же $\hat{P}^{21}(x)$ является, вообще говоря, прямоугольной, а не обязательно квадратной матрицей. Однако, как сейчас будет видно, этот подход обладает также и некоторыми преимуществами.

Обозначим через ω $p(n-p)$ -мерный вектор, компоненты которого представляют собой элементы матрицы \hat{P}^{21} , расположенные в определенном порядке. Тогда уравнение (12.6) можно записать в виде

$$x^{-q}\omega' = f(x, \omega), \quad (12.7)$$

где $f(x, \omega)$ — вектор-функция, квадратичная относительно компонент ω , коэффициенты которой обладают асимптотическим разложением по степеням x^{-1} , когда $x \rightarrow \infty$ в S . Выкладки, проделанные в § 11, показывают, что уравнению (12.7) можно формально удовлетворить степенным рядом

$$\sum_{r=1}^{\infty} \omega_r x^{-r} \quad (12.8)$$

(заметим, что суммирование начинается от $r=1$), поскольку эти выкладки можно повторить шаг за шагом, подставляя вместо $\hat{P}(x)$ и $\hat{B}(x)$ формальные ряды

$$\sum_{r=1}^{\infty} P_r x^{-r} \quad \text{и} \quad \sum_{r=1}^{\infty} B_r x^{-r}.$$

Обе части (12.7) представляются тогда в виде формальных рядов по x^{-1} , а так как ряды

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}, \quad \sum_{r=0}^{\infty} B_r x^{-r}$$

формально удовлетворяют (11.4), то ряды в обеих частях (12.7) должны быть тождественными. Это важно иметь в виду при рассмотрении уравнения (12.7).

Далее, нам нет необходимости получать полное решение уравнения (12.7). Достаточно показать, что оно имеет хотя бы одно решение, которое представляется асимптотическим рядом (12.8).

Наконец, уравнение (12.7) обладает еще одним очень важным свойством. Выделим в $f(\omega, x)$ постоянную (относительно ω) и линейную части, написав

$$f(\omega, x) = f_0(x) + F(x)\omega + f_2(\omega, x).$$

Здесь $f_2(\omega, x)$ представляет собой вектор, компоненты которого являются квадратичными формами относительно компонент ω . В обозначениях, принятых в (12.6), $F(x)\omega$ равно $A^{22}(x)\tilde{P}^{21} - \tilde{P}^{21}A^{11}(x)$. Это линейная вектор-функция вектора ω , все собственные значения которой отличны от нуля при $x = \infty$ в силу теоремы 4.1 и в предположении, что A_0^{11} и A_0^{22} не имеют общих собственных значений. Другими словами, матрица $F(x)$ оказывается неособой при $x = \infty$. Заметим, что $\det F(x)$ — это то же самое, что якобиан $f(\omega, x)$ относительно ω , взятый при $\omega = 0$.

Доказательство того, что ряд (12.8) является асимптотическим рядом для решения уравнения (12.7), оказывается весьма длинным. Чтобы не отвлекаться от рассмотрения иррегулярно особых точек в линейных дифференциальных уравнениях, отложим это доказательство до § 14 и 15, а здесь дадим формулировку соответствующей теоремы. В этой формулировке бесконечный сектор будет называться открытым, если он не содержит своих граничных лучей. Если он эти лучи содержит, то будет называться замкнутым. В любом случае вершина не считается точкой сектора.

Теорема 12.1 (главная асимптотическая теорема существования). Пусть S — открытый сектор в комплексной плоскости x с вершиной в начале координат и положительным центральным углом, не превосходящим $\pi/(q+1)$ (q — неотрицательное целое). Пусть $f(x, z)$ есть N -мерная вектор-функция x и N -мерного вектора z , обладающая следующими свойствами:

(а) $f(x, z)$ является полиномом относительно компонент z вектора z , $j=1, \dots, N$, с коэффициентами, голоморфными по x в области

$$0 < x_0 \leq |x| < \infty, \quad x \in S \quad (x_0 — постоянная); \quad (12.9)$$

(б) коэффициенты полинома $f(x, z)$ имеют асимптотические разложения по x^{-1} при $x \rightarrow \infty$ в S ;

(с) собственные значения λ_j , $j=1, 2, \dots, N$, матрицы Якоби

$$\left\{ \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in S}} \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k} \Big|_{z=0} \right) \right\}, \quad (12.10)$$

где через $f_j(x, z)$ обозначены компоненты $f(x, z)$, отличны от нуля;

(d) дифференциальное уравнение

$$x^{-q}y' = f(x, y) \quad (12.11)$$

формально удовлетворяется степенным рядом вида

$$\sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}. \quad (12.12)$$

Тогда в S для достаточно больших x существует решение $y = \varphi(x)$ уравнения (12.11), такое, что в каждом собственном подсекторе S

$$\varphi(x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (12.13)$$

12.2. Выводы

Применим теперь теорему 12.1 к дифференциальному уравнению (12.6) и тогда, учитывая сказанное в разд. 12.1, сразу получим следующее утверждение:

Теорема 12.2. Пусть S — открытый сектор плоскости x с вершиной в начале и положительным центральным углом, не превосходящим $\pi/(q+1)$. Пусть $A(x)$ есть $(n \times n)$ -матричная функция, голоморфная в S для $x_0 \leq |x| < \infty$ и имеющая в S равномерное асимптотическое представление в виде степенного ряда

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S.$$

Предположим, что собственные значения A_0 распадаются на две группы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$, так что $\lambda_j \neq \lambda_k$, когда $j \leq p$, $k > p$. Тогда существует матричная функция $P(x)$, голоморфная для $x \in S$, $x_1 \leq |x| < \infty$, имеющая в S асимптотическое разложение

$$P(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \det P_0 \neq 0,$$

и такая, что преобразование

$$Y = P(x)Z$$

переводит дифференциальное уравнение

$$x^{-q}Y' = A(x)Y \quad (12.14)$$

$$x^{-q}Z' = B(x)Z, \quad (12.15)$$

где $B(x)$ имеет блочно-диагональную форму

$$B(x) = \begin{pmatrix} B^{11}(x) & 0 \\ 0 & B^{22}(x) \end{pmatrix}.$$

Матрицы $B^{jj}(x)$ представляются асимптотическими степенными рядами

$$B^{jj}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} B_r^{jj} x^{-r}$$

при $x \rightarrow \infty$, причем B_0^{11} имеет собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, а B_0^{22} — собственные значения $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$.

Эта теорема сводит задачу о нахождении асимптотического решения дифференциального уравнения (12.14) для больших x к той же задаче для двух дифференциальных уравнений более низкого порядка. Повторяя эту редукцию, получим в конце концов некоторое число уравнений типа (12.14), в которых все собственные значения A_0 одинаковы. Общее решение такого рода задачи все еще достаточно затруднительно. Оно будет дано в гл. V, после того как будет введена жорданова каноническая форма матрицы. Здесь же ограничимся рассмотрением случая, когда в исходной задаче все собственные значения A_0 различны. В этом предположении задача сводится к решению уравнения вида (12.15), в котором $B(x)$ диагональна. Такое уравнение может быть решено буквально так же, как скалярное уравнение в разд. 10.2, а именно: всякое фундаментальное матричное решение имеет в этом случае вид

$$Z(x) = \exp \left[\int_a^x t^q B(t) dt \right] C_1, \quad (12.16)$$

где C_1 — постоянная квадратная матрица.

Задача 12.1. Доказать формулу (12.16), другими словами, показать, что если $D(x)$ — голоморфная диагональная матрица, то

$$\frac{d}{dx} [e^{D(x)}] = \frac{dD(x)}{dx} e^{D(x)}.$$

Показать на примере, что это, вообще говоря, не так, если $D(x)$ не диагональна.

Формула (12.16) может быть записана в виде

$$Z(x) = \exp[Q(x) + B_{q+1} \log x + \Psi(x) - \Gamma(a)] C_1,$$

где

$$Q(x) = \sum_{j=0}^q B_j \frac{x^{q-j+1}}{q-j+1},$$

$$\Psi(x) \sim \sum_{j=q+2}^{\infty} B_j \frac{x^{q-j+1}}{q-j+1}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S,$$

и

$$\Gamma(a) = Q(a) + B_{q+1} \log a + \Psi(a).$$

Так как функция $\exp \Psi(x)$ обладает степенным асимптотическим разложением, согласно теореме 8.4, и так как все матрицы под знаком \exp диагональны и, следовательно, коммутируют друг с другом, то можно написать

$$Z(x) = \hat{Z}(x) x^{B_{q+1}} e^{Q(x)} C. \quad (12.17)$$

Здесь C — произвольная постоянная матрица, а $\hat{Z}(x)$ обладает степенным асимптотическим разложением с главным членом I .

А теперь возвратимся к дифференциальному уравнению (12.14). Решению (12.17) соответствует фундаментальная матрица уравнения (12.14), которая получается из $Z(x)$ умножением слева на матрицу, обладающую асимптотическим разложением с неособым главным членом. Нижеследующая теорема подытоживает полученные результаты.

Теорема 12.3. Если дополнить условия теоремы 12.2 требованием, чтобы все собственные значения λ_j , $j=1, 2, \dots, n$, матрицы A_0 были различными, то дифференциальное уравнение (12.14) будет обладать фундаментальным матричным решением вида

$$Y(x) = \hat{Y}(x) x^{D} e^{Q(x)}.$$

Здесь $Q(x)$ — диагональная матрица, диагональные элементы которой являются полиномами степени $q+1$ и главный член которой имеет вид

$$\frac{x^{q+1}}{q+1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

D — постоянная диагональная матрица, а матрица $\hat{Y}(x)$ имеет в S асимптотическое разложение

$$\hat{Y}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \hat{Y}_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \det \hat{Y}_0 \neq 0.$$

Если $A(x)$ голоморфна при $x=\infty$, то в качестве S можно взять любой сектор с раствором $\pi/(q+1)$. Таким образом, получаем

Следствие. Если матрица $A(x)$ в дифференциальном уравнении (12.14) голоморфна при $x=\infty$, то решение, описанное в теореме 12.3, существует в любом секторе S с центральным углом, меньшим $\pi/(q+1)$.

Решение, о котором говорится в данном следствии, может меняться от сектора к сектору. Однако коэффициенты \hat{Y}_r , точно так же как и матрицы D и $Q(x)$, определяются однозначно посредством формальной процедуры.

13. Различные замечания

13.1. Скалярное дифференциальное уравнение порядка n

Как было выяснено ранее, можно различными путями построить систему первого порядка, эквивалентную скалярному дифференциальному уравнению n -го порядка. Если коэффициенты такого уравнения имеют при $x=\infty$ особенность не хуже полюса, то простейший путь, т. е. путь, описанный в разд. 1.2, приводит к системе, которая имеет на бесконечности также в худшем случае полюс. Но, конечно, могут быть другие способы, которые приводят к особенности на бесконечности более низкого порядка. Здесь не предполагается вдаваться в трудный вопрос о том, как получить систему с особенностью наиболее низкого порядка из всех возможных (см. об этом у Мозера [2]). Ниже следующее замечание имеет целью дать некоторое представление о соотношении между иррегулярными особенностями системы и одного дифференциального уравнения.

Пусть заданное дифференциальное уравнение имеет вид (5.28), и пусть

$$a_j(x) = b_j(x)x^{s_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где s_j — целые, а $b_j(x)$ голоморфны при $x=\infty$, причем

$$b_j(\infty) \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Система (2.7), поставленная в соответствие этому уравнению путем преобразования

$$y_j = u^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

имеет матрицу

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \dots & -a_2(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}.$$

Ранг этой системы при $x = \infty$ равен

$$q + 1 = (\max_j s_j) + 1.$$

Часто этот ранг может быть понижен путем применения срезающего преобразования вида

$$Y = P(x)Z,$$

где

$$P(x) = \text{diag} [1, x^p, x^{2p}, \dots, x^{(n-1)p}],$$

p — выбранное надлежащим образом целое. Это преобразование переводит $A(x)$ в матрицу

$$B(x) = P^{-1}(x)A(x)P(x) - P^{-1}(x)P'(x) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & x^p & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -px^{-1} & x^p & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2px^{-1} & x^p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -(n-2)px^{-1} & x^p \\ -b_n x^{s_n - (n-1)p} & \dots & \dots & \dots & \dots & -b_1 x^{s_1 - (n-1)p} \end{pmatrix}.$$

(13.1)

Наинизший порядок полюса $B(x)$ при $x = \infty$, который может быть достигнут таким образом, дается тем значением p , для которого

$$\max_j \{s_j - jp + p, p\}$$

является наименьшим.

Более обычным является следующий способ рассуждений. Напишем коэффициент $a_j(x)$ в виде

$$a_j(x) = c_j(x)x^m,$$

где m — наименьшее неотрицательное число, при котором все $c_j(x)$ голоморфны при $x = \infty$. Полагая $p = m$, достигаем того, что результирующая система имеет на бесконечности полюс самое большое порядка m , как легко видеть из формулы (13.1).

Заметим, что при $m=1$ результирующая система имеет на бесконечности самое большое регулярную особенность. Это непосредственно следует из формулы (13.1). Также легко проверить, что скалярное дифференциальное уравнение вида (5.28), где $m=1$, имеет на бесконечности регулярную особенность в соответствии с данным в разд. 10.1 определением. Остается, однако, неясным, каково наиболее удачное определение ранга скалярного дифференциального уравнения в иррегулярно особой точке, но здесь не предполагается вдаваться в этот вопрос.

Задача 13.1. Приведите пример, для которого

$$\min_p \max_{j=1, \dots, n} \{s_j - (j-1)p, p\} < \max_{j=1, \dots, n} s_j,$$

а также пример, когда это неравенство не выполняется.

Задача 13.2. Какова природа особой точки на бесконечности для гипергеометрического уравнения?

13.2. Пример

Дифференциальное уравнение Бесселя

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - n^2) u = 0$$

имеет на бесконечности иррегулярную особенность. Число m , введенное в предыдущем разделе, здесь равно нулю, и уравнение приводится к эквивалентному матричному дифференциальному уравнению, имеющему вид

$$Y^{*'} = A^*(x) Y^*, \quad (13.2)$$

где

$$A^*(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + n^2 x^{-2} & -x^{-1} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения $A^*(\infty)$ равны $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Тогда, согласно теореме 12.3, существуют фундаментальные системы решений вида

$$\hat{Y}(x) x^D \exp \left\{ ix \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (13.3)$$

Метод, изложенный в настоящей главе, вероятно, не является наилучшим для фактического вычисления D и асимптотического разложения для $\hat{Y}(x)$. Нижеследующие выкладки, таким образом, предназначены только для иллюстрации проведенных рассуждений.

Преобразование подобия посредством матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix}$$

переводит

$$A^*(\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

в диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Замена переменных

$$Y^* = TY \quad (13.4)$$

переводит уравнение (13.2) в

$$Y' = A(x)Y(x) = (A_0 + A_1x^{-1} + A_2x^{-2})Y, \quad (13.5)$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{in^2}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее преобразуем уравнение (13.5) путем формального преобразования

$$Y = \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r} \right) Z, \quad P_0 = I \quad (13.6)$$

в

$$Z' = \left(\sum_{r=0}^{\infty} B_r x^{-r} \right) Z, \quad B_0 = A_0.$$

Уравнение (11.11) для $r=1$ здесь имеет вид

$$A_0 P_1 - P_1 A_0 = B_1 - A_1,$$

и из (11.5) находим, что

$$B_1 = -\frac{1}{2}I, \quad P_1 = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

А теперь уже должно быть ясно, как вычислять B_r и P_r .

Возвращаясь к уравнению (13.2), из (13.6) и (13.4) можно видеть, что в (13.3)

$$\hat{Y}(\infty) = TP_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix},$$

$$D = B_1 = -\frac{1}{2}I.$$

Первая строка (13.3) дает окончательно фундаментальную систему для уравнения Бесселя

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \hat{u}_1(x) x^{-1/2} e^{ix}, & \hat{u}_1(\infty) &= 1, \\ u_2(x) &= \hat{u}_2(x) x^{-1/2} e^{-ix}, & \hat{u}_2(\infty) &= 1. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Теорема 12.3 говорит о том, что в любом секторе S с центральным углом, меньшим π , существует фундаментальная система вида (13.7), где $\hat{u}_j(x)$ в этом секторе обладает асимптотическим разложением по степеням x^{-1} .

Задача 13.3. Сосчитать коэффициенты при x^{-1} асимптотических разложений $\hat{u}_j(x)$ в (13.7).

Задача 13.4. Провести вычисления, аналогичные приведенным в этом разделе, для дифференциального уравнения $xu'' + (c - x)u' - au = 0$ (a, c — константы).

14. Доказательство главной асимптотической теоремы существования в случае, когда все собственные значения различны

14.1. Предварительные преобразования

В настоящем разделе будет дано доказательство теоремы 12.1 при упрощающем предположении, что собственные значения $\lambda_j, j=1, 2, \dots, N$, различны. Изменения, которые потребуются, если это предположение отбросить, будут указаны в § 18.

Если обозначить

$$a(x) = f(x, 0), \quad A(x) = \left\{ \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \Big|_{z=0} \right\}, \quad (14.1)$$

$$g(x, z) = f(x, z) - a(x) - A(x)z, \quad (14.2)$$

то дифференциальное уравнение (12.11) примет вид

$$x^{-q}y' = a(x) + A(x)y + g(x, y). \quad (14.3)$$

По предположению матрица $A(x)$ обладает равномерным асимптотическим разложением

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S,$$

старший коэффициент которого A_0 имеет собственные значения $\lambda_j, j=1, 2, \dots, N$. Полином $g(x, y)$ относительно компонент y не содержит ни постоянных, ни линейных членов.

Не теряя общности, можно предположить, что

$$A_0 = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \quad (14.4)$$

так как это можно всегда обеспечить предварительным линейным преобразованием переменного y с постоянными коэффициентами и отличным от нуля определителем.

Согласно теореме 9.3, существует вектор-функция $\varphi(x)$ (в действительности даже бесконечно много таких функций), голоморфная для $|x| \geq x_0$ в S и такая, что

$$\varphi(x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r} \quad \text{при } x \rightarrow \infty \text{ в } S. \quad (14.5)$$

Строя такую функцию в секторе, большем S , и применяя теорему 8.8, убеждаемся в том, что соотношение (14.5) можно в S почленно дифференцировать. Преобразование

$$u = y - \varphi(x) \quad (14.6)$$

переводит (14.3) в

$$x^{-q} u' = a(x) + A(x)\varphi(x) - x^{-q}\varphi'(x) + A(x)u + g(x, u + \varphi(x)). \quad (14.7)$$

Так как ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}$$

формально удовлетворяет (14.3), то имеем

$$a(x) + A(x)\varphi(x) - x^{-q}\varphi'(x) = -g(x, \varphi(x)) + b(x),$$

где

$$b(x) \sim 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, x \in S. \quad (14.8)$$

Тогда уравнение (14.7) может быть записано в виде

$$x^{-q} u' = b(x) + A(x)u + g(x, u + \varphi(x)) - g(x, \varphi(x)).$$

Далее,

$$g(x, u + \varphi(x)) - g(x, \varphi(x)) = A^*(x)u + h(x, u),$$

где

$$A^*(x) = \left\{ \frac{\partial g_j(x, u + \varphi(x))}{\partial u_k} \Big|_{u=0} \right\}$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$$

в S и все $\partial g_j(x, z)/\partial z_k$ обращаются в нуль при $z=0$ тождественно относительно x , то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A^*(x) = 0, \quad x \in S.$$

Функция $h(x, u)$ является полиномом относительно компонент u_j вектора u с коэффициентами, обладающими степенными асимптотическими разложениями по x^{-1} , когда $x \rightarrow \infty$ в S . Этот полином не содержит ни постоянных, ни линейных членов по u_j , $j=1, 2, \dots, N$.

Если теперь положить $A(x) + A^*(x) = B(x)$, то преобразованное дифференциальное уравнение примет вид

$$x^{-q}u' = b(x) + B(x)u + h(x, u), \quad (14.9)$$

где

$$\lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = \Lambda, \quad x \in S. \quad (14.10)$$

Теорема будет доказана, если удастся показать, что дифференциальное уравнение (14.9) обладает решением, асимптотически равным нулю, когда $x \rightarrow \infty$ в S .

14.2. Интегральное уравнение для решения

Используя соотношение (14.10), запишем (14.9) в виде

$$x^{-q}u' = \Lambda u + p(x, u), \quad (14.11)$$

где

$$p(x, u) = b(x) + (B(x) - \Lambda)u + h(x, u). \quad (14.12)$$

Основная идея доказательства — это хорошо известная идея в теории дифференциальных уравнений, в частности в теории возмущений: для больших x и малых u функция $p(x, u)$, грубо говоря, много меньше u , так как $b(x)$ асимптотически равно нулю, $B(x) - \Lambda$ стремится к нулю, а $h(x, u)$ не содержит линейных членов относительно u . Если бы $p(x, u)$ было тождественным нулем, то уравнение (14.11) имело бы решение $u \equiv 0$. Можно, таким образом, ожидать, что u в (14.11) мало, если $p(x, u)$ мало.

Следуя этой программе, заменим дифференциальное уравнение (14.11) эквивалентным интегральным уравнением. Если $u(x)$ — решение (14.11), то, рассматривая $p(x, u(x))$ как известную функцию x и пользуясь формулой вариации постоянной (2.11), получим следующее выражение для $u(x)$:

$$u(x) = V(x)k + \int_a^x V(x)V^{-1}(t)t^q p(t, u(t)) dt. \quad (14.13)$$

Здесь k — некоторый постоянный вектор, a — фиксированная точка, а $V(x)$ — фундаментальное матричное решение дифференциального уравнения

$$x^{-q}V' = \Lambda V. \quad (14.14)$$

Обратно: если $u(x)$ является решением интегрального уравнения (14.13), то, дифференцируя, получим, что $u(x)$ удовлетворяет также дифференциальному уравнению (14.12). Для дальнейшего понадобится некоторая модификация (14.13). Правая часть этого уравнения представляет собой N скалярных интегралов. Вместо того чтобы выбирать путь интегрирования во всех этих интегралах один и тот же, будем считать, что каждому из интегралов соответствует свой путь интегрирования $\gamma_j(x)$, $j=1, 2, \dots, N$, оканчивающийся в точке x . Эти пути будут описаны в следующем разделе. Множество N контуров $\gamma_j(x)$ будем символически обозначать через $\Gamma(x)$.

По-прежнему можно проверить дифференцированием, что всякое решение модифицированного таким образом интегрального уравнения удовлетворяет дифференциальному уравнению (14.11).

Дифференциальное уравнение (14.14) обладает, в частности, фундаментальным матричным решением вида

$$V(x) = \exp \left[\frac{x^{q+1}}{q+1} \Lambda \right]. \quad (14.15)$$

Если положить $k=0$ — как выяснится в дальнейшем, это именно то, что нужно, — то интегральное уравнение примет вид

$$u(x) = \int_{\Gamma(x)} \exp \left[\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1} \Lambda \right] t^q p(t, u(t)) dt. \quad (14.16)$$

Правая часть определяет некоторый нелинейный оператор относительно функции $u(x)$. В сокращенном виде (14.16) можно записать следующим образом:

$$u = \mathcal{P}u. \quad (14.17)$$

Доказательство того, что (14.17) имеет решение и что это решение асимптотически равно нулю, проводится хорошо известным методом последовательных приближений. Последовательность вектор-функций $u_r(x)$, $r=0, 1, \dots$, определяется соотношениями

$$u_0 \equiv 0, \quad u_{r+1} = \mathcal{P}u_r, \quad r \geq 0, \quad (14.18)$$

а сходимость этой последовательности доказывается путем оценки разностей

$$u_{r+1} - u_r = \mathcal{P}u_r - \mathcal{P}u_{r-1}. \quad (14.19)$$

Чтобы проделать эти оценки, нужно, во-первых, соответствующим образом определить множество контуров $\Gamma(x)$ и, во-вторых, получить некоторые неравенства относительно оператора \mathcal{P} . Это будет сделано в следующих двух разделах.

14.3. Пути интегрирования

Контуры $\gamma_j(x)$, $j=1, 2, \dots, N$, должны быть построены таким образом, чтобы вдоль них экспонента, фигурирующая в уравнении (14.16), была ограниченной. Это построение удобно описывать в плоскости вспомогательного переменного

$$\tau = t^{q+1}. \quad (14.20)$$

Пусть

$$\xi = x^{q+1} \quad (14.21)$$

является образом переменного x . Образом сектора S плоскости t является сектор Σ плоскости τ с центральным углом, не превосходящим π .

Рассмотрим в плоскости τ $2N$ лучей, вдоль которых $\operatorname{Re}(\tau\lambda_j) = 0$, $j=1, 2, \dots, N$. Не теряя общности, можно предположить, что ни один из этих лучей не лежит на границе Σ , поскольку доказываемое утверждение относится к собственному подсектору S , так что, если потребуется, S можно заменить несколько меньшим сектором. Разобьем собственные значения λ_j на два класса. Первый из них содержит те λ_j , для которых $\operatorname{Re}(\tau\lambda_j) < 0$ в Σ . Во второй класс отнесем те λ_j , для которых либо $\operatorname{Re}(\tau\lambda_j) > 0$ в Σ , либо имеется один и только один луч в Σ , вдоль которого $\operatorname{Re}(\tau\lambda_j) = 0$. Можно упорядочить λ_j таким образом, что $\lambda_1, \dots, \lambda_{j_1}$ ($0 \leq j_1 \leq N$) будут принадлежать первому классу, а все прочие λ_j — второму классу.

Обозначим далее через ξ_1 некоторую точку на биссектрисе Σ , такую, что $|\xi_1| > x_0^{q+1}$, а через Σ^* — замкнутый сектор с вершиной в ξ_1 и граничными лучами, параллельными граничным лучам Σ . Тогда $\Sigma^* \subset \Sigma$ и $|\tau| > x_0^{q+1}$ в Σ^* . Обозначим через $\delta_j(\xi)$ для $j \leq j_1$ и $\xi \in \Sigma^*$ отрезок, направленный от ξ_1 к ξ . Эти отрезки одинаковы для всех $j \leq j_1$. Прообразом $\delta_j(\xi)$ в плоскости t будет общий контур интегрирования $\gamma_j(x)$ для $j \leq j_1$. Заметим, что $\operatorname{Re}(\tau\lambda_j)$ убывает вдоль $\delta_j(\xi)$.

Для каждого $j > j_1$ выберем некоторый луч l_j , направленный из начала в Σ , вдоль которого $\operatorname{Re}(\tau\lambda_j) > 0$. Обозначим через $\delta_j(\xi)$ полупрямую, идущую из бесконечности к точке ξ параллельно l_j . Тогда $\operatorname{Re}(\tau\lambda_j)$ будет убывать вдоль $\delta_j(\xi)$. По-прежнему в качестве пути интегрирования $\gamma_j(x)$ в плоскости t возьмем прообраз $\delta_j(\xi)$, $j > j_1$. Рис. 14.1 поможет читателю представить себе наглядно эти построения. Здесь $j \leq j_1$, $k > j_1$.

Обратим внимание на то, что прообраз S^* сектора Σ^* является на плоскости t областью, ограниченной двумя кривыми, пересекающимися в точке $x = \xi_1^{1/(q+1)}$, для которых граничные лучи S служат асимптотами. Это означает, что S^* содержит

все достаточно далекие от начала точки, принадлежащие любому замкнутому подсектору S .

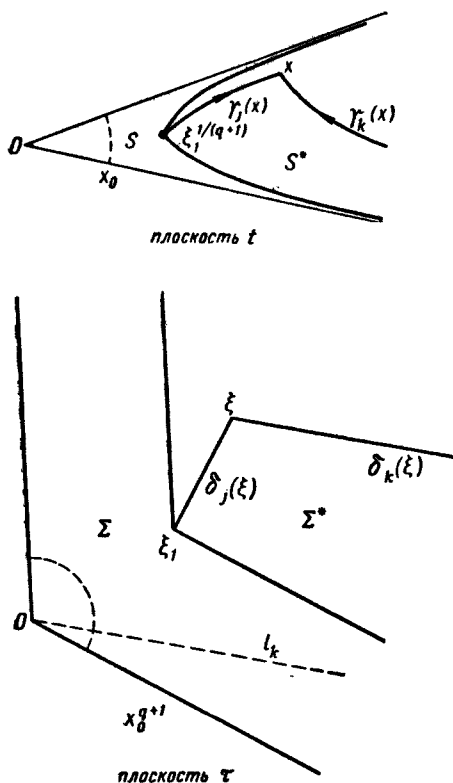


Рис. 14.1.

Лемма 14.1. Пусть

$$\lambda_0 = \min_j |\lambda_j|. \quad (14.22)$$

Тогда найдется константа μ , не зависящая от λ_0 , j и ξ_1 , такая, что

$$\operatorname{Re} [(x^{q+1} - t^{q+1})\lambda_j / (q+1)] \leq -|x^{q+1} - t^{q+1}| \lambda_0 \mu / (q+1) \quad (14.23)$$

для $t \in \gamma_j(x)$, $x \in S^*$.

Доказательство. Согласно только что описанному построению, точки $(\tau - \xi)\lambda_j$ лежат в замкнутом собственном подсекторе правой полуплоскости, если только τ и ξ являются

образами точек t и x , участвующих в формулировке леммы. Следовательно, существует положительная постоянная μ , такая, что

$$\cos [\arg (\xi - \tau) \lambda_j] \leq -\mu,$$

т. е.

$$\operatorname{Re} [(\xi - \tau) \lambda_j] \leq -|\xi - \tau| |\lambda_j| \mu \leq -|\xi - \tau| \lambda_0 \mu.$$

Учитывая теперь (14.20) и (14.21), получим утверждение леммы.

14.4. Основное неравенство

Лемма 14.2. Пусть $\chi(x)$ — некоторая вектор-функция, голоморфная для $x \in S^*$ и удовлетворяющая при этом неравенству

$$\|\chi(x)\| \leq c |x|^{-m}, \quad (14.24)$$

где m — неотрицательное целое, а c — константа. Тогда

$$\psi(x) = \int_{\Gamma(x)} \exp [(x^{q+1} - t^{q+1}) \Lambda / (q+1)] t^q \chi(t) dt \quad (14.25)$$

голоморфна в S^* и удовлетворяет при этом неравенству

$$\|\psi(x)\| \leq Kc |x|^{-m}, \quad (14.26)$$

где K — константа, не зависящая от $\chi(t)$, но зависящая от m .

Доказательство. Если ψ_j , $j=1, 2, \dots, N$, — компоненты ψ , то нужно убедиться, что

$$|\psi_j(x)| \leq Kc |x|^{-m} \quad \text{для } j=1, 2, \dots, N. \quad (14.27)$$

Преобразование (14.20) и (14.21) переводит (14.25) — в скалярной записи — в

$$\psi_j(x) = \frac{1}{q+1} \int_{\delta_j(\xi)} \exp [(\xi - \tau) \lambda_j / (q+1)] \chi_j(\tau) d\tau.$$

Следовательно, согласно лемме 14.1 и предположению (14.24),

$$|\psi_j(x)| \leq \frac{c}{q+1} \int_{\delta_j(\xi)} \exp [-|\xi - \tau| \lambda_0 \mu / (q+1)] |\tau|^{-m/(q+1)} |d\tau|. \quad (14.28)$$

Рассмотрим сначала случай $j \leq j_1$. Полагая

$$\tau = \xi - \rho e^{i\alpha},$$

где $\rho = |\xi - \tau|$, а α — направляющий угол отрезка $\delta_j(\xi)$, приводим (14.28) к виду

$$|\psi_j(x)| \leq \frac{c}{q+1} \int_0^{|\xi - \xi_1|} \exp [-\rho \lambda_0 \mu / (q+1)] |\tau|^{-m/(q+1)} d\rho. \quad (14.29)$$

Разобьем путь интегрирования в (14.29) на два сегмента одинаковой длины. Для $\rho \leq |\xi - \xi_1|/2$ выполняется неравенство $|\tau| \geq |\xi|/2$, как показывают простые геометрические соображения. Часть интеграла (14.29), соответствующая этому участку пути, не превосходит

$$\begin{aligned} \frac{1}{q+1} c 2^{m/(q+1)} |\xi|^{-m/(q+1)} \int_0^{\infty} \exp[-\rho \lambda_0 \mu / (q+1)] d\rho = \\ = c 2^{m/(q+1)} \lambda_0^{-1} \mu^{-1} |\xi|^{-m/(q+1)}. \end{aligned} \quad (14.30)$$

Если же $\rho > |\xi - \xi_1|/2$, то, заменяя $|\tau|$ в (14.29) его нижней границей $|\xi_1|$, находим, что соответствующая часть интеграла (14.29) не превосходит

$$\begin{aligned} \frac{c}{q+1} |\xi_1|^{-m/(q+1)} \int_{|\xi - \xi_1|/2}^{\infty} \exp[-\rho \lambda_0 \mu / (q+1)] d\rho = \\ = \frac{c}{\lambda_0 \mu} |\xi_1|^{-m/(q+1)} \exp[-|\xi - \xi_1| \lambda_0 \mu / 2 (q+1)]. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Чтобы убедиться, что последнее выражение есть $O(\xi^{-m/(q+1)})$, рассмотрим отдельно случаи $|\xi - \xi_1| \leq |\xi|/2$ и $|\xi - \xi_1| > |\xi|/2$. В первой из этих областей изменения ξ имеем $|\xi_1| \geq |\xi|/2$, и, следовательно, правая часть неравенства (14.31) не превосходит

$$2^{m/(q+1)} \frac{c}{\lambda_0 \mu} |\xi|^{-m/(q+1)} \quad (14.32a)$$

Если же $|\xi - \xi_1| > |\xi|/2$, то правая часть неравенства (14.31) меньше, чем

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda_0 \mu} |\xi_1|^{-m/(q+1)} \exp[-|\xi| \lambda_0 \mu / 4 (q+1)] \leq \\ \leq \frac{c}{\lambda_0 \mu} |\xi_1|^{-m/(q+1)} \left(\frac{4m}{\lambda_0 \mu} \right)^{m/(q+1)} e^{-m/(q+1)} |\xi|^{-m/(q+1)}. \end{aligned} \quad (14.32b)$$

Последнее неравенство получается путем умножения и деления на

$$|\xi|^{m/(q+1)}$$

и последующего вычисления максимального значения от

$$\exp[-|\xi| \lambda_0 \mu / 4 (q+1)] |\xi|^{m/(q+1)}.$$

Складывая правые части неравенств (14.32a) и (14.32b) с правой частью (14.30), получим искомую оценку для интеграла (14.29) в предположении $j \leq j_1$.

Если $j > j_1$, то сначала убедимся в существовании не зависящего от j положительного номера ρ , такого, что на $\delta_j(\xi)$

$$|\tau| \geq \rho |\xi|, \quad \tau \in \delta_j(\xi). \quad (14.33)$$

Действительно, пусть P — точка, в которой перпендикуляр, опущенный из начала на прямую, частью которой является $\delta_j(\xi)$, пересекает эту прямую. Если P не принадлежит $\delta_j(\xi)$, то $|\tau| > |\xi|$ для $\tau \in \delta_j(\xi)$. Если же P принадлежит $\delta_j(\xi)$, то абсолютная величина угла $O\xi P$ во всяком случае не меньше, чем меньший из положительных углов, образуемых лучом l_j с граничными лучами Σ . Обозначим минимальный из этих углов по j для $j > j_1$ через β . Тогда

$$|\tau| \geq |\overline{OP}| \geq |\xi| \sin \beta.$$

Таким образом, неравенство (14.33) всегда справедливо. Подставляя (14.33) в (14.28) и полагая $|\xi - \tau| = \rho$, находим

$$\begin{aligned} |\psi_j(x)| &\leq \frac{c}{q+1} \rho^{-m/(q+1)} |\xi|^{-m/(q+1)} \int_0^\infty \exp[-\rho \lambda_0 \mu / (q+1)] d\rho = \\ &= \frac{c}{\lambda_0 \mu} \rho^{-m/(q+1)} |\xi|^{-m/(q+1)}. \end{aligned}$$

Этим завершается доказательство (14.26).

Чтобы доказать, что $\psi(x)$ голоморфна в S^* , достаточно убедиться, что интегралы

$$\int_{\delta_j(\xi)} \exp[-\tau \lambda_j / (q+1)] \chi_j(\tau) d\tau$$

являются в Σ^* голоморфными функциями ξ . Это очевидно для $j \leq j_1$. Для $j > j_1$ это легко следует из того факта, что подинтегральное выражение экспоненциально мало для больших τ . Детально на этом останавливаться не будем.

Относительно константы K в (14.26) сделаем два замечания, вытекающих из самого доказательства леммы 14.2.

Замечание 1. Хотя K зависит от ξ_1 , она остается ограниченной при возрастании $|\xi_1|$.

Замечание 2. Если $m=0$, то константа K удовлетворяет неравенству

$$K \leq K_1 \lambda_0^{-1},$$

где K_1 — константа, не зависящая от λ_0 . В самом деле, K_1 зависит только от q , направления граничных лучей S^* , нижней границы $|\xi_1|$ и μ . Последняя константа μ зависит только от аргументов собственных значений λ_j .

14.5. Решение интегрального уравнения

Обозначим через S' замкнутый подсектор сектора S теоремы 12.1 и воспроизведем построение сектора S^* из разд. 14.3, рассматривая S' вместо S и получая таким образом область $S^{*'}$. Выбирая S' достаточно близким к S , можно добиться того, чтобы контуры $\Gamma(x)$ лежали в $S^{*'}$, если только x принадлежит $S^{*'}$. Пусть m — некоторое положительное целое. Тогда, согласно (14.8), существует константа c , зависящая от m , такая, что

$$\|b(x)\| \leq c|x|^{-m}, \quad x \in S^{*'}. \quad (14.34)$$

Следовательно, согласно лемме 14.2 и формуле (14.8), существует константа K , такая, что

$$\|u_1(x)\| \leq Kc|x|^{-m}, \quad x \in S^{*'}. \quad (14.35)$$

Оценим теперь правую часть (14.19), применяя метод индукции. Имея в виду определение оператора \mathcal{P} и функции $p(x, u)$ в (14.12), нужно оценить величину

$$\|(B(x) - \Lambda)(z^{(2)} - z^{(1)}) + h(x, z^{(2)}) - h(x, z^{(1)})\|,$$

где $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ — векторы. В силу предельного соотношения (14.10) и в силу того, что $h(x, z)$ является полиномом относительно z , не содержащим линейных членов, имеем для $x \in S^{*'}$ и для

$$\|z^{(i)}\| \leq z_0, \quad i = 1, 2 \quad (z_0 - \text{константа}),$$

неравенство

$$\|(B(x) - \Lambda)(z^{(2)} - z^{(1)}) + h(x, z^{(2)}) - h(x, z^{(1)})\| \leq \gamma \|z^{(2)} - z^{(1)}\|, \quad (14.36)$$

где постоянную γ можно сделать как угодно малой, выбирая $|\xi_1|$ достаточно большим, а z_0 достаточно малым. Вспоминая, что, согласно замечанию 1 разд. 14.4, возрастание $|\xi_1|$ не отражается на константе K , можно, таким образом, считать, что

$$\gamma < K^{-1} \quad (14.37)$$

Оставляя γ и K фиксированными, можно далее добиться, увеличивая, если это необходимо, x_0 , выполнения неравенства

$$\frac{cK}{1 - \gamma K} |x|^{-m} \leq z_0 \quad \text{для } x \in S^{*'}. \quad (14.38)$$

Тогда можно видеть, что

$$\|u_{r+1} - u_r\| \leq \gamma^r K^{r+1} c |x|^{-m}, \quad r = 0, 1, \dots, x \in S^{*'}, \quad (14.39)$$

и

$$\|u_{r+1}\| \leq \frac{cK}{1 - \gamma K} |x|^{-m}, \quad r = 0, 1, \dots, x \in S^{*'}. \quad (14.40)$$

В силу (14.35) неравенства справедливы для $r=0$, поскольку $u_0 \equiv 0$. Предположим, что они справедливы для всех $r \leq j-1$ и произвольного j . Тогда в силу (14.38) можно применить неравенство (14.36), полагая $z^{(1)} = u_{j-1}$, $z^{(2)} = u_j$. Таким образом, $\mathcal{P}u_j - \mathcal{P}u_{j-1}$ есть интеграл вида (14.25), в котором $\chi(x)$ удовлетворяет, согласно (14.36) и (14.39) для $r=j-1$, неравенству

$$\|\chi(x)\| \leq \gamma^j K^j c |x|^{-m}.$$

Лемма 14.2 обеспечит тогда справедливость (14.39) для $r=j$. Справедливость (14.40) для $r=j$ вытекает из (14.39) для $r \leq j$:

$$\begin{aligned} \|u_{j+1}\| &= \left\| \sum_{k=0}^j (u_{k+1} - u_k) \right\| \leq \sum_{k=0}^j \|u_{k+1} - u_k\| \leq \\ &\leq cK |x|^{-m} \sum_{k=0}^j \gamma^k K^k < cK |x|^{-m} (1 - \gamma K)^{-1}. \end{aligned}$$

Доказательство того, что существует

$$u(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} u_r(x),$$

можно теперь довести до конца стандартным путем: из (14.37) и (14.39) следует, что ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} \|u_{r+1} - u_r\|$$

мажорируется для $x \in S^*$ сходящейся геометрической прогрессией. Следовательно, ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} (u_{r+1} - u_r)$$

сходится равномерно для $x \in S^*$, а это значит, что существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{r-1} (u_{s+1} - u_s)$$

и предельная функция $u(x)$ является голоморфной для $x \in S^*$. Чтобы убедиться, что $u(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению $u = \mathcal{P}u$, достаточно проверить, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{P}u_r = \mathcal{P} \lim_{r \rightarrow \infty} u_r.$$

Здесь опускаются эти рассуждения, которые можно провести, опираясь на равномерную сходимость и неравенство (14.23).

Наконец, из (14.40) видно, что $u(x) \sim 0$ при $x \rightarrow \infty$, так как m произвольно. Область S^* зависит от выбора x_1 , которое зависит в свою очередь от выбора m . Это, однако, несущественно, так как $u(x)$ не зависит от m и, следовательно, определена в области, которая не должна зависеть от m . Таким образом, теорема 12.1 доказана по крайней мере в предположении, что все λ_j различны. В § 18 это предположение будет отброшено.

Теорема 12.1 интересна не только тем, что играет важную роль в теории линейных дифференциальных уравнений, но также и тем, что представляет собой в некотором смысле еще более плодотворный результат для нелинейных дифференциальных уравнений. В этой связи хотелось бы заменить довольно ограничительное предположение (а) о том, что $f(x, z)$ должна быть полиномом по компонентам z , более слабым предположением о том, что $f(x, z)$ голоморфна по этим компонентам при $z=0$. Анализ доказательства теоремы 12.1 показывает, что единственный пункт, где используется полиномиальный характер $f(x, z)$ и, следовательно, $h(x, z)$, — это формула (14.36). Но, как будет сейчас показано, эта формула остается справедливой и при более слабых предположениях относительно $f(x, z)$.

Теорема 14.1. Утверждение теоремы 12.1 остается справедливым, если условия (а) и (б) этой теоремы заменить следующими:

(а*) $f(x, z)$ голоморфна по компонентам z_j вектора z , $j=1, 2, \dots, N$, и по x в области

$$\|z\| \leq z_0, \quad 0 < x_0 \leq |x| < \infty, \quad x \in S \quad (x_0 \text{ и } z_0 \text{ — константы});$$

(б*) $f(x, z)$ имеет асимптотическое разложение

$$f(x, z) \sim \sum_{r=0}^{\infty} f_r(z) x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S,$$

которое справедливо равномерно в области $\|z\| \leq z_0$.

Для доказательства потребуется несложная предварительная лемма.

Лемма 14.3. Пусть $v(z)$ — некоторая вектор-функция компонент вектора z , голоморфная при $z=0$. Если определитель матрицы Якоби $M(z) = \{\partial v_j / \partial z_k\}$ равен 0 при $z=0$, то для любого $\beta > 0$ найдется действительное число $z_0(\beta)$, такое, что

$$\|v(z^{(2)}) - v(z^{(1)})\| \leq \beta \|z^{(2)} - z^{(1)}\|,$$

как только

$$\|z^{(j)}\| \leq z_0(\beta), \quad j = 1, 2.$$

Доказательство. Пусть $0 \leq \alpha \leq 1$. Положим $w(\alpha) = v(\alpha z^{(2)} + (1 - \alpha)z^{(1)})$. Тогда

$$\begin{aligned} \|v(z^{(2)}) - v(z^{(1)})\| &= \|w(1) - w(0)\| = \left\| \int_0^1 \frac{dw(\alpha)}{d\alpha} d\alpha \right\| = \\ &= \left\| \int_0^1 M(\alpha z^{(2)} + (1 - \alpha)z^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) d\alpha \right\| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \|M(\alpha z^{(2)} + (1 - \alpha)z^{(1)})\| \|z^{(2)} - z^{(1)}\|. \end{aligned}$$

Доказательство будет закончено, если принять во внимание, что $M(\alpha z^{(2)} + (1 - \alpha)z^{(1)})$ стремится к нулю равномерно относительно α , когда $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ стремятся к нулю.

Отсюда немедленно вытекает

Следствие. Если $v(z)$ зависит еще и от комплексного переменного x , т. е. $v = v(x, z)$, и если

$$\lim_{z \rightarrow \infty} M(z) = 0$$

равномерно относительно x в некоторой области R , то постоянную $z_0(\beta)$ можно выбрать не зависящей от x , если $x \in R$.

Доказательство теоремы 14.1. Как было установлено выше, единственный пункт, подлежащий проверке, — это доказательство того, что формула (14.36) остается справедливой при условии теоремы 14.1. Стало быть, нужно показать, что функция $h(x, z)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|h(x, z^{(2)}) - h(x, z^{(1)})\| \leq \gamma^*(z_0) \|z^{(2)} - z^{(1)}\| \quad (14.41)$$

для $\|z^{(1)}\| \leq z_0$, $\|z^{(2)}\| \leq z_0$, где $\gamma^*(z_0)$ может быть сделана сколь угодно малой, если выбрать z_0 достаточно малым. Далее, согласно теореме 9.4 и условиям (a*) и (b*), функции $f(x, 0)$ и $(\partial f_i / \partial z_j)_{z=0}$ имеют асимптотические разложения при $x \rightarrow \infty$ в S . Из определения $h(x, z)$ следует, что $h(x, z)$ обладает равномерным асимптотическим разложением по степеням x^{-1}

$$h(x, z) \sim \sum_{r=0}^{\infty} h_r(z) x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty,$$

где все $h_r(z)$ и их производные равны нулю при $z=0$. В силу теоремы 9.4 функция $h(x, z)$ удовлетворяет равномерно относительно $x \in S$ условиям следствия из леммы 14.3. А это следствие как раз и устанавливает неравенство (14.41) с произвольно малой $\gamma^*(z_0)$, что и требовалось доказать.

Представляется заманчивым заменить условие (b) теоремы 14.1 предположением о том, что коэффициенты кратного ряда

Тейлора для $f(x, z)$ по компонентам z обладают асимптотическими разложениями по степеням x^{-1} . Если $f(x, z)$ является полиномом по компонентам z , то это требование эквивалентно предположению (b^*) . Однако, вообще говоря, условие (b^*) более ограничительно, как это отмечалось после доказательства теоремы 9.5. Более слабое условие, о котором говорится сейчас, очевидно, недостаточно для обеспечения неравенства (14.41). Пример из задачи 9.4 иллюстрирует это положение.

15. Явление Стокса

15.1. Определения

Фундаментальное матричное решение $Y(x)$ линейного дифференциального уравнения (12.14) было определено в теореме 12.3 по отношению к заданному сектору S с центральным углом, не превосходящим $\pi/(q+1)$. Теорема гарантирует указанное асимптотическое разложение для функции $Y(x)$ только в этом секторе. Однако не утверждается, что не существует сектора с углом, большим $\pi/(q+1)$, в котором это разложение для \hat{Y} остается справедливым. В самом деле, ценой некоторого усложнения доказательства теоремы 12.1 можно было бы установить справедливость разложения в секторе, несколько большем $\pi/(q+1)$. С другой стороны, справедливость асимптотического разложения для \hat{Y} , вообще говоря, в конце концов нарушается, если \hat{Y} продолжать аналитически в окрестность $x=\infty$. Если окажется, что \hat{Y} однозначно определено в окрестности $x=\infty$, то его разложение будет справедливым без ограничений на аргумент x в том и только в том случае, когда $\hat{Y}(x)$ аналитична при $x=\infty$, и в этом случае ряд будет сходящимся. Это было доказано в теореме 8.6. Но такие дифференциальные уравнения являются редким исключением.

Таким образом, в плоскости x , вообще говоря, найдутся лучи, за пределами которых асимптотическое разложение, описанное в теореме 12.3, становится несправедливым. Эти лучи называются *линиями Стокса* по имени первого математика, изучавшего это явление.

В приводимом ниже исследовании $A(x)$ предполагается голоморфной при $x=\infty$.

Обозначим через l линию Стокса и рассмотрим фундаментальную матрицу вида

$$Y(x) = \hat{Y}(x) x^D e^{Q(x)},$$

где

$$\hat{Y}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} Y_r x^{-r}$$

в секторе S , имеющем l своей границей. Согласно теореме 12.3 и следствию из нее, существует другое фундаментальное матричное решение

$$Y_1(x) = \hat{Y}_1(x) x^D e^{Q(x)},$$

где $\hat{Y}_1(x)$ имеет то же асимптотическое разложение, что и $\hat{Y}(x)$:

$$\hat{Y}_1(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} Y_r x^{-r}$$

в секторе S_1 , содержащем луч l внутри. Эти две фундаментальные матрицы должны быть связаны тождеством вида

$$Y(x) = Y_1(x) C, \quad (15.1)$$

где C — некоторая неособая постоянная матрица (см. разд. 2.3). Элементы C называются иногда *множителями Стокса*. Беря произвольную точку x_0 , принадлежащую пересечению S и S_1 , можно матрицу C представить в виде

$$C = Y_1(x_0)^{-1} Y(x_0) = e^{-Q(x_0)} x_0^{-D} \hat{Y}_1(x_0)^{-1} \hat{Y}(x_0) x_0^D e^{Q(x_0)}$$

Однако информация относительно C , получаемая этим путем, оказывается весьма неполной. Чтобы в этом убедиться, заметим, что $\hat{Y}_1(x_0)^{-1} \hat{Y}(x_0) \sim I$ при $x_0 \rightarrow \infty$ в SUS_1 . Следовательно, внедиагональные элементы C представляют собой произведения экспоненциальных функций и некоторых функций от x_0 , которые асимптотически равны нулю. Если экспонента остается ограниченной при $x_0 \rightarrow \infty$, то можно сделать заключение, что соответствующий элемент C просто равен нулю, так как он не должен зависеть от x_0 . Если же экспонента растет по модулю при $x_0 \rightarrow \infty$, то относительно соответствующих элементов C никаких заключений сделать нельзя.

В разд. 15.3 будет доказана общая теорема, выясняющая природу явления Стокса.

15.2. Пример

Как было только что установлено, явление Стокса не может быть полностью проанализировано при помощи методов, развитых выше. Приводимые ниже без доказательства конкретные результаты можно было бы получить при помощи техники, специально приспособленной к рассматриваемому дифференциальному

уравнению частного вида. Целью настоящего раздела является лишь иллюстрация предмета.

Возьмем два частных линейно независимых решения дифференциального уравнения Бесселя — так называемые функции Ханкеля $H_n^{(j)}(x)$, $j=1, 2$. Отдельные ветви этих многозначных функций можно представить в виде

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= \hat{H}_n^{(1)}(x) x^{-1/2} e^{ix}, \\ H_n^{(2)}(x) &= \hat{H}_n^{(2)}(x) x^{-1/2} e^{-ix} \end{aligned} \quad (15.2)$$

где $\hat{H}_n^{(j)}(x)$, $j=1, 2$, — функции, обладающие асимптотическими разложениями по степеням x^{-1} . Под $x^{-1/2}$ подразумевается корень, положительный при $\arg x=0$. Разложение $\hat{H}_n^{(1)}(x)$ справедливо при $-\pi < \arg x < 2\pi$, а $\hat{H}_n^{(2)}(x)$ — при $-2\pi < \arg x < \pi$. Эти секторы с центральными углами величиной 3π следует рассматривать на римановой поверхности, отвечающей многозначным функциям $H_n^{(j)}(x)$.

Точное выражение для рядов $\hat{H}_n^{(j)}(x)$ дается во многих книгах и таблицах, посвященных функциям Бесселя. Главные члены имеют вид

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i(2n+1)\pi/4}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i(2n+1)\pi/4} \quad (15.3)$$

Таким образом, функции

$$\gamma_j^{-1} \hat{H}_n^{(j)}(x), \quad j=1, 2, \quad (15.4)$$

представляются степенными рядами с главными членами 1.

Если сравнить эти факты с результатами разд. 13.2, то видно, что оба решения уравнения Бесселя

$$\gamma_j^{-1} H_n^{(j)}(x), \quad j=1, 2, \quad (15.5)$$

имеют в секторе $|\arg x| < \pi$ те же главные члены асимптотики, что и решения $u_j(x)$, определяемые формулой (13.7). А тогда и полное формальное разложение этих функций должно совпадать, так как оно однозначно определяется посредством алгоритма, данного в § 13. Тем не менее было бы неправильно заключить, что решения $u_j(x)$ обязательно совпадают с решениями (15.5), потому что (15.5) — это некоторые специального вида однозначно определенные решения, а относительно $u_j(x)$ известно только то, что они в некотором секторе S с центральным углом, меньшим π , имеют то же самое асимптотическое степенное разложение, что и функции $\gamma_j^{-1} H_n^{(j)}(x)$. Решения $u_j(x)$ зависят от выбора S , но если даже взять в качестве S сектор,

принадлежащий $|\arg x| < \pi$, то все равно найдется бесконечно много решений $u_j(x)$ с одинаковым асимптотическим разложением в S . Например, если S принадлежит $0 < \arg x < \pi$, то $u_2(x)$ и $u_2(x) + ku_1(x)$ имеют одно и то же асимптотическое представление, поскольку в этом секторе $\operatorname{Re}(ix) < 0$, а $\operatorname{Re}(-ix) > 0$.

Преыдущие рассуждения показывают, однако, что $\gamma_j^{-1} H_n^{(j)}(x)$, $j=1, 2$, — это единственная фундаментальная система, для которой такое асимптотическое представление справедливо во всем секторе $|\arg x| < \pi$. Действительно, легко видеть, что любая линейная комбинация этих функций с отличными от нуля коэффициентами стремится экспоненциально к бесконечности как в верхней, так и в нижней полуплоскости.

Луч $\arg x = \pi$ является как раз линией Стокса для $H_n^{(2)}(x)$. В этом можно убедиться, опираясь на некоторые дополнительные факты из классической теории бesselевых функций. Обозначим через $xe^{m\pi i}$ точку на римановой поверхности для функции Ханкеля, получаемую из x положительным вращением на угол $m\pi$ (m — целое). Тогда справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(xe^{im\pi}) &= -\frac{\sin(m-1)\pi n}{\sin(\pi n)} H_n^{(1)}(x) - e^{-i\pi n} \frac{\sin(m\pi n)}{\sin(\pi n)} H_n^{(2)}(x), \\ H_n^{(2)}(xe^{im\pi}) &= e^{i\pi n} \frac{\sin(m\pi n)}{\sin(\pi n)} H_n^{(1)}(x) + \frac{\sin(m+1)\pi n}{\sin(\pi n)} H_n^{(2)}(x). \end{aligned} \quad (15.6)$$

Если порядок n функций Ханкеля является целым, то коэффициенты в (15.6) следует заменить их предельными значениями при n , стремящемся к соответствующему целому числу.

Если $xe^{\pi i}$ лежит между π и 2π , то число x принадлежит сектору $0 < \arg x < \pi$. В этом последнем секторе вся правая часть второго уравнения (15.6) при $m=1$ имеет то же самое асимптотическое разложение, что и ее второе слагаемое, поскольку e^{-ix} в этой полуплоскости представляет собой экспоненциально *возрастающую* функцию, в то время как e^{ix} там экспоненциально убывает при $|x| \rightarrow \infty$. С другой стороны, если бы асимптотическое разложение для $H_n^{(2)}(x)$ было справедливо в секторе

$$\pi < \arg x < 2\pi,$$

то из (15.2) следовало бы, что асимптотическое выражение для $H_n^{(2)}(x)$ имеет там экспоненциально убывающий множитель.

Множители Стокса при $\arg x = \pi$ выводятся сразу из второй формулы (15.6) при $m=-2$. Если $\pi \leq \arg x < 2\pi$, то $xe^{-2\pi i}$ лежит в секторе $-\pi \leq \arg x < 0$, в котором $\hat{H}_n^{(2)}(x)$ имеет степенное асимптотическое разложение. Разложение это не изменится, если x заменить на $xe^{-2\pi i}$, но множитель $x^{-1/2}$ в (15.2)

при этом изменит знак. Следовательно, фундаментальная система решений уравнения Бесселя

$$\begin{aligned} v_1(x) &= H_n^{(1)}(x), \\ v_2(x) &= e^{i\pi n} \frac{\sin(2\pi n)}{\sin(\pi n)} H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (15.7)$$

имеет в секторе $\pi \leq \arg x < 2\pi$ в точности то же самое асимптотическое представление, что и фундаментальная система $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ в $-\pi < \arg x < \pi$. Ветви $H_n^{(j)}(x)$ в (15.7) получаются из ветвей (15.2) аналитическим продолжением против часовой стрелки.

Если эти фундаментальные системы интерпретировать как первые строки в двух фундаментальных матричных решениях матричного дифференциального уравнения (13.2), то легко усмотреть, что матрица множителей Стокса C в формуле (15.1) имеет в этом случае вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -e^{i\pi n} 2 \cos(\pi n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в $\pi < \arg x < 2\pi$ обе функции $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$ имеют асимптотическое представление, содержащее возрастающий экспоненциальный множитель, тогда как экспоненциальный множитель в асимптотическом представлении для $v_2(x)$ затухает при $x \rightarrow \infty$. Это означает, что вторая формула в (15.7) представляет экспоненциально убывающую функцию как разность двух экспоненциально возрастающих функций.

Задача 15.1. Пусть

$$K_m = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(m-1)\pi n}{\sin(\pi n)} & e^{i\pi n} \frac{\sin(m\pi n)}{\sin(\pi n)} \\ -e^{-i\pi n} \frac{\sin(m\pi n)}{\sin(\pi n)} & \frac{\sin(m+1)\pi n}{\sin(\pi n)} \end{pmatrix}.$$

Из формулы (15.6) вытекает, что $K_m = K_1^m$. Проверить это соотношение непосредственно, исходя из определения K_m .

Для полного описания явления Стокса для функций Ханкеля нужны дополнительные сведения о специальных свойствах формальных рядов для $\hat{H}_n^{(1)}(x)$ и $\hat{H}_n^{(2)}(x)$ в секторе $-\pi < \arg x < \pi$. Для этого прежде всего введем более удобные обозначения.

В целях краткости будем обозначать сектор $\alpha < \arg x < \beta$ через (α, β) . Уравнение Бесселя эквивалентно векторной системе

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + n^2 x^{-2} & -x^{-1} \end{pmatrix} y. \quad (15.8)$$

Фундаментальная матрица этой системы имеет вид

$$Y(x) = \begin{pmatrix} H_n^{(1)}(x) & H_n^{(2)}(x) \\ dH_n^{(1)}(x)/dx & dH_n^{(2)}(x)/dx \end{pmatrix} \quad (15.9)$$

Обозначим первый и второй столбцы этой матрицы $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответственно и запишем в очевидных обозначениях

$$Y(x) = (y_1(x), y_2(x)).$$

Как уже известно, $Y(x)$ имеет в $(-\pi, \pi)$ асимптотическое представление

$$\begin{aligned} Y(x) &\sim \tilde{Y}(x) x^{-1/2} \exp \left\{ i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \right\} = \\ &= (\tilde{y}_1(x) x^{-1/2} e^{ix}, \tilde{y}_2(x) x^{-1/2} e^{-ix}), \end{aligned} \quad (15.10)$$

где $\tilde{Y}(x)$ — формальный степенной ряд вида

$$\tilde{Y}(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ i\gamma_1 & -i\gamma_2 \end{pmatrix} + \dots$$

Точки означают разложение по степеням x^{-1} .

В теории функций Бесселя доказывается, что ряд $\tilde{Y}(x)$ обладает следующим специфическим свойством:

$$\tilde{Y}(-x) = \tilde{Y}(x) \begin{pmatrix} 0 & e^{i\pi n} \\ -e^{-i\pi n} & 0 \end{pmatrix} i \quad (15.11)$$

(см., например, Янке и Эмде [1]): Применяя обозначения, введенные здесь и в задаче 15.1, можно записать формулу (15.6) в виде $Y(xe^{im\pi}) = Y(x)K_m$ или, заменяя m на $-m$,

$$Y(x)K_{-m} = Y(xe^{-im\pi}). \quad (15.12)$$

Если $x \in ((m-1)\pi, (m+1)\pi)$, то имеем $xe^{-im\pi} \in (-\pi, \pi)$, так что асимптотический вид $Y(xe^{-im\pi})$ можно вычислить из (15.10) и (15.11). Последняя формула справедлива лишь для нечетных m . Этим путем можно для каждого сектора $((m-1)\pi, (m+1)\pi)$ вычислить фундаментальную матрицу, имеющую в нем разложение (15.10).

Задача 15.2. Определим матрицу C_m соотношениями

$$C_m = \frac{e^{-\pi i(m-1)/2}}{\sin \pi n} \begin{pmatrix} \sin m\pi n & e^{i\pi n} \sin(m+1)\pi n \\ e^{-i\pi n} \sin(m-1)\pi n & \sin m\pi n \end{pmatrix}$$

m — нечетное,

$$C_m = \frac{e^{-\pi i m/2}}{\sin \pi n} \begin{pmatrix} \sin(m+1)\pi n & -e^{i\pi n} \sin m\pi n \\ e^{-i\pi n} \sin m\pi n & -\sin(m-1)\pi n \end{pmatrix} \quad (15.13)$$

m — четное.

Показать, что для всех целых m фундаментальная матрица $Y(x)C_m$ имеет в $((m-1)\pi, (m+1)\pi)$ асимптотическое разложение

$$Y(x)C_m \sim \tilde{Y}(x)x^{-1/2} \exp \left\{ i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \right\}.$$

Здесь $Y(x)$ определено соотношением (15.9), а $\tilde{Y}(x)$ — формальное степенное разложение, входящее в (15.10); $x^{-1/2}$ для каждого m определяется как аналитическое продолжение той ветви, которая положительна, когда $\arg x = 0$.

Заметим, что каждый сектор вида $(p\pi, (p+1)\pi)$ принадлежит двум секторам вида $((m-1)\pi, (m+1)\pi)$, так что в задаче 15.2 в каждом секторе $(p\pi, (p+1)\pi)$ определяются две асимптотически равные фундаментальные матрицы.

15.3. Некоторые теоремы относительно явления Стокса

Хотя общая асимптотическая теория, развитая в этой главе, не дает достаточных оснований для вычисления множителей Стокса, но она приводит к некоторым интересным заключениям общего характера, которые проливают свет на природу явления Стокса.

В настоящем разделе будем предполагать, что матрица $A(x)$ дифференциальной системы

$$x^{-q}y' = A(x)y \quad (15.14)$$

голоморфна при $x = \infty$, т. е.

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \quad |x| > x_0. \quad (15.15)$$

Кроме того, ограничимся рассмотрением случая различных собственных значений λ_j , $j=1, 2, \dots, n$, главной матрицы A_0 . Тогда можно применить теорему 12.3 и ее следствие. При этом важно делать четкое различие между матричной функцией $\hat{Y}(x)$, введенной в этой теореме, и формальным рядом

$$\sum_{r=0}^{\infty} \hat{Y}_r x^{-r}.$$

Первая зависит от сектора S , в котором применяется теорема 12.3. Последний является результатом формальных операций, не связанных с выбором сектора. Обозначим этот формальный ряд через $\check{Y}(x)$. Ряд $\check{Y}(x)$ не является единственным. Например, каждый столбец $\check{Y}(x)$ можно умножить на произвольную

отличную от нуля константу. Это соответствует умножению обеих частей соотношения

$$Y(x) = \hat{Y}(x) x^D e^{Q(x)} \quad (15.16)$$

справа на постоянную неособую диагональную матрицу C и дает тот же эффект, что замена фундаментальной матрицы $\hat{Y}(x)$ другой фундаментальной матрицей $Y(x)C$, для которой теорема 12.3 остается справедливой, если $\hat{Y}(x)$ заменить на $\hat{Y}(x)C$, а $\check{Y}(x)$ на $\check{Y}(x)C$. В настоящем разделе столбцы $\check{Y}(x)$ будем считать фиксированными, но будем допускать перестановки столбцов, считая при этом, что столбцы $Y(x)$ и $\hat{Y}(x)$, а также диагональные элементы D и $Q(x)$ также соответствующим образом переставляются. Такого рода изменения равносильны просто перенумерации собственных значений λ_j . В дальнейшем удобно не придерживаться какого-либо определенного порядка.

Любое фундаментальное матричное решение (15.14), описанное в теореме 12.3, для которого столбцы $\check{Y}(x)$ считаются фиксированными, а на порядок нумерации собственных значений ограничений не накладывается, назовем *асимптотически базисным* в рассматриваемом секторе S .

Обозначим

$$R(x) = (\log x) D + Q(x).$$

Тогда (15.16) можно записать короче:

$$Y(x) = \hat{Y}(x) e^{R(x)}, \quad (15.17)$$

$R(x)$ — диагональная матрица. Ее диагональные элементы обозначим через $r_j(x)$, $j=1, 2, \dots, n$. Очевидно,

$$r_j(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1} [\lambda_j + \rho_j(x)], \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (15.18)$$

где

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho_j(x) = 0.$$

В векторных обозначениях (15.17) принимает вид

$$y_j(x) = \hat{y}_j(x) e^{r_j(x)}, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (15.19)$$

а соотношение $\hat{Y}(x) \sim \check{Y}(x)$ в S переходит в

$$\hat{y}_j(x) \sim \check{y}_j(x) \text{ в } S, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (15.20)$$

Если $y(x)$ — любое частное векторное решение (15.14), то оно должно быть линейной комбинацией $y_j(x)$ из (15.19), т. е.

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j \hat{y}_j(x) e^{r_j(x)}. \quad (15.21)$$

В секторе S , где справедливо (15.19), асимптотический вид $y(x)$ при $x \rightarrow \infty$ определяется тем членом — или членами — в (15.21), для которых $\operatorname{Re} r_j(x)$ наибольшая. Далее, согласно (15.18),

$$\operatorname{Re} [r_j(x) - r_k(x)] = \frac{1}{q+1} \operatorname{Re} [x^{q+1}(\lambda_j - \lambda_k)] + O(x^{q+1}). \quad (15.22)$$

Это наводит на мысль о том, что лучи, вдоль которых

$$\operatorname{Re} [x^{q+1}(\lambda_j - \lambda_k)] = 0 \quad \text{для некоторых } j \neq k, \quad (15.23)$$

должны играть исключительную роль в анализе асимптотического поведения решений $y(x)$ уравнения (15.14). Назовем такие лучи *лучами раздела*.

Задача 15.3. Доказать, что на плоскости существует самое большее $N = (q+1)n(n-1)$ различных лучей раздела.

Пусть некоторый луч l , принадлежащий S , не является лучом раздела. В силу предположения о различии всех λ_j найдется открытый сектор T , содержащий луч l , в котором для достаточно больших x никакие два $r_j(x)$ не будут иметь одинаковых действительных частей. Рассмотрим те $r_j(x)$, для которых c_j в (15.21) не является нулем, и обозначим через $r_p(x)$ то $r_j(x)$, для которого $\operatorname{Re} r_j(x)$ имеет наибольшее значение в T . Тогда из (15.21) последует асимптотическое соотношение

$$y(x) \sim c_p \tilde{y}_p e^{r_p(x)} \quad \text{в } T. \quad (15.24)$$

Поскольку каждый луч находится внутри некоторого сектора S , к которому применима теорема 12.3, можно считать доказанной следующую теорему.

Теорема 15.1. Если

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}$$

для $|x| > x_0$ и все собственные значения λ_j , $j=1, 2, \dots, n$, матрицы A_0 различны, то в любом открытом секторе, не содержащем лучей раздела, все решения дифференциальной системы (15.14) имеют асимптотическое представление вида

$$y(x) = c_p \tilde{y}_p(x) e^{r_p(x)},$$

где p и c_p зависят от $y(x)$ и от рассматриваемого сектора.

Между прочим, эта теорема является более сильной, нежели теорема 12.3, так как она показывает, что справедливость теоремы 12.3 можно гарантировать в наименьшем содержащем S секторе, ограниченном лучами раздела.

Для уравнения Бесселя, рассмотренного в предыдущем разделе, мы имели $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $q = 0$. Следовательно, лучами раздела являются лучи $x > 0$ и $x < 0$ на комплексной плоскости. Это, разумеется, означает наличие бесконечного числа линий раздела на римановой поверхности для бесцелых функций. Теорема 12.3 гарантирует существование асимптотически базисной фундаментальной системы в любом открытом секторе с углом π , например в секторе $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$. Согласно же теореме 15.1, заключаем, что этот сектор может быть расширен до $-\pi < \arg x < \pi$, и этот последний действительно является, как мы видели выше, наибольшим сектором, в котором справедливы асимптотические степенные разложения для обеих функций $H_n^{(j)}(x)$, $j = 1, 2$.

Простым следствием вышеизложенного является

Теорема 15.2. Пусть S — открытый сектор, такой, что

$$\operatorname{Re}[(\lambda_j - \lambda_k)x^{q+1}] < 0 \text{ в } S \text{ для } j < k, \quad (15.25)$$

и пусть $Y(x)$ — фундаментальная матрица, являющаяся асимптотически базисной в S , с расположением столбцов, соответствующим (15.25). Тогда фундаментальная матрица $Y(x)C$, где C — постоянная матрица, обладает тем же свойством в том и только в том случае, если C имеет лишь нулевые элементы ниже главной диагонали и лишь равные единице на главной диагонали.

Неравенства (15.25), конечно, не содержат никаких других ограничений, кроме требования, чтобы сектор S не содержал лучей раздела, так как в случае надобности λ_j можно всегда перенумеровать так, чтобы (15.25) было справедливо.

З а д а ч а 15.4. Доказать теорему 15.2.

Приступим теперь к исследованию того, что происходит с решением при пересечении луча раздела. Ограничимся так называемыми простыми лучами раздела, т. е. лучами l , вдоль которых $\operatorname{Re}[(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)x^{q+1}] = 0$ в точности для одной пары индексов α, β ($\alpha \neq \beta$), и, кроме того, это выражение имеет различные знаки по разные стороны от l .

Пусть S — сектор, содержащий l внутри и ограниченный двумя ближайшими лучами раздела l_1 и l_2 . Открытый сектор, ограниченный l_1 и l , обозначаем S_1 , а сектор, ограниченный l и l_2 , обозначаем S_2 . Пусть $Y(x)$ — фундаментальная матрица, асимптотически базисная в S . Без ограничения общности можно задать нумерацию λ_j так, чтобы неравенства (15.25) выполнялись в S_1 , и считать, что столбцы $Y(x)$ соответственно

упорядочены. В новой нумерации собственные значения $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ становятся соседними по номеру, скажем λ_s и λ_{s+1} , поскольку луч раздела простой. Рассуждения, ведущие от (15.21) к (15.24), остаются справедливыми всюду в S , даже если $\text{Re } r_s(x)$ перерастает $\text{Re } r_{s+1}(x)$ при переходе из S_1 в S_2 , за исключением того случая, когда в (15.21)

$$c_s \neq 0, \quad c_{s+1} \neq 0, \quad \text{но} \quad c_{s+2} = c_{s+3} = \dots = c_n = 0. \quad (15.26)$$

Если это так, то

$$y(x) \sim \begin{cases} c_{s+1} \tilde{y}_{s+1}(x) e^{r_{s+1}(x)} & \text{в } S_1, \\ c_s \tilde{y}_s(x) e^{r_s(x)} & \text{в } S_2. \end{cases} \quad (15.27)$$

В этом случае обычно говорят, что l является *лучом Стокса* для частного решения $y(x)$.

Эти выводы могут быть, в частности, применены к столбцам $y_{1k}(x)$, $k=1, 2, \dots, n$, любой фундаментальной матрицы $Y_1(x)$, асимптотически базисной в S_1 , но не обязательно в S_2 . Предположим, что столбцы $Y_1(x)$ упорядочены так, что $Y(x)$ и $Y_1(x)$ имеют одно и то же асимптотическое представление в S_1 . Тогда $y_k(x) \sim y_{1k}(x)$ в S_1 , так что (15.21) должно иметь вид

$$y_{1k}(x) = \sum_{j=1}^k c_{jk} \hat{y}_j(x) e^{r_j(x)}, \quad c_{kk} = 1. \quad (15.28)$$

Следовательно, l не является лучом Стокса ни для какого $y_{1k}(x)$, за исключением, быть может, $y_{1,s+1}(x)$, но и для этого решения только при $c_{s,s+1} \neq 0$.

Можно продвинуться дальше и получить из $Y_1(x)$ новую фундаментальную матрицу, асимптотически базисную в S_2 и даже во всем S , добавляя к столбцу $y_{1,s+1}$ умноженный на соответствующий множитель столбец y_{1s} . Действительно, решение

$$\begin{aligned} y_{1,s+1}^*(x) &= y_{1,s+1}(x) - \frac{c_{s,s+1}}{c_{ss}} y_{1s}(x) = \\ &= \sum_{j=1}^{s+1} c_{j,s+1} y_j(x) - \frac{c_{s,s+1}}{c_{ss}} \sum_{j=1}^s c_{js} y_j(x) \end{aligned}$$

не содержит члена с $y_s(x)$, так что для него

$$y_{1,s+1}^*(x) \sim c_{s+1,s+1} \tilde{y}_{s+1}(x) e^{r_{s+1}(x)}$$

всюду в S .

Сформулируем теперь этот результат, не указывая специальный порядок нумерации собственных значений, используемый при доказательстве.

Теорема 15.3. Пусть l_1, l, l_2 — три последовательных луча раздела. Предположим, что луч l простой, и обозначим через $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ те два собственных значения, для которых $\operatorname{Re}[(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)x^{q+1}] < 0$ между l_1 и l и $\operatorname{Re}[(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)x^{q+1}] > 0$ между l и l_2 . Если $Y_1(x)$ — фундаментальная матрица, асимптотически базисная между l_1 и l , то существует константа c , такая, что если прибавить к столбцу $Y_1(x)$, соответствующему λ_α , умноженный на c столбец $Y_1(x)$, соответствующий λ_β , то получится фундаментальная матрица $Y_2(x)$, асимптотически базисная во всем секторе между l_1 и l_2 .

Матрица C в соотношении $Y_2(x) = Y_1(x)C$ имеет на главной диагонали единичные элементы. Ее единственным отличным от нуля элементом, не лежащим на главной диагонали, является элемент c на пересечении строки, соответствующей λ_α , и столбца, соответствующего λ_β . Таким образом, явление Стокса, возникающее при пересечении простого луча раздела, может быть охарактеризовано одной-единственной константой. Эта константа, однако, только из общей теории получена быть не может.

Конечно, $Y_2(x)$ — это не единственная фундаментальная матрица, являющаяся асимптотически базисной между l_1 и l_2 , если исключить случай $n=2$. Действительно, к каждому столбцу $Y_2(x)$, за исключением того, для которого соответствующее $\operatorname{Re} r_j(x)$ имеет наименьшее из всех возможных значений по ту или другую сторону от l , можно добавить этот последний столбец, умноженный на постоянную, не нарушая асимптотического представления матрицы. Постоянная c , однако, определена однозначно, как легко видеть из доказательства теоремы 15.3.

Следствие из теоремы 15.3. Пусть в секторе S , ограниченном лучами раздела l_1, l_2 ,

$$\operatorname{Re}(\lambda_1 x^{q+1}) < \operatorname{Re}(\lambda_j x^{q+1}), \quad j=2, 3, \dots, n,$$

и пусть $y(x)$ — векторное решение системы (15.14), имеющее в S асимптотическое представление $y(x) \sim \tilde{y}_1(x)e^{r_1(x)}$. Тогда $y(x)$ однозначно определяется этими свойствами, а l_1 и l_2 являются лучами Стокса для этого решения.

Задача 15.5. Доказать это следствие.

Биркгоф [2] (из этой работы взяты результаты, изложенные в предыдущем разделе) показал, что вышеуказанное специальное построение Y_2 из Y_1 обладает замечательным свойством аддитивности, которое сейчас будет описано без доказательства. Если все N лучей раздела являются простыми и различными, то процесс построения Y_2 из Y_1 может быть повторен при переходе через следующий луч раздела; это приведет к фундаментальным

матрицам Y_3, Y_4, \dots и т. д. Как оказывается, матрица $Y_{n(n-1)/2}(x)$, а значит, и все последующие *не зависят от частного вида матрицы* $Y_1(x)$, с которой начинается процесс. Следовательно, если занумеровать лучи раздела в порядке l_1, l_2, \dots, l_N в направлении против часовой стрелки и обозначить сектор между l_j и l_{j+1} , $j=1, 2, \dots, N-1$, через S_j , то описанный процесс продолжения приведет в результате одного оборота снова к сектору S_1 и к матрице $Z_{N+1}(x)$, которая будет одной и той же независимо от того, каким было $Y_1(x)$. Однако утверждение о том, что $Z_{N+1}(x)$ является асимптотически базисной в S_1 , нужно интерпретировать с осторожностью, поскольку матричная функция в (15.16), вообще говоря, неоднозначна и умножается на $e^{2\pi i D}$ в результате одного положительного обхода. Матрица $Z_{N+1}(x)$ будет асимптотически базисной в S_1 , только если $\arg x$ в x^D считать увеличенным на 2π по сравнению с $\arg x$ в асимптотическом выражении $Y_1(x)$. Строго асимптотически равна $Y_1(x)$ матрица $Z_{N+1}(x)e^{-2\pi i D}$. Таким образом, в S_1 асимптотически базисная фундаментальная матрица $Z_{N+1}(x)e^{-2\pi i D}$ отличается от прочих матриц такого рода тем свойством, что процесс построения последовательности фундаментальных матриц, описанный в теореме 15.3, приводит по возвращении в S_1 к той же самой матрице, умноженной на $e^{2\pi i D}$.

Обобщение, получаемое при помощи жордановой канонической формы

16. Жорданова каноническая форма

16.1. Главная теорема

Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ квадратной матрицы A с элементами, принадлежащими полю комплексных чисел, не всегда оказываются различными, и поэтому не всегда матрица A подобна диагональной матрице. Возникает вопрос: к какой же простейшей форме может быть приведена матрица A посредством преобразования подобия? Для теории дифференциальных уравнений в большинстве случаев наиболее эффективной приведенной формой матрицы является так называемая жорданова каноническая форма, описание которой будет сейчас дано. Соответствующее доказательство довольно громоздко, но его можно найти во многих книгах по алгебре матриц.

В целях упрощения описания дадим ряд определений.

Назовем квадратную матрицу A прямой суммой двух квадратных матриц B и C , не обязательно одинакового порядка, если A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}. \quad (16.1)$$

Для такого рода композиции двух матриц обычно употребляется символ

$$A = B \oplus C. \quad (16.2)$$

Заметим, что эта операция не коммутативна, за исключением случая $B=C$.

Матрицу H вида

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (16.3)$$

назовем *матрицей сдвига*. Элементы h_{jk} матрицы H равны

$$h_{jk} = 0 \text{ для } k \neq j+1, \quad h_{j, j+1} = 1.$$

Это название объясняется тем, что, как легко проверить, умножение слева на H приводит к смещению каждой строки на место предыдущей. Последняя строка такого произведения состоит из нулей. Аналогично умножение справа на H сдвигает каждый столбец на место последующего, а первый столбец этого произведения является нулевым. В частности, матрица H^m получается сдвигом цепочки единиц в H на m шагов вправо. Все прочие элементы будут нулевыми. Очевидно, $H^m = 0$ для $m \geq n$, где n — порядок H .

Матрица вида $\lambda I + H$, где H — матрица сдвига, а λ — некоторое комплексное число, называется *жордановым блоком*.

Матрицу, являющуюся прямой суммой жордановых блоков, назовем *жордановой матрицей*, или *жордановой канонической матрицей*.

Общепотребительным является только первый из всех этих терминов¹⁾.

Теорема 16.1. *Всякая квадратная матрица A подобна жордановой матрице J , жордановы блоки которой однозначно определяются видом A .*

Жорданова матрица J , подобная A , не является вполне однозначной, так как порядок расположения блоков произволен. Это следует из того факта, что если строки и столбцы матрицы подвергаются одной и той же перестановке, то новая матрица будет подобна исходной.

Пусть матрица

$$J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_s, \quad s \leq n, \quad (16.4)$$

где

$$J_k = \lambda_k I_k + H_k, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (16.5)$$

является жордановой формой матрицы A . Если $\varphi(\lambda)$ — характеристический многочлен A , то он является также характеристическим многочленом для J , так как характеристический многочлен инвариантен относительно преобразования подобия. Характеристический многочлен матрицы J , очевидно, является произведением характеристических многочленов $\varphi_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, s$, жордановых блоков J_k , каждый из которых равен

$$\varphi_k(\lambda) = (\lambda_k - \lambda)^{m_k}, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (16.6)$$

где m_k — порядок J_k . Из этого следует, что λ_k являются собственными значениями A . Собственные значения λ_k , появляющиеся

¹⁾ В отечественной литературе часто употребляется термин *жорданова нормальная форма* матрицы, или просто *жорданова форма* матрицы. В дальнейшем при переводе использовались все эти термины. — *Прим. перев.*

в различных блоках, вообще говоря, не обязаны быть различными. Таким образом, числа m_k не следует путать с кратностями корней λ_k .

Полиномы $\varphi_k(\lambda)$ в (16.6) называются *элементарными делителями* A в поле комплексных чисел. Сказать, что некоторая матрица подобна диагональной, все равно что сказать, что все ее элементарные делители линейны. Сюда относится, в частности, случай, когда все собственные значения различны

Задача 16.1. Если H — матрица сдвига четвертого порядка, то каковы элементарные делители матриц H^2 , H^3 , H^4 ?

В применении к дифференциальным уравнениям часто бывает полезно следующее простое предложение:

Теорема 16.2. В обозначениях теоремы 16.1 матрица A подобна

$$(\lambda_1 I_1 + c_1 H_1) \oplus (\lambda_2 I_2 + c_2 H_2) \oplus \dots \oplus (\lambda_s I_s + c_s H_s),$$

где c_k , $k=1, 2, \dots, s$, — произвольные отличные от нуля константы.

Доказательство. Положим $D_k = \text{diag}(1, c_k, c_k^2, \dots, c_k^{m_k-1})$, и пусть

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_s.$$

Тогда $D^{-1}JD$ представляет собой именно ту матрицу, о которой говорится в теореме.

Задача 16.2. Доказать, что собственные значения матрицы C , имеющей вид

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{s1} & C_{s2} & C_{s3} & \dots & C_{s, s-1} & C_{ss} \end{pmatrix}$$

где C_{jj} — квадратные матрицы, те же самые и имеют ту же кратность, что и собственные значения матрицы $E = C_{11} \oplus C_{22} \oplus \dots \oplus C_{ss}$. (Однако C и E , вообще говоря, не подобны.)

16.2. Инвариантные множители

Характеристический полином можно разложить на полиномиальные множители иного типа, на так называемые *инвариантные множители* A . С точки зрения настоящего изложения проще всего определить их следующим образом.

Для каждого кратного собственного значения возьмем элементарный делитель наивысшей степени. Произведение таких элементарных делителей есть полином $\chi_1(\lambda)$, который называется первым инвариантным множителем A . Повторим процедуру с оставшимися элементарными делителями. Получим второй инвариантный множитель $\chi_2(\lambda)$ и т. д. Число t полученных таким образом инвариантных множителей меньше или равно s . По причине, которая скоро разъяснится, последовательность n полиномов

$$\chi_1(\lambda), \chi_2(\lambda), \dots, \chi_t(\lambda), 1, 1, \dots, 1 \quad (16.7)$$

обычно называют упорядоченным множеством всех инвариантных множителей A . Заметим, что каждый полином этой последовательности является делителем предшествующего полинома.

Задача 16.3. Показать, что множество инвариантных множителей A однозначно определяет элементарные делители.

Инвариантные множители играют важную роль, поскольку, как доказывается в теории матриц, они могут быть вычислены путем рациональных операций над элементами A , тогда как вычисление элементарных делителей требует решения характеристического уравнения.

Первый инвариантный множитель называется также *минимальным полиномом* A . В случае, если каждое кратное собственное значение A встречается только в одном жордановом блоке, и только в этом случае, минимальный полином равен характеристическому полиному. Это очевидным образом следует из определения $\chi_1(\lambda)$.

Фактическое приведение матрицы A при помощи преобразования подобия к жордановой канонической форме обычно является утомительной выкладкой. Нахождение инвариантных множителей, наоборот, сравнительно просто. Чтобы это пояснить, нужно ввести еще некоторые понятия.

Рассмотрим квадратную матрицу $M(\lambda)$, элементы которой являются полиномами по λ с комплексными коэффициентами (определение и соответствующие теоремы можно распространить и на прямоугольные матрицы). Тогда *элементарным преобразованием* $M(\lambda)$ называется каждая из следующих операций:

- (1) умножение строки (столбца) на отличное от нуля число;
- (2) замена некоторой строки (столбца) $v(\lambda)$ матрицы $M(\lambda)$ на $v(\lambda) + b(\lambda)\omega(\lambda)$, где $b(\lambda)$ — полином, а $\omega(\lambda)$ — другая строка (столбец) матрицы $M(\lambda)$;
- (3) перестановка двух строк (столбцов).

Две полиномиальные матрицы называются *эквивалентными*, если одна может быть преобразована в другую при помощи конечной последовательности элементарных преобразований.

Теорема 16.3. *Всякая полиномиальная матрица эквивалентна диагональной полиномиальной матрице.*

Можно показать, что диагональные элементы диагональной матрицы, эквивалентной $M(\lambda)$, определяются однозначно точностью до порядка их расположения и до произвольных постоянных множителей. Если они нормированы так, что их старшие коэффициенты равны единице, то они называются *инвариантными полиномами матрицы $M(\lambda)$* .

Эквивалентные полиномиальные матрицы имеют одинаковые инвариантные полиномы в смысле данного здесь определения этого понятия. Этим и объясняется термин «инвариантный».

Теорема 16.4. *Инвариантные полиномы матрицы $A - \lambda I$ являются инвариантными множителями A .*

Согласно этой теореме, инвариантные множители A могут быть вычислены в результате диагонализации матрицы $A - \lambda I$ путем последовательности элементарных преобразований.

Пример. Пусть $A = H$ — матрица сдвига. Тогда

$$A - \lambda I = H - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & & & 0 \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & -\lambda & 1 \\ 0 & & & & & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Начиная с последнего столбца, добавим последовательно каждый столбец, умноженный на λ , к предыдущему. Получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\lambda^n & -\lambda^{n-1} & -\lambda^{n-2} & \dots & -\lambda^2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Далее, умножая j -ю строку ($j=1, 2, \dots, n-1$) на λ^{n-j} , прибавим ее к последней строке. Наконец, умножим первый столбец на -1 и переставим его последним. Это приводит к матрице

$$\text{diag}(1, 1, \dots, 1, \lambda^n),$$

элементы которой представляют собой инвариантные множители H , расположенные в порядке, обратном порядку (16.7).

Инвариантные полиномы матрицы $M(\lambda)$ обладают еще другими важными свойствами, которые часто используются для их определения. Эти свойства можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 16.5. *Обозначим через $d_j(\lambda)$, $j=1, 2, \dots, n$, полином с единичным старшим коэффициентом, являющийся наибольшим общим делителем всех миноров порядка j полиномиальной матрицы $M(\lambda)$. Положим $d_0 \equiv 1$. Тогда частные*

$$d_{n-j+1}(\lambda)/d_{n-j}(\lambda), \quad j=1, 2, \dots, n,$$

будут полиномами и именно инвариантными полиномами $M(\lambda)$.

Если эту теорему применить к матрице $M(\lambda) = A - \lambda I$, то получим еще один алгоритм для вычисления инвариантных множителей A .

Задача 16.4. Найти инвариантные множители матрицы сдвига, опираясь на теорему 16.5.

Полиномы $d_j(\lambda)$ также инвариантны относительно элементарных преобразований. Это является простым следствием свойств элементарных преобразований или может быть получено из теоремы 16.5 и свойства инвариантности инвариантных множителей.

16.3. Структура матрицы e^{xA}

Обозначим через P матрицу, обладающую тем свойством, что $P^{-1}AP = J$. Тогда, согласно формуле (3.13),

$$e^{xA} = P e^{xJ} P^{-1}. \quad (16.8)$$

В целях анализа e^{xJ} заметим, что

$$e^{xJ} = e^{x\lambda_1 I_1 + xH_1} \oplus e^{x\lambda_2 I_2 + xH_2} \oplus \dots \oplus e^{x\lambda_s I_s + xH_s},$$

а

$$e^{x\lambda_k I_k + xH_k} = e^{x\lambda_k} e^{xH_k}.$$

Далее,

$$e^{xH_k} = I_k + \frac{1}{1!} xH_k + \dots + \frac{1}{(m_k + 1)!} x^{m_k + 1} H_k^{m_k + 1},$$

поскольку $H_k^m = 0$ для $m \geq m_k$. Благодаря специальной форме матрицы H_k элементы матрицы e^{xH_k} имеют вид

$$(e^{xH_k})_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{для } \mu > \nu, \\ 1 & \text{для } \mu = \nu, \\ \frac{1}{\rho!} x^\rho & \text{для } \nu - \mu = \rho > 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к (16.8), можно видеть, что элементы e^{xA} являются линейными комбинациями $e^{x\lambda_j}$ с полиномиальными по x коэффициентами.

Этот результат позволяет более детально продемонстрировать структуру некоторых найденных выше решений дифференциальных уравнений. Например, в разд. 3.3 была построена очень простая фундаментальная система в окрестности изолированной особой точки матрицы дифференциального уравнения в предположении, что собственные значения циклической матрицы различны. Если это предположение отбросить, то формула (3.16) заменяется на

$$W(x) = Q(x)x', \quad (16.9)$$

где J — жорданова форма матрицы $\frac{1}{2\pi i} \log C$ из (3.15). Пусть J_1 — первый жорданов блок матрицы J . Тогда несложное вычисление, основанное на формулах этого раздела, показывает, что первые m_1 столбцов $W(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} w_1(x) &= q_1(x)x^{\lambda_1}, \\ w_2(x) &= ((\log x)q_1(x) + q_2(x))x^{\lambda_1}, \\ &\dots \dots \dots (16.10) \\ w_{m_1}(x) &= \left(\frac{(\log x)^{m_1-1}}{(m_1-1)!} q_1(x) + \frac{(\log x)^{m_1-2}}{(m_1-2)!} q_2(x) + \dots + q_{m_1}(x) \right) x^{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Остальные жордановы блоки порождают аналогичные группы векторных решений дифференциального уравнения. Это служит обобщением формулы (3.16) на случай, когда циклическая матрица не является подобной диагональной матрице.

17. Решения в окрестности регулярно особой точки. Общий случай

17.1. Голоморфные коэффициенты

Вернемся к дифференциальному уравнению (4.1)

$$xY' = A(x)Y,$$

где $A(x)$ голоморфна при $x=0$. Пусть T — постоянная матрица, такая, что $J = T^{-1}A(0)T$ является жордановой матрицей. Если никакие два собственных значения $A(0)$ не отличаются на целое число, то рассуждения разд. 5.2 приводят к полному конструктивному решению дифференциального уравнения. В общем случае мы начнем исследования с перехода к дифференциальному уравнению

$$xZ' = B(x)Z \quad (17.1)$$

при помощи преобразования с постоянными коэффициентами

$$Y = TZ, \quad (17.2)$$

такого, что

$$B(0) = J. \quad (17.3)$$

Затем, обобщая идею разд. 5.2, будем конструировать преобразование, которое уменьшает на единицу одно собственное значение главной матрицы, оставляя прочие неизменными.

Если λ является собственным значением J , превосходящим некоторое другое на положительное целое, то можно, не теряя общности, предположить, что жордановы блоки, соответствующие этому собственному значению, расположены последними в матрице J . Если p — кратность λ , то, расчлняя $B(x)$ вдоль $(n-p)$ -й строки и $(n-p)$ -го столбца, находим

$$B(x) = \begin{pmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} + x\Psi_{11}(x) & x\Psi_{12}(x) \\ x\Psi_{21}(x) & J_{22} + x\Psi_{22}(x) \end{pmatrix},$$

где матрицы $\Psi_{jk}(x)$, $j, k=1, 2$, голоморфны при $x=0$, а J_{11} и J_{22} — жордановы матрицы, вторая из которых имеет по диагонали одно и то же собственное значение λ .

Далее применим к (17.1) срезающее преобразование

$$Z = S(x)W,$$

где

$$S(x) = \begin{pmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & xI_p \end{pmatrix}$$

(I_μ — единичная матрица порядка μ). Матрица $C(x)$ в преобразованном дифференциальном уравнении

$$xW' = C(x)W$$

имеет, как показывают несложные вычисления, вид

$$\begin{aligned} C(x) &= S^{-1}(x)B(x)S(x) - xS^{-1}(x)S'(x) = \\ &= \begin{pmatrix} J_{11} + x\Psi_{11}(x) & x^2\Psi_{12}(x) \\ \Psi_{21}(x) & J_{22} - I_p + x\Psi_{22}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Применяя к матрице $C(0)$ правило, установленное в задаче 16.1, заключаем, что эта матрица имеет те же собственные значения, что и J , за исключением того, что последнее собственное значение уменьшилось на единицу.

В результате конечного числа таких парных преобразований, одному из которых отвечает постоянная, а другому — срезающая матрица, дифференциальное уравнение сводится к та-

кому, в котором никакие собственные значения главной матрицы не различаются между собой на целое число. Теперь уже можно применить теорему 5.1, и, таким образом, получается, что теорема 5.6 справедлива для систем любого, а не только второго порядка.

17.2. Матрица коэффициентов, имеющая асимптотическое разложение

В нижеследующих приложениях нам встретятся дифференциальные уравнения вида $xY' = A(x)Y$ или $Y' = A(x)Y$, в которых степенное разложение для $A(x)$ не является сходящимся, а только асимптотическим, когда $x \rightarrow 0$ в некотором секторе S . Рассмотрим сейчас уравнение

$$xY' = A(x)Y, \quad (17.4)$$

где

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r, \quad x \rightarrow 0, \quad x \in S, \quad A_0 \neq 0. \quad (17.5)$$

Если множитель x в левой части отсутствует, то задача может быть решена тем же методом, но со значительными упрощениями.

Все формальные выкладки можно без изменения перенести из гл. II, но теорема 5.3 теперь уже неприменима. В соответствии с этим вместо теоремы 5.6 и ее обобщения на произвольный порядок n мы имеем более слабое утверждение о том, что (17.4) формально удовлетворяется выражением вида

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r \right) x^G, \quad (17.6)$$

или, если преобразовать дифференциальное уравнение, полагая $Y = Px^G$, — о том, что уравнение

$$xP' = A(x)P - PG \quad (17.7)$$

относительно P имеет в качестве формального решения степенной ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r.$$

Покажем, что этот степенной ряд является в S асимптотическим представлением истинного решения (17.7). Это непосредственно вытекает из следующей теоремы:

Теорема 17.1. Пусть

$$xy' = F(x)y \quad (17.8)$$

есть N -мерное векторное дифференциальное уравнение, матрица коэффициентов которого имеет асимптотическое разложение

$$F(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} F_r x^r, \quad x \rightarrow 0, \quad x \in S, \quad (17.9)$$

в некотором секторе S и голоморфна в S для $|x| \leq x_0$. Тогда если ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r x^r$$

формально удовлетворяет уравнению, то существует решение $y = u(x)$ этого уравнения, для которого

$$u(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} u_r x^r, \quad x \rightarrow 0, \quad x \in S. \quad (17.10)$$

Доказательство. Предположим, что $F_0 \neq 0$. Случай $F_0 = 0$ можно рассмотреть, внося простые изменения в доказательство, и мы это опускаем (см. задачу 17.5). Согласно теореме 9.3, существует вектор-функция $\hat{u}(x)$, имеющая в S асимптотическое представление

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r x^r.$$

Следовательно, $x\hat{u}'(x) - F(x)\hat{u}(x) \sim 0$ в S .

Полагая

$$y = z + \hat{u}(x), \quad (17.11)$$

преобразуем дифференциальное уравнение в

$$xz' = F_0 z + (a(x) + x\tilde{F}(x)z). \quad (17.12)$$

Здесь $a(x) = -x\hat{u}'(x) + F(x)\hat{u}(x) \sim 0$, а $\tilde{F}(x) = x^{-1}(F(x) - F_0)$. Теперь нужно убедиться, что (17.12) обладает решением, асимптотически равным нулю. Дифференциальное уравнение было записано в форме (17.12) в порядке подготовки к следующему шагу, состоящему в том, чтобы свести дифференциальное уравнение к интегральному, считая последний член в правой части как бы известной функцией. Так как дифференциальное уравнение $xV' = F_0 V$ имеет фундаментальное матричное решение $V = x^{F_0}$, формула вариации постоянных приводит к интегральному уравнению

$$z(x) = x^{F_0} \int_0^x t^{-F_0} (a(t)t^{-1} + \tilde{F}(t)z(t)) dt \quad (17.13)$$

для $z(x)$. Всякое непрерывное решение уравнения (17.13) удовлетворяет (17.12).

Как и при доказательстве теоремы 12.1, построим решение уравнения (17.13) методом итераций. Положим $z_0(x) \equiv 0$ и определим $z_{r+1}(x)$ рекуррентным образом как значение правой части (17.13), в которой $z(t)$ положено равным $z_r(t)$. Непосредственно находим

$$\|z_1(x)\| \leq c|x|^m, \quad x \in S, \quad |x| \leq x_0, \quad (17.14)$$

так как $a(x) \sim 0$ в S . Номер m можно считать произвольным, но константа c , вообще говоря, зависит от m .

Чтобы быть уверенными, что $Z_r(x)$ существует и голоморфна в S , выберем m столь большим, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{m-F_0} = 0. \quad (17.15)$$

Доказательство того, что это действительно возможно, предлагается в качестве упражнения (см. задачу 17.1). Заметим, кроме того, что тождество

$$(ab)^M = a^M b^M \quad (17.16)$$

справедливо для любых чисел a и b и любой матрицы M (задача 17.3).

Следовательно, если $\Phi(x)$ — голоморфная вектор-функция, для которой

$$\|\Phi(x)\| \leq k|x|^m, \quad |x| \leq x_0, \quad x \in S, \quad k — константа,$$

то

$$\begin{aligned} \left\| x^{F_0} \int_0^x t^{-F_0} \tilde{F}(t) \Phi(t) dt \right\| &= \left\| x \int_0^1 \rho^{-F_0} \tilde{F}(x\rho) \Phi(x\rho) d\rho \right\| \leq \\ &\leq k|x|^{m+1} \int_0^1 \|\rho^{m-F_0} \tilde{F}(x\rho)\| d\rho \leq k k_1 |x|^{m+1}, \end{aligned} \quad (17.17)$$

где постоянная k_1 зависит от m и от $F(x)$, но не от $\Phi(x)$.

Основанная на этом неравенстве простая индукция показывает, что соотношение

$$z_{r+1}(x) - z_r(x) = x^{F_0} \int_0^x t^{-F_0} \tilde{F}(t) [z_r(t) - z_{r-1}(t)] dt, \quad r > 0, \quad (17.18)$$

вместе с (17.14) приводит к неравенствам

$$\|z_{r+1} - z_r\| \leq c k_1^r |x|^{m+r}, \quad r \geq 0, \quad |x| \leq x_0, \quad x \in S, \quad (17.19)$$

и

$$\|z_r\| \leq \frac{c|x|^m}{1 - k_1|x|}, \quad r \geq 0, \quad |x| \leq x_0 < \frac{1}{k_1}, \quad x \in S. \quad (17.20)$$

Соответствующие рассуждения сходны с теми, которые проводились при доказательстве теоремы 12.1 в разд. 14.5, и поэтому мы их опускаем (см. задачу 17.4).

Из неравенств (17.19) и (17.20) сразу же вытекает, если воспользоваться стандартными приемами итерационного метода Пикара, что последовательность $z_r(x)$ при $r \rightarrow \infty$ стремится равномерно в S к голоморфной предельной функции $z(x)$, что $z(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (17.13) и что $z(x) \sim 0$ в S , поскольку m произвольно велико. Этим и завершается доказательство теоремы 17.1.

Как следствие теоремы теперь можно получить ответ на вопрос об асимптотической форме решения уравнения (17.4), который поднимался в начале этого раздела.

Теорема 17.2. Пусть $A(x)$ — матрица, голоморфная во всех точках сектора S , для которых $0 < |x| \leq x_0$, и имеющая в этом секторе асимптотическое разложение

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r, \quad x \rightarrow 0, \quad x \in S.$$

Тогда дифференциальное уравнение

$$xY' = A(x)Y$$

обладает фундаментальным матричным решением вида

$$Y(x) = P(x)x^G,$$

где G — постоянная матрица, а $P(x)$ может быть асимптотически представлена степенным рядом, когда $x \rightarrow 0$ в S . Если, в частности, $A_0 = 0$, то $G = 0$, а $P(0) = I$.

При последующем применении этой теоремы особая точка $A(x)$ часто оказывается не в нуле, а на бесконечности. Дифференциальное уравнение тогда имеет вид $xY' = A(x)Y$ или даже $x^2Y' = A(x)Y$, где

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}.$$

В последнем случае опять-таки $G = 0$.

Задача 17.1. Доказать, что если A — квадратная матрица, то существует константа m , такая, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{A+ml} = 0$$

в предположении, что при переходе к пределу $\arg x$ остается ограниченным.

Задача 17.2. Доказать следующее более тонкое утверждение: пусть λ — собственное значение матрицы A , имеющее наименьшую действительную часть. Тогда для любых положительных ε , θ и x_0 существует постоянная c , такая, что

$$\|x^A\| \leq c|x|^{\operatorname{Re} \lambda - \varepsilon} \quad \text{для } |x| \leq x_0, \quad \arg x \leq \theta.$$

Задача 17.3. Доказать формулу (17.16).

Задача 17.4. Доказать неравенства (17.19) и (17.20).

Задача 17.5. Доказать теорему 17.1 для случая $F_0 = 0$.

18. Доказательство теоремы 12.1. Общий случай

Изменения в доказательстве теоремы 12.1 в том случае, когда главная матрица $A(\infty)$, соответствующая $A(x)$, имеет кратные корни, не затрагивают существа рассуждений § 14. Различие проистекает из того факта, что жорданова форма Λ , соответствующая $A(\infty)$, может оказаться недиагональной. Вообще говоря, мы будем иметь

$$\Lambda = D + H,$$

где D — диагональная матрица, образованная собственными значениями $A(\infty)$, а

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_s,$$

прямая сумма матриц сдвига. Заметим, что D и H коммутируют.

При таком Λ первое отклонение от хода рассуждений § 14 происходит в конце разд. 14.3. Вместо матрицы

$$\exp[(x^{q+1} - t^{q+1})\Lambda/(q+1)],$$

диагональные элементы которой представляют собой $\exp[(x^{q+1} - t^{q+1})\lambda_j/(q+1)]$, появляется матрица

$$\exp[(x^{q+1} - t^{q+1})D/(q+1)].$$

Помимо этого буквально все сказанное в разд. 14.3 остается справедливым также и в общем случае.

Однако доказательство — не заключение — леммы 14.2 должно быть изменено. Пусть $\Delta(\xi)$ — множество путей $\delta_j(\xi)$. Вводя переменные ξ и τ вместо x и t в правую часть (14.25), запишем эту формулу в виде

$$\Psi(x) = \frac{1}{q+1} \int_{\Delta(\xi)} \exp[(\xi - \tau)D/(q+1)] \times \\ \times \exp[(\xi - \tau)H/(q+1)] \chi(t) d\tau. \quad (18.1)$$

Согласно лемме 14.1, норма подинтегрального выражения не превосходит

$$e^{-|\xi-\tau|\lambda_0\mu} \|\exp[(\xi-\tau)H/(q+1)]\| \|\chi(t)\|. \quad (18.2)$$

Далее, $\exp[(\xi-\tau)H/(q+1)]$ представляет собой полином по $\xi-\tau$ (см. разд. 16.3). Следовательно, найдется константа c , такая, что выражение (18.2) меньше, чем

$$ce^{-|\xi-\tau|\lambda_0\mu^*} \|\chi(t)\|,$$

где μ^* — постоянная, заключенная в интервале $0 < \mu^* < \mu$.

Число c зависит от μ^* . Таким образом, мы вновь получаем такое же неравенство, но только множитель $1/(q+1)$ заменяется множителем $c/(q+1)$ (вообще говоря, большим), а μ — положительной (вообще говоря, меньшей) константой μ^* .

Начиная с этого момента доказательство теоремы 12.1 буквально такое же, как в § 14.

19. Асимптотическое решение в окрестности иррегулярно особой точки. Общий случай

19.1. Сведение к случаю нильпотентной главной матрицы

Путем повторного применения теоремы 12.2 дифференциальное уравнение

$$x^{-q}Y' = A(x)Y, \quad q \geq 0, \quad (19.1)$$

может быть сведено к конечной последовательности дифференциальных уравнений той же формы, в каждом из которых главный член разложения $A(x)$ имеет только одно собственное значение соответствующей кратности. Предположим, что (19.1) уже является результатом такой редукции, и можно считать, что

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S, \quad (19.2)$$

где главная матрица A_0 имеет только одинаковые собственные значения. Если $A(x)$ голоморфна при $x = \infty$, то в качестве сектора S можно взять любой сектор с центральным углом, меньшим $\pi/(q+1)$. Как будет сейчас показано, можно, не теряя общности, считать A_0 нильпотентной матрицей, т. е. считать ее единственное собственное значение соответствующей кратности нулевым. Действительно, если λ является собственным значением A_0 , то преобразование

$$Y = Z \exp[\lambda x^{q+1}/(q+1)] \quad (19.3)$$

переводит (19.1) в

$$x^{-q}Z' = (A(x) - \lambda)Z.$$

Главный член матрицы $A(x) - \lambda$ есть $A_0 - \lambda$, т. е. нильпотентная матрица.

Более того, предположим, что нильпотентная матрица A_0 имеет жорданову форму. Это также не ограничивает общности, так как этого всегда можно достичь линейным преобразованием с постоянными коэффициентами.

Заметим, наконец, что если все жордановы блоки нильпотентной матрицы A_0 имеют размерность 1, то $A_0 = 0$ и задача сводится к задаче с меньшим значением q в результате сокращения уравнения на x^{-1} . Это либо приводит к новой задаче того же типа, но с $A_0 \neq 0$, либо, если новое q отрицательно, соответствующая задача уже решена в разд. 17.2. Таким образом, можно предположить, что по крайней мере один из жордановых блоков A_0 имеет размерность, большую единицы.

Итак, A_0 можно считать прямой суммой матриц сдвига

$$A_0 = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_s, \quad (19.4)$$

где по крайней мере одна из матриц H_k имеет размерность, большую единицы.

19.2. Дальнейшее упрощение при помощи степенных рядов

Метод упрощения, который привел к доказательству теоремы 11.1, можно развить несколько дальше по сравнению с § 11. Как и прежде, преобразуем (19.1) при помощи (11.1) и (11.2) и придем к рекуррентным формулам (11.8) и (11.9). Положим опять

$$B_0 = A_0, \quad P_0 = I \quad (19.5)$$

и запишем формулы (11.9) в виде (11.11)

$$A_0 P_r - P_r A_0 = B_r - K_r, \quad r > 0 \quad (19.6)$$

(обозначения (11.11) приходится изменить, поскольку H_r теперь означает матрицу сдвига).

Начиная с этого момента нужно все рассматривать по-новому, так как A_0 имеет лишь одно собственное значение нуль. Теперь уже невозможно выбрать все B_r , $r > 0$, равными нулю либо блочно-диагональными.

Разобьем каждое уравнение (19.6) на блоки такого же порядка, как в представлении (19.4) для A_0 , и обозначим блоки, соответствующие P_r , через P_r^{jk} и т. д., $j, k = 1, 2, \dots, s$. Тогда каждое из соотношений (19.6) эквивалентно s^2 соотношениям

$$H_j P_r^{jk} - P_r^{jk} H_k = B_r^{jk} - K_r^{jk}, \quad j, k = 1, \dots, s, \quad r > 0. \quad (19.7)$$

Так как, согласно теореме 4.1, соответствующие однородные уравнения имеют нетривиальные решения, то каждое из уравнений (19.7) разрешимо, только если матрицы B_r^{jk} удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Эти условия даются следующей леммой:

Лемма 19.1. Пусть N и K — матрицы сдвига порядка h и k соответственно. Пусть M — матрица из h строк и k столбцов, первые $h-1$ строк которой являются заданными постоянными векторами, а элементы последней строки $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ можно менять произвольно. Тогда величины $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ можно однозначно задать так, чтобы уравнение

$$NX - XK = M \quad (19.8)$$

относительно матрицы X порядка $h \times k$ было разрешимым.

Доказательство. Пусть $X = \{x_{ij}\}$. Тогда

$$NX - XK = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2k} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{h1} & x_{h2} & x_{h3} & \dots & x_{hk} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1, k-1} \\ 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2, k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_{h-1, 1} & x_{h-1, 2} & x_{h-1, 3} & \dots & x_{h-1, k-1} \\ 0 & x_{h1} & x_{h2} & x_{h3} & \dots & x_{h, k-1} \end{pmatrix}.$$

Из hk скалярных уравнений (19.8) разрешим сначала те, которые соответствуют первым $h-1$ элементам первого столбца, путем надлежащего выбора $x_{21}, x_{31}, \dots, x_{h1}$. Эти величины определяются однозначно. Тем самым определяются последние $h-1$ элементов во втором столбце XK . А тогда элементы $x_{32}, x_{42}, \dots, x_{h2}$ второго столбца NX можно однозначно вычислить из (19.8). Продолжая таким образом, можно удовлетворить всем уравнениям (19.8), которые соответствуют элементам, расположенным на главной диагонали и ниже, кроме элементов последней строки. Элементы последней строки $NX - XK$ при этом примут некоторые значения, которые и послужат определением $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Далее выберем $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1, h-1}$ произвольно и определим оставшиеся элементы в первой строке NX из соответствующих уравнений (19.8). Этим завершается определение элементов вто-

рой строки HK , а через них можно вычислить оставшиеся элементы второй строки HX и т. д., пока не будут решены все hk уравнений. Этим заканчивается доказательство леммы.

Применим теперь лемму к уравнению (19.7). Так как все строки B_r^{jk} , кроме последней, можно задать произвольно, то выберем их равными нулю. Ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r},$$

полученный в результате последовательного решения для $r=1, 2, \dots$ всех уравнений (19.7), будет, вообще говоря, расходящимся, но из теоремы 9.3 известно, что он является асимптотическим представлением некоторой матричной функции $P(x)$, голоморфной в S для достаточно больших x . Тем самым доказана следующая

Лемма 19.2. Существует матричная функция $P(x)$, голоморфная в S для $|x| > x_0$, имеющая в этой области асимптотическое представление

$$P(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, x \in S, \quad (19.9)$$

и такая, что преобразование $Y = P(x)Z$ переводит дифференциальное уравнение (19.1), в котором главная матрица $A(\infty)$ нильпотентна, в уравнение

$$x^{-q}Z' = B(x)Z, \quad (19.10)$$

где $B(x)$ обладает следующими свойствами:

- (1) $B(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} B_r x^{-r}$, $x \rightarrow \infty$, $x \in S$;
- (2) $B_0 = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_s$ (H_j — матрицы сдвига);
- (3) отличные от нуля элементы B_r , $r > 0$, имеются только в строках, соответствующих последним строкам блоков H_k , $k=1, 2, \dots, s$.

Заметим, что даже если во всех матрицах B_r некоторая (одна и та же для всех r) строка имеет только нулевые элементы, то это еще не значит, что матрица $B(x)$ имеет в этой строке нулевые элементы. Можно лишь сделать заключение о том, что соответствующие элементы асимптотически равны нулю, когда $x \rightarrow \infty$ в S .

19.3. Срезающее преобразование

Чтобы не вводить новых обозначений, предположим опять, что исходное дифференциальное уравнение (19.1) уже обладает свойствами уравнения (19.10), о котором говорится в лемме 19.2.

Опыт, накопленный при рассмотрении регулярных особенностей, подсказывает, что и в настоящем случае использование срезающего преобразования может привести к дальнейшему упрощению задачи. И это действительно так, но срезающее преобразование в этом случае должно содержать дробные степени x . Это подтверждается многими хорошо известными примерами из классического анализа (см., например, задачу, приводимую ниже).

Задача 19.1. (а) Показать, что система первого порядка, соответствующая скалярному уравнению $u'' + xu = 0$, так называемому уравнению Эйри, имеет при $x = \infty$ особенность как раз такого типа, какие изучаются в настоящем разделе.

(б) Показать, что функции $x^{1/2} H_{1/3}^{(j)} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют уравнению Эйри. Здесь $H_{1/3}^{(j)}(z)$ — функция Ханкеля порядка $1/3$. (Название «уравнение Эйри» употребляется как для уравнения $u'' + xu = 0$, так и для уравнения $u'' - xu = 0$. Эти уравнения, очевидно, эквивалентны.)

Эти предварительные рассуждения служат мотивировкой следующей процедуры.

При помощи подстановки

$$Y = S(x)Z, \quad (19.11)$$

где

$$S(x) = \text{diag}(1, x^{-g}, x^{-2g}, \dots, x^{-(n-1)g}) \quad (19.12)$$

содержит пока что неопределенную положительную константу g , преобразуем (19.1) в

$$x^{-g}Z' = B(x)Z. \quad (19.13)$$

Главный член матрицы $B(x) = S^{-1}(x)A(x)S(x) - x^{-g}S^{-1}(x)S'(x)$ зависит от значения g .

Чтобы изучить эту зависимость более обстоятельно, запишем элементы $A(x)$, не являющиеся асимптотически равными нулю, в виде

$$a_{jk}(x) = x^{-\alpha_{jk}} \dot{a}_{jk}(x), \quad \dot{a}_{jk}(\infty) \neq 0, \quad \alpha_{jk} \geq 0. \quad (19.14)$$

Так как A_0 представляет собой ненулевую жорданову матрицу, то по крайней мере одно $\alpha_{j, j+1}$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, является

нулем, а все α_{jk} , где $k \neq j+1$, целые положительные. Соответствующие элементы $B(x)$ имеют вид

$$b_{jk}(x) = x^{-\alpha_{jk} + (j-k)g} a_{jk}^*(x) + \delta_{jk}(j-1)gx^{-q-1}, \quad (19.15)$$

где через δ_{jk} обозначены элементы единичной матрицы. Если $a_{jk}(x) \sim 0$, то и $b_{jk}(x) \sim 0$, за исключением случая $j=k \neq 1$, когда $b_{jj}(x) = x^{-q-1}b_{jj}^*(x)$, $b_{jj}^*(\infty) \neq 0$.

Элементы b_{jk} , не являющиеся асимптотически равными нулю, могут быть записаны в виде

$$b_{jk}(x) = x^{-\beta_{jk}(g)} b_{jk}^*(x), \quad b_{jk}^*(\infty) \neq 0;$$

$\beta_{jk}(g)$ представляют собой линейные функции с целочисленными коэффициентами. Они распадаются на следующие четыре класса:

$$(1) \quad k > j+1:$$

$$\beta_{jk}(g) = \alpha_{jk} + (k-j)g;$$

$$(2) \quad k = j+1:$$

$$\beta_{j, j+1}(g) = \alpha_{j, j+1} + g$$

и $\beta_{j, j+1}(g) = g$ по крайней мере для одного j ;

$$(3) \quad k = j:$$

$\beta_{jj}(g)$ не зависят от g и положительны, т. е. $\beta_{jj}(g) = \beta_{jj} \geq 1$.

Точнее, $\beta_{11} = \alpha_{11}$ для $j=1$, если α_{11} определено. В противном случае $b_{11}(x) \sim 0$;

$$\beta_{jj} = \begin{cases} \min[\alpha_{jj}, (q+1)] & \text{для } j > 1, \text{ если } \alpha_{jj} \text{ определено,} \\ q+1 & \text{для } j > 1, \text{ если } \alpha_{jj}(x) \sim 0. \end{cases}$$

Заметим, что β_{jj} определены для всех $j > 1$, даже если α_{jj} не определены (т. е. если $\alpha_{jj}(x) \sim 0$);

$$(4) \quad k > j:$$

$$\beta_{jk}(g) = \alpha_{jk} - (j-k)g, \quad \alpha_{jk} > 0.$$

Нашей целью является определение показателя g таким образом, чтобы в результирующем дифференциальном уравнении после умножения на соответствующую степень x главная матрица была отличной от A_0 . Это построение легко пояснить графически. Рассмотрим первый квадрант прямоугольной системы координат с абсциссой g и ординатой β , а в нем множество прямых линий $\beta = \beta_{jk}(g)$. Среди прямых, соответствующих $k > j$, имеется, в частности, линия $\beta = g$. Все прочие линии при $k > j$ лежат выше нее (в первом квадранте). Линии $\beta = \beta_{jk}(g)$ при $k \leq j$ имеют неположительный наклон и пересекают ось β с положительной стороны. Следовательно, найдется наименьшее

значение абсциссы $g_0 > 0$, при котором одна из линий этой последней группы пересекает линию $\beta = g$. Соответствующая ордината имеет также значение g_0 .

Положим в нашем срезающем преобразовании $g = g_0$. Заметим, что g_0 рационально, хотя не обязательно является целым. Умножим дифференциальное уравнение (19.13) на x^{g_0} . Матрица $x^{g_0}B(x)$, появляющаяся в правой части, будет обладать тем свойством, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in S}} x^{g_0}B(x) = B_0^*$$

существует и *отличен от* A_0 . Действительно, благодаря выбору g_0 матрица B_0^* имеет по крайней мере один ненулевой элемент на главной диагонали или ниже. Выше главной диагонали матрица совпадает с A_0 .

С этой целью и производилось срезающее преобразование. Полученное дифференциальное уравнение имеет вид

$$x^{-(q-g_0)}Z' = x^{g_0}B(x)Z. \quad (19.16)$$

Чтобы по-прежнему иметь дело только с целыми степенями независимого переменного, сделаем наряду со срезающим преобразованием замену независимого переменного

$$x = at^p, \quad \alpha = p^{1/(g_0 - q - 1)}, \quad (19.17)$$

где p — наименьшее положительное целое, такое, что $g_0 p$ является также целым числом. Это приведет к дифференциальному уравнению вида

$$t^{-h} \frac{dZ}{dt} = C(t)Z. \quad (19.18)$$

Показатель h равен

$$h = p(q + 1 - g_0) - 1, \quad (19.19)$$

а $C(t)$ имеет асимптотическое разложение

$$C(t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} C_r t^{-r}, \quad t \rightarrow \infty,$$

справедливое в секторе, получаемом из сектора S , о котором говорится в лемме 19.2, путем преобразования (19.17) (можно взять любую ветвь многозначной функции $x^{1/p}$). В матрице C_0 элементы, расположенные непосредственно над главной диагональю, совпадают с соответствующими элементами $A_0 = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_s$ благодаря выбору α в (19.17).

Если $h < 0$, то можно применить теорему 17.2 и задача решена.

Если $h \geq 0$, то матрица C_0 будет, как правило, иметь не менее двух различных собственных значений и тогда задача сводится к конечной последовательности задач более низкого порядка применением теоремы 12.2.

Однако C_0 может иметь, так же как и A_0 , только одно собственное значение. Если это так, то необходимо более тщательно исследовать структуру C_0 .

Задача 19.2. Применяя срезающее преобразование, свети систему

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} Y$$

к системе, которую можно решить методом гл. IV. Найти с точностью до двух членов включительно асимптотическое выражение при $x \rightarrow \infty$ для фундаментальной матрицы этой системы. Какое отношение имеет эта задача к задаче 19.1?

19.4. Срезающее преобразование. Продолжение

Чтобы описать C_0 более детально, напомним эту матрицу в расчлененной форме, соответствующей следующему разбиению A_0 :

$$A_0 = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_s.$$

Без потери общности можно предположить, что размерности m_j этих блоков расположены в порядке возрастания

$$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s.$$

Если через C_{jk} , $j, k = 1, 2, \dots, s$, обозначить соответствующие блоки C_0 , то из предыдущего раздела известно, что

$$C_{jk} = 0, \quad k > j,$$

и что элементы, лежащие непосредственно над главной диагональю C_{jj} , равны 1.

Лемма 19.3. Если все собственные значения матрицы C_0 равны одному и тому же λ , то либо C_0 нильпотентна и все $C_{jj} = H_j$, либо g_0 целое.

Доказательство. Если g_0 не есть целое, то оно не может равняться какому-либо из показателей β_{jj} , которые все целые и положительные. В этом случае C_0 имеет вдоль диагонали

только нули. Следовательно, след C_0 равен нулю, так что $\lambda=0$, т. е. C_0 нильпотентна. Так как собственные значения C_{jj} являются собственными значениями C_0 , согласно результату задачи 16.2, то все C_{jj} должны быть нильпотентными. С другой стороны, любой отличный от нуля элемент C_{jj} , находясь ниже главной диагонали, должен находиться в последней строке C_{jj} в силу предварительных преобразований, основанных на лемме 19.2. А такого не может случиться, как это следует из вида характеристического полинома C_{jj} , поскольку известно, что C_{jj} нильпотентна. Следовательно, $C_{jj}=H_j$ и лемма доказана.

Если число g_0 целое, то $h=q-g_0 < q$ и задача сводится к задаче более низкого ранга. Таким образом, метод блок-диагонализации § 12 в комбинации с методом срезания, описанным в этом разделе, понижает либо порядок, либо ранг задачи, за исключением того случая, когда в результате неоднократного повторения описанной процедуры мы приходим к задаче вида (19.18), где C_0 имеет только одно собственное значение, а g_0 в соответствующем срезающем преобразовании, приводящем к (19.18), не является целым. Покажем теперь, что если даже такая ситуация возникает, то цепочка последовательных преобразований, описанных выше, приводит задачу к форме, для которой удастся построить асимптотическое решение. Анализ этого случая доставляет больше всего хлопот. По лемме 19.3 его можно охарактеризовать следующим образом: C_0 нильпотентна и все C_{jj} являются матрицами сдвига H_j . Если C_0 обладает такими свойствами, то будем говорить, что задача (19.18) принадлежит к типу (E).

При рассмотрении задачи типа (E) поставим целью доказать, что если при повторении срезающего преобразования мы вновь приходим к задаче типа (E), то в результате конечного числа шагов должна получиться задача, в которой C_0 имеет только один жорданов блок, т. е. $s=1$. Сначала убедимся, что если $s=1$, то решение задачи типа (E) можно получить непосредственно. Матрица C_0 в этом случае сама является матрицей сдвига. Произведем еще одно срезающее преобразование. Если в этом преобразовании значение g_0 является целым, то ранг понижается и редукцию можно продолжить. Если g_0 — дробь и новая главная матрица имеет собственные значения, не все равные друг другу, то задача расщепляется на задачи более низкого порядка. Возможность, состоящая в том, что g_0 — дробь, а главная матрица имеет только одно собственное значение, исключается леммой 19.3, так как по построению новая главная матрица должна иметь отличные от нуля элементы на главной диагонали или ниже.

Начиная с этого момента будем предполагать, что имеет место случай (E) и что $s > 1$. Сравним матрицу

$$A_0 - \lambda I = \begin{pmatrix} H_1 - \lambda I & & & & 0 \\ & H_2 - \lambda I & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & H_s - \lambda I \end{pmatrix} \quad (19.20)$$

с матрицей

$$C_0 - \lambda I = \begin{pmatrix} H_1 - \lambda I & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ C_{21} & H_2 - \lambda I & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ C_{31} & C_{32} & H_3 - \lambda I & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{s1} & C_{s2} & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{s, s-1} & H_s - \lambda I \end{pmatrix}. \quad (19.21)$$

В частности, нас будут интересовать наибольшие общие делители $a_j(\lambda)$ и $c_j(\lambda)$ соответственно миноров порядка j , $j=1, 2, \dots, n$, этих матриц. Докажем следующую лемму.

Лемма 19.4. Обозначим через $\alpha_j, \gamma_j, j=1, \dots, n$, степени $a_j(\lambda)$ и $c_j(\lambda)$ соответственно и предположим, что $s > 1$. Тогда

$$\gamma_j \leq \alpha_j, \quad j=1, \dots, n, \quad (19.22)$$

и по крайней мере одно из этих соотношений представляет собой строгое неравенство.

Полиномы $a_j(\lambda), c_j(\lambda)$ инвариантны относительно элементарных преобразований, как было указано в разд. 16.2. Там же была описана последовательность таких преобразований, приводящая $H_j - \lambda I$ к диагональному виду. В результате s -кратного применения последовательности элементарных преобразований матрица $A_0 - \lambda I$ в (19.20) переходит в

$$\tilde{A}(\lambda) = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_s), \quad (19.23)$$

где

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda^{m_j} \end{pmatrix}, \quad j=1, 2, \dots, s, \quad (19.24)$$

причем m_j — размерность H_j .

Если те же элементарные преобразования произвести с матрицей $C_0 - \lambda I$ из (19.21), то получим матрицу

$$\tilde{C}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C}_{21} & \Lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{32} & \Lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{C}_{s1} & \tilde{C}_{s2} & \tilde{C}_{s3} & \dots & \Lambda_s \end{pmatrix}. \quad (19.25)$$

Все элементы \tilde{C}_{jk} являются полиномами по λ . Для нас представляет интерес только один из этих полиномов, а именно тот, который расположен в правом нижнем углу каждого из \tilde{C}_{jk} . Обозначим его $\varphi_{jk}(\lambda)$. Действительно, все прочие элементы можно считать равными нулю, так как этого можно добиться, учитывая структуру Λ_j , элементарными преобразованиями. Но по крайней мере один из полиномов $\varphi_{jk}(\lambda)$ отличен от нуля. В этом можно убедиться, производя выкладки, описанные в примере, следующем за теоремой 16.4. Коэффициенты $\varphi_{jk}(\lambda)$ представляют собой элементы последней строки \tilde{C}_{jk} , и отсюда видно, что $\varphi_{jk}(\lambda) \equiv 0$, только если $\tilde{C}_{jk} = 0$, что по предположению невозможно для всех \tilde{C}_{jk} .

Производя еще дополнительные элементарные преобразования, можно, если понадобится, сделать степень $\varphi_{jk}(\lambda)$ меньше m_k , а значит, и меньше m_j , поскольку $k < j$.

Отличные от нуля миноры $\tilde{A}(\lambda)$ — это определители только тех подматриц, диагонали которых лежат на диагоналях $\tilde{A}(\lambda)$. Их значения получаются как произведения диагональных элементов. Соответствующие миноры $\tilde{C}(\lambda)$ имеют те же значения. Отсюда можно заключить, что для каждого порядка отличные от нуля миноры $\tilde{A}(\lambda)$ представляют собой подмножество миноров $\tilde{C}(\lambda)$. Неравенства (19.22) являются непосредственным следствием этого факта.

Чтобы довести доказательство до конца, достаточно для некоторого значения j построить ненулевой минор $\tilde{C}(\lambda)$, степень которого меньше α_j . Пусть l — наименьшее целое число, такое, что один из полиномов φ_{kl} , $k = l+1, l+2, \dots, s$, отличен от нуля. Рассмотрим подматрицу

$$\Gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{m_l} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \varphi_{l+1, l}(\lambda) & \lambda^{m_{l+1}} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{s, l}(\lambda) & \varphi_{s, l+1}(\lambda) & \dots & \varphi_{s, s-1}(\lambda) & \lambda^{m_s} \end{pmatrix}.$$

Она образована из строк и столбцов $C(\lambda)$, не содержащих других отличных от нуля элементов. Так как все $\varphi_{jk}(\lambda)$ в первом столбце $\Gamma(\lambda)$ имеют степень, меньшую m_l , то среди миноров $\Gamma(\lambda)$ порядка единица имеются такие, степень которых меньше m_l . Следовательно, согласно теореме 16.5, $\Gamma(\lambda)$ эквивалентна диагональной матрице

$$\tilde{\Gamma}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^{p_l} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{p_{l+1}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{p_s} \end{bmatrix},$$

где $p_l \leq p_{l+1} \leq \dots \leq p_s$ и $p_l < m_l$. Элементарные преобразования, переводящие $\Gamma(\lambda)$ в $\tilde{\Gamma}(\lambda)$, если их произвести с соответствующими строками и столбцами всей матрицы $C(\lambda)$, не приведут к каким-либо другим изменениям $C(\lambda)$, поскольку $\Gamma(\lambda)$ содержит все отличные от нуля элементы этих строк и столбцов. Следовательно, $C(\lambda)$ эквивалентна матрице

$$\tilde{C}(\lambda) = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{l-1}, \tilde{\Lambda}_l, \dots, \tilde{\Lambda}_s),$$

где

$$\tilde{\Lambda}_k = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, \lambda^{p_k}), \quad k = l, \dots, s.$$

Из (19.23) и (19.24) сразу видно, что

$$a_{n-s+l}(\lambda) = \lambda^{m_1+m_2+\dots+m_l},$$

т. е.

$$a_{n-s+l} = m_1 + m_2 + \dots + m_l.$$

Полином $a_{n-s+l}(\lambda)$ является минором $\tilde{A}(\lambda)$, а именно минором, образованным вычеркиванием тех $s-l$ строк и столбцов, которые пересекают друг друга на диагональных элементах $\lambda^{m_{l+1}}, \dots, \lambda^{m_s}$ матрицы $\tilde{A}(\lambda)$. Соответствующий минор $C(\lambda)$ равен $\lambda^{m_1+m_2+\dots+p_l}$ и имеет степень, меньшую a_{n-s+l} . Этим доказана лемма 19.4.

Лемма 19.4 обеспечивает исследование единственного оставшегося случая, а именно того, когда повторение последовательности упрощений, состоящей из применения леммы 19.2, срезания, подобного преобразования главной матрицы к каноническому виду, каждый раз приводит к задаче типа (E) того же порядка. Действительно, в лемме говорится о том, что в конечном счете степени наибольших общих делителей миноров порядка j матрицы C_0-lI можно сделать нулевыми для всех $j < n$. Для нильпотентной матрицы C_0 это означает, что она сама является матрицей сдвига, т. е. $s=1$. Этот случай был рассмотрен выше.

19.5. Результаты

Цепочка преобразований, которые должны в конечном счете привести к асимптотическому решению дифференциального уравнения (19.1), состоит из следующих элементов: (1) линейных преобразований с коэффициентами, обладающими сходящимися или асимптотическими разложениями по некоторой дробной степени x ; (2) умножения некоторых компонент неизвестных вектор-функций на скалярную экспоненциальную функцию вида $\exp(ax^\alpha)$, где a — комплексное число, а α — положительное рациональное число; (3) использования в качестве независимой переменной вместо x некоторой дробной степени x . Эти преобразования применяются к системам более низкого порядка, появляющимся в результате последовательной редукции. Если все эти преобразования представить как одну замену переменных, то она будет иметь вид

$$x = \text{const } t^p, \quad p \text{ — положительное целое,} \quad (19.26)$$

$$Y = P(t) \exp [Q_1(t)] Z. \quad (19.27)$$

Матрица $P(t)$ зависит от выбора сектора T , в котором требуется получить асимптотическое решение. Если исходная матрица $A(x)$ голоморфна при $x = \infty$, то положение этого сектора произвольно. Его центральный угол не должен превосходить некоторого значения, которое зависит от параметра g_0 , появляющегося при последовательной редукции. Мы не будем характеризовать этот угол более точно. Матрица $P(t)$ имеет в T асимптотическое разложение по степеням t^{-1} . Более того, $\det P(t) \neq 0$ для $t \neq 0$. Матрица $Q_1(t)$ диагональна и полиномиальна по t .

Дифференциальное уравнение

$$t^{-h} \frac{dZ}{dt} = B(t) Z, \quad (19.28)$$

получающееся из (19.1) в результате этих преобразований, имеет матрицу $B(t)$, которая является прямой суммой матриц, таких, что системы более низкого порядка, на которые соответственно распадается (19.28), — это либо системы первого порядка, либо такие, которые можно разрешить, применяя теорему 17.2. Кроме того, все диагональные элементы $Q_1(t)$, отвечающие одному и тому же блоку в разбиении матрицы $B(t)$, имеют одни и те же значения.

В соответствии с этим дифференциальное уравнение (19.28) имеет фундаментальное матричное решение, представляющее собой прямую сумму решений отдельных систем более низкого

порядка, из которых это уравнение состоит. Такая фундаментальная матрица может быть записана в виде

$$Z = \hat{Z}(t) t^G \exp[Q_2(t)], \quad (19.29)$$

где $\hat{Z}(t)$ имеет степенное асимптотическое разложение и $\det \hat{Z}(t) \neq 0$ при $t \neq 0$, G — постоянная, а $Q_2(t)$ — полиномиальная диагональная матрица. Все эти матрицы являются блочно-диагональными с таким же расположением и величиной блоков, как у блочно-диагональной матрицы $B(t)$. Следовательно, если (19.29) подставить в (19.27), то матрица $\exp[Q_1(t)]$ коммутирует с $\hat{Z}(t)$ и t^G и, следовательно, может быть скомбинирована с $\exp[Q_2(t)]$. Таким образом, наконец, получено обобщение теоремы 12.3 на случай кратных собственных значений.

Теорема 19.1. Пусть $A(x)$ — матричная функция порядка $n \times n$, голоморфная для $|x| \geq x_0$, $x \in S$, где S — сектор с вершиной в начале координат. Предположим, что $A(x)$ обладает асимптотическим разложением по степеням x^{-1} , когда $x \rightarrow \infty$ в S . Тогда в каждом достаточно узком подсекторе S дифференциальное уравнение

$$x^{-q} Y' = A(x) Y$$

имеет фундаментальное матричное решение вида

$$Y(x) = \hat{Y}(x) x^G e^{Q(x)}.$$

Здесь $Q(x)$ — диагональная матрица, диагональные элементы которой являются полиномами относительно $x^{1/p}$, p — положительное целое, G — постоянная матрица, а $\hat{Y}(x)$ обладает в этом подсекторе асимптотическим разложением по степеням $x^{-1/p}$.

Заметим, что эта теорема, напоминая по своей формулировке теорему 12.3, отличается от нее тремя моментами: разложение $\hat{Y}(x)$ и полином $Q(x)$ выражаются через степени $x^{-1/p}$, а не самого x ; G не обязательно диагональна; главный член $Q(x)$ не может быть описан так же просто, как прежде.

Метод, предложенный в настоящем разделе, представляет собой адаптацию процедуры, развитой для задач с параметром (см. гл. VII) в работе Территина Х. [2]. Выбор ветви многозначной функции $x^{1/p}$ произволен, но решение $Y(x)$ зависит от этого выбора.

Задача 19.3. Переписать теорему 19.1 в скалярных обозначениях.

19.6. Примеры

Пример 1. Главная матрица дифференциального уравнения

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} Y \quad (19.30)$$

нильпотентна и имеет жорданову форму. Более того, удовлетворяется условие (3) леммы 19.2. Следовательно, можно указать срезающее преобразование вида $Y = S(x)Y_1$, где $S(x)$ определяется формулой (19.12), которое переводит (19.30) в

$$Y_1' = \begin{pmatrix} 0 & x^{-g} & 0 \\ 0 & gx^{-1} & x^{-g} \\ x^{2g-1} & 0 & 2gx^{-1} \end{pmatrix} Y_1.$$

При $g = g_0 = 1/3$ это уравнение принимает вид

$$Y_1' = \begin{pmatrix} 0 & x^{-1/3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}x^{-1} & x^{-1/3} \\ x^{-1/3} & 0 & \frac{2}{3}x^{-1} \end{pmatrix} Y_1.$$

Умножая последнее уравнение на $x^{1/3}$ и полагая

$$x = 3^{-1/2}t^3, \quad (19.31)$$

получим

$$t^{-1} \frac{dY_1}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & t^{-2} & 1 \\ 1 & 0 & 2t^{-2} \end{pmatrix} Y_1. \quad (19.32)$$

Главная матрица в (19.32), т. е. матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

имеет три различных собственных значения $1, \omega, \omega^2$, где $\omega = e^{2\pi i/3}$ является кубическим корнем из единицы. Таким образом, задача свелась к задаче разобранным в теореме 12.3 типа. Однако фактическое вычисление асимптотического решения задачи (19.32) общими методами § 12 довольно утомительно. Не-

которую информацию об этом решении нетрудно получить из уже проведенных вычислений. Так как в правой части (19.32) не появляется членов, содержащих t^{-1} , то матрица Q из теоремы 12.3 имеет для системы (19.32) вид

$$\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий показатель в асимптотическом решении уравнения (19.30) есть

$$\frac{3}{2} x^{2/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix},$$

т. е. является диагональной матрицей, образованной тремя значениями $\frac{3}{2} x^{2/3}$.

Если к матрице рассматриваемой задачи (19.30) добавить члены более высокого порядка относительно x^{-1} , то вышеописанный метод может оказаться наилучшим для фактического определения асимптотического решения. Однако система (19.30) именно в том виде, как она дана, представляет собой систему, соответствующую простому скалярному уравнению

$$u''' - x^{-1}u = 0, \quad (19.33)$$

и получаемую, если положить $y = (y_1, y_2, y_3)^T$, а $y_1 = u$, $y_2 = u'$, $y_3 = u''$. Можно непосредственно проверить, что три значения $e^{3x^{2/3}/2}$ образуют фундаментальную систему для (19.33). Возвращаясь к системе (19.30), находим в результате прямых вычислений фундаментальную систему

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1/3} & 0 \\ 0 & 0 & x^{-2/3} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix} \frac{x^{-2/3}}{3} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{3}{2} x^{2/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Здесь под $x^{1/3}$ нужно понимать одно и то же значение многозначной функции, где бы оно ни встречалось. Формула имеет структуру, описанную в теореме 19.1, с тем упрощением, что ряды состоят из конечного числа членов.

Пример 2. Этот пример покажет, что иногда оказывается необходимым проделать несколько последовательных срезов. Рассмотрим уравнение

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} Y. \quad (19.34)$$

Первый показатель среза g оказывается опять равным $g = g_0 = 1/3$. Полагая

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1/3} & 0 \\ 0 & 0 & x^{-2/3} \end{pmatrix} Y_1(x),$$

находим после умножения на $x^{1/3}$, что

$$x^{1/3} Y_1' = \begin{pmatrix} 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} x^{-2/3} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} x^{-2/3} \end{pmatrix} Y_1.$$

Полагая опять

$$x = 3^{-3/2} t^3,$$

приводим последнее уравнение к виду

$$t^{-1} \frac{dY_1}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 3^{3/2} t^{-3} & 0 \\ 0 & t^{-2} & 1 \\ 1 & 0 & 2t^{-2} \end{pmatrix} Y_1. \quad (19.35)$$

Главная матрица в (19.35), т. е.

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

по-прежнему nilпотентна. Так как это не жорданова форма, то нужно сделать преобразование

$$Y_1 = T Y_2,$$

где T — постоянная матрица, такая, что $T^{-1} B_0 T$ уже будет жордановой матрицей. В качестве T можно взять матрицу перестановок

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как T ортогональна, то обратная ей матрица совпадает с транспонированной и легко получить систему

$$t^{-1} \frac{dY_2}{dt} = \begin{pmatrix} t^{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 2t^{-1} & 1 \\ 3^{3/2}t^{-3} & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_2. \quad (19.36)$$

Преобразование уравнения (19.36), указанное в лемме 19.2, можно обойти, так как второе срезающее преобразование с $g=1$, т. е. преобразование

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-2} \end{pmatrix} Y_3,$$

приводит к системе

$$Y_3' = \begin{pmatrix} t^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 3t^{-1} & 1 \\ 3^{3/2} & 0 & 2t^{-1} \end{pmatrix} Y_3, \quad (19.37)$$

главная матрица которой имеет три различных собственных значения $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}\omega$, $\sqrt{3}\omega^2$. Следовательно, уравнение (19.37) поддается методу, описанному в § 12. Мы не будем продолжать эти довольно длинные вычисления.

Некоторые специальные асимптотические методы

20. Введение

Полученные в предыдущей главе результаты являются весьма общими, но тем не менее они не дают ответа на многие вопросы, представляющие теоретический и практический интерес.

Прежде всего в предыдущей главе мы предполагали, что особая точка дифференциального уравнения, в окрестности которой исследуется решение, является полюсом, или в крайнем случае в окрестности этой точки матрица системы разлагается в асимптотический ряд по степеням x . Поэтому наша теория не дает никакой информации о поведении на бесконечности даже таких простых дифференциальных уравнений, как уравнение Матве

$$u'' + (a + b \cos 2x)u = 0$$

или уравнение

$$u'' + e^x p(x)u = 0,$$

где $p(x)$ — полином. В такого рода задачах обычно удается получить только некоторые качественные результаты, и методы исследования совершенно отличны от тех, с которыми мы встречались до сих пор. Поэтому такого рода вопросы не будут рассматриваться в настоящей книге.

Но даже в рамках наших предыдущих исследований возникают важные вопросы, на которые мы не можем ответить. Например, наши методы не позволяют найти соотношения между решениями, асимптотические разложения которых пригодны в различных секторах комплексной плоскости (см. § 15).

Эта последняя задача связана с другой, более фундаментальной задачей. Во многих приложениях требуется найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее некоторым граничным условиям. При этом условия могут быть наложены не только на поведение решения в окрестности иррегулярно особой точки, но также и на поведение решения совсем в другой области комплексной плоскости, например на

поведение в окрестности некоторой неособой точки. Это задача глобального характера и как таковая является более глубокой, чем все те локальные задачи, с которыми мы имели дело до сих пор.

Для решения этой глобальной задачи, на наш взгляд, не существует действительно общих методов, и даже специальные методы, имеющиеся в нашем распоряжении, являются на самом деле недостаточно сформировавшимися. В этой главе будут рассмотрены два специальных метода. Наше исследование будет в силу необходимости весьма неполным, однако оно может послужить первым введением в предмет, с дальнейшим развитием которого читатель сможет ознакомиться по многочисленным статьям и специальным монографиям; см., например, Форд [1], Райт [1] и Территин Х. [1].

21. Получение асимптотических разложений из сходящихся степенных рядов

21.1. Простейший случай

В принципе все свойства аналитической функции, которая является решением дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами, могут быть выведены из ее разложения в ряд Тейлора в окрестности любой неособой точки уравнения, поскольку задание этого ряда полностью определяет аналитическую функцию. В частности, зная сходящееся разложение решения в окрестности неособой точки уравнения, можно (в принципе) найти асимптотическое разложение решения в окрестности особой точки. Однако в такой общей постановке эта задача является безнадежно трудной. В настоящее время исследованы только весьма частные случаи этой задачи, и здесь мы только мельком познакомимся с наиболее элементарными аспектами этой теории.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция и задан ее ряд Тейлора по степеням z

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} g(r) z^r, \quad |z| \leq z_0, \quad z_0 > 0. \quad (21.1)$$

Обозначение $g(r)$ для коэффициентов ряда выбрано для того, чтобы облегчить формулировку тех весьма жестких условий, которые будут наложены на коэффициенты. Наша цель — получить асимптотический ряд для $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$. Основная идея этого метода — а также и более мощных методов этой ветви анализа — состоит в построении такой вспомогательной функции,

чтобы члены ряда (21.1) были ее вычетами. Для этого необходимо предположить, что числа $g(r)$, $r=0, 1, \dots$, являются значениями функции $g(w)$, аналитической в некоторой области плоскости w , содержащей все неотрицательные целые числа. Более того, будем предполагать, что $g(w)$ — целая функция.

В качестве искомой вспомогательной функции, как нетрудно видеть, можно взять функцию

$$G(w, z) = \frac{\pi}{\sin \pi w} g(w) (-z)^w. \quad (21.2)$$

Эта функция как функция w имеет полюсы при $w = -r$. Следовательно, если C — замкнутый контур в плоскости w , который охватывает точки $w = r$, $r = -m, -m+1, \dots, 0, 1, \dots, n$, не проходит через полюсы и не содержит внутри себя других полюсов функции $G(w, z)$, то из теоремы о вычетах следует, что

$$R_{mn}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C G(w, z) dw = \sum_{r=0}^n g(r) z^r + \sum_{r=1}^m g(-r) z^{-r}, \quad (21.3)$$

т. е.

$$f(z) = - \sum_{r=1}^m g(-r) z^{-r} + R_m(z), \quad (21.4)$$

где

$$R_m(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{mn}(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C G(w, z) dw. \quad (21.5)$$

Если удастся показать, что функция $R_m(z)$ голоморфна в некотором бесконечном секторе S и что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^m R_m(z) = 0, \quad z \in S, \quad (21.6)$$

то из (21.4) мы получим, что $f(z)$ голоморфна в S и

$$f(z) \sim - \sum_{r=1}^m g(-r) z^{-r}, \quad z \rightarrow \infty, z \in S. \quad (21.7)$$

Крайняя простота этого результата наводит на мысль, что на $g(w)$ придется наложить весьма строгие ограничения, чтобы обеспечить выполнение условия (21.6). Эти ограничения будут введены ниже в соответствующем месте, где они окажутся совершенно естественными.

Пусть $w = u + iv$. Выберем в качестве C прямоугольник с вершинами в точках

$$\left(n + \frac{1}{2}, p\right), \left(n + \frac{1}{2}, -p\right), \left(-m - \frac{1}{2}, p\right), \left(-m - \frac{1}{2}, -p\right),$$

где p — некоторое положительное целое число; тогда C есть сумма четырех последовательных отрезков C^p, C^{-m}, C^{-p}, C^n , причем C^p начинается в точке $(n + \frac{1}{2}, p)$, и контур C ориентирован против часовой стрелки. Вклады в интеграл $R_{mn}(z)$ от этих отрезков обозначим через $R_{mn}^p(z), R_{mn}^{-m}(z), R_{mn}^{-p}(z), R_{mn}^n(z)$. Левая часть тождества

$$R_{mn}(z) = R_{mn}^p(z) + R_{mn}^{-m}(z) + R_{mn}^{-p}(z) + R_{mn}^n(z)$$

не зависит от p , так что

$$R_{mn}(z) = \lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^p(z) + \lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^{-m}(z) + \lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^{-p}(z) + \lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^n(z), \quad (21.8)$$

если эти пределы существуют. Вычислим слагаемые в правой части (21.8). Имеем

$$R_{mn}^p(z) = -\frac{1}{2i} \int_{-m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{g(ip+u)}{\sin[\pi(ip+u)]} (-z)^{ip+u} du. \quad (21.9)$$

При достаточно больших p справедливо неравенство

$$|\sin[\pi(ip+u)]| = \left| \frac{1}{2i} e^{\pi p - i\pi u} (e^{2\pi(iu-p)} - 1) \right| \geq \frac{1}{4} e^{\pi p}. \quad (21.10)$$

Далее, обозначив

$$\arg z = \theta, \quad \arg(-z) = \theta - \pi,$$

получаем

$$|(-z)^{ip+u}| = \exp(u \ln|z| - (\theta - \pi)p). \quad (21.11)$$

Подставляя (21.10) и (21.11) в (21.9), получаем неравенство

$$|R_{mn}^p(z)| \leq 2e^{-\theta p} \int_{-m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} |g(ip+u)| |z|^u du. \quad (21.12)$$

Теперь введем предположение, которое позволит обратить в нуль первое и третье слагаемые в правой части (21.8) в любом секторе S комплексной плоскости z вида

$$0 < \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0. \quad (21.13)$$

Предположение. Для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякого вещественного числа ω_0 существует постоянная K , такая, что

$$|g(w)| \leq K e^{\varepsilon |\operatorname{Im} w|} \quad (21.14)$$

при $\operatorname{Re} w > \omega_0$.

Выбирая $\varepsilon < \theta_0$, $\omega_0 < \operatorname{Re} \omega = u$, получаем из (21.12), что

$$|R_{mn}^p(z)| \leq 2e^{(\varepsilon - \theta_0)p} K \int_{-m - \frac{1}{2}}^{n + \frac{1}{2}} |z|^u du.$$

Следовательно,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^p(z) = 0, \quad z \in S. \quad (21.15)$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^{-p}(z) = 0, \quad z \in S. \quad (21.16)$$

Далее, мы видим, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^n(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g\left(n + \frac{1}{2} + iv\right)}{\sin \pi \left(n + \frac{1}{2} + iv\right)} (-z)^{n + \frac{1}{2} + iv} dv, \quad (21.17)$$

если этот интеграл сходится. Нетрудно показать (детали мы опускаем), что модуль подинтегрального выражения в (21.17) при $z \in S$ не превосходит величины

$$2K|z|^{n + \frac{1}{2}} \exp(-(\pi - \varepsilon)|v| - (\theta - \pi)v).$$

Далее,

$$|(\theta - \pi)v| \leq (\pi - \theta_0)|v| < (\pi - \varepsilon)|v|.$$

Следовательно, интеграл (21.17) сходится и, более того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^n(z) = 0, \quad |z| < 1, \quad z \in S. \quad (21.18)$$

Аналогично доказывается сходимость интеграла

$$\lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^{-m}(z) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g\left(-m - \frac{1}{2} + iv\right)}{\sin \left[\pi \left(-m - \frac{1}{2} + iv\right)\right]} (-z)^{-m - \frac{1}{2} + iv} dv, \quad (21.19)$$

так как при $z \in S$ модуль подинтегрального выражения не превосходит величины ($z \in S$, $z \neq 0$)

$$2K|z|^{-m - \frac{1}{2}} \exp(-(\pi - \varepsilon)|v| - (\theta - \pi)v). \quad (21.20)$$

Из этой оценки следует также, что несобственный интеграл сходится равномерно по z при $z \in S$, $|z| \geq z_0 > 0$, где z_0 произвольно. Поэтому интеграл (21.19) является голоморфной в S функцией, и эта функция не зависит от n .

Комбинируя (21.5), (21.8), (21.15) и (21.16), получаем формулу

$$R_m(z) = \lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^{-m}(z) + \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^n(z). \quad (21.21)$$

Последнее слагаемое, как было показано ранее, равно нулю при $z \in S$, $|z| < 1$, так что в этой области

$$R_m(z) = \lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^{-m}(z). \quad (21.22)$$

Далее, левая часть равенства (21.22) голоморфна при $0 < |z| \leq z_0$, что следует из (21.4), а правая часть, как было показано выше, голоморфна в S . Следовательно, в силу принципа аналитического продолжения функция $R_m(z)$ может быть аналитически продолжена в сектор S , и соотношение (21.22) справедливо при $z \in S$. В силу (21.4) функция $f(z)$ также может быть аналитически продолжена в S .

Наконец, из оценки (21.20) для подинтегрального выражения (21.19) вытекает, что

$$z^m R_m(z) = z^m \lim_{p \rightarrow \infty} R_{mn}^{-m}(z) = O(z^{-1/2}),$$

когда $z \rightarrow \infty$ в S . Следовательно, соотношение (21.6) справедливо в S , и мы доказали следующую теорему.

Теорема 21.1. Пусть $g(w)$ — целая функция, такая, что ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} g(r) z^r$$

имеет положительный радиус сходимости $z_0 > 0$. Обозначим через $f(z)$ аналитическую функцию, определяемую этим рядом. Тогда если $g(w)$ удовлетворяет неравенству (21.14), то $f(x)$ голоморфна в любом секторе S с вершиной в точке $x=0$, который не содержит положительной вещественной полуоси, и

$$f(z) \sim - \sum_{r=1}^{\infty} g(-r) z^{-r}$$

при $z \rightarrow \infty$ в любом замкнутом подсекторе сектора S .

Теорема 21.1 интересна и весьма нетривиальна, однако, строго говоря, в этой теореме рассматривается не тот класс функций, с которым приходится иметь дело в теории линейных дифференциальных уравнений. Мы привели подробное доказательство этой теоремы только для того, чтобы дать читателю возможность почувствовать вкус методов и идей рассматриваемой теории. В действительности, по-видимому, не существует

никаких нетривиальных элементарных иллюстраций этой теоремы.

Нетрудно доказать следующее обобщение теоремы 21.1.

Следствие из теоремы 21.1. Если неравенство (21.14) заменить неравенством

$$|g(w)| \leq K \exp((\gamma + \epsilon)|\operatorname{Im} w|), \quad (21.23)$$

где γ фиксировано и $0 < \gamma < \pi$, то все заключения теоремы 21.1 остаются в силе, только при этом S — любой подсектор сектора

$$\gamma < \theta < 2\pi - \gamma.$$

Задача 21.1. Доказать это следствие. (Указание: доказательство проводится точно так же, как и доказательство теоремы 21.1, только всюду следует заменить ϵ на $\gamma + \epsilon$.)

Что же касается дальнейшего развития этой теории, то мы ограничимся тем, что приведем несколько типичных результатов.

21.2. Дальнейшие результаты

Функция, представимая рядом

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(r+p)} z^r, \quad (21.24)$$

где p — произвольное комплексное число, не являющееся нулем или отрицательным целым числом, является, по-видимому, простейшим примером к следствию из теоремы 21.1. Действительно, нетрудно показать, что целая функция $(\Gamma(w+p))^{-1}$ удовлетворяет неравенству (21.23), где $\gamma = \pi/2$. Следовательно,

$$f(z) \sim - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(p-r)} z^{-r}, \quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}. \quad (21.25)$$

Этот ряд может сходиться, но из этого вовсе не следует, что соотношение (21.25) будет тождеством. Например, при $p=1$ имеем $f(z) = e^z$, так что при $|\arg z| \leq \pi/2$ левая часть (21.25) не равна правой. Действительно, если $p=1$, то функция $\Gamma(w+p)$ имеет полюс в точке w , когда w — отрицательное целое число, так что все слагаемые в правой части (21.25) равны нулю. Это замечание можно обобщить. Именно, можно показать, что асимптотика функции $f(z)$ вида (21.24) имеет вид

$$f(z) \sim e^z z^{1-p}, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (21.26)$$

Это соотношение, конечно, понимается в следующем смысле: асимптотический ряд функции $f(z)e^{-z}z^{p-1}$ по степеням z^{-1} состоит из одного члена, а именно 1.

Пример (21.24) является частным случаем общей асимптотической теоремы о функциях вида

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{h(r)}{\Gamma(r+p)} z^r,$$

где $h(w)$ принадлежит к некоторому классу функций, точное описание которого мы не будем здесь приводить, так как даже этого обобщения недостаточно для получения многих важных приложений к дифференциальным уравнениям.

Рассмотрим, например, функцию Бесселя $J_n(z)$, которая, как хорошо известно, представима в виде ряда

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)}. \quad (21.27)$$

Асимптотическое поведение $J_n(z)$ при $z \rightarrow \infty$ хорошо изучено и исследовано многими способами, и его можно получить также с помощью методов этого параграфа. Однако в данном случае $\gamma = \pi$, так что мы не можем прямо воспользоваться следствием из теоремы 21.1. Чтобы обойти эту трудность, представим ряд

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \quad (21.28)$$

в виде

$$f(z) = \frac{1}{2} (\varphi(z) + \varphi(-z)), \quad (21.29)$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{r=0}^{\infty} g(r) \left(\frac{iz}{2}\right)^r, \quad (21.30)$$

$$g(w) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{w}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{w}{2}+n+1\right)}. \quad (21.31)$$

Для этой функции $g(w)$ имеем $\gamma = \pi/2$, и, применяя следствие из теоремы 21.1, получаем, что

$$\varphi(z) \sim - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(n+1-\frac{r}{2}\right)} \left(\frac{iz}{2}\right)^{-r}$$

при $|z| \rightarrow \infty$, $\frac{\pi}{2} < \arg(iz) < \frac{3\pi}{2}$. Для $\varphi(-z)$ аналогичное разложение можно получить при $\frac{\pi}{2} < \arg(-iz) < \frac{3\pi}{2}$.

Однако эти результаты не позволяют получить асимптотическое разложение функции $f(z)$, так как секторы, в которых получена асимптотика $\varphi(z)$ и $\varphi(-z)$, не перекрываются. Необходимо получить разложение для $\varphi(z)$ в оставшемся секторе. Обобщение нашей теории, которое позволяет получать такие разложения, является слишком сложным, для того чтобы приводить его здесь. Этими методами можно, таким образом, получить асимптотические разложения для функций Бесселя при $z \rightarrow \infty$ во всей комплексной плоскости, а также для других важных специальных функций.

Эти же методы позволяют получить асимптотические разложения при $z \rightarrow \infty$ во всей комплексной плоскости для функций, задаваемых рядами вида

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{h(r) z^r}{\Gamma(r+k_1) \Gamma(r+k_2)},$$

где $h(w)$ удовлетворяет некоторым определенным условиям. Можно также обобщить эту теорию на ряды такого же вида, где в знаменателе стоит произведение трех или более гамма-функций.

С помощью методов, коротко описанных в этом параграфе, Территин Х. [1] полностью исследовал асимптотическое поведение при $x \rightarrow \infty$ решений скалярного уравнения $u^{(n)} = x^m u$, где $m > 0$ — целое число, и, в частности, вычислил множители Стокса. Эта работа связана с большим объемом трудных аналитических выкладок, которые мы не имеем возможности привести здесь.

22. Метод контурного интегрирования Лапласа

22.1. Комплексное преобразование Лапласа

Многие специальные асимптотические методы теории дифференциальных уравнений основаны на представлениях решений в виде интегралов. Мы остановимся на одном частном, но довольно полезном методе такого рода. Этот метод по существу есть обычное преобразование Лапласа. Однако поскольку мы рассматриваем уравнения с аналитическими коэффициентами, было бы неестественным требовать, чтобы путем интегрирования служила положительная вещественная полуось. Уже для обычного

преобразования Лапласа обратное преобразование приводит к интегрированию по контуру в комплексной плоскости. В теории дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами оказывается более экономным начать с описания процедуры, которая является, строго говоря, обобщением обратного преобразования Лапласа. Точнее говоря, мы попытаемся найти решение дифференциального уравнения в виде

$$y(x) = \int_{\Gamma} v(t) e^{xt} dt, \quad (22.1)$$

где контур Γ и функцию $v(t)$ нужно выбрать так, чтобы $y(x)$ было решением уравнения. Этот метод является очень полезным для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений, в частности для уравнений с линейными коэффициентами.

22.2. Функции Эйри

Вместо того чтобы излагать общую теорию контурного преобразования Лапласа, мы рассмотрим один очень простой, но важный и типичный пример, именно уравнение Эйри

$$u'' - xu = 0. \quad (22.2)$$

Здесь u — скалярная функция x .

Подставим (22.1) в (22.2) и допустим, что дифференцирование под знаком интеграла законно. Тогда мы должны потребовать, чтобы

$$\int_{\Gamma} t^2 v(t) e^{xt} dt - x \int_{\Gamma} v(t) e^{xt} dt = 0.$$

Множитель x можно устранить, проинтегрировав по частям, что приводит к следующему условию:

$$(v(t) e^{xt}) \Big|_{\Gamma} - \int_{\Gamma} \left(t^2 v + \frac{dv}{dt} \right) e^{xt} dt = 0. \quad (22.3)$$

Если контур Γ выбран так, что внеинтегральная подстановка равна нулю, и если функция $v(t)$ является решением уравнения

$$\frac{dv}{dt} + t^2 v = 0, \quad (22.4)$$

то уравнение (22.3) удовлетворяется (при условии, конечно, что все проведенные выше выкладки законны).

Функция $v(t) = e^{-t^{1/3}}$ является решением уравнения (22.4). Нетрудно проверить, что каждый из путей Γ_j , $j=1, 2, 3$, изображенных на рис. 22.1, обладает требуемыми свойствами. Следовательно, три функции

$$u_j(x) = \int_{\Gamma_j} e^{xt - \frac{t^3}{3}} dt \quad (j=1, 2, 3) \quad (22.5)$$

являются решениями уравнения Эйри (22.2). Указанные пути при $t \rightarrow \infty$ должны иметь асимптотические направления, лежащие в незаштрихованных секторах, в которых $\operatorname{Re} t^3 > 0$; в остальном их вид может быть довольно произвольным, так как по

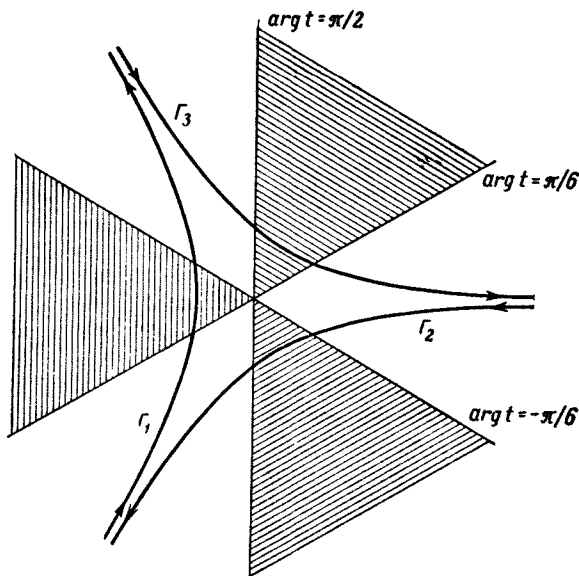


Рис. 22.1.

теореме Коши их можно деформировать, не меняя значения интеграла.

Функция $\frac{1}{2\pi i} u_1(x)$ называется функцией Эйри первого рода

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{xt - \frac{t^3}{3}} dt. \quad (22.6)$$

Эту функцию можно выразить через функции Бесселя порядка $1/3$, но здесь мы не будем обсуждать связь этой функции с функциями Бесселя.

Решения $u_j(x)$ связаны соотношениями

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) \equiv 0, \quad (22.7)$$

$$\omega^2 u_2(\omega^2 x) = u_1(x) = \omega u_3(\omega x), \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad (22.8)$$

Применяя теорему Коши к контуру $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, получим первое соотношение. Второе соотношение мы получим, если в интеграле для $u_1(x)$ сделаем замену переменной $t = \omega t'$ и $t = \omega^2 t'$.

Из формулы (22.6) нетрудно получить разложение $Ai(x)$ в сходящийся ряд по степеням x . Для этого разложим e^{xt} в ряд Маклорена, проинтегрируем ряд почленно и вычислим интегралы, являющиеся коэффициентами при степенях x . Выбрав в качестве Γ_1 путь, состоящий из лучей $\arg t = \frac{2\pi}{3}$ и $\arg t = -\frac{2\pi}{3}$, нетрудно выразить эти интегралы через гамма-функцию. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} Ai(x) = & \frac{1}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 6)} + \right. \\ & \left. + \frac{x^9}{(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 6) \cdot (8 \cdot 9)} + \dots \right] - \frac{1}{3^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \right. \\ & \left. + \frac{x^7}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7)} + \frac{x^{10}}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7) \cdot (9 \cdot 10)} + \dots \right]. \quad (22.9) \end{aligned}$$

Задача 22.1. Доказать формулу (22.9).

Из ряда (22.9) можно, используя соотношения (22.5) и (22.8), получить соответствующие ряды для $u_j(x)$, $j=1, 2, 3$.

Задача 22.2. Доказать, что любые две из трех функций $u_j(x)$ линейно независимы.

Задача 22.3. Решить скалярное дифференциальное уравнение

$$u^{(4)} + xu'' - u = 0$$

методом контурного интегрирования Лапласа.

Общая теория, развитая в § 19, позволяет получить некоторую информацию относительно поведения решений уравнения Эйри на бесконечности (см. задачу 19.2). С помощью преобразования (1.3) уравнение Эйри сводится к системе первого порядка

$$x^{-1}Y' = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{-1} \right] Y. \quad (22.10)$$

Результаты, которые можно получить с помощью методов § 19, неполны по следующим соображениям: они не дают возможности вычислить множители Стокса и, кроме того, позволяют вычислить значения решений только в окрестности точки $x = \infty$.

Поэтому представляет интерес получение асимптотических рядов для $A_i(x)$ непосредственно из формулы (22.6). Это можно сделать с помощью метода, который будет изложен в следующем параграфе.

23. Метод перевала

23.1. Введение

Существует очень полезный метод, позволяющий исследовать асимптотическое поведение интегралов вида

$$I(\lambda) = \int_C h(\tau) e^{\lambda g(\tau)} d\tau, \quad (23.1)$$

где C — контур в комплексной плоскости τ , $h(\tau)$ и $g(\tau)$ — аналитические функции и λ — большой вещественный параметр. Многие интегралы могут быть приведены к такому виду с помощью подходящей замены переменной. Я имею в виду так называемый «метод наискорейшего спуска», или «метод седловой точки». Ни одно из этих названий не является вполне удовлетворительным, однако последнее более предпочтительно, поскольку термин «метод наискорейшего спуска» используется часто в совсем другом смысле¹⁾. Этот метод основан на следующем замечании: при больших λ основной вклад в интеграл (23.1) вносит окрестность точки контура C , в которой достигается максимум функции $\operatorname{Re}(\lambda g(\tau)) = \lambda \operatorname{Re} g(\tau)$. Функция $\operatorname{Re} g(\tau)$ является гармонической и поэтому не имеет точек максимума или минимума в области, в которой функция $g(\tau)$ голоморфна. Из уравнений Коши — Римана следует, что точки экстремума функции $\operatorname{Re} g(\tau)$ совпадают с точками, где $g'(\tau) = 0$, и являются седловыми точками [они называются также точками перевала. — *Перев.*]. Оказывается, что если максимум $\operatorname{Re} g(\tau)$ на контуре достигается в точке перевала, то основной вклад в интеграл вносит часть пути, лежащая в окрестности этой точки. Обычно вычисление интеграла является особенно простым,

¹⁾ В отечественной литературе принят термин «метод перевала», которого мы и будем здесь придерживаться. Более подробное изложение этого метода см. Евграфов [1], Де Брёйн [1]. — *Прим. перев.*

если путь интегрирования идет по градиенту функции $\operatorname{Re} g(\tau)$ (по крайней мере в окрестности точки перевала).

Пусть контур C задан уравнением $\tau = \tau(\sigma)$, где σ — вещественный параметр. Пусть $\tau_0 = \tau(\sigma_0)$ — точка на C , в которой достигается $\max \operatorname{Re} g(\tau)$. Из разложения

$$g(\tau(\sigma)) = g(\tau_0) + g'(\tau_0) \left(\frac{d\tau}{d\sigma} \right)_{\sigma=\sigma_0} (\sigma - \sigma_0) + \\ + \frac{1}{2} \left[g''(\tau_0) \left(\frac{d\tau}{d\sigma} \right)_{\sigma=\sigma_0}^2 + g'(\tau_0) \left(\frac{d^2\tau}{d\sigma^2} \right)_{\sigma=\sigma_0} \right] (\sigma - \sigma_0)^2 + \dots \quad (23.2)$$

следует, что $\operatorname{Re} g(\tau)$ имеет экстремум (на C) в точке $\tau = \tau_0$, если

$$\operatorname{Re} \left[g'(\tau_0) \left(\frac{d\tau}{d\sigma} \right)_{\sigma=\sigma_0} \right] = 0.$$

Пусть это условие выполняется в точке τ_0 , такой, что

$$g'(\tau_0) = 0, \quad (23.3)$$

т. е. путь выбран так, что он проходит через точку перевала функции $\operatorname{Re} g(\tau)$. Деформируя этот путь в окрестности точки τ_0 , можно добиться следующих упрощений: (1) $\operatorname{Im} \left[g'(\tau_0) \left(\frac{d\tau}{d\sigma} \right)_{\sigma=\sigma_0} \right] = 0$, так что осциллирующий множитель, по модулю равный 1, который возникает при другом выборе пути, в данном случае отсутствует, и (2) квадратичный член в формуле (23.2) существенно упрощается.

Если максимум $\operatorname{Re} g(\tau)$ на контуре C достигается в точке перевала, то формула (23.2) имеет вид

$$g(\tau(\sigma)) - g(\tau_0) = \frac{1}{2} g''(\tau_0) \left(\frac{d\tau}{d\sigma} \right)_{\sigma=\sigma_0}^2 (\sigma - \sigma_0)^2 + \dots \quad (23.4)$$

Если $g''(\tau_0) \neq 0$ и если σ — длина дуги вдоль пути C , то вещественная часть функции $g(\tau(\sigma)) - g(\tau_0)$ будет наименьшей (среди всех путей, проходящих через точку τ_0) на том пути, на котором величина

$$\frac{1}{2} g''(\tau_0) \left(\frac{d\tau}{d\sigma} \right)_{\sigma=\sigma_0}^2$$

является вещественной и отрицательной, т. е.

$$\arg \left[\left(\frac{d\tau}{d\sigma} \right)_{\sigma=\sigma_0} \right] = \frac{2k+1}{2} \pi - \frac{1}{2} \arg g''(\tau_0), \quad (23.5)$$

где k — целое число. Левая часть этой формулы — это направление кривой в точке τ_0 ; формула (23.5) дает направление линий наибо́льшего спуска, проходящих через точку τ_0 . Обычно

желательно выбрать контур C в окрестности точки перевала так, чтобы соотношение (23.5) выполнялось, но это необязательно. Столь же необязательно выбирать в качестве параметра σ длину дуги.

23.2. Асимптотика функции $Ai(x)$ при $x > 0$

Функцию $Ai(x)$ можно привести к виду (23.1), если положить

$$x = |x|e^{i\alpha}, \quad t = \sqrt{|x|} \tau, \quad -\pi < \alpha \leq \pi. \quad (23.6)$$

Продеформировав полученный путь в Γ_1 , получаем

$$Ai(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \exp\left(|x|^{1/2} \left(\tau e^{i\alpha} - \frac{1}{3} \tau^3\right)\right) d\tau. \quad (23.7)$$

Можно полностью исследовать асимптотическое поведение этого интеграла, используя только метод перевала. Однако проще применить метод перевала только к случаю $x > 0$, т. е. при $\alpha = 0$, а затем перенести полученные результаты на комплексные значения x с помощью развитой нами ранее асимптотической теории дифференциальных уравнений.

При $\alpha = 0$ мы должны исследовать интеграл

$$Ai(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \exp\left(x^{1/2} \left(\tau - \frac{1}{3} \tau^3\right)\right) d\tau. \quad (23.8)$$

Этот интеграл имеет вид (23.1), где

$$\lambda = x^{1/2}, \quad g(\tau) = \tau - \frac{1}{3} \tau^3.$$

Точками перевала, т. е. точками, в которых $g'(\tau) = 0$, являются точки $\tau_0 = -1$, $\tau_1 = 1$. Хорошо известно, что линиями наискорейшего спуска функции $\operatorname{Re} g(\tau)$ являются линии $\operatorname{Im} g(\tau) = \text{const}$. Полагая $\tau = u + iv$, получаем

$$\operatorname{Im} g(\tau) = v - u^2v + \frac{1}{3} v^3,$$

так что уравнение линии $\operatorname{Im} g(\tau) = \text{const}$, проходящей через точку $\tau_0 = -1$, имеет вид

$$v \left(1 - u^2 + \frac{1}{3} v^2\right) = 0.$$

Оказывается, что ветвь $v = 0$ этой кривой проходит через обе седловые точки. Функция $\operatorname{Re} g(\tau) = u + uv^2 - \frac{1}{3} u^3$ достигает минимума на этой кривой в точке $\tau_0 = -1$. Поэтому линией наи-

скорейшего спуска, проходящей через точку $\tau_0 = -1$, является ветвь гиперболы $u^2 - \frac{1}{3}v^2 = 1$. Эта кривая имеет асимптотические направления $\operatorname{arg} \tau = \pm \frac{2\pi}{3}$ на бесконечности, и поэтому ее можно взять в качестве пути Γ_1 .

Задача 23.1. Объяснить, почему точка перевала $\tau = +1$ не дает вклада в асимптотику функции Эйри.

Выбранный нами путь имеет то преимущество, что $\operatorname{Re} g(\tau)$ монотонно убывает при движении τ от точки перевала вдоль всего пути. Действительно, этот путь идет по градиенту функции $\operatorname{Re} g(\tau)$ и $\operatorname{grad} \operatorname{Re} g(\tau) \neq 0$ нигде вдоль пути, кроме точки $\tau = -1$. Путь Γ_1 удобно параметрически задать следующим образом:

$$\Gamma_1: \tau(\sigma) = u(\sigma) + iv(\sigma) = \operatorname{ch} \sigma + i\sqrt{3} \operatorname{sh} \sigma.$$

Тогда на Γ_1

$$\begin{aligned} g(\tau(\sigma)) &= \operatorname{Re} g(\tau(\sigma)) = u + uv^2 - \frac{1}{3}u^3 = \\ &= \operatorname{ch} \sigma \left(1 + 3 \operatorname{sh}^2 \sigma - \frac{1}{3} \operatorname{ch}^2 \sigma \right) \end{aligned} \quad (23.9)$$

и в окрестности точки $\sigma = 0$ имеем

$$g(\tau(\sigma)) = -\frac{2}{3} - 3\sigma^2 + O(\sigma^4). \quad (23.10)$$

Вынесем за знак интеграла (23.8) множитель, который равен вкладу от точки перевала, и представим этот интеграл в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Ai}(x) &= \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(x^{1/2}\left(g(\tau(\sigma)) + \frac{2}{3}\right)\right) (-\operatorname{sh} \sigma + i\sqrt{3} \operatorname{ch} \sigma) d\sigma = \\ &= \frac{\sqrt{3x}}{\pi} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \int_0^{\infty} \exp\left(x^{1/2}\left(g(\tau(\sigma)) + \frac{2}{3}\right)\right) \operatorname{ch} \sigma d\sigma. \end{aligned} \quad (23.11)$$

При этом мы использовали четность функции $g(\tau(\sigma))$.

Так как функция $g(\tau(\sigma)) + 2/3$ монотонно убывает и отрицательна при положительных σ , то

$$\int_0^{\infty} \exp\left(x^{1/2}\left(g(\tau(\sigma)) + \frac{2}{3}\right)\right) \operatorname{ch} \sigma d\sigma \sim \int_0^{\beta} \exp\left(x^{1/2}\left(g(\tau(\sigma)) + \frac{2}{3}\right)\right) \operatorname{ch} \sigma d\sigma \quad (23.12)$$

при любом $\beta > 0$. Это соотношение означает, что разность между левой и правой частями есть $O(x^{-m})$ при $x \rightarrow +\infty$ для любого $m > 0$.

Чтобы найти асимптотику последнего интеграла, сделаем замену переменной

$$s^2 = -\left(g(\tau(\sigma)) + \frac{2}{3}\right) = 3\sigma^2 + O(\sigma^4), \quad (23.13)$$

где s выбрано положительным при положительных σ . Ясно, что s — четная функция σ , голоморфная в точке $\sigma=0$, и что обратная к ней функция обладает такими же свойствами. Имеем

$$\int_0^\beta \exp\left(x^{3/2}\left(g(\tau(\sigma)) + \frac{2}{3}\right)\right) \operatorname{ch} \sigma d\sigma = \int_0^b e^{-x^{3/2}s^2} \varphi(s) ds, \quad (23.14)$$

где

$$\varphi(s) = \operatorname{ch} \sigma \frac{d\sigma}{ds} \quad (23.15)$$

и точке $\sigma=\beta$ соответствует точка $s=b$. При этом β выбрано настолько малым, чтобы s и обратная к ней функция были голоморфными функциями при $0 \leq \sigma \leq \beta$. Функция $\varphi(s)$ четная, и коэффициенты ее разложения

$$\varphi(s) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r s^{2r}$$

можно вычислить из соотношений (23.9), (23.13) и (23.15). В частности,

$$c_0 = \varphi(0) = \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_{s=0} = \left(\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)_{\sigma=0}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Представим $\varphi(s)$ в виде

$$\varphi(s) = \sum_{r=0}^m c_r s^{2r} + \hat{\varphi}_m(s) s^{2m+1},$$

где функция $\hat{\varphi}_m(s)$ ограничена при $0 \leq s \leq b$. Подставляя эту формулу в (23.14) и интегрируя почленно, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \exp\left(x^{3/2}\left(g(\tau(\sigma)) + \frac{2}{3}\right)\right) \operatorname{ch} \sigma d\sigma &= \\ &= \sum_{r=0}^m c_r \int_0^b e^{-x^{3/2}s^2} s^{2r} ds + \int_0^b e^{-x^{3/2}s^2} \hat{\varphi}_m(s) s^{2m+1} ds. \end{aligned} \quad (23.16)$$

Остаточный член легко оценивается:

$$0 < \int_0^b e^{-x^{3/2}s^2} |\widehat{\varphi}_m(s)| s^{2m+1} ds < k_m \int_0^b e^{-x^{3/2}s^2} s^{2m+1} ds < \\ < k_m x^{-\frac{3}{2}(m+1)} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^{2m+1} d\rho, \quad (23.17)$$

где k_m — постоянная и $\rho = x^{3/2}s$. Если во всех интегралах в правой части (23.16) заменить b на $+\infty$, то полученная сумма будет при $x \rightarrow \infty$ отличаться от исходной на экспоненциально малую величину. Далее,

$$\int_0^\infty e^{-x^{3/2}s^2} s^{2r} ds = (x^{3/2})^{-r - \frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^{2r} d\rho. \quad (23.18)$$

Значение интеграла, стоящего в правой части, хорошо известно. В частности, при $r=0$ этот интеграл равен $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Подставляя формулы (23.16) — (23.18) в (23.12), получаем

$$\int_0^\infty \exp\left(x^{3/2}\left(g(\tau(\sigma)) + \frac{2}{3}\right)\right) \operatorname{ch} \sigma d\sigma = \\ = x^{-3/4} \sum_{r=0}^m c_r x^{-3r/2} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^{2r} d\rho + O(x^{-3m/2}).$$

Окончательно из (23.11) получаем асимптотическое разложение

$$\operatorname{Ai}(x) \sim \frac{x^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \sum_{r=0}^\infty a_r x^{-3r/2}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad a_0 = 1. \quad (23.19)$$

Коэффициенты a_r можно вычислить точно. Мы опустим вычисления и приведем только окончательный результат:

$$a_r = \frac{(-1)^r}{r! 48^r} [1 \cdot 7 \dots (6r-5)] [5 \cdot 11 \dots (6r-1)], \quad r \geq 1.$$

23.4. Асимптотика решений уравнения Эйри при комплексных x

Тот факт, что уравнение Эйри имеет решение, которое разлагается в асимптотический ряд (23.19), может быть, конечно, получен с помощью общей теории, развитой в § 19 (см. задачу 19.2). Мы опустим ряд деталей и заметим, что преобразование

$$Y = \begin{pmatrix} x^{-1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z, \quad x = 2^{-2/3} t^2, \quad (23.20)$$

приводит систему (22.10), эквивалентную уравнению Эйри, к виду

$$t^{-2} \frac{dZ}{dt} = \begin{pmatrix} t^{-3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z. \quad (23.21)$$

Из теоремы 12.3 следует, что система (23.18) имеет решения вида

$$Z(t) = \hat{Z}(t) t^D e^{Q(t)}, \quad (23.22)$$

которые соответствуют любому сектору Σ с центральным углом, меньшим $\pi/3$. Оказывается, что

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} t^3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} x^{3/2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} x^{3/2} \end{pmatrix}. \quad (23.23)$$

Матрица D диагональная, а $Z(t)$ разлагается в асимптотический ряд по степеням t^{-1} , справедливый в Σ . Соответствующие секторы S в плоскости x , в которых эти асимптотические разложения для решений системы (22.10) имеют место, должны быть раствора не более чем $2\pi/3$.

Лучами раздела (см. § 15) в случае системы (23.21) являются лучи $\arg t = (2k+1)\frac{\pi}{6}$, где k — целое число. Скалярная функция $\text{Ai}(x)$ соответствует векторному решению системы (23.21) вида

$$z(t) = \begin{pmatrix} x^{1/2} \text{Ai}(x) \\ \text{Ai}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{1/2} t \text{Ai}(2^{2/3} t^2) \\ \text{Ai}'(2^{2/3} t^2) \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 15.1 решение $z(t)$ имеет асимптотическое разложение, пригодное в секторе $-\frac{\pi}{6} < \arg t < \frac{\pi}{6}$, и может отличаться от одного из столбцов матрицы (23.22) самое большее на постоянный множитель. Из соотношений (23.19) и (23.23) следует, что $z(t)$ пропорционально второму столбцу матрицы $Z(t)$. Следовательно, $z(t)$ — это решение, асимптотическое разложение которого содержит величину $\exp\left(-\frac{t^3}{3}\right)$, которая в секторе $|\arg t| < \frac{\pi}{6}$ по модулю меньше, чем $\left|\exp\left(\frac{t^3}{3}\right)\right|$. Из следствия теоремы 15.3 вытекает, что два луча раздела $\arg t = \frac{\pi}{6}$ и $\arg t = -\frac{\pi}{6}$ не являются лучами Стокса для решения $z(t)$, так что $z(t)$ имеет то же самое асимптотическое

представление в большом секторе — $\frac{\pi}{2} < \arg t < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, решение $Ai(x)$ уравнения Эйри не имеет лучей Стокса в области $|\arg x| < \pi$, т. е. формула (23.19) пригодна во всем секторе $|\arg x| < \pi$. Отрицательная вещественная полуось является линией Стокса. Действительно, асимптотические разложения функции $Ai(x)$ вблизи этой линии, над и под ней, получены с помощью аналитического продолжения членов ряда (23.19) с положительной вещественной полуоси в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно. Так как члены ряда (23.19) — многозначные функции, а $Ai(x)$ — однозначная функция, то асимптотическое разложение $Ai(x)$ имеет разрыв на отрицательной вещественной полуоси.

Чтобы полностью описать асимптотическое поведение $Ai(x)$, вернемся к решениям $u_j(x)$, определенным формулой (22.5). Мы полностью исследовали асимптотическое поведение функции $u_1(x) = 2\pi i Ai(x)$ в секторе $|\arg x| < \pi$. Формула (22.8) дает асимптотические разложения функций $u_2(x)$ и $u_3(x)$ в секторах, которые получаются удалением из комплексной плоскости лучей $\arg x = \pi/3$ и $\arg x = -\pi/3$ соответственно.

С помощью формулы (22.7), т. е.

$$u_1(x) = -u_2(x) - u_3(x),$$

можно получить асимптотическое разложение $u_1(x)$ на отрицательной вещественной полуоси так как луч $\arg x = \pi$ не является линией Стокса для функций $u_2(x)$ и $u_3(x)$. Наконец, с помощью формулы (22.8) можно найти асимптотику $u_2(x)$ и $u_3(x)$ на их линиях Стокса $\arg x = -\pi/3$ и $\arg x = \pi/3$ соответственно.

Задача 23.2. Найти асимптотическое разложение функции $u_1(x)$ на отрицательной вещественной полуоси. (Следует соблюдать осторожность при вычислении значений многозначных функций, входящих в разложения. Ответ веществен!)

Асимптотическое поведение решений $u_j(x)$, $j=1, 2, 3$, существенно зависит от знака вещественной части функции $\frac{2}{3}x^{3/2}$, стоящей в показателе. Если она положительна в некотором секторе, то решение обычно называется главным (в этом секторе); если же она отрицательна, решение называется подчиненным. Несмотря на то что любые два из трех решений $u_j(x)$ линейно независимы, пара решений, которые оба являются главными в некотором секторе, не является хорошей фундаментальной системой решений — оказывается, что с ней трудно работать. В каждом секторе с раствором $4\pi/3$, ограниченном двумя линиями Стокса, которые имеют вид $\arg x = 0, \pi/3, -\pi/3$, есть два

решения, таких, что знаки функции $-\frac{2}{3}x^{3/2}$, стоящей в показателе, различны для этих решений. Следовательно, все три решения $u_j(x)$ полезны в асимптотической теории уравнения Эйри.

Относительная величина модуля экспоненциального множителя, входящего в асимптотику решений, конечно, столь же важна и для дифференциальных уравнений порядка $n > 2$ (см., например, § 15). В этом случае термин «подчиненное» употребляется для решения со вторым по величине (по модулю) экспоненциальным множителем. Для решений, которые соответствуют меньшим экспонентам, можно употребить термин «рецессивные».

**Асимптотические разложения
по параметру**

24. Введение

24.1. Аналитическая зависимость от параметра

Большинство дифференциальных уравнений, возникающих в прикладных вопросах, содержат одну или несколько физических констант. Вопрос о зависимости решений дифференциальных уравнений от этих параметров очень важен во многих приложениях и приводит к многочисленным интересным теоретическим результатам. В этой главе мы ограничимся линейными однородными дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых являются аналитическими функциями от одного параметра.

Ясно, что не все решения такого дифференциального уравнения будут аналитически зависеть от параметра, так как произведение решения на любую функцию, зависящую только от параметра, снова является решением уравнения. Тем не менее решение системы уравнений первого порядка, которое регулярно по параметру хотя бы при одном значении независимой переменной, является аналитической функцией параметра. Этот факт составляет содержание фундаментальной теоремы теории дифференциальных уравнений, доказательство которой мы опустим. Эта теорема может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 24.1. Пусть X — односвязная область в комплексной плоскости x и E — область в комплексной плоскости ε . Пусть $A(x, \varepsilon)$ — квадратная матрица порядка n , голоморфная по совокупности переменных при $x \in X$, $\varepsilon \in E$, $a, y_0(\varepsilon)$ есть n -мерный вектор-столбец, голоморфный по ε при $\varepsilon \in E$. Тогда решение $y = y(x, \varepsilon)$ задачи Коши

$$y' = A(x, \varepsilon)y, \quad (24.1)$$

$$y(x_0, \varepsilon) = y_0(\varepsilon), \quad x_0 \in X, \quad (24.2)$$

голоморфно по совокупности переменных при $x \in X$, $\varepsilon \in E$.

В этой теореме предполагается, что X и x_0 не зависят от ε , а E не зависит от x .

В предыдущих главах мы исследовали структуру решений дифференциальных уравнений в окрестности особой точки, в которой коэффициенты уравнений имеют особенность по x . Теперь мы поставим аналогичную задачу о зависимости решений от параметра ε в окрестности точки, в которой коэффициенты уравнения имеют особенность по параметру ε .

Один из наших первых результатов относительно поведения решений в окрестности особой (по x) точки состоял в том, что решения могут быть многозначными функциями x в окрестности изолированной особенности. Можно ожидать, что такая же ситуация имеет место по отношению к ε . Но, к счастью, как следует из теоремы 24.1, это не так. Действительно, в этой теореме не требуется, чтобы область E (в отличие от области X) была односвязной. Следовательно, если $A(x, \varepsilon)$ имеет изолированную особенность по ε в точке $\varepsilon = \varepsilon_0$, то мы можем применить теорему 24.1, взяв в качестве E окрестность точки ε_0 , из которой удалена сама эта точка, и получить, что решение, голоморфное по ε при $\varepsilon \in E$ и при некотором $x = x_0 \in X$, голоморфно по ε при $\varepsilon \in E$ для всех $x \in X$. При $\varepsilon = \varepsilon_0$ решение будет, вообще говоря, иметь особенность по ε , но эта особая точка будет изолированной особой точкой однозначного характера.

24.2. Примеры

Теорема 24.1 позволяет нам, по крайней мере в принципе, построить фундаментальную систему решений уравнения (24.1) в виде сходящихся рядов по положительным степеням $\varepsilon - \varepsilon_0$, если $A(x, \varepsilon)$ голоморфна по ε в точке $\varepsilon = \varepsilon_0$. Коэффициенты этих рядов являются функциями x . Их можно найти с помощью обычного метода сравнения коэффициентов. Рекуррентные формулы, связывающие эти коэффициенты, сами являются линейными дифференциальными уравнениями, не зависящими от ε . Эта процедура широко используется в чистой и прикладной математике, и мы не будем подробно ее описывать.

В окрестности изолированной особенности по ε этот метод уже неприменим. Конечно, можно представить решения в виде рядов Лорана по положительным и отрицательным степеням $\varepsilon - \varepsilon_0$, но коэффициенты этих рядов нельзя вычислить последовательно. Простые примеры показывают, однако, что иногда можно построить формальные ряды для решений по положительным степеням $\varepsilon - \varepsilon_0$ даже в том случае, когда коэффициенты уравнения имеют особенность в точке $\varepsilon = \varepsilon_0$. Например, скалярное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon u'' + a(x)u' + b(x)u = 0 \quad (24.3)$$

с голоморфными коэффициентами имеет формальное решение вида

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r(x) \varepsilon^r, \quad (24.4)$$

где коэффициенты c_r удовлетворяют рекуррентной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} a(x) c'_0 + b(x) c_0 &= 0, \\ a(x) c'_r + b(x) c_r &= -c''_{r-1}, \quad r \geq 1. \end{aligned} \quad (24.5)$$

По аналогии с результатами, полученными в предыдущих главах, можно подозревать, что ряд (24.4) с коэффициентами, которые определяются из (24.5), является, вообще говоря, расходящимся, но в то же время можно надеяться, что этот ряд является асимптотическим для некоторого решения уравнения (24.3).

Воспользуемся этой возможностью, чтобы отметить основные черты таких задач, с которыми часто придется иметь дело в дальнейшем. Предположим, что $a(x) = 0$ в некоторой точке $x = x_0$. Тогда при всех $\varepsilon \neq 0$ решения уравнения (24.3) голоморфны при $x = x_0$, но функции $c_r(x)$ будут, вообще говоря, иметь особенность при $x = x_0$. Поэтому маловероятно, что ряд (24.4) будет асимптотическим для некоторого решения в области, содержащей точку $x = x_0$. И действительно, асимптотическое поведение решений уравнения (24.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в окрестности точки $x = x_0$ оказывается весьма сложным. Вопросы такого рода называются обычно задачами о «точках поворота» или о «точках перехода».

Задача 24.1. Выяснить условия, при которых система

$$\varepsilon^h y' = A(x, \varepsilon) y + f(x, \varepsilon),$$

где $h > 0$ — целое число, имеет формальное решение вида

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r(x) \varepsilon^r.$$

Другой поучительный пример можно получить, сделав замену переменной

$$z = x\varepsilon^{-2/3} \quad (24.6)$$

в уравнении Эйри

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - zu = 0. \quad (24.7)$$

Полученное в результате этой замены уравнение

$$\varepsilon^2 u'' - xu = 0 \quad (24.8)$$

имеет решение $u = Ai(x\varepsilon^{-2/3})$, которое, как известно из гл. VI, разлагается в асимптотический ряд

$$Ai(x\varepsilon^{-2/3}) \sim (2\sqrt{\pi}x^{1/6}\varepsilon^{-1/6})^{-1} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \frac{2}{3}x^{3/2}\right) \left(1 - \frac{5}{48}x^{-3/2}\varepsilon + \dots\right), \quad (24.9)$$

где многоточие означает расходящийся ряд по степеням ε . Эта асимптотика пригодна при $\varepsilon \rightarrow 0$, если

$$|x| \geq x_0 > 0, \quad -\pi < \arg(x\varepsilon^{-2/3}) < \pi. \quad (24.10)$$

Точку $x=0$ следует исключить из области применимости асимптотики (24.9), так как при $x=0$ этот ряд теряет смысл. Это другой пример точки поворота. Условие $|x| \geq x_0 > 0$ оказывается слишком ограничительным. Действительно, асимптотическое разложение функции $Ai(z)$ пригодна при $z \rightarrow \infty$, так что формула (24.9) справедлива при $x\varepsilon^{-2/3} \rightarrow \infty$. Следовательно, отрезки ряда, стоящего в правой части (24.9), будут являться приближениями левой части для всех значений x и ε , для которых величина $x\varepsilon^{-2/3}$ велика, если эта точка лежит в секторе, указанном в (24.10). Асимптотическая теория поведения решений дифференциальных уравнений, содержащих параметр, никоим образом не может быть сведена к развитой нами ранее асимптотической теории для уравнений, не содержащих параметра, хотя последний пример, казалось бы, показывает, что такое сведение возможно. Наличие в задаче двух комплексных переменных приводит ко многим новым важным и интересным явлениям (таким, как точки поворота, о которых речь шла выше). С другой стороны, верно, что имеется глубокая аналогия между этими двумя теориями. В следующих параграфах будут доказаны некоторые общие теоремы об асимптотических разложениях, которые по содержанию и по методу доказательства во многом сходны с изложенными в гл. IV.

25. Формальная теория

25.1. Постановка задачи

Мы будем рассматривать дифференциальные уравнения вида

$$\varepsilon^h y' = A(x, \varepsilon) y, \quad (25.1)$$

где $h > 0$ — целое число и матрица $A(x, \varepsilon)$ или голоморфна по x и по ε при $x \in X$ и при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, или, в более общем случае, обладает асимптотическим разложением вида

$$A(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad (25.2)$$

которое справедливо при ε , лежащем в некотором секторе Σ комплексной плоскости ε , равномерно по $x \in X$. В последнем случае необходимо дополнительно предположить, что $A(x, \varepsilon)$ голоморфна по x и ε при $x \in X$ и при $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \Sigma$. В этом предположении функции $A_r(x)$ будут голоморфны в X , что следует из теоремы 9.4.

Согласно сделанным выше предположениям, мы ограничимся рассмотрением особенностей по параметру специального вида. Прежде всего эти особенности являются полюсами. Более того, положение полюса не зависит от x . По-видимому, не существует никакой общей теории для систем более общего вида, чем система (25.1). Например, простое дифференциальное уравнение $\varepsilon \frac{dy}{dx} = (x^2 - \varepsilon)^{-1} y$ уже не относится к виду (25.1) при $||x| \leq x_0$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Коэффициент этого уравнения имеет полюс первого порядка при $\varepsilon = x^2$. Поставим снова задачу о построении асимптотических разложений, пригодных в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Заметим, что в теории, которая будет развита ниже, нет фактов, соответствующих различию между регулярной и иррегулярной особенностями. В этих задачах нет важного подкласса уравнений, для которых формальные степенные ряды всегда являются сходящимися.

Первый важный шаг, который был сделан нами при изучении иррегулярно особых точек, состоял в сведении исходной системы к системе с блочно-диагональной матрицей с помощью подходящего линейного преобразования (см. § 11). Аналогичная процедура будет проделана и в настоящей задаче. Для этого потребуются некоторые дополнительные сведения из теории матриц, которые будут приведены ниже.

25.2. Некоторые сведения из теории матриц: голоморфная блочная диагонализация

Пусть $M(x)$ есть $(n \times n)$ -матрица, голоморфная в точке $x = 0$. Если $N(x)$ — другая такая матрица и если матрицы $M(x)$ и $N(x)$ подобны в каждой точке некоторой окрестности точки $x = 0$, то очевидно, что в этой окрестности существует невырожденная матрица $T(x)$, такая, что

$$T^{-1}(x) M(x) T(x) = N(x). \quad (25.3)$$

Однако далеко не всегда возможно выбрать матрицу $T(x)$ так, чтобы выполнялось (25.3) и чтобы эта матрица была голоморфна в точке $x = 0$.

Задача 25.1. Пусть

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N(x) = \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(а) Найти матрицу $T(x)$, удовлетворяющую соотношению (25.3).

(б) Показать, что нельзя построить матрицу $T(x)$, удовлетворяющую соотношению (25.3) и такую, чтобы эта матрица и обратная к ней были голоморфны в окрестности точки $x=0$.

Таким образом, возникает естественная задача: найти каноническую форму голоморфной матрицы, к которой ее можно привести с помощью преобразования подобия с голоморфной матрицей. Насколько мне известно, эта задача не решена. Следующий, более скромный результат в этом направлении доказывается без особого труда (см. Сибуйя [9]; другое доказательство см. Сибуйя [1]).

Теорема 25.1. Пусть $M(x)$ — квадратная матрица порядка n , голоморфная в точке $x=0$. Предположим, что собственные значения λ_j , $j=1, 2, \dots, n$, матрицы $M(0)$ можно разбить на две группы $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$, такие, что $\lambda_j \neq \lambda_k$, если $j \leq p$ и $k > p$. Тогда существует матрица $T(x)$, голоморфная в точке $x=0$ вместе со своей обратной и такая, что

$$T^{-1}(x)M(x)T(x) = N(x),$$

где $N(x)$ имеет блочно-диагональный вид

$$N(x) = \begin{pmatrix} N_{11}(x) & 0 \\ 0 & N_{22}(x) \end{pmatrix}. \quad (25.4)$$

Здесь $N_{11}(x)$ — квадратная матрица порядка p , причем матрица $N_{11}(0)$ имеет собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, а матрица $N_{22}(0)$ — собственные значения $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что матрица $M(0)$ имеет блочно-диагональный вид

$$M(0) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, \quad (25.5)$$

где матрицы M_1 и M_2 имеют собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ соответственно. Этого нетрудно добиться, например, если совершить над матрицей $M(x)$ преобразование подобия с помощью постоянной матрицы, которое приводит матрицу $M(0)$ к жордановой нормальной форме (см. теорему 16.1).

Запишем $M(x)$ в виде

$$M(x) = \begin{pmatrix} M_{11}(x) & M_{12}(x) \\ M_{21}(x) & M_{22}(x) \end{pmatrix},$$

где $M_{11}(x)$ есть $(p \times p)$ -матрица. В силу наших предположений имеем

$$M_{11}(0) = M_1, \quad M_{22}(0) = M_2, \quad M_{12}(0) = M_{21}(0) = 0. \quad (25.6)$$

Построим голоморфную матрицу $T(x)$ вида

$$T(x) = \begin{pmatrix} I & T_{12}(x) \\ T_{21}(x) & I \end{pmatrix} \quad (25.7)$$

(деление на блоки такое же, как и в (25.5)), такую, что

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_{11}(x) & M_{12}(x) \\ M_{21}(x) & M_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T_{12}(x) \\ T_{21}(x) & I \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} I & T_{12}(x) \\ T_{21}(x) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11}(x) & 0 \\ 0 & N_{22}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (25.8)$$

Если, кроме того, $\det T(0) \neq 0$, то $T(x)$ есть искомая матрица. Уравнение (25.8) эквивалентно системе четырех уравнений

$$\begin{aligned} M_{11}(x) + M_{12}(x) T_{21}(x) &= N_{11}(x), \\ M_{11}(x) T_{12}(x) + M_{12}(x) &= T_{12}(x) N_{22}(x), \\ M_{21}(x) + M_{22}(x) T_{21}(x) &= T_{21}(x) N_{11}(x), \\ M_{21}(x) T_{12}(x) + M_{22}(x) &= N_{22}(x). \end{aligned} \quad (25.9)$$

Исключая из этих уравнений $N_{11}(x)$ и $N_{22}(x)$, получаем

$$M_{12}(x) + M_{11}(x) T_{12}(x) - T_{12}(x) M_{22}(x) - \\ - T_{12}(x) M_{21}(x) T_{12}(x) = 0, \quad (25.10a)$$

$$M_{21}(x) + M_{22}(x) T_{21}(x) - T_{21}(x) M_{11}(x) - \\ - T_{21}(x) M_{12}(x) T_{21}(x) = 0. \quad (25.10b)$$

Уравнение (25.10a) — это $p(n-p)$ скалярных квадратных уравнений для $p(n-p)$ элементов матрицы $T_{12}(x)$. При $x=0$ это уравнение в силу предположения (25.6) имеет решение $T_{12}(0) = 0$. Главная линейная часть (по отношению к элементам матрицы $T_{12}(x)$) левой части формулы (25.10a) есть $M_{11}(x) T_{12}(x) - T_{12}(x) M_{22}(x)$. Определяемое этой матрицей линейное преобразование в пространстве $p(n-p)$ измерений, элементами которого являются элементы матрицы $T_{12}(x)$, не имеет нулевого собственного значения при $x=0$. Это следует из теоремы 4.1 и из

предположения, что матрицы $M_{11}(0) = M_1$ и $M_{22}(0) = M_2$ не имеют общих собственных значений. Определитель этого линейного преобразования в точке $x=0$ есть якобиан левой части уравнения (25.10а), вычисленный при $x=0$, $T_{12}=0$. Применяя теорему о неявной функции, получаем, что уравнение (25.10а) как уравнение относительно $T_{12}(x)$ имеет единственное голоморфное решение, такое, что $T_{12}(0)=0$. Аналогично доказывается существование решения $T_{21}(x)$ уравнения (25.10б), голоморфного в точке $x=0$ и такого, что $T_{21}(0)=0$.

Далее, матрицы $N_{11}(x)$ и $N_{22}(x)$ находятся из первого и последнего уравнений (25.9), и тогда выполняется (25.8). Наконец, заметим, что $T(0)=I$, так что матрица $T(x)$ невырождена в окрестности точки $x=0$. Это завершает доказательство теоремы 25.1.

Определение 25.1. Две матрицы $M(x)$ и $N(x)$, голоморфные в некоторой области X комплексной плоскости x , называются *голоморфно подобными* в X , если существует матрица $T(x)$, голоморфная в X вместе со своей обратной и такая, что

$$N(x) = T^{-1}(x) M(x) T(x).$$

Следствие из теоремы 25.1. *Всякая матрица $M(x)$, голоморфная в точке $x=0$, в некоторой окрестности точки $x=0$ голоморфно подобна блочно-диагональной матрице*

$$\begin{pmatrix} N_{11}(x) & & & & 0 \\ & N_{22}(x) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & N_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

такой, что каждая матрица $N_{jj}(0)$ имеет только одно (кратное) собственное значение λ_j и $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$.

25.3. Формальное упрощение

Теорема 25.1 дает возможность приспособить с очень небольшими изменениями формальные построения § 11 к нашей задаче. Рассмотрим систему, аналогичную системе (25.1):

$$\varepsilon^h Y' = A(x, \varepsilon) Y, \quad (25.11)$$

где Y есть $(n \times n)$ -матрица и матрица $A(x, \varepsilon)$ имеет разложение вида (25.2). Преобразование вида $Y = T(x) Y^*$, где матрицы $T(x)$ и $T^{-1}(x)$ голоморфны в точке $x=0$, приводит систему (25.11) к аналогичной системе с матрицей

$$A^*(x, \varepsilon) = T^{-1}(x) A(x, \varepsilon) T(x) - \varepsilon^h T^{-1}(x) T'(x).$$

Имеем $A^*(x, 0) = T_x^{-1}(x) A_0(x) T(x)$. Если собственные значения λ_j , $j=1, \dots, n$, матрицы $A_0(0)$ можно разбить на две группы $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$, не имеющие общих элементов, то в силу теоремы 25.1 матрицу $T(x)$ можно выбрать так, чтобы матрица $A^*(x, 0)$ была прямой суммой двух квадратных матриц порядка p и $n-p$ соответственно. Предположим для упрощения выкладок, что такое преобразование над уравнением (25.11) уже проделано, т. е. $A_0(x)$ имеет вид

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} A_0^{11}(x) & 0 \\ 0 & A_0^{22}(x) \end{pmatrix}, \quad (25.12)$$

где матрица $A_0^{11}(0)$ имеет порядок p и собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, а матрица $A_0^{22}(0)$ имеет собственные значения $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$. Это предположение не ограничивает общности.

Далее, положим

$$Y = P(x, \varepsilon) Z. \quad (25.13)$$

Тогда система (25.11) примет вид

$$\varepsilon^h Z' = B(x, \varepsilon) Z, \quad (25.14)$$

где

$$B(x, \varepsilon) = P^{-1}(x, \varepsilon) A(x, \varepsilon) P(x, \varepsilon) - \varepsilon^h P^{-1}(x, \varepsilon) P'(x, \varepsilon), \quad (25.15)$$

т. е.

$$\varepsilon^h P'(x, \varepsilon) = A(x, \varepsilon) P(x, \varepsilon) - P(x, \varepsilon) B(x, \varepsilon). \quad (25.16)$$

Если мы напишем формальные ряды

$$P(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r, \quad (25.17)$$

$$B(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r(x) \varepsilon^r, \quad (25.18)$$

подставим эти ряды и (25.2) в (25.16) и соберем члены с одинаковыми степенями ε , то уравнение (25.16) будет формально удовлетворяться в случае, когда матрицы P_r и B_r удовлетворяют рекуррентной системе уравнений

$$A_0(x) P_0(x) - P_0(x) B_0(x) = 0, \quad (25.19)$$

$$A_0(x) P_r(x) - P_r(x) B_0(x) =$$

$$= \sum_{s=0}^{r-1} [P_s(x) B_{r-s}(x) - A_{r-s}(x) P_s(x)] + P'_{r-h}(x), \quad r > 0. \quad (25.20)$$

Последний член в (25.20) при $r < h$ следует опустить.

Дальнейшая процедура в точности такая же, как и в § 11. Вначале удовлетворим уравнению (25.19), полагая

$$B_0(x) = A_0(x), \quad (25.21)$$

$$P_0(x) = I. \quad (25.22)$$

Тогда формула (25.20) примет вид

$$A_0(x)P_r(x) - P_r(x)A_0(x) = B_r(x) - H_r(x), \quad r > 0, \quad (25.23)$$

где $H_r(x)$ зависят только от $P_j(x)$, $B_j(x)$ и $P'_j(x)$ с номерами $j < r$.

Теперь покажем, что уравнениям (25.23) можно последовательно удовлетворить с помощью матриц $B_r(x)$ и $P_r(x)$ вида

$$B_r(x) = \begin{pmatrix} B_r^{11}(x) & 0 \\ 0 & B_r^{22}(x) \end{pmatrix}, \quad r > 0, \quad (25.24)$$

$$P_r(x) = \begin{pmatrix} 0 & P_r^{12}(x) \\ P_r^{21}(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad r > 0, \quad (25.25)$$

которые голоморфны в окрестности точки $x=0$, зависящей только от $A_0(x)$. Эта окрестность определяется из условия, что матрицы $A_0^{11}(x)$ и $A_0^{22}(x)$ не должны иметь в ней общих собственных значений. На деталях доказательства мы не будем подробно останавливаться, поскольку все рассуждения такие же, как и в § 11. Эти соображения приводят к следующему аналогу теоремы 11.1.

Теорема 25.2. Пусть собственные значения матрицы $A_0(0)$ состоят из двух групп $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$, таких, что $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j < p, k > p$. Тогда существует формальный степенной ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r$$

с коэффициентами, голоморфными в некоторой окрестности точки $x=0$, не зависящей от ε , в которой $\det P_0(x) \neq 0$, такой, что формальная подстановка

$$Y = \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r \right) Z$$

переводит уравнение (25.1) в формальное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^h Z' = \left(\sum_{r=0}^{\infty} B_r(x) \varepsilon^r \right) Z, \quad (25.26)$$

где все матрицы $B_r(x)$ имеют блочно-диагональный вид (25.24) и голоморфны в указанной выше окрестности точки $x=0$.

26. Аналитическое упрощение

26.1. Вспомогательное нелинейное дифференциальное уравнение

Аналогия между проведенными выше рассуждениями и между разд. 12.1 является столь тесной, что проведение рассуждений во всех деталях излишне. Введем такие же обозначения, как и в разд. 12.1. Тогда вопрос о существовании преобразования вида (25.13), которое приводит уравнение (25.11) к уравнению (25.14) с блочно-диагональной матрицей коэффициентов $B(x, \varepsilon)$, можно свести к изучению нелинейного дифференциального уравнения

$$\varepsilon^h \frac{d\hat{P}^{21}}{dx} = A^{21}(x, \varepsilon) + A^{22}(x, \varepsilon) \hat{P}^{21} - \hat{P}^{21} A^{11}(x, \varepsilon) - \hat{P}^{21} A^{12}(x, \varepsilon) \hat{P}^{21} \quad (26.1)$$

и аналогичного уравнения для $\hat{P}^{12}(x, \varepsilon)$. Из формальных выкладок разд. 25.3 следует, что уравнению (26.1) формально удовлетворяет ряд по степеням ε , который начинается с первой степени ε .

Уравнение (26.1) состоит из $N = p(n-p)$ скалярных уравнений, и его можно записать в виде векторного дифференциального уравнения

$$\varepsilon^h \omega' = f(x, \omega, \varepsilon), \quad (26.2)$$

где ω — вектор порядка N , компонентами которого являются элементы матрицы \hat{P}^{21} , взятые в некотором порядке. Мы знаем, что это уравнение допускает формальное решение вида

$$\sum_{r=1}^{\infty} \omega_r(x) \varepsilon^r.$$

Вектор-функция $f(x, \omega, \varepsilon)$ является квадратичной функцией от компонент $\omega_1, \dots, \omega_N$ вектора ω . Линейная часть этой квадратичной функции имеет в других обозначениях вид $A^{22}(x, \varepsilon) \hat{P}^{21} - \hat{P}^{21} A^{11}(x, \varepsilon)$ и потому получается из вектора ω с помощью линейного преобразования, которое невырожденно при $x = \varepsilon = 0$, что следует из теоремы 4.1 и предположения, что $A_0^{22}(0)$ и $A_0^{11}(0)$ не имеют общих собственных значений.

Для таких нелинейных дифференциальных уравнений в разд. 27.1 будет доказана теорема, аналогичная теореме 12.1, или, вернее, теореме 14.1. Эту теорему можно сформулировать следующим образом.

Теорема 26.1. Пусть $f(x, z, \varepsilon)$ есть N -мерная вектор-функция от комплексных переменных x и ε и от N -мерного комплексного вектора z . Предположим, что

$$(a) f(x, z, \varepsilon) \text{ голоморфна по совокупности переменных при} \\ |x| \leq x_0, \|z\| \leq z_0, 0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \varepsilon \in \Sigma. \quad (26.3)$$

Здесь x_0, z_0, ε_0 — положительные постоянные, не зависящие от x, z, ε , и Σ — некоторый сектор в плоскости ε ;

(b) $f(x, z, \varepsilon)$ имеет асимптотическое разложение в ряд по степеням ε при $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \in \Sigma$, равномерное по x и z при $|x| \leq x_0, \|z\| \leq z_0$;

(c) матрица Якоби

$$\left\{ \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in \Sigma}} \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k} \right)_{x=z=0} \right\} \quad (26.4)$$

невыврождена. Здесь $f_j(x, z, \varepsilon), j=1, \dots, N$, — компоненты f . Тогда если дифференциальному уравнению

$$e^h y' = f(x, y, \varepsilon) \quad (26.5)$$

($h > 0$ — целое число) формально удовлетворяет ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} y_r(x) \varepsilon^r, \quad (26.6)$$

коэффициенты которого голоморфны при $|x| \leq x_0$, то существует решение $y = \varphi(x, \varepsilon)$ уравнения (26.5), определенное в области

$$|x| \leq x_1 \leq x_0, 0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0, \varepsilon \in \Sigma^* \quad (26.7)$$

(x_1, ε_1 — постоянные) и такое, что

$$\varphi(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=1}^{\infty} y_r(x) \varepsilon^r$$

при $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \in \Sigma^*$ равномерно по x . Здесь Σ^* — некоторый подсектор сектора Σ .

Единственное различие между этой теоремой и теоремой 12.1 состоит в том, что в данной теореме ничего не говорится о размерах сектора Σ^* . Если матрица $A(x, \varepsilon)$ голоморфна по ε при $\varepsilon=0$, так что в качестве Σ можно взять всю плоскость ε , то такую информацию можно получить, но трудно утверждать, что подобная ситуация будет иметь место в общем случае.

26.2. Результаты

Применяя теорему 26.1 к дифференциальному уравнению (26.1) и к соответствующему уравнению для $\hat{P}^{12}(x, \varepsilon)$, мы немедленно получаем следующий важный результат.

Теорема 26.2. Пусть $A(x, \varepsilon)$ — матричная функция, обладающая асимптотическим разложением вида (25.2). Пусть собственные значения матрицы $A_0(0)$ состоят из двух групп $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$, таких, что $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \leq p, k > p$. Тогда существует функция $P(x, \varepsilon)$, голоморфная по совокупности переменных в области вида (26.7), имеющая в секторе Σ^* асимптотическое разложение

$$P(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \det P_0(x) \neq 0 \quad (|x| \leq x_1),$$

равномерное по x , и такая, что преобразование

$$Y = P(x, \varepsilon) Z$$

приводит дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^h Y' = A(x, \varepsilon) Y$$

к виду

$$\varepsilon^h Z' = B(x, \varepsilon) Z.$$

Здесь матрица $B(x, \varepsilon)$ имеет блочно-диагональный вид

$$B(x) = \begin{pmatrix} B^{11}(x, \varepsilon) & 0 \\ 0 & B^{22}(x, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Матрицы $B^{jj}(x, \varepsilon)$ разлагаются в асимптотические ряды по степеням ε , пригодные при $\varepsilon \rightarrow 0$, в Σ^* , и собственные значения матрицы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B^{jj}(0, \varepsilon)$$

суть $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ при $j=1$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ при $j=2$.

Если все собственные значения λ_j матрицы $A_0(0)$ различны, то теорема 26.2 позволяет построить фундаментальную систему решений дифференциального уравнения с известным асимптотическим поведением при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, в этом случае можно, применяя теорему 26.2 несколько раз, свести исходное уравнение к распадающейся системе скалярных дифференциальных уравнений.

Далее, при $n=1$ уравнение (25.11) имеет решение

$$Y(x, \varepsilon) = \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^x A(t, \varepsilon) dt\right) = \hat{Y}(x, \varepsilon) \exp\left(\sum_{r=0}^{h-1} \varepsilon^r \int_0^x A_r(t) dt\right),$$

где $\hat{Y}(x, \varepsilon)$ в силу теоремы 8.4 разлагается в асимптотический ряд по степеням ε , пригодный в Σ и такой, что его главный член равен 1 при $x=0$.

Если мы решим n скалярных уравнений, на которые распадается исходная система, и вернемся к исходным функциям с помощью последовательности преобразований вида (25.13), то мы получим аналог теоремы 12.3. Заметим, что эти преобразования действуют на главный член матрицы $A(x, \varepsilon)$ как преобразование подобия, так что диагональные элементы $\mu_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, диагональной матрицы, к которой преобразуется $A_0(x)$, являются собственными значениями матрицы $A_0(x)$. В частности,

$$\mu_j(0) = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Нами доказана

Теорема 26.3. Пусть выполнены все условия теоремы 26.2, и пусть, кроме того, все собственные значения матрицы $A_0(0)$ различны. Тогда дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^h Y' = A(x, \varepsilon) Y$$

имеет фундаментальную матрицу решений вида

$$Y(x, \varepsilon) = \hat{Y}(x, \varepsilon) e^{Q(x, \varepsilon)}, \quad (26.8)$$

где матрица $\hat{Y}(x, \varepsilon)$ имеет при ε , лежащем в некотором подсекторе сектора Σ , и при $|x| \leq x_1$ равномерное по x асимптотическое разложение

$$\hat{Y}(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \hat{Y}_r(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Коэффициенты этого разложения голоморфны при $|x| \leq x_1$, и в этой области $\det \hat{Y}_0(x) \neq 0$. Матрица $Q(x, \varepsilon)$ диагональная и имеет вид

$$Q(x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^h Q_k(x) \varepsilon^{-k},$$

где $Q_k(x)$ голоморфны при $|x| \leq x_1$. В частности,

$$Q_h(x) = \text{diag} \left(\int_0^x \mu_1(t) dt, \dots, \int_0^x \mu_n(t) dt \right),$$

где $\mu_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, — собственные значения матрицы $A_0(x)$.

Пример. С помощью преобразования (1.3) можно перейти от скалярного уравнения (24.3) к матричному уравнению

$$\varepsilon Y' = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] Y.$$

Собственные значения $\mu_j(x)$ матрицы $A_0(x)$ равны

$$\mu_1(x) = 0, \quad \mu_2(x) = a(x).$$

Если $a(0) \neq 0$, то применима теорема 26.3, и поэтому в некотором достаточно узком секторе в комплексной плоскости ε существует фундаментальная матрица вида (26.8), где

$$Q(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\int_0^x a(t) dt \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты ряда для $\hat{Y}(x, \varepsilon)$ можно вычислить с помощью метода разд. 25.3, но, пожалуй, проще иметь дело непосредственно с исходным скалярным уравнением (24.3). Выше было установлено, что это уравнение имеет два асимптотических решения вида

$$u_1(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} c_r(x) \varepsilon^r \quad (26.9a)$$

и

$$u_2(x, \varepsilon) \sim \left(\sum_{r=0}^{\infty} d_r(x) \varepsilon^r \right) \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(t) dt \right) \quad (26.9b)$$

соответственно. Коэффициенты $c_r(x)$ и $d_r(x)$ можно вычислить, если подставить выражения (26.9) в (24.3) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях ε .

Для $u_1(x)$ это уже было сделано в разд. 24.2. Для $u_2(x)$ с помощью несложных вычислений получаем рекуррентные уравнения

$$\begin{aligned} ad'_0 - (b - a')d_0 &= 0, \\ ad'_r - (b - a')d_r &= d''_{r-1}, \quad r \geq 1, \end{aligned}$$

которые можно последовательно проинтегрировать. Заметим, что $c_r(x)$ и $d_r(x)$ неоднозначно определяются из рекуррентных уравнений, так что полученное решение зависит от выбора этих функций.

Задача 26.1. Применить теорему 26.3 к дифференциальному уравнению (24.8) и сравнить полученные результаты с рядами, построенными в разд. 24.2. Заметим, что теорему 26.3 необходимо применить в окрестности точки, отличной от точки $x=0$. (Указание: положить $u = y_1$, $\varepsilon y'_1 = y_2$.)

Задача 26.2. Какую информацию относительно поведения решений уравнения Бесселя порядка n при $n \rightarrow \infty$ можно получить, используя теорему 26.3? (Указание: свести уравнение к системе, положив $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $y_1 = u$, $\varepsilon y_1' = y_2$.)

27. Доказательство теоремы 26.1

27.1. Предварительные преобразования

Введем обозначения

$$a(x, \varepsilon) = f(x, 0, \varepsilon), \quad A(x, \varepsilon) = \left[\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k} \right)_{z=0} \right],$$

$$g(x, z, \varepsilon) = f(x, z, \varepsilon) - a(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)z.$$

Тогда дифференциальное уравнение (26.5) примет вид

$$\varepsilon^h y' = a(x, \varepsilon) + A(x, \varepsilon)y + g(x, y, \varepsilon). \quad (27.1)$$

Пусть T — постоянная матрица, такая, что матрица

$$T^{-1}A(0, 0)T = J$$

имеет нормальную жорданову форму. В силу условия (с) теоремы 26.1 матрица $A(0, 0)$, а стало быть, и матрица J не имеют нулевых собственных значений. Не ограничивая общности, можно с самого начала предположить, что

$$A(0, 0) = J. \quad (27.2)$$

В силу теоремы 9.6 существует вектор-функция $\varphi^*(x, \varepsilon)$, голоморфная по совокупности переменных при $|x| \leq x_0$ и $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \Sigma$, которая в секторе Σ разлагается в асимптотический ряд, равномерный по x , вида

$$\varphi^*(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=1}^{\infty} y_r(x) \varepsilon^r. \quad (27.3)$$

Из теоремы 9.4 следует, что равенство (27.3) можно почленно дифференцировать по x любое число раз. Преобразование

$$u = y - \varphi^*(x, \varepsilon) \quad (27.4)$$

приводит уравнение (27.1) к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon^h u' = & a(x, \varepsilon) + A(x, \varepsilon)\varphi^*(x, \varepsilon) - \varepsilon^h \varphi^{*'}(x, \varepsilon) + \\ & + A(x, \varepsilon)u + g(x, u + \varphi^*(x, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \quad (27.5)$$

Точно так же, как из (14.7) было получено (14.9), можно показать, что дифференциальное уравнение (27.5) имеет вид

$$\varepsilon^h u' = b(x, \varepsilon) + B(x, \varepsilon)u + h(x, u, \varepsilon), \quad (27.6)$$

где равномерно по x и ε

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} B(x, \varepsilon) = J, \quad |x| \leq x_0, \quad \varepsilon \in \Sigma, \quad (27.7)$$

$$b(x, \varepsilon) \sim 0, \quad |x| \leq x_0, \quad \varepsilon \in \Sigma, \quad (27.8)$$

и $h(x, u, \varepsilon)$ разлагается в ряд по степеням компонент вектора u , причем коэффициенты этого ряда разлагаются в асимптотические ряды по степеням ε . Разложение функции $h(x, u, \varepsilon)$ не содержит постоянной и линейных относительно u_j ($j=1, \dots, N$) членов, где u_j — компоненты вектора u . Эта функция голоморфна по совокупности переменных в некоторой области вида

$$|x| < x_1 \leq x_0, \quad |u| \leq \frac{z_0}{2}, \quad 0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad \varepsilon \in \Sigma.$$

Мы должны доказать, что уравнение (27.6) имеет решение, которое асимптотически равно нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ в некотором подсекторе сектора Σ .

27.2. Интегральное уравнение для решения

Матрица

$$V(x, \varepsilon) = \exp(\varepsilon^{-h} J x)$$

является решением дифференциального уравнения

$$\varepsilon^h V' = J V.$$

По аналогии с формулой (14.16) получаем, что всякое решение интегрального уравнения

$$u(x, \varepsilon) = \int_{\Gamma(x)} \exp[\varepsilon^{-h}(x-t)J] \varepsilon^{-h} p(t, u(t, \varepsilon), \varepsilon) dt \quad (27.9)$$

является решением дифференциального уравнения (27.6). Здесь

$$p(x, u, \varepsilon) = b(x, \varepsilon) + [B(x, \varepsilon) - J]u + h(x, u, \varepsilon) \quad (27.10)$$

и $\Gamma(x)$ — набор из N путей интегрирования $\gamma_j(x)$, $j=1, \dots, N$, которые оканчиваются в точке x , причем вдоль каждого пути интегрируется соответствующая компонента вектора, стоящего под знаком интеграла.

27.3. Пути интегрирования и решение интегрального уравнения

Как и в доказательстве теоремы 12.1, пути интегрирования следует выбрать так, чтобы стоящая под знаком интеграла экспонента оставалась ограниченной при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако эта

часть доказательства существенно отличается от соответствующей части доказательства теоремы 12.1, поскольку вид экспонент различен в этих теоремах.

Фиксируем произвольный луч, лежащий внутри сектора $\bar{\Gamma}$ в плоскости ε , скажем

$$\arg \varepsilon = \alpha.$$

Пусть $\lambda_j, j=1, 2, \dots, s, s \leq N$, — различные собственные значения матрицы J . Напомним, что по предположению все λ_j отличны от нуля. Затем выберем прямую l в комплексной плоскости t , проходящую через начало координат и такую, что если $t \in l$ и $t \neq 0$, то ни одно из чисел

$$\arg(\varepsilon^{-h} t \lambda_j), \quad \arg \varepsilon = \alpha, \quad j=1, 2, \dots, s,$$

не имеет вид $\frac{\pi}{2}(2m+1)$, где m — целое число. Обозначим $\lambda_0 = \min |\lambda_j|$; тогда существует число $\mu > 0$, не зависящее от λ_0 и такое, что

$$\operatorname{Re}(\varepsilon^{-h} t \lambda_j) < -\mu \lambda_0 |t \varepsilon^{-h}|, \quad j=1, 2, \dots, s, \quad (27.11)$$

если $\arg \varepsilon = \alpha$ и t лежит на одном из двух лучей, выходящих из начала координат, которые в сумме образуют l ; этот луч зависит от j . Неравенство (27.11) остается в силе, если ε лежит в некотором достаточно узком подсекторе Σ^* сектора Σ , содержащем луч $\arg \varepsilon = \alpha$, и если t лежит в достаточно узком секторе плоскости t , содержащем l .

Эти замечания приводят к следующей конструкции. Фиксируем на прямой l две точки, симметричные относительно начала координат, скажем a и $-a$, и обозначим через R внутренность ромба, у которого точки a и $-a$ являются противоположными вершинами. Пусть $x \in R$. Если угол ромба R в вершинах a и $-a$ достаточно мал, то отрезки, соединяющие точку x с точками a и $-a$, будут почти параллельны l , так что в точности для одного из них имеет место неравенство

$$\operatorname{Re}(\varepsilon^{-h}(t-x)\lambda_j) \leq -\mu \lambda_0 |(t-x)\varepsilon^{-h}|, \quad j=1, 2, \dots, s, \quad (27.12)$$

для любой точки t этого отрезка и любого $\varepsilon \in \Sigma^*$. На каком именно из отрезков выполняется (27.12), зависит от $\arg \lambda_j$. Для каждого j возьмем построенный таким образом отрезок в качестве пути интегрирования в (27.9) для всех компонент, таких, что соответствующие строки матрицы J содержат λ_j . (Таким образом, имеется только два различных пути интегрирования.) Рис. 27.1 иллюстрирует наши построения.

Постоянная μ зависит только от углов, которые встречались в наших рассуждениях, так что можно еще менять $|a|$, не на-

рушая неравенства (27.12). Конечно, $|a|$ должен быть настолько мал, чтобы ромб R лежал в круге $|t| < x_0$. Некоторые дополнительные ограничения на $|a|$ будут наложены в процессе доказательства.

Из неравенства (27.12) следует лемма, аналогичная лемме 14.2 и обобщению этой леммы из § 18.

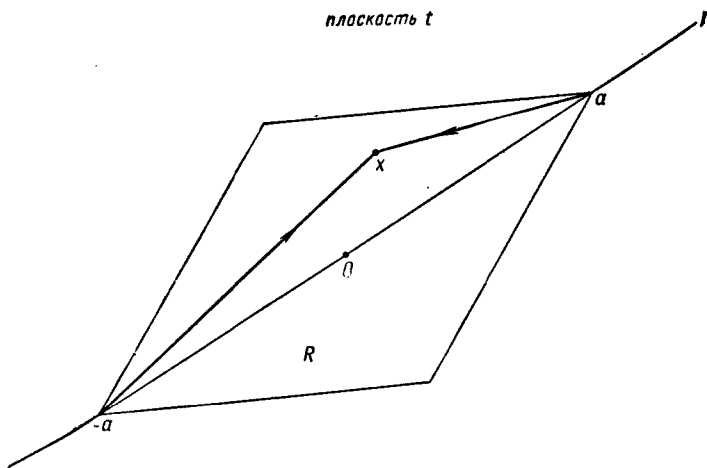


Рис. 27.1.

Лемма 27.1. Пусть $\chi(x)$ — вектор-функция (возможно, зависящая от ε), голоморфная в замыкании \bar{R} ромба R . Тогда существует постоянная K , не зависящая от ε и от $\chi(x)$ и такая, что при $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \Sigma^*$ имеет место неравенство

$$\left\| \int_{\Gamma(x)} \exp[\varepsilon^{-h}(x-t)J] \varepsilon^{-h} \chi(t) dt \right\| \leq K \max_{\bar{R}} \|\chi\|. \quad (27.13)$$

Доказательство. Положим $J = \Lambda + H$, где Λ — диагональная и H — нильпотентная матрицы. Норма подинтегрального выражения вдоль соответствующего пути интегрирования не превосходит величины

$$\begin{aligned} |\varepsilon|^{-h} \exp[-\mu\lambda_0|(t-x)\varepsilon^{-h}|] \|\exp[\varepsilon^{-h}(x-t)H]\| \|\chi(t)\| &\leq \\ &\leq C |\varepsilon|^{-h} \exp\left[-\frac{\mu\lambda_0}{2}|(t-x)\varepsilon^{-h}|\right] \|\chi(t)\|. \end{aligned}$$

Для получения этой оценки мы воспользовались неравенством (27.12) и тем фактом, что экспонента от нильпотентной матрицы есть полином. Постоянная C зависит от $\mu\lambda_0$, за исключением, конечно, того случая, когда матрица J диагональна.

В последнем случае можно положить $C=1$. Полагая $\rho = |x - t|$, получаем, что левая часть неравенства (27.13) не превосходит величины

$$NC |\varepsilon|^{-h} \max_{\bar{R}} \|\chi\| \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{\mu\lambda_0}{2} \rho |\varepsilon|^{-h} \right] d\rho \leq \frac{2NC}{\mu\lambda_0} \max_{\bar{R}} \|\chi\|,$$

что и доказывает лемму.

Оставшаяся часть доказательства настолько близка к доказательству теоремы 12.1, что нет необходимости ее приводить. Все результаты справедливы в ромбе R . Выбирая x_1 настолько малым, чтобы круг $|x| \leq x_1$ лежал внутри R , получим теорему 26.1.

Задача 27.1. Провести подробное доказательство теоремы 26.1.

28. Срезающее преобразование

28.1. Введение

Если матрица $A_0(0)$, которая определяется из формулы (25.2), имеет кратные корни, то теорема 26.2 не дает возможности построить асимптотику всех решений дифференциального уравнения. Однако эта теорема позволяет свести вопрос об исследовании дифференциальных уравнений вида (25.1), (25.2) к исследованию случая, когда матрица $A_0(0)$ имеет ровно одно кратное собственное значение. Не ограничивая общности, можно даже предположить, что матрица $A_0(0)$ нильпотентна. Действительно, если λ — собственное значение матрицы $A_0(0)$, то преобразование

$$y = y^* \exp(\varepsilon^{-h} \lambda x) \quad (28.1)$$

переводит уравнение (25.1) в дифференциальное уравнение того же вида, причем главная матрица системы равна $A_0(x) - \lambda I$.

Задача 28.1. Преобразовать дифференциальное уравнение (25.1) в уравнение того же вида, след матрицы коэффициентов которого тождественно равен нулю.

Асимптотическая структура такого рода задач чрезвычайно запутана, и, несмотря на наличие весьма обширной литературы, до сих пор исследованы только некоторые весьма специальные случаи. Большинство задач такого рода обычно относят к так называемым задачам о «точках поворота», или о «точках перехода», — термины, которые являются скорее описательными и никогда точно не определяются. Следующая глава будет цели-

ком посвящена такого рода задачам. В настоящем параграфе будет показано, что в некоторых весьма частных случаях с помощью подходящих срезающих преобразований можно свести дифференциальное уравнение к такому виду, с которым мы уже умеем обращаться.

Будем предполагать, что все собственные значения $\mu_j(x)$, $j=1, \dots, n$, матрицы $A_0(x)$ обращаются в нуль при $x=0$. Точка $x=0$, вообще говоря, является точкой ветвления алгеброидной функции, ветвями которой являются функции $\mu_j(x)$. Может оказаться, что все $\mu_j(x)$ тождественно равны друг другу в окрестности точки $x=0$, что, конечно, является исключительным случаем. Не ограничивая общности, можно в этом случае считать, что все $\mu_j(x) \equiv 0$. Действительно, если все $\mu_j(x) \equiv \mu_j$, то с помощью преобразования

$$Y = \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^x \mu(t) dt \right) Z$$

мы получаем уравнение, обладающее требуемыми свойствами.

Даже в этом весьма частном случае не всегда удается решить задачу с помощью метода, рассмотренного выше. Дело в том, что даже если матрица $A_0(x)$ тождественно нильпотентна, то она может иметь различные канонические формы в окрестности точки $x=0$. Покажем это на примере. Если $\mu_j(x) \equiv 0$, $j=1, 2, \dots, n$, то матрица $A_0(x)$ подобна матрице $J(x)$ вида

$$J(x) = \{\gamma_{jk}(x)\}, \quad (28.2)$$

где

$$\gamma_{jk}(x) \equiv 0, \quad k \neq j+1 \quad (28.3)$$

и

$$\gamma_{j, j+1}(x) = 1 \quad \text{или} \quad 0. \quad (28.4)$$

Но функции $\gamma_{j, j+1}(x)$ не обязательно должны быть константами в окрестности точки $x=0$. Например, если

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$J(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x=0; \quad J(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \neq 0.$$

Мы ограничимся тем, что рассмотрим случай, когда выполняется следующее

Предположение 28.1. В некоторой окрестности точки $x=0$ матрица $A_0(x)$ нильпотентна при всех x и все ее элементарные делители имеют постоянную степень.

Если это условие выполнено, то существует невырожденная матрица $T(x)$, такая, что

$$T^{-1}(x) A_0(x) T(x) = J = H_1 \oplus \dots \oplus H_s, \quad s \leq n, \quad (28.5)$$

где H_k — матрицы сдвига. При этом, однако, остается неясным, можно ли выбрать в качестве $T(x)$ матрицу, голоморфную в окрестности точки $x=0$. С такой проблемой мы уже встречались в разд. 25.2. Назовем две матрицы, голоморфные в точке $x=0$, голоморфно подобными в точке $x=0$, если они подобны в каждой точке некоторой окрестности этой точки и если существует матрица преобразования подобия, голоморфная в точке $x=0$. Имеет место следующая теорема (см. Вазов [11]):

Теорема 28.1. Пусть квадратная матрица $M(x)$ голоморфна в точке $x=0$, и пусть степени ее инвариантных множителей, рассматриваемых над полем комплексных чисел, постоянны в окрестности точки $x=0$. Тогда если матрица $M(x)$ подобна некоторой матрице в каждой точке некоторой окрестности точки $x=0$, то $M(x)$ голоморфно подобна этой матрице в некоторой окрестности точки $x=0$.

Доказательство этой теоремы лежит далеко в стороне от основной цели наших исследований, и мы его опустим. Заметим только, что степени инвариантных множителей матрицы могут оставаться постоянными даже в тех случаях, когда степени элементарных делителей не являются постоянными. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

имеет два элементарных делителя первой степени, когда $x \neq 0$, но имеет только один элементарный делитель степени 2, когда $x=0$. Тем не менее полином $\lambda^2 - x$ при всех x является единственным инвариантным множителем, отличным от константы. С другой стороны, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет при $x \neq 0$ инвариантный множитель λ^2 , но при $x=0$ она имеет два инвариантных множителя λ, λ .

Задача 28.2. Будут ли постоянными степени инвариантных множителей матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

С другой стороны, само определение инвариантных множителей, данное в разд. 16.2, требует, чтобы их степени не изменялись при изменении x , если степени элементарных делителей остаются постоянными. Поэтому предположение 28.1 и теорема 28.1 гарантируют, что можно найти матрицу $T(x)$ в (28.5), такую, что она голоморфна и невырождена в точке $x=0$.

Следовательно, не ограничивая общности, можно с самого начала считать, что

$$A_0(x) = J. \quad (28.6)$$

28.2. Редукция при помощи срезания

Предположим, что матрица $A_0(x)$, главная часть матрицы коэффициентов системы

$$\varepsilon^h Y' = A(x, \varepsilon) Y, \quad (28.7)$$

удовлетворяет предположению 28.1, и пусть эта матрица имеет канонический вид (28.6).

Не ограничивая общности, можно считать, что $A_0(x) \neq 0$, так как в противном случае можно сократить на подходящую положительную степень ε и снова прийти к системе того же вида, но с меньшим значением h . Если полученное значение h неположительно и если матрица $A(x, \varepsilon)$ не голоморфна по ε при $\varepsilon=0$, то возникает задача, аналогичная той, с которой мы имели дело в разд. 17.2. Этот случай может быть исследован с помощью методов, аналогичных методам разд. 17.2. Оказывается, что формальные решения в виде рядов по степеням ε , которые всегда существуют в такого рода задачах, являются асимптотическими разложениями для некоторых истинных решений уравнения в некоторых секторах комплексной плоскости ε . Мы опустим соответствующие рассуждения, так как они проводятся по уже известной нам схеме. Начиная с этого места, будем считать, что

$$A_0(x) \neq 0.$$

По аналогии с разд. 19.3 сделаем преобразование срезания

$$Y = S(\varepsilon) Z, \quad (28.8)$$

где

$$S(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \varepsilon^g & & \\ & & \varepsilon^{2g} & \\ 0 & & & \varepsilon^{(n-1)g} \end{pmatrix}. \quad (28.9)$$

Тогда система (28.7) примет вид

$$\varepsilon^A Z' = B(x, \varepsilon) Z, \quad (28.10)$$

где

$$B(x, \varepsilon) = S^{-1}(\varepsilon) A(x, \varepsilon) S(\varepsilon). \quad (28.11)$$

Элементы $a_{jk}(x, \varepsilon)$ матрицы $A(x, \varepsilon)$, которые не равны нулю асимптотически, можно записать в виде

$$a_{jk}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{h_{jk}} a_{jk}^*(x, \varepsilon), \quad (28.12)$$

где h_{jk} — неотрицательные целые числа и $a_{jk}^*(x, \varepsilon)$ разлагаются в асимптотические ряды, главные члены которых не обращаются в нуль тождественно. Имеем

$$h_{jk} > 0, \quad k \neq j + 1.$$

Так как $J \neq 0$, то по крайней мере один из элементов $a_{j,j+1}(x, \varepsilon)$ разлагается в асимптотический ряд по ε , главный член которого равен 1, так что $h_{j,j+1} = 0$ хотя бы для одного j .

Элементы $b_{jk}(x, \varepsilon)$ матрицы $B(x, \varepsilon)$, которые не равны нулю асимптотически, имеют вид

$$b_{jk}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{h_{jk} - (j-k)g} a_{jk}^*(x, \varepsilon),$$

и существуют элементы с номером $k = j + 1$, имеющие вид

$$b_{j,j+1}(x, \varepsilon) = \varepsilon^g + O(\varepsilon^{g+1}).$$

Может оказаться, что все $a_{jk}(x, \varepsilon)$ при $j \leq k$ асимптотически равны нулю. В этом случае положим $g = h$, сократим на ε^h уравнение (28.10) и получим уравнение, в котором малый множитель при производной отсутствует. Если $A(x, \varepsilon)$ имеет элементы, лежащие на главной диагонали или ниже нее, которые не равны нулю асимптотически, то существует наименьшее значение $g = g_0$, такое, что

$$h_{jk} - (j - k)g_0 = g_0$$

для некоторой пары (j, k) , где $j \geq k$. Сократив уравнение (28.10) на ε^{g_0} , мы приходим к уравнению, в котором главный член матрицы коэффициентов является матрицей, имеющей ненулевые элементы на главной диагонали или ниже нее. У этой матрицы элементы, лежащие непосредственно над главной диагональю, такие же, как и у матрицы J , а лежащие выше элементы равны нулю.

Если g не является целым числом, то могут появиться дробные степени ε . Введя параметр $\rho = \varepsilon^{1/p}$, где p — знаменатель g , можно избавиться от дробных степеней параметра, но тогда

может оказаться, что главный член матрицы коэффициентов не является жордановой нормальной формой. В этом случае необходимо начинать редукцию сначала. Этот метод срезания принадлежит Территину Х. [2].

Эта процедура довольно проста, и мы уже применяли ее в § 19 при исследовании асимптотики решений уравнений, не содержащих параметра. Однако этот метод не всегда дает возможность полностью исследовать асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения. Дело в том, что новые уравнения, к которым мы придем, применяя редукцию, могут не удовлетворять предположению 28.1. Но даже если это предположение будет выполнено, остается еще весьма специальный случай, когда преобразование снова приводит к задаче той же размерности с матрицей, у которой все собственные значения тождественно равны при всех x . Этот случай можно исследовать методами, аналогичными методам разд. 19.3 и 19.4. Мы не будем здесь обсуждать этот случай (см. Территин Х. [2]).

Если метод последовательного срезания и метод блок-диагонализации приводят к успеху, т. е. если удастся найти асимптотику фундаментальной системы решений, то она снова будет иметь вид (26.8) со следующими изменениями. Именно: найдется целое число p , такое, что

(а) $Q(x, \varepsilon)$ является полиномом от ρ^{-1} , где $\rho = \varepsilon^{1/p}$;

(б) $\hat{Y}(x, \varepsilon)$ в некотором достаточно узком секторе плоскости ε -разлагается в асимптотический ряд по степеням ρ ;

(с) $\det \hat{Y}_0(0)$ уже не обязательно будет отличен от нуля (это может случиться потому, что мы применяем срезающее преобразование), но $\det \hat{Y}(0, \varepsilon) \neq 0$ при $\varepsilon \neq 0$.

Задача 28.3. Найти главный член асимптотики фундаментальной системы решений системы дифференциальных уравнений

$$\varepsilon Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon(1+x) & \varepsilon \end{pmatrix} Y.$$

Точки поворота

29. Задачи, которые приводятся к уравнению Эйри. Формальная теория

29.1. Введение

Как уже было сказано выше, термин «точка поворота», или эквивалентный ему термин «точка перехода», в литературе точно не определен, и разные авторы вкладывают в это понятие несколько разный смысл. Мы будем понимать под точками поворота некоторые исключительные значения x для системы дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^h Y' = A(x, \varepsilon) Y \quad (29.1)$$

с аналитическими коэффициентами. Мы будем рассматривать только такие матрицы $A(x, \varepsilon)$, которые голоморфны по x в некоторой области комплексной плоскости x , скажем в круге $|x| \leq x_0$. Относительно зависимости от ε будем предполагать следующее: матрица $A(x, \varepsilon)$ голоморфна по ε при $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ в некотором секторе Σ с вершиной в точке $\varepsilon=0$ и разлагается в этой области в асимптотический ряд

$$A(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \in \Sigma. \quad (29.2)$$

В предыдущей главе было показано, что задачу об исследовании асимптотики решений при $\varepsilon \rightarrow 0$ систем такого вида можно всегда свести к исследованию систем, у которых матрица $A_0(0)$ нильпотентна. Если, кроме того, выполняется предположение 28.1, то возможно дальнейшее упрощение задачи с помощью срезающих преобразований. Правильным, хотя и малопривлекательным определением точки поворота с точки зрения проведенных в гл. VII исследований является следующее: точка $x=0$ называется точкой поворота дифференциального уравнения (29.1), если методы гл. VII не позволяют найти асимптотику фундаментальной системы решений ни в какой окрестности точки $x=0$. Это означает, что на некотором шаге редукции возникает система типа (29.1), у которой либо все

собственные значения матрицы $A_0(x)$ равны при $x=0$, но не совпадают тождественно, либо все собственные значения матрицы $A_0(x)$ тождественно равны, но степени элементарных делителей этой матрицы не являются постоянными в окрестности точки $x=0$. Так как мы будем иметь дело только с некоторыми частными, четко определенными задачами о точках поворота, то отсутствие более элегантного определения не имеет существенного значения¹⁾.

Простейшая точка поворота — это точка $x=0$ для дифференциального уравнения

$$\varepsilon^2 u'' - xu = 0. \quad (29.3)$$

Преобразование

$$u = y_1, \quad \varepsilon y_1' = y_2$$

сводит уравнение (29.3) к системе

$$\varepsilon Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} Y, \quad (29.4)$$

для которой точка $x=0$ в соответствии с приведенным выше определением является точкой поворота.

Как было показано в разд. 24.2, дифференциальное уравнение (29.3) сводится к уравнению Эйри

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - zu = 0$$

с помощью замены переменной

$$z = x\varepsilon^{-2/3}.$$

Уравнение Эйри было полностью исследовано нами в § 22 и 23. Три функции

$$Ai(e^{2\pi i(j-1)/3} x\varepsilon^{-2/3}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (29.5)$$

являются решениями уравнения (29.3). Значения этих функций можно вычислять с помощью сходящегося ряда (22.9), если $x\varepsilon^{-2/3}$ не очень велико, и с помощью асимптотического ряда (23.19), если $x\varepsilon^{-2/3}$ велико.

Дифференциальные уравнения вида

$$\varepsilon^2 u'' - (x\varphi(x) + \varepsilon\psi(x, \varepsilon))u = 0, \quad \varphi(0) \neq 0, \quad (29.6)$$

¹⁾ Обычно употребляется следующее определение: точка $x=0$ называется точкой поворота уравнения (29.1), если матрица $A(0, 0)$ имеет кратное собственное значение. Более общее определение таково: точка $x=x(\varepsilon)$ называется точкой поворота уравнения (29.1), если матрица $A(x(\varepsilon), \varepsilon)$ имеет кратное собственное значение. — Прим. перев.

играют важную роль в квантовой механике. Можно ожидать, что решения этого уравнения при малых ε , по крайней мере в окрестности точки $x=0$, ведут себя так же, как и решения уравнения (29.3). Если перейти от уравнения (29.6) к системе первого порядка

$$\varepsilon Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x\varphi(x) + \varepsilon\psi(x, \varepsilon) & 0 \end{pmatrix} Y, \quad (29.7)$$

то мы увидим, что точка $x=0$ является точкой поворота в соответствии с нашим определением. Вентцель [1], Крамерс [1] и Бриллюэн [1] создали методы, не всегда достаточно строгие, которые позволяют исследовать поведение решений уравнения (29.6) в областях, содержащих точку $x=0$. В их честь физики часто называют асимптотические методы, позволяющие исследовать поведение решений вблизи точки поворота, методами ВКБ. Более изящное и математически строгое решение задачи было позднее дано Лангером [1], [2], [7] и т. д.

Метод, который будет приведен здесь, кое в чем похож на метод Лангера. Однако мы рассмотрим более общую систему из двух уравнений первого порядка и построим наши рассуждения таким образом, чтобы провести аналогию с общей схемой формального упрощения систем дифференциальных уравнений, которая до сих пор находилась в центре нашего внимания.

29.2. Постановка задачи и предварительные упрощения

Мы будем рассматривать матричное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon Y' = A(x, \varepsilon) Y, \quad (29.8)$$

где $A(x, \varepsilon)$, Y — квадратные матрицы второго порядка и $A(x, \varepsilon)$ голоморфна по совокупности переменных при $|x| \leq x_0$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Пусть точка $x=0$ является точкой поворота; тогда можно считать, что матрица $A(0, 0)$ нильпотентна и приведена к нормальной жордановой форме. Имеются две возможности: либо $A(0, 0) = 0$, либо

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29.9)$$

Будем считать, что имеет место второй случай; случай $A(0, 0) = 0$ в асимптотической теории существенно отличается от него. Из (29.9) следует, что $\det A(x, 0) = 0$ при $x=0$. Потребуем, чтобы

выполнялось более жесткое условие, а именно чтобы этот нуль был первого порядка, т. е.

$$\frac{d}{dx} (\det A(x, 0))|_{x=0} \neq 0. \quad (29.10)$$

Система (29.7), очевидно, удовлетворяет условиям (29.9) и (29.10).

В конце этого раздела будет показано, что если условия (29.9) и (29.10) выполнены, то, не ограничивая общности, можно считать, что

$$A(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix},$$

поскольку можно привести главный член системы к этому виду.

Прежде всего заметим, что, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\operatorname{tr} A(x, 0) \equiv 0, \quad (29.11)$$

так как этого всегда можно добиться с помощью преобразования

$$Y = Y^* \exp \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^x \operatorname{tr} A(t, 0) dt \right), \quad (29.12)$$

которое переводит матрицу $A(x, 0)$ в матрицу

$$A^*(x) \doteq A(x, 0) - \frac{1}{2} (\operatorname{tr} A(x, 0)) I.$$

Очевидно, что $\operatorname{tr} A^*(x) \equiv 0$. Из (29.9) следует также, что

$$A^*(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, нетрудно проверить, что преобразование (29.12) не нарушает условия (29.10), т. е. что

$$\frac{d}{dx} (\det A^*(x))|_{x=0} \neq 0.$$

Задача 29.1. Показать, что если голоморфная $(n \times n)$ -матрица $A(x)$ удовлетворяет условиям

(а) $A(0)$ нильпотентна;

(б) $\frac{d}{dx} (\det A(x))|_{x=0} \neq 0$,

то

$$\frac{d}{dx} \left[\det \left(A(x) - \frac{1}{n} \operatorname{tr} A(x) \cdot I \right) \right] \Big|_{x=0} \neq 0.$$

Второе упрощение системы (29.8) основано на теореме 28.1. Пусть

$$\det(A(x, 0) - \lambda I) \equiv \lambda^2 - a(x) = 0, \quad (29.13)$$

где

$$a(x) = -\det A(x, 0), \quad (29.14)$$

есть характеристическое уравнение матрицы $A(x, 0)$. (При этом мы использовали условие (29.11).) Так как $a(x) \neq 0$ в силу условия (29.10), то собственные значения матрицы $A(x, 0)$ совпадают при $x=0$, но различны при малых $x \neq 0$. Поэтому, учитывая условие (29.9), получаем, что единственным отличным от константы инвариантным множителем матрицы $A(x, 0)$ является при достаточно малых x (включая $x=0$) сам определитель (29.13). По теореме 28.1 отсюда следует, что если матрица $A(x, 0)$ подобна $B(x)$ в некоторой окрестности точки $x=0$, то она голоморфно подобна $B(x)$. В качестве $B(x)$ можно взять матрицу

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (29.15)$$

Задача 29.2. Построить непосредственно голоморфное преобразование подобия, переводящее $A(x, 0)$ в $B(x)$.

Таким образом, существует матрица $T(x)$, голоморфная в некоторой окрестности точки $x=0$ вместе со своей обратной и такая, что

$$T^{-1}(x) A(x, 0) T(x) = B(x). \quad (29.16)$$

Преобразование

$$Y = T(x) Y^* \quad (29.17)$$

переводит дифференциальное уравнение (29.8) в уравнение того же вида с главным членом $B(x)$ вместо $A(x, 0)$. Всюду в дальнейшем мы будем, не ограничивая общности, предполагать, что

$$A(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (29.18)$$

Наконец, покажем, что можно заменить $a(x)$ на x . Этого можно достичь, комбинируя преобразование

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega(x) \end{pmatrix} Y^* \quad (29.19)$$

и замену переменной

$$t = \alpha(x). \quad (29.20)$$

Действительно, после этих преобразований мы получим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \frac{dY^*}{dt} = A^*(t, \varepsilon) Y^*, \quad (29.21)$$

где

$$A^*(t, 0) = \frac{dx}{dt} \begin{pmatrix} 0 & \omega(x) \\ \omega^{-1}(x) \alpha(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, если выбрать $\omega(x)$ и $\alpha(x)$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\omega^{-1}(x) \alpha(x) \frac{dx}{dt} = t, \quad (29.22)$$

$$\frac{dx}{dt} \omega(x) = 1 \quad (29.23)$$

и чтобы эти функции были голоморфны в точке $x=0$, то мы получим

$$A^*(t, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix},$$

что и требовалось. Из (29.22) и (29.23) следует, что

$$\alpha(x) = t \left(\frac{dt}{dx} \right)^2.$$

Это дифференциальное уравнение для функции $t = \alpha(x)$ имеет частное решение

$$t = \alpha(x) = \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{a(\xi)} d\xi \right)^{2/3}. \quad (29.24)$$

Выражая t через x , получаем

$$\omega(x) = \frac{dt}{dx} = \alpha'(x). \quad (29.25)$$

Таким образом, мы нашли решения уравнений (29.22) и (29.23).

Уравнение (29.24) определяет три различных выражения для $\alpha(x)$. Эти функции голоморфны в точке $x=0$ и отличаются друг от друга только постоянным числовым множителем. Это следует из предположения, что функция $a(x)$ имеет нуль первого порядка в точке $x=0$, т. е.

$$a(x) = x \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad a_0 \neq 0,$$

так что

$$\sqrt{a(x)} = \sqrt{x} \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r, \quad b_0 \neq 0,$$

откуда

$$\int_0^x \sqrt{a(\xi)} d\xi = x^{3/2} \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r, \quad c_0 \neq 0.$$

Следовательно, для $\alpha(x)$ из уравнения (29.24) получается три выражения вида

$$e^{\frac{2\pi i j}{3}} x \sum_{r=0}^{\infty} d_r x^r, \quad d_0 \neq 0, \quad j=1, 2, 3,$$

и можно выбрать любое из них. Из (29.25) следует, что $\omega(x)$ также голоморфна в точке $x=0$ и что $\omega(0) \neq 0$.

Суммируем результаты этого раздела.

Теорема 29.1. Пусть $A(x, \varepsilon)$ — квадратная матрица второго порядка, голоморфная при $|x| \leq x_0$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Пусть выполняются условия

(a) $A(0, 0)$ подобна матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\frac{d}{dx} [\det A(x, 0)]|_{x=0} \neq 0$.

Тогда существуют скалярная функция $\alpha(x)$, голоморфная в точке $x=0$, причем $\alpha(0)=0$, $\alpha'(0) \neq 0$, и матричная функция $P(x)$, голоморфная в точке $x=0$ вместе со своей обратной, такие, что преобразование

$$Y = P(x) \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^x \operatorname{tr} A(\xi, 0) d\xi\right) Y^*, \quad t = \alpha(x),$$

приводит дифференциальное уравнение

$$\varepsilon Y' = A(x, \varepsilon) Y$$

к виду

$$\varepsilon \frac{dY^*}{dt} = A^*(t, \varepsilon) Y^*,$$

где

$$A^*(t, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

Для упрощения записи будем, начиная с этого места, считать, что в исходном уравнении

$$A(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

29.3. Некоторые леммы о матрицах

В следующем разделе дифференциальное уравнение $\varepsilon Y' = -A(x, \varepsilon)Y$, где

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} A^r(x) \varepsilon^r, \quad (29.26)$$

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}. \quad (29.27)$$

будет приведено к более простому виду с помощью некоторых формальных преобразований, аналогичных рассмотренным в разд. 5.1, § 11 и 25. Для этого нам понадобится исследовать линейное матричное уравнение вида

$$A_0(x)P - PA_0(x) = F(x), \quad (29.28)$$

где $F(x)$ — данная голоморфная матрица.

Когда мы ранее встречались с такими уравнениями, то обычно ссылались на теорему 4.1. В данном случае этого нельзя сделать, так как линейный оператор P , стоящий в левой части (29.28), является сингулярным.

Однородное уравнение

$$A_0(x)P - PA_0(x) = 0$$

имеет при всех x очевидные решения

$$P = I, \quad P = A_0(x).$$

Покажем, что это уравнение не имеет других линейно независимых решений.

Лемма 29.1. Если

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix},$$

то общее решение уравнения

$$A_0(x)P - PA_0(x) = 0$$

имеет вид

$$P(x) = q_1(x)I + q_2(x)A_0(x),$$

где $q_1(x)$ и $q_2(x)$ — произвольные функции x .

Доказательство. Положим

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

где p_{jk} — функции от x . Тогда p_{jk} удовлетворяют уравнению

$$\begin{pmatrix} p_{21} - xp_{12} & p_{22} - p_{11} \\ xp_{11} - xp_{22} & xp_{12} - p_{21} \end{pmatrix} = 0,$$

откуда следует, что

$$p_{11} = p_{22} = q_1, \quad p_{12} = q_2, \quad p_{21} = xq_2,$$

где q_1, q_2 — произвольные функции x . Любая матрица P , удовлетворяющая этим условиям, может быть представлена в виде $P = q_1 I + q_2 A_0(x)$, что и требовалось доказать.

Неоднородное уравнение (29.28) представляет собой систему четырех скалярных линейных уравнений для элементов матрицы P . Определитель этой системы равен нулю, и потому эта система совместна только в том случае, когда $F(x)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Запишем $F(x)$ в виде

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (29.28) примет вид

$$\begin{pmatrix} p_{21} - xp_{12} & p_{22} - p_{11} \\ -x(p_{22} - p_{11}) & -(p_{21} - xp_{12}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \quad (29.29)$$

откуда следует, что условия

$$f_{21} + xf_{12} = 0, \quad f_{11} + f_{22} = 0 \quad (29.30)$$

необходимы для совместности системы. Они также и достаточны, поскольку если эти условия выполнены, то (29.29) сводится к двум уравнениям

$$p_{22} - p_{11} = f_{12}, \quad p_{21} - xp_{12} = f_{11},$$

которым можно удовлетворить, полагая, например,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_{11} & f_{12} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что такая матрица P всегда голоморфна в точке $x=0$. Условия (29.30) можно записать в матричной форме $\text{tr}(FA_0) = 0$, $\text{tr} F = 0$. Тем самым доказана

Лемма 29.2. *Матричное уравнение*

$$A_0(x)P - PA_0(x) = F(x)$$

разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\text{tr} F(x) \equiv 0, \quad \text{tr}(F(x)A_0(x)) \equiv 0.$$

Если $F(x)$ удовлетворяет этим условиям и голоморфна в точке $x=0$, то уравнение имеет частное решение $P(x)$, голоморфное в точке $x=0$.

29.4. Формальное упрощение дифференциального уравнения

Попробуем, как мы это уже неоднократно делали, упростить дифференциальное уравнение $\varepsilon Y' = A(x, \varepsilon)Y$, где

$$A(x, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix},$$

с помощью преобразования

$$Y = P(x, \varepsilon)Z. \quad (29.31)$$

Тогда уравнение примет вид

$$\varepsilon Z' = B(x, \varepsilon)Z, \quad (29.32)$$

где $A(x, \varepsilon)$, $P(x, \varepsilon)$ и $B(x, \varepsilon)$ связаны соотношением

$$\varepsilon P'(x, \varepsilon) = A(x, \varepsilon)P(x, \varepsilon) - P(x, \varepsilon)B(x, \varepsilon). \quad (29.33)$$

Как и раньше, формально подставим разложения

$$P(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r, \quad (29.34)$$

$$B(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r(x) \varepsilon^r \quad (29.35)$$

и (29.26) в (29.33), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε и исследуем полученные рекуррентные уравнения, с тем чтобы найти голоморфные решения $P_r(x)$ и $B_r(x)$ этих уравнений и чтобы при этом матрицы $B_r(x)$ имели как можно более простой вид. Оказывается, что в настоящей задаче можно положить все $B_r(x)$, $r > 0$, равными нулю, если выбрать

$$B_0(x) = A_0(x). \quad (29.36)$$

Если $B_r(x)$ выбраны указанным образом, то рекуррентные формулы для $R_r(x)$ примут вид

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \quad (29.37)$$

$$A_0 P_r - P_r A_0 = F_r, \quad r > 0, \quad (29.38)$$

где

$$F_r = P'_{r-1} - \sum_{\nu=1}^r A_r P_{r-\nu}, \quad r \geq 0. \quad (29.39)$$

Существенно новая идея решения этих рекуррентных соотношений состоит в том, чтобы не выбирать в качестве P_0 простейшую возможную матрицу, каковой могла бы быть единичная матрица. Вместо этого мы положим

$$P_0(x) = q_1(x)I + q_2(x)A_0(x). \quad (29.40)$$

Эта матрица является в силу леммы 29.1 общим решением уравнения (29.37). Чтобы матрица $P_0(x)$ была голоморфна и невырожденна при $x=0$, необходимо выбрать скалярные функции $q_1(x)$, $q_2(x)$ таким образом, чтобы они были голоморфны в точке $x=0$ и чтобы $q_1(0) \neq 0$.

Подставляя выражение (29.40) в формулу для F_1 , получаем из (29.39) формулу

$$F_1 = q_1' + A_0 q_2' - A_1 q_1 + (A_0' - A_1 A_0) q_2.$$

В силу леммы 29.2 уравнение (29.38) при $r=1$ разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} I \cdot q_1' + \operatorname{tr} A_0 \cdot q_2' &= \operatorname{tr} A_1 \cdot q_1 - \operatorname{tr} (A_0' - A_1 A_0) q_2, \\ \operatorname{tr} A_0 \cdot q_1' + \operatorname{tr} A_0^2 \cdot q_2' &= \operatorname{tr} (A_1 A_0) q_1 - \operatorname{tr} (A_0' A_0 - A_1 A_0^2) q_2. \end{aligned}$$

Упрощая эти уравнения и домножая первое из них на x , получаем систему

$$\begin{aligned} xq_1' &= \frac{1}{2} x \operatorname{tr} A_1 \cdot q_1 + \frac{1}{2} x \operatorname{tr} (A_1 A_0) q_2, \\ xq_2' &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} (A_1 A_0) q_1 - \frac{1}{2} (1 - x \operatorname{tr} A_1) q_2. \end{aligned} \quad (29.41)$$

Эта вспомогательная система дифференциальных уравнений для функций $q_1(x)$, $q_2(x)$ имеет регулярную особенность в точке $x=0$. Так как матрица коэффициентов системы при $x=0$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \operatorname{tr} (A_1 A_0)|_{x=0} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

то в силу теоремы 5.5 и задачи 5.2 получаем, что система (29.41) имеет решение q_1 , q_2 , голоморфное в точке $x=0$. Далее, из (29.41) следует, что можно положить $q_1(0)=1$. Если $q_1(x)$, $q_2(x)$ выбрать таким образом, то уравнение (29.38) при $r=1$ будет разрешимо. Матрица $P_0(x)$, найденная из (29.40), также будет голоморфна в точке $x=0$, и $P_0(0)=I$.

Задача 29.3. Вычислить матрицу $P_0(x)$.

Из леммы 29.2 следует, что существуют решения уравнения (29.38) при $r=1$, которые голоморфны в точке $x=0$. Пусть

$\hat{P}_1(x)$ — одно из этих решений. Тогда общее решение $P_1(x)$, голоморфное в точке $x=0$, имеет вид

$$P_1(x) = \hat{P}_1(x) + q_1(x)I + q_2(x)A_0(x), \quad (29.42)$$

где $q_1(x)$, $q_2(x)$ — произвольные голоморфные функции (это не те функции, которые входят в (29.40)). Теперь мы должны выбрать эти функции $q_1(x)$, $q_2(x)$ таким образом, чтобы уравнение (29.38) при $r=2$ удовлетворяло условиям совместности, указанным в лемме 29.2. С помощью несложных вычислений можно показать, что эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} xq_1' &= \frac{1}{2} x \operatorname{tr} A_1 \cdot q_1 + \frac{1}{2} x \operatorname{tr} (A_1 A_0) q_2 + xg_1(x), \\ xq_2' &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} (A_1 A_0) q_1 - \frac{1}{2} (1 - x \operatorname{tr} A_1) q_2 + g_2(x), \end{aligned} \quad (29.43)$$

где $g_1(x)$, $g_2(x)$ — известные функции, голоморфные в точке $x=0$. Уравнение (29.43) отличается от уравнения (29.41) только наличием неоднородных членов, первый из которых равен нулю при $x=0$.

Мы отложим до следующего раздела доказательство того факта, что уравнение (29.43) имеет решение, голоморфное в точке $x=0$. Если сослаться на этот факт, то мы доказали, что $P_1(x)$ в (29.42) можно выбрать так, чтобы уравнение (29.38) было разрешимо при $r=2$.

Ясно, что этот процесс можно продолжить для $r=2, 3$ и т. д., и мы опустим детали доказательства, которое нетрудно провести по индукции.

Задача 29.4. Доказать по индукции, что рекуррентная система уравнений (29.38) имеет при всех r решения $P_r(x)$, голоморфные в точке $x=0$.

Нами доказана следующая

Теорема 29.2. *Существует формальный ряд*

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r,$$

коэффициенты которого голоморфны в области $|x| \leq x_1$, такой, что $\det P_0(0) = 1$ и формальное преобразование

$$Y = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r Z \quad (29.44)$$

приводит дифференциальное уравнение ${}_x Y' = A(x, \varepsilon) Y$, где

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x) \varepsilon^r \quad (|x| \leq x_0, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0), \quad A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

и матрица $A(x, \varepsilon)$ голоморфна при $|x| \leq x_0$, к виду

$$\varepsilon Z' = A_0(x) Z.$$

Эта теорема является частным случаем результата, доказанного Вазовым [12] для систем n -го порядка.

29.5. Лемма о некоторых неоднородных дифференциальных уравнениях, имеющих регулярную особенность

Запишем дифференциальное уравнение (29.43) в векторной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} q' = H(x) q + g(x). \quad (29.45)$$

Здесь $H(x)$ и $g(x)$ голоморфны при $|x| \leq x_1$. Единственное свойство матрицы $H(x) = \{h_{jk}(x)\}$, которое существенно для дальнейшего, состоит в том, что $\lambda = h_{22}(0)$ не является целым числом.

Матрица коэффициентов соответствующего однородного уравнения

$$xv' = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H(x) v \quad (29.46)$$

имеет собственные значения $0, \lambda$ в регулярной особой точке $x=0$. В силу теоремы 5.5 это уравнение имеет фундаментальную матрицу решений вида

$$V(x) = \hat{V}(x) x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{21}(0) & \lambda \end{pmatrix},$$

где $\hat{V}(x)$ голоморфна при $x=0$ и $\hat{V}(0) = I$.

Матрица

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ -h_{21}(0) & 1 \end{pmatrix} \quad (29.47)$$

удовлетворяет соотношению

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{21}(0) & \lambda \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\hat{W}(x) = \hat{V}(x) T. \quad (29.48)$$

Тогда матрица

$$W(x) = \hat{W}(x) x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

также является фундаментальной матрицей уравнения (29.46),

С помощью метода вариации постоянных можно показать, что общее решение уравнения (29.45) имеет вид

$$q(x) = \hat{W}(x) x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \left\{ c + \int_a^x t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \hat{W}^{-1}(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} g(t) dt \right\}. \quad (29.49)$$

Здесь c — произвольный постоянный вектор и a — произвольная постоянная, такая, что $0 < |a| \leq x_1$. Из (29.47), (29.48) и соотношения $\hat{V}(0) = I$ нетрудно вывести, что подынтегральное выражение в (29.49) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ t^{-\lambda-1} \varphi_2(t) \end{pmatrix},$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ голоморфны в точке $t=0$. Неопределенный интеграл от этого вектора имеет вид

$$t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \psi(t) + \text{const},$$

где $\psi(t)$ — вектор, голоморфный в точке $t=0$.

За счет выбора c можно добиться того, чтобы выражение, стоящее в фигурных скобках в формуле (29.49), имело вид

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \psi(x).$$

Тогда

$$q(x) = \hat{W}(x) x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi(x),$$

и потому $q(x)$ голоморфна в точке $x=0$.

Итак, нами доказана

Лемма 29.3. Пусть $H(x) = \{h_{jk}(x)\}$, $j, k=1, 2$ — матрица, голоморфная в точке $x=0$, и пусть $h_{22}(0)$ не является целым числом. Пусть $g(x)$ — двумерная вектор-функция, голоморфная в точке $x=0$. Тогда дифференциальное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} q' = H(x)q + g(x)$$

имеет решение, голоморфное в точке $x=0$.

30. Задачи, которые приводятся к уравнению Эйри. Аналитическая теория

30.1. Подготовительные результаты

Лемма 30.1. Пусть $A(x)$, $B(x)$ и $G(x)$ — квадратные матрицы порядка n , голоморфные при $|x| \leq x_0$. Тогда общее решение матричного дифференциального уравнения

$$Z' = A(x)Z + ZB(x) + G(x) \quad (30.1)$$

имеет вид

$$Z(x) = U(x) \left(K + \int_0^x U^{-1}(t) G(t) (V^T)^{-1}(t) dt \right) \cdot V^T(x), \quad (30.2)$$

где $U(x)$ — фундаментальная матрица уравнения

$$U' = A(x)U, \quad (30.3)$$

$V(x)$ — фундаментальная матрица уравнения

$$V' = B^T(x)V \quad (30.4)$$

и K — произвольная постоянная матрица. (Здесь V^T — матрица, транспонированная к V .)

Доказательство. Пусть C — постоянная $(n \times n)$ -матрица. Нетрудно проверить, что матрица

$$Y(x) = U(x)CV^T(x) \quad (30.5)$$

является решением уравнения

$$Y' = A(x)Y + YB(x). \quad (30.6)$$

Если $\det C \neq 0$, то Y является фундаментальным решением. Чтобы доказать, что Y есть общее решение, заметим, что если матрица $M(x)$ голоморфна вместе со своей обратной, то

$$\frac{d}{dx}(M^{-1}(x)) = -M^{-1}(x)M'(x)M^{-1}(x). \quad (30.7)$$

Это легко получить, продифференцировав тождество $M^{-1}(x)M(x) = I$. Пусть $Y(x)$ — решение уравнения (30.6). Тогда, используя (30.7), можно показать, что

$$\frac{d}{dx}(U^{-1}Y(V^T)^{-1}) = 0,$$

т. е.

$$U^{-1}Y(V^T)^{-1} = C,$$

где C — постоянная матрица, так что, действительно,

$$Y = UCV^T.$$

Следуя идее метода вариации постоянных, подставим в (30.1) выражение $Z = U(x)F(x)V^T(x)$ и попытаемся определить $F(x)$ таким образом, чтобы удовлетворить уравнению (30.1). Окончательное необходимое и достаточное условие имеет вид

$$UF'V^T = G,$$

и оно выполняется, если положить

$$F(x) = \int_0^x U^{-1}(t)G(t)(V^T(t))^{-1} dt.$$

Следовательно, формула (30.2) при $K=0$ дает нам решение уравнения (30.1). Общее решение мы получим, если к этому решению прибавим общее решение уравнения (30.6). Тем самым доказательство леммы 30.1 закончено.

Лемма 30.2. Пусть $Ai(x)$ — функция Эйри первого рода и $\omega = e^{2\pi i/3}$. Тогда матрица

$$U(x) = \begin{pmatrix} Ai(x) & Ai(\omega x) \\ Ai'(x) & \omega Ai'(\omega x) \end{pmatrix} \quad (30.8)$$

является фундаментальным решением уравнения

$$U' = A_0(x)U, \quad A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}. \quad (30.9)$$

Доказательство. То, что матрица (30.8) удовлетворяет уравнению (30.9), нетрудно проверить, используя тождество $Ai''(x) = x Ai(x)$. Определитель матрицы $U(x)$ не обращается в нуль ни при каком x , так как $Ai(x)$ и $Ai(\omega x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения Эйри (см. разд. 22.2).

Следствие. Положим

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (30.10)$$

Тогда матрица $V(x) = PU(x)$, где $U(x)$ — матрица (30.8), является фундаментальным решением уравнения

$$V' = -A_0^T(x)V.$$

Это доказывается простой проверкой.

Лемма 30.3. Пусть $U(x)$ — матрица (30.8). Тогда матрица

$$\tilde{U}(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/3} \end{pmatrix} U(x\varepsilon^{-3/2}) \quad (30.11)$$

является решением уравнения

$$\varepsilon \tilde{U}' = A_0(x) \tilde{U},$$

а матрица

$$\tilde{V}(x, \varepsilon) = \Pi \tilde{U}(x, \varepsilon)$$

является решением уравнения

$$\varepsilon \tilde{V}' = -A_0^T(x) \tilde{V}.$$

Лемма доказывается прямой проверкой.

В любой области двумерного комплексного пространства (x, ε) , в которой величина $x\varepsilon^{-1/2}$ ограничена, скажем в области

$$|x\varepsilon^{-1/2}| < z_0, \quad (30.12)$$

матрицу $\tilde{U}(x, \varepsilon)$ из (30.11) можно вычислить с помощью сходящегося степенного ряда для $A_i(z)$, построенного в § 22.

При больших значениях $|x\varepsilon^{-1/2}|$, скажем при

$$|x\varepsilon^{-1/2}| \geq z_0, \quad (30.13)$$

следует воспользоваться асимптотическими разложениями для $A_i(x)$.

Лемма 30.4. Введем обозначения

$$z = x\varepsilon^{-1/2}, \quad (30.14)$$

$$\sigma(z) = \begin{cases} 0, & |z| < z_0, \\ 1, & |z| \geq z_0, \end{cases} \quad (30.15)$$

$$q(z) = \frac{2}{3} z^{3/2}, \quad q(z) > 0 \text{ при } z > 0, \quad (30.16)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (30.17)$$

Тогда матрицу $\tilde{U}(x, \varepsilon)$ из (30.11) можно представить в виде

$$\tilde{U}(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/2} \end{pmatrix} z^{\frac{1}{4} \sigma(z) \Omega} \tilde{U}(z) e^{q(z) \Omega}, \quad (30.18)$$

где матрица $\tilde{U}(z)$ и обратная к ней равномерно ограничены в области, определенной неравенствами

$$|\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad -\pi + \delta \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3} - \delta, \quad (30.19)$$

$\delta > 0$ произвольно.

Доказательство. При $|z| < z_0$ наше утверждение сводится к тому, что матрица $\tilde{U}(x)$, определенная формулой (30.8),

ограничена при $|x| < z_0$ и имеет ограниченную обратную; это очевидно. При $|z| \geq z_0$ найдем асимптотику $U(z)$ из (30.8), используя разложение (23.19) для функции Эйри. После несложных вычислений получаем, что

$$U(z) = z^{3/4} \hat{U}(z) e^{q(z)},$$

где матрица $\hat{U}(z)$ разлагается в асимптотический ряд по степеням $z^{-1/2}$ при $z \rightarrow \infty$ в секторе, указанном в (30.19), и потому ограничена в этом секторе при $|z| \geq z_0$. Главный член ряда для $\hat{U}(z)$ имеет вид

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \omega \end{pmatrix}.$$

Эта матрица невырождена, так что матрица $\hat{U}(z)$ имеет равномерно ограниченную обратную матрицу при достаточно больших z , а в силу доказанного выше — при всех z , лежащих в рассматриваемой области.

30.2. Интегральное уравнение для решения

В § 29 было доказано, что дифференциальное уравнение

$$\varepsilon P' = A(x, \varepsilon)P - PA_0(x) \quad (30.20)$$

имеет формальное решение вида

$$P = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r, \quad \det P_r(0) \neq 0, \quad (30.21)$$

и коэффициенты этого ряда голоморфны в некотором круге $|x| \leq x_1$. Теперь наша цель — показать, что уравнение (30.20) имеет истинное решение, для которого ряд (30.21) является асимптотическим на некотором множестве плоскости x , содержащем точку поворота $x=0$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$ в некотором секторе Σ комплексной плоскости.

Пусть $P^*(x, \varepsilon)$ — аналитическая функция, для которой ряд (30.21) является асимптотическим:

$$P^*(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (30.22)$$

Предположим, что это соотношение выполняется равномерно по x при $|x| \leq x_1$ и при ε , лежащем в некотором секторе Σ комплексной плоскости ε . Преобразование

$$Z = P - P^*(x, \varepsilon)$$

переводит уравнение (30.20) в уравнение

$$\varepsilon Z' = A(x, \varepsilon) Z - Z A_0(x) + F(x, \varepsilon), \quad (30.23)$$

где

$$F(x, \varepsilon) = -\varepsilon P^{**}(x, \varepsilon) + A(x, \varepsilon) P^*(x, \varepsilon) - P^*(x, \varepsilon) A_0(x).$$

Аналогично тому, как это делалось ранее, можно показать, что

$$F(x, \varepsilon) \sim 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \in \Sigma, |x| \leq x_1), \quad (30.24)$$

так как ряд (30.22) является формальным решением уравнения (30.20).

Запишем (30.23) в виде

$$Z' = \varepsilon^{-1} A_0(x) Z - \varepsilon^{-1} Z A_0(x) + G(x, \varepsilon, Z), \quad (30.25)$$

где

$$G(x, \varepsilon, Z) = \varepsilon^{-1} F(x, \varepsilon) + \varepsilon^{-1} (A(x, \varepsilon) - A_0(x)) Z, \quad (30.26)$$

и преобразуем уравнение (30.25) в интегральное уравнение с помощью формулы (30.2). В качестве матриц U и V , входящих в эту формулу, можно взять матрицу \tilde{U} из формулы (30.11) и $\tilde{V} = P\tilde{U}$ соответственно, что вытекает из следствия леммы 30.2 и из леммы 30.3.

Всякое решение дифференциального уравнения (30.25) является решением интегрального уравнения

$$Z(x) = \tilde{U}(x) \left[K + \int_0^x \tilde{U}^{-1}(t) G(t, Z(t)) (\tilde{V}^T)^{-1}(t) dt \right] \tilde{V}^T(x) \quad (30.27)$$

при соответствующем выборе постоянной K , и обратно. В формуле (30.27) и в других формулах, приведенных ниже, мы для краткости опускаем аргумент ε . Как и в ранее встречавшихся случаях, заметим, что пути интегрирования можно выбрать поразному для разных элементов подинтегральной матрицы. Это можно сделать за счет изменения постоянной K . Мы снова используем обозначение $\Gamma(x)$ для набора четырех путей $\gamma_{jk}(x)$, $j, k=1, 2$, концы которых совпадают с точкой x . Выбор путей будет указан ниже. Положим $K=0$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$Z(x) = \tilde{U}(x) \int_{\Gamma(x)} \tilde{U}^{-1}(t) G(t, Z(t)) (\tilde{V}^T(t))^{-1} dt \tilde{V}^T(x). \quad (30.28)$$

Вычисления можно сделать более прозрачными, если вместо Z ввести новую неизвестную следующим образом. Определим матрицы $U^*(x)$, $V^*(x)$ из соотношений

$$\tilde{U}(x) = U^*(x) e^{q(x)\Omega}, \quad \tilde{V}(x) = V^*(x) e^{q(x)\Omega}.$$

В силу леммы 30.4 имеем

$$U^*(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/2} \end{pmatrix} z^{\frac{1}{4}\sigma(z)\Omega} \hat{U}(z), \quad V^*(x, \varepsilon) = \Pi U^*(x, \varepsilon). \quad (30.29)$$

Теперь введем матрицу

$$W(x, \varepsilon) = U^{*-1}(x, \varepsilon) Z(x, \varepsilon) (V^{*T}(x, \varepsilon))^{-1} \quad (30.30)$$

и подставим в (30.28) это выражение и выражение для $G(x, \varepsilon, Z)$ из (30.26). Тогда интегральное уравнение (30.28) примет вид

$$W(x) = \int_{\Gamma(x)} e^{i(q(z)-q(\zeta))\Omega} M(t) W(t) e^{i(q(z)-q(\zeta))\Omega} dt + H(x), \quad (30.31)$$

где

$$M(x, \varepsilon) = U^{*-1}(x, \varepsilon) \varepsilon^{-1} [A(x, \varepsilon) - A_0(x)] U^*(x, \varepsilon), \quad (30.32)$$

$H(x, \varepsilon) =$

$$= \int_{\Gamma(x)} e^{i(q(z)-q(\zeta))\Omega} U^{*-1}(t, \varepsilon) \varepsilon^{-1} F(t, \varepsilon) (V^{*T}(t, \varepsilon))^{-1} e^{i(q(z)-q(\zeta))\Omega} dt \quad (30.33)$$

и

$$\zeta = t\varepsilon^{-2/3}.$$

30.3. Решение интегрального уравнения

Заметим прежде всего, что матрицы $U^*(x, \varepsilon)$, $V^*(x, \varepsilon)$, так же как и их обратные, имеют порядок $O(\varepsilon^{-1/2})$ в области (30.19) при $|x| \leq x_0$ равномерно по x . При $|z| \leq z_0$ это с очевидностью вытекает из (30.18) и (30.29). При $|z| \geq z_0$ имеем

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/2} \end{pmatrix} z^{\frac{1}{4}\sigma(z)\Omega} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} z^{-1/4} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/2} z^{1/4} \end{pmatrix} \right\| \leq \max(z_0^{-1/4}, \varepsilon^{1/2} |z|^{1/4})$$

и

$$\left\| \begin{pmatrix} z^{1/4} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1/2} z^{-1/4} \end{pmatrix} \right\| \leq \max(\varepsilon^{1/2} |z|^{1/4}, z_0^{-1/4} |z|^{-1/4}).$$

Тогда из (30.30) следует, что $Z(x, \varepsilon) \sim 0$, если $W(x, \varepsilon) \sim 0$.

Таким образом, достаточно показать, что при подходящем наборе путей $\Gamma(x)$ интегральное уравнение (30.31) имеет решение, которое асимптотически равно нулю.

Пусть $\Phi(x, \varepsilon)$ — некоторая матричная функция, ограниченная и интегрируемая в области (30.19). Обозначим через \mathcal{L} интегральный оператор в (30.31), действующий на W . Тогда $\mathcal{L}[\Phi]$

имеет вид

$$\mathcal{L}[\Phi] = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_{11}(x)} e^{2(q(t)-q(z))} L_{11}[\Phi] dt & \int_{\gamma_{12}(x)} L_{12}[\Phi] dt \\ \int_{\gamma_{21}(x)} L_{21}[\Phi] dt & \int_{\gamma_{22}(x)} e^{2(q(z)-q(t))} L_{22}[\Phi] dt \end{pmatrix}, \quad (30.34)$$

где $L_{jk}[\Phi]$ — скалярные линейные формы от элементов матрицы Φ вида

$$\{L_{jk}[\Phi]\} = M(t)\Phi(t). \quad (30.35)$$

Мы хотим выбрать пути интегрирования таким образом, чтобы экспоненты в (30.34) были ограничены при $\varepsilon \rightarrow 0$. Фиксируем $\beta = \arg \varepsilon$ и введем вспомогательные переменные

$$\tau = e^{-i\beta t^{1/2}}, \quad \xi = e^{-i\beta x^{1/2}}. \quad (30.36)$$

Сектору $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{3}$ в плоскости x соответствует сектор

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg \xi < \frac{\pi}{2}$$

в плоскости ξ , так как $\arg \xi = \frac{3}{2} \arg z$. Пусть ξ лежит в области

$$-\frac{3\pi}{2} + \delta \leq \arg \xi \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad |\xi| \leq \xi_0 = x_1^{1/2}. \quad (30.37)$$

Тогда можно построить кривую, проходящую через точки $-\xi_0$, ξ и ξ_0 в плоскости τ , такую, что $\operatorname{Re} \xi$ монотонно возрастает при движении τ от $-\xi_0$ до ξ_0 вдоль этой кривой, и лежащую внутри области плоскости τ , определенной неравенствами

$$-\frac{3\pi}{2} + \delta \leq \arg \tau \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad |\tau| \leq \xi_0. \quad (30.38)$$

Эта ситуация изображена на рис. 30.1.

Пусть $\lambda_{11}(\xi)$ — дуга этой кривой от $-\xi_0$ до ξ и $\lambda_{22}(\xi)$ — дуга этой кривой от ξ до ξ_0 . Тогда $\operatorname{Re}(\tau - \xi) \leq 0$ на $\lambda_{22}(\xi)$ и $\operatorname{Re}(\xi - \tau) \leq 0$ на $\lambda_{11}(\xi)$. Следовательно, если мы возьмем в качестве $\gamma_{22}(x)$ и $\gamma_{11}(x)$ пути, которые являются прообразами путей $\lambda_{11}(\xi)$ и $\lambda_{22}(\xi)$ при отображении (30.36), то экспоненты в (30.34) будут ограничены вдоль соответствующих путей интегрирования. В качестве путей $\gamma_{12}(x)$ и $\gamma_{21}(x)$ можно взять отрезок, соединяющий точки $t=0$ и $t=x$.

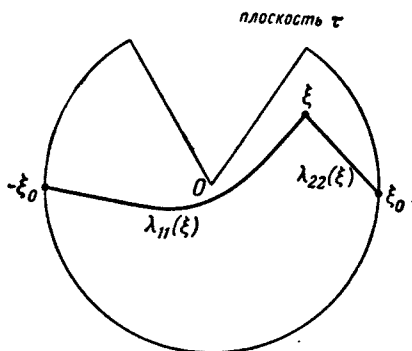
Следует отметить, что область плоскости x , так же как и начальные точки путей интегрирования, описанных выше, зависят от $\arg \varepsilon$.

Теперь мы исследуем структуру матрицы $M(x, \varepsilon)$, определенной формулой (30.32).

Лемма 30.5. Матрица $M(x, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенству

$$\|M(x, \varepsilon)\| \leq c |\varepsilon|^{-\frac{1}{3}(1-\sigma(z))} |x|^{-\frac{1}{2}\sigma(z)}$$

в области, определенной неравенствами (30.19) и $|x| \leq x_0$, равномерно по ε . Здесь c — постоянная, не зависящая от ε .



Р и с. 30.1.

Доказательство. Из (30.29) следует, что

$$M(x, \varepsilon) = \hat{U}^{-1}(z) z^{-\frac{1}{4}\sigma(z)\Omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1/3} \end{pmatrix} \varepsilon^{-1} \times \\ \times (A(x, \varepsilon) - A_0(x)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/3} \end{pmatrix} z^{\frac{1}{4}\sigma(z)\Omega} \hat{U}(z).$$

Так как $\hat{U}(z)$ и $\hat{U}^{-1}(z)$ ограничены, то достаточно рассмотреть матрицу

$$z^{-\frac{1}{4}\sigma(z)\Omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1/3} \end{pmatrix} \varepsilon^{-1} (A(x, \varepsilon) - A_0(x)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/3} \end{pmatrix} z^{\frac{1}{4}\sigma(z)\Omega},$$

которая имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}(x, \varepsilon) & \alpha_{12}(x, \varepsilon) z^{\frac{1}{2}\sigma(z)} \varepsilon^{1/3} \\ \alpha_{21}(x, \varepsilon) z^{-\frac{1}{2}\sigma(z)} \varepsilon^{-1/3} & \alpha_{22}(x, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

где матрица $\{\alpha_{jk}(x, \varepsilon)\} = \varepsilon^{-1}(A(x, \varepsilon) - A_0(x))$ ограничена. Поэтому при $|z| < z_0$ утверждение леммы очевидно. При $|z| \geq z_0$ заметим, что $|z^{1/2}\sigma(z)| = |x^{1/2}\varepsilon^{-1/3}|$; это снова дает нам утверждение леммы.

Лемма 30.6. Если x_0 и ε_0 достаточно малы, то при x и ε , лежащих в области (30.19), и при $|x| \ll x_0$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{L}|\Phi|\| \leq k \sup \|\Phi\|, \quad k < 1.$$

Здесь k — постоянная и $\sup \|\Phi\|$ берется по множеству (30.19) при $|x| \ll x_0$.

Доказательство. Из леммы 30.5 и формулы (30.35) получаем

$$|L_{jk}[\Phi]| \leq c |\varepsilon|^{-\frac{1}{3}(1-\sigma(z))} |x|^{-\frac{1}{2}\sigma(z)} \sup \|\Phi\|.$$

В силу сделанного выше выбора путей интегрирования экспоненты в (30.34) ограничены вдоль этих путей. Следовательно, элемент с номером (j, k) матрицы (30.34) не превосходит по модулю величины

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{jk}(x)} |L_{jk}[\Phi]| |dt| &\leq \sup \|\Phi\| \int_{\gamma_{jk}} \|M(t)\| |dt| \leq \\ &\leq c \sup \|\Phi\| \int_{\gamma_{jk}(x)} |\varepsilon|^{-\frac{1}{3}(1-\sigma(\zeta))} |t|^{-\frac{1}{2}\sigma(\zeta)} |dt|. \end{aligned} \quad (30.39)$$

При этом мы воспользовались леммой 30.5.

Чтобы оценить последний интеграл, выберем пути $\gamma_{jk}(x)$ более удобным образом. А именно выберем их так, чтобы соответствующие им пути $\lambda_{jk}(\xi)$ в плоскости τ состояли из одного или двух прямолинейных отрезков. Ясно (см. рис. 30.1), что это всегда можно сделать. Так как $\tau = e^{-i\beta} t^{3/2}$, то

$$\int_{\gamma_{jk}(x)} |\varepsilon|^{-\frac{1}{3}(1-\sigma(\zeta))} |t|^{-\frac{1}{2}\sigma(\zeta)} |dt| = \frac{2}{3} \int_{\lambda_{jk}(\xi)} |\varepsilon|^{-\frac{1}{3}(1-\sigma(\zeta))} |\tau|^{-\frac{1}{3}(1+\sigma(\zeta))} |d\tau|. \quad (30.40)$$

Обозначим через I_1 и I_2 соответственно вклады в последний интеграл от путей $\lambda^{(1)}(\xi)$ и $\lambda^{(2)}(\xi)$ (это части пути $\lambda_{jk}(\xi)$, лежащие соответственно в областях $|\zeta| \leq z_0$ и $|\zeta| > z_0$). Тогда

$$I_1 = \varepsilon^{-1/3} \int_{\lambda^{(1)}(\xi)} |\tau|^{-1/3} |d\tau|, \quad I_2 = \int_{\lambda^{(2)}(\xi)} |\tau|^{-2/3} |d\tau|.$$

Путь $\lambda^{(2)}(\xi)$ состоит не более чем из двух отрезков, лежащих в области $|\tau| \leq \xi_0 = x^{1/2}$. Если S — один из этих отрезков, то ясно, что

$$\int_{\lambda^{(2)}} |\tau|^{-2/3} |d\tau| \leq \int_a^d |\tau|^{-2/3} |d\tau|,$$

где d — диаметр окружности $|\tau| = x_0^{3/2}$, параллельный S . Так как

$$\int_d^{\tau_0^{3/2}} |\tau|^{-2/3} |d\tau| = 2 \int_0^{\tau_0^{3/2}} r^{-2/3} dr = 6x_0^{1/2},$$

то

$$I_2 \leq 12x_0^{1/2}. \quad (30.41)$$

Аналогично $\lambda^{(1)}$ состоит из одного или двух отрезков, лежащих в круге $|\tau| \leq z_0^{3/2} |\varepsilon|$, так как из неравенства $|\xi| \leq z_0$ следует, что $|\tau| |\varepsilon|^{-2/3} \leq z_0$, т. е. что $|\tau| = |\tau|^{3/2} |\varepsilon|^{-1/2} \leq z_0^{3/2} |\varepsilon|$. Поэтому

$$I_1 \leq |\varepsilon|^{-1/3} 2 \int_0^{z_0^{3/2} |\varepsilon|} r^{-1/3} dr = 3z_0 |\varepsilon|^{1/3}. \quad (30.42)$$

Подставляя (30.41) и (30.42) в (30.40), получаем оценку

$$\int_{\gamma_{jk}(x)} |\varepsilon|^{-\frac{1}{3}(1-\sigma(\zeta))} |\tau|^{-\frac{1}{2}\sigma(\zeta)} |dt| \leq 2z_0 |\varepsilon|^{1/3} + 8x_0^{1/2};$$

ε_0 и x_0 можно выбрать настолько малыми, чтобы правая часть этого неравенства не превышала $(2c)^{-1}$. Подставляя этот результат в (30.39), получаем утверждение леммы.

Вернемся к интегральному уравнению (30.31), т. е. к уравнению

$$W(x) = \mathcal{L}[W] + H(x). \quad (30.43)$$

В силу выбора путей функция $H(x, \varepsilon)$, определенная формулой (30.33), есть асимптотический нуль при $\varepsilon \rightarrow 0$, если этим свойством обладает функция $F(x, \varepsilon)$ в предположении, что выполняются неравенства (30.19) и $|x| \leq \min(x_0, x_1) = x_2$.

Пусть последовательность W_r , $r=0, 1, 2, \dots$, определяется формулами

$$W_0 \equiv 0, \quad W_r = \mathcal{L}[W_{r-1}] + H(x).$$

Тогда

$$W_1(x, \varepsilon) = H(x, \varepsilon) \sim 0.$$

Кроме того, в силу леммы 30.6

$$\|W_{r+1} - W_r\| \leq k \sup \|W_r - W_{r-1}\|, \quad r=1, 2, \dots$$

Из этой оценки вытекает, что последовательность W_r равномерно сходится в рассматриваемой области к предельной функции $W(x, \varepsilon)$, которая является решением интегрального уравнения. Так как $H(x, \varepsilon) \sim 0$, то

$$\sup \|W\| \leq k \sup \|W\| + k_m |\varepsilon^m|,$$

где k_m — константа и m любое. Отсюда следует, что

$$\sup \|W\| \leq k_m |\varepsilon|^m (1 - k)^{-1},$$

т. е.

$$W(x, \varepsilon) \sim 0,$$

что и требовалось доказать.

Возвращаясь к исходной постановке задачи, получаем следующую теорему.

Теорема 30.1. Формальный ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r,$$

построенный в теореме 29.2, является асимптотическим разложением матрицы $P(x, \varepsilon)$, такой, что преобразование $Y = P(x, \varepsilon)Z$ переводит уравнение $\varepsilon Y' = A(x, \varepsilon)Y$, рассмотренное в теореме 29.2, в уравнение $\varepsilon Z' = A_0(x)Z$. Существуют постоянные x_0, ε_0 , такие, что асимптотическое разложение матрицы P имеет место равномерно по x в области R двумерного комплексного пространства (x, ε) , которая задается неравенствами

$$\begin{aligned} \beta_1 \leq \arg \varepsilon \leq \beta_2, \quad |x| \leq x_0, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \\ -\pi + \delta \leq \arg(x\varepsilon^{-2/3}) \leq \frac{\pi}{3} - \delta. \end{aligned} \quad (30.44)$$

Здесь $\delta > 0$ и β_1, β_2 произвольны. Матрица $P(x, \varepsilon)$ может зависеть от выбора β_1 и β_2 .

Для данного значения $\arg \varepsilon$ теорема 30.1 позволяет построить асимптотику решений уравнения $\varepsilon Y' = A(x, \varepsilon)Y$ в открытом секторе с центром в точке $\varepsilon = 0$ и с углом $\frac{4\pi}{3}$. Заметим теперь, что при доказательстве теоремы мы в качестве фундаментальной матрицы $U(x)$ дифференциального уравнения (30.9) взяли матрицу вида (30.8). Доказательство остается в силе, если взять в качестве $U(x)$ любую из фундаментальных матриц:

$$U_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix} U(\omega^2 x) = \begin{pmatrix} Ai(\omega^2 x) & Ai(x) \\ \omega^2 Ai'(\omega^2 x) & Ai'(x) \end{pmatrix} \quad (30.45)$$

или

$$U_3(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} U(\omega x) = \begin{pmatrix} Ai(\omega x) & Ai(\omega^2 x) \\ \omega Ai'(\omega x) & \omega^2 Ai'(\omega^2 x) \end{pmatrix}. \quad (30.46)$$

Для симметрии обозначим U через U_1 и P через P_1 , т. е.

$$U_1(x) = U(x), \quad P_1(x, \varepsilon) = P(x, \varepsilon). \quad (30.47)$$

Если повторить доказательство теоремы 30.1, взяв $U_2(x)$ вместо $U_1(x)$, то мы получим, что существует матрица $P_2(x, \varepsilon)$, которая обладает теми же свойствами, что и матрица $P_1(x, \varepsilon)$, но в области R_2 , определение которой отличается от определения R (или R_1 , как мы условились писать) тем, что в (30.44) следует заменить соответствующее неравенство на

$$-\frac{\pi}{3} + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta.$$

Если провести доказательство с матрицей $U_3(x)$, то мы получим аналогичную функцию $P_3(x, \varepsilon)$, для которой ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r$$

является асимптотическим в секторе

$$\frac{\pi}{3} + \delta \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{3} - \delta.$$

Таким образом, можно следующим образом обобщить теорему 30.1.

Теорема 30.2. Пусть R_j , $j=1, 2, 3$, — три области в двумерном комплексном пространстве (x, ε) , определенные неравенствами

$$\beta_1 \leq \arg \varepsilon \leq \beta_2, \quad |x| \leq x_0, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0,$$

$$\frac{2j-5}{3} \pi + \delta \leq \arg z \leq \frac{2j-1}{3} \pi - \delta, \quad j=1, 2, 3.$$

Тогда существуют три матрицы $P_j(x, \varepsilon)$, $j=1, 2, 3$, каждая из которых в своей области R_j имеет асимптотическое разложение

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r,$$

обладающее свойствами, указанными в теореме 30.1. При этом преобразование $Y = P_j(x, \varepsilon)Z$ переводит дифференциальное уравнение $\varepsilon Y' = A(x, \varepsilon)Y$, о котором говорилось в теореме 30.1, в уравнение $\varepsilon Z' = A_0(x)Z$.

30.4. Явление Стокса

Полное исследование явления Стокса для задач, содержащих параметр, является трудным вопросом, который заслуживает дальнейшего изучения. Здесь мы ограничимся тем, что рассмотрим систему второго порядка, с которой мы уже имели дело в § 29 и 30.

Векторную систему вида

$$\begin{aligned} \varepsilon z' &= A_0(x)z, \\ A_0(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (30.48)$$

можно, как мы уже видели, проинтегрировать. Ее решения выражаются через функции Эйри, и потому явление Стокса для этой системы полностью изучено. Некоторые более общие системы вида

$$\begin{aligned} \varepsilon y' &= A(x, \varepsilon)y, \\ A(x, \varepsilon) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x)\varepsilon^r, \quad |x| \leq x_0, \end{aligned} \quad (30.49)$$

были в предыдущих разделах сведены к системе (30.48). Матрицы преобразований $P_j(x, \varepsilon)$, описанные в теореме 30.2, известны нам только в некоторых определенных секторах плоскости x . Цель настоящего раздела — построение матрицы $P(x, \varepsilon)$, которая преобразует систему (30.49) к виду (30.48) и для которой асимптотическое разложение, полученное в теореме 30.2, справедливо в полной окрестности точки поворота $x=0$.

Для простоты изложения предположим, что ε положительно. Это ограничение несущественно.

Пусть l_j , $j=1, 2, 3$, — лучи $\arg x = (2j-3)\frac{\pi}{3}$, $x \neq 0$. Обозначим через S_j замыкания секторов, на которые эти три луча разбивают круг $|x| \leq x_0$. Этот круг обозначим через S . Через S_j обозначим сектор, ограниченный лучами l_{j-1} и l_{j+1} (здесь и ниже все индексы берутся по модулю 3).

Если $u_j(x)$ — три частных решения уравнения Эйри, определенных формулой (22.5), то формула

$$z_j(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} u_{j+1}(x\varepsilon^{-2/3}) \\ \varepsilon^{1/3} u'_{j+1}(x\varepsilon^{-2/3}) \end{pmatrix}, \quad j=1, 2, 3, \quad (30.50)$$

дает нам три векторных решения системы (30.48). В силу (22.7) эти три решения связаны соотношением

$$z_1(x, \varepsilon) + z_2(x, \varepsilon) + z_3(x, \varepsilon) = 0. \quad (30.51)$$

Любые два из этих решений являются, однако, линейно независимыми, поскольку любые две из функций $u_j(x)$ линейно независимы.

Все 9 функций $P_k(x, \varepsilon)z_j(x, \varepsilon)$ являются решениями системы (30.49). Асимптотика шести из этих решений, для которых $k \neq j$, известна в $S = S_k$, и эти решения убывают в сек-

торе S_j и растут в секторе S_μ , $\mu \neq j, k$. Наша ближайшая цель — найти асимптотику этих решений во всем круге S . Этому посвящены следующие две леммы.

Лемма 30.7. Существуют 6 скалярных функций $\alpha_j^\nu(\varepsilon)$, $j=1, 2, 3$, $\nu=1, 2$, которые зависят только от ε и обладают следующими свойствами:

$$\alpha_j^\nu(\varepsilon) \sim 1, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (30.52)$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^1(\varepsilon) P_{j-1}(x, \varepsilon) z_j(x, \varepsilon) = 0, \quad (30.53a)$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^2(\varepsilon) P_{j+1}(x, \varepsilon) z_j(x, \varepsilon) = 0. \quad (30.53b)$$

Доказательство. Докажем только (30.53a), поскольку (30.53b) доказывается аналогично. Три решения $P_{j-1}(x, \varepsilon) z_j(x, \varepsilon)$ должны удовлетворять линейному соотношению вида $\sum_{j=1}^3 c_j(\varepsilon) P_{j-1}(x, \varepsilon) z_j(x, \varepsilon) = 0$, где коэффициенты $c_j(\varepsilon)$ определены с точностью до некоторого общего множителя. Полагая в этом соотношении $x=0$ и решая полученную систему уравнений для $c_j(\varepsilon)$, получаем, что в качестве $c_j(\varepsilon)$ можно взять выражения

$$c_j(\varepsilon) = \det [P_j(0, \varepsilon) z_{j+1}(0, \varepsilon), P_{j+1}(0, \varepsilon) z_{j+2}(0, \varepsilon)], \\ j=1, 2, 3 \pmod{3}.$$

В силу теоремы 30.2 все три функции $P_j(0, \varepsilon)$ имеют одно и то же асимптотическое разложение по степеням ε при $\varepsilon \rightarrow +0$, т. е. $P_j(0, \varepsilon) \sim P_0(\varepsilon)$, где $P_0(\varepsilon)$ — любая из трех матриц $P_j(0, \varepsilon)$. Следовательно,

$$c_j(\varepsilon) \sim \det P_0(\varepsilon) \det [z_{j+1}(0, \varepsilon), z_{j-1}(0, \varepsilon)].$$

В силу теорем 29.2 и 30.1 имеем $\det P_0(\varepsilon) \neq 0$ при достаточно малых ε . Далее, все три величины $\det [z_{j+1}(0, \varepsilon), z_{j-1}(0, \varepsilon)]$, тождественно равны в силу (30.51). При $\varepsilon \neq 0$ эти функции отличны от нуля, поскольку любые две из функций $z_j(x, \varepsilon)$ линейно независимы. Следовательно, при $\nu=1$ соотношения (30.52) и (30.53a) будут выполняться, если положить

$$\alpha_j^1 = c_j(\varepsilon) [\det P_0(\varepsilon) \det (z_{j+1}(0, \varepsilon), z_{j-1}(0, \varepsilon))]^{-1}.$$

Из леммы 30.7 следует, что 6 функций

$$y_j^\nu(x, \varepsilon) = \alpha_j^\nu(\varepsilon) P_{j-1}(x, \varepsilon) z_j(x, \varepsilon), \quad \nu=1, 2 \pmod{3}, \quad (30.54)$$

удовлетворяют двум линейным соотношениям

$$\sum_{k=1}^3 y_k^v(x, \varepsilon) = 0, \quad v = 1, 2, \quad (30.55)$$

что полностью аналогично (30.51).

Чтобы облегчить асимптотическое описание функций, которые входят в последующие рассуждения, обозначим через $q_j(x)$ ветвь функции $\frac{2}{3}x^{3/2}$, определенную в $S - I_j$ и такую, что $\operatorname{Re} q_j(x) \geq 0$ в S_j , и введем функцию $\hat{z}_j(x, \varepsilon)$, определенную в $S - I_j$:

$$\hat{z}_j(x, \varepsilon) = z_j(x, \varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon} q_j(x)}, \quad x \in S - I_j. \quad (30.56)$$

Функция $\hat{z}_j(x, \varepsilon)$ равномерно ограничена при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $x \in S - I_j$. Этот факт непосредственно следует из точных асимптотических формул для $z_j(x, \varepsilon)$, которые вытекают из формул (22.8), (22.9), результатов разд. 23.4, а также из формул (30.50), (30.51). Заметим, что $z_j(x, \varepsilon)$ убывает внутри S_j и растет в остальных двух секторах.

Лемма 30.8. Пусть функции $\hat{y}_j^v(x, \varepsilon)$, $j = 1, 2, 3$, $v = 1, 2$, определены в $S - I_j$ формулами

$$\hat{y}_j^v(x, \varepsilon) = y_j^v(x, \varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon} q_j(x)}, \quad x \in S - I_j. \quad (30.57)$$

Тогда

$$\hat{y}_j^2(x, \varepsilon) - \hat{y}_j^1(x, \varepsilon) \sim 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (30.58)$$

равномерно по x в любом замкнутом подсекторе сектора $S - I_j$.

Доказательство. Из (30.54), теоремы 30.2 и из ограниченности $\hat{z}_j(x, \varepsilon)$ следует, что функции $y_j^1(x, \varepsilon)$ и $y_j^2(x, \varepsilon)$ обе убывают внутри S_j и имеют одинаковые асимптотические разложения, т. е. что в S_j имеет место (30.58). Если бы уравнение не зависело от параметра, то отсюда, согласно результатам § 15, следовало бы, что эти решения тождественно равны. В данном случае ситуация является более сложной, поскольку любое решение можно домножить на функцию, зависящую от ε и имеющую весьма сложное асимптотическое поведение. Чтобы доказать наше более слабое утверждение (30.58), положим для краткости $y_j^2 - y_j^1 = v_j$ и аналогично определим \hat{v}_j . Решение $v_j(x, \varepsilon)$ уравнения (30.49) можно представить в виде линейной комбинации двух решений, асимптотическое поведение которых в S_{j+1} известно и различно, например в виде

$$v_j(x, \varepsilon) = a_j(\varepsilon) y_j^1(x, \varepsilon) + b_j(\varepsilon) y_{j+1}^2(x, \varepsilon), \quad (30.59)$$

где $a_j(\varepsilon)$, $b_j(\varepsilon)$ — некоторые функции. Так как асимптотическое поведение $P_k(x, \varepsilon)$ в области $S - S_k$ известно из теоремы 30.2, то известно асимптотическое поведение $z_k(x, \varepsilon)$, и из определения (30.54) следует, что $\hat{y}_j^1(x, \varepsilon)$ и $\hat{y}_{j+1}^2(x, \varepsilon)$ ограничены в любом замкнутом подсекторе сектора $S - S_{j-1}$. Обозначим через x_j точку пересечения границы S с биссектрисой сектора S_j . Тогда из (30.59) следует, что

$$\hat{v}_j(x_j, \varepsilon) = a_j(\varepsilon) \hat{y}_j^1(x_j, \varepsilon) + b_j(\varepsilon) \hat{y}_{j+1}^2(x_j, \varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon} 2a_j(x_j)}. \quad (30.60)$$

Коэффициенты $a_j(\varepsilon)$, $b_j(\varepsilon)$ можно теперь вычислить из (30.60) с помощью правила Крамера. Для этого необходимо вычислить определитель матрицы со столбцами $\hat{y}_j^1(x_j, \varepsilon)$ и $\hat{y}_{j+1}^2(x_j, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \det [\hat{y}_j^1(x_j, \varepsilon), \hat{y}_{j+1}^2(x_j, \varepsilon)] &= \\ &= \det [y_j^1(x_j, \varepsilon), y_{j+1}^2(x_j, \varepsilon)] \det \begin{pmatrix} e^{a_j(x_j)/\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{a_{j+1}(x_j)/\varepsilon} \end{pmatrix} = \\ &= \alpha_j^1(\varepsilon) \alpha_{j+1}^2(\varepsilon) \det P_{j-1}(x_j, \varepsilon) \det [z_j(x_j, \varepsilon), z_{j+1}(x_j, \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Далее, $\det P_{j-1}(x_j, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ стремится к пределу, отличному от нуля, во всяком случае, если круг S не слишком велик, $\alpha_k^v(\varepsilon) \sim 1$ при $k=1, 2, 3$, и

$$\begin{aligned} \det [z_j(x_j, \varepsilon), z_{j+1}(x_j, \varepsilon)] &= \det [z_j(0, \varepsilon), z_{j+1}(0, \varepsilon)] = \\ &= \det \begin{pmatrix} u_{j+1}(0) & u_{j-1}(0) \\ \varepsilon^{1/2} u'_{j+1}(0) & \varepsilon^{1/2} u'_{j-1}(0) \end{pmatrix} = \varepsilon^{1/2} \det \begin{pmatrix} u_{j+1}(0) & u_{j-1}(0) \\ u'_{j+1}(0) & u'_{j-1}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\det [\hat{y}_j(x_j, \varepsilon), \hat{y}_{j+1}^2(x_j, \varepsilon)] = \varepsilon^{1/2} \kappa(\varepsilon),$$

где $|\kappa(\varepsilon)| \geq k_0 > 0$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, если ε_0 не слишком велико. Так как $\hat{v}_j(x_j, \varepsilon) \sim 0$, то, решая уравнение (30.60), находим, что

$$a_j(\varepsilon) \sim 0, \quad b_j(\varepsilon) e^{\frac{2}{\varepsilon} a_j(x_j)} \sim 0.$$

Запишем (30.59) в виде

$$\hat{v}_j(x, \varepsilon) = a_j(\varepsilon) \hat{y}_j^1(x, \varepsilon) + b_j(\varepsilon) \hat{y}_{j+1}^2(x, \varepsilon) e^{\frac{2}{\varepsilon} a_j(x)}$$

и подставим в эту формулу предыдущее соотношение. Тогда мы получим, что (30.58) справедливо в любом замкнутом подсекторе сектора $S - S_{j-1}$. Точно так же можно показать, что (30.58) имеет место внутри $S - S_{j+1}$, если выразить $v_j(x, \varepsilon)$ через $y_j^2(x, \varepsilon)$ и $y_{j-1}^1(x, \varepsilon)$.

Теперь мы в состоянии доказать основной результат настоящего раздела.

Теорема 30.3. *Существует матричная функция $P(x, \varepsilon)$, для которой асимптотическое разложение*

$$P(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

определенное в теореме 29.2, имеет место во всем круге S равномерно по x и преобразование $y = P(x, \varepsilon)z$ приводит дифференциальное уравнение $\varepsilon y' = A(x, \varepsilon)y$ к виду $\varepsilon z' = A_0(x)z$.

Доказательство. Матрицы

$$Z_j(x, \varepsilon) = [z_{j-1}(x, \varepsilon), z_{j+1}(x, \varepsilon)], \quad Y_j(x, \varepsilon) = [y_{j-1}^1(x, \varepsilon), y_{j+1}^1(x, \varepsilon)]$$

являются фундаментальными матричными решениями систем (30.48) и (30.49) соответственно. Матрицы

$$Q_j(x, \varepsilon) = Y_j(x, \varepsilon) Z_j^{-1}(x, \varepsilon), \quad j = 1, 2, 3, \quad (30.61)$$

по определению обладают следующим свойством:

$$Q_j(x, \varepsilon) z_k(x, \varepsilon) = y_k^1(x, \varepsilon), \quad j \neq k.$$

Из этого свойства и соотношений (30.51), (30.55) следует также, что $Q_j z_j = y_j^1$. Поэтому все три матрицы $Q_j(x, \varepsilon)$ являются матрицами в одном и том же базисе одного и того же линейного преобразования, которое переводит двумерное векторное пространство решений уравнения (30.48) в пространство решений уравнения (30.49). Следовательно, $Q_j(x, \varepsilon)$ тождественно совпадают:

$$Q_j(x, \varepsilon) \equiv P(x, \varepsilon). \quad (30.62)$$

Далее, покажем, что $Q_j(x, \varepsilon)$ в $S - S_j$ асимптотически равна матрице $P_j(x, \varepsilon)$, построенной в теореме 30.2. Из формул (30.54) и леммы (30.8) имеем в $S - S_j$

$$\begin{aligned} Y_j &= [\hat{y}_{j-1}^1, \hat{y}_{j+1}^1] \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{\varepsilon} q_{j-1}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{\varepsilon} q_{j+1}} \end{bmatrix} = \\ &= [\hat{y}_{j-1}^2 - \hat{v}_{j-1}, \hat{y}_{j+1}^1] \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{\varepsilon} q_{j-1}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{\varepsilon} q_{j+1}} \end{bmatrix} = \\ &= P_j [\hat{z}_{j-1} - \hat{v}_{j-1}, \hat{z}_{j+1}] \begin{pmatrix} \alpha_{j-1}^2 & 0 \\ 0 & \alpha_{j+1}^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{\varepsilon} q_{j-1}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{\varepsilon} q_{j+1}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

где

$\tilde{v}_{j-1}(x, \varepsilon) \equiv P_j^{-1}(x, \varepsilon)(\alpha_{j-1}'(\varepsilon))^{-1} \hat{v}_{j-1}(x, \varepsilon) \sim 0$ в $S - S_j$ и $v_j(x, \varepsilon)$ — те же, что и в доказательстве леммы 30.8. Следовательно, так как $\hat{z}_{j-1}, \hat{z}_{j+1}$ ограничены в $S - S_j$, то

$$Y_j = P_j \{ [\hat{z}_{j-1}, \hat{z}_{j+1}] + \Omega_j \} \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{\varepsilon} q_{j-1}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{\varepsilon} q_{j+1}} \end{bmatrix},$$

где

$$\Omega_j = \Omega_j(x, \varepsilon) \sim 0 \text{ в } S - S_j.$$

С другой стороны,

$$z_j^{-1} = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{\varepsilon} q_{j-1}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{\varepsilon} q_{j+1}} \end{bmatrix} [\hat{z}_{j-1}, \hat{z}_{j+1}]^{-1}$$

в $S - S_j$, и мы получаем для матрицы $Q_j = Y_j Z_j^{-1}$ выражение

$$Q_j = P_j \{ I + \Omega_j [\hat{z}_{j-1}, \hat{z}_{j+1}]^{-1} \}. \quad (30.63)$$

Чтобы оценить последнюю матрицу этой формулы, заметим, что $q_{j-1} = -q_{j+1}$ в $S - S_j$ и потому

$$\begin{aligned} \det [\hat{z}_{j-1}(x, \varepsilon), \hat{z}_{j+1}(x, \varepsilon)] &= \det [z_{j-1}(x, \varepsilon), z_{j+1}(x, \varepsilon)] = \\ &= \det [z_{j-1}(0, \varepsilon), z_{j+1}(0, \varepsilon)] = e^{1/k}, \end{aligned}$$

где k — ненулевая постоянная. Так как $\hat{z}_{j-1}, \hat{z}_{j+1}$ ограничены в $S - S_j$, то $\Omega_j [z_{j-1}, z_{j+1}]^{-1} \sim 0$ в $S - S_j$ и (30.63) принимает вид

$$P(x, \varepsilon) = Q_j(x, \varepsilon) \sim P_j(x, \varepsilon) \text{ в } S - S_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Поскольку $P_j(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^r$ в $S - S_j$ в силу теоремы 30.2, то доказательство теоремы 30.3 закончено.

31. Краткий обзор других задач, связанных с точками поворота

31.1. Растяжение и сшивание

Проиллюстрируем преобразования растяжения и сшивания на примере уравнения (29.6). Замена переменной

$$x = z\varepsilon^\alpha \quad (31.1)$$

приводит это уравнение к виду

$$\varepsilon^{2-2\alpha} \frac{d^2 u}{dz^2} - (z\varepsilon^\alpha \varphi(z\varepsilon^\alpha) + \varepsilon \psi(z\varepsilon^\alpha, \varepsilon)) u = 0. \quad (31.2)$$

Если положить $2 - 2\alpha = \alpha$, т. е. $\alpha = 2/3$, то уравнение примет вид

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - (z\varphi(z\rho^2) + \rho\psi(z\rho^2, \rho^3)) u = 0, \quad (31.3)$$

где

$$\rho = \varepsilon^{1/3}.$$

Полученное дифференциальное уравнение (31.3) голоморфно зависит от ρ в точке $\rho=0$ и потому имеет фундаментальную систему решений, голоморфную по ρ . Эти решения можно получить обычным образом, сравнивая коэффициенты рядов по степеням ε . Преобразование (31.1) равносильно просто растяжению масштаба независимой переменной.

Аналогичные преобразования растяжения полезны для многих других дифференциальных уравнений.

Задача 31.1. Пусть в системе $\varepsilon U' = A(x, \varepsilon)U$ матрица $A(x, \varepsilon)$ голоморфна по совокупности переменных при $x=\varepsilon=0$, и пусть

$$A(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ xa_n(x) & xa_{n-1}(x) & \dots & xa_1(x) & \dots \end{pmatrix}, \quad (31.4)$$

где $a_n(0) \neq 0$. Найти числа α и β , такие, что преобразование

$$x = z\varepsilon^\alpha, \quad U = \text{diag}(1, \varepsilon^\beta, \varepsilon^{2\beta}, \dots, \varepsilon^{(n-1)\beta})V \quad (31.5)$$

приводит данную систему к виду

$$\frac{dV}{dz} = H(z, \rho)V, \quad (31.6)$$

где $\rho = \varepsilon^\gamma$ — некоторый новый подходящий параметр и матрица $H(z, \rho)$ голоморфна в точке $x=\rho=0$.

Ошибочно было бы полагать, что такие простые преобразования могут сами по себе устранить трудности, присущие задачам о точках поворота. Несмотря на то что уравнение (31.3) имеет фундаментальную систему решений, которые голоморфны в точке $z=\rho=0$, существование решений в виде рядов по степеням ρ можно установить только в некотором фиксированном, хотя, возможно, и большом, круге плоскости z . Соответствующим

щая область в плоскости x стягивается в точку, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, и это сильно снижает ценность полученного результата.

С другой стороны, если x *ограничено*¹⁾ от точек поворота, то применима теория, развита в гл. VII, и это дает возможность получить, по крайней мере в достаточно малой области плоскости x , асимптотические разложения для некоторой фундаментальной системы решений дифференциального уравнения. На первый взгляд кажется, что развитые нами методы не позволяют эффективно найти связь между этими двумя различными типами фундаментальных систем решений, так как для этого необходимо, чтобы области применимости асимптотик этих решений перекрывались при малых ε .

Более тонкое исследование показывает, однако, что оба эти разложения: одно — сходящееся по степеням ρ и второе — асимптотическое, построенное в гл. VII, часто оказываются применимыми, хотя и в несколько более слабой форме, в больших областях, которые перекрываются, что позволяет «сшить» эти решения. Изложение этой теории потребовало бы слишком много места, и мы удовлетворимся изложением результатов для дифференциального уравнения (29.6). По поводу этих и близких вопросов см. Вазов [8]—[11] и Ивано и Сибуйя [1].

Если найти асимптотику решений уравнения (29.6) по методу гл. VII, то окажется, что коэффициенты этих асимптотических рядов по степеням ε будут иметь особенность при $x=0$. Более точно, если этот ряд имеет вид

$$\sum_{r=0}^{\infty} \hat{U}_r(x) \varepsilon^r,$$

то можно показать, что $\hat{U}_{r+1}(x) = O(x^{-3r/2})$. Следовательно, если x зависит от ε и

$$x\varepsilon^{-2/3} \rightarrow \infty \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (31.7)$$

то каждый член этого ряда стремится к нулю быстрее, чем предыдущий. Поэтому вполне правдоподобно, что этот ряд является асимптотическим не только при $|x| \geq x_0 > 0$, где x_0 не зависит от ε , но и при более слабом ограничении

$$|x| \geq x_0(\varepsilon) > 0, \quad (31.8)$$

если только

$$x_0(\varepsilon) \varepsilon^{-2/3} \rightarrow \infty \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (31.9)$$

¹⁾ В оригинале: is bounded away from. Выражение «некоторое множество точек ограничено от точки x_0 » нужно понимать в том смысле, что все точки этого множества находятся вне некоторой окрестности точки x_0 . — *Прим. ред.*

Аналогично если ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_r(z) \rho^r$$

является решением «растянутого» дифференциального уравнения (31.3), то коэффициенты $V_r(z)$ имеют особенность в точке $z = \infty$. Оказывается, что если вынести из всех $V_r(z)$ подходящий общий множитель, то получится ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} \hat{V}_r(z) \rho^r,$$

коэффициенты которого растут не быстрее чем $O(z^{2r})$ при $z \rightarrow \infty$. Следовательно, мы можем предположить, что этот ряд, который сходится при $|z| \leq z_0$, где z_0 — некоторая постоянная, не зависящая от ϵ , является по крайней мере асимптотическим рядом в более широкой области вида

$$|z| \leq z_0(\rho), \quad (31.10)$$

где

$$z_0(\rho) \rho^{1/2} \rightarrow 0, \quad \text{если } \rho \rightarrow 0. \quad (31.11)$$

Эти предположения действительно можно доказать. Условия (31.9) и (31.11) определяют области, которые перекрываются.

Положим, например, $x = \epsilon^\gamma$. Тогда $x \epsilon^{-2/3} \rightarrow \infty$ при $\gamma < \frac{2}{3}$. Соответ-

ствующее значение z равно $\epsilon^{\gamma - \frac{2}{3}}$, и условие $z \rho^{1/2} \rightarrow 0$ выполняется, если $\gamma - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} > 0$, т. е. если $\gamma > \frac{1}{2}$. Для любого γ ,

такого, что $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{2}{3}$, числа $x = x^\gamma$, $x_0(\epsilon) = \frac{1}{2} x^\gamma$, $z_0(\rho) = 2\epsilon^{\gamma - \frac{2}{3}}$ удовлетворяют условиям (31.8) и (31.11).

Дифференциальное уравнение (29.6) было решено более изящным способом в § 29 и 30 с помощью сведения к уравнению Эйри. Метод § 30 иногда называют *равномерным асимптотическим разложением* в окрестности точки поворота, поскольку при этом методе не требуется отдельно исследовать точки, близкие к точке поворота и отграниченные от нее. (Строго говоря, последнее утверждение не совсем верно, так как при вычислении функции Эйри следует использовать два типа разложений этой функции.)

Методы, позволяющие получать равномерные асимптотические разложения в задачах о точках поворота, опираются на наличие некоторого простого дифференциального уравнения с

известным асимптотическим поведением решений, в которое исходное дифференциальное уравнение может быть преобразовано в некоторой области плоскости x , содержащей точку поворота. Это требование сильно сужает область применимости «равномерных» методов. Метод «растяжения и сшивания» можно применить для значительно более широких классов задач о точках поворота, например в случае, описанном в задаче 31.1.

31.2. Некоторые специальные задачи о точках поворота для уравнений второго порядка

Существует весьма обширная литература, посвященная задачам о точках поворота для линейных дифференциальных уравнений второго порядка; в этих задачах возникают и такие трудности, которых мы не коснулись в § 29, 30. Соответствующие исследования настолько сложны и многообразны, что приходится оставить всякую надежду достаточно полно осветить их в этой, а также и в любой другой книге, если заботиться о том, чтобы она была читаемой. Мы ограничимся только некоторыми замечаниями, которые могут помочь читателю ориентироваться в литературе, где он найдет дальнейшие ссылки.

Общей чертой всех работ, которые мы имеем в виду, является то, что они основаны на технике сравнения, которую мы также использовали в § 29 и 30. Эта техника состоит в следующем. С помощью удачно подобранных преобразований зависимой и независимой переменных данное дифференциальное уравнение преобразуется в родственное дифференциальное уравнение, которое настолько мало отличается от некоторого стандартного дифференциального уравнения с известными асимптотическими свойствами, что при малых ε этим различием можно пренебречь. В § 29 родственным уравнением было уравнение Эйри, а «пренебрежимо малые» члены, о которых говорилось выше, отсутствовали, так как для преобразования, упрощающего уравнения, был построен весь асимптотический ряд. В более сложных задачах часто бывает невозможно полностью устранить «пренебрежимо малые» члены и вместо полного асимптотического разложения искомого решения удается получить только приближение некоторого конечного порядка, причем обычно ограничиваются только главным членом асимптотики. Если, кроме того, рассматриваются только вещественные значения независимой переменной, то предположение об аналитичности коэффициентов дифференциального уравнения может быть заменено более слабым.

Вместо того чтобы данное дифференциальное уравнение свести к более простому уравнению сравнения, некоторые

авторы предпочитают противоположную процедуру, а именно: дифференциальное уравнение специального вида, асимптотическое поведение решений которого известно, они преобразуют в уравнение, которое пренебрежимо мало отличается от данного уравнения. Очевидно, что эти две процедуры эквивалентны.

(а) Точки поворота порядка, отличного от единицы. В § 29 существенно использовалось условие (29.10). Для уравнения вида (29.6) это эквивалентно условию, что функция $\varphi(x)$ голоморфна и отлична от нуля при $x=0$.

В своих двух статьях Лангер [1], [2] рассматривал уравнение, аналогичное уравнению (29.6), в котором множитель x перед $\varphi(x)$ был заменен на x^ν , где ν — вещественное число, не обязательно целое. Он построил родственное уравнение, решения которого выражаются через цилиндрические функции порядка $(\nu+2)^{-1}$. При $\nu=1$ этот порядок равен $1/3$ и соответствующая цилиндрическая функция превращается в функцию Эйри, которая, как было указано в разд. 22.2, может быть выражена через функцию Бесселя порядка $1/3$.

В первой из двух упомянутых статей (Лангер [1]) независимая переменная x была вещественной и в соответствии с этим не требовалась аналитичность коэффициентов. Во второй статье (Лангер [2]) эти результаты были обобщены на случай комплексных x . В обеих статьях вычислен только первый член асимптотического ряда.

В этих двух статьях было введено ограничительное условие $\varphi(x, 0) = 0$ в (29.6), чтобы иметь возможность привести исходное уравнение к некоторой разновидности уравнения Бесселя. В работе Лангера [3] это условие опущено для $\nu=2$. Такая ситуация возникает, например, в асимптотической теории функций Матье (см. также Лангер [4]). Лангер приводит данное дифференциальное уравнение с помощью преобразования зависимой и независимой переменных к виду, который мало отличается от уравнения для конфлюэнтной гипергеометрической функции $M_{\nu, \mu}$ (см. Уиттекер и Ватсон [1]).

(б) Разложения в неограниченных областях. Во всех наших исследованиях асимптотических решений дифференциальных уравнений с помощью разложений по параметру мы ограничивались тем случаем, когда независимая переменная изменяется в некоторой ограниченной, возможно, очень малой области. Для многих приложений желательно построить разложения, которые пригодны равномерно по x в некотором секторе или хотя бы на некотором луче. Очевидно, что такого рода результаты можно получить, только если наложить строгие ограничения на пове-

дение коэффициентов дифференциального уравнения на бесконечности. Эти условия весьма разнообразны и часто бывают довольно запутанными. Лангер [1], например, показал, что его результаты справедливы на неограниченных интервалах, если некоторая вполне определенная функция абсолютно интегрируема. Эту функцию можно явно выразить через коэффициенты данного дифференциального уравнения, но она имеет довольно сложный вид.

Из работ, в которых основное внимание уделяется уравнениям в неограниченных областях, мы укажем работы Черри [2], Олвера [1], [2], [3], Эрдейи и Свенсона [1], [2], Эрдейи, Кеннеди и Мак-Грегора [1], [2] и Казаринова [1].

В дополнение к работам Лангера работы Черри также оказали заметное влияние на дальнейшие исследования. Одной из оригинальных особенностей подхода Черри является использование зависящего от ε преобразования *независимой* переменной для получения приближений высокого порядка. В противоположность этому наш метод в § 29, построенный в духе Лангера [7], основан главным образом на преобразованиях *зависимой* переменной. Вследствие того, что в системах дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и, стало быть, в скалярном уравнении высокого порядка в нашем распоряжении имеются только *одна* независимая переменная и целая матрица зависимых переменных, техника Черри имеет более узкую область применения. В случае уравнений второго порядка, однако, оказывается, что эта техника особенно хорошо приспособлена для исследования структуры решений в неограниченных областях.

При исследовании уравнений с аналитическими коэффициентами часто бывает удобно охарактеризовать данное решение, указав его поведение на бесконечности. Асимптотические разложения типа построенных в § 29, пригодность которых установлена только в ограниченных областях, конечно, не подходят для этой цели. Даже если удастся расширить теорию так, чтобы она была применима в неограниченных областях, все равно часто бывает трудно получить информацию о поведении решений, когда независимая переменная x стремится к бесконечности. В подходе Черри это обстоятельство все время находится в поле зрения. В интегральном уравнении Вольтерра, с помощью которого устанавливается асимптотический характер ряда, интеграл берется от точки $x = \infty$. Это означает, что решение, асимптотическое представление которого требуется найти, именно на бесконечности согласовано с известной функцией, с которой его можно сравнивать.

(с) Точки поворота, являющиеся особенностями уравнения.

Если в уравнении (29.6) множитель x перед функцией $\varphi(x)$ заменить на $x^{-\nu}$, $\nu > 0$, то можно ожидать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ в окрестности точки $x=0$ асимптотическое поведение решений будет совершенно иным, поскольку эффект малости ε усиливается, а не нейтрализуется эффектом малости x . Тем не менее Лангер показал, что его метод применим и к задачам такого рода. В работе Лангера [6] предполагалось, что $\nu < 2$ и что $\psi(x, \varepsilon)$ имеет полюс порядка не выше второго в точке $x=0$, и снова были получены равномерные асимптотические разложения, которые выражаются через функции Бесселя. Случай $\nu=2$ был исследован Кашуэллом [1]; при этом функциями сравнения были элементарные функции, содержащие логарифмы. Существует ряд других статей по этим вопросам, из которых мы упомянем работы Свенсона [1], Казаринова и Маккельви [1] и Олвера [1], [2].

(d) Области с двумя точками поворота. Дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^2 u'' + (1 - x^2)u = 0 \quad (31.12)$$

имеет две точки поворота первого порядка: $x=1$ и $x=-1$. В окрестности каждой из этих точек асимптотику решений при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно получить либо прямо из § 30, либо с помощью методов, развитых для таких задач Лангером и Черри. Чтобы получить асимптотику частных решений в областях, содержащих обе точки поворота, необходимо установить формулы связи.

Эта задача представляет интерес по двум причинам. Одна из них — это связь с уравнением Вебера

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2 \right) u, \quad (31.13)$$

решениями которого являются так называемые функции параболического цилиндра. Асимптотическое поведение функций параболического цилиндра представляет интерес во многих физических задачах. Уравнения (31.13) и (31.12) эквивалентны, так как преобразование

$$n = \frac{1}{2}(\varepsilon^{-1} - 1), \quad z = x \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \quad (31.14)$$

переводит (31.13) в (31.12).

Вторая причина, по которой уравнение (31.12) заслуживает внимания, состоит в том, что это простейшее уравнение, имеющее две точки поворота. Следовательно, если бы асимптотические свойства уравнения (31.12) были основательно изучены,

можно было бы свести асимптотическое исследование других дифференциальных уравнений с двумя точками поворота к этому уравнению, аналогично тому как асимптотическое исследование дифференциальных уравнений с одной точкой поворота первого порядка было сведено к уравнению Эйри.

31.3. Некоторые задачи о точках поворота для уравнений высокого порядка

Интерес к задачам о точках поворота для уравнений порядка выше второго был стимулирован одной из задач механики сплошной среды, а именно задачей о гидродинамической устойчивости.

Существует, вообще говоря, два типа течения вязкой жидкости — ламинарное и турбулентное. Первый из них может быть описан с помощью вектор-функции скорости, которая может зависеть от координат и от времени, но изменяется так медленно и плавно, что прямое математическое описание вектора поля является четкой и ясной задачей математической физики. Изменения в турбулентном потоке столь быстры и нерегулярны, что его можно описать только в статистических терминах. Переход из ламинарного в турбулентное состояние происходит так внезапно, когда скорость течения возрастает или вязкость жидкости уменьшается, что различие между этими состояниями является, скорее, качественным, чем количественным. Общепринятое объяснение этого явления состоит в том, что ламинарное течение «устойчиво» в том смысле, что возникающие в течении возмущения затухают со временем, в то время как в турбулентном течении определенные возмущения могут полностью разрушить предыдущее состояние.

Одна из попыток математического анализа этой ситуации состоит в том, что рассматриваются настолько малые возмущения ламинарного потока, что можно воспользоваться линеаризованными уравнениями Навье — Стокса. Этот подход восходит к Рэлею [1]. В наиболее изученном варианте этой теории главную роль играет уравнение

$$u^{(4)} - 2\alpha^2 u'' + \alpha u - \alpha R[(w(x) - c)(u'' - \alpha^2 u) - w'' u] = 0, \quad (31.15)$$

где $u = u(x)$. Это уравнение иногда называют уравнением Орра — Зоммерфельда. Физический смысл и вывод этого уравнения можно найти в работах Линя [1], [2]. Положительная константа R — это число Рейнольдса течения, α — частота колебательных возмущений, которые рассматриваются в этой теории, c — комплексная константа, мнимая часть которой определяет затухание возмущения. Устойчивость имеет место, только

если $\text{Im } c \leq 0$. Функция $\omega = \omega(x)$ задана. Она описывает профиль невозмущенного потока.

Решение $u(x)$ должно удовлетворять также четырем однородным краевым условиям. Эта задача имеет нетривиальные решения только при некоторых определенных комбинациях параметров α , R и c . Опыт показывает, что значения α и R , при которых происходит переход от ламинарного режима к турбулентному, таковы, что произведение αR велико. Поэтому первым шагом при решении этой задачи на собственные значения является асимптотическое решение при больших αR дифференциального уравнения (31.15). Поскольку в уравнении (31.15) есть комплексные коэффициенты, разумно рассматривать это уравнение при комплексных значениях x . Оказывается, что множитель $\omega(x) - c$ обычно обращается в нуль в некоторой точке, лежащей на интервале вещественной оси x , на котором ставится задача, или вблизи него. Точка x_0 , в которой $\omega(x_0) - c = 0$, является точкой поворота дифференциального уравнения.

При чисто математическом асимптотическом исследовании дифференциального уравнения (31.15) удобно так изменить обозначения, чтобы поместить точку поворота в точку $x=0$, и ввести малый параметр $\varepsilon = (R\alpha)^{-1/2}$. Тогда дифференциальное уравнение (31.15) будет частным случаем более общего уравнения

$$\varepsilon^2 u^{(4)} - M[u] = 0, \quad (31.16)$$

где

$$M[u] = \sum_{k=0}^2 b_k(x, \varepsilon) u^{(2-k)}. \quad (31.17)$$

Функции $b_k(x, \varepsilon)$ голоморфны по совокупности переменных в точке $x = \varepsilon = 0$ и $a_0(x) = 1$. Условия

$$b_0(0, 0) = c, \quad b_0'(0, 0) \neq 0 \quad (31.18)$$

приводят к тому, что точка $x=0$ является точкой поворота первого порядка рассматриваемого дифференциального уравнения.

Подстановка

$$y_1 = u, \quad y_2 = u', \quad y_3 = u'', \quad y_4 = \varepsilon u''' \quad (31.19)$$

сводит уравнение (31.16) к системе

$$\varepsilon y' = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_2(x, \varepsilon) & b_1(x, \varepsilon) & b_0(x, \varepsilon) & 0 \end{pmatrix} y \equiv A(x, \varepsilon) y, \quad (31.20)$$

где y — вектор-столбец с компонентами y_j , $j=1, 2, 3, 4$. Собственные значения главного члена $A(x, 0)$ равны

$$0, 0, (b_0(x, 0))^{1/2}, -(b_0(x, 0))^{1/2}. \quad (31.21)$$

При $x=0$ два последних собственных значения совпадают друг с другом и с двумя первыми, которые тождественно равны нулю. Точка поворота такого типа нам до сих пор не встречалась. Теорема 26.2, так же как и обобщение теоремы 29.2, доказанное Вазовым [12], неприменимы в этом случае. Неприменима также теория, коротко изложенная в разд. 31.1.

Тем не менее асимптотическая теория уравнения (31.16) была развита рядом авторов, которые использовали модификации метода сравнения.

Подходящее уравнение, которое используется для сравнения, имеет вид

$$\varepsilon^2 v^{(4)} + xv'' + \alpha v' + \beta v = 0, \quad (31.22)$$

где α и β — постоянные, возможно, зависящие от ε . Уравнение (31.22) можно решить с помощью контурного метода Лапласа, изложенного в разд. 22.1. Этот метод позволяет построить фундаментальную систему решений в виде контурных интегралов, аналогичных интегралу Эйри, из которых можно получить как сходящиеся, так и асимптотические разложения, но, конечно, со значительно большими трудностями, чем в § 22 и 23. Частный случай $\alpha=0$, $\beta=1$ был рассмотрен Вазовым [4], общий — Рабенштейном [1].

Сравнение уравнения общего вида (31.16) с уравнением (31.22) (после подходящей замены переменных) является чрезвычайно сложным делом. Главные члены асимптотики решений были вычислены Вазовым [5]. Формальная часть более полного асимптотического анализа была развита Рабенштейном [2] и Линем и Рабенштейном [1].

Несколько другая асимптотическая теория того же дифференциального уравнения (31.16) была развита Лангером (см. Лангер [8], [9], [10], [12], [14]). Он не пользовался уравнением (31.22) для сравнения. Основная идея метода Лангера состояла в последовательном понижении порядка уравнения. Решения уравнения (31.16) были асимптотически выражены через решения некоторого уравнения третьего порядка, а асимптотические свойства этого уравнения были изучены с помощью методов, развитых ранее Лангером для уравнений второго порядка.

Наиболее новые и наиболее общие результаты в этом направлении получены Сибуйя [6], [10] и [11] для уравнений n -го порядка, которые являются обобщением уравнения (31.16).

Вся эта теория находится еще не на таком уровне развития, чтобы ее можно было достаточно полно осветить в настоящей книге. Вместо этого мы попытаемся привести краткое качественное описание наиболее важных асимптотических свойств уравнения (31.16) в случае, когда, как и в уравнении (31.15),

$$b_1(x) \equiv 0.$$

В окрестности любой точки, отличной от точки $x=0$ и лежащей в области, в которой коэффициенты уравнения (31.16) голоморфны, асимптотику фундаментальной системы решений этого уравнения можно найти с помощью небольшой модификации методов гл. VII. Можно показать, что в окрестности такой точки матрица $A(x, 0)$ из (31.20) голоморфно подобна диагональной матрице с элементами

$$0, 0, (b_0(x, 0))^{1/2}, -(b_0(x, 0))^{1/2}.$$

Задача 31.2. Доказать предыдущее утверждение.

В силу теоремы 26.2 векторное дифференциальное уравнение (31.20) можно расщепить на три уравнения, два из которых будут скалярными, а третье будет системой из двух скалярных уравнений. В последней системе можно сократить обе части на ε , и полученная система имеет фундаментальную систему решений, которые допускают в определенных секторах асимптотические разложения в ряды по степеням ε .

Этим способом можно найти четыре решения, которые в окрестности рассматриваемой точки имеют вид

$$u_1 = w_1(x, \varepsilon), \quad (31.23a)$$

$$u_2 = w_2(x, \varepsilon), \quad (31.23b)$$

$$u_3 = w_3(x, \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} q(x)\right), \quad (31.23c)$$

$$u_4 = w_4(x, \varepsilon) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} q(x)\right). \quad (31.23d)$$

Функции $w_j(x, \varepsilon)$ в достаточно узком секторе обладают асимптотическими разложениями по степеням ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ и

$$q(x) = \int_0^x (b_0(t, 0))^{1/2} dt. \quad (31.24)$$

Этот результат можно улучшить, если вначале рассмотреть формальные решения вида (31.23) и затем прямо доказать их асимптотический характер. Это было сделано Вазовым [2] с помощью результатов Тржизинского [3]. Оказалось, что асимптотические формулы (31.23) пригодны в областях, значительно больших, чем указанные выше.

Чтобы описать эти области, заметим, что функция $q(x)$ имеет вид $x^{3/2}q_1(x)$, где функция $q_1(x)$ голоморфна и отлична от нуля в точке $x=0$. Это следует из того, что по условию функция $b_0(x, 0)$ имеет простой нуль в точке $x=0$. Предположим для простоты, что ε лежит на некотором луче в плоскости ε . В качестве этого луча, не ограничивая общности, можно взять положительную вещественную полуось. Тогда существуют три кривые C_j , $j=1, 2, 3$, выходящие из точки $x=0$ и образующие друг с другом в этой точке углы $\frac{2\pi}{3}$, на которых $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\varepsilon}q(x)\right)=0$.

Пусть S_j , $j=1, 2, 3$, — три криволинейных сектора, на которые эти кривые разбивают окрестность точки $x=0$. Эти сектора занумеруем так, чтобы граница S_j не содержала C_j . Пусть S — достаточно малая окрестность точки $x=0$.

В работе Вазова [2] доказано, что в каждой компактной подобласти области $S - C_j$, $j=1, 2, 3$, существует пара решений дифференциального уравнения, асимптотика которых в $S - C_j$ имеет вид (31.23c) и (31.23d) соответственно. Так как функция $q(x)$ многозначна, то кривая C_j является линией Стокса для этих решений, т. е. если аналитически продолжить решение и его асимптотический ряд через кривую C_j , то этот ряд не будет уже асимптотическим для решения. Асимптотическое поведение этих решений существенно зависит от знака функции

$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\varepsilon}q(x)\right)$. Мы назовем решение этого типа главным или рецессивным в секторе S_j в зависимости от того, будет ли функция $\operatorname{Re}q(x)$ положительна или отрицательна в этом секторе.

Кроме этих решений дифференциального уравнения имеет решения с асимптотикой вида (31.23a). Действительно, можно построить решения, имеющие такой вид в любой компактной подобласти объединения пары секторов, т. е. в $S - S_j$. Для таких решений подходит название «сбалансированные» в данной области. Вообще говоря, границы сектора $S - S_j$ являются линиями Стокса для сбалансированного решения, но существует одно линейно независимое решение, для которого асимптотическое разложение вида $\omega_1(x, \varepsilon)$ пригодно во всей кольцевой окрестности точки $x=0$. Это решение называется вполне сбалансированным.

Все это можно доказать, не зная асимптотического поведения решений в самой точке поворота. Более глубокие исследования Лангера, Линя, Рабенштейна, Сибуйя и Вазова, упомянутые выше, позволяют ответить на следующие оставшиеся вопросы:

(а) Какое асимптотическое поведение имеет в S_j решение, сбалансированное, но не вполне сбалансированное в $S - S_j$?

(b) Как ведут себя эти решения в самой точке $x=0$?

(c) Как ведут себя эти решения на линиях Стокса C_j ?

Для уравнения частного вида (31.22) ответы на эти вопросы были даны Рабенштейном [1] и (при $\alpha=0$, $\beta=1$) Вазовым [4]. Некоторые результаты для уравнения общего вида (31.16) были получены Вазовым [5]. Оказалось, что асимптотический ряд для вполне сбалансированного решения пригоден в полной окрестности точки $x=0$. Другие сбалансированные решения растут существенно быстрее, чем это, в третьем секторе. Однако они несколько «меньше», чем главные решения вида (31.23b), так как их асимптотическое разложение определяется рядом вида (31.23b), помноженным на $\varepsilon^{1/2}$.

Более подробное изложение результатов читатель может найти в цитированной выше литературе.

Дифференциальное уравнение (31.16) интересно и своеобразно и с других точек зрения. Помимо сложностей, связанных с точками поворота, это уравнение является примером сингулярного возмущения, т. е. это дифференциальное уравнение можно рассматривать как уравнение, полученное из уравнения более низкого (второго) порядка добавлением членов более высокого (четвертого) порядка с малыми коэффициентами. Сингулярные возмущения являются предметом гл. X. Здесь мы только отметим, что главные члены асимптотических рядов для $w_1(x, \varepsilon)$ и $w_2(x, \varepsilon)$ являются, конечно, решениями «приведенного», или «вырожденного», уравнения второго порядка, в которое вырождается уравнение (31.16) при $\varepsilon=0$. Вырожденное уравнение имеет регулярную особую точку $x=0$. Характеристические показатели (см. разд. 5.4, формула (5.33)) в этой точке равны

$$\lambda_1 \equiv 0, \quad \lambda_2 = \frac{b_1(0, 0)}{b_0'(0, 0)} + 1.$$

В общем случае только одно линейно независимое решение вырожденного уравнения голоморфно в точке $x=0$, в то время как все остальные решения имеют особенность в этой точке, причем, как правило, точку ветвления. Если $b_1(0, 0)=0$, то голоморфное решение имеет характеристический показатель $\lambda_2=1$. Так как точка $x=0$ всегда является неособой для полного уравнения (31.16), то априори ясно, что асимптотические представления (31.23a, b) не могут быть одновременно оба пригодными в некоторой области, содержащей точку $x=0$, так как в этом случае многозначное решение вырожденного уравнения являлось бы равномерным пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции, однозначной в области, в которой предельная функция имеет точку ветвления.

Нелинейные уравнения

32. Введение

32.1. Существование и единственность

Задача решения скалярного дифференциального уравнения порядка n в наиболее общей постановке заключается в нахождении функции $u = u(x)$, которая тождественно удовлетворяет некоторому функциональному соотношению вида

$$G(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0 \quad (32.1)$$

и, возможно, определенным дополнительным условиям.

При такой неявной форме записи дифференциальных уравнений возникает значительная сложность, обусловленная тем, что из уравнения (32.1) не всегда можно однозначно выразить $u^{(n)}$ через другие переменные. Связанные с этим вопросы не будут затронуты в данной книге. Мы будем рассматривать только дифференциальные уравнения вида

$$u^{(n)} = g(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}), \quad (32.2)$$

в которых правая часть является однозначной функцией в рассматриваемой области. Более того, правая часть (32.2) обычно будет предполагаться аналитической функцией.

Говоря более точно, мы будем рассматривать системы уравнений первого порядка, которые можно записать векторно в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (32.3)$$

где $y(x)$ и $f(x, y)$ суть n -мерные вектор-столбцы. Как и в линейном случае, скалярное уравнение n -го порядка вида (32.2) эквивалентно некоторой системе вида (32.3), например системе, получаемой путем замены $y_j = u^{(j-1)}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Основную теорему существования для нелинейных аналитических дифференциальных уравнений можно сформулировать следующим образом.

Теорема 32.1. Пусть векторная функция $f(x, y)$ голоморфна по всем переменным в области R $(n+1)$ -мерного комплексного (x, y) -пространства. Пусть $x=x_0$, $y=y_0$ — некоторая точка из R . Тогда дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

имеет точно одно решение $y=y(x)$, такое, что $y(x_0)=y_0$, причем это решение голоморфно при $x=x_0$.

Доказательство этой известной теоремы мы опустим. Подчеркнем тот факт, что в противоположность линейным уравнениям вполне возможно, что область, в которой решение $y(x)$ голоморфно, не будет содержать всю область R . Вообще говоря, это зависит от выбора начального значения y_0 . Кроме того, множество всех решений уже не может быть выражено как линейная функция n независимых параметров, как в линейном случае.

Перенесение теоремы 32.1 на скалярное уравнение n -го порядка (по аналогии с теоремой 2.2) является элементарным, и мы не будем приводить соответствующей полной формулировки.

В силу теоремы 32.1 решения уравнения $y'=f(x, y)$ с начальными данными, заданными в некоторой точке из R , могут быть найдены в виде сходящихся степенных рядов посредством обычных формальных вычислений, проделанных с такими рядами. Однако радиус сходимости решений в виде рядов, хотя и, несомненно, положителен, должен быть определен в каждом случае отдельно.

32.2. Особые точки

Наша цель — изучить разложения решений в ряд в окрестности определенных *особых* точек. Мы рассмотрим только очень ограниченный класс таких особенностей, а именно такие точки x_0 , y_0 , что правая часть в (32.3) имеет вид

$$f(x, y) = (x - x_0)^{-h} f^*(x, y), \quad f^*(x_0, y_0) \neq 0,$$

где $f^*(x, y)$ голоморфна по всем переменным при $x=x_0$, $y=y_0$ и h — положительное целое число.

Чтобы перенести особенность в бесконечно удаленную точку, обычно делают преобразование $x - x_0 = \tilde{x}^{-1}$. Дифференциальное уравнение (32.3) примет тогда вид $\frac{dy}{d\tilde{x}} = -\tilde{x}^{h-2} f^*(\tilde{x}^{-1} + x_0, y)$.

Возвращаясь к более удобным обозначениям, запишем дифференциальное уравнение в виде

$$x^{-q} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (32.4)$$

где $q = h - 2$, а $f(x, y)$ голоморфна при $x = \infty$, $y = y_0$. Не умаляя общности, можно предположить, что $y_0 = 0$, так как к этому приводит преобразование $\tilde{y} = y - y_0$ и возвращение к прежним обозначениям. Если $q \geq -1$, то точка $x = \infty$ является особой точкой дифференциального уравнения (32.4).

При наших предположениях компоненты векторной функции $f(x, y)$ допускают сходящиеся разложения в кратные степенные ряды по x^{-1} и компонентам y_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Можно также разложить $f(x, y)$ в степенной ряд только по y_j , все коэффициенты которого будут голоморфными функциями x в той же самой окрестности $x = \infty$. Эти разложения неудобны для записи в скалярном обозначении. Поэтому мы будем использовать следующее сокращенное обозначение. Пусть

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

является вектор-строкой, компоненты которой — неотрицательные целые числа. Положим по определению

$$y^p = y_1^{p_1} y_2^{p_2} \dots y_n^{p_n}.$$

Эта величина является скалярной! Кроме того, определим «длину» $|p|$ вектора p равенством

$$|p| = \sum_{j=1}^n p_j.$$

Тогда можно написать

$$f(x, y) = \sum_p a_p(x) y^p.$$

Суммирование ведется по всем векторам p , введенным выше, и каждое $a_p(x)$ является векторной функцией, голоморфной при $x = \infty$. Во многих случаях удобно объединить линейные члены

$$\sum_{|p|=1} a_p(x) y^p$$

в выражение $A(x)y$, где $A(x)$ — голоморфная матрица. Тогда дифференциальное уравнение (32.4) примет вид

$$x^{-q} y' = a_0(x) + A(x)y + g(x, y), \quad (32.5)$$

где индекс 0 означает вектор $p = 0$ и

$$g(x, y) = \sum_{|p| \geq 2} a_p(x) y^p. \quad (32.6)$$

Нас интересуют решения (32.5), которые определены в окрестности $x = \infty$ и являются там настолько малыми, что лежат в области сходимости ряда (32.6). Последнее ограничение является очень сильным, однако очевидно, что без него задача

станет намного более трудной, так как ее решение уже не может быть тогда основано на локальных свойствах $g(x, y)$ при $x = \infty, y = 0$.

Дифференциальные уравнения вида (32.4) исследовались во многих работах. Из более поздних статей по этому вопросу мы упомянем Мальмквиста [2] и Ивано [1], где можно найти некоторые дополнительные ссылки. В свете тех трудностей, которые встречались при решении соответствующей линейной задачи, не удивителен тот факт, что многие из этих статей очень длинные. Здесь мы дадим только неполное описание при довольно ограничительных условиях. В частности, не будут рассмотрены усложнения, возникающие в линейной части из-за наличия кратных собственных значений.

При $q < -1$ точка $x = \infty$ является обыкновенной точкой для дифференциального уравнения (32.4). Если $q = -1$, то бесконечно удаленная точка может быть названа особенностью первого рода, или регулярно особой точкой, по аналогии с терминологией для линейных уравнений. Теория таких точек отнюдь не является тривиальной. Однако мы не будем ее рассматривать, так как эта теория не связана с асимптотическими рядами, и предположим, что

$$q \geq 0.$$

33. Решение в виде асимптотического степенного ряда

В § 14 был доказан один важный результат, касающийся аналитических дифференциальных уравнений вида

$$x^{-q}y' = f(x, y), \quad q \geq 0, \quad (33.1)$$

а именно теорема 12.1 и ее обобщение — теорема 14.1. Последняя теорема носит достаточно общий характер, за исключением предположения о том — предположение (d) теоремы 12.1, — что (33.1) имеет формальное решение вида

$$\sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}.$$

Рассмотрим более внимательно значение этого условия.

Если предположения (a*) и (b*) теоремы 14.1 выполнены, то теорема 9.5, тривиально обобщаемая на случай, когда y — векторная переменная, позволяет нам написать

$$f(x, z) = \sum_p a_p(x) z^p \quad (33.2)$$

для $\|z\| \leq z_0$, $|x| \geq x_0$, $x \in S$ (обозначения соответствуют теореме 14.1). Функции $a_p(x)$ представимы в виде асимптотических рядов по степеням x^{-1} при $x \rightarrow \infty$ в S . Следовательно, дифференциальное уравнение (33.1) можно записать в виде (32.5), т. е.

$$x^{-q}y' = a_0(x) + A(x)y + g(x, y), \quad (33.3)$$

с тем небольшим отличием, что теперь не требуется, чтобы функции $a_0(x)$, $A(x)$ и $a_p(x)$ в (32.6) были голоморфными при $x = \infty$, но они должны иметь асимптотические разложения в ряды по степеням x^{-1} при $x \rightarrow \infty$ в S .

Если в (33.3) заменить y рядом

$$\sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}$$

и выполнить обычные формальные преобразования, то получим рекуррентную систему условий относительно векторов y_r вида

$$a_{00} = 0, \quad (33.4)$$

$$A_0 y_r = g_r(y_1, \dots, y_{r-1}), \quad r \geq 1, \quad (33.5)$$

где a_{00} и A_0 — главные члены в асимптотических разложениях соответственно $a_0(x)$ и $A(x)$. Векторы g_r являются многочленами относительно компонент y_1, \dots, y_{r-1} . В частности, g_0 — постоянный вектор. Предположение (с) из теоремы 12.1 означает, что матрица A_0 не особая. Следовательно, предположение (d) из теоремы 12.1 эквивалентно условию (33.4), так как при этом условии последовательность уравнений (33.5) будет однозначно разрешимой.

В силу (33.2) условие (33.4) можно записать в виде

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in S}} f(x, 0) = 0 \quad (33.6)$$

или в эквивалентной форме

$$f_0(0) = 0. \quad (33.7)$$

Функция $f_0(z)$ была введена в условии (b*) теоремы 14.1. Рассматриваемое ограничение оказывается несколько менее сильным, чем кажется на первый взгляд, если вспомнить, что мы разложили $f(x, y)$ по степеням y , а не по степеням $y - y_0$ только для удобства. Следовательно, если уравнение относительно z

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in S}} f(x, z) = 0 \quad (33.8)$$

имеет решение $z = y_0$ в некоторой области z -пространства, в которой $f(x, z)$ голоморфна при всех $x \in S$, то мы можем положить

в дифференциальном уравнении $y - y_0 = \tilde{y}$, и результирующее дифференциальное уравнение относительно \tilde{y} будет удовлетворять (33.6) с некоторой другой функцией f . Таким образом, для того чтобы уравнение (33.1) имело решение в виде ряда — формального, асимптотического или сходящегося — по степеням x^{-1} , необходимо некоторое условие типа (33.8).

Задача 33.1. Проиллюстрировать последнее утверждение на примере скалярного дифференциального уравнения $\frac{du}{dx} = e^u$.

В силу предположения (b*) теоремы 14.1 условие (33.8) эквивалентно требованию, что $z = y_0$ удовлетворяет уравнению $f_0(z) = 0$.

Для удобства мы переформулируем теорему 14.1 в соответствии со сделанными замечаниями.

Теорема 33.1 Пусть S — некоторый открытый сектор на комплексной x -плоскости с вершиной в начале координат и положительным углом, не превышающим $\frac{\pi}{q+1}$ (q — неотрицательное целое число). Пусть $f(x, z)$ есть n -мерная векторная функция x и n -мерного вектора z , обладающая следующими свойствами:

(a) $f(x, z)$ голоморфна по компонентам z и по x при $z \in \bar{R}$, $x \in S$, $0 < x_0 \leq |x| < \infty$

(\bar{R} — замыкание открытой ограниченной области R);

(b) $f(x, z)$ имеет равномерное в \bar{R} асимптотическое разложение

$$f(x, z) \sim \sum_{r=0}^{\infty} f_r(z) x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S;$$

(c) уравнение $f_0(z) = 0$ имеет решение $z = y_0$, $y_0 \in R$;

(d) якобиан $f_0(z)$ по z при $z = y_0$, т. е.

$$\det \left[\left\{ \frac{\partial f_{0j}(z)}{\partial z_k} \right\}_{z=y_0} \right],$$

не равен нулю.

Тогда при всех достаточно больших x из S существует решение $y = \varphi_0(x)$ дифференциального уравнения

$$x^{-q} \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

имеющее в каждом собственном подсекторе из S асимптотическое разложение

$$\varphi_0(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} y_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Задача 33.2. На примере скалярных дифференциальных уравнений $u' = u^2$ и $u' = u^3$ проиллюстрировать, что может произойти, если предположение (d) теоремы 33.1 не выполнено.

34. Преобразование в линейное дифференциальное уравнение

34.1. Формальная теория

На основе теоремы 33.1 дифференциальное уравнение (33.1) можно преобразовать к более простому виду

$$x^{-q} y^{*'} = f^*(x, y^*) \quad (34.1)$$

путем замены

$$y^* = y - \varphi_0(x). \quad (34.2)$$

Здесь

$$f^*(x, y^*) = f(x, y^* + \varphi_0(x)) - f(x, \varphi_0(x)).$$

Очевидно, что теперь

$$f^*(x, 0) = 0.$$

Выделим в (34.1) линейный по y^* член и запишем уравнение в виде

$$x^{-q} y^{*'} = A^*(x) y^* + g^*(x, y^*), \quad (34.3)$$

где ряд для g^* по степеням компонент y^* начинается с квадратичных или более высокого порядка членов.

Для простоты будем обозначать через $f_z(x, z)$ якобиеву матрицу векторной функции $f(x, z)$ по вектору z . В этих обозначениях

$$A^*(x) = f_z^*(x, z)|_{z=0} = f_z(x, z)|_{z=\varphi_0(x)}. \quad (34.4)$$

В силу предположения (b) теоремы 33.1, теоремы 9.4 и равенства

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in S}} \varphi(x) = y_0$$

матрица в (34.4) при $x \rightarrow \infty$ в S стремится к

$$f_{0,z}(z)|_{z=y_0}.$$

Это якобиева матрица из предположения (d) теоремы 33.1. Таким образом, главный член A_0^* из асимптотического ряда для $A^*(x)$ тождественно равен матрице A_0 из (33.5). В частности, отсюда следует, что при наших предположениях A_0^* — не особая матрица.

Для дальнейшего изучения дифференциального уравнения (33.1) мы можем предположить, что оно уже преобразовано к виду (34.3), и для простоты обозначений опустить звездочку. Дифференциальное уравнение

$$x^{-q}y' = A(x)y + g(x, y), \quad (34.5)$$

которое мы будем теперь рассматривать, может иметь решения, неограниченные вблизи особенности при $x = \infty$.

В линейном случае это не имело значения, поскольку речь шла об общей асимптотической теории. Для нелинейного уравнения (34.5) такие решения, очевидно, зависят от глобальных свойств $g(x, y)$. Это выходит за рамки тех вопросов, которые мы собираемся излагать. В самом деле, на основе рассматриваемого метода могут быть получены только те решения, которые малы при $x \rightarrow \infty$, по крайней мере в некотором подсекторе из S . Другими словами, наш метод является методом возмущений, связанным с тривиальным решением (34.5) или, что эквивалентно, с решением (33.1) $y = \varphi_0(x)$.

Как и в линейной теории, характер решений существенно зависит от канонической формы главной матрицы A_0 в выражении

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S. \quad (34.6)$$

Существуют теории (например, Ивано [1]), в которых допускается, что A_0 имеет нелинейные элементарные делители, но при этом возникают значительные сложности. Мы ограничимся случаем различных собственных значений.

Предположение (A). Все собственные значения λ_j , $j=1, 2, \dots, n$, матрицы A_0 из (34.6) различны и не равны нулю.

Не умаляя общности, можно считать $A(x)$ диагональной матрицей, так как в силу теоремы 12.2 можно найти такое линейное преобразование

$$y = T(x)y^*, \quad (34.7)$$

которое приводит к дифференциальному уравнению того же самого типа, что и (34.5), но с диагональной линейной частью. (При этом окрестность $|x| \geq x_0$ точки $x = \infty$, в которой это справедливо, должна быть взята, конечно, достаточно малой.) В соответствии с этим можно написать

$$A(x) = \text{diag} [a_{11}(x), a_{22}(x), \dots, a_{nn}(x)] \quad (34.8)$$

и

$$a_{jj}(x) \sim \lambda_j + \sum_{r=1}^{\infty} a_{j,r} x^{-r}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (34.9)$$

Теперь перед нами два возможных пути: мы можем построить некоторый ряд, *удовлетворяющий* (34.5) в формальном смысле, или мы можем построить формальное *преобразование*, которое *приводит* дифференциальное уравнение к простому, решаемому виду. Мы выберем второй путь, так как он более соответствует нашим предыдущим методам. Не удивительно, что преобразование будет теперь нелинейным.

Положим

$$y = P(x, z) = \sum_{|p| \geq 1} P_p(x) z^p \quad (34.10)$$

и преобразуем (34.5) путем формальных действий с рядами в дифференциальное уравнение относительно векторной функции z . Линейную часть ряда (34.10) возьмем равной z , так что (34.10) можно записать в виде

$$y = z + Q(x, z) = z + \sum_{|p| \geq 2} P_p(x) z^p. \quad (34.11)$$

Пусть $P_z(x, z) = I + Q_z(x, z)$ означает якобиеву матрицу, составленную из частных производных компонент вектора $P(x, z)$ по компонентам z . Тогда

$$y' = P_x + P_z z' = Q_x + (I + Q_z) z', \quad (34.12)$$

где индекс x означает частную производную по x . Преобразованное дифференциальное уравнение (34.5) имеет вид

$$x^{-q} z' = P_z^{-1} [AP - x^{-q} P_x + g(x, P)]. \quad (34.13)$$

Покажем, что при соответствующих предположениях коэффициенты P_p в (34.10) можно выбрать так, что правая часть в (34.13) будет равна $A(x)z$. Другими словами, мы собираемся формально удовлетворить соотношению

$$x^{-q} P_x = AP + g(x, P) - P_z Az \quad (34.14)$$

рядом вида (34.10). В терминах функции Q из (34.11) уравнение (34.14) имеет вид

$$x^{-q} Q_x = AQ - Q_z Az + g(x, z + Q). \quad (34.15)$$

Теперь мы должны вычислить степенной ряд, входящий в это соотношение.

Пусть p_z означает вектор-строку

$$p_z = (p_1 z_1^{-1}, \dots, p_n z_n^{-1}).$$

Тогда матрицу $Q_z(x, z)$ можно записать в виде

$$Q_z(x, z) = \sum_{|p| \geq 2} z^p P_p(x) p_z, \quad (34.16)$$

и, следовательно,

$$Q_z(x, z) A(x) z = \sum_{|p| \geq 2} z^p P_p(x) p_z A(x) z.$$

В силу (34.8) это дает

$$Q_z(x, z) A(x) z = \sum_{|p| \geq 2} z^p P_p(x) \sum_{j=1}^n p_j a_{jj}(x). \quad (34.17)$$

Вспомяная формулу (32.6), получим

$$\begin{aligned} g(x, z + Q) &= \sum_{|p| \geq 2} a_p(x) (z + Q)^p = \\ &= \sum_{|p| \geq 2} a_p(x) \left(z + \sum_{|r| \geq 2} P_r z^r \right)^p = \sum_{|p| \geq 2} h_p z^p, \end{aligned} \quad (34.18)$$

где h_p — многочлены относительно P_q , $|q| < |p|$, с коэффициентами, зависящими от x . В частности,

$$h_p = a_p(x) \quad \text{при } |p| = 2. \quad (34.19)$$

Далее, подставим (34.17) и (34.18) в (34.15) и соберем одинаковые степени z . Это приводит к формулам

$$x^{-q} P'_p = \left[A - \left(\sum_{j=1}^n p_j a_{jj} \right) I \right] P_p + h_p, \quad |p| \geq 2. \quad (34.20)$$

Формулы (34.20) являются рекуррентной линейной системой дифференциальных уравнений относительно функций $P_p(x)$, так как h_p зависит только от P_q , где $|q| < |p|$.

Главная часть матрицы коэффициентов в (34.20)

$$A - \left(\sum_{j=1}^n p_j a_{jj} \right) I$$

является диагональной матрицей с диагональными элементами

$$\mu_{kp} = \lambda_k - \sum_{j=1}^n p_j \lambda_j, \quad |p| \geq 2, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (34.21)$$

Если какое-то из этих чисел равно нулю, то дифференциальное уравнение (34.20) относительно P_p может не иметь решений, ограниченных на бесконечности. В этом случае можно изменить метод таким образом, что снова получится существенное упрощение дифференциального уравнения (34.5), но мы хотим избежать связанных с этим усложнений и введем

Предположение (В). Все числа

$$\mu_{kp} = \lambda_k - \sum_{j=1}^n p_j \lambda_j, \quad |p| \geq 2, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

отличны от нуля.

Простое индуктивное по $|p|$ рассуждение показывает тогда, что все дифференциальные уравнения (34.20) могут быть последовательно формально удовлетворены рядами по степеням x^{-1} . В силу теоремы 12.1 эти степенные ряды являются асимптотическим представлением истинных решений в S .

Если мы сможем доказать, что ряд (34.11), образованный из этих частных векторов $P_p(x)$, сходится, то мы построим тем самым преобразование, которое переводит дифференциальное уравнение (34.5) в линейное уравнение

$$x^{-q}z' = A(x)z, \quad (34.22)$$

решение которого находится тривиально, так как $A(x)$ — диагональная матрица.

34.2. Аналитическая теория

В предыдущем разделе мы видели, что дифференциальные уравнения (34.20) имеют частные решения, которые представимы в виде асимптотических степенных рядов в секторе S . Мы хотим теперь получить для этих решений $P_p(x)$ оценки, которые будут основой доказательства сходимости ряда в (34.11). С этой целью мы вернемся к идеям, связанным с теоремой 12.1 и ее доказательством в § 14.

Рассмотрим *скалярное* неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$x^{-q}v' = a(x)v + b(x), \quad (34.23)$$

коэффициенты которого голоморфны в части $0 < x_0 \leq |x| < \infty$ сектора S с положительным центральным углом, не превышающим $\frac{\pi}{q+1}$, и в каждом замкнутом подсекторе из S имеют асимптотические разложения

$$a(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{-r}, \quad b(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^{-r}, \quad x \in S, \quad x \rightarrow \infty. \quad (34.24)$$

Далее, предположим, что

$$a_0 \neq 0. \quad (34.25)$$

Непосредственно можно проверить, что тогда дифференциальному уравнению (34.23) можно формально удовлетворить однозначно определяемым степенным рядом

$$\sum_{r=0}^{\infty} v_r x^{-r}.$$

Применяя теорему 12.1 к дифференциальному уравнению $x^{-q}v' = a(x)v' + a(x)v_0 + b(x)$, которое имеет формальное решение

$$\sum_{r=1}^{\infty} v_r x^{-r},$$

получим, что (34.23) имеет решение $v = \varphi(x)$ (возможно, более чем одно), которое допускает в S асимптотическое представление

$$\varphi(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} v_r x^{-r}, \quad x \in S, \quad x \rightarrow \infty. \quad (34.26)$$

Это соотношение имеет место в каждом собственном подсекторе из S .

С другой стороны, если написать (34.23) в виде

$$x^{-q}v' = a_0v + (a(x) - a_0)v + b(x)$$

и применить формулу вариации постоянных, то получим, что каждое решение (34.23) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(x) = C \exp\left[\frac{x^{q+1}a_0}{q+1}\right] + \int_{\gamma(x)} \exp\left[\frac{(x^{q+1} - t^{q+1})a_0}{q+1}\right] t^q \{(a(t) - a_0)v(t) + b(t)\} dt. \quad (34.27)$$

Здесь $\gamma(x)$ — некоторый путь интегрирования в секторе S , оканчивающийся в точке $t=x$, а C — скалярная постоянная, зависящая от выбора частного решения $v(x)$.

Для интегралов такого вида, как интеграл, входящий в (34.27), были получены оценки в § 14. В данном случае мы имеем дело всего лишь с одним скалярным уравнением вместо N -мерных векторов. Пусть область S^* и путь $\gamma(x)$ выбраны в соответствии с построением, описанным в разд. 14.3; применим (34.27) к решению $v = \varphi(x)$, удовлетворяющему (34.26). Тогда интеграл в (34.27) может быть оценен по лемме 14.2 для $m=0$. Если область S^* определена так же, как в §14, то мы получим

$$\left| \int_{\gamma(x)} \exp\left[\frac{(x^{q+1} - t^{q+1})a_0}{q+1}\right] t^q \{[a(t) - a_0]\varphi(t) + b(t)\} dt \right| \leq \\ \leq |a_0|^{-1} K_1 [\sup |a(x) - a_0| \sup |\varphi(x)| + \sup |b(x)|]. \quad (34.28)$$

При этом было использовано замечание 2, сделанное после доказательства леммы 14.2. Верхняя грань в (34.28) берется по области S^* .

Так как $\varphi(x)$ ограничена в S^* , то из (34.27) и (34.28) следует, что для $v=\varphi(x)$ постоянная C в (34.27) должна быть такой, чтобы первый член в правой части (34.27) был ограничен в S^* . Если $\operatorname{Re}(x^{q+1}a_0)$ положительна всюду в S^* , то постоянная C должна быть равна нулю. Если $\operatorname{Re}(x^{q+1}a_0)$ отрицательна всюду в S^* , то путь $\gamma(x)$, построенный в соответствии с правилами из разд. 14.3, является по терминологии этого раздела путем первого класса, и $\varphi(x)$, построенная, как и в § 14, является тогда решением (34.24), которое равно нулю в начальной точке $\gamma(x)$, так что C снова равно нулю. Возможность равенства $\sup \operatorname{Re}(x^{q+1}a_0) = 0$ в S^* можно исключить соответствующим выбором области S^* .

Теперь мы вернемся к (34.28) и заметим, что $a(x) - a_0$ равномерно стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ в любом собственном подсекторе из S . Следовательно, вершина $\xi^{\frac{1}{q+1}}$ сектора S^* может быть выбрана независимо от $\varphi(x)$ настолько большой, что

$$|a_0|^{-1} K_1 \sup |a(x) - a_0| < 1,$$

и из (34.28) и (34.27), где $v=\varphi(x)$, $C=0$, мы получим, что

$$|\varphi(x)| \leq \frac{K_1}{|a_0| - K_1 \sup |a(x) - a_0|} \sup |b(x)|, \quad x \in S^*. \quad (34.29)$$

Тем самым мы доказали следующую лемму.

Лемма 34.1. При условиях (34.24), (34.25) дифференциальное уравнение (34.23) имеет частное решение $v=\varphi(x)$, допускающее асимптотическое разложение (34.26) и удовлетворяющее неравенству (34.29).

Система дифференциальных уравнений (34.20) при каждом p является системой n скалярных дифференциальных уравнений относительно компонент $P_{pk}(x)$, $k=1, 2, \dots, n$, вектора P_p , так как по предположению матрица коэффициентов диагональна.

Начиная с $|p|=2$, решим теперь эти дифференциальные уравнения последовательно для возрастающих значений $|p|$ и будем на каждом шаге брать частное решение, указанное в лемме 34.1. Так как h_p являются многочленами относительно P_j , $|j| < |p|$, то все P_p будут представлены в S в виде асимптотических рядов по степеням x^{-1} .

Далее мы можем применить неравенство (34.27). Однако здесь мы сталкиваемся с новой и более существенной трудностью: предположение (В) не устраняет такой возможности, когда числа μ_{kp} имеют в нуле предельную точку, которая делает неравенство (34.29) неприменимым. Поэтому мы введем еще одно ограничение на матрицу A_0 , а именно

Предположение (С). Все числа λ_j , $j=1, 2, \dots, n$, лежат внутри некоторой полуплоскости, ограниченной прямой линией, проходящей через начало координат.

Оказывается, что это или подобное ему условие более существенно для развиваемой теории, чем предположения (А) и (В).

Скалярное дифференциальное уравнение для каждого P_{pk} , определяемое из (34.20), имеет вид (34.23), где

$$a(x) = a_{kk}(x) - \sum_{j=1}^n p_j a_{jj}(x), \quad a_0 = \mu_{pk} = \lambda_k - \sum_{j=1}^n p_j \lambda_j.$$

Чтобы получить равномерную оценку из неравенства (34.29), мы должны показать, что величины

$$c_{pk} \equiv \lambda_k - \sum_{j=1}^n p_j \lambda_j - K_1 \sup \left| a_{kk}(x) - \lambda_k - \sum_{j=1}^n p_j (a_{jj}(x) - \lambda_j) \right|$$

равномерно отграничены от нуля¹⁾ для $|p| \geq 2$ и для достаточно больших x из S^* . С этой целью мы заметим, что число

$$\sum_{j=1}^n \frac{p_j \lambda_j}{|p|}$$

принадлежит выпуклой оболочке множества, образованного собственными значениями λ_j , $j=1, \dots, n$, и, следовательно, отграничено от нуля некоторым числом ε

$$\frac{\left| \sum_{j=1}^n p_j \lambda_j \right|}{|p|} \geq \varepsilon > 0.$$

Так как равномерно в S^*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_{jj}(x) - \lambda_j) = 0,$$

то мы можем взять x_0 таким большим, что равномерно при $|x| \geq x_0$ в S^* будет выполнено неравенство

$$\frac{K_1 \sup \left| a_{kk}(x) - \lambda_k - \sum_{j=1}^n p_j (a_{jj}(x) - \lambda_j) \right|}{|p|} \leq \varepsilon.$$

При таком выборе x_0 получим неравенство

$$|c_{pk}(x)| \geq |p| \varepsilon - |\lambda_k| - \varepsilon,$$

¹⁾ То есть находятся вне некоторой не зависящей от p и x окрестности точки нуль для всех $|p| \geq 2$ и достаточно больших x из S^* (см. примечание на стр. 219). — Прим. ред.

которое показывает, что c_{pk} отграничены от нуля для всех достаточно больших $|p|$. Очевидно, что для конечного числа оставшихся p можно найти общую положительную нижнюю грань для $|c_{pk}|$, если x_0 достаточно велико.

Применение леммы 34.1 к дифференциальным уравнениям (34.20) дает неравенства вида

$$|P_{pj}| \leq K_2 \sup |h_{pj}|, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad |p| \geq 2, \quad (34.30)$$

где K_2 — не зависящая от p постоянная и верхняя грань берется по области S^* с достаточно большим значением x_0 .

Перейдем теперь к доказательству сходимости ряда (34.10) с помощью метода мажорирующих рядов. Пусть

$$\bar{g}(y) = \sum_{|p| \geq 2} \bar{a}_p y^p \quad (34.31)$$

является векторной функцией, степенной ряд которой мажорирует ряд (32.6) для $g(x, y)$. Это означает, что при $x \in S^*$ для всех компонент $a_{pj}(x)$ вектора $a_p(x)$ из (32.6) выполнены неравенства

$$|a_{pj}(x)| \leq \bar{a}_{pj}, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad |p| \geq 2, \quad (34.32)$$

и что ряд (34.31) сходится при $\|y\| \leq \bar{y}_0$, где \bar{y}_0 — некоторое положительное число. Такой ряд, как (34.31), можно построить несколькими способами. Один из методов был рассмотрен (для ряда с одной переменной) в разд. 5.2.

Мы хотим построить сходящийся мажорирующий ряд

$$z + \sum_{|p| \geq 2} \bar{P}_p z^p \quad (34.33)$$

для ряда (34.10). Будем рассматривать величины \bar{P}_p как параметры, подлежащие определению; подставим (34.33) вместо y в (34.31) и перегруппируем члены в соответствии со степенями z . Это дает ряд

$$\sum_{|p| \geq 2} \bar{h}_p z^p, \quad (34.34)$$

коэффициенты которого \bar{h}_p являются многочленами относительно скаляров \bar{P}_{rj} , $j=1, 2, \dots, n$, $|r| < |p|$. Эти многочлены мажорируют многочлены h_p из (34.18) при $x \in S^*$. Другими словами, коэффициент слагаемого, содержащего \bar{P}_{rj} , в многочлене $h_p(x)$ при $x \in S^*$ не превосходит по норме коэффициент соответствующего слагаемого в \bar{h}_p , содержащего \bar{P}_{rj} . В частности, легко проверить, что

$$\bar{h}_p = \bar{a}_p \quad \text{при} \quad |p| = 2. \quad (34.35)$$

Определим теперь \bar{P}_p из (34.33) как решения рекуррентной последовательности уравнений

$$\bar{P}_{pj} = K_2 \bar{h}_{pj}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad |p| \geq 2. \quad (34.36)$$

В силу (34.30) и в силу мажорирующего свойства \bar{h}_p будем иметь

$$\sup |P_{pj}(x)| \leq \bar{P}_{pj}. \quad (34.37)$$

Следовательно, достаточно доказать сходимость ряда (34.33), в котором \bar{P}_p определяются из (34.36).

С целью дальнейшего упрощения мы заметим, что если степенной ряд относительно n переменных z_1, z_2, \dots, z_n с положительными коэффициентами сходится при $z_j = z_0 > 0, j = 1, 2, \dots, n$, то он сходится и для всех $|z_j| \leq z_0$. Это замечание сводит нашу задачу к доказательству сходимости n скалярных рядов относительно одной переменной ζ

$$\zeta + \sum_{m \geq 2} \bar{P}_{mj} \zeta^m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (34.38)$$

где

$$\bar{P}_{mj} = \sum_{|p|=m} \bar{P}_{pj}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots, \quad (34.39)$$

так как эти ряды получаются путем замены n компонент z_j вектора z в n компонентах векторного ряда (34.33) на одну и ту же переменную ζ .

Аналогично определим

$$\tilde{h}_{mj} = \sum_{|p|=m} \tilde{h}_{pj}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots \quad (34.40)$$

Эти величины являются коэффициентами в рядах, получаемых путем подстановки (34.38) в $\bar{g}(y)$ вместо y и перегруппировки слагаемых в соответствии со степенями ζ , и представляют собой многочлены с положительными коэффициентами относительно величин $\bar{P}_{\mu j}, \mu \leq m$.

Суммирование равенств (34.36) по всем p , для которых $|p| = m$, дает рекуррентные соотношения

$$\bar{P}_{mj} = K_2 \tilde{h}_{mj}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad m \geq 2. \quad (34.41)$$

Установим теперь сходимость рядов (34.38) с коэффициентами, определяемыми формулой (34.41), путем построения системы уравнений относительно n функций, единственное решение которой, как можно показать, является голоморфным по ζ при малых ζ и имеет разложение в степенной ряд вида

$$\zeta + \sum_{m=2}^{\infty} \bar{P}_{mj} \zeta^m.$$

Пусть e — вектор, все n компонент которого равны 1; рассмотрим векторное уравнение

$$\varphi - \zeta e - K_2 \bar{g}(\varphi) = 0 \quad (34.42)$$

относительно неизвестной векторной функции $\varphi(\zeta)$. Легко проверить, что (34.42) формально удовлетворяется рядами (34.38), подставленными вместо компонент φ , если \bar{P}_{mj} получены по рекуррентным формулам (34.41). С другой стороны, (34.42), очевидно, выполняется при $\varphi = \zeta = 0$, и якобиан левой части в этой точке равен 1. Следовательно, по теореме о неявной функции для аналитических функций уравнение (34.42) имеет единственное голоморфное решение, которое равно нулю при $\zeta = 0$. Степенной ряд для этого решения должен формально удовлетворять (34.42) и, следовательно, тождественно равен (34.38). Таким образом, ряды (34.38), а значит, и ряд (34.10) сходятся соответственно при малых ζ и z .

Преобразования (34.2), (34.7) и (34.10) можно объединить в одно преобразование $y = R(x, z)$, свойства которого описываются в приводимой ниже теореме, суммирующей результаты этого раздела. Так как предыдущие рассуждения были очень длинными, мы еще раз сформулируем рассматриваемую задачу перед формулировкой теоремы.

Мы имели дело с n -мерным векторным дифференциальным уравнением вида

$$x^{-q} \frac{dy}{dx} = a_0(x) + A(x)y + g(x, y), \quad (34.43)$$

где q — неотрицательное целое, y есть n -мерный вектор и $A(x)$ есть $(n \times n)$ -матрица. Пусть S — некоторый открытый сектор x -плоскости с центральным углом, не превышающим $\frac{\pi}{q+1}$. Предполагается, что при $0 < x_0 \leq |x| < \infty$, $x \in S$, $\|y\| \leq y_0$ имеет место сходящееся разложение

$$g(x, y) = \sum_{|p| \geq 2} a_p(x) y^p.$$

Функции $a_0(x)$, $a_p(x)$, $A(x)$ должны быть голоморфными при $0 < x_0 \leq |x| < \infty$, $x \in S$ и допускать разложения в асимптотические ряды по степеням x^{-1} в каждом замкнутом подсекторе из S . Кроме того, мы требуем, чтобы

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in S}} a_0(x) = 0.$$

(Другими, эквивалентными формами этих условий были условия, рассмотренные в § 33.)

Пусть $\lambda_j, j=1, 2, \dots, n$, — собственные значения матрицы

$$A_0 = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in S}} A(x). \quad (34.44)$$

Теорема 34.1. *Предположим, что дифференциальное уравнение (34.43), описанное в предыдущем абзаце, удовлетворяет предположениям (A), (B) и (C) этого раздела. Тогда существует преобразование*

$$y = R(x, z), \quad (34.35)$$

которое приводит (34.43) к простому виду

$$x^{-q} \frac{dz}{dx} = B(x)z, \quad (34.46)$$

где матрица $B(x)$ диагональна и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in S}} B(x) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = B_0. \quad (34.47)$$

Для каждого замкнутого подсектора S' из S существуют такие постоянные $x_1 \geq x_0, \zeta_1 > 0$, что $R(x, z)$ при $x_1 \leq |x| < \infty, x \in S', \|z\| \leq \zeta_1$ допускает сходящееся разложение в ряд

$$y = \sum_{|p| \geq 0} R_p(x) z^p. \quad (34.48)$$

Функции $B(x), R_p(x)$ голоморфны при $x_0 \leq |x| < \infty, x \in S$ и представимы в виде асимптотических рядов по степеням x^{-1} в S' . Эти ряды можно вычислить посредством алгебраических операций и дифференцирования. Кроме того,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in S}} R_0(x) = 0, \quad (34.49)$$

и n векторов $R_p(x), |p|=1$, линейно независимы при больших x в S .

35. Решение в виде экспоненциального ряда

Асимптотическое решение упрощенного дифференциального уравнения (34.46) в секторе S является элементарным, так как $B(x)$ диагональна. Однако некоторые или даже все из этих векторных решений могут при больших x в S не удовлетворять неравенству $\|z\| \leq \zeta_1$, которое является необходимым, если мы хотим вычислить соответствующее решение y исходного дифференциального уравнения (34.43) посредством преобразования (34.48).

Чтобы проанализировать это положение более детально, обозначим через

$$Z(x) = \hat{Z}(x) x^D e^{Q(x)}$$

фундаментальную матрицу (34.46), которая в теореме 12.3 обозначалась через $Y(x)$. Если мы положим

$$\pi(x) = D \log x + Q(x) = \text{diag} [\pi_1(x), \pi_2(x), \dots, \pi_n(x)]$$

и

$$\hat{Z}(x) = \{\hat{z}_{jk}(x)\},$$

то каждое векторное решение уравнения (34.46) будет иметь компоненты

$$z_j(x) = \sum_{k=1}^m \hat{z}_{jk}(x) e^{\pi_k(x)} c_k, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (35.1)$$

где $c_k, k=1, 2, \dots, n$, — постоянные. Величина этих функций при больших $x \in S$ зависит от знака величин

$$\text{Re} [\lambda_k x^{q+1}], \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим сначала простейший случай, возникающий при следующем предположении.

Предположение (D). В некотором замкнутом подсекторе S' из S

$$\text{Re} [\lambda_k x^{q+1}] < 0, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad x \in S'. \quad (35.2)$$

При этом условии члены в сумме (35.1) будут сколь угодно малы при достаточно больших $x \in S'$. Подставляя (35.1) в (34.48) и собирая подобные члены относительно c_j , получим ряд, который можно записать в векторном виде

$$y(x) = \sum_{|p| \geq 0} \varphi_p(x) e^{p\pi(x)} c^p, \quad (35.3)$$

где $\pi(x)$ — вектор с компонентами $\pi_j(x), j=1, 2, \dots, n$, а c — вектор с компонентами c_j . По определению

$$p\pi(x) = \sum_{j=1}^n p_j \pi_j(x).$$

Векторные функции $\varphi_p(x)$ голоморфны в S при $|x| \geq x_0$ и представимы там в виде асимптотических рядов по степеням x^{-1} .

Формула (35.3) дает n -параметрическое семейство решений дифференциального уравнения (34.43). Множество всех решений (34.43) также является n -параметрическим семейством функций. Вследствие ограничений на c (и x), которые необходимы для сходимости ряда (35.3), эта формула, вообще говоря,

дает только некоторое подмножество из семейства всех решений.

Чтобы охарактеризовать это подмножество более точно, заметим, что при $c=0$ формула (35.3) дает нам частное решение

$$y = \varphi_0(x), \quad (35.4)$$

которое было получено под тем же обозначением в теореме 33.1. Пусть $x_2 \gg x_1$ настолько велико, что

$$\|\hat{Z}(x) e^{\pi(x)}\| \leq 1 \quad \text{при} \quad x \in S', \quad |x| \geq x_2.$$

Тогда из (35.1) следует, что в этой области $\|z\| \leq \|c\|$, и, следовательно, в силу теоремы 34.1 ряд в (35.3) сходится при $|x| \geq x_2$, $x \in S'$, $\|c\| \leq \xi_1$. Кроме того, вследствие последнего утверждения теоремы 34.1 и так как $T(x)$ в (34.7) является неособой матрицей при больших x , коэффициенты ряда (35.3) с $|p|=1$ образуют матрицу, которая является неособой при больших x , скажем при $|x| \geq x_2$. Следовательно, в силу теоремы о неявной функции соотношения (35.3) можно разрешить относительно c при условии

$$|x| \geq x_2, \quad x \in S', \quad \|y(x) - \varphi_0(x)\| < \delta,$$

где δ — достаточно малое положительное число.

В терминах задач с начальными условиями это утверждение можно сформулировать следующим образом.

Теорема 35.1. Пусть выполнено предположение (D). Тогда существуют такие два положительных числа x_2 и δ , что каждое решение дифференциального уравнения (34.43), удовлетворяющее начальным условиям вида $y(\xi) = \eta$, где

$$|\xi| \geq x_2, \quad \xi \in S', \quad \|\eta\| \leq \delta,$$

может быть представлено рядом (35.3) с определенным значением $c = c(\xi, \eta)$, причем ряд сходится при $|x| \geq x_2$, $x \in S'$.

Вычисление c из начальных условий является весьма громоздкой вычислительной задачей. Однако в силу предположения (D) мы имеем

Следствие. Все решения, описанные в теореме 35.1, удовлетворяют одному и тому же асимптотическому соотношению $y(x) \sim \varphi_0(x)$ при $x \rightarrow \infty$ в S .

Наилучший способ нахождения асимптотического ряда для $\varphi_0(x)$ заключается, конечно, в подстановке формального ряда по степеням x^{-1} в дифференциальное уравнение (34.43) и приравнивании коэффициентов, как это было сделано в § 33. Ясно,

что даже без предположения (D) могут существовать разложения в ряд вида (35.3) для определенного подмножества множества всех решений. Более точно, если для всех k , для которых неравенство (35.2) не выполнено, положить в (35.1) $c_k=0$, то для определенного подмножества всех решений (34.43) получим представление в виде сходящихся рядов вида (35.3).

Обобщение результатов, доказанных в этом разделе, можно найти в работе Ивано [1].

При практическом применении формулы (35.3) можно вычислить только частичные суммы ряда с конечным числом функций $\varphi_p(x)$. Неопределенность в отношении того, какое число членов нужно взять, возникающая всегда, когда нет оценки ошибки, обусловлена здесь тем, что мы имеем дело с рядом, членами которого являются также ряды. Вполне возможно, что члены с $|\rho| > 0$ в формуле (35.3) представляют только теоретический интерес. Как показывает приводимый ниже крайне простой пример, их вычисление очень громоздко.

Пример.

$$u' = x^{-1} - u + u^2, \quad (35.5)$$

где u — скаляр. Подстановка

$$u = \sum_{r=1}^{\infty} u_{0r} x^{-r}$$

в дифференциальное уравнение и приравнивание коэффициентов дают

$$u = \varphi_0(x) \sim x^{-1} + 2x^{-2} + 8x^{-3} + 28x^{-4} + \dots \quad (35.6)$$

Из теоремы 33.1 следует, что внутри каждой полуплоскости существуют решения, имеющие это асимптотическое разложение при $x \rightarrow \infty$. В полуплоскости $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$ выполнено предположение (D). Поэтому в силу следствия из теоремы 35.1 имеется целое однопараметрическое семейство решений, которые имеют в этой полуплоскости разложение (35.6). Пусть $\varphi_0(x)$ — некоторое частное решение из этого семейства. Преобразование (34.2) — в иных обозначениях — имеет вид $v = u - \varphi_0(x)$. Оно приводит к дифференциальному уравнению.

$$v' = [2\varphi_0(x) - 1]v + v^2. \quad (35.7)$$

Несложное вычисление показывает, что первые несколько уравнений имеют в данном примере вид

$$\begin{aligned} P_2' &= - [2\varphi_0(x) - 1] P_2 + 1, \\ P_3' &= - 2 [2\varphi_0(x) - 1] P_3 + 2P_2, \\ P_4' &= - 3 [2\varphi_0(x) - 1] P_4 + P_2^2 + 2P_3. \end{aligned} \quad (35.8)$$

Используя снова формальную подстановку степенного ряда, получим, что решение первого из этих уравнений в виде асимптотического ряда равно $P_2(x) \sim -1 - 2x^{-1} - 4x^{-2} + \dots$. Последующие коэффициенты P_k можно вычислить аналогично. Следовательно, первые слагаемые ряда для функции $R(x, z)$ из (34.45) имеют вид

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(x) + v = \varphi_0(x) + z + \sum_{|p| \geq 2} P_p z^p = \\ &= (x^{-1} + 2x^{-2} + 8x^{-3} + \dots) + z + \\ &\quad + (-1 - 2x^{-1} - 4x^{-3} + \dots)z^2 + \dots \quad (35.9) \end{aligned}$$

В соответствии с нашей теорией это преобразование переводит данное дифференциальное уравнение в уравнение

$$z' = (2\varphi_0(x) - 1)z,$$

т. е.

$$z' = (-1 + 2x^{-1} + 4x^{-2} + 16x^{-3} + \dots)z,$$

асимптотическое решение которого равно

$$\begin{aligned} z &= c \exp \left[\int (-1 + 2x^{-1} + 4x^{-2} + 16x^{-3} + \dots) dx \right] = \\ &= cx^2 e^{-x} \exp[-4x^{-1} - 8x^{-2} + \dots] = \\ &= cx^2 e^{-x} (1 - 4x^{-1} + 0 \cdot x^{-2} + \dots), \quad (35.10) \end{aligned}$$

где c — произвольная постоянная.

Наконец, подстановка (35.10) в (35.9) дает асимптотическое представление

$$\begin{aligned} u &= (x^{-1} + 2x^{-2} + 8x^{-3} + \dots) + cx^2 e^{-x} (1 - 4x^{-1} + \dots) + \\ &\quad + c^2 x^4 e^{-2x} (-1 - 6x^{-1} + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что для такого простого уравнения, как (35.5), имеются более хорошие методы, чем общий метод этого раздела.

Задача 35.1. Решить уравнение (35.5) асимптотически.

(а) путем сведения его к линейному дифференциальному уравнению второго порядка. (Уравнение (35.5) является так называемым уравнением Риккати, и упомянутый метод сведения для него объясняется во многих учебниках.)

(б) Используя (35.6) и осуществляя линеаризирующее преобразование

$$u = \varphi_0(x) + \frac{1}{w}.$$

36. Нелинейные уравнения с параметром

36.1. Предварительные замечания

Основываясь на результатах, имевших место для линейных дифференциальных уравнений, следует ожидать, что теория асимптотических разложений решений нелинейных дифференциальных уравнений с параметром вблизи полюса по этому параметру будет вполне аналогична теории, изложенной в предшествующих параграфах этой главы. Так и оказывается на самом деле. Нелинейные задачи с параметром представляют большой интерес в приложениях и были широко изучены. Основными источниками по данному вопросу в этой главе будут статьи Вазова [7] и Сибуйя [6].

Несмотря на аналогию с задачей без параметра, теория асимптотических решений для уравнений с параметром требует нетривиального видоизменения и является весьма громоздкой даже при введении упрощающих предположений. В последующем изложении мы не всегда будем приводить полностью те доказательства, которые являются простым применением соответствующих доказательств для непараметрического случая.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которую можно записать в векторной форме

$$\varepsilon^h y' = f(x, \varepsilon, y), \quad (36.1)$$

где ε — малый параметр и h — целое положительное число. Параметр ε будем считать *положительным*. По существу ничего не изменится, если допустить, что ε изменяется в соответствующем узком секторе на комплексной ε -плоскости, однако мы хотим избежать технических сложностей, которые появляются при таком обобщении.

Нас интересуют решения, которые стремятся к конечному пределу и имеют ограниченную производную при $\varepsilon \rightarrow +0$. В соответствии с этим мы потребуем, чтобы было выполнено

Предположение (A). *Существует такая векторная функция $\varphi_{00}(x)$, голоморфная в интервале $|x| \leq x_0$, что $f(x, \varepsilon, y)$ голоморфна по всем переменным при $|x| \leq x_0$, $\|y - \varphi_{00}(x)\| \leq \eta_0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, и что*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x, \varepsilon, \varphi_{00}(x)) = 0$$

равномерно в интервале $|x| \leq x_0$.

Скалярный пример $\varepsilon y' = \varepsilon^y$ показывает, что без этого предположения уравнение (36.1) может не иметь решений, ограниченных при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Преобразование $y = y^* + \varphi_{00}(x)$ переводит (36.1) в дифференциальное уравнение того же вида $\varepsilon^h y^{*'} = f^*(x, \varepsilon, y^*)$, в котором правая часть стремится к нулю при $y^* = 0$, $\varepsilon \rightarrow +0$. Будем считать, что это преобразование уже сделано и что $f(x, \varepsilon, y)$ голоморфна при

$$|x| \leq x_0, \quad \|y\| \leq \eta_0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (36.2)$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x, \varepsilon, 0) = 0. \quad (36.3)$$

Функция $f(x, \varepsilon, y)$ не обязательно должна быть голоморфной по ε при $\varepsilon = 0$. Вместо этого мы требуем только, чтобы

$$f(x, \varepsilon, y) \sim \sum_{r=0}^{\infty} f_r(x, y) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (36.4)$$

равномерно в области (36.2). Формула (36.3) эквивалентна равенству

$$f_0(x, 0) = 0. \quad (36.5)$$

Дифференциальное уравнение (36.1) можно теперь записать в виде

$$\varepsilon^h y' = \varepsilon a(x, \varepsilon) + A(x, \varepsilon) y + g(x, \varepsilon, y), \quad (36.6)$$

в котором выделены постоянный (по отношению к y), линейный и нелинейный члены $f(x, \varepsilon, y)$. Пусть

$$a(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad |x| \leq x_0, \quad (36.7)$$

$$A(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad |x| \leq x_0, \quad (36.8)$$

— равномерные асимптотические разложения для $a(x, \varepsilon)$ и $A(x, \varepsilon)$. Иногда предпочтительнее собрать все члены, нелинейные по y и ε , вместе, записывая дифференциальное уравнение в виде

$$\varepsilon^h y' = \varepsilon a_0(x) + A_0(x) y + \tilde{g}(x, \varepsilon, y). \quad (36.9)$$

Оба уравнения (36.6) и (36.9) являются естественными аналогами уравнения (33.3).

36.2. Решение в виде асимптотического степенного ряда

Если мы попытаемся формально удовлетворить (36.9) рядом

$$\sum_{r=1}^{\infty} \varphi_{0r}(x) \varepsilon^r, \quad (36.10)$$

то получим последовательность рекуррентных формул

$$A_0(x) \varphi_{01}(x) = -a_0(x), \quad (36.11a)$$

$$A_0(x) \varphi_{0r}(x) = g_r(x, \varphi_{01}, \dots, \varphi_{0, r-1}, \varphi'_{0, r-h}), \quad r > 1. \quad (36.11b)$$

Векторные функции g_r являются многочленами (линейными относительно $\varphi'_{0, r-h}$) с коэффициентами, голоморфными в интервале $|x| \leq x_0$. Такая структура g_r объясняется тем, что ряд (36.10) начинается с $r=1$ и что формальное разложение $\tilde{g}(x, \varepsilon, y)$ одновременно по степеням y и ε не содержит членов ниже второй степени.

Чтобы рекуррентные уравнения (36.11a, b) были разрешимы, наложим следующее достаточное условие.

Предположение (B). $\det A_0(x) \neq 0$ при $|x| \leq x_0$.

Задача 36.1. Пусть $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — скалярные функции, голоморфные в интервале $|x| \leq x_0$.

(а) Показать, что скалярное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon u'' + a(x)u' + b(x)u = c(x) \quad (36.12)$$

может быть формально удовлетворено рядом вида

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r(x) \varepsilon^r$$

с голоморфными коэффициентами.

(b) Преобразовать (36.12) в эквивалентную систему вида (36.9) и показать, что предположение (B) не выполнено.

(с) Найти формальное решение вида (36.10) с голоморфными коэффициентами для системы, полученной в пункте (b), не обращаясь к уравнению (36.12).

Пусть теперь (36.10) — однозначно определенный ряд, полученный последовательным решением рекуррентных уравнений (36.11a, b). Нетрудно проверить, что тогда применима теорема 26.1, и мы можем сформулировать следующий аналог теоремы 33.1.

Теорема 36.1. Если дифференциальное уравнение (36.1) удовлетворяет предположениям (A) и (B) этого раздела, то оно имеет (не обязательно единственное) решение $\varphi_0(x, \varepsilon)$, голоморфное по обеим переменным при $|x| \leq \tilde{x}_0 \leq x_0$, $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}_0$ и допускающее равномерное асимптотическое разложение

$$\varphi_0(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_{0r}(x) \varepsilon^r \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0$$

с коэффициентами $\varphi_{0r}(x)$, голоморфными в интервале $|x| \leq x_0$.

36.3. Преобразование в линейное дифференциальное уравнение. Формальная теория

Если $\varphi_0(x, \varepsilon)$ — решение, описанное в теореме 36.1, то замена

$$y^* = y - \varphi_0(x, \varepsilon)$$

переводит дифференциальное уравнение (36.6) в уравнение

$$\varepsilon^h y^{*'} = A^*(x, \varepsilon) y^* + g^*(x, \varepsilon, y^*),$$

которое обладает такими же свойствами, как (36.6), и в котором

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} A^*(x, \varepsilon) = A_0(x).$$

Для удобства обозначений мы вернемся к прежним символам, т. е. будем теперь рассматривать дифференциальное уравнение (36.6) при дополнительном предположении

$$a(x, \varepsilon) \equiv 0. \quad (36.13)$$

Сделаем далее

Предположение (С). *Собственные значения $\lambda_j(x)$, $j=1, 2, \dots, n$, матрицы $A_0(x)$ различны при $|x| \leq x_0$.*

В работе Сибуйя [6] рассматриваются гораздо более общие случаи, но при этом возникают значительные усложнения.

В силу теоремы 26.2 существует линейное преобразование

$$y = T(x, \varepsilon) y^*,$$

которое переводит наше дифференциальное уравнение в уравнение того же вида с диагональной матрицей линейной части. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $A(x, \varepsilon)$ диагональна.

Задача 36.2. С помощью теоремы 26.3 показать, что $A(x, \varepsilon)$ можно взять в виде многочлена относительно ε . (Указание: в обозначениях теоремы 26.3 этот многочлен равен $\varepsilon^h Q(x, \varepsilon)$.)

Как и в § 34, сделаем теперь преобразование зависимой переменной y в z вида

$$y = P(x, z, \varepsilon) = z + Q(x, z, \varepsilon) = z + \sum_{|p| \geq 2} P_p(x, \varepsilon) z^p \quad (36.14)$$

и попытаемся найти такую функцию $P(x, z, \varepsilon)$, чтобы преобразованное уравнение стало очень простым. По аналогии с (34.13) подстановка (36.14) в (36.6), где $a \equiv 0$, приводит к уравнению

$$\varepsilon^h z' = P_z^{-1} [AP - \varepsilon^h P_x + g(x, \varepsilon, P)]. \quad (36.15)$$

Чтобы преобразованное дифференциальное уравнение было линейным с правой частью $A(x, \varepsilon)z$, функция Q должна удовлетворять условию

$$\varepsilon^h Q_x = AQ - Q_z Az + g(x, \varepsilon, z + Q). \quad (36.16)$$

Повторяя дословно выкладку, приводящую от (34.15) к (34.20), получим рекуррентную систему дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^h P'_p = \left[A - \left(\sum_{j=1}^n p_j a_{jj} \right) I \right] P_p + h_p, \quad |p| \geq 2, \quad (36.17)$$

где

$$A = A(x, \varepsilon) = \text{diag}(a_{11}(x, \varepsilon), \dots, a_{nn}(x, \varepsilon)), \quad (36.18)$$

$$a_{jj} = a_{jj}(x, \varepsilon) \sim \lambda_j(x) + \sum_{r=1}^{\infty} a_{j jr}(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (36.19)$$

$$\begin{aligned} g(x, \varepsilon, z + Q) &= \sum_{|p| \geq 2} a_p(x, \varepsilon) (z + Q)^p = \\ &= \sum_{|p| \geq 2} a_p(x, \varepsilon) \left(z + \sum_{|r| \geq 2} P_r z^r \right)^p = \sum_{|p| \geq 2} h_p z^p. \end{aligned} \quad (36.20)$$

Функции h_p являются многочленами относительно P_q , $|q| < |p|$, коэффициенты которых зависят от x и ε и допускают асимптотические разложения по степеням ε . В частности,

$$h_p = a_p(x, \varepsilon) \quad \text{при} \quad |p| = 2. \quad (36.21)$$

Как и ранее, введем сильные ограничения на собственные значения $\lambda_j(0)$ матрицы $A_0(0)$.

Предположение (D). Все числа

$$\mu_{kp} = \lambda_k(0) - \sum_{j=1}^n p_j \lambda_j(0),$$

$|p| \geq 2, j=1, 2, \dots, n$, отличны от нуля.

Предположение (E). Все числа $\lambda_j(0), j=1, 2, \dots, n$, лежат внутри полуплоскости, ограниченной некоторой прямой, проходящей через начало координат.

В этом случае числа μ_{kp} равномерно отграничены от нуля. При каждом p уравнение (36.17) является системой n скалярных дифференциальных уравнений. Нетрудно показать, что эти уравнения могут быть последовательно удовлетворены в формальном смысле рядами по степеням ε , коэффициенты которых являются голоморфными функциями x в некоторой фиксированной окрестности точки $x=0$. Теорема 26.1 гарантирует существование истинных решений, для которых эти ряды являются асимптотическими разложениями при $\varepsilon \rightarrow +0$.

36.4. Преобразование в линейное дифференциальное уравнение. Аналитическая теория

Аналогом леммы 34.1 в рассматриваемой теории является

Лемма 36.1. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^h v' = b(x, \varepsilon) v + c(x, \varepsilon), \quad (36.22)$$

коэффициенты которого являются аналитическими функциями в области $|x| \leq x_0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и имеют в интервале $|x| \leq x_0$ равномерные асимптотические разложения

$$b(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} b_r(x) \varepsilon^r, \quad c(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} c_r(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Предположим далее, что $b_0(0) \neq 0$. Тогда дифференциальное уравнение имеет частное решение $v = \varphi(x, \varepsilon)$, для которого при $\varepsilon \rightarrow +0$ справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$\varphi(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} v_r(x) \varepsilon^r$$

в области $|x| \leq x_1 \leq x_0$ и которое удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x, \varepsilon)| \leq \frac{K_0^*}{|b_0(0) - K_0^* \sup |b(x, \varepsilon) - b_0(0)|} \sup |c(x, \varepsilon)| \quad (36.23)$$

в области $|x| \leq x_1$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$. Постоянная K_0^* не зависит от $b(x, \varepsilon)$ и $c(x, \varepsilon)$.

Доказательство этой леммы сходно с доказательством леммы 34.1 и является более простым. Оно основывается на лемме 27.1.

Задача 36.3. Доказать лемму 36.1.

Лемму 36.1 можно применить к дифференциальным уравнениям (36.17), если при их последовательном решении брать частные решения, указанные в этой лемме. В силу предположений (D) и (E) получим равномерную оценку

$$|P_{pj}| \leq K_2 \sup |b_{pj}|, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad |p| \geq 2. \quad (36.24)$$

Постоянная K_2 не зависит от p и j . Это неравенство и его доказательство полностью аналогичны доказательству формулы (34.30), так что нет надобности его повторять.

То же самое справедливо в отношении доказательства сходимости ряда в (36.14). Оно почти дословно повторяет доказательство сходимости в разд. 34.2. Поэтому мы перейдем непосредственно к формулировке окончательного результата.

Теорема 36.2. Если дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^h y' = f(x, \varepsilon, y) \quad (36.25)$$

удовлетворяет предположениям (A) — (E), то существует преобразование

$$y = R(x, \varepsilon, z) \quad (36.26)$$

со следующими свойствами:

(а) $R(x, \varepsilon, z)$ допускает разложение в равномерно сходящийся ряд

$$\tilde{R}(x, \varepsilon, z) = \sum_{|p| \geq 0} R_p(x, \varepsilon) z^p \quad (36.27)$$

при

$$|x| \leq x^*, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*, \quad \|z\| \leq z^*, \quad (36.28)$$

причем коэффициенты $R_p(x, \varepsilon)$ в указанной области голоморфны и имеют равномерные асимптотические разложения в ряды по степеням ε при $\varepsilon \rightarrow +0$;

(б) матрица Якоби $R_z(0, \varepsilon, z)|_{z=0}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ стремится к неособой предельной матрице;

(с) преобразование (36.26) переводит (36.25) в линейное уравнение

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = B(x, \varepsilon) z \quad (36.29)$$

с диагональной матрицей $B(x, \varepsilon)$. Эта матрица имеет равномерное асимптотическое разложение

$$B(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} B_r(x) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad |x| \leq x^*, \quad (36.30)$$

и

$$B_0(0) = \text{diag} [\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_n(0)]. \quad (36.31)$$

36.5. Представление решений в виде экспоненциальных рядов

Общее решение упрощенного дифференциального уравнения (36.29) имеет асимптотический вид

$$z = \tilde{Z}(x, \varepsilon) e^{Q(x, \varepsilon) c}, \quad (36.32)$$

где $\tilde{Z}(x, \varepsilon)$ — матрица (в нашем случае диагональная), представляемая в виде асимптотического ряда по ε при $\varepsilon \rightarrow +0$. Кроме того,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \tilde{Z}(0, \varepsilon)$$

является неособой матрицей. Матрица $Q(x, \varepsilon)$ диагональна и имеет вид

$$Q(x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^h Q_k(x) \varepsilon^{-k}. \quad (36.33)$$

В частности,

$$Q_h(x) = \text{diag} \left[\int_0^x b_{11}(t) dt, \dots, \int_0^x b_{nn}(t) dt \right], \quad (36.34)$$

где через $b_{jj}(x)$ обозначены диагональные элементы матрицы $B_0(x)$ из (36.29). Постоянный вектор c является произвольным. Напомним, что $b_{jj}(0) = \lambda_j(0)$. Все это непосредственно следует из теоремы 26.2.

Обратный переход от (36.32) к соответствующему решению исходного дифференциального уравнения (36.25) с помощью (36.26) возможен только для достаточно малых z . Если все диагональные элементы $Q_h(x)$ имеют отрицательные действительные части, то при малых положительных ε и z будет мало. В нашем случае

$$\int_0^x b_{jj}(t) dt = \lambda_j(0)x + O(x^2).$$

Поэтому из предположения (E) следует, что в определенном секторе S x -плоскости при достаточно малом x^* будет выполнено неравенство

$$\text{Re} \left[\int_0^x b_{jj}(t) dt \right] < 0, \quad x \in S, \quad |x| \leq x^*. \quad (36.35)$$

В качестве S можно взять подсектор наибольшего сектора, в котором все $\lambda_j(0)x$ имеют отрицательные действительные части.

Соответствующее решение $y(x, \varepsilon)$ исходной задачи можно тогда записать в виде ряда

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{|\rho| \geq 0} \Phi_\rho(x, \varepsilon) e^{\rho \pi(x, \varepsilon)} c^\rho, \quad (36.36)$$

который полностью аналогичен ряду (35.3). Эта формула верна для всех достаточно малых ε и x при условии, что x лежит в секторе S и $\varepsilon > 0$. Границы для ε и $|x|$ зависят, конечно, от c . Векторные функции $\Phi_\rho(x, \varepsilon)$ имеют разложения в асимптотические ряды по степеням ε , а $\pi(x, \varepsilon)$ есть вектор, компонентами которого являются диагональные элементы матрицы $Q(x, \varepsilon)$ из (36.33). При $x=0$ формула (36.36) дает

$$y(0, \varepsilon) = \sum_{|\rho| \geq 0} \Phi_\rho(0, \varepsilon) c^\rho. \quad (36.37)$$

Значение $c=0$ соответствует частному решению $y(x, \varepsilon) = \varphi_0(x, \varepsilon)$, полученному в теореме 36.1, с начальным условием $y(0, \varepsilon) = \varphi_0(0, \varepsilon)$. В силу пункта (b) теоремы 36.2 мы можем сделать вывод, что все решения исходного дифференциального уравнения с начальными значениями при $x=0$, достаточно близкими при малых $\varepsilon > 0$ к $\varphi_0(0, \varepsilon)$, представимы в виде (36.36). Так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi_0(0, \varepsilon) = \varphi_{00}$$

(см. предположение (A)), то мы получаем следующий результат.

Теорема 36.3. Пусть выполнены предположения теоремы 36.2, и пусть S — некоторый замкнутый сектор x -плоскости, в котором $\operatorname{Re}(\lambda_j x) < 0$, $j=1, 2, \dots, n$. Тогда существуют такие положительные постоянные $\eta, \tilde{x}, \tilde{\varepsilon}$, что каждое решение $y(x, \varepsilon)$ дифференциального уравнения (36.1) с начальным значением $y(0, \varepsilon) = \eta$ (η не зависит от ε , но $|\eta - \varphi_{00}| \leq \eta$) допускает разложение в сходящийся ряд вида (36.36) при условии, что $|x| \leq \tilde{x}$, $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, $x \in S$.

Теорема 36.3 имеет большее значение, чем ее аналог — теорема 35.1. Во-первых, начальное условие задается в фиксированной точке $x=0$, а не в некоторой точке, подчиненной неравенству, которое трудно проверить. Во-вторых, как только c вычислено по заданному η , ряд (36.36) можно использовать для нахождения решения во всей области $|x| \leq \tilde{x}$, $x \in S$. При любом фиксированном $x \neq 0$ мы имеем, конечно, $y(x, \varepsilon) \sim \varphi(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, но если $x\varepsilon^{-h}$ не очень велико, то последующие члены ряда дадут немалый вклад. Другими словами, решение начальной задачи быстро достигает экспоненциально малой (по отношению к ε) окрестности частного решения $\varphi_0(x, \varepsilon)$ при изменении x из начала координат внутрь сектора S . Последующие члены ряда (36.36) описывают это быстрое изменение.

Следующий простой пример показывает как достоинства, так и недостатки нашей теории.

Пример. Скалярное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon u'' = \varepsilon x - u + u^2 \quad (36.38)$$

можно формально решить подстановкой

$$u = \sum_{r=1}^{\infty} u_r \varepsilon^r.$$

В результате получится формальный ряд

$$u = x\varepsilon + x^2\varepsilon^2 + (2x^3 - 2)\varepsilon^3 + \dots \quad (36.39)$$

Если мы хотим применить к нашей задаче теорию данной главы, то не следует полагать

$$y_1 = u, \quad y_1' = y_2,$$

так как полученная в результате система

$$\varepsilon \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \varepsilon + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon y_2 \\ y_1' \end{pmatrix} \quad (36.40)$$

не будет удовлетворять предположению (А). Вместо этого введем новый параметр

$$\mu^2 = \varepsilon \quad (36.41)$$

и положим

$$y_1 = u, \quad \mu y_1' = y_2. \quad (36.42)$$

Это приводит к системе

$$\mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^2 x + y_2' \end{pmatrix}. \quad (36.43)$$

В соответствии с методом разд. 36.2 ее формальным решением является ряд

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mu^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu^3 + \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \mu^4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix} \mu^5 + \\ + \begin{pmatrix} 2x^3 - 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mu^6 + \dots, \quad (36.44)$$

который, как и должно быть, совпадает с (36.39).

Из теоремы 36.1 следует, что (36.44) является асимптотическим разложением некоторого истинного решения системы (36.43), по крайней мере при $\mu > 0$. Следовательно, то же самое справедливо для разложения (36.39) по отношению к уравнению (36.38). Собственные значения главной матрицы в (36.43) равны $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Следовательно, предположение (Е) не выполнено и теорема 36.2 не применима.

Второе частное решение (36.38) можно найти, заметив, что уравнение $-u + u^2 = 0$, получающееся из (36.38) при $\varepsilon = 0$, имеет решение $u = 1$. Преобразование

$$u = v + 1$$

переводит (36.38) в уравнение

$$\varepsilon v'' = \varepsilon x + v + v^2,$$

формальное решение которого в виде ряда можно легко вычислить. Соответствующий формальный ряд для u

$$u = 1 - \varepsilon x - \varepsilon^2 x^2 - (2\varepsilon^3 + 2)\varepsilon^3 + \dots \quad (36.45)$$

также является асимптотическим разложением некоторого истинного решения, что доказывается так же, как и ранее.

Ряды (36.39) и (36.45) являются асимптотическими представлениями решений в некоторой окрестности точки $x=0$. Однако, делая перенос $x = x^* + x_0$ и повторяя затем предыдущие рассуждения, можно показать, что эти ряды представляют решения в окрестности любой точки x . Эти решения не обязательно являются аналитическими продолжениями друг друга.

Более интересный вопрос об асимптотическом характере решения (36.38) с заданными начальными условиями не может быть решен настоящими методами.

Если в уравнение (36.38) ввести линейный по u' «член трения» порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$, то предположение (E) может оказаться выполненным, и тогда с помощью теоремы 36.2 может быть вычислен асимптотически более широкий класс решений.

Задача 36.4. Применить теорию этого раздела к дифференциальному уравнению

$$\varepsilon u'' = \varepsilon x - \sqrt{\varepsilon} u' - u + u^2.$$

Сингулярные возмущения

37. Краевые задачи для линейных уравнений

37.1. Введение

Задачи с сингулярными возмущениями уже упоминались несколько раз, например в разд. 31.3. Грубо говоря, задача нахождения решения дифференциального уравнения с малым параметром, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, называется задачей с сингулярными возмущениями, если порядок дифференциального уравнения при $\varepsilon=0$ ниже, хотя и положителен, чем при $\varepsilon \neq 0$. Выражение «укороченная задача» будет применяться по отношению к задаче, получающейся при $\varepsilon=0$. Многие авторы предпочитают выражение «вырожденная задача».

Целью теории возмущений является приближенное решение задачи при малых ε , если известно решение при $\varepsilon=0$. Если дифференциальное уравнение и дополнительные условия зависят от параметра ε достаточно регулярно, то известные теоремы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений гарантируют непрерывную зависимость решений от ε при $\varepsilon=0$. Таким образом, в задачах с регулярными возмущениями с самого начала известно, что решение при малых ε близко к известному решению при $\varepsilon=0$, и проблема состоит в улучшении этого результата с помощью более высоких приближений.

Простейшие примеры показывают, что в задачах с сингулярными возмущениями положение более сложно. Например, скалярное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon u'' + u' = 0 \quad (37.1)$$

имеет общее решение

$$u = c_1(\varepsilon) e^{-x/\varepsilon} + c_2(\varepsilon),$$

где $c_1(\varepsilon)$ и $c_2(\varepsilon)$ — произвольные функции только от ε . При $x \neq 0$ это решение не является непрерывным по ε при $\varepsilon=0$, за исключением случая, когда $c_1(\varepsilon) \equiv 0$ и $c_2(\varepsilon)$ непрерывна. Функции $c_1(\varepsilon)$, $c_2(\varepsilon)$ определяются из дополнительных условий задачи. Например, если мы потребуем, чтобы

$$u(0, \varepsilon) = \alpha_0, \quad u'(0, \varepsilon) = \alpha_1, \quad (37.2)$$

где α_0 и α_1 не зависят от ε , то получим

$$u(x, \varepsilon) = -\varepsilon\alpha_1 e^{-x/\varepsilon} + \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1. \quad (37.3)$$

Пусть x и ε принимают лишь действительные значения. Ясно, что $u(x, \varepsilon)$ не является непрерывной функцией ε при $\varepsilon=0$, за исключением точки $x=0$ или случая $\alpha_1=0$. Тем не менее при $x \geq 0$ *односторонний* предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u(x, \varepsilon)$$

существует и равен

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u(x, \varepsilon) = \alpha_0. \quad (37.4)$$

Далее, $u_0(x) = \alpha_0$ есть точное решение укороченного дифференциального уравнения

$$u'_0 = 0, \quad (37.5)$$

удовлетворяющее первому из двух начальных условий (37.2). Если x отрицательно, то тот же самый результат имеет место при отрицательных ε . Однако если x и ε имеют противоположные знаки, то решение расходится при $\varepsilon \rightarrow 0$, если только $\alpha_1 \neq 0$. Априори следует ожидать, что предельная функция, если она существует, не будет удовлетворять по крайней мере одному из двух начальных условий, так как решения укороченного уравнения однозначно определяются *одним* начальным условием. Менее очевидно то, что при переходе к пределу «теряется» условие, задающее значение *производной*.

Рассмотрим теперь то же самое дифференциальное уравнение (37.1) с двухточечными краевыми условиями

$$u(0, \varepsilon) = \alpha_0, \quad u(1, \varepsilon) = \beta_0. \quad (37.6)$$

Решение этой задачи имеет вид

$$u(x, \varepsilon) = (1 - e^{-1/\varepsilon})^{-1} \{(\alpha_0 - \beta_0) e^{-x/\varepsilon} + \beta_0 - \alpha_0 e^{-1/\varepsilon}\}. \quad (37.7)$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u(x, \varepsilon) = \beta_0 \quad \text{при} \quad 0 < x \leq 1,$$

т. е. равен решению укороченного уравнения, удовлетворяющему краевому условию при $x=1$, но не при $x=0$, если только $\alpha_0 \neq \beta_0$. Сходимость равномерна в любом замкнутом интервале $0 < \delta \leq x \leq 1$, но не во всем промежутке $0 \leq x \leq 1$. В узком интервале длины $O(\varepsilon)$ решение быстро изменяется от $u = \alpha_0$ при $x=0$ до значения, отличающегося от предела $u_0 = \beta_0$ на величину порядка $O(\varepsilon)$. Этот интервал часто называется *пограничным*

слоем вследствие математической аналогии с пограничными слоями динамики жидкостей. Если $\varepsilon < 0$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \alpha_0,$$

и пограничный слой возникает при $x=1$.

Пограничными слоями в течениях жидкостей с малой вязкостью являются узкие области вблизи определенных частей границы, где скорость течения быстро изменяется от нуля на границе до значений, почти равных скорости невязкого течения. Математически это явление вполне соответствует явлению, рассмотренному только что для простого дифференциального уравнения (37.1), так как скорость течения является решением уравнений Навье—Стокса. Это довольно сложные уравнения в частных производных, в которых производные наивысшего порядка умножаются на коэффициент вязкости. Поэтому если вязкость положить равной нулю, то получаются дифференциальные уравнения более низкого порядка. В соответствии с этим для вязкого течения должно быть задано больше краевых условий, чем для идеального невязкого течения. Далее, вязкая жидкость «прилипает» к границе, т. е. ее скорость на границе равна нулю. Если математическая модель является адекватным описанием физической реальности, то решения краевой задачи с учетом вязкости должны при малой вязкости мало отличаться, за исключением, вообще говоря, узкого пограничного слоя, от решений задачи без учета вязкости, когда опущено это граничное условие.

Полное математическое доказательство такого поведения проведено пока только для специальных, искусственно упрощенных случаев, но оно показывает, что даже в этих случаях физические соображения являются ненадежной основой. Так, например, в пределе при стремлении вязкости к нулю внутри области также могут появляться разрывы, неожиданные с точки зрения физических соображений (см., например, Вазов [2]).

Многие примеры разрывных течений, например ударные волны, могут быть объяснены как явления, связанные с тем, что вязкость входит в соответствующие физические законы сингулярно (см. Фридрихс [3]). Однако адекватный анализ не исчерпывается асимптотическим изучением краевых задач для уравнений Навье—Стокса в случае малой вязкости. Так, если решения близки к разрывным, то молекулярная структура вещества может стать настолько важной, что модели непрерывной механики не будут более подходящими.

Приводимые ниже задачи показывают, что даже в пределах элементарного класса линейных обыкновенных дифференциаль-

ных уравнений с постоянными коэффициентами характер сингулярно возмущенных задач может значительно различаться для, казалось бы, вполне похожих задач.

Задача 37.1. Рассмотреть приводимые ниже примеры как для положительных, так и для отрицательных малых значений ε :

$$(a) \varepsilon u'' + u' = 0, \quad u'(0, \varepsilon) = 1, \quad u'(1, \varepsilon) = 0,$$

$$(b) \varepsilon u''' + u' = 0, \quad u(0, \varepsilon) = 1, \quad u'(0, \varepsilon) = 0, \quad u''(1, \varepsilon) = 0,$$

$$(c) \varepsilon u''' + u' = 0, \quad u(0, \varepsilon) = 1, \quad u(1, \varepsilon) = 0, \quad u''(1, \varepsilon) = 0.$$

37.2. Краевые задачи для скалярных дифференциальных уравнений

Все примеры в разд. 37.1 относятся к классу таких сингулярно возмущенных задач, для которых можно дать достаточно полный асимптотический анализ прямым применением асимптотической теории, развитой в гл. VII. Из литературы по этой проблеме мы упомянем Вазова [1] и статьи Градштейна (например, [2] и [3]). Здесь мы следуем Вазову [1]. Некоторые технические детали будут опущены. Тем же методом можно решить многие подобные задачи.

Рассмотрим скалярное линейное дифференциальное уравнение вида

$$\varepsilon^{n-m} N[u] - M[u] = 0, \quad (37.8)$$

где

$$N[u] = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}(x) u^{(n-\nu)}, \quad M[u] = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu}(x) u^{(m-\mu)}, \quad n > m. \quad (37.9)$$

Для простоты исследуем только вещественный случай. В этом случае предположение об аналитичности дифференциального уравнения не является необходимым, но будет сохранено для удобства. Следовательно, $a_{\nu}(x)$ и $b_{\mu}(x)$ будут действительными голоморфными функциями в некотором конечном замкнутом интервале действительной оси x , в качестве которого без ограничения общности можно взять интервал $0 \leq x \leq 1$. Кроме того, мы потребуем, чтобы

$$a_0(x) \equiv 1, \quad b_0(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1$$

во избежание сложностей, связанных с особыми точками или точками поворота. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначение параметра через ε^{n-m} используется лишь для удобства.

Решения уравнения (37.8) подчиним n краевым условиям вида

$$\begin{aligned} u^{(p_i)}(0) &= \alpha_i, & i &= 1, 2, \dots, s \leq n, \\ u^{(q_i)}(1) &= \beta_i, & i &= 1, 2, \dots, t = n - s. \end{aligned} \quad (37.10)$$

где

$$\begin{aligned} 0 &\leq p_1 < p_2 < \dots < p_s \leq n - 1, \\ 0 &\leq q_1 < q_2 < \dots < q_t \leq n - 1. \end{aligned} \quad (37.11)$$

(Верхний индекс обозначает дифференцирование.) Постоянные α_i, β_i возьмем не зависящими от ε .

Асимптотические разложения для n независимых решений уравнения (37.8) можно получить без преобразования дифференциального уравнения в систему. Соответствующую теорию для скалярных уравнений можно найти у Территина У. [1]. Однако поучительно перейти от уравнения (37.8) к системе, так же как мы делали это в § 31, и применить нашу общую теорию. Полагая $y_1 = u$ и определяя $y_j, 1 < j \leq n$, посредством формул

$$\begin{aligned} y'_j &= y_{j+1}, & j &= 1, 2, \dots, m, \\ \varepsilon y'_j &= y_{j+1}, & j &= m + 1, \dots, n - 1, \end{aligned} \quad (37.12)$$

получим соотношения

$$\begin{aligned} y_j &= u^{(j-1)}, & j &= 1, 2, \dots, m + 1, \\ y_j &= \varepsilon^{j-m-1} u^{(j-1)}, & j &= m + 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение (37.8) можно теперь записать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon y'_n &= - \sum_{\nu=1}^{n-m-1} a_\nu(x) \varepsilon^\nu y_{n-\nu+1} - \varepsilon^{n-m} \sum_{\nu=n-m}^n a_\nu(x) y_{n-\nu+1} + \\ &+ \sum_{\mu=0}^m b_\mu(x) y_{m-\mu+1}. \end{aligned}$$

Объединение этого уравнения с (37.12) дает векторную систему

$$\varepsilon y' = A(x, \varepsilon) y = \left[\sum_{r=0}^{n-m} A_r(x) \varepsilon^r \right] y, \quad (37.13)$$

в которой главная матрица $A_0(x)$ имеет вид

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{021}(x) & A_{022}(x) \end{pmatrix}. \quad (37.14)$$

Здесь $A_{022}(x)$ есть $(n - m) \times (n - m)$ -матрица

$$A_{022}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ b_0(x) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а у матрицы $A_{021}(x)$ первые $n - m - 1$ строк состоят из нулей, последняя же строка есть $b_m(x), b_{m-1}(x), \dots, b_1(x)$.

Характеристический многочлен матрицы $A_0(x)$ равен

$$\det(A_0(x) - \lambda I) = (-1)^n (\lambda^n - b_0(x) \lambda^m). \quad (37.15)$$

Следовательно, собственными значениями матрицы $A_0(x)$ являются $n - m$ значений $[b_0(x)]^{\frac{1}{n-m}}$ наряду с m -кратным нулевым собственным значением.

Обозначим эти $n - m$ функций через $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n - m$. В интервале $0 \leq x \leq 1$ функции $\varphi_j(x)$ различны и не равны нулю. Из следствия теоремы 25.1 вытекает тогда, что матрица $A_0(x)$ локально голоморфно подобна блочно-диагональной матрице с одним m -мерным и $n - m$ одномерными блоками по диагонали. Этого для нас недостаточно. Однако ввиду простой структуры матрицы $A_0(x)$ легко проверить непосредственно, что матрица (37.14) голоморфно подобна — во всем интервале $0 \leq x \leq 1$ — диагональной матрице

$$D(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{22}(x) \end{pmatrix},$$

где

$$D_{22}(x) = \text{diag} [\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-m}(x)].$$

Действительно, пусть $\Phi(x) = \{\varphi_{\alpha\beta}(x)\}$ есть $(n - m) \times (n - m)$ -матрица Вандермонда с элементами $\varphi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\beta^{\alpha-1}(x)$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n - m$; тогда

$$T(x) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{022}^{-1}(x) A_{021}(x) & \Phi(x) \end{pmatrix}$$

осуществляет требуемое преобразование подобия.

Задача 37.2. Показать, что, действительно,

$$T^{-1}(x) A_0(x) T(x) = D(x).$$

Теперь мы можем применить теорию § 25 и свести асимптотическое решение системы (37.13) к асимптотическому решению простой системы

$$\varepsilon z' = D(x)z \quad (37.16)$$

при помощи линейного преобразования $y = P(x, \varepsilon)z$ с неособой голоморфной матрицей $P(x, \varepsilon)$, допускающей представление в виде асимптотического ряда по степеням ε . Дифференциальное уравнение (37.16) имеет фундаментальную матрицу решений

$$Z(x, \varepsilon) = \text{diag} \left\{ 1, 1, \dots, 1, \exp \left[\varepsilon^{-1} \int_0^x \varphi_1(\rho) d\rho \right], \dots \right. \\ \left. \dots, \exp \left[\varepsilon^{-1} \int_0^x \varphi_{n-m}(\rho) d\rho \right] \right\}.$$

Соответствующая фундаментальная матрица для системы (37.13) имеет вид

$$Y(x, \varepsilon) = P(x, \varepsilon)Z(x, \varepsilon). \quad (37.17)$$

Первая строка в (37.17) является фундаментальной системой $u_j(x, \varepsilon)$, $j=1, 2, \dots, n$, для скалярного дифференциального уравнения (37.8). Она имеет асимптотический вид

$$u_j(x, \varepsilon) \sim u_{j0}(x) + u_{j1}(x)\varepsilon + u_{j2}(x)\varepsilon^2 + \dots \\ j = 1, 2, \dots, m, \\ u_{m+k}(x, \varepsilon) \sim (u_{m+k,0}(x) + u_{m+k,1}(x)\varepsilon + \dots) \times \\ \times \exp \left[\varepsilon^{-1} \int_0^x \varphi_k(\rho) d\rho \right], \quad k = 1, 2, \dots, n-m. \quad (37.18)$$

Коэффициенты $u_{\alpha\beta}(x)$ в (37.18) можно очень легко вычислить, подставляя ряд в дифференциальное уравнение (37.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε . Ясно, что функции $u_{j0}(x)$, $j=1, 2, \dots, m$, образуют фундаментальную систему для укороченного дифференциального уравнения $M[u]=0$. Для функций $u_{m+k,0}(x)$ получаются выражения

$$u_{m+k,0}(x) = \varphi_k^{-1}(x) \exp \left[-\frac{1}{n-m} \int_0^x \frac{a_1(\rho) - b_1(\rho)}{b_0(\rho)} d\rho \right], \\ k = 1, \dots, n-m, \quad (37.19)$$

единственным существенным свойством которых является их голоморфность в интервале $0 \leq x \leq 1$.

Задача 37.3. Доказать формулу (37.19).

В одном отношении полученные результаты недостаточны для наших целей. Теорема 26.2, на которой основана формула (37.18), не доказывает, что полученные асимптотические представления справедливы во *всем* интервале $0 \leq x \leq 1$. В этом можно убедиться, уточнив рассуждения из § 26 при наших предположениях (ср. Территин Х. [1]). Вместо этого мы довольствуемся замечанием, что (37.18), несомненно, верно в достаточно малом интервале $0 \leq x \leq x_1$ и что соответствующее изменение масштаба позволяет нам взять $x_1 = 1$.

Теперь мы можем вернуться к асимптотическому решению краевой задачи, определенной формулами (37.8) и (37.10). Если решение существует, то оно имеет вид

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^n c_k(\varepsilon) u_k(x, \varepsilon), \quad (37.20)$$

где $c_k(\varepsilon)$ могут быть найдены из n линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k u_k^{(p_i)}(0, \varepsilon) &= \alpha_i, & i = 1, 2, \dots, s, \\ \sum_{k=1}^n c_k u_k^{(q_i)}(1, \varepsilon) &= \beta_i, & i = 1, 2, \dots, t. \end{aligned} \quad (37.21)$$

Так как асимптотические формулы (37.18) можно многократно дифференцировать, то асимптотическое вычисление $c_k(\varepsilon)$ из (37.21) по формулам Крамера не представляет серьезных теоретических трудностей. Однако это так громоздко, что мы сошлемся на статью Вазова [1] и рассмотрим только наиболее важные результаты.

Для произвольных значений α_i и β_i решение (37.20) будет сходящимся при $\varepsilon \rightarrow +0$ только в том случае, если выполняется ряд условий, которые будут сейчас описаны. Правило, которое определяет, какие из наложенных краевых условий теряются при переходе к пределу, если имеет место сходимост, зависит от распределения значений $\varphi_k(x)$ на комплексной плоскости. Если действительные части некоторых $\varphi_k(x)$ равны нулю, то возникает особенно сложный случай. Этот случай, который мы будем называть *исключительным*, был рассмотрен Вазовым [1], а здесь будет опущен. Точки $\varphi_k(x)$ образуют на комплексной плоскости вершины правильного многоугольника, и число вершин в правой и левой полуплоскости соответственно зависит от знака $b_0(x)$ и значения $n-t$ по модулю 4. Для удобного описания нашего правила мы введем целые числа p и q ,

представленные в таблице. Можно непосредственно проверить, что они показывают число функций $\varphi_k(x)$, имеющих соответственно отрицательную и положительную действительную часть.

$n - m \pmod{4}$	$\text{sgn } b_0$	p	q
1	+	$(n - m - 1)/2$	$(n - m + 1)/2$
3	-	$(n - m - 1)/2$	$(n - m + 1)/2$
1	-	$(n - m + 1)/2$	$(n - m - 1)/2$
3	+	$(n - m + 1)/2$	$(n - m - 1)/2$
0	-	$(n - m)/2$	$(n - m)/2$
2	+	$(n - m)/2$	$(n - m)/2$
0	+	исключительный случай	
2	-	исключительный случай	

Будем называть краевую задачу (37.8), (37.10) *регулярной*, если

$$p \leq s \text{ и } q \leq t. \quad (37.22)$$

По определению *укороченная задача* в регулярном случае заключается в решении дифференциального уравнения

$$M[u] = 0 \quad (37.23)$$

с m краевыми условиями

$$\begin{aligned} u^{(p_i)}(0) &= \alpha_i, & i &= 1, 2, \dots, s - p. \\ u^{(q_i)}(1) &= \beta_i, & i &= 1, 2, \dots, t - q. \end{aligned} \quad (37.24)$$

Укороченная задача определена только тогда, когда выполнены неравенства (37.22). Грубо говоря, условие регулярности означает, что краевые условия не должны быть слишком неравно распределены между двумя граничными точками¹⁾. Если это не выполнено, то некоторые члены ряда (37.20) будут содержать экспоненциальные функции, расходящиеся при $\varepsilon \rightarrow 0$.

С помощью введенной терминологии можно сформулировать теорему, полное доказательство которой содержится в работе Вазова [1].

Теорема 37.1. *Предположим, что*

(а) *краевая задача, определенная формулами (37.8) — (37.11), является регулярной и не исключительного типа;*

¹⁾ Более точно, условие регулярности означает, что должно иметь место соответствие между числом краевых условий в точках $x=0$ и $x=1$ и числом функций $\varphi_k(x)$ с отрицательной и положительной действительными частями. — *Прим. ред.*

(b) соответствующая укороченная задача, определенная формулами (37.23) и (37.24), имеет единственное решение $u_0(x)$;

(c) никакие из целых чисел p_{s-p+1}, \dots, p_s не сравнимы между собой по модулю $n-m$, и то же самое справедливо в отношении целых чисел q_{t-q+1}, \dots, q_t .

Тогда полная краевая задача при всех достаточно малых положительных ε имеет единственное решение $u(x, \varepsilon)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u(x, \varepsilon) = u_0(x) \quad \text{при } 0 < x < 1. \quad (37.25)$$

Доказательство теоремы 37.1, данное Вазовым [1], приводит также к асимптотическому разложению для решения $u(x, \varepsilon)$ полной задачи. Чтобы написать его, пронумеруем функции $\varphi_k(x)$ в порядке возрастания действительных частей, так что $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ имеют отрицательные действительные части, а $\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_{n-m}$ имеют положительные действительные части. Тогда

$$u(x, \varepsilon) = v_0(x, \varepsilon) + \varepsilon^{p_s-p+1} \sum_{\mu=1}^p \exp \left[\varepsilon^{-1} \int_0^x \varphi_\mu(\rho) d\rho \right] v_\mu(x, \varepsilon) + \\ + \varepsilon^{q_t-q+1} \sum_{\mu=p+1}^{n-m} \exp \left[\varepsilon^{-1} \int_1^x \varphi_\mu(\rho) d\rho \right] v_\mu(x, \varepsilon) + \omega(x, \varepsilon). \quad (37.26)$$

Функции $v_\mu(x, \varepsilon)$, $\mu=0, 1, \dots, n-m$, представимы в интервале $0 \leq x \leq 1$ асимптотическими рядами по степеням ε при $\varepsilon \rightarrow +0$. Главный член

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_0(x, \varepsilon)$$

в слагаемом $v_0(x, \varepsilon)$ является решением $u_0(x)$ укороченной задачи. Функция $\omega(x, \varepsilon)$ асимптотически равна нулю, т. е. $\omega(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^m)$ для всех m . Если известна фундаментальная система решений укороченной задачи, то функции, входящие в разложение (37.26), могут быть в принципе вычислены с помощью рациональных действий: дифференцирования и квадратур, но эти вычисления могут быть весьма сложными.

Формула (37.26) наглядно показывает характер сходимости $u(x, \varepsilon)$ к $u_0(x)$. Второе и третье слагаемые описывают пограничные слои в двух граничных точках интервала. Пограничные члены изменяют главный член выражения только для производных $u(x, \varepsilon)$ соответственно порядков p_{s-p+1} и q_{t-q+1} и выше. Эти целые числа являются самыми низшими порядками производных, входящих в потерянные краевые условия. Вне малого интервала порядка $O(\varepsilon)$ влияние пограничного слоя становится пренебрежимо малым по сравнению с асимптотическим рядом для $v_0(x, \varepsilon)$.

Харрис ([1] и [3]) распространил вышеизложенную теорию на двухточечную краевую задачу для систем. Он рассмотрел даже краевые условия, состоящие из линейных комбинаций значений функции и ее производных в двух граничных точках.

Необходимость трех предположений в теореме 37.1 иллюстрируется следующими тремя примерами.

Задача 37.4. Доказать расходимость при $\varepsilon \rightarrow +0$ решений следующих краевых задач и установить, какое условие теоремы 37.1 нарушено в каждом случае:

$$(1) \quad \varepsilon u^{(4)} + u' = 0, \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0, \quad u(1) = 1;$$

$$(2) \quad \varepsilon u'' - u' = 0, \\ u'(0) = 1, \quad u(1) = 0;$$

$$(3) \quad \varepsilon u^{(4)} - u' = 0, \\ u(0) = u'''(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = 1.$$

38. Краевые задачи для линейных уравнений: метод Вишика и Люстерника

38.1. Постановка задачи

М. И. Вишик и Л. А. Люстерник разработали эффективный метод решения линейных сингулярно возмущенных задач, который не связан с общей асимптотической теорией линейных дифференциальных уравнений. Главное его достоинство заключается в том, что он с успехом применим к асимптотическому анализу сингулярно возмущенных задач для дифференциальных уравнений в *частных производных*. Для обыкновенных дифференциальных уравнений его применимость не может быть шире, чем применимость метода, описанного в § 37, но фактическое вычисление первых членов возмущения в их методе, вероятно, проще. Детально он изложен в работе Вишика и Люстерника [1], где можно найти дополнительную библиографию.

Сингулярно возмущенные задачи, изученные в этой статье, несколько отличаются от задач, описанных в § 37, однако, несомненно, те же самые основные идеи можно применить к нашей предыдущей задаче. Рассматриваемое дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$L[u] \equiv N[u] - M[u] = f(x), \quad (38.1)$$

где $M[u]$ определяется так же, как в (37.9), в то время как $N[u]$ имеет теперь вид

$$N[u] \equiv \sum_{v=1}^{n-m} \varepsilon^v a_v(x) u^{(m+v)}, \quad a_{n-m}(x) \equiv 1. \quad (38.2)$$

Следуя Вишику и Люстернику, зададим краевые условия

$$\begin{aligned} u^{(i)}(0) &= 0, & i &= 0, 1, \dots, s-1, \\ u^{(j)}(1) &= 0, & j &= 0, 1, \dots, t-1 = n-s+1. \end{aligned} \quad (38.3)$$

Таким образом, мы имеем дело с неоднородной задачей с однородными краевыми условиями. Этим, в частности, отличается данная задача от задачи, рассмотренной в § 37. Отметим также, что в (38.3) входят производные последовательных порядков, что не требовалось в § 37.

При наших предположениях коэффициенты $a_v(x)$ должны быть голоморфными в интервале $0 \leq x \leq 1$. В частности, они допускают сходящиеся разложения вида

$$a_v(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{vr}^0 x^r, \quad v = 1, 2, \dots, n-m, \quad (38.4)$$

а также сходящиеся разложения вида

$$a_v(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{vr}^1 (x-1)^r, \quad v = 1, 2, \dots, n-m, \quad (38.5)$$

которые будут важны впоследствии. В действительности данная теория может быть развита при более слабых предположениях, что эти коэффициенты имеют только конечное число производных, но тогда асимптотические приближения для решений будут содержать лишь конечное число членов. По этому пути следуют авторы при изложении своей теории.

В последующих рассуждениях решающую роль играют алгебраические уравнения

$$\begin{aligned} Q_0(\lambda) &\equiv \sum_{v=1}^{n-m} a_{v0}^0 \lambda^v - b_0(0) = 0, \\ Q_1(\mu) &\equiv \sum_{v=1}^{n-m} a_{v0}^1 \mu^v - b_0(1) = 0. \end{aligned} \quad (38.6)$$

Это особенно ясно в свете теории § 37. Так, если однородное дифференциальное уравнение $L[u]=0$, соответствующее уравнению (38.1), преобразовать в систему с помощью соотношений

(37.12), то главный член $A_0(x)$ снова будет иметь вид (37.14), но блок $A_{022}(x)$ примет теперь вид

$$A_{022}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ b_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-m-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы в отличие от (37.15) равен

$$(-1)^n \lambda^m [\lambda^{n-m} + a_{n-m-1}(x) \lambda^{n-m-1} + \dots + a_1(x) \lambda - b_0(x)]. \quad (38.7)$$

Его нули, как мы знаем из нашей общей теории § 26, определяют экспоненциальные множители в асимптотике решения уравнения $L[u]=0$. Эти замечания можно было бы взять за исходную точку другого возможного подхода к обсуждаемой сингулярно возмущенной задаче, но это не входит в наши намерения. Мы хотим только указать на связь между (38.7) и многочленами $Q_0(\lambda)$ и $Q_1(\mu)$ в (38.6): корни (38.6) являются ненулевыми корнями (38.7) соответственно при $x=0$ и $x=1$.

В работе Вишика и Люстерника введение многочлена $Q_0(\lambda)$ связано с преобразованием растяжения

$$\sigma = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (38.8)$$

В терминах новой переменной σ мы имеем

$$\varepsilon^m L[u] = \sum_{\nu=1}^{n-m} a_\nu(\varepsilon\sigma) \frac{d^{m+\nu} u}{d\sigma^{m+\nu}} - \sum_{\mu=0}^m \varepsilon^\mu b_\mu(\varepsilon\sigma) \frac{d^{m-\mu} u}{d\sigma^{m-\mu}}.$$

Если правую часть разложить в ряд по степеням ε , то получим

$$\varepsilon^m L[u] = \sum_{r=0}^{\infty} R_r^0[u] \varepsilon^r; \quad (38.9)$$

$R_r^0[u]$ являются линейными дифференциальными выражениями по переменной σ порядка не более чем n , коэффициенты которых являются многочленами относительно σ степени, не превышающей r . В частности,

$$R_0^0[u] = \frac{d^m}{d\sigma^m} Q_0\left(\frac{d}{d\sigma}\right) u. \quad (38.10)$$

Преобразование растяжения в правой граничной точке

$$\tau = \frac{x-1}{\varepsilon}$$

аналогичным образом приводит к соотношению

$$\varepsilon^m L[u] \equiv \sum_{r=0}^{\infty} R_r^1[u] \varepsilon^r, \quad (38.11)$$

где

$$R_0^1[u] = \frac{d^m}{dx^m} Q_1\left(\frac{d}{dx}\right)u. \quad (38.12)$$

Пусть число корней уравнения $Q_0(\lambda) = 0$ с отрицательной действительной частью равно p (считая их кратность), а число корней уравнения $Q_1(\mu) = 0$ с положительной действительной частью равно q . Назовем¹⁾ краевую задачу (38.1)–(38.3) *регулярной*, если

$$p + q = n - m \quad (38.13)$$

и, кроме того,

$$p \leq s, \quad q \leq t. \quad (38.14)$$

По определению *укороченная задача* будет заключаться в решении дифференциального уравнения

$$M[u] + f(x) = 0 \quad (38.15)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u^{(i)}(0) &= 0, & i &= 0, 1, \dots, s - p - 1, \\ u^{(j)}(1) &= 0, & j &= 0, 1, \dots, t - q - 1. \end{aligned} \quad (38.16)$$

Предположим, что *укороченная задача имеет единственное решение и что то же самое справедливо при достаточно малых $\varepsilon > 0$ для полной задачи.*

Требование единственности решения полной задачи не может считаться удовлетворительным, так как конструктивная схема теории возмущений не должна опираться на требования, связанные с неизвестным решением возмущенной задачи. Некоторые весьма специальные достаточные условия разрешимости полной задачи можно найти у Вишика и Люстерника [1], где приведена также библиография по дальнейшим исследованиям этого вопроса.

38.2. Первый член асимптотики

Пусть $u_0(x)$ — решение укороченной задачи. Вообще говоря, оно не будет удовлетворять $p + q = n - m$ краевым условиям, потерянным при переходе от полной к укороченной задаче. Чтобы улучшить приближение, прибавим к $u_0(x)$ два поправочных

¹⁾ Принятая здесь терминология несколько отличается от терминологии Вишика и Люстерника [1]. — *Прим. ред.*

члена, которые будут аппроксимировать пограничные слои вблизи двух граничных точек. Первая из этих поправок получается с помощью преобразования растяжения (38.9) для дифференциального оператора.

В первом приближении *однородное* дифференциальное уравнение после преобразования растяжения имеет вид

$$R_0^0[v] = 0. \quad (38.17)$$

Это дифференциальное уравнение с независимой переменной σ и постоянными коэффициентами. Построим такое решение уравнения (38.17), которое остается ограниченным при $\varepsilon \rightarrow +0$ и компенсирует невязку между фактическими краевыми условиями, наложенными в точке $x=0$, и теми условиями, которым удовлетворяет $u_0(x)$, т. е. потребуем, чтобы

$$\left. \frac{d^i v}{dx^i} \right|_{x=0} = \begin{cases} 0, & i=0, 1, \dots, s-p-1, \\ -\left(\frac{d^i u_0}{dx^i} \right)_{x=0}, & i=s-p, \dots, s-1, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\left. \frac{d^i v}{d\sigma^i} \right|_{\sigma=0} = \begin{cases} 0, & i=0, 1, \dots, s-p-1, \\ -\varepsilon^i u_0^{(i)}(0), & i=s-p, \dots, s-1. \end{cases} \quad (38.18)$$

Дифференциальное уравнение (38.17) имеет порядок n . Его характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^m Q_0(\lambda) = 0$. Пусть λ_j , $j=1, 2, \dots, n-m$, означают нули $Q_0(\lambda)$, взятые в таком порядке, что $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ имеют отрицательные действительные части. Для простоты мы предположим, что эти последние λ_j различны, хотя это несущественно.

Функции σ^j , $j=0, 1, \dots, m-1$, и $e^{\lambda_j \sigma}$, $j=1, 2, \dots, n-m$, образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (38.17). Отбросим $n-m-p$ решений $e^{\lambda_j \sigma}$, $j > p$, так как $e^{\lambda_j \sigma} = e^{\lambda_j x/\varepsilon}$ расходятся для этих j при $\varepsilon \rightarrow +0$. Из оставшихся $m+p$ частных решений можно составить такую линейную комбинацию, которая удовлетворит s краевым условиям (38.18). Чтобы показать это, определим сначала постоянные \tilde{c}_j , $j=1, 2, \dots, p$, так, чтобы

$$\left(\frac{d^i}{d\sigma^i} \sum_{j=1}^p \tilde{c}_j e^{\lambda_j \sigma} \right)_{\sigma=0} = -\varepsilon^i u_0^{(i)}(0), \quad i=s-p, \dots, s-1, \quad (38.19)$$

т. е. так, чтобы была выполнена вторая группа краевых условий из (38.18). Матрица коэффициентов в левой части является матрицей Вандермонда. Вследствие предположения о несовпаде-

нии $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ее определитель не равен нулю. Поэтому уравнения (38.19) имеют единственное решение, которое, как легко видеть, имеет вид

$$\tilde{c}_j(\varepsilon) = \varepsilon^{s-p} c_j^0(\varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (38.20)$$

где $c_j^0(\varepsilon)$ — многочлены относительно ε . Следовательно, функция

$$v_0^0 = \varepsilon^{s-p} \sum_{j=1}^p c_j^0 e^{\lambda_j x} = \varepsilon^{s-p} \sum_{j=1}^p c_j^0 e^{\lambda_j x/\varepsilon} \quad (38.21)$$

является решением уравнения (38.17), удовлетворяющим второй группе краевых условий из (38.18). Первая группа этих краевых условий может быть удовлетворена — без нарушения выполнения второй группы условий — посредством вычитания из выражения (38.21) частичной суммы его маклореновского ряда вплоть до членов степени $s-p-1$. Эта частичная сумма

$$\varepsilon^{s-p} \sum_{j=1}^p c_j^0 \sum_{k=0}^{s-p-1} \lambda_j^k \frac{\sigma^k}{k!} = -\varepsilon \alpha_0^0$$

имеет вид многочлена относительно ε и x , умноженного на ε . Кроме того, она является решением (38.17). Таким образом, мы нашли функцию

$$u_0 + v_0^0 + \varepsilon \alpha_0^0, \quad (38.22)$$

которая удовлетворяет в точности всем s краевым условиям при $x=0$ и которая, как можно ожидать, будет аппроксимировать решение полной задачи во всех замкнутых подинтервалах из $0 \leq x < 1$ лучше, чем u_0 .

Построение, приведшее к функции (38.22), может быть повторено аналогично в правой граничной точке $x=1$. Это приводит к функции

$$u_0 + v_0^1 + \varepsilon \alpha_0^1, \quad (38.23)$$

которая, как мы надеемся, будет более хорошим приближением во всех замкнутых подинтервалах из $0 < x \leq 1$. Здесь снова α_0^1 — многочлен относительно ε и x , в то время как

$$v_0^1 = \varepsilon^{t-q} \sum_{j=1}^q c_j^1 e^{\mu_j(x-1)/\varepsilon}. \quad (38.24)$$

Числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ являются корнями уравнения $Q_1(\mu) = 0$ с положительными действительными частями и предполагаются различными.

Две формулы (38.22) и (38.23) можно объединить специальным образом в одно разложение, которое будет служить равномерным приближением во всем интервале $0 \leq x \leq 1$. Пусть $\psi(x)$ — такая бесконечно дифференцируемая функция x , что

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \delta, \\ 0, & 2\delta \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где δ — малое положительное число. Положим

$$\begin{aligned} a_0 &= \psi(x) a_0^0 + \psi(1-x) a_0^1, \\ v_0 &= \psi(x) v_0^0 + \psi(1-x) v_0^1. \end{aligned} \quad (38.25)$$

Тогда можно ожидать, что

$$u_0 + v_0 + \varepsilon a_0 \quad (38.26)$$

будет лучшим приближением, чем u_0 , в интервале $0 \leq x \leq 1$.

Мы отложим на время обсуждение этого утверждения, так же как и построение более высоких приближений, и проиллюстрируем рассмотренное до сих пор простым примером.

Пример. Пусть полная краевая задача ставится следующим образом:

$$\begin{aligned} L|u| &\equiv \varepsilon^2 u''' + \varepsilon \sin \frac{\pi x}{2} u'' - u' = -1 \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) &= u'(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned}$$

Тогда $n=3$, $m=1$, $s=2$, $t=1$, $a_1(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$, $b_0(x) = 1$. Так как

$$\frac{\pi x}{2} + O(x^3) = a_1(x) = 1 + O((x-1)^2),$$

то

$$Q_0(\lambda) \equiv \lambda^2 - 1 \quad \text{и имеет нули } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,$$

$$Q_1(\mu) \equiv \mu^2 + \mu - 1 \quad \text{и имеет нули } \mu_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \mu_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

Следовательно, $p=q=1$, и укороченная задача ставится следующим образом:

$$u' = 1 \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 0.$$

Отсюда

$$u_0(x) = x.$$

Кроме того, для $\sigma = \frac{x}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned}\varepsilon L[u] &= \frac{d^3u}{d\sigma^3} + \sin \frac{\pi\varepsilon\sigma}{2} \cdot \frac{d^2u}{d\sigma^2} - \frac{du}{d\sigma} = \\ &= \left(\frac{d^3u}{d\sigma^3} - \frac{du}{d\sigma} \right) + \varepsilon \frac{\pi\sigma}{2} \frac{d^2u}{d\sigma^2} + O(\varepsilon^2) = \\ &= R_0^0[u] + \varepsilon R_1^0[u] + \dots\end{aligned}$$

Аналогично для $\tau = \frac{x-1}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned}\varepsilon L[u] &= \frac{d^3u}{d\tau^3} + \sin \frac{(1+\varepsilon\tau)\pi}{2} \frac{d^2u}{d\tau^2} - \frac{du}{d\tau} = \\ &= \frac{d^3u}{d\tau^3} + \frac{d^2u}{d\tau^2} - \frac{du}{d\tau} + O(\varepsilon^2) = R_0^1[u] + \dots\end{aligned}$$

Отсюда и из (38.18) следует, что v_0^0 должна удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}R_0^0[v_0^0] &= 0, \\ \frac{dv_0^0}{d\sigma} \Big|_{\sigma=0} &= -\varepsilon.\end{aligned}$$

Поэтому v_0^0 , которая должна быть построена с помощью частного решения $e^{-\sigma}$ уравнения $R_0^0[u]=0$, равна

$$v_0^0 = \varepsilon e^{-\sigma} = \varepsilon e^{-x/\varepsilon}.$$

Далее, получаем

$$\varepsilon \alpha_0^0 = -\varepsilon.$$

Аналогично v_0^1 должна удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}R_0^1[v_0^1] &= 0, \\ v_0^1(1) &= -u_0^{(1)}(1) = -1\end{aligned}$$

и должна быть построена с помощью $\exp\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\tau\right]$, т. е.

$$v_0^1 = -\exp\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{x-1}{\varepsilon}\right].$$

Наконец $\alpha_0^1 \equiv 0$, так как нет других граничных условий при $x=1$.

Суммируя эти результаты, получим приближение для решения полной задачи

$$U = x + \varepsilon\psi(x)e^{-x/\varepsilon} - \psi(1-x)\exp\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{x-1}{\varepsilon}\right] - \varepsilon\psi(x). \quad (38.27)$$

38.3. Асимптотика более высокого порядка

Следуя Вишику и Люстернику [1], мы хотим обобщить формулу (38.26) и получить формулу

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r \varepsilon^r + \sum_{r=0}^{\infty} v_r \varepsilon^r + \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \varepsilon^r. \quad (38.28)$$

Это выражение будет формальным решением полной краевой задачи в некотором смысле; мы сейчас объясним это подробно. Подстановка (38.28) в дифференциальное уравнение (38.1) дает

$$L \left[\sum_{r=0}^{\infty} u_r \varepsilon^r + \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \varepsilon^r \right] + L \left[\sum_{r=0}^{\infty} v_r \varepsilon^r \right] = f(x). \quad (38.29)$$

Функции u_r , α_r , v_r , которые будут далее построены, зависят как от x , так и от ε . Поэтому ряды в (38.28) значительно более сложны, чем ряды только по степеням ε . Кроме того, «сглаживающая» функция $\psi(x)$, появляющаяся при построении, вносит посторонние члены, которые делают понятие «формального решения», использовавшееся ранее, неприменимым в данном случае.

Если правую часть в выражении

$$\begin{aligned} L \left[\sum_{r=0}^{\infty} u_r \varepsilon^r + \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \varepsilon^r \right] - f(x) &\equiv \\ &\equiv \left[-M + \sum_{\nu=1}^{n-m} \varepsilon^\nu \alpha_\nu \frac{d^{m+\nu}}{dx^{m+\nu}} \right] \left[u_0 + \sum_{r=1}^{\infty} (u_r + \alpha_{r-1}) \varepsilon^r \right] - f(x) \end{aligned}$$

формально разложить в ряд по степеням ε и все коэффициенты приравнять нулю, то получится рекуррентная последовательность дифференциальных уравнений вида

$$M[u_r] = F_r, \quad r = 0, 1, \dots, \quad (38.30)$$

где $F_0 = -f$, а F_r , $r > 0$, являются линейными дифференциальными выражениями относительно u_j , α_j , $j < r$, с голоморфными в интервале $0 \leq x \leq 1$ коэффициентами. Предположим, что мы уже определили $u_j(x, \varepsilon)$ и $\alpha_j(x, \varepsilon)$, $j < r$, как бесконечно дифференцируемые функции в интервале $0 \leq x \leq 1$ и многочлены относительно ε . Тогда уравнение (38.30) имеет единственное решение, удовлетворяющее m краевым условиям укороченной задачи. Тем самым u_r определена по индукции. Функция u_r будет бесконечно дифференцируемой, если бесконечно дифференцируемы $u_j(x, \varepsilon)$, $\alpha_j(x, \varepsilon)$, $j < r$. Кроме того, она будет многочленом относительно ε .

Второе слагаемое в левой части (38.29) можно записать, введя независимую переменную $\sigma = \frac{x}{\varepsilon}$, в виде

$$L \left[\sum_{r=0}^{\infty} v_r \varepsilon^r \right] = \varepsilon^{-m} \left[\sum_{r=0}^{\infty} R_r^0 \varepsilon^r \right] \sum_{r=0}^{\infty} v_r \varepsilon^r, \quad (38.31a)$$

или, введя независимую переменную $\tau = \frac{x-1}{\varepsilon}$, в виде

$$L \left[\sum_{r=0}^{\infty} v_r \varepsilon^r \right] = \varepsilon^{-m} \left[\sum_{r=0}^{\infty} R_r^1 \varepsilon^r \right] \sum_{r=0}^{\infty} v_r \varepsilon^r. \quad (38.31b)$$

Разлагая правую часть (38.31a) в ряд по степеням ε и приравнявая все члены ряда нулю, получим рекуррентную последовательность дифференциальных уравнений вида

$$R_0^0 v_r = G_r^0, \quad r \geq 0, \quad G_0^0 \equiv 0, \quad (38.32a)$$

где G_r — линейные дифференциальные выражения относительно v_j , $j < r$, коэффициенты которых являются многочленами относительно σ .

Аналогичная последовательность дифференциальных уравнений получается таким же образом из (38.31b)

$$R_0^1 v_r = G_r^1, \quad r \geq 0, \quad G_0^1 \equiv 0. \quad (38.32b)$$

Обращаясь к (38.32a), мы построим сначала последовательность частных решений v_r^0 , $r=0, 1, \dots$, которые имеют вид

$$v_r^0 = \varepsilon^{s-p} \sum_{i=1}^p c_{ir}^0(\sigma, \varepsilon) e^{\lambda_i \sigma}, \quad r=0, 1, \dots, \quad (38.33)$$

где c_{ir}^0 — многочлены по обоим переменным. Для $r=0$ мы уже определили решение v_0^0 такого вида. При индуктивном предположении, что все v_j^0 , $j < r$, имеют вид (38.33), функция G_r^0 при $v_j = v_j^0$ также будет функцией такого вида. Так как R_0^0 есть линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то на основе метода неопределенных коэффициентов мы можем заключить, что уравнение (38.32a) имеет частное решение вида (38.33)

$$\tilde{v}_r^0 = \varepsilon^{s-p} \sum_{i=1}^p \tilde{c}_{ir}(\sigma, \varepsilon) e^{\lambda_i \sigma}, \quad r=0, 1, \dots$$

Прибавляя к этому частному решению решение однородного уравнения вида

$$\tilde{\tilde{v}}_r^0 = \varepsilon^{s-p} \sum_{i=1}^p \gamma_{ir} e^{\lambda_i \sigma},$$

где $\gamma_{ir}, i=1, \dots, p$, — постоянные коэффициенты, которые могут зависеть от ε , мы можем добиться того, чтобы функция

$$v_r^0 = \tilde{v}_r^0 + \tilde{\tilde{v}}_r^0$$

удовлетворяла p условиям

$$\left. \frac{d^j v_r^0}{d\sigma^j} \right|_{\sigma=0} = -\varepsilon^j u_r^{(j)} \Big|_{x=0}, \quad j = s-p, \dots, s-1; \quad (38.34)$$

которые аналогичны второй группе условий из (38.18). Для этого нужно решить однозначно разрешимую систему p линейных алгебраических уравнений относительно $\gamma_{ir}, i=1, 2, \dots, p$. Тогда оказывается, что γ_{ir} являются многочленами относительно ε . Определенная таким образом функция v_r^0 является решением уравнения (38.32a), а $u_r + v_r^0$ удовлетворяет p крайевым условиям высшего порядка в точке $x=0$.

Мы хотим также удовлетворить первым $s-p$ крайевым условиям (38.18). С этой целью разложим v_r^0 в ряд по степеням σ с центром разложения в точке $\sigma=0$ и заметим, что частичная сумма этого ряда вплоть до членов порядка σ^{s-p-1} аннулируется оператором R_0^j . Обозначим эту частичную сумму через $-\varepsilon \alpha_r^0$. Функция α_r^0 является многочленом относительно x и ε , что можно проверить непосредственно. Сумма $u_r + v_r^0 + \varepsilon \alpha_r^0$ удовлетворяет теперь всем s крайевым условиям в точке $x=0$.

Аналогичным образом можно построить последовательность функций $u_r + v_r^1 + \varepsilon \alpha_r^1$, удовлетворяющих всем крайевым условиям в точке $x=1$. Наконец, определим функции v_r и α_r следующим образом:

$$\begin{aligned} v_r &= \psi(x) v_r^0 + \psi(1-x) v_r^1, \\ \alpha_r &= \psi(x) \alpha_r^0 + \psi(1-x) \alpha_r^1. \end{aligned} \quad (38.35)$$

Мы хотим построить приближенное решение для нашей сингулярно возмущенной задачи с определенной точностью, например $O(\varepsilon^N)$. И здесь множитель ε^m в левой части (38.9) и (38.11) вносит дополнительную трудность. Ее можно обойти с помощью следующего видоизменения построения. Для $r \leq N$ поступаем так же, как и ранее. После этого вычисляем ряд дополнительных функций $\hat{v}_r^j, \hat{\alpha}_r^j, j=0, 1, r > N$, тем же самым способом, за исключением того, что крайевые условия (38.3) при $x=0$ и $x=1$ соответственно налагаем на $\hat{v}_r^j + \varepsilon \hat{\alpha}_r^j$, а не на $u_r + v_r^j + \varepsilon \alpha_r^j$, как ранее. Достаточно продолжать таким образом вплоть до $r=N+m$. Однако ввиду множителя ε^{s-p} в (38.33) и аналогич-

ного множителя ε^{t-q} в выражении для v_r^1 достаточно проделать это вплоть до

$$N_1 = N + m - \min(s - p, t - q). \quad (38.36)$$

Для упрощения обозначений мы опустим знак \sim у \hat{v}_r^j и \hat{a}_r^j и будем помнить, что при $N < r \leq N_1$ определение v_r^j и a_r^j изменено так, как было указано.

Покажем, что выражение

$$U_N = \sum_{r=0}^N u_r \varepsilon^r + \sum_{r=0}^{N_1} v_r \varepsilon^r + \varepsilon \sum_{r=0}^{N_1} a_r \varepsilon^r \quad (38.37)$$

является *формальным* приближением решения u полной задачи в том смысле, что

$$L[U_N] - f(x) = \varepsilon^{N+1} g_N(x, \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (38.38)$$

где $g_N(x, \varepsilon)$ ограничена в области $0 \leq x \leq 1, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 — некоторая постоянная. Из нашего построения ясно также, что U_N удовлетворяет всем краевым условиям. Прежде всего из определения u_r непосредственно видно, что

$$L \left[\sum_{r=0}^N u_r \varepsilon^r + \varepsilon \sum_{r=0}^{N_1} a_r \varepsilon^r \right] = \varepsilon^{N+1} h_1(x, \varepsilon), \quad (38.39)$$

где $h_1(x, \varepsilon)$ — равномерно ограниченная функция в указанной области. Далее заметим, что

$$\varepsilon^m L[u] \equiv \sum_{r=0}^{N_1} R_r^0[u] \varepsilon^r + \varepsilon^{N_1+1} \tilde{R}_{N_1+1}^0[u],$$

где $\tilde{R}_{N_1+1}^0$ — дифференциальный оператор по переменной σ порядка n с ограниченными коэффициентами. Это следует из разложения левой части (38.9) до членов степени N_1 с остаточным членом. Следовательно, в интервале $0 \leq x \leq \delta$, согласно построению v_r^0 , мы имеем

$$L \left[\sum_{r=0}^{N_1} v_r \varepsilon^r \right] = \varepsilon^{N+1} h_2(x, \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad 0 \leq x \leq \delta, \quad (38.40)$$

где $h_2(x, \varepsilon)$ — равномерно ограниченная функция. В действительности $h_2(x, \varepsilon)$ является даже экспоненциально малой относительно ε , кроме пограничного слоя ширины $O(\varepsilon)$. Аналогичная оценка

$$L \left[\sum_{r=0}^{N_1} v_r \varepsilon^r \right] = \varepsilon^{N+1} h_3(x, \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad 1 - \delta \leq x \leq 1, \quad (38.41)$$

имеет место для пограничного слоя на правом конце, где $v_r = v_r^1$. В оставшемся интервале $\delta \leq x \leq 1 - \delta$ все функции v_r вместе со всеми своими производными по x имеют равномерную оценку порядка $O\left(e^{-\frac{\delta}{2\varepsilon}}\right)$, так что тем более

$$L\left[\sum_{r=0}^{N_1} v_r \varepsilon^r\right] = \varepsilon^{N+1} h_4(x, \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \delta \leq x \leq 1 - \delta, \quad (38.42)$$

где $h_4(x, \varepsilon)$ — ограниченная функция. Объединение формул (38.39) — (38.42) дает (38.38)

Погрешность $w_N = U_N - u$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L[w_N] = \varepsilon^{N+1} g_N(x, \varepsilon) \quad (38.43)$$

с однородными краевыми условиями (38.3). Однако доказать малость w_N , исходя из малости правой части дифференциального уравнения, — довольно трудная задача. Очевидно, что для этого потребуются некоторые дополнительные предположения. В самом деле, асимптотическое поведение решений существенным образом зависит от поведения корней характеристического уравнения (38.7). В нашем формальном построении мы использовали значение этих корней только в граничных точках $x=0$ и $x=1$. Но в интервале $0 < x < 1$ могут существовать точки поворота; а это, как мы знаем, может коренным образом изменить асимптотический характер решений. Даже если в интервале изменяется только знак действительных частей некоторых корней, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u(x, \varepsilon)$$

может не существовать во всем интервале (см. Вазов [3]).

Вишик и Люстерник устанавливают малость погрешности с помощью методов, которые хорошо применимы также и к уравнениям в частных производных, так как у них этим уравнениям уделяется большое внимание. Поэтому при доказательстве они совсем не используют фундаментальные системы. Вместо этого они привлекают методы, развитые в современной теории уравнений в частных производных. В частности, погрешность оценивается с помощью соответствующей нормы, специально приспособляемой к характеру каждой задачи, а не обязательно по максимуму модуля. Мы не будем останавливаться здесь на этой теории, которая достаточно сложна. Для ознакомления с дополнительными предположениями, которые являются довольно ограничительными и при которых Вишик и Люстерник устанавливают малость погрешности, мы отсылаем к их статье [1].

Пример. В заключение рассмотрим пример из предыдущего раздела. Приближенное решение U , вычисленное по формуле (38.27), дает

$$L[U] + 1 = \left(x - x^3 + \sin \frac{\pi x}{2}\right) e^{-\frac{x}{\varepsilon}}, \quad 0 \leq x \leq \delta, \quad (38.44)$$

$$L[U] + 1 = -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 \left(\sin \frac{\pi x}{2} - 1\right) \varepsilon^{-1} e^{\frac{(\sqrt{5}-1)(x-1)}{2\varepsilon}}, \quad 1-\delta \leq x \leq 1. \quad (38.45)$$

$L[U] + 1 = O(\varepsilon)$ равномерно в интервале $\delta \leq x \leq 1 - \delta$.

Правую часть в (38.44) можно записать в виде $\varepsilon \left(\sigma - \varepsilon^2 \sigma^3 + \varepsilon^{-1} \sin \frac{\pi \varepsilon \sigma}{2}\right) e^{-\sigma}$, откуда следует, что $L[U] + 1 = O(\varepsilon)$ в интервале $0 \leq x \leq \delta$. Легко проверить, что правая часть в (38.45) также равна $O(\varepsilon)$, и мы заключаем, что

$$L[U] + 1 = \varepsilon g(x, \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

где $g(x, \varepsilon)$ — ограниченная функция. Фактически это лучше на один порядок, чем можно было ожидать в этом случае на основании общей теории при $N_1 = 1$. Дело, однако, в том, что слагаемое $(v_1 + \varepsilon \alpha_1) \varepsilon$, которое нужно прибавить к U , чтобы получить приближение, обозначаемое в нашей теории через U_0 , равно в этом примере нулю.

Задача 38.1. Вычислить в предыдущем примере приближение $U_1(x, \varepsilon)$.

Задача 38.2. Вычислить асимптотически решение u в данном примере в интервале $0 \leq x \leq 1$ в пределах погрешности порядка $O(\varepsilon)$ с помощью общей асимптотической теории гл. VII. (Указание: сначала свести задачу к однородному уравнению с помощью замены $u = z + x$.)

39. Начальная задача для нелинейных уравнений. Качественная теория

39.1. Введение

В предыдущем параграфе этой главы мы имели дело главным образом со скалярными уравнениями, а не с системами уравнений первого порядка. Причина этого заключается в том, что среди сингулярно возмущенных задач для линейных дифференциальных уравнений наиболее важными и наиболее полно изученными являются, по-видимому, двухточечные краевые задачи. Такие двухточечные краевые задачи более естественно

связаны со скалярными уравнениями, чем с системами, и переход от скалярного уравнения к эквивалентной системе не упрощает исследования. Тем не менее для систем, как уже упоминалось ранее, также были получены очень интересные общие результаты (см. Харрис [1], [2], [3]).

Для изучения начальных задач вообще и начальных задач, включающих сингулярные возмущения, в частности более удобны системы первого порядка, которые допускают более простую геометрическую интерпретацию, чем отдельные скалярные уравнения. Поэтому в большинстве работ, посвященных начальным задачам, рассматриваются именно системы. Во многих задачах этого типа, связанных с физическими явлениями, независимая переменная означает время. Поэтому мы будем обозначать ее через t и предполагать в большинстве случаев, что она вещественна.

С целью предварительного ознакомления мы рассмотрим простейший тип таких задач, а именно задачу, включающую два скалярных уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (39.1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = \alpha, \quad y(0) = \beta, \quad (39.2)$$

где α и β — не зависящие от ε постоянные, $\varepsilon > 0$. Особенность системы (39.1) состоит в том, что правые части не зависят явно от t . Дифференциальные уравнения с таким свойством часто называют *автономными*.

Системе (39.1) соответствует укороченная система

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= f(x_0, y_0), \\ 0 &= g(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (39.3)$$

Решения (39.1) и (39.3) определяют траектории $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ и $(x_0(t), y_0(t))$ на плоскости (x, y) . Траектории, соответствующие укороченной системе (39.3), являются дугами кривой Γ , определяемой уравнением

$$\Gamma: g(x, y) = 0. \quad (39.4)$$

Предположим, что уравнение (39.4) определяет по крайней мере одну действительную функцию

$$y = \varphi(x). \quad (39.5)$$

В этом вводном разделе мы не будем давать строгих формулировок, связанных с предположениями относительно функций.

Чтобы получить некоторое представление о поведении траекторий системы (39.1) при малых ϵ , заметим, что они всюду касательны к векторному полю $(f(x, y), \epsilon^{-1}g(x, y))$. Во всех не зависящих от ϵ точках, которые не лежат на Γ , это векторное поле для малых ϵ почти параллельно оси y . Только в точках, в которых величина $g(x, y)$ имеет порядок ϵ , т. е. в узкой полосе бесконечно малой ширины около кривой Γ , векторное поле ведет себя иным образом. Следовательно, если точка (α, β) не лежит на Γ , то решение задачи (39.1), (39.2) определяет при $t > 0$ траекторию, которая почти параллельна оси y до тех пор, пока она не достигнет этой узкой полосы вблизи Γ , что может произойти или не произойти. Если эта узкая полоса достигнута, то, вероятно, траектория будет оставаться вблизи Γ , по крайней мере для определенного интервала значений t . Так как длины векторов поля неограниченно возрастают при $\epsilon \rightarrow 0$, кроме точек, близких к Γ , то эта узкая полоса будет достигаться траекторией (при условии, конечно, что это произойдет) при значении t , которое стремится к нулю вместе с ϵ , по крайней мере при $g(x, y) \neq 0$.

Таким образом, мы ожидаем, что для $t > 0$ решение задачи (39.1), (39.2) при $\epsilon \rightarrow 0$ будет либо расходиться, либо сходиться к функциям $x_0(t)$, $y_0(t)$, определяемым уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= f(x_0, \Phi(x_0)), \\ x_0(0) &= \alpha, \\ y_0(t) &= \Phi(x_0). \end{aligned} \quad (39.6)$$

Уравнение (39.4) часто определяет более чем одну функцию $\Phi(x)$. В этом случае выбор функции $\Phi(x)$ в (39.6) зависит некоторым образом (требующим точного аналитического описания) от положения точки (α, β) относительно кривой Γ .

Геометрическая иллюстрация, приведенная на рис. 39.1, показывает еще одну важную особенность связи между полной и укороченной задачами: вообще говоря, сходимости решений уже не будет иметь места после того, как траектория достигнет достаточно малой окрестности точки, в которой касательная к Γ параллельна оси y , т. е. точки, в которой $\frac{dg}{dy} = 0$.

Начальные задачи этого типа рассматривались вначале (за исключением ранней статьи Нагумо [1]) в связи с явлениями, называемыми *релаксационными колебаниями* (см. Фландерс и Стокер [1], Хааг [1] и [2], Дородницын [1] и Картрайт [1]).

Обобщения на системы более высокого порядка, чем второй, сделаны, например, Фридрихсом и Вазовым [1], Левинсоном [1]. Систематическое изучение качественного аспекта таких сингулярно возмущенных задач можно найти в серии статей Тихонова ([1], [2] и [3]).

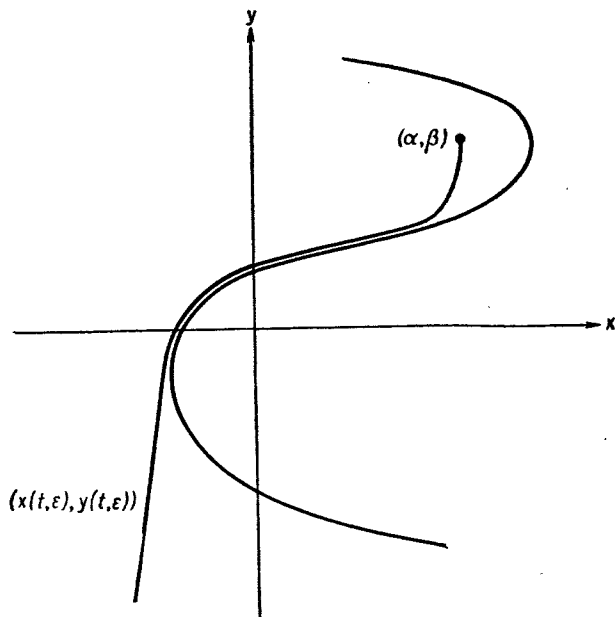


Рис. 39.1.

Для неавтономной системы, т. е. когда правая часть уравнения (39.1) зависит явно от t , математическая теория начальных задач почти не отличается от автономного случая, но геометрическая интерпретация становится менее простой. В этом случае можно рассмотреть траекторию $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), t)$ в трехмерном пространстве. Уравнение $g(x, y, t) = 0$ определяет теперь поверхность, и можно повторить предыдущие рассуждения. Если правая часть достаточно регулярно зависит от ε , то это также не вызывает серьезных усложнений.

Если x и y в дифференциальном уравнении (39.1) — векторы, а не скаляры, то задача усложняется. В качестве подготовки к теореме, которая будет доказана в следующем разделе, мы рассмотрим геометрическую ситуацию в случае, когда x — скаляр, а y — двумерный вектор с компонентами y_1, y_2 .

Кривая Γ , определяемая (39.4), является теперь кривой в трехмерном (x, y_1, y_2) -пространстве, как показано на рис. 39.2. При малых ε векторное поле, определяемое уравнением (39.1), почти параллельно плоскости (y_1, y_2) . Кроме того, при фиксированном x , например $x = \alpha$, оно почти пропорционально —

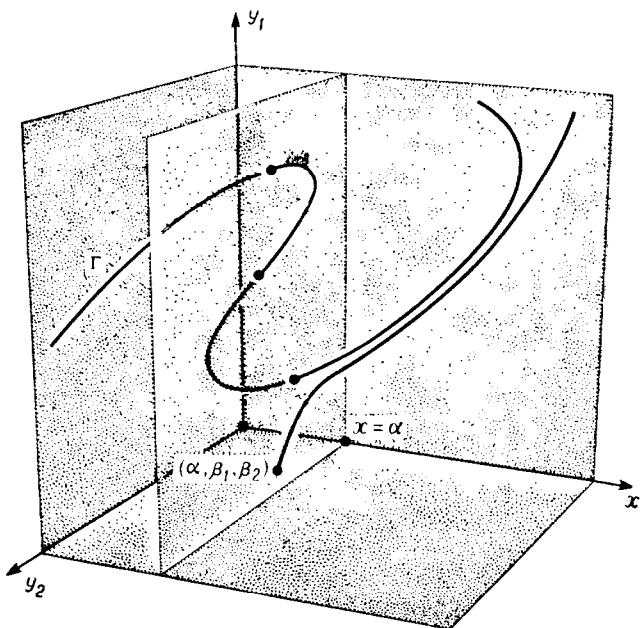


Рис. 39.2.

с большим множителем пропорциональности $\frac{1}{\varepsilon}$ — двумерному векторному полю $g(\alpha, y)$ на плоскости $x = \alpha$. Это векторное поле определяет вспомогательную дифференциальную систему

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\alpha, y) \quad (39.7)$$

в плоскости $x = \alpha$.

В окрестности порядка $O(\varepsilon)$ кривой Γ три компоненты векторного поля $(f, \varepsilon^{-1}g)$ сравнимы по величине, и поэтому естественно предположить, что траектория полной системы, близкая к Γ , будет оставаться вблизи Γ и для последующих моментов t , по крайней мере в некотором интервале значений t .

Предполагая, что осуществляется этот случай, оставим пока в стороне вопрос о том, когда траектория, выходящая из точки

(39.2), не лежащей на Γ , будет приближаться к Γ . Далее заметим, что точки, в которых Γ пересекается с плоскостью $x=\alpha$, являются особыми точками дифференциальной системы (39.7) в том смысле, что правая часть там равна нулю. Характер нашей сингулярно возмущенной задачи, естественно, связан с типом этих особенностей. Особые точки автономной системы, такой, как (39.7), и их связь с поведением траекторий широко освещены в литературе (см., например, Коддингтон и Левинсон [2]). Грубо говоря, они делятся на два класса: устойчивые и неустойчивые особые точки. Устойчивые особые точки обладают тем свойством, что как только траектория станет близкой к особой точке, она остается близкой к ней и для всех последующих значений t . Более строгое описание будет дано в следующем разделе. Траектория системы (39.7), выходящая из некоторой точки $y=\beta$ в плоскости $x=\alpha$, может вести себя одним из следующих способов: она может стать неограниченной при $t \rightarrow \infty$, может виться вокруг периодического решения подобно спирали или может приближаться к устойчивой особой точке при $t \rightarrow \infty$. Если траектория системы (39.7) с начальной точкой $y=\beta$ в плоскости $x=\alpha$ стремится к устойчивой особой точке на Γ , то говорят, что начальная точка (α, β) принадлежит области влияния этой точки на Γ . Следует помнить, что Γ может иметь более чем одну общую точку с плоскостью $x=\alpha$, так что различные начальные точки на одной и той же плоскости $x=\alpha$ могут принадлежать траекториям с совершенно различным асимптотическим поведением.

Предыдущее рассмотрение не является строгим. В следующем разделе мы дадим точные определения и доказательства, следуя изложению Тихонова [3].

39.2. Теорема Тихонова о сходимости

Теория Тихонова будет развита здесь только для случая последнего примера предыдущего раздела. Все основные моменты доказательств содержатся в этом частном случае и более легко представимы геометрически, чем в общем случае. Таким образом, мы рассмотрим дифференциальную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= g(x, y), \end{aligned} \tag{39.8}$$

где x — скаляр, y — двумерный вектор. Все переменные вещественны и $\varepsilon > 0$.

Предположение (А). Функции f и g в (39.8) непрерывны в некоторой открытой области Ω пространства (x, y) .

Предположение (В). Существует такая двумерная векторная функция $\varphi(x)$, непрерывная в интервале $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$, что точки $(x, \varphi(x))$, $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$, принадлежат Ω и

$$g(x, \varphi(x)) \equiv 0.$$

Функцию $\varphi(x)$ будем называть *корнем* уравнения $g(x, y) = 0$. Не исключено, что $g(x, y) = 0$ может иметь другие корни наряду с $\varphi(x)$.

Предположение (С). Существует такое не зависящее от x число $\eta > 0$, что из соотношений

$$\|y - \varphi(x)\| < \eta, \quad y \neq \varphi(x) \quad \text{при} \quad \xi_1 \leq x \leq \xi_2$$

следует

$$g(x, y) \neq 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 \leq x \leq \xi_2.$$

Корень $\varphi(x)$, удовлетворяющий этому условию, будем называть *изолированным корнем* в интервале $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$.

Нам потребуется понятие асимптотической устойчивости особых точек дифференциальных уравнений.

Определение. Пусть

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z, \tau)$$

— векторная система вещественных дифференциальных уравнений. Точка $z = z_0$ называется *устойчивой особой точкой* этой системы при $\tau \rightarrow +\infty$, если

(а) $F(z_0, \tau) \equiv 0$ при $\tau \geq 0$;

(б) для каждого $\mu > 0$ существует такое $\delta(\mu) > 0$, что всякое решение $z(\tau)$ дифференциальной системы, для которого $\|z(0) - z_0\| < \delta(\mu)$, существует при всех $\tau > 0$ и удовлетворяет неравенству $\|z(\tau) - z_0\| < \mu$.

Устойчивая особая точка называется *асимптотически устойчивой*, если, кроме того,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} z(\tau) = z_0$$

для всех тех решений, для которых $\|z(0) - z_0\| < \delta(\mu)$.

Функция $\delta(\mu)$ определяется, конечно, не единственным образом. По аналогии с понятием модуля непрерывности верхняя грань $\delta(\mu)$ всех допустимых значений $\delta(\mu)$ в данном выше определении может быть названа «модулем (асимптотической) устойчивости».

Определение. Систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y), \quad (39.9)$$

в которой x является параметром, будем называть *уравнением пограничного слоя, относящимся к системе (39.8)* ¹⁾.

Предположение (D). *Особая точка $y = \varphi(x)$ уравнения пограничного слоя (39.9) асимптотически устойчива при всех x из интервала $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$.*

Если предположение (D) выполняется, то корень $\varphi(x)$ будем для краткости называть *устойчивым корнем* в интервале $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$.

В соответствии с нашей прежней терминологией мы называем *полной задачей* задачу решения дифференциального уравнения (39.8) с начальными условиями

$$x = \alpha, \quad y = \beta \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (39.10)$$

Укороченная задача определяется здесь соотношениями

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \varphi(x)), \quad (39.11)$$

$$y = \varphi(x),$$

$$x = \alpha \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (39.12)$$

Дифференциальное уравнение (39.11) получается из (39.8), если положить в (39.8) $\varepsilon = 0$ и взять корень $y = \varphi(x)$ уравнения $g(x, y) = 0$.

Предположение (E). *Как полная, так и укороченная задачи имеют единственные решения в интервале $0 \leq t \leq T$.*

Фактически предположение (E) является в какой-то мере излишним, так как, изменяя немного приводимые ниже рассуждения, можно показать, что из существования решения укороченной задачи на всем интервале $0 \leq t \leq T$ следует, что решение полной задачи также существует на том же самом интервале.

В связи с тем, что в уравнение пограничного слоя (39.9) входит параметр x , возникает довольно тонкий вопрос, касающийся устойчивости особой точки $\varphi(x)$, так как теперь модуль устойчивости также будет зависеть от x и, возможно, не будет ограничен от нуля во всем интервале $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$.

Это может случиться на самом деле. В приводимой ниже задаче дается пример такого случая.

¹⁾ У Тихонова [3] оно называется присоединенным уравнением. — Прим. ред.

Задача 39.1. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -(y_1^2 + y_2^2 - x^2)^2 y_1 \sqrt{y_1^2 + y_2^2} - y_2,$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = -(y_1^2 + y_2^2 - x^2)^2 y_2 \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + y_1$$

имеет вид (39.9). Показать, что для особой точки $y_1 = y_2 = 0$ выполнены условия (А)—(Е). Найти модуль асимптотической устойчивости и доказать, что он не ограничен от нуля в интервале $0 \leq x \leq 1$. (Указание: преобразовать дифференциальное уравнение к полярным координатам, т. е. положить $y_1 = r \cos \theta$, $y_2 = r \sin \theta$.)

Дифференциальные уравнения такого типа, как в задаче 39.1, должны быть исключены из последующего рассмотрения. Поэтому мы введем

Предположение (F). *Модуль асимптотической устойчивости для особой точки $y = \varphi(x)$ уравнения пограничного слоя (39.9) имеет положительную нижнюю грань в интервале $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$.*

Если предположение (D) заменить более сильным предположением (D') из следующего раздела, то предположение (F) будет выполнено. Это следует из формулы (40.20), которая будет получена ниже.

Пусть $\mu > 0$. Множество точек в пространстве (x, y) , для которых выполнены неравенства

$$\|y - \varphi(x)\| < \mu, \quad \xi_1 \leq x \leq \xi_2,$$

будем называть « μ -трубкой». Такие множества встречаются в дальнейшем достаточно часто, и потому можно ввести для них специальное название. Множество

$$\|y - \varphi(x)\| = \mu, \quad \xi_1 \leq x \leq \xi_2,$$

образует «боковую границу» μ -трубки.

Лемма 39.1. *Пусть выполнены все предположения от (А) до (F). Пусть, далее, $\mu > 0$ — произвольное, но такое малое число, что замыкание μ -трубки лежит в области Ω . Тогда существуют такие два числа $\gamma(\mu)$ и $\varepsilon(\mu)$, что при $\varepsilon < \varepsilon(\mu)$ справедливо следующее утверждение: любое решение полного уравнения, которое при некотором значении $t = \tilde{t}$, $0 \leq \tilde{t} \leq T_1 < T$, находится внутри $\gamma(\mu)$ -трубки и при всех t из промежутка $\tilde{t} \leq t \leq T_1$ находится в замыкании μ -трубки, не достигает боковой поверхности μ -трубки при $\tilde{t} \leq t \leq T_1$.*

Говоря более простым, но менее точным языком, лемма утверждает, что для малых ε любое решение, которое при некотором t подходит близко к кривой $y = \varphi(x)$ при $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$, остается вблизи нее, пока x лежит в интервале $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$.

Доказательство. Пусть $\delta(\mu) > 0$ — такое не зависящее от x число, для которого утверждение, содержащееся в определении асимптотической устойчивости, справедливо по отношению к особой точке $y = \varphi(x)$ уравнения пограничного слоя (39.9) равномерно в интервале $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$. Такое $\delta(\mu)$ существует вследствие предположения (F). Покажем, что утверждение леммы 39.1 будет иметь место, если взять $\gamma(\mu) = \delta\left(\frac{\mu}{2}\right)$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда должны существовать последовательность $\{\varepsilon_n\}$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$$

и соответствующая последовательность решений

$$\left[x(t, \varepsilon_n), y(t, \varepsilon_n) \right]$$

полного уравнения, такие, что

$$\left[x(\tilde{t}_n, \varepsilon_n), y(\tilde{t}_n, \varepsilon_n) \right]$$

находится внутри $\gamma(\mu)$ -трубки при некотором значении \tilde{t}_n из промежутка $0 \leq \tilde{t}_n < T_1$, в то время как для некоторого \bar{t}_n из промежутка $\tilde{t}_n < \bar{t}_n \leq T_1$ это решение окажется на боковой поверхности μ -трубки. Кроме того, это решение находится внутри μ -трубки при всех t из промежутка $\tilde{t}_n \leq t < \bar{t}_n$. Так как по определению $\gamma(\mu) = \delta\left(\frac{\mu}{2}\right) \leq \frac{\mu}{2} < \mu$, то в промежутке $\tilde{t}_n < t < \bar{t}_n$ должно существовать наибольшее значение t , скажем $t = t_n$, при котором решение пересекает боковую поверхность $\gamma(\mu)$ -трубки.

Точки $\left[x(t_n, \varepsilon_n), y(t_n, \varepsilon_n), t_n \right]$ принадлежат компактному множеству пространства (x, y, t) , и, следовательно, из них можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можно предположить, что сама последовательность этих точек является сходящейся, т. е. что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n, \varepsilon_n) = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n, \varepsilon_n) = y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0.$$

Точка $\left[x, y \right]$ лежит на боковой поверхности $\gamma(\mu)$ -трубки и $0 \leq t_0 \leq T_1$.

Чтобы использовать предположение (D), сделаем в полной системе преобразование растяжения

$$\tau = \frac{t - t_n}{\varepsilon},$$

которое приводит систему к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon f(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= g(x, y). \end{aligned} \quad (39.13)$$

Тогда при $\varepsilon = \varepsilon_n$ рассматриваемые решения полной системы можно записать в виде $x(\varepsilon_n \tau + t_n, \varepsilon_n)$, $y(\varepsilon_n \tau + t_n, \varepsilon_n)$. Как функции τ они являются решениями системы (39.13) с начальными условиями

$$x = x^{(n)}(t_n, \varepsilon_n), \quad y = y^{(n)}(t_n, \varepsilon_n) \quad \text{при} \quad \tau = 0.$$

На основе известной теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начальных значений и от параметров (см., например, Коддингтон и Левинсон [2], гл. I, § 7) можно заключить, что пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}(\varepsilon_n \tau + t_n, \varepsilon_n) = u(\tau), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y^{(n)}(\varepsilon_n \tau + t_n, \varepsilon_n) = v(\tau)$$

существуют и равны решению задачи

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= 0, \\ \frac{dv}{d\tau} &= g(u, v), \end{aligned} \quad (39.14)$$

$$u = x^{(0)}, \quad v = y^{(0)} \quad \text{при} \quad \tau = 0.$$

Эти предельные соотношения выполняются равномерно в интервале $0 \leq \tau \leq \tau_0$ при условии, что соответствующее решение $x^{(n)}(t, \varepsilon_n)$, $y^{(n)}(t, \varepsilon_n)$ остается в Ω , что наверняка имеет место, поскольку оно находится в замыкании μ -трубки. Очевидно, что $u(\tau) \equiv x^{(0)}$, а функция $v(\tau)$ является решением уравнения пограничного слоя

$$\frac{dv}{d\tau} = g^{(0)}[x^{(0)}, v]$$

с начальным условием $v(0) = y^{(0)}$. Вследствие предположения (D) и определения $\gamma(\mu)$ траектория $(\dot{u}(\tau), v(\tau))$ никогда не выйдет

из замыкания $\frac{\mu}{2}$ -трубки при $\tau \rightarrow \infty$. Более того, при достаточно большом τ , скажем $\tau = \tau_0$, она находится в $\gamma(\mu)$ -трубке. Поэтому можно указать такое большое n , что решение $(x^{(n)}(t, \varepsilon_n), y^{(n)}(t, \varepsilon_n))$, т. е. $(x(\varepsilon_n \tau + t_n, \varepsilon_n), y(\varepsilon_n \tau + t_n, \varepsilon_n))$, будет настолько близко к $(u(\tau), v(\tau))$ при $0 \leq \tau \leq \tau_0$, что оно также будет находиться в $\gamma(\mu)$ -трубке при $\tau = \tau_0$ и никогда в этом интервале не выйдет за пределы, скажем, $\frac{3}{4}$ -трубки. Но это противоречит предположению, что t_n является наибольшим значением t , при котором решение пересекает боковую поверхность $\gamma(\mu)$ -трубки. Тем самым лемма доказана.

Для удобства формулировки теоремы Тихонова введем еще одно понятие.

Определение. Говорят, что точка $(\alpha, \beta) \in \Omega$, $\xi_1 \leq \alpha \leq \xi_2$, принадлежит области влияния устойчивого корня $y = \varphi(x)$, если решение задачи

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\alpha, y), \quad y(0) = \beta$$

существует и остается в Ω при всех $\tau > 0$ и при $\tau \rightarrow +\infty$ стремится к $\varphi(\alpha)$.

Теорема 39.1. Пусть выполнены предположения от (A) до (F), и пусть точка (α, β) принадлежит области влияния корня $y = \varphi(x)$. Тогда решение $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ полной начальной задачи (39.8), (39.10) связано с решением $x_0(t)$, $y_0(t) = \varphi(x_0(t))$ укороченной задачи (39.11), (39.12) предельными соотношениями

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t), \quad 0 \leq t \leq T_0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = y_0(t) = \varphi(x_0(t)), \quad 0 < t \leq T_0.$$

Здесь T_0 — произвольное число, такое, что $y = \varphi(x_0(t))$ является изолированным устойчивым корнем уравнения $g(x_0(t), y) = 0$ при $0 \leq t \leq T_0$. Сходимость равномерна в интервале $0 \leq t_0 \leq T_0$ для $x(t, \varepsilon)$ и в любом интервале $0 < t_1 \leq t \leq T_0$ для $y(t, \varepsilon)$.

Доказательство. Преобразование растяжения

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}$$

приводит полную систему (39.8) к виду

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon f(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{39.15}$$

а краевые условия (39.10) — к виду

$$x = \alpha, \quad y = \beta \quad \text{при} \quad \tau = 0.\tag{39.16}$$

Если $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ — решение полной задачи, то решением (39.15), (39.16) является $(x(\tau\varepsilon, \varepsilon), y(\tau\varepsilon, \varepsilon))$. Правая часть в (39.15) непрерывно зависит от ε . Следовательно, пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\tau\varepsilon, \varepsilon) = \tilde{x}(\tau), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(\tau\varepsilon, \varepsilon) = \tilde{y}(\tau)$$

существуют и являются решением системы

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= 0, \\ \frac{dy}{d\tau} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{39.17}$$

удовлетворяющим краевым условиям (39.16). Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\tau) &\equiv \alpha, \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tau} &= g(\alpha, \tilde{y}), \quad \tilde{y}(0) = \beta.\end{aligned}\tag{39.18}$$

Эти предельные равенства выполняются равномерно в любом интервале $0 \leq \tau \leq \tau_0$, в котором $(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)) \in \Omega$. Так как точка (α, β) принадлежит области влияния $\varphi(x)$, то значение τ_0 можно взять произвольно большим.

Из предположения (D) следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tilde{y}(\tau) = \varphi(\alpha).$$

Пусть τ_0 выбрано таким большим, что точка $(\alpha, \tilde{y}(\tau))$ лежит в $\frac{\gamma(\mu)}{2}$ -трубке при $\tau \geq \tau_0$, где $\gamma(\mu)$ имеет то же самое значение, что и в лемме 39.1. Выберем $\varepsilon_0(\mu) > 0$ таким малым, чтобы при $\varepsilon < \varepsilon_0(\mu)$ и $0 \leq \tau \leq \tau_0$ точки

$$(x(\varepsilon\tau, \varepsilon), y(\varepsilon\tau, \varepsilon))$$

отстояли от $(\alpha, \tilde{y}(\tau))$ меньше, чем на $\frac{\gamma(\mu)}{2}$. Отсюда, в частности, следует, что точка $(x(\varepsilon\tau_0, \varepsilon), y(\varepsilon\tau_0, \varepsilon))$ лежит внутри $\gamma(\mu)$ -трубки. Другими словами, при $t = \varepsilon\tau_0$ решение полной задачи

оказалось внутри $\gamma(\mu)$ -трубки. В силу леммы 39.1 решение останется внутри μ -трубки при $t \geq \varepsilon\tau_0$ до тех пор, пока $x(t, \varepsilon)$ находится в таком x -интервале, в котором $y = \varphi(x(t, \varepsilon))$ является изолированным устойчивым корнем уравнения $g(x(t, \varepsilon), y) = 0$. Напомним, что μ можно взять сколь угодно малым. При этом $\gamma(\mu) \leq \mu$ по определению. Введенное выше число $\varepsilon_0(\mu)$ стремится к нулю вместе с μ . Следовательно, для всех значений t , для которых решение остается в μ -трубке, можно написать

$$y(t, \varepsilon) = \varphi(x(t, \varepsilon)) + \omega(t, \varepsilon), \quad (39.19)$$

где $\omega(t, \varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно в любом t -интервале, ограниченном слева величиной $\varepsilon\tau_0$, в котором $\varphi(x(t, \varepsilon))$ является устойчивым корнем. В силу (39.8) отсюда следует, что

$$\frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} = f(x(t, \varepsilon), \varphi(x(t, \varepsilon)) + \omega(t, \varepsilon)), \quad t \geq \varepsilon\tau_0. \quad (39.20)$$

Мы уже показали, что при $t = \varepsilon\tau_0$ мы имеем $|x(\varepsilon\tau_0, \varepsilon) - \alpha| \leq \frac{\gamma(\mu)}{2}$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0(\mu)$. Это означает, что $x(\varepsilon\tau_0, \varepsilon) \rightarrow \alpha$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Опираясь снова на теорему о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных, мы заключаем в силу (39.20), что $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к решению $x_0(t)$ укороченной задачи (39.11), (39.12), т. е. задачи

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \varphi(x)), \quad x = \alpha \quad \text{при} \quad t = 0,$$

равномерно в интервале $\varepsilon\tau_0 \leq t \leq T_0$. При $0 \leq t \leq \varepsilon\tau_0$ разность $x(t, \varepsilon) - \alpha = x(\varepsilon t, \varepsilon) - \alpha$ также равномерно стремится к нулю вследствие того, что начальное условие имеет вид $x(0, \varepsilon) = \alpha$. Это доказывает утверждение теоремы относительно $x(t, \varepsilon)$.

Наконец, вернемся к (39.19) и заметим, что правая часть при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к $\varphi(x_0(t))$ равномерно в интервале $\varepsilon\tau_0 \leq t \leq T_0$. Это завершает доказательство.

На самом деле мы доказали больше, чем требовалось.

(а) Траектория, т. е. кривая C_ε в пространстве (x, y) , соответствующая решению полной задачи, стремится равномерно в интервале $0 \leq t \leq T_0$ к кривой C_0 , состоящей из двух непрерывных дуг $C_0^{(1)}$ и $C_0^{(2)}$. Здесь $C_0^{(1)}$ описывается параметрически функциями $(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau))$, $0 \leq \tau < \infty$, которые являются решением «укороченной после растяжения» задачи (39.17), (39.18), а $C_0^{(2)}$ есть дуга $(x_0(t), y_0(t))$, $0 \leq t \leq T_0$, полученная при решении укороченной задачи (без растяжения), определяемой (39.11), (39.12).

(b) Разность $y(t, \varepsilon) - y_0(t)$ мала при малых ε не только в любом подинтервале $0 < t_1 \leq t \leq T_0$, где t_1 не зависит от ε , но даже в расширенном интервале $\varepsilon t_0 \leq t \leq T_0$.

Отметим еще раз, что теорема 39.1 и ее доказательство переносятся почти дословно на неавтономный случай, а также на задачу, в которой x и y — векторы произвольных размерностей.

Статья Тихонова содержит важное дальнейшее обобщение. В ней рассматриваются дифференциальные системы вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y^{(1)}, \dots, y^{(m)}, t), \\ \varepsilon_j \frac{dy^{(j)}}{dt} &= g_j(x, y^{(1)}, \dots, y^{(m)}, t), \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ — параметры, которые зависят друг от друга таким образом, что из $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ вытекает

$$\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} \rightarrow 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

Здесь $y^{(j)}$ и x — векторы произвольной размерности. Снова встает вопрос об асимптотическом поведении решения начальной задачи для этой системы уравнений при $\varepsilon_j \rightarrow 0$.

Тихонов определяет последовательность укороченных уравнений первого, второго и более высокого порядков вплоть до порядка m , а также уравнения пограничного слоя порядков от 1 до m . Затем доказывается, что при соответствующих условиях устойчивости для этих уравнений пограничного слоя решение полной задачи сходится к решению m -кратно укороченной задачи.

40. Разложения в ряд для начальной задачи¹⁾

40.1. Формальные построения

Теорема Тихонова является только первым шагом в асимптотическом решении сингулярно возмущенных начальных задач. Построение приближенного решения в виде ряда оказывается трудной задачей. Этот вопрос был рассмотрен в ряде работ А. Б. Васильевой (см., например, [6], [10] и [11]). Совершенно иной метод содержится в статьях Вазова [13] и Сибуйя [12]. Мы

¹⁾ См. добавление 2, § 1. — Прим. ред.

опишем наиболее важную часть теории Васильевой, ограничиваясь простейшим случаем задачи

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= g(x, y), \end{aligned} \quad (40.1)$$

$$x = \alpha, \quad y = \beta \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (40.2)$$

в которой x и y — скаляры. В этом частном случае содержатся все существенные особенности теории. Как и раньше, все величины являются вещественными и $\varepsilon > 0$, $t > 0$.

Сохраним все предположения от (А) до (F), видоизменив их очевидным образом для нашего случая, в котором y , так же как и x , является скаляром. Тогда теорема Тихонова 39.1 будет иметь место. Усилим наши предположения требованием, чтобы f и g были бесконечно дифференцируемы в Ω . Это не очень существенно, но избавляет нас от необходимости проверять на каждом шаге необходимые предположения о дифференцируемости.

Наиболее естественный подход к поставленной задаче — искать решение в виде ряда по степеням ε

$$x = \sum_{r=0}^{\infty} x_r(t) \varepsilon^r, \quad y = \sum_{r=0}^{\infty} y_r(t) \varepsilon^r \quad (40.3)$$

и определить $x_r(t)$ и $y_r(t)$ посредством формальной подстановки и приравнивания коэффициентов. Чтобы получить рекуррентную последовательность дифференциальных уравнений для коэффициентов, можно поступить, например, следующим образом.

В качестве $x_0(t)$ и $y_0(t)$ возьмем решение укороченной задачи (39.6). Если асимптотические разложения вида (40.3) существуют, то такой выбор является правильным. Далее можно написать тейлоровские разложения

$$f(x, y) = \sum_{r, s=0}^{\infty} f_{rs}(t) [x - x_0(t)]^r [y - y_0(t)]^s, \quad (40.4a)$$

$$g(x, y) = \sum_{r, s=0}^{\infty} g_{rs}(t) [x - x_0(t)]^r [y - y_0(t)]^s, \quad (40.4b)$$

даже если они не являются сходящимися. Подставим ряды (40.3) в (40.4) и в правые части (40.1). Затем разложим в ряды

и соберем одинаковые степени ε в обеих частях (40.1). Получим рекуррентные формулы вида

$$\frac{dx_r}{dt} = f_{10}(t)x_r + f_{01}(t)y_r + p_r(x_1, \dots, x_{r-1}, y_1, \dots, y_{r-1}, t), \quad (40.5a)$$

$$\frac{dy_{r-1}}{dt} = g_{10}(t)x_r + g_{01}(t)y_r + q_r(x_1, \dots, x_{r-1}, y_1, \dots, y_{r-1}, t), \quad (40.5b)$$

где p_r, q_r — многочлены относительно $x_j, y_j, 1 \leq j \leq r-1$. Если предположить, что $g_{01}(t) \neq 0$, то можно решить уравнение (40.5b) относительно y_r и подставить это решение в (40.5a). Если функции $x_j, y_j, j \leq r-1$, уже известны, то (40.5a) становится линейным дифференциальным уравнением относительно x_r . После того как решение этого дифференциального уравнения найдено, $y_r(t)$ определяется из (40.5b).

В этом построении мы встречаем серьезную трудность, которая делает нашу задачу более сложной, чем простое применение развитых ранее методов. Именно: мы не знаем априори начальные значения для $x_r(t)$ при $t=0$. Можно попытаться рассуждать следующим образом: мы знаем, что $x_0(0) = \alpha$, и то же самое начальное условие $x(0, \varepsilon) = \alpha$ мы наложим на решение полной задачи. Не являются ли правильными начальными условиями для $x_r(t), r > 0$, условия $x_r(0) = 0$? Простейший пример показывает, однако, что это не так (см. задачу 40.1).

Задача 40.1.

(а) Показать, что решение начальной задачи

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, & \varepsilon \frac{dy}{dt} &= -y, & t > 0, \\ x &= \alpha, & y &= \beta & \text{при } t=0 \quad (\beta \neq 0) \end{aligned}$$

имеет асимптотическое разложение $x(t, \varepsilon) \sim \alpha + \beta\varepsilon, y(t, \varepsilon) \sim 0$ в любом интервале $0 < t_0 \leq t < \infty$, но не в интервале $0 \leq t < \infty$.

(б) Найти аналогичное асимптотическое разложение для системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \varepsilon \frac{dy}{dt} = -y + \varepsilon.$$

(Система в пункте (б) не является в точности системой вида (40.1), так как правая часть в одном уравнении зависит от ε . Однако развиваемая нами теория справедлива и в том случае, когда ε входит в правые части достаточно регулярно.)

Примеры в приведенной выше задаче обнаруживают также дополнительную трудность: нельзя ожидать, что формальные

ряды (40.3) опишут решение начальной задачи в области пограничного слоя. Однако, как выяснится в дальнейшем, начальные значения $x_r(t)$, $y_r(t)$ определяются поведением решения в области пограничного слоя.

Условие $g_{01}(t) \neq 0$, которое, как мы видели, является существенным в предложенной формальной схеме, связано с нашим предположением (D). Заметим, что

$$g_{01}(t) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0(t) \\ y=y_0(t)}}$$

С другой стороны, уравнение пограничного слоя (39.9) после замены $\omega = y - \varphi(x)$ можно записать в виде

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \left[\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\varphi(x)} \right] \omega + \psi(\omega, x) \omega^2,$$

где $\psi(\omega, x)$ ограничена в интервале $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$ для всех достаточно малых ω . Здесь x рассматривается как параметр. Хорошо известно (см., например, Коддингтон и Левинсон [2], гл. 13), что $\omega = 0$ является асимптотически устойчивым решением при $\tau \rightarrow +\infty$, если коэффициент при ω отрицателен. Если этот коэффициент положителен, то решение неустойчиво. Если он неположителен, но может обращаться в нуль, то асимптотическая устойчивость имеет место в исключительных случаях. Поэтому естественно заменить предположение (D) несколько более ограничительным предположением (D').

Предположение (D').

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\varphi(x)} < 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 \leq x \leq \xi_2.$$

Из этого условия следует, что $g_{01}(t) < 0$ при $0 \leq t \leq T_0$.

Мы должны связать ряды (40.3) с поведением решения (40.1) в области пограничного слоя. Для малых значений t порядка $O(\varepsilon)$ решение нашей возмущенной задачи может быть найдено с помощью преобразования растяжения

$$t = \tau \varepsilon. \quad (40.6)$$

Задача преобразуется тогда к виду

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = g(x, y), \quad (40.7)$$

$$x = \alpha, \quad y = \beta \quad \text{при} \quad \tau = 0. \quad (40.8)$$

Если функции f и g аналитические, то решение этой задачи разлагается в сходящиеся ряды по степеням ε :

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) \varepsilon^r, \quad y(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} v_r(\tau) \varepsilon^r. \quad (40.9)$$

Эти ряды при $\tau=0$ приводят к тождественным относительно ε равенствам $x=\alpha$, $y=\beta$, так что

$$\begin{aligned} u_0(0) &= \alpha, & v_0(0) &= \beta, \\ u_r(0) &= 0, & v_r(0) &= 0, \quad r > 0. \end{aligned} \quad (40.10)$$

Это следует из теоремы 32.1. Если же предположить только, что f и g бесконечно дифференцируемы, то нетрудно доказать (здесь нам это, однако, не потребуется), что ряды (40.9), вычисленные тем же самым формальным образом, как и в аналитическом случае, являются асимптотическим представлением решения при $\varepsilon \rightarrow +0$ в любом конечном τ -интервале.

Функции $u_0(\tau)$, $v_0(\tau)$ являются, в частности, решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{d\tau} &= 0, & \frac{dv_0}{d\tau} &= g(u_0, v_0), \\ u_0(0) &= \alpha, & v_0(0) &= \beta, \end{aligned}$$

которая получается из (40.7), (40.8) при $\varepsilon=0$. Следовательно,

$$u_0(\tau) \equiv \alpha, \quad \frac{dv_0}{d\tau} = g(\alpha, v_0), \quad v_0(0) = \beta. \quad (40.11)$$

Функции $u_r(\tau)$, $v_r(\tau)$, $r > 0$, можно определить теперь посредством разложения $f(x, y)$, $g(x, y)$ в ряды Тейлора

$$f(x, y) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \tilde{f}_{rs}(\tau) (x-\alpha)^r (y-v_0(\tau))^s \quad (40.12a)$$

$$g(x, y) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \tilde{g}_{rs}(\tau) (x-\alpha)^r (y-v_0(\tau))^s. \quad (40.12b)$$

С помощью обычного сравнения одинаковых степеней ε мы приходим к рекуррентной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{du_1}{d\tau} = \tilde{f}_{00}(\tau) = f(\alpha, v_0(\tau)), \quad \frac{dv_1}{d\tau} = \tilde{g}_{10}(\tau) u_1 + \tilde{g}_{01}(\tau) v_1, \quad (40.13a)$$

$$\frac{du_r}{d\tau} = \tilde{f}_{10}(\tau) u_{r-1} + \tilde{f}_{01}(\tau) v_{r-1} + \tilde{p}_{r-1}(u_1, \dots, u_{r-2}, v_1, \dots, v_{r-2}, \tau), \quad (40.13b)$$

$$\frac{dv_r}{d\tau} = \tilde{g}_{10}(\tau) u_r + \tilde{g}_{01}(\tau) v_r + \tilde{q}_r(u_1, \dots, u_{r-1}, v_1, \dots, v_{r-1}, \tau), \quad (40.13c)$$

где \tilde{p}_{r-1} , \tilde{q}_r — многочлены относительно u_j , v_j , $j \leq r-1$. Из этих дифференциальных уравнений и начальных условий (40.10) можно последовательно определить все функции u_r , v_r .

Отметим еще раз, что в противоположность рядам (40.9) ряды (40.3) не могут быть вычислены до тех пор, пока не определены правильные начальные условия для $x_r(0)$, $y_r(0)$. Чтобы связать два типа разложений, Васильева преобразует ряды (40.3) в ряды, содержащие τ и ε , формально подставляя ряды Тейлора (возможно, расходящиеся)

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \sum_{s=0}^{\infty} x_{rs} t^s = \sum_{s=0}^{\infty} x_{rs} \tau^s \varepsilon^s, \\ y_r(t) &= \sum_{s=0}^{\infty} y_{rs} t^s = \sum_{s=0}^{\infty} y_{rs} \tau^s \varepsilon^s \end{aligned} \quad (40.14)$$

в (40.3) и изменяя порядок суммирования в соответствии со степенями ε . Результирующие ряды можно записать в виде

$$\sum_{r=0}^{\infty} \hat{u}_r(\tau) \varepsilon^r, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \hat{v}_r(\tau) \varepsilon^r, \quad (40.15)$$

где

$$\hat{u}_r(\tau) = \sum_{s=0}^r x_{r-s,s} \tau^s, \quad \hat{v}_r(\tau) = \sum_{s=0}^r y_{r-s,s} \tau^s. \quad (40.16)$$

При любом выборе начальных значений

$$x_r(0) = x_{r0}$$

и соответствующих значений

$$y_r(0) = y_{r0}$$

эти ряды существуют, но их аналитический смысл остается пока не исследованным. Очевидно, что для не очень больших значений τ частичные суммы (40.15) будут мало отличаться от частичных сумм рядов (40.3), однако для этих значений τ мы находимся в области пограничного слоя, где нельзя ожидать, что (40.3) будут аппроксимировать решение нашей полной задачи. С другой стороны, $\hat{u}_r(\tau)$, $\hat{v}_r(\tau)$, вообще говоря, сильно отличаются от $u_r(\tau)$, $v_r(\tau)$, так как нельзя ожидать, что последние будут многочленами относительно τ . Тем не менее, как мы сейчас покажем, между структурами этих двух типов функций существует тесная связь.

Если ряды (40.3), определенные из (40.5), подставить в (40.1) и обе части разложить в ряд по степеням ε , то получим два тождественных относительно ε ряда. Равенство останется справедливым, если заменить t на $\tau\varepsilon$ и перегруппировать слагаемые в

соответствии со степенями ε . Следовательно, ряды (40.15), так же как и ряды (40.9), являются формальным решением дифференциальных уравнений (40.7). Различие заключается в начальных значениях при $\tau=0$, которые имеют вид

$$\hat{u}_r(0) = x_{r0}, \quad \hat{v}_r(0) = y_{r0} \quad (40.17)$$

При $r>0$ эти начальные значения еще не известны. При $r=0$ мы имеем по определению $x_0(0) = \alpha$, $y_0(0) = \varphi(\alpha)$ и, следовательно, в силу (40.14), (40.16)

$$\hat{u}_0(\tau) \equiv \alpha, \quad \hat{v}_0(\tau) = \varphi(\alpha). \quad (40.18)$$

Поэтому остальные $\hat{u}_r(\tau)$, $\hat{v}_r(\tau)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{d\hat{u}_1}{d\tau} = \hat{f}_{00} = f(\alpha, \varphi(\alpha)), \quad (40.19a)$$

$$\frac{d\hat{v}_1}{d\tau} = \hat{g}_{10}\hat{u}_1 + \hat{g}_{01}\hat{v}_1,$$

$$\frac{d\hat{u}_r}{d\tau} = \hat{f}_{10}\hat{u}_{r-1} + \hat{f}_{01}\hat{v}_{r-1} + \hat{p}_{r-1}(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{r-2}, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{r-2}), \quad (40.19b)$$

$$\frac{d\hat{v}_r}{d\tau} = \hat{g}_{10}\hat{u}_r + \hat{g}_{01}\hat{v}_r + \hat{q}_r(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{r-1}, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{r-1}). \quad (40.19c)$$

Коэффициенты в этих уравнениях *не зависят* от τ . Они представляют собой те же самые выражения через частные производные функций f и g , что и в (40.13), но взятые в фиксированной точке $x = \alpha$, $y = \varphi(\alpha)$ вместо $x = \alpha$, $y = v_0(\tau)$.

При $t = \tau = 0$ ряды (40.3) и (40.15) формально одинаковы и равны

$$\sum_{r=0}^{\infty} x_{r0} \varepsilon^r, \quad \sum_{r=0}^{\infty} y_{r0} \varepsilon^r.$$

Таким образом, ряды (40.15) можно рассматривать как такое формальное решение уравнения после растяжения, которое формально имеет то же самое начальное значение, что и формальное решение в виде ряда уравнения до растяжения. Для не очень больших τ функции $\hat{u}_r(\tau)$, $\hat{v}_r(\tau)$ значительно отличаются от $u_r(\tau)$, $v_r(\tau)$. Однако будет показано, что при специальном выборе начальных условий (40.17) разность между этими двумя парами функций становится экспоненциально малой для больших τ . Оказывается, что *эти специальные начальные значения x_{r0} и y_{r0} являются правильными начальными условиями для определения $x_r(t)$ и $y_r(t)$ в рядах (40.3).*

Таким образом, поведение при $t=0$ разложения, полученного без растяжения, связано с поведением при больших τ разложения, полученного после растяжения. Такое положение часто возникает в сингулярно возмущенных задачах.

40.2. Начальные условия

Начнем со сравнения $u_0(\tau)$, $v_0(\tau)$ с $\hat{u}_0(\tau)$, $\hat{v}_0(\tau)$. Имеем

$$u_0(\tau) - \hat{u}_0(\tau) = \alpha - \alpha = 0, \quad v_0(\tau) - \hat{v}_0(\tau) = v_0(\tau) - \varphi(\alpha).$$

Из предположения об асимптотической устойчивости уравнения пограничного слоя (39.9) следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} v_0(\tau) = \varphi(\alpha).$$

На основе нашего более строгого предположения (D') мы можем утверждать, что

$$|v_0(\tau) - \varphi(\alpha)| \leq c e^{-\kappa\tau} \quad \text{при} \quad \tau \geq 0, \quad (40.20)$$

где c и κ — положительные константы. Это непосредственно следует из известной теоремы об асимптотической устойчивости. Приведем простое доказательство.

Положим $\omega(\tau) = v_0(\tau) - \varphi(\alpha)$. В силу того, что по предположению (B) $g(\alpha, \varphi(\alpha)) = 0$, и вследствие (40.11) мы имеем

$$\frac{d\omega}{d\tau} = g(\alpha, v_0(\tau)) - g(\alpha, \varphi(\alpha)) = G(\tau)\omega,$$

где

$$G(\tau) = \frac{g(\alpha, v_0(\tau)) - g(\alpha, \varphi(\alpha))}{v_0(\tau) - \varphi(\alpha)}$$

Так как

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} v_0(\tau) = \varphi(\alpha),$$

то из предположения (D') и теоремы о среднем следует, что существуют два числа $\tau_0 > 0$ и $\kappa > 0$, такие, что $G(\tau) \leq -\kappa$ при $\tau \geq \tau_0$. Следовательно,

$$|\omega(\tau)| = \left| \omega(\tau_0) \exp \left[\int_{\tau_0}^{\tau} G(\sigma) d\sigma \right] \right| \leq |\omega(\tau_0)| \exp[-\kappa(\tau - \tau_0)] \quad (40.21)$$

при $\tau \geq \tau_0$, что доказывает (40.20) для $\tau \geq \tau_0$. При $0 \leq \tau < \tau_0$ неравенство очевидно.

Далее сравним $u_1(\tau)$, $v_1(\tau)$ с $\hat{u}_1(\tau)$, $\hat{v}_1(\tau)$. Из (40.13а) и (40.19а) следует, что

$$\frac{d(u_1 - \hat{u}_1)}{d\tau} = f(\alpha, v_0(\tau)) - f(\alpha, \varphi(\alpha)),$$

поэтому в силу (40.10) и (40.17)

$$u_1(\tau) - \hat{u}_1(\tau) = -x_{10} + \int_0^\tau [f(\alpha, v_0(\sigma)) - f(\alpha, \varphi(\alpha))] d\sigma. \quad (40.22)$$

Применим теперь неравенство (40.20). Такие неравенства в дальнейшем будут встречаться часто. Для простоты мы будем использовать буквы c и k как общее обозначение положительных постоянных, не зависящих от ε . Значения этих постоянных могут изменяться от формулы к формуле. Функции, ограниченные по модулю функцией вида $c\varepsilon^{-kx}$, будем называть функциями *типа пограничного слоя*. Вследствие (40.20) подинтегральная функция в (40.22) является функцией типа пограничного слоя, а интеграл, вообще говоря, не является такой функцией. Только при специальном выборе значения x_{10}

$$x_{10} = \int_0^\infty [f(\alpha, v_0(\tau)) - f(\alpha, \varphi(\alpha))] d\tau \quad (40.23)$$

(40.22) будет экспоненциально малым выражением, а именно:

$$u_1(\tau) - \hat{u}_1(\tau) = - \int_\tau^\infty [f(\alpha, v_0(\sigma)) - f(\alpha, \varphi(\alpha))] d\sigma.$$

После того как начальное значение x_{10} выбрано таким образом, можно вычислить $x_1(t)$, $y_1(t)$ из (40.5) и $\hat{u}_1(\tau)$, $\hat{v}_1(\tau)$ из (40.16) (или из (40.19a)). Теперь можно показать, что $v_1(\tau) - \hat{v}_1(\tau)$ также является функцией типа пограничного слоя. Обращаясь к (40.13a) и (40.19a), напишем уравнение

$$\frac{d(v_1 - \hat{v}_1)}{d\tau} = \tilde{g}_{01}(\tau)(v_1 - \hat{v}_1) + (\tilde{g}_{01}(\tau) - \hat{g}_{01}(\tau))\hat{v}_1(\tau) + \tilde{g}_{10}(\tau)u_1(\tau) - \hat{g}_{10}(\tau)\hat{u}_1(\tau),$$

которое можно рассматривать как линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно $v_1 - \hat{v}_1$. Из определения функций $\tilde{g}_{jh}(\tau)$ и $\hat{g}_{jh}(\tau)$ и из того, что было уже доказано, следует, что неоднородность является функцией типа пограничного слоя. Кроме того, в силу предположения (D')

$$\tilde{g}_{01}(\tau) = \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=\alpha \\ y=v_0(\tau)}}$$

является отрицательной функцией при достаточно больших τ . Из этих фактов, как показывает простая оценка формулы для решения линейного дифференциального уравнения первого

порядка, следует, что $|v_1 - \hat{v}_1| < ce^{-\kappa\tau}$. При этом мы опустили некоторые детали.

Начальное условие (40.23) более кратко можно записать в виде

$$x_{10} = \int_0^{\infty} \left(\frac{du_1}{d\tau} - \frac{d\hat{u}_1}{d\tau} \right) d\tau,$$

где подинтегральную функцию можно выразить через $u_0, v_0, \hat{u}_0, \hat{v}_0$. Покажем теперь посредством индукции, что все разности $u_r(\tau) - \hat{u}_r(\tau), v_r(\tau) - \hat{v}_r(\tau)$ также будут функциями типа пограничного слоя, если начальные значения выбраны следующим образом:

$$\hat{u}_r(0) = x_r(0) = x_{r0} = \int_0^{\infty} \left(\frac{du_r}{d\tau} - \frac{d\hat{u}_r}{d\tau} \right) d\tau, \quad r > 0. \quad (40.24)$$

Лемма 40.1. Дифференциальные уравнения (40.19) имеют такие частные решения $\hat{u}_r(\tau), \hat{v}_r(\tau), r=1, 2, \dots$, для которых

- (а) справедливо соотношение (40.24);
 (б) $\hat{v}_r(0) = y_{r0} = y_r(0)$ определяется из (40.5b);
 (с) $|u_r(\tau) - \hat{u}_r(\tau)| + |v_r(\tau) - \hat{v}_r(\tau)| \leq ce^{-\kappa\tau}$,

$$\left| \frac{du_r(\tau)}{d\tau} - \frac{d\hat{u}_r(\tau)}{d\tau} \right| + \left| \frac{dv_r(\tau)}{d\tau} - \frac{d\hat{v}_r(\tau)}{d\tau} \right| \leq ce^{-\kappa\tau}.$$

Функции \hat{u}_r, \hat{v}_r можно вычислить посредством рациональных действий: квадратур и дифференцирования.

Доказательство. Если u_j, \hat{u}_j и v_j, \hat{v}_j известны для $j \leq r-1$, то подинтегральная функция в начальных условиях (40.24) также известна, что следует из дифференциальных уравнений (40.13b) и (40.19b). Существование интеграла в (40.24) является частью утверждения леммы. Лемма уже была доказана для $r=1$. Предположим, что она верна для $j \leq r-1$. Подинтегральная функция в (40.24) является конечной суммой слагаемых вида

$$au_1 \dots u_{r-1} v_1 \dots v_{r-1} - a\hat{u}_1 \dots \hat{u}_{r-1} \hat{v}_1 \dots \hat{v}_{r-1}. \quad (40.25)$$

Здесь a и \hat{a} — определенные частные производные функций f и g , взятые в точке $(\alpha, v_0(\tau))$ для a и в точке $(\alpha, \varphi(\alpha))$ для \hat{a} . Отсюда и из (40.20) следует, что $a - \hat{a}$ является функцией типа пограничного слоя. По нашему индуктивному предположению то же самое справедливо для $u_j - \hat{u}_j$ и $v_j - \hat{v}_j$ при $j \leq r-1$. Следовательно, разность (40.25), а значит, и вся подинтегральная

функция являются функциями типа пограничного слоя. Поэтому интеграл существует. Кроме того, так как $u_r(0) = 0$, а $\hat{u}_r(0)$ определяется формулой (40.24), то мы получим

$$u_r(\tau) - \hat{u}_r(\tau) = -x_{r0} + \int_0^\tau \left(\frac{du_r}{d\tau} - \frac{d\hat{u}_r}{d\tau} \right) d\tau = - \int_\tau^\infty \left(\frac{du_r}{d\tau} - \frac{d\hat{u}_r}{d\tau} \right) d\tau,$$

что снова является функцией пограничного слоя.

Обращаясь к разности $v_r(\tau) - \hat{v}_r(\tau)$, из (40.13с) и (40.19с) получаем соотношение вида

$$\frac{d}{d\tau} (v_r - \hat{v}_r) = \tilde{g}_{01}(\tau) (v_r - \hat{v}_r) + (\tilde{g}_{01}(\tau) - \hat{g}_{01}(\tau)) \hat{v}_r(\tau) + \varphi_r(\tau), \quad (40.26)$$

где $\varphi_r(\tau)$ — сумма выражений вида (40.25) и, следовательно, является функцией типа пограничного слоя. По той же самой причине $\tilde{g}_{01}(\tau) - \hat{g}_{01}(\tau)$ также является функцией типа пограничного слоя, в то время как $\hat{v}_r(\tau)$ в силу (40.16) есть многочлен степени r . Следовательно, $(\tilde{g}_{01}(\tau) - \hat{g}_{01}(\tau)) \hat{v}_r(\tau)$ является функцией типа пограничного слоя. Поэтому уравнение (40.26) является линейным дифференциальным уравнением относительно $v_r - \hat{v}_r$, в котором неоднородность есть функция типа пограничного слоя, а коэффициент $\tilde{g}_{01}(\tau)$ строго отрицателен при больших τ . Как указывалось ранее, все решения такого уравнения являются функциями типа пограничного слоя. Это доказывает первое из утверждений (с). То, что

$$\frac{du_r(\tau)}{d\tau} - \frac{d\hat{u}_r(\tau)}{d\tau}$$

является функцией типа пограничного слоя, было показано ранее в нашем доказательстве. То же самое утверждение получается для

$$\frac{dv_r(\tau)}{d\tau} - \frac{d\hat{v}_r(\tau)}{d\tau},$$

если обратиться снова к (40.26). Это завершает доказательство леммы 40.1.

40.3. Разложение в ряд для начальной задачи

Теперь мы должны доказать наше предположение о том, что ряды (40.3), вычисленные с помощью дифференциальных уравнений (40.5) с начальными условиями $x_r(0) = x_{r0}$, определяемыми формулой (40.24), являются асимптотическим представлением решения полной начальной задачи, по крайней мере

вне пограничного слоя. Мы получим даже большее, а именно асимптотическое представление решения, справедливое равномерно во всей области $0 \leq t \leq T_0$!

Чтобы пояснить результаты, которые будут доказаны, мы напомним два факта. В силу леммы 40.11 разности $u_r - \hat{u}_r$, $v_r - \hat{v}_r$ экспоненциально малы вне пограничного слоя. Можно ожидать, что в области пограничного слоя, т. е. на конечном τ -интервале, частичные суммы

$$\sum_{r=0}^m \hat{u}_r(\tau) \varepsilon^r, \quad \sum_{r=0}^m \hat{v}_r(\tau) \varepsilon^r$$

будут близки к частичным суммам

$$\sum_{r=0}^m x_r(t) \varepsilon^r, \quad \sum_{r=0}^m y_r(t) \varepsilon^r$$

вследствие способа построения ряда (40.15). Это означает, что выражение

$$\sum_{r=0}^m x_r(t) \varepsilon^r + \sum_{r=0}^m u_r(\tau) \varepsilon^r - \sum_{r=0}^m \hat{u}_r(\tau) \varepsilon^r$$

будет, по-видимому, близко к

$$\sum_{r=0}^m u_r(\tau) \varepsilon^r$$

в области пограничного слоя и близко к

$$\sum_{r=0}^m x_r(t) \varepsilon^r$$

вне пограничного слоя, и аналогично для другой компоненты вектора. Можно надеяться, что эти выражения будут равномерным приближением к истинному решению $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ во всем интервале $0 \leq t \leq T_0$. Это действительно имеет место и утверждается в приводимой ниже теореме, доказательство которой будет дано в этом разделе.

Теорема 40.1 Пусть функции $R(t, \varepsilon)$, $S(t, \varepsilon)$ определяются соотношениями

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^m x_r(t) \varepsilon^r + \sum_{r=0}^m u_r(\tau) \varepsilon^r - \sum_{r=0}^m \hat{u}_r(\tau) \varepsilon^r + R(t, \varepsilon) \varepsilon^{m+1},$$

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^m y_r(t) \varepsilon^r + \sum_{r=0}^m v_r(\tau) \varepsilon^r - \sum_{r=0}^m \hat{v}_r(\tau) \varepsilon^r + S(t, \varepsilon) \varepsilon^{m+1},$$

где $t = \tau \varepsilon$. Функции в этих выражениях определяются из дифференциальных уравнений (40.1), (40.5), (40.13) и (40.19) и начальных условий (40.2), (40.10) и (40.24). Пусть выполнены предположения (A), (B), (C), (D'), (E) и точка $x = \alpha$, $y = \beta$ лежит в области влияния $y = \varphi(x)$. Тогда функции $R(t, \varepsilon)$, $S(t, \varepsilon)$ ограничены при $0 \leq t \leq T_0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Для удобства мы введем некоторые сокращенные обозначения. Пусть $z(t, \varepsilon)$ обозначает вектор-столбец с компонентами $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$. Аналогично пусть z_r обозначает вектор (x_r, y_r) , ω_r — вектор (u_r, v_r) и $\tilde{\omega}_r$ — вектор (\hat{u}_r, \hat{v}_r) . Кроме того, будем обозначать через $(z)_m$ вектор

$$\sum_{r=0}^m z_r \varepsilon^r$$

и аналогично определим $(\omega)_m$, $(\tilde{\omega})_m$.

Мы предполагали ранее, что $(z)_m$ и $(\tilde{\omega})_m$ будут мало отличаться в конечном τ -интервале. Теперь мы докажем вспомогательную лемму, которая устанавливает несколько более сильный результат. Пусть

$$t_\varepsilon = A\varepsilon |\log \varepsilon|,$$

где A — не зависящая от ε постоянная. Эта точка обладает тем свойством, что она стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$, но настолько медленно, что $\tau_\varepsilon = \frac{t_\varepsilon}{\varepsilon} = A |\log \varepsilon|$ стремится к бесконечности. Для удобства возьмем $\varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$, так что $|\log \varepsilon| = -\log \varepsilon$.

Лемма 40.2. В интервале $0 \leq t \leq t_\varepsilon = -A\varepsilon \log \varepsilon$

$$|(z(t, \varepsilon))_m - (\tilde{\omega}(\tau, \varepsilon))_m| \leq c\varepsilon^m$$

$$\left| \frac{d}{d\tau} [(z(t, \varepsilon))_m - (\tilde{\omega}(\tau, \varepsilon))_m] \right| \leq c\varepsilon^m.$$

Доказательство. Из (40.16) получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{\omega}(\tau, \varepsilon))_m &= \sum_{r=0}^m \left(\sum_{s=0}^r z_{r-s, s} \tau^s \right) \varepsilon^r = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^r z_{r-s, s} t^s \varepsilon^{r-s} = \\ &= \sum_{r=0}^m \sum_{p=0}^r z_{p, r-p} t^{r-p} \varepsilon^p = \sum_{p=0}^m \sum_{r=p}^m z_{p, r-p} t^{r-p} \varepsilon^p = \\ &= \sum_{p=0}^m \left(\sum_{q=0}^{m-p} z_{pq} t^q \right) \varepsilon^p \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(z(t, \varepsilon))_m - (\tilde{\omega}(\tau, \varepsilon))_m = \sum_{p=0}^m \left[z_p(t) - \sum_{q=0}^{m-p} z_{pq} t^q \right] \varepsilon^p. \quad (40.27)$$

Так как в правой части второй член в скобках является в силу (40.14) частичной суммой ряда Тейлора для $z_p(t)$, то все выражение в скобках равно $O(t^{m-p+1})$ при $t \rightarrow +0$, так что множитель при ε^p в (40.27) равен $O(\varepsilon^{m-p+1} |\log \varepsilon|^{m-p+1})$ равномерно в интервале $0 \leq t \leq t_\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Следовательно, вся правая часть в (40.27) равна $O((\varepsilon |\log \varepsilon|)^{m+1})$, что даже лучше, чем первое из неравенств, доказываемых в лемме. Кроме того, так как

$$\frac{d}{dt} \sum_{q=0}^{m-p} z_{pq} t^q$$

является частичной суммой ряда Тейлора для $\frac{dz_p(t)}{dt}$, то второе неравенство леммы последует из тождества (40.27) после дифференцирования по t и замены $\frac{d}{dt} = \varepsilon^{-1} \frac{d}{d\tau}$.

Сократим наши обозначения еще более, полагая

$$Z_m = (z)_m + (w)_m - (\hat{w})_m.$$

Компоненты вектора Z_m обозначим через X_m, Y_m . Наша цель — показать, что Z_m аппроксимирует решение полной задачи. Для этого потребуется несколько разная аргументация в каждом из двух подинтервалов $0 \leq t \leq t_\varepsilon$ и $t_\varepsilon \leq t \leq T_0$.

(а) Интервал $0 \leq t \leq t_\varepsilon$. Сначала покажем, что Z_m в точности удовлетворяет системе дифференциальных уравнений, которая мало отличается от системы (40.1).

Лемма 40.3. Существует такое число $\varepsilon_m > 0$, зависящее, возможно, от m и A , что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_m < \varepsilon_0$, $0 \leq t \leq t_\varepsilon$ равномерно по t выполнены равенства

$$\frac{dX_m}{dt} - f(X_m, Y_m) = O(\varepsilon^m), \quad (40.28a)$$

$$\varepsilon \frac{dY_m}{dt} - g(X_m, Y_m) = O(\varepsilon^{m+1}). \quad (40.28b)$$

Доказательство. Сначала мы должны показать, что при достаточно малом ε_m приближение

$$Z_m(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^m [z_r(t) + w_r(\tau) - \hat{w}_r(\tau)] \varepsilon^r$$

лежит в Ω при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_m$, $0 \leq t \leq t_\varepsilon$. Мы знаем, что каждый коэффициент $z_r(t) + w_r(\tau) - \hat{w}_r(\tau)$ ограничен во всем интервале $0 \leq t \leq T_0$ для всех $\varepsilon > 0$. Действительно, $z_r(t)$, очевидно, ограничена, а каждая функция $w_r(\tau) - \hat{w}_r(\tau)$ в силу леммы 40.1

равномерно ограничена при всех $\tau > 0$. Следовательно, равномерно в интервале $0 \leq t \leq t_\varepsilon$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_m(t, \varepsilon) = z_0(0) + w_0(\tau) - \hat{w}_0(\tau) = (a, v_0(\tau)),$$

так что $Z_m(t, \varepsilon)$ действительно лежит в Ω при достаточно малых ε .

Далее заметим, что $(w)_m$ по построению является приближенным решением уравнения (40.7), полученного после растяжения, по крайней мере на ограниченном τ -интервале. Можно показать, что даже в более длинном интервале $0 \leq \tau \leq t_\varepsilon \varepsilon^{-1}$ выполнены соотношения

$$\frac{d(u)_m}{d\tau} - f((u)_m, (v)_m) = O(\varepsilon^m), \quad (40.29a)$$

$$\frac{d(v)_m}{d\tau} - g((u)_m, (v)_m) = O(\varepsilon^m). \quad (40.29b)$$

(Мы предполагаем, что ε_m настолько мало, что $(w)_m \in \Omega$ при $\varepsilon < \varepsilon_m$.) Чтобы доказать (40.29), заметим, что левые части как функции τ и ε по построению дифференциальных уравнений (40.13) обладают тем свойством, что их первые m частных производных по ε равны нулю при $\varepsilon = 0$. Следовательно, в силу формулы Тейлора левые части (40.29) равны их $(m+1)$ -м производным по ε , взятым в некоторой точке ε^* из интервала $0 < \varepsilon^* < \varepsilon$ и умноженным на $\frac{\varepsilon^{m+1}}{(m+1)!}$. Эти $(m+1)$ -е производные являются суммами произведений ограниченных функций на определенные степени $u_r(\tau)$ и $v_r(\tau)$ и их первых производных. Так как $w_r(\tau) - \hat{w}_r(\tau)$ в силу леммы 40.1 ограничена при всех $\tau > 0$, а \hat{w}_r является многочленом степени r , то $w_r(\tau) = O(|\log \varepsilon|^r)$. То же самое справедливо в отношении $\frac{dw_r}{d\tau}$. Это доказывает формулы (40.29).

Если в левых частях (40.29) заменить $(w)_m$ на Z_m , то $(w)_m$ изменится на величину $(z)_m - (\hat{w})_m$, которая в силу леммы 40.2 изменит левые части (40.29) на величину порядка $O(\varepsilon^m)$. Заменим, наконец, $\frac{d}{d\tau}$ на $\varepsilon \frac{d}{dt}$ и разделим первое уравнение на ε . Получим оценки

$$\frac{dX_m}{dt} - f(X_m, Y_m) = O(\varepsilon^{m-1}),$$

$$\varepsilon \frac{dY_m}{dt} - g(X_m, Y_m) = O(\varepsilon^m),$$

которые являются более слабыми, чем утверждение леммы. Чтобы доказать его, применим полученные оценки, заменяя m на

$m+1$ и замечая, что

$$Z_{m+1} = Z_m + [z_{m+1}(t) + w_{m+1}(\tau) - \bar{w}_{m+1}(\tau)] \varepsilon^{m+1}.$$

В силу леммы 40.1 последний член равен $O(\varepsilon^{m+1})$, а его производная по t равна $O(\varepsilon^m)$. Отсюда непосредственно следует утверждение леммы.

Чтобы оценить разность $z - Z_m$ в интервале $0 \leq t \leq t_0$, вычтем соотношения (40.28) из исходного дифференциального уравнения (40.1). Полученные при этом уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x - X_m) &= f(x, y) - f(X_m, Y_m) + O(\varepsilon^m), \\ \varepsilon \frac{d}{dt}(y - Y_m) &= g(x, y) - g(X_m, Y_m) + O(\varepsilon^{m+1}) \end{aligned}$$

можно записать в линеаризованной форме

$$\frac{d}{dt}(x - X_m) = a_{11}(x - X_m) + a_{12}(y - Y_m) + O(\varepsilon^m), \quad (40.30a)$$

$$\varepsilon \frac{d}{dt}(y - Y_m) = a_{21}(x - X_m) + a_{22}(y - Y_m) + O(\varepsilon^{m+1}), \quad (40.30b)$$

где $a_{jk} = a_{jk}(t, \varepsilon)$, как мы сейчас покажем, являются непрерывными и ограниченными функциями при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_m$, $0 \leq t \leq T_0$. Чтобы показать это, введем функцию

$$\Phi(\sigma) = f(X_m + \sigma(x - X_m), Y_m + \sigma(y - Y_m))$$

и заметим, что

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(X_m, Y_m) &= \int_0^1 \frac{d\Phi(\sigma)}{d\sigma} d\sigma = \\ &= \left[\int_0^1 f_x d\sigma \right] (x - X_m) + \left[\int_0^1 f_y d\sigma \right] (y - Y_m), \end{aligned}$$

где f_x, f_y означают частные производные $f(x, y)$, взятые в точке $X_m + \sigma(x - X_m), Y_m + \sigma(y - Y_m)$. Так как $Z_m + \sigma(z - Z_m)$ является ограниченной и непрерывной вектор-функцией t и ε в указанной области, то

$$\int_0^1 f_x d\sigma \quad \text{и} \quad \int_0^1 f_y d\sigma$$

также ограничены и непрерывны. Заметим, что то же самое нельзя утверждать относительно производных a_{jk} по t , так как

ω_r и $\hat{\omega}_r$ являются функциями $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, так что при каждом дифференцировании появляется множитель $\frac{1}{\varepsilon}$.

Отметим также, что для достаточно большого $\tau_1 > 0$ и достаточно малого $\varepsilon_m > 0$ имеет место неравенство

$$a_{22}(t, \varepsilon) = \int_0^1 g_v d\sigma < 0 \quad \text{при} \quad \tau_1 \varepsilon \leq t \leq t_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_m,$$

так как в этой области пространства (t, ε) точка $Z_m + \sigma(z - Z_m)$ лежит вблизи $y = \varphi(x)$, где $g_v < 0$. Чтобы проверить это, вспомним, что при доказательстве теоремы 39.1 было показано, что z лежит вблизи $y = \varphi(x)$ при любом $\tau_1 > 0$, если ε_m достаточно мало. Кроме того, $Z_m = Z_0 + O(\varepsilon)$ и $X_0 = x_0$, $Y_0 = y_0 + v_0 - \varphi(x) = \varphi(x_0) + O(e^{-\kappa\tau})$ в силу леммы 40.1. Поэтому Z_m и z лежат сколь угодно близко к кривой $y = \varphi(x)$, если τ_1 достаточно велико, а ε достаточно мало, и то же самое справедливо в отношении точки $Z_m + \sigma(z - Z_m)$, которая лежит на сегменте, соединяющем Z_m и z .

Уравнения (40.30) можно рассматривать как линейные дифференциальные уравнения относительно $z - Z_m$. Соответствующие начальные значения $z - Z_m = 0$ при $t = 0$.

Можно показать, что из неравенства $a_{22} < 0$ при $t \geq \tau_1 \varepsilon$ следует, что решения такой линейной системы с нулевыми начальными условиями имеют порядок $O(\varepsilon^m)$. Доказательство этого дается в лемме 40.4 в конце данного раздела. Таким образом, $z - Z_m = O(\varepsilon^m)$ равномерно в интервале $0 \leq t \leq t_\varepsilon$. Так как $z - Z_{m+1} = z - Z_m - (z_{m+1} + \omega_{m+1} - \hat{\omega}_{m+1})\varepsilon^{m+1}$, а $z_{m+1} + \omega_{m+1} - \hat{\omega}_{m+1}$ — ограниченная функция, то, применяя эту оценку для $m+1$, получим

$$z - Z_m = O(\varepsilon^{m+1}) \quad \text{в интервале} \quad 0 \leq t \leq t_\varepsilon. \quad (40.31)$$

(b) Интервал $t_\varepsilon \leq t \leq T_0$. Из леммы 40.1 следует, что в этом интервале

$$|(\omega)_m - (\hat{\omega})_m| \leq c e^{-\kappa t} \leq c e^{\kappa A \log \varepsilon} = c e^{\kappa A}.$$

Постоянная c зависит от ε_m , а κ не зависит. Если выбрать $A \geq \frac{m+1}{\kappa}$, то получим

$$Z_m = (z)_m + O(\varepsilon^{m+1}). \quad (40.32)$$

равномерно в интервале $t_\varepsilon \leq t \leq T_0$. Следует заметить, что введенная ранее постоянная ε_m зависит от A . Поэтому порядок

которого нужно придерживаться при определении постоянных, таков: сначала выбирается m , затем A и наконец ε_m .

В силу (40.32) и (40.31) доказательство нашей основной теоремы 40.1 будет завершено, если мы покажем, что

$$z - (z)_m = O(\varepsilon^{m+1}) \quad \text{в интервале} \quad t_\varepsilon \leq t \leq T_0. \quad (40.33)$$

Мы поступим в основном так же, как в пункте (а). По аналогии с формулами (40.30) легко показать, что

$$\begin{aligned} \frac{d(x)_m}{dt} - f((x)_m, (y)_m) &= O(\varepsilon^{m+1}), \\ \varepsilon \frac{d(y)_m}{dt} - g((x)_m, (y)_m) &= O(\varepsilon^{m+1}). \end{aligned} \quad (40.34)$$

Вычитая это из (40.1), получим систему

$$\frac{d(x - (x)_m)}{dt} = b_{11}(x - (x)_m) + b_{12}(y - (y)_m) + O(\varepsilon^{m+1}), \quad (40.35a)$$

$$\varepsilon \frac{d(y - (y)_m)}{dt} = b_{21}(x - (x)_m) + b_{22}(y - (y)_m) + O(\varepsilon^{m+1}), \quad (40.35b)$$

где b_{jk} — бесконечно дифференцируемые ограниченные функции t и ε и $b_{22} < 0$ в интервале $t_\varepsilon \leq t \leq T_0$. Решим линейную систему (40.35) с начальными условиями, заданными при $t = t_\varepsilon$. Из (40.31) и (40.32) следует, что $z - (z)_m = z - Z_m + O(\varepsilon^{m+1}) = O(\varepsilon^{m+1})$ при $t = t_\varepsilon$. Ссылка на приводимую ниже лемму 40.4 завершает доказательство формулы (40.33) и, следовательно, теоремы 40.1.

Лемма 40.4. Пусть a_{jk} и b_j ($j, k = 1, 2$) — ограниченные непрерывные функции t и ε в области $0 \leq t \leq T$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Пусть для определенных положительных постоянных κ и τ_1 в области $\tau_1 \varepsilon \leq t \leq T$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ имеет место неравенство $a_{22}(t, \varepsilon) \leq -\kappa$. Тогда решение системы

$$\frac{dp}{dt} = a_{11}p + a_{12}q + b_1, \quad \varepsilon \frac{dq}{dt} = a_{21}p + a_{22}q + b_2$$

с начальными условиями

$$p = p_0, \quad q = q_0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

удовлетворяет при $0 \leq t \leq T$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ неравенству

$$|p| + |q| \leq c \left(\max_{0 < t < T} |b_1| + \max_{0 < t < T} |b_2| + |p_0| + |q_0| \right), \quad (40.36)$$

где c — определенная постоянная, не зависящая от ε .

Доказательство. Решения p и q удовлетворяют интегральным уравнениям

$$p(t, \varepsilon) = \int_0^t (a_{11}p + a_{12}q + b_1) ds + p_0, \quad (40.37a)$$

$$q(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a_{22} d\sigma \right] (a_{21}p + b_2) ds + q_0 \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a_{22} d\sigma \right] \quad (40.37b)$$

Введем следующее сокращенное обозначение: если функция $h(t)$ непрерывна в интервале $0 \leq t \leq T$, то положим

$$\bar{h}(t) = \max_{0 < \sigma < t} |h(\sigma)|.$$

Пусть

$$\tilde{p}(t, \varepsilon) = \max_{0 < \sigma < t} |p(\sigma, \varepsilon)| e^{-\lambda \sigma}, \quad \tilde{q}(t, \varepsilon) = \max_{0 < \sigma < t} |q(\sigma, \varepsilon)| e^{-\lambda \sigma}, \quad (40.38)$$

где λ — вспомогательная постоянная, которая будет определена позднее. Тогда

$$|p(t, \varepsilon)| \leq \tilde{p}(t, \varepsilon) e^{\lambda t}, \quad |q(t, \varepsilon)| \leq \tilde{q}(t, \varepsilon) e^{\lambda t}. \quad (40.39)$$

Прием, связанный с введением множителя $e^{\lambda t}$, уже использовался ранее в подобном случае, например Фридрихсом и Вазовым [1].

С помощью (40.39) из (40.37) получаем неравенства

$$|p(t, \varepsilon)| \leq c \left\{ \tilde{p}(t, \varepsilon) \int_0^t e^{\lambda s} ds + \int_0^t |q| ds + \bar{b}_1(t, \varepsilon) + |p_0| \right\}, \quad (40.40a)$$

$$|q(t, \varepsilon)| \leq c \left\{ \tilde{p}(t, \varepsilon) e^{\lambda t} + \bar{b}_2(t, \varepsilon) \right\} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a_{22} d\sigma \right] ds + q_0 \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a_{22} d\sigma \right]. \quad (40.40b)$$

Здесь и далее буква c используется как общее обозначение постоянной, не зависящей от ε , но не обязательно одной и той же в разных формулах.

Для оценки интегралов в (40.40b) воспользуемся предположением о знаке a_{22} . Из него, очевидно, следует, что величина

$$\exp \left[\varepsilon^{-1} \int_0^t a_{22} d\sigma \right]$$

равномерно ограничена сверху в области $0 \leq t \leq T$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Кроме того, можно показать, что интеграл

$$I(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a_{22} d\sigma \right] ds$$

ограничен по абсолютной величине. При $0 \leq t \leq \tau_1 \varepsilon$ это очевидно. При $t > \tau_1 \varepsilon$ имеем

$$I(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau_1 \varepsilon} \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a_{22} d\sigma \right] ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau_1 \varepsilon}^t \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a_{22} d\sigma \right] ds.$$

Ограниченность первого слагаемого справа очевидна. Во втором интеграле $a_{22} \leq -\kappa$, так что это слагаемое не превосходит $\frac{1}{\kappa}$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau_1 \varepsilon}^t e^{\frac{-\kappa(t-s)}{\varepsilon}} ds < \frac{1}{\kappa}$$

На основе полученных оценок из неравенств (40.40) следует

$$|p(t, \varepsilon)| \leq c \left\{ \tilde{p}(t, \varepsilon) \lambda^{-1} e^{\lambda t} + \int_0^t |q| ds + \bar{b}_1(t, \varepsilon) + |p_0| \right\}. \quad (40.41a)$$

$$|q(t, \varepsilon)| \leq c \left\{ \tilde{p}(t, \varepsilon) e^{\lambda t} + \bar{b}_2(t, \varepsilon) + |q_0| \right\}. \quad (40.41b)$$

Подставляя (40.41b) в (40.41a), получим

$$|p(t, \varepsilon)| \leq c \left\{ \tilde{p}(t, \varepsilon) \lambda^{-1} e^{\lambda t} + \bar{b}_1(t, \varepsilon) + \bar{b}_2(t, \varepsilon) + |p_0| + |q_0| \right\},$$

или, деля на $e^{\lambda t}$ и заменяя t на s ,

$$|p(s, \varepsilon)| e^{-\lambda s} \leq c \left\{ \tilde{p}(s, \varepsilon) \lambda^{-1} + \bar{b}_1(s, \varepsilon) + \bar{b}_2(s, \varepsilon) + |p_0| + |q_0| \right\}.$$

В интервале $0 \leq s \leq t$ правая часть принимает свое максимальное значение при $s=t$. Поэтому из определения (40.38) следует

$$\tilde{p}(t, \varepsilon) \leq c \left\{ \tilde{p}(t, \varepsilon) \lambda^{-1} + \bar{b}_1(t, \varepsilon) + \bar{b}_2(t, \varepsilon) + |p_0| + |q_0| \right\}.$$

Если взять в качестве λ некоторое число, большее чем c (множитель $e^{\lambda t}$ был введен ранее именно с этой целью), то можно решить последнее неравенство относительно $\tilde{p}(t, \varepsilon)$, и мы получим

$$\tilde{p}(t, \varepsilon) \leq c \left\{ \bar{b}_1(t, \varepsilon) + \bar{b}_2(t, \varepsilon) + |p_0| + |q_0| \right\}. \quad (40.42)$$

Умножим это неравенство на $e^{\lambda t}$, затем обратимся к формулам (40.39) и положим $t=T$. Тогда получим

$$|p| \leq c \left\{ \bar{b}_1(T, \varepsilon) + \bar{b}_2(T, \varepsilon) + |p_0| + |q_0| \right\}. \quad (40.43)$$

Аналогичное неравенство для $|q|$ получается подстановкой (40.42) в (40.41b). Это завершает доказательство леммы 40.4.

Задача 40.2. Доказать по индукции, что все производные функций $u_r(\tau) - \hat{u}_r(\tau)$ по τ являются функциями типа пограничного слоя.

Задача 40.3. С помощью задачи 40.2 и r -кратного интегрирования по частям доказать, что начальные условия (40.24) можно записать в виде

$$x_r(0) = \frac{(-1)^r}{r!} \int_0^\infty \tau^r \frac{d^{r+1}u_r}{d\tau^{r+1}} d\tau.$$

Пример:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, & \varepsilon \frac{dy}{dt} &= x^2 - y^2, \\ x(0) &= 1, & y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Корни $g(x, y) = 0$ равны $y = x$, $y = -x$. Так как $\frac{\partial g}{\partial y} = -2y$, то оба корня устойчивы при $y > 0$. Так как $g(x, y) > 0$ при $|y| < |x|$, то

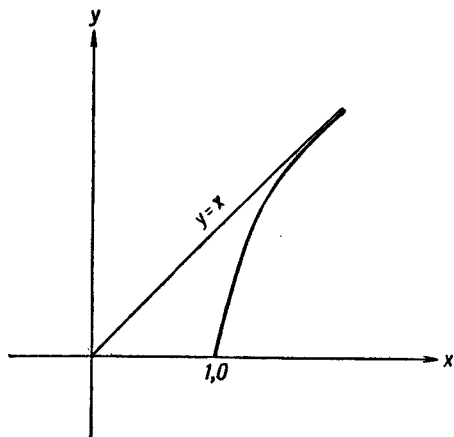


Рис. 40.1.

начальная точка $(1, 0)$ лежит в области влияния устойчивого корня $y = x$, так что в нашем примере $\varphi(x) \equiv x$ (см. рис. 40.1). Укороченная задача

$$\frac{dx_0}{dt} = y_0, \quad y_0 = x_0, \quad x_0(0) = 1$$

имеет решение

$$x_0(t) = e^t, \quad y_0(t) = e^t.$$

После преобразования растяжения задача примет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon y, \quad \frac{dy}{d\tau} = x^2 - y^2.$$

Следовательно, (u_0, v_0) определяется из начальной задачи

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{d\tau} &= 0, & \frac{dv_0}{d\tau} &= u_0^2 - v_0^2, \\ u_0(0) &= 1, & v_0(0) &= 0, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$u_0(\tau) \equiv 1, \quad v_0(\tau) = \text{th } \tau.$$

В силу (40.18)

$$\hat{u}_0(\tau) = 1, \quad \hat{v}_0(\tau) = 1.$$

Применяя теорему 40.1 при $m=0$, получим, что функции

$$X_0(t) = e^t, \quad Y_0(t) = e^t + \text{th} \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) - 1$$

аппроксимируют решение с точностью $O(\varepsilon)$ в любом интервале $0 \leq t \leq T_0 < \infty$.

Чтобы построить следующее приближение, вычислим из (40.23) начальное значение x_{10} функций $x_1(t)$ и $\hat{u}_1(\tau)$. Получим

$$x_{10} = \int_0^{\infty} (\text{th } \tau - 1) d\tau = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\log \text{ch } \tau - \tau] = -\log 2.$$

Дифференциальные уравнения относительно $x_1(t)$, $y_1(t)$ имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = 2x_0x_1 - 2y_0y_1,$$

т. е.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - \frac{1}{2}, \quad y_1 = x_1 - \frac{1}{2}.$$

Решение с начальным условием $x_1(0) = -\log 2$ равно

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left(-\frac{1}{2} - \log 2 \right) e^t + \frac{1}{2}, \\ y_1(t) &= \left(-\frac{1}{2} - \log 2 \right) e^t. \end{aligned}$$

Далее, u_1, v_1 определяются из (40.13), т. е. из системы

$$\frac{du_1}{d\tau} = \text{th } \tau, \quad \frac{dv_1}{d\tau} = 2u_1 - (2 \text{th } \tau) v_1$$

с начальными условиями $u_1(0) = v_1(0) = 0$. Получается

$$u_1(\tau) = \log \operatorname{ch} \tau, \quad v_1(\tau) = 2 \operatorname{ch}^{-2} \tau \int_0^{\tau} \operatorname{ch}^2 \sigma \log \operatorname{ch} \sigma d\sigma.$$

Функция $v_1(\tau)$ не является элементарной.

Дифференциальные уравнения и начальные условия для \hat{u}_1, \hat{v}_1 имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}_1}{d\tau} &= 1, & \frac{d\hat{v}_1}{d\tau} &= 2\hat{u}_1 - 2\hat{v}_1, \\ \hat{u}_1(0) &= x_1(0) = -\log 2, & \hat{v}_1(0) &= y_1(0) = -\log 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\hat{u}_1(\tau) = -\log 2 + \tau, \quad \hat{v}_1(\tau) = -\frac{1}{2} - \log 2 + \tau.$$

Объединяя эти результаты, можно написать

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= e^t + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \log 2 \right) \right] e^t + \log 2 + \\ &\quad + \log \operatorname{ch} \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) - \frac{t}{\varepsilon} \Big] \varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ y(t, \varepsilon) &= e^t + \operatorname{th} \frac{t}{\varepsilon} - 1 + \left[\left(\frac{1}{2} + \log 2 \right) - \left(\frac{1}{2} + \log 2 \right) e^t + \right. \\ &\quad \left. + v_1 \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) - \frac{t}{\varepsilon} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

41. Нелинейная двухточечная краевая задача¹⁾

41.1. Введение

Для начальных задач, рассмотренных в § 39 и 40, существование решения следует, по крайней мере локально, из обычных теорем существования теории дифференциальных уравнений. Для двухточечных краевых задач это уже несправедливо. Для линейных задач, изученных в § 37 и 38, этот вопрос не вызывал серьезных трудностей, так как там существование решения было следствием необращения в нуль некоторого определителя, образованного из фундаментальной системы решений. Для нелинейных задач такого простого критерия не существует.

¹⁾ См. добавление 2, § 2. — *Прим. ред.*

Простым примером сингулярно возмущенной задачи с двухточечными краевыми условиями, не имеющей решения, является уравнение

$$\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

с краевыми условиями $x=\alpha$ при $t=0$, $x=\beta$ при $t=1$, α, β — не зависящие от ε постоянные. Соответствующее укороченное уравнение

$$\frac{dx_0}{dt^2} = 0$$

имеет решение, удовлетворяющее краевому условию $x=\alpha$ при $t=0$, а также решение, удовлетворяющее условию $x=\beta$ при $t=1$. Тем не менее полная краевая задача при малых ε совсем не имеет решения, если только $\alpha \neq \beta$. В самом деле, дифференциальное уравнение можно точно решить в квадратурах, и тогда оказывается, что все решения, удовлетворяющие условию $x=\alpha$ при $t=0$, для всех t лежат в интервале $|x-\alpha| < \varepsilon$.

Задача 41.1. Доказать предыдущее утверждение.

В связи с этим примером не удивительно, что до сих пор изучались только весьма специальные классы краевых задач для нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Разными авторами при различных предположениях были доказаны теоремы о сходимости для задач второго и третьего порядков: Мизес [1], Коддингтон и Левинсон [1], Олейник и Жижина [1], Бриш [1], Хабер и Левинсон [1], Левинсон [2]. В работах Вазова [6], Вишика и Люстерника [2], [7], Васильевой [10] и Харриса [4] даются схемы построения решений в виде асимптотических рядов.

Мы рассмотрим здесь только частный, но важный случай скалярного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (41.1)$$

с краевыми условиями

$$x=\alpha \text{ при } t=0, \quad x=\beta \text{ при } t=1, \quad (41.2)$$

причем α и β не зависят от ε . Выбор $t=0$ и $t=1$ в качестве граничных точек не является, конечно, существенным. Если F достаточно регулярно зависит от t и ε , то также не возникает серьезных усложнений.

41.2. Квазилинейные задачи

Единственным случаем, в котором не возникает очень больших сложностей при построении асимптотического разложения и который будет здесь рассмотрен, является квазилинейный случай, когда $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ имеет вид

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = h(x) \frac{dx}{dt} + k(x). \quad (41.3)$$

Чтобы облегчить сравнение с нашими прежними исследованиями, положим $\frac{dx}{dt} = y$ и запишем задачу в виде системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \varepsilon \frac{dy}{dt} = h(x)y + k(x). \quad (41.4)$$

Исходя из опыта с линейным случаем, можно ожидать, что граничная точка, около которой возникает пограничный слой — в предположении, что существует сходящееся решение, — будет зависеть от знака коэффициента при старшей производной в укороченном уравнении, т. е. от знака $h(x)$. В свою очередь этот знак сам может теперь зависеть от решения. Эти замечания обуславливают следующие предположения относительно укороченной задачи.

Предположение (G). Укороченная задача, определяемая уравнениями

$$\frac{dx_0}{dt} = y_0, \quad 0 = h(x_0)y_0 + k(x_0), \quad (41.5a)$$

$$x_0 = \beta \quad \text{при} \quad t = 1, \quad (41.5b)$$

имеет решение $x_0 = x_0(t)$, $y_0 = y_0(t)$, такое, что

$$h(x_0(t)) \leq -\kappa < 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (41.6)$$

Функции $h(x)$, $k(x)$ бесконечно дифференцируемы при

$$|x - x_0(t)| < A$$

(A — некоторая постоянная), $0 \leq t \leq 1$.

Вместо условия (G) мы могли бы наложить аналогичное условие (G^*), что система (41.5a) имеет решение $x_0^*(t)$, для которого $x_0^*(0) = a$ и $h(x_0^*(t)) \geq \kappa > 0$. Отдельного исследования на основе предположения (G^*) не требуется, так как если (G^*) выполнено, то замена переменных $t = 1 - t^*$, $y = -y^*$ приводит систему (41.4) к виду

$$\frac{dx}{dt^*} = y^*, \quad \varepsilon \frac{dy^*}{dt^*} = -h(x)y^* + k(x),$$

а краевые условия (41.2) — к виду $x = \beta$ при $t^* = 0$, $x = \alpha$ при $t^* = 1$. Функция $x_0^*(1 - t^*)$, зависящая от t^* , удовлетворяет соответствующему укороченному уравнению и краевому условию $x_0^* = \alpha$ при $t^* = 1$. Следовательно, преобразованное уравнение удовлетворяет предположению (G).

Заметим, что предположения (G) и (G*) не являются взаимно исключающими. Например, система

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \varepsilon \frac{dy}{dt} = xy$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} x &= 1 && \text{при} && t = 0, \\ x &= -1 && \text{при} && t = 1 \end{aligned}$$

имеет укороченную систему

$$\frac{dx_0}{dt} = y_0, \quad 0 = y_0,$$

которой удовлетворяют как функция $x_0(t) \equiv -1$, так и функция $x_0^*(t) \equiv 1$, так что оба предположения (G) и (G*) выполнены.

Как и в § 40, дифференциальная система (41.4) может быть формально удовлетворена рядами вида

$$\sum_{r=0}^{\infty} x_r(t) \varepsilon^r, \quad \sum_{r=0}^{\infty} y_r(t) \varepsilon^r. \quad (41.7)$$

Так как около точки $t=1$ пограничный слой не ожидается, мы наложим краевые условия на коэффициенты рядов в этой точке. Если потребовать, чтобы

$$x_0(1) = \beta, \quad x_r(1) = 0, \quad r > 0, \quad (41.8)$$

то функции $x_r(t)$, $y_r(t)$ определяются однозначно и ряды (41.7) формально удовлетворяют заданному краевому условию при $t=1$. При этом $x_0(t)$, $y_0(t)$ являются решением укороченной задачи, описанной в предположении (G), а остальные коэффициенты — решениями последовательности линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Оказывается, что, как и в случае начальной задачи, построенные таким образом ряды (41.7) являются асимптотическим представлением искомого решения всюду, кроме пограничного слоя вблизи точки $t=0$. Заметим, что построение этого асимптотического решения в настоящей задаче проще, чем в начальной задаче, так как ряды строятся без исследования пограничного слоя.

С другой стороны, характер решения в области пограничного слоя является здесь более трудным для исследования. Один из методов этого исследования был предложен Вазовым [6] и будет здесь коротко изложен.

В названной статье показано, что дифференциальная система (41.4) имеет такие решения, для которых ряды (41.7) служат асимптотическим представлением во *всем* интервале $0 \leq t \leq 1$. Пусть

$$x^*(t, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} x_r(t) \varepsilon^r, \quad y^*(t, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} y_r(t) \varepsilon^r \quad (41.9)$$

являются таким решением. Можно даже выбрать это решение так, что в точности $x^*(1, \varepsilon) = \beta$, а не только $x^*(1, \varepsilon) \sim \beta$. За исключением весьма частного случая, когда оказывается, что $x_r(t)$ удовлетворяют всем соотношениям $x_0(0) = \alpha$, $x_r(0) = 0$, $r > 0$, функция $x^*(t, \varepsilon)$ еще не является, конечно, решением нашей краевой задачи, так как она не удовлетворяет условию $x = \alpha$ при $t = 0$. Доказательство существования решения (41.9) в какой-то мере сходно с доказательством теоремы 26.1. Однако необходимы нетривиальные видоизменения, так как если систему (41.4) записать в виде (27.1), то ее главная матрица будет иметь одно тождественно равное нулю собственное значение.

Для вычисления связанной с пограничным слоем поправки, которую нужно прибавить к $x^*(t, \varepsilon)$, $y^*(t, \varepsilon)$, чтобы получить истинное решение нашей задачи, Вазов вводит «граничный скачок»

$$\mu = \mu(\varepsilon) = \alpha - x^*(0, \varepsilon) \quad (41.10)$$

и пробует построить истинное решение в виде

$$x(t, \varepsilon) = x^*(t, \varepsilon) + \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r(t, \varepsilon) \mu^r, \quad (41.11a)$$

$$y(t, \varepsilon) = y^*(t, \varepsilon) + \sum_{r=1}^{\infty} \psi_r(t, \varepsilon) \mu^r. \quad (41.11b)$$

Если эти ряды формально подставить в систему (41.4) и затем собрать и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях μ , то получится рекуррентная последовательность линейных дифференциальных уравнений относительно функций φ_r , ψ_r вида

$$\varphi_r' = \psi_r, \quad (41.12a)$$

$$\varepsilon \psi_r' = g_{10}(t, \varepsilon) \varphi_r + g_{01}(t, \varepsilon) \psi_r + q_r(\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}, \psi_1, \dots, \psi_{r-1}, t, \varepsilon). \quad (41.12b)$$

Коэффициенты в (41.12b) представимы в виде асимптотических рядов по степеням ε . Кроме того, q_r является многочленом относительно φ_j , ψ_j , $j \leq r-1$, линейным относительно всех ψ_j и без постоянных и линейных членов относительно φ_j и ψ_j . Вследствие неравенства (41.6) при достаточно малых ε функция $g_{01}(t, \varepsilon)$ отрицательна в интервале $0 \leq t \leq 1$. Чтобы удовлетворить граничным условиям (41.2), наложим условия

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 \text{ при } t=0, & \varphi_1 &= 0 \text{ при } t=1, \\ \varphi_r &= 0 \text{ при } t=0, & \varphi_r &= 0 \text{ при } t=1, \quad r > 1. \end{aligned} \quad (41.13)$$

С помощью теории гл. VII нетрудно последовательно определить асимптотические разложения для φ_r и ψ_r при малых ε . Тогда при достаточно малых ε и μ ряды в (41.11) будут равномерно сходиться и (41.11) будет решением краевой задачи. Доказательство этого утверждения можно провести методом мажорирующих рядов. При этом решающую роль играет тот факт, что $g_{01} < 0$ и что q_r линейно зависит от ψ_j . Именно в этом месте доказательства существенное значение имеет квазилинейный характер дифференциального уравнения.

Исследование показывает, что все $\varphi_r(t, \varepsilon)$ являются функциями типа пограничного слоя, т. е. порядка $O(e^{-xt/\varepsilon})$. Функции $\psi_r(t, \varepsilon)$ имеют порядок $O(\varepsilon^{-1} e^{-xt/\varepsilon})$, так что $\psi_r(0, \varepsilon)$ становится неограниченной при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это не удивительно, так как $y = \frac{dx}{dt}$, а $x(t, \varepsilon)$ имеет в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ разрыв в точке $t=0$.

Приводимая ниже теорема дает точную формулировку результатов этого раздела.

Теорема 41.1. Предположим, что

- (а) действительная функция $x_0(t)$ бесконечно дифференцируема в интервале $0 \leq t \leq 1$;
- (б) действительные функции $h(x)$, $k(x)$ бесконечно дифференцируемы в некотором открытом интервале, содержащем область изменения функции $x_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$;
- (с) $h(x_0(t)) \leq -\alpha < 0$ при $0 \leq t \leq 1$;

$$(d) \frac{dx_0}{dt} = -\frac{k(x_0)}{h(x_0)} \text{ при } 0 \leq t \leq 1 \text{ и } x_0(1) = \beta.$$

Тогда

(а) система двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \varepsilon \frac{dy}{dt} = h(x)y + k(x) \quad (41.4)$$

при всех достаточно малых положительных ε имеет решение $x = x^(t, \varepsilon)$, $y = y^*(t, \varepsilon)$, которое представимо равномерно в ин-*

тервале $0 \leq t \leq 1$ в виде асимптотического ряда по степеням ε при $\varepsilon \rightarrow +0$ и удовлетворяет краевому условию

$$x^*(1, \varepsilon) = \beta.$$

(β) Пусть α — действительное число, и пусть

$$\mu = \mu(\varepsilon) = \alpha - x^*(0, \varepsilon).$$

Существуют такие постоянные μ_0, ε_0 , что для всех α , для которых

$$|\mu| \leq \mu_0 \text{ при всех } \varepsilon \text{ из интервала } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

дифференциальная система (41.4) имеет решение $x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)$, которое удовлетворяет обоим краевым условиям

$$x = \alpha \text{ при } t = 0, \quad x = \beta \text{ при } t = 1$$

и стремится к $x_0(t), y_0(t)$ в интервале $0 < t \leq 1$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

(γ) Упомянутое в пункте (β) решение представимо в виде рядов (41.11а) и (41.11б), которые сходятся при $0 < t \leq 1, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и равномерно сходятся в любом подинтервале $0 < \delta \leq t \leq 1, \delta > 0$. Слагаемые под знаком суммы, входящие в (41.11), представляют собой функции, которые при $\varepsilon \rightarrow +0$ асимптотически равны нулю в интервале $\delta \leq t \leq 1$.

Только что описанный метод не является вполне удовлетворительным. Например, нелегко определить границы μ , в пределах которых ряды в (41.11) сходятся. Кроме того, предпочтительнее было бы получить такое разложение, частичные суммы которого аппроксимировали бы решение с возрастающей точностью при $\varepsilon \rightarrow 0$. В (41.11) точность зависит от величины μ . Теория, свободная от этого недостатка, развита Вишиком и Люстерником [2] и [7]. Она тесно связана с работой этих авторов по линейным задачам, описанной в § 38, а также с методом Васильевой. Следующий раздел содержит очень краткое описание их метода.

Задача 41.2. Решить в элементарных функциях краевую задачу

$$\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} = x \frac{dx}{dt} \quad \text{при} \quad |t| \leq 1,$$

$$x = \alpha \text{ при } t = -1, \quad x = \beta \text{ при } t = 1$$

и изучить решение при $\varepsilon \rightarrow +0$. Обсудить его поведение в свете результатов настоящего раздела.

41.3. Теория Вишика и Люстерника

Асимптотическое исследование задачи (41.4), (41.2) снова начнем с вычисления формального решения в виде рядов (41.7) с начальными условиями (41.8). Далее, чтобы найти поправку, связанную с пограничным слоем, рассмотрим дифференциальную систему после преобразования растяжения $t = \tau \varepsilon$:

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon y, \quad \frac{dy}{d\tau} = h(x)y + k(x). \quad (41.14)$$

По изложенному ранее следует ожидать, что функция $y(t, \varepsilon)$ в решении полной задачи будет неограниченной при $t = \tau = 0$. Характер этой особенности априори не известен, но различные соображения приводят к предположению, что $y(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$. Фактически это был один из результатов метода Вазова, рассмотренного в предыдущем разделе. В соответствии с этим мы попытаемся удовлетворить системе (41.14) формальными рядами вида

$$x = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) \varepsilon^r, \quad y = \sum_{r=-1}^{\infty} v_r(\tau) \varepsilon^r. \quad (41.15)$$

Чтобы удовлетворить заданному краевому условию $x = \alpha$ при $\tau = t = 0$, нужно наложить требование

$$u_0(0) = \alpha, \quad u_r(0) = 0, \quad r > 0. \quad (41.16)$$

Для определения функций $u_r(\tau)$, $v_r(\tau)$ нужны также начальные значения $v_r(0)$, $r = -1, 0, 1, \dots$, которые не известны. Таким образом, в данной задаче мы встречаемся с положением, обратным тому, которое имело место в аналогичных вычислениях для начальной задачи. Там задача после растяжения была разрешима сама по себе, и трудность заключалась в определении начальных данных для построения решения в виде ряда в уравнении без растяжения.

Снова введем вспомогательные функции $\hat{u}_r(\tau)$, $\hat{v}_r(\tau)$, $r = 0, 1, \dots$. Они определяются точно так же, как в (40.14) — (40.16). В настоящей задаче их можно рассматривать как известные функции. Для удобства положим по определению $\hat{v}_{-1}(\tau) \equiv 0$. Тогда, в частности, имеем

$$\hat{u}_0(\tau) \equiv x_0(0) = x_{00}, \quad \hat{v}_{-1}(\tau) \equiv 0. \quad (41.17)$$

Следуя идее, которая с успехом применялась для начальной задачи, попытаемся определить $u_r(\tau)$, $v_{r-1}(\tau)$ так, чтобы

$u_r(\tau) - \hat{u}_r(\tau)$, $v_{r-1}(\tau) - \hat{v}_{r-1}(\tau)$ были функциями типа пограничного слоя. Тогда мы должны потребовать, чтобы

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (u_r(\tau) - \hat{u}_r(\tau)) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} (v_{r-1}(\tau) - \hat{v}_{r-1}(\tau)) = 0 \quad (41.18)$$

для всех $r \geq 0$ и, в частности, ввиду (41.17)

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} u_0(\tau) = x_{00}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} v_{-1}(\tau) = 0. \quad (41.19)$$

Подставляя ряды (41.15) в (41.14), получим, что $u_0(\tau)$, $v_{-1}(\tau)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\frac{du_0}{d\tau} = v_{-1}, \quad \frac{dv_{-1}}{d\tau} = h(u_0) v_{-1}. \quad (41.20)$$

Если наш метод пригоден, то эта дифференциальная система должна иметь такое решение, которое удовлетворяет одному начальному условию $u_0(0) = \alpha$ и асимптотическим соотношениям (41.19). То, что это имеет место, доказывается у Вишика и Люстерника [2]. Мы же довольствуемся следующим эвристическим рассуждением. Из системы (41.20) следует соотношение

$$\frac{dv_{-1}}{du_0} = h(u_0),$$

которое приводит к равенству

$$v_{-1}(\tau) = \int_{\alpha}^{u_0(\tau)} h(s) ds + v_{-1}(0).$$

Если (41.19) имеет место, то при $\tau \rightarrow \infty$ отсюда получаем

$$v_{-1}(0) = - \int_{\alpha}^{x_{00}} h(s) ds. \quad (41.21)$$

Мы опустим доказательство того, что при таком выборе $v_{-1}(0)$ и при $u_0(0) = \alpha$ (см. (41.16)) решение системы (41.20) обладает тем свойством, что $u_0(\tau) - \hat{u}_0(\tau)$, $v_{-1}(\tau) - \hat{v}_{-1}(\tau)$ являются функциями типа пограничного слоя, по крайней мере, если $\alpha - x_{00}$ не слишком велико.

После такого определения $u_0(\tau)$ и $v_{-1}(\tau)$ мы можем написать дифференциальные уравнения для других функций $u_r(\tau)$, $v_{r-1}(\tau)$. Они имеют вид

$$\frac{du_r}{d\tau} = v_{r-1}, \quad (41.22a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{r-1}}{d\tau} = & [h'(u_0) v_{-1}(\tau) + k'(u_0)] u_r + h(u_0) v_{r-1} + \\ & + \tilde{q}_{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}, v_{-1}, v_0, \dots, v_{r-2}, \tau), \end{aligned} \quad (41.22b)$$

где \tilde{q}_{r-1} является многочленом относительно u_j, v_j . Для каждого $r > 0$ это есть линейная система, которую нужно решить при условиях, что $u_r(0) = 0$ и что $u_r(\tau) - \hat{u}_r(\tau), v_{r-1}(\tau) - \hat{v}_{r-1}(\tau)$ должны быть функциями типа пограничного слоя. Существование такого решения можно доказать с помощью асимптотической теории для линейных дифференциальных уравнений, однако оказывается, что простой точной формулы для начальных значений $v_{r-1}(0)$, аналогичной формуле (40.24), не существует. Это, конечно, вычислительный недостаток данного метода.

После того как $x_r(t), y_r(t), u_r(\tau), v_r(\tau), \hat{u}_r(\tau), \hat{v}_r(\tau)$ вычислены вплоть до $r = m$, истинное решение полной краевой задачи (41.4), (41.2) можно приближенно представить с помощью той же самой асимптотической формулы, что и в теореме 40.1. Доказательство этого для краевой задачи мало отличается от доказательства более легкой теоремы 40.1, за исключением того, что вначале должно быть независимо доказано существование решения краевой задачи. Одно из таких доказательств существования приводится у Вишика и Люстерника [2]. Другое можно найти у Коддингтона и Левинсона [1]. Мы не будем на этом подробно останавливаться.

В работе Вишика и Люстерника [7] только что описанная теория переносится на некоторые уравнения, не являющиеся квазилинейными. Эти уравнения имеют вид (41.1), причем основное условие на F заменяется условием, что для некоторого показателя степени l из интервала $0 < l \leq 2$ функция $z^{-l}F(x, z)$ остается ограниченной при $z \rightarrow +\infty$. В квазилинейном случае в качестве l можно взять единицу. Полученные в этом случае разложения более сложны и могут содержать нецелые степени ε .

41.4. Другие нелинейные краевые задачи

Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи, не являющиеся квазилинейными, могут обладать такими асимптотическими свойствами, которые не имеют аналога в линейной теории. Хорошим элементарным примером этого является дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} = 1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \quad \varepsilon > 0, \quad (41.23)$$

с краевыми условиями

$$x = a \text{ при } t = 0, \quad x = b \text{ при } t = 1. \quad (41.24)$$

Посредством элементарных квадратур можно проверить, что если $|b-a| < 1$, то для решения равномерно в интервале $0 \leq t \leq 1$ справедливо представление

$$v(t, \varepsilon) = \varepsilon \log \operatorname{ch} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(t - \frac{a-b+1}{2} \right) \right] + \frac{a+b-1}{2} + O(\varepsilon). \quad (41.25)$$

Задача 41.3. Доказать формулу (41.25).

Из (41.25) непосредственно следует, что равномерно в интервале $0 \leq t \leq 1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} x(t, \varepsilon) = \begin{cases} a-t & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}(a-b+1), \\ t+b-1 & \text{при } \frac{1}{2}(a-b+1) \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (41.26)$$

Такое поведение решения существенно отличается от всего того, что встречалось нам в рассмотренных до сих пор сингулярно возмущенных задачах. Тем не менее имеются некоторые общие свойства. Прежде всего предел $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, т. е. правая часть в (41.26), удовлетворяет укороченному уравнению

$$1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0 \quad (41.27)$$

во всех точках интервала $0 \leq t \leq 1$, кроме одной. То же самое имело место и для других сингулярно возмущенных задач. Однако вместо пограничного слоя неравномерной сходимости самого решения мы имеем теперь некоторый внутренний «слой неравномерности», именно около точки $t = \frac{1}{2}(a-b+1)$, и неравномерная сходимость присуща первой производной $x(t, \varepsilon)$, а не самому решению $x(t, \varepsilon)$. Отсутствие пограничного слоя связано с тем, что при $\varepsilon \rightarrow +0$ никакое краевое условие не теряется: функция в правой части (41.26) удовлетворяет обоим крайним условиям (41.24).

Заметим, что предельная функция в (41.26) определяется не единственным образом из условия, что она должна быть составлена из двух решений укороченного уравнения (41.27), каждое из которых удовлетворяет одному из двух крайних условий. Другой такой функцией является функция, равная $a+t$ при $0 \leq t \leq \frac{1}{2}(b-a+1)$ и $-t+b+1$ при $\frac{1}{2}(b-a+1) \leq t \leq 1$. В чем же тогда причина того, что не эта последняя функция, а функция из (41.26) является пределом решения полной задачи? Такое поведение можно объяснить, обратившись к теории

§ 39. С этой целью мы вернемся к обозначениям этого параграфа, заменяя скалярное уравнение второго порядка (41.23) системой

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= 1 - y^2. \end{aligned} \quad (41.28)$$

Функция, обозначенная в § 39 через $g(x, y)$, равна здесь $1 - y^2$. Из двух корней $g(x, y) = 0$ один, $\varphi(x) \equiv 1$, удовлетворяет предположению (D'), в то время как другой, $\varphi(x) \equiv -1$, не удовлетворяет. Другими словами, только $\varphi(x) \equiv 1$ является устойчивым корнем. Соответствующая укороченная система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad y \equiv 1. \quad (41.29)$$

Функция $t + b - 1$ из формулы (41.26) является единственным решением этой системы, принимающим заданное граничное значение b при $t = 1$. Из теоремы 39.1 мы знаем, что любое решение полной системы (41.28), которое для некоторого значения t находится не слишком далеко от этого решения (41.29), будет стремиться к нему при $\varepsilon \rightarrow +0$ для всех больших t при условии, что выполнены и другие предположения.

Функция $a - t$ из (41.26) является решением укороченной системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad y = -1,$$

которая соответствует неустойчивому корню $\varphi(x) \equiv -1$. Однако замена $t = -t'$ переводит (41.28) в систему, для которой $a - t$, т. е. $a + t'$, соответствует устойчивому корню. Другими словами, если решение $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ уравнения (41.28) при некотором t лежит в области влияния корня $\varphi(x) \equiv -1$, то его продолжение в направлении *меньших* значений t при $\varepsilon \rightarrow +0$ стремится к $(a - t, -1)$. Мы можем сделать нашу терминологию более удобной, называя корень «положительно устойчивым», если он устойчив в смысле нашего прежнего определения при $t \rightarrow +\infty$, и «отрицательно устойчивым», если преобразование $t = -t'$ приводит к задаче, в которой корень устойчив при $t' \rightarrow +\infty$.

В силу предыдущего обсуждения становится понятным, почему именно правая часть (41.26), а не функция, составленная из $a + t$ и $-t + b + 1$, является пределом решения $x(t, \varepsilon)$ полной задачи. В статье Хабера и Левинсона [1] дается доказательство сходимости для более общих сингулярно возмущенных задач типа (41.23), (41.24). Существенным предположением в этих

задачах является, конечно, требование существования двух различных непересекающихся решений укороченного уравнения $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$, соответствующего полному уравнению (41.1). Это показывает, что такие явления не могут иметь места, если $F(x, y)$ линейна по y .

А. Б. Васильева [10], [11] объединяя некоторые из идей Хабера и Левинсона [1] со своим методом построения асимптотического ряда для решения начальной задачи, описанным в § 40, разработала методику вычисления асимптотических рядов для решений таких задач. Подробное описание этой теории выходит за рамки нашей книги. Мы довольствуемся кратким объяснением формального построения по методу Васильевой на примере (41.28).

Нам понадобится небольшое обобщение теории, рассмотренной в § 40. Предположим, что начальные значения α, β в (39.2) зависят от ε таким образом, что для них имеют место асимптотические разложения

$$\alpha = \alpha(\varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \varepsilon^r, \quad \beta = \beta(\varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (41.30)$$

Простое повторение вычислений § 40 показывает, что тогда необходимы следующие изменения. Начальные значения для функций $u_r(\tau), v_r(\tau)$ должны теперь иметь вид

$$u_r(0) = \alpha_r, \quad v_r(0) = \beta_r, \quad r = 0, 1, \quad (41.31)$$

вместо выражений по формуле (40.10), а формулой для начальных значений $x_r(0) = x_{r0}$ будет теперь не (40.24), а

$$\hat{u}_r(0) = x_r(0) = x_{r0} = \alpha_r + \int_0^{\infty} \left(\frac{du_r}{d\tau} - \frac{d\hat{u}_r}{d\tau} \right) d\tau, \quad r > 0. \quad (41.32)$$

Наша цель — получить разложение в ряд при $\varepsilon \rightarrow +0$ решения краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \varepsilon \frac{dy}{dt} = 1 - y^2, \quad (41.33)$$

$$x(0) = a, \quad x(1) = b, \quad |b - a| < 1 \quad (41.34)$$

с помощью метода А. Б. Васильевой, не используя известное точно элементарное решение. С этой целью мы будем считать, что решение $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ определяется своим значением — пока еще не известным — в точке $t = t_0$, в которой ожидается разрыв предельной функции. Поэтому мы положим

$$x(t_0, \varepsilon) = \lambda(\varepsilon), \quad y(t_0, \varepsilon) = \mu(\varepsilon) \quad (41.35)$$

и будем рассматривать определение t_0 , $\lambda(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ как часть нашей задачи, т. е. будем рассматривать решение полной задачи как функцию его начальных значений λ , μ при $t=t_0$:

$$x = x(t, \varepsilon; \lambda, \mu), \quad y = y(t, \varepsilon; \lambda, \mu). \quad (41.36)$$

Величины λ , μ должны тогда удовлетворять паре уравнений

$$x(0, \varepsilon; \lambda, \mu) = a, \quad x(1, \varepsilon; \lambda, \mu) = b. \quad (41.37)$$

Далее А. Б. Васильева вводит существенное предположение, что решения $\lambda(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ уравнений (41.37) имеют асимптотические разложения

$$\lambda(\varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r \varepsilon^r, \quad \mu(\varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \mu_r \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (41.38)$$

После того как допущено такое представление $\lambda(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$, формальные вычисления, иллюстрируемые ниже в примере, оказываются достаточно простыми. Доказательство (41.38) и законности всей процедуры содержится в статье А. Б. Васильевой [10] и здесь будет опущено.

Вычисление функций в (41.36) можно провести методом, рассмотренным в § 40 для начальных задач. Очевидно, при этом появятся два ряда: один для $t \leq t_0$, другой для $t \geq t_0$. Опишем вычисления более подробно. Чтобы облегчить сравнение с § 40, введем переменные

$$\begin{aligned} t^+ &= t - t_0, & t^- &= t_0 - t, \\ \tau^+ &= \frac{t^+}{\varepsilon}, & \tau^- &= \frac{t^-}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Далее нужно решить две начальные задачи:

$$\frac{dx}{dt^+} = y, \quad \varepsilon \frac{dy}{dt^+} = 1 - y^2, \quad t^+ \geq 0;$$

$$x = \lambda(\varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r \varepsilon^r, \quad y = \mu(\varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \mu_r \varepsilon^r \quad \text{при } t^+ = 0; \quad (41.39_+)$$

$(\lambda(\varepsilon), \mu(\varepsilon))$ принадлежит области влияния устойчивого корня $\Phi^+(x) \equiv +1$;

$$\frac{dx}{dt^-} = -y, \quad \varepsilon \frac{dy}{dt^-} = y^2 - 1, \quad t^- \geq 0;$$

$$x = \lambda(\varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r \varepsilon^r, \quad y = \mu(\varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \mu_r \varepsilon^r \quad \text{при } t^- = 0; \quad (41.39_-)$$

$(\lambda(\varepsilon), \mu(\varepsilon))$ принадлежит области влияния устойчивого корня $\Phi^-(x) \equiv -1$.

Решения этих двух задач можно получить путем простых вычислений по методу § 40, видоизмененному в соответствии с формулами (41.31), (41.32). Тогда оказывается, что две формулы, соответствующие в теореме 40.1 ряду для $x(t, \varepsilon)$ при $m=1$, имеют вид

$$x(t, \varepsilon) = \left\{ t^+ + \lambda_0 + \left(\lambda_1 + \log \frac{1 + \mu_0}{2} \right) \varepsilon \right\} + \\ + \left\{ \lambda_0 + \left(\lambda_1 - \log \frac{(1 + \mu_0) e^{\tau^+} + (1 - \mu_0) e^{-\tau^+}}{2} \right) \varepsilon \right\} - \\ - \left\{ \lambda_0 + \left(\lambda_1 + \log \frac{(1 + \mu_0) e^{\tau^+}}{2} \right) \varepsilon \right\} + R^+(t, \varepsilon) \varepsilon^2 \quad \text{при } t^+ \geq 0; \quad (41.40_+)$$

$$x(t, \varepsilon) = \left\{ t^- + \lambda_0 + \left(\lambda_1 + \log \frac{1 - \mu_0}{2} \right) \varepsilon \right\} + \\ + \left\{ \lambda_0 + \left(\lambda_1 + \log \frac{(1 + \mu_0) e^{-\tau^-} + (1 - \mu_0) e^{\tau^-}}{2} \right) \varepsilon \right\} - \\ - \left\{ \lambda_0 + \left(\lambda_1 + \log \frac{(1 - \mu_0) e^{\tau^-}}{2} \right) \varepsilon \right\} + R^-(t, \varepsilon) \varepsilon^2 \quad \text{при } t^- \geq 0. \quad (41.40_-)$$

Задача 41.4. Доказать формулы (41.40).

Сумма заключенных в фигурные скобки второго и третьего слагаемых в каждой формуле является экспоненциально малой в соответствующей граничной точке, т. е. при $t^+ = 1 - t_0$ и $t^- = t_0$ соответственно. Чтобы краевые условия выполнялись тождественно по ε , нужно наложить требования

$$t_0 + \lambda_0 = a, \quad 1 - t_0 + \lambda_0 = b, \quad (41.41)$$

$$\lambda_1 + \log \frac{1 + \mu_0}{2} = 0, \quad \lambda_1 + \log \frac{1 - \mu_0}{2} = 0. \quad (41.42)$$

Из первой пары уравнений следует

$$t_0 = \frac{(a - b + 1)}{2}, \quad \lambda_0 = \frac{(a + b - 1)}{2}. \quad (41.43)$$

а из второй —

$$\lambda_1 = \log 2, \quad \mu_0 = 0. \quad (41.44)$$

Продолжая таким образом, можно последовательно вычислить пары постоянных (λ_r, μ_{r-1}) , $r=1, 2, \dots$, с помощью следующих членов разложения $x(t, \varepsilon)$ в соответствии с теоремой 40.1. При этом существование единственных решений (λ_r, μ_{r-1}) должно

быть, конечно, доказано как часть всей задачи обоснования метода. Приближенное решение (41.40) можно теперь записать в более простом виде

$$x(t, \varepsilon) = \begin{cases} a - t + \log \left[1 + e^{\frac{2t-a+b-1}{\varepsilon}} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2), & 0 \leq t \leq \frac{a-b+1}{2}; \\ t+b-1 + \log \left[1 + e^{\frac{2t-a+b-1}{\varepsilon}} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2), & \frac{a-b+1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Задача 41.5. Получить последнюю формулу элементарным методом непосредственно из исходной краевой задачи.

Задача 41.6. Вычислить $y(t, \varepsilon) = \frac{dx(t, \varepsilon)}{dt}$ с равномерной ошибкой порядка $O(\varepsilon^2)$: (а) тем же методом, как было вычислено $x(t, \varepsilon)$ в этом разделе; (б) непосредственно из исходной краевой задачи.

Основная идея метода, изложенного в этом разделе, может быть применена к различным другим типам сингулярно возмущенных задач. Описание этого метода дается в статье А. Б. Васильевой [7]. Более детальное изложение содержится в ее статье [10]. В общем случае n -мерной задачи, вырождающейся при $\varepsilon \rightarrow 0$ в m -мерную задачу, $m < n$, краевые условия для интервала $0 \leq t \leq 1$ можно записать в виде

$$B(x(0), y(0), x(1), y(1)) = 0, \quad (41.45)$$

где левая часть является некоторой данной n -мерной векторной функцией. Для решения краевой задачи в (41.45) вместо x и y подставляется решение начальной задачи в виде ряда, построенного в соответствии с теоремой 40.1, причем начальные значения рассматриваются как неизвестные и определяются из (41.45). Точка, в которой должны быть заданы начальные значения, зависит от конкретной задачи. Она может быть одной из конечных точек, или, как в примере этого раздела, внутренней точкой, что должно быть определено в ходе решения задачи. Прежде чем эти общие замечания могут быть конкретизированы применительно к данной задаче, необходимо предварительное исследование. Кроме того, для таких нелинейных краевых задач не существует простых общих теорем существования и единственности. Частью каждой задачи — и не самой простой — является выяснение вопроса о существовании и единственности решения. Не удивительно поэтому, что тот план решения краевых задач, о котором здесь шла речь, требует преодоления значительных трудностей для своего претворения. Большая часть работы в этом направлении была сделана А. Б. Васильевой.

В ее статьях рассмотрены также «многоточечные краевые задачи», т. е. задачи, в которых дополнительные условия задаются не только в двух граничных точках, но также в некоторых внутренних точках.

42. Расщепление общих линейных сингулярно возмущенных систем

42.1. Постановка задачи

Линейные однородные сингулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений относятся в принципе к общему классу задач, рассмотренных в гл. VII. Любую линейную систему с полюсом по отношению к параметру можно локально записать в виде $\varepsilon^h y' = A(x, \varepsilon)y$, если положение и порядок полюса не зависят от x . Показатель степени h является при этом максимальным порядком полюсов, имеющих место в n скалярных уравнениях, составляющих систему.

Однако при вынесении в качестве множителя наибольшей отрицательной степени ε из матрицы коэффициентов уничтожаются именно те свойства системы, которые важны в теории сингулярных возмущений, так как члены, которые оказывают решающее влияние на асимптотическое поведение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$, могут стать малыми при умножении их на положительную степень ε .

Этот недостаток теории гл. VII можно преодолеть, выделяя в каждом уравнении в отдельности ту степень ε , которая определяет наивысший порядок полюса в этом уравнении. Тогда система примет вид

$$\varepsilon^H \frac{dy}{dx} = A(x, \varepsilon)y, \quad (42.1)$$

где H — диагональная матрица, у которой диагональные элементы являются неотрицательными целыми числами. Они выбираются таким образом, что их нельзя уменьшить при условии, что $A(x, \varepsilon)$ должна быть ограниченной при $\varepsilon=0$. Форма (42.1) является именно такой, которая нужна в теории сингулярных возмущений. Она обобщается естественным образом на неоднородные и нелинейные уравнения.

Методы гл. VII не переносятся непосредственно на систему (42.1). Главное препятствие заключается в том, что матрица ε^H в противоположность скалярному множителю ε^h не коммутирует с другими матрицами, кроме весьма специального класса матриц. Однако мы покажем в этом разделе, что при сравнительно слабых предположениях, заключающихся в отличии от

нуля определенных миноров матрицы $A(0, 0)$ (см. ниже предположение I), система (42.1) посредством некоторого линейного преобразования может быть расщеплена на систему задач с меньшим числом переменных, так что в каждой такой задаче все уравнения имеют полюсы одного и того же порядка.

Обозначая компоненты y в соответствующем порядке, можно представить матрицу H в (42.1) в виде

$$H = \sum_{j=1}^s \oplus h_j I_{m_j}, \quad (42.2)$$

где символ « \oplus » означает, что суммирование нужно понимать в смысле прямой суммы матриц. Через I_{m_j} обозначена единичная матрица порядка m_j и

$$\sum_{j=1}^s m_j = n.$$

Числа h_j являются целыми положительными числами, такими, что

$$h_1 > h_2 > \dots > h_s \geq 0 \quad (42.3)$$

и $1 < s \leq n$. Если $h_s = 0$, то мы имеем дело с сингулярно возмущенной задачей в строгом смысле. Порядок, в котором записаны уравнения, противоположен прежнему порядку, принятому в этой главе. Это сделано для того, чтобы упростить описание метода.

Сделаем в отношении матрицы $A(x, \varepsilon)$ наши обычные предположения: $A(x, \varepsilon)$ должна быть голоморфной по обоим переменным в области $R(x_0, \varepsilon_0, \theta_0)$, определяемой неравенствами $|x| \leq x_0$, $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, $|\arg \varepsilon| \leq \theta_0$, и должна иметь асимптотическое разложение вида

$$A(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x) \varepsilon^r \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, |\arg \varepsilon| \leq \theta_0, \quad (42.4)$$

равномерное в интервале $|x| \leq x_0$.

Без ограничения общности можно предположить, что ни одна строка в $A_0(x)$ не равна тождественно нулю, так как в противном случае из соответствующего уравнения можно было бы выделить более высокую степень ε . Введем теперь существенное для дальнейшего построения требование.

Предположение I. $s-1$ миноров матрицы $A_0(x)$, образованных первыми

$$\sum_{j=1}^k m_j \quad (k=1, 2, \dots, s-1)$$

строками и столбцами $A_0(x)$, не равны нулю при $|x| \leq x_0$.

Заметим, что это предположение не исключает возможности равенства $\det A_0(0) = 0$, так как только определенные миноры матрицы $A_0(0)$ должны быть отличны от нуля. Не исключается также появление точки поворота при $x=0$ с, возможно, очень сложным поведением решений. По-видимому, существует некоторое соотношение между предположением I и возможными точками поворота при $x=0$, которое следовало бы выяснить. Другой вопрос, возникающий в связи с предположением I, касается действия срезающих преобразований на систему вида (42.1). Такие срезающие преобразования переводят (42.1) в систему того же общего вида без существенного изменения формы решений, но с другими матрицами H и $A(x, \varepsilon)$. Можно ли предположение I заменить условием, которое инвариантно относительно срезающего преобразования? Такое условие было бы ближе к существу дела, чем предположение I. Ответ на этот вопрос пока не известен.

Пример. Система

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$$

не удовлетворяет предположению I. Срезающее преобразование

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} z$$

переводит ее в новую систему

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z,$$

для которой предположение I выполнено.

Задача 42.1. Преобразовать скалярное дифференциальное уравнение $\varepsilon^2 u^{(4)} - (x-c)u'' - u = 0$ (c — постоянная) в три различные системы первого порядка, полагая

$$(a) \quad y_1 = u, \quad y_2 = y_1', \quad y_3 = y_2', \quad y_4 = \varepsilon y_3'$$

$$(b) \quad z_1 = u, \quad z_2 = \varepsilon z_1', \quad z_3 = \varepsilon z_2', \quad z_4 = \varepsilon z_3'$$

$$(c) \quad v_1 = u, \quad v_2 = v_1', \quad v_3 = \varepsilon v_2', \quad v_4 = \varepsilon v_3'$$

и проверить, выполняется ли предположение I (после соответствующей перестановки компонент).

Если $P(x, \varepsilon)$ является $(n \times n)$ -матричной функцией, такой, что $\det P(x, \varepsilon) \neq 0$ в $R(x_0, \varepsilon_0, \theta_0)$, то преобразование

$$y = P(x, \varepsilon) u \tag{42.5}$$

переводит систему (42.1) в систему

$$\varepsilon^H u' = B(x, \varepsilon) u, \quad (42.6)$$

где

$$B = \varepsilon^H P^{-1} \varepsilon^{-H} A P - \varepsilon^H P^{-1} P'. \quad (42.7)$$

Наша цель — построить такую матрицу $P(x, \varepsilon)$, чтобы

$$B(x, \varepsilon) = \sum_{j=1}^s \oplus B_{jj}(x, \varepsilon), \quad (42.8)$$

где $B_{jj}(x, \varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка m_j с такими же свойствами регулярности, что и $A(x, \varepsilon)$.

Соотношение (42.7) при условии $\det P \neq 0$ эквивалентно соотношению

$$P' = \varepsilon^{-H} A P - P \varepsilon^{-H} B. \quad (42.9)$$

42.2. Формальное преобразование

Наш метод сходен с методом § 25, за исключением необходимых видоизменений, связанных с не скалярным характером показателя степени H . Мы хотим формально решить (42.9) с помощью рядов для P и B , причем B должна иметь более простую структуру, чем A .

Начнем с расчленения каждой матрицы в (42.9) на четыре блока путем выделения в них первых $(n - m_s)$ столбцов и строк. Если обозначить для краткости

$$h_s = h, \quad \sum_{j=1}^{s-1} \oplus h_j I_{m_j} = K, \quad (42.10)$$

то получим

$$\varepsilon^H = \begin{pmatrix} \varepsilon^K & 0 \\ 0 & \varepsilon^h I \end{pmatrix}. \quad (42.11)$$

Здесь и ниже индекс единичных матриц будет иногда опускаться, если это не вызовет недоразумения.

На первом шаге построения мы удовлетворим (42.9) с помощью матриц $P = Q^1$, $B = C^1$, которые при расчленении на указанные блоки имеют вид

$$Q^1 = \begin{pmatrix} I & Q_{12}^1 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} C_{11}^1 & 0 \\ C_{21}^1 & C_{22}^1 \end{pmatrix}. \quad (42.12)$$

Подставляя (42.11), (42.12) и

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

в (42.9) и выполняя умножение, получим, что (42.9) будет удовлетворено, если выполнены четыре соотношения

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{-K} A_{11} - \varepsilon^{-K} C_{11}^1 - \varepsilon^{-h} Q_{12}^1 C_{21}^1, \\ Q_{12}^{1'} &= \varepsilon^{-K} A_{11} Q_{12}^1 + \varepsilon^{-K} A_{12} - \varepsilon^{-h} Q_{12}^1 C_{22}^1, \\ 0 &= \varepsilon^{-h} A_{21} - \varepsilon^{-h} C_{21}^1, \\ 0 &= \varepsilon^{-h} A_{21} Q_{12}^1 + \varepsilon^{-h} A_{22} - \varepsilon^{-h} C_{22}^1. \end{aligned} \quad (42.13)$$

Исключая C_{22}^1 из второго и четвертого уравнений, получим нелинейное дифференциальное уравнение относительно прямоугольной матрицы Q_{12}^1

$$\varepsilon^K Q_{12}^{1'} = A_{12} + A_{11} Q_{12}^1 - \varepsilon^{K-h} Q_{12}^1 (A_{21} Q_{12}^1 + A_{22}). \quad (42.14)$$

В силу предположения I главный член ряда для $A_{11}(x, \varepsilon)$ по степеням ε имеет отличный от нуля определитель в интервале $|x| \leq x_0$. Вследствие (42.3) и (42.10) диагональные элементы K и $K - hI$ положительны. Отсюда вытекает, что (42.14) может быть формально удовлетворено рядом для Q_{12}^1 по неотрицательным степеням ε . Члены этого ряда можно последовательно вычислить посредством решения линейных алгебраических уравнений, в которых матрица коэффициентов является главным членом $A_{110}(x)$ ряда для $A_{11}(x, \varepsilon)$.

После того как ряд для $Q_{12}^1(x, \varepsilon)$ определен, три других уравнения в (42.13) непосредственно дают формальные ряды для $C_{jk}^1(x, \varepsilon)$. Заметим, в частности, что формально

$$C_{11}^1 = A_{11} - \varepsilon^{K-h} Q_{12}^1 A_{21},$$

так что главный член в C_{11}^1 равен

$$C_{110}^1(x) = A_{110}(x).$$

Следовательно, матрица C^1 , полученная после преобразования, удовлетворяет предположению I.

Отметим следующее очевидное свойство Q^1 , которое вытекает из (42.12) и понадобится в дальнейшем: формальный ряд для матрицы $\varepsilon^h Q^1 \varepsilon^{-h}$ не содержит отрицательных степеней ε .

Далее, после преобразования A в C^1 мы выполним преобразование с помощью матрицы специального вида Q^2 (верхний индекс не является показателем степени):

$$Q^2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q_{21}^2 & I \end{pmatrix} \quad (42.15)$$

и попытаемся определить Q_{21}^2 таким образом, чтобы новая матрица коэффициентов была блочно-диагональной:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Это приводит к уравнению

$$Q^{2'} = \varepsilon^{-h} C^1 Q^2 - Q^2 \varepsilon^{-h} C,$$

которое эквивалентно четырем соотношениям

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{-K} C_{11}^1 - \varepsilon^{-K} C_{11}, \\ 0 &= 0, \\ Q_{21}^{2'} &= \varepsilon^{-h} C_{21}^1 + \varepsilon^{-h} C_{22}^1 Q_{21}^2 - Q_{21}^2 \varepsilon^{-K} C_{11}, \\ 0 &= \varepsilon^{-h} C_{22}^1 - \varepsilon^{-h} C_{22}. \end{aligned} \quad (42.16)$$

Отсюда

$$C_{11} = C_{11}^1, \quad C_{22} = C_{22}^1. \quad (42.17)$$

а Q_{21}^2 должна удовлетворять уравнению

$$Q_{21}^{2'} = \varepsilon^{-h} C_{21}^1 + \varepsilon^{-h} C_{22}^1 Q_{21}^2 - Q_{21}^2 \varepsilon^{-K} C_{11}^1. \quad (42.18)$$

После замены

$$Q_{21}^2 = \tilde{Q}_{21}^2 \varepsilon^{K-h} \quad (42.19)$$

формула (42.18) примет вид

$$\tilde{Q}_{21}^{2'} \varepsilon^K = C_{21}^1 - \tilde{Q}_{21}^2 C_{11}^1 + C_{21}^1 \tilde{Q}_{21}^2 \varepsilon^{K-h}. \quad (42.20)$$

Так как определитель $C_{11}^1(x)$ не равен нулю при $|x| \leq x_0$, то уравнение (42.20) может быть удовлетворено формальным рядом по степеням ε .

Из соотношения (42.19) и вида Q^2 (42.15) следует, что $\varepsilon^h Q^2 \varepsilon^{-h}$ представима в виде ряда без отрицательных степеней ε . А тогда то же самое справедливо в отношении матрицы $Q = Q^1 Q^2$, которая является матрицей преобразования A в C . Кроме того,

$$\det Q = \det Q^1 \cdot \det Q^2 = 1.$$

Последнее соотношение нужно понимать как формальное соотношение между рядами по степеням ε . Вследствие первого уравнения из (42.17) матрица $C(x, \varepsilon)$ также удовлетворяет пред-

положению I, так как главный член $C_0(x)$ ее ряда обладает тем свойством, что его главные миноры порядков

$$\sum_{j=1}^k m_j, \quad k=1, 2, \dots, s-1,$$

не равны нулю при $|x| \leq x_0$.

Полученные результаты сформулируем в виде леммы.

Лемма 42.1. *Если выполнено предположение I, то уравнение (42.9) может быть формально удовлетворено рядами $P=Q$ и $V=C$ по степеням ε , коэффициенты которых голоморфны в интервале $|x| \leq x_0$ и которые обладают следующими свойствами:*

- (a) $C=C_{11} \oplus C_{22}$, причем C_{22} имеет размерность $m_s \times m_s$;
- (b) C удовлетворяет предположению I;
- (c) $\det Q=1$ (как соотношение между формальными степенными рядами);
- (d) $\varepsilon^N Q \varepsilon^{-N}$ является формальным рядом по неотрицательным степеням ε .

Далее, очевидно, что многократное применение этой леммы приведет к полному формальному расщеплению матрицы коэффициентов и превращению ее в блочно-диагональную матрицу с диагональными блоками размерностей m_j , $j=1, 2, \dots, s$. Мы опустим некоторые вполне очевидные детали и сформулируем окончательную теорему.

Теорема 42.1. *Если выполнено предположение I, то уравнение (42.9) может быть формально удовлетворено рядами $P=Q$ и $V=C$ по степеням ε , коэффициенты которых голоморфны в интервале $|x| \leq x_0$ и которые обладают следующими свойствами:*

$$(a) \quad V = \sum_{j=1}^s \oplus B_{jj},$$

где B_{jj} имеет размерность $m_j \times m_j$;

- (b) при $j < s$ определитель главного члена ряда для B_{jj} не равен нулю в интервале $|x| \leq x_0$;
- (c) $\det P=1$ (как соотношение между формальными степенными рядами);
- (d) $\varepsilon^N P \varepsilon^{-N}$ является формальным рядом по неотрицательным степеням ε .

Единственным из этих утверждений, требующим доказательства, является (b). Чтобы доказать его, предположим, что первый шаг построения, описанный в лемме 42.1, уже осуществлен. Следующий шаг носит тот же самый характер, что и первый,

но с меньшей матрицей C_{11} вместо A и матрицей K вместо H . Далее, в силу пункта (b) леммы 42.1 матрица $C_{110}(x)$ неособая. Кроме того, все диагональные элементы K положительны. Следовательно, пункт (b) теоремы 42.1 будет доказан, если мы покажем, что все $B_{jj_0}(x)$, $1 \leq j \leq s$ (а не только при $1 \leq j < s$), имеют не равные нулю определители при условии, что к нашим прежним предположениям добавлены предположения $\det A_0(x) \neq 0$ при $|x| \leq x_0$ и $h_s > 0$. В силу пунктов (c) и (d) теоремы 42.1 из (42.7) получаем соотношение

$$\det B = \det(\varepsilon^H P^{-1} \varepsilon^{-H} A P) + O(\varepsilon) = \det A + O(\varepsilon),$$

откуда следует, что $\det B_0(x) = \det A_0(x)$. Так как

$$\det B_0(x) = \det \sum_{j=1}^s \oplus B_{j j_0}(x) = \prod_{j=1}^s \det B_{j j_0}(x)$$

и $\det A_0(x) \neq 0$ при $|x| \leq x_0$, то мы заключаем, что $\det B_{j j_0}(x) \neq 0$ при $|x| \leq x_0$, $j = 1, 2, \dots, s$.

42.3. Аналитическое преобразование

Из теоремы 42.1 получается *приближенная* блок-диагонализация дифференциального уравнения (42.1), вполне достаточная в применении к определенным задачам для нелинейных дифференциальных уравнений. Это приближенное расщепление, как будет сейчас показано, может быть получено несколькими способами.

Пусть $\hat{P}(x, \varepsilon)$ и $\hat{B}(x, \varepsilon)$ являются матричными функциями, голоморфными в $R(x_0, \varepsilon_0, \theta_0)$ и имеющими равномерные асимптотические разложения в ряды P и B при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. § 9). Те элементы в \hat{B} , которым соответствуют формально равные нулю элементы в B , могут быть взяты тождественно равными нулю. Так как (42.9) эквивалентно (42.7), то из теоремы 42.1 следует

$$\hat{B} \sim \varepsilon^H \hat{P}^{-1} A \hat{P} - \varepsilon^H \hat{P}^{-1} \hat{P}'.$$

Так как преобразование (42.5) с $P = \hat{P}$ переводит (42.1) в систему

$$\varepsilon^H u' = (\varepsilon^H \hat{P}^{-1} A \hat{P} - \varepsilon^H \hat{P}^{-1} \hat{P}') u,$$

то отсюда следует

$$\varepsilon^H \frac{du}{dx} = [\hat{B}(x, \varepsilon) + B^*(x, \varepsilon)] u, \quad (42.21)$$

где \hat{B} — блочно-диагональная матрица, а

$$B^*(x, \varepsilon) \sim 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ в области } |\arg \varepsilon| \leq \theta_0.$$

Установить *полную* блок-диагонализацию более трудно. Схема доказательства аналогична доказательству в § 26. Нужно показать, что формальные решения дифференциальных уравнений (42.14), (42.20) и соответствующих уравнений, возникающих при последующих преобразованиях, являются асимптотическими разложениями решений в аналитическом смысле. Если эти дифференциальные уравнения переписать в новых обозначениях, в которых неизвестная функция является вектором — обозначенным снова через y — размерности, равной числу элементов в неизвестной матрице, то мы придем к изучению нелинейных систем вида

$$\varepsilon N y' = a(x, \varepsilon) + A(x, \varepsilon)y + \varepsilon f(y, x, \varepsilon). \quad (42.22)$$

Здесь N и $A(x, \varepsilon)$ имеют не то же самое значение, что в уравнении (42.1), а система не имеет размерность n , как раньше. Уравнение (42.22) играет здесь такую же роль, как уравнение (27.1) в § 26 и 27.

Мы не будем приводить подробностей аналитического построения. В значительной степени они сходны с доказательствами в § 26 и 27. Полное описание можно найти в статье Вазова, которая будет опубликована в *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.

Можно показать, что системы (42.14), (42.20) и прочие, переписанные в виде (42.22), удовлетворяют следующему условию.

Предположение II.

- (a) N имеет вид (42.2), (42.3);
- (b) $f(y, x, \varepsilon)$ является многочленом относительно компонент y (не более чем второй степени);
- (c) коэффициенты многочлена f , матрица $A(x, \varepsilon)$ и вектор $a(x, \varepsilon)$ голоморфны в $R(x_0, \varepsilon_0, \theta_0)$ и равномерно в этой области представимы в виде асимптотических рядов по степеням ε при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (d) $A(x, \varepsilon)$ удовлетворяет предположению I и $\det A_0(x) \neq 0$ в интервале $|x| \leq x_0$.

Сформулируем без доказательства основную теорему относительно таких дифференциальных уравнений.

Теорема 42.2. Если выполнено предположение II и если ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} y_r(x) \varepsilon^r$$

является формальным решением дифференциального уравнения (42.22), то существует аналитическое решение (42.22), для

которого этот ряд является равномерным асимптотическим разложением в области $R(x_1, \varepsilon_1, \theta_1)$.

На основе этой теоремы непосредственно получается главный результат этого раздела.

Теорема 42.3. Если выполнено предположение 1, то существует такая матричная функция $P(x, \varepsilon)$, что преобразование $y = P(x, \varepsilon)u$ приводит дифференциальную систему $\varepsilon^H y' = A(x, \varepsilon)y$ к виду $\varepsilon^H u' = B(x, \varepsilon)u$, где

$$B(x, \varepsilon) = \sum_{j=1}^s \oplus B_{jj}(x, \varepsilon) \quad (B_{jj}(x, \varepsilon) \text{ имеет размерность } m_j).$$

Матрицы $P(x, \varepsilon)$ и $B(x, \varepsilon)$ голоморфны в области $R(x_1, \varepsilon_1, \theta_1)$ и равномерно в этой области представимы в виде асимптотических рядов по степеням ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Главные члены рядов для $B_{jj}(x, \varepsilon)$, $j=1, 2, \dots, s-1$, имеют отличные от нуля определители в интервале $|x| \leq x_0$. Кроме того, $\det P(x, \varepsilon) \equiv 1$ и $\varepsilon^H P(x, \varepsilon) \varepsilon^{-H}$ равномерно ограничена в $R(x_1, \varepsilon_1, \theta_1)$.

Может случиться, что замкнутая система дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^{h_s} v' = B_{ss}(x, \varepsilon)v$$

может быть далее расщеплена повторным применением теоремы 42.3. Для других компонент блок-диагонализации это невозможно, так как определители их главных матриц не равны нулю. Однако каждая из этих меньших систем допускает дальнейшие преобразования путем применения теоремы 26.2.

В гл. VII, где мы имели дело со случаем, когда H была скалярной величиной, обозначаемой там через h , главные матрицы $A_0(x)$ и $B_0(x)$ были подобны друг другу, и матрицы $A(x, \varepsilon)$ и $B(x, \varepsilon)$, хотя и неподобные, имели поэтому при малых ε почти равные собственные значения. Это становится неверным, если H — не скалярная величина. Существует, однако, тесная связь между собственными значениями матриц $\varepsilon^{-H}A(x, \varepsilon)$ и $\varepsilon^{-H}B(x, \varepsilon)$, по крайней мере если $h_s > 0$ и $\det A_0(x) \neq 0$. Чтобы показать это, запишем (42.7) в виде

$$P^{-1} \varepsilon^{-H} A P = \varepsilon^{-H} B + P^{-1} P'. \quad (42.23)$$

Матрица слева подобна матрице $\varepsilon^{-H}A$, а матрица справа отличается от $\varepsilon^{-H}B$ на матрицу, ограниченную при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как при наших предположениях все собственные значения матрицы $\varepsilon^{-H}B$ стремятся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$, то естественно предположить, что эти собственные значения изменятся относительно мало при добавлении возмущающего члена $P^{-1}P'$. Такие вопро-

сы будут интересовать нас в § 44. Поэтому мы рассмотрим доказательство справедливости этого предположения.

Теорема 42.4. *Если в дополнение к предположению I выполнены условия*

$$h_s > 0, \quad (42.24)$$

$$\det A_0(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad |x| \leq x_0, \quad (42.25)$$

то каждому собственному значению $\lambda_\nu(x, \varepsilon)$ матрицы $\varepsilon^{-H}A(x, \varepsilon)$ соответствует собственное значение $\mu_\nu(x, \varepsilon)$ матрицы $\varepsilon^{-H}B(x, \varepsilon)$, такое, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_\nu(x, \varepsilon)}{\mu_\nu(x, \varepsilon)} = 1$$

для (x, ε) из области $R(x_2, \varepsilon_2, \theta_2)$.

Доказательство. Обозначим для краткости $P^{-1}P' = M$. Покажем, что матрица $\varepsilon^{-H}B + M$ подобна матрице $\varepsilon^{-H}B + N$, где N ограничена в области $R(x_1^*, \varepsilon_1^*, \theta_1^*)$ и, кроме того, имеет специальный вид

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & 0 \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}. \quad (42.26)$$

Здесь N_{22} имеет размерность $m_s \times m_s$. С этой целью мы должны построить ограниченную неособую матрицу $T = T(x, \varepsilon)$, такую, что

$$\varepsilon^{-H}B + M = T^{-1}(\varepsilon^{-H}B + N)T,$$

или, эквивалентно,

$$T\varepsilon^{-H}B - \varepsilon^{-H}BT = NT - TM. \quad (42.27)$$

Расчленим все матрицы в последнем уравнении на четыре блока тех же самых размерностей, что и в (42.26), и попытаемся удовлетворить уравнению посредством матрицы T специального вида

$$T = \begin{pmatrix} I & T_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Соотношение (42.27) эквивалентно четырем уравнениям

$$\begin{aligned} 0 &= N_{11} - M_{11} - T_{12}M_{21}, \\ T_{12}\varepsilon^{-h_s}B_{ss} - \varepsilon^{-K}\widehat{B}T_{12} &= N_{11}T_{12} - M_{12} - T_{12}M_{22}, \\ 0 &= N_{21} - M_{21}, \quad 0 = N_{21}T_{12} + N_{22} - M_{22}. \end{aligned} \quad (42.28)$$

Здесь K имеет то же значение, что и в (42.10), и

$$\hat{B} = \sum_{j=1}^{s-1} \oplus B_{jj}.$$

Поступая так же, как в нескольких предыдущих случаях, исключим N_{11} из двух первых уравнений и получим квадратное уравнение относительно T_{12} :

$$\varepsilon^{K-h_s} T_{12} B_{ss} - \hat{B} T_{12} - \varepsilon^K (M_{11} T_{12} + T_{12} M_{21} T_{12} - M_{12} - T_{12} M_{22}) = 0. \quad (42.29)$$

При $\varepsilon=0$ оно имеет решение $T_{12}=0$. Кроме того, якобиан по отношению к элементам T_{12} в левой части стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \det \hat{B}$. По теореме 42.3 этот предел не равен нулю при $|x| \leq x_0$. Так как все коэффициенты являются непрерывными функциями x и ε в $R(x_1, \varepsilon_1, \theta_1)$, то из теоремы о неявной функции следует, что (42.29) имеет ограниченное решение $T_{12}(x, \varepsilon)$ в некоторой подобласти $R(x_1^*, \varepsilon_1^*, \theta_1^*)$ области $R(x_1, \varepsilon_1, \theta_1)$. Другие неизвестные матрицы легко теперь определяются из (42.28) и, как нетрудно видеть, будут ограниченными.

В результате последовательности $(s-1)$ таких преобразований подобия, каждое из которых оставляет инвариантным большее подпространство, матрица $\varepsilon^{-H} B$ оказывается подобной матрице $\varepsilon^{-H} B + S$, где S обладает тем свойством, что при расчленении ее на s^2 блоков, соответствующих расчленению

$$B = \sum_{j=1}^s \oplus B_{jj},$$

все блоки над диагональю равны нулю. Матрица S ограничена в некоторой области $R(x_2, \varepsilon_2, \theta_2)$. Если через S_{jj} , $j=1, 2, \dots, s$, обозначить диагональные блоки матрицы S , то собственные значения матрицы $\varepsilon^{-H} B + S$ и, следовательно, собственные значения λ_ν , $\nu=1, 2, \dots, n$, матрицы $\varepsilon^{-H} A$ будут решениями характеристических уравнений

$$\det [\varepsilon^{-h_j} B_{jj} + S_{jj} - \lambda I] = 0, \quad j=1, 2, \dots, s,$$

или

$$\det [B_{jj} + \varepsilon^{h_j} S_{jj} - \varepsilon^{h_j} \lambda I] = 0, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (42.30)$$

Собственные значения матрицы являются непрерывными функциями ее элементов. Так как по предположению все $h_j > 0$, то из (42.30) следует, что каждому собственному значению $\lambda_\nu(x, \varepsilon)$

матрицы $\varepsilon^{-H}A$ соответствует собственное значение $\mu_v^*(x, \varepsilon)$ матрицы B , такое, что в $R(x_2, \varepsilon_2, \theta_2)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon^h \lambda_v(x, \varepsilon) - \mu_v^*(x, \varepsilon)] = 0, \quad (42.31)$$

где j определяет то частное уравнение из (42.30), которому удовлетворяет $\lambda = \lambda_v(x, \varepsilon)$. Далее, вследствие блочно-диагональной структуры $\varepsilon^{-H}B$ существует собственное значение матрицы $\varepsilon^{-H}B$ вида $\mu_v(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-h_j} \mu_v^*(x, \varepsilon)$. Кроме того, из условия (42.25) следует, что $\det B_0(x) \neq 0$, так что в $R(x_2, \varepsilon_2, \theta_2)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_v^*(x, \varepsilon) \neq 0.$$

Поэтому из (42.31) следует, что действительно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_v(x, \varepsilon)}{\mu_v(x, \varepsilon)} = 1.$$

Это завершает доказательство теоремы 42.4.

Для сингулярно возмущенных задач в строгом смысле неравенство (42.24) не выполняется. Однако соотношение (42.30) имеет место в любом случае, если выполнено предположение I. Если $h_s = 0$, то матрица $\varepsilon^{-H}A$ имеет два типа собственных значений: собственные значения, ограниченные при $\varepsilon \rightarrow 0$, и собственные значения, стремящиеся к бесконечности. Для последних соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_v}{\mu_v} = 1$$

остается справедливым. Предположим теперь, что ε принимает только положительные значения. Тогда $\arg \mu_v(x, \varepsilon) = \arg \mu_v^*(x, \varepsilon)$. Так как $\arg \mu_v^*(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к аргументу соответствующего собственного значения матрицы $B_{j_0}(x)$, то мы можем сформулировать следствие из теоремы 42.4, которое понадобится в дальнейшем.

Следствие. Пусть выполнено предположение I, и пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $\lambda_v(x, \varepsilon)$ является собственным значением матрицы $\varepsilon^{-H}A(x, \varepsilon)$. Если $\lambda_v(x, \varepsilon)$ не ограничено при $\varepsilon \rightarrow +0$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arg \lambda_v(x, \varepsilon)$$

существует в интервале $|x| < x_0$ и равен аргументу одного из собственных значений матрицы

$$\sum_{j=1}^{s-1} \oplus B_{j_0}(x).$$

Обратно, аргумент каждого собственного значения матрицы

$$\sum_{j=1}^{s-1} \oplus B_{j j_0}(x)$$

является пределом аргумента неограниченного собственного значения матрицы $\varepsilon^{-H}A(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Предыдущее рассуждение доказывает это утверждение, возможно только в меньшем круге $|x| \leq x_2$. Однако по той же самой причине это справедливо также в окрестности любой другой точки из интервала $|x| < x_0$ и, следовательно, во всем интервале $|x| < x_0$.

Если $h_s = 0$, то структура последнего блока $B_{ss}(x, \varepsilon)$ матрицы $B(x, \varepsilon)$ требует специального рассмотрения. Возвращаясь к доказательству леммы 42.1, получим из (42.14), что $Q_{120}^1 = -A_{110}^{-1}A_{120}$. Последнее уравнение в (42.13) дает тогда $C_{220}^1 = A_{220} - A_{210}A_{110}^{-1}A_{120}$. В силу (42.17) это выражение равно также C_{220} . Дальнейшие преобразования не влияют на последний блок матрицы коэффициентов, и мы получаем

$$B_{ss0}(x) = A_{220}(x) - A_{210}(x)A_{110}^{-1}(x)A_{120}(x). \quad (42.32)$$

Связь между собственными значениями матрицы $B_{ss0}(x)$ и собственными значениями матрицы $\varepsilon^{-H}A(x, \varepsilon)$ не является непосредственно очевидной.

43. Периодические решения сингулярно возмущенных задач. Общие замечания

Рассмотрим с целью предварительного обсуждения автономную систему сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= g(x, y), \end{aligned} \quad (43.1)$$

где x и y — векторы размерностей соответственно два и единица. Пусть $y = \varphi(x)$ обозначает снова ветвь многообразия, определяемого уравнением $g(x, y) = 0$. Решения (43.1) определяют траектории в трехмерном (x, y) -пространстве, в то время как решения укороченной системы

$$\frac{dx_0}{dt} = f(x_0, \varphi(x_0)), \quad y_0 = \varphi(x_0) \quad (43.2)$$

определяют траектории на поверхности $y = \varphi(x)$.

В этом и следующих двух параграфах мы будем интересоваться существованием и построением *периодических* решений таких и более сложных уравнений.

Предположим, что $x_0(t)$, $y_0(t)$ являются известным периодическим решением укороченной задачи (43.2). Тогда естественно возникают следующие вопросы

(а) Имеет ли полная система периодические решения $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$, которые стремятся к $x_0(t)$, $y_0(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$?

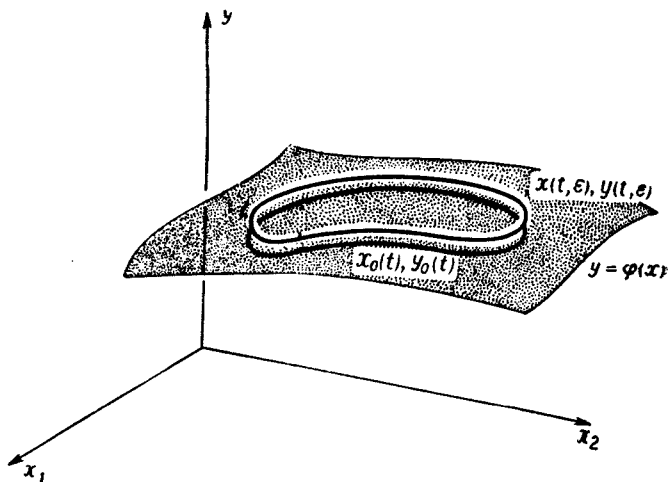


Рис. 43.1.

(б) Если ответ утвердительный, то как вычислить эти решения в виде ряда?

(с) Стремится ли к пределу период $T(\varepsilon)$ решения при $\varepsilon \rightarrow 0$, и если это так, то как его вычислить?

(д) Когда периодическое решение устойчиво? (Определение устойчивости см., например, у Коддингтона и Левинсона [2], гл. 13, § 2.)

(е) Единственно ли периодическое решение?

Те же самые вопросы можно поставить для *регулярно* возмущенных задач; по этому поводу имеется обширная литература. *Сингулярно* возмущенные задачи этого типа исследованы менее основательно. Мы упомянем некоторые из работ: Фридрихс и Вазов [1], Волк [1]—[3], Вазов [3], Флатто и Левинсон [1], Ранг [1], [2].

Для нашего введения мы взяли частную задачу (43.1), так как ее решение можно легко представить графически. Приводимый выше рис. 43.1, на котором x_1 , x_2 означают компоненты

вектора x , является очень наглядным. Периодическое решение $x_0(t)$, $y_0(t)$, существующее по предположению, изображается своей траекторией, которая является замкнутой кривой на поверхности $y = \varphi(x)$. Если (43.1) имеет периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$, которое стремится к $x_0(t)$, $y_0(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то его траектория является другой замкнутой кривой, зависящей от ε и приближающейся к первой кривой при уменьшении ε .

Заметим, что на рисунке не показан пограничный слой. В этой задаче не следует ожидать появления пограничного слоя, так как ни одно значение t не играет здесь особой роли в противоположность начальной или двухточечной краевой задаче. В дальнейшем это предположение подтвердится.

Если x и y являются векторами большей размерности или если правые части зависят регулярно от ε , то задача не становится по существу более сложной, но графическая иллюстрация делается невозможной.

Если правые части (43.1) зависят явно от t , то мы должны предположить, что они являются периодическими функциями t с некоторым периодом T . Мы попытаемся тогда найти решения с таким же периодом T или с периодом kT , где k — целое положительное число. Такая «неавтономная» задача, следовательно, несколько проще, чем автономная, так как период известен с самого начала.

Отсутствие пограничного слоя является упрощающей особенностью, которая позволяет без больших затруднений рассматривать более общий тип систем, чем для начальных задач. Мы будем допускать, что разные уравнения в системах имеют полюсы разного порядка по параметру ε . Такие системы можно записать в виде

$$\varepsilon^H \frac{dz}{dt} = F(z, t, \varepsilon), \quad (43.3)$$

где диагональная матрица H определяется так же, как в (42.2), (42.3). Если $h_s = 0$, то укороченная задача, получающаяся при $\varepsilon = 0$, включает систему дифференциальных уравнений, и, следовательно, исходная задача является сингулярно возмущенной задачей в смысле определения разд. 37.1. Многие рассуждения справедливы также и для случая $h_s > 0$.

Начальные задачи для систем типа (43.3) без требования периодичности также были изучены (см. Тихонов [3], Васильева [3]), но они настолько сложны, что мы ограничимся ссылкой на эту литературу.

Нетрудно назвать примеры физических систем, приводящих к уравнениям типа (43.3), в которых требуется существование периодических решений. Естественный пример представляет со-

бой движение системы масс под действием упругих сил, когда некоторые из этих масс много меньше других. Электрические цепи с некоторыми очень малыми параметрами также могут привести к таким задачам. Специальные примеры можно найти у Фридрикса [1] и Рауха [1].

Существует второй тип периодических решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, так называемые релаксационные колебания. В этих решениях имеют место явления неравномерной сходимости, родственные явлениям пограничного слоя, рассмотренным ранее. Простейший и лучше всего исследованный пример таких решений появляется при изучении системы второго порядка, называемой часто уравнением Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= y - \frac{y^3}{3} - x. \end{aligned} \quad (43.4)$$

Это уравнение описывает простую цепь вакуумной трубки. Траектории решений укороченного уравнения

$$\frac{dx_0}{dt} = y_0, \quad x_0 = y_0 - \frac{y_0^3}{3} \quad (43.5)$$

являются дугами кривой Γ , уравнение которой имеет вид

$$x = y - \frac{y^3}{3} \quad (43.6)$$

Единственным периодическим решением (43.5) является постоянное решение $x_0 = y_0 = 0$. Если (43.4) имеет при малых ε периодические решения, близкие к нулю, то они не представляют интереса. Однако более подробное рассмотрение векторного поля, определяемого системой (43.4), свидетельствует о возможности существования периодического решения другого вида. Векторы этого поля при малых $\varepsilon > 0$ очень велики и почти параллельны оси y , за исключением полоски шириной $O(\varepsilon)$ вблизи кривой Γ . На самой Γ векторы параллельны оси x . Кривая Γ имеет форму буквы S , как показано на рис. 43.2. Пусть P является фиксированной начальной точкой около Γ . В соответствии с теорией Тихонова из § 39 траектория, исходящая из точки P , идет круто вниз до сближения с кривой Γ и далее остается вблизи верхней ветви кривой Γ до тех пор, пока не достигнет окрестности точки S , в которой $\frac{\partial [y - y^3/3 - x]}{\partial y} = 0$. Вероятно, что далее траектория снова пойдет почти вертикально и почти мгновенно достигнет нижней ветви Γ . Отсюда траектория

будет подниматься вверх почти в точности симметрично тому, как она опускалась вниз

Продолжая наши рассуждения о возможном поведении решения, мы предположим, что если P взята вблизи Γ и зависит определенным образом от ε , то траектория, исходящая из P ,

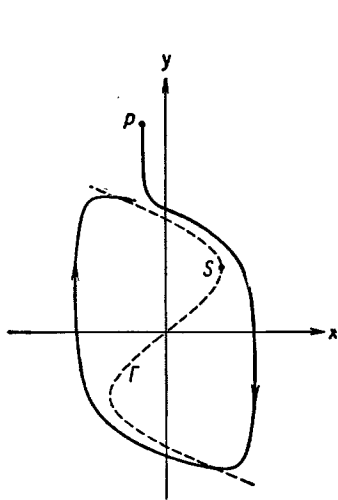


Рис. 43.2.

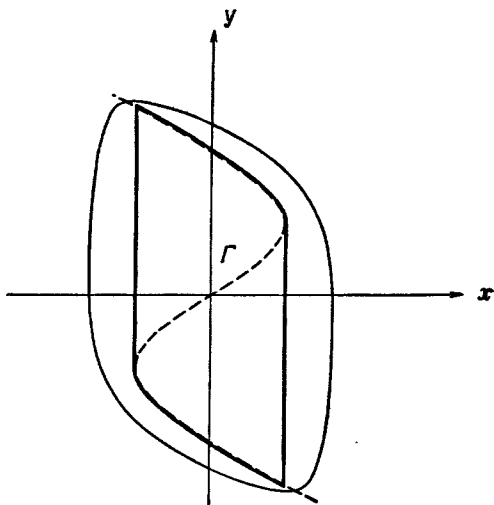


Рис. 43.3.

действительно будет замкнутой. Если такие замкнутые траектории существуют, то при $\varepsilon \rightarrow +0$ они будут приближаться к замкнутой кривой, составленной из двух дуг Γ и двух отрезков, параллельных оси y , как показано на рис. 43.3. Качественный характер соответствующих решений $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ показан на рис. 43.4.

Теория релаксационных колебаний не будет рассматриваться в этой книге. Мы ограничимся несколькими ссылками на литературу. Существование таких близких к разрывным периодических решений было доказано Фландерсом и Стокером [1] для уравнения Ван-дер-Поля и Ласаллем [1], Хаагом [1] и [2] для более общих уравнений. В работе Хаага дается метод вычисления асимптотических разложений для периодического решения и его периода. Дородницын [1] разработал метод асимптотического вычисления более высоких приближений для периода в уравнении Ван-дер-Поля. Мищенко и Понтрягин [1] и Мищенко [2] получили еще более полные результаты.

Эти асимптотические вычисления очень сложны. Даже структура ряда, как показывает формула Дородницына для периода,

далеко не ясна. Эта формула (с численными поправками, данными Урабе [1]) имеет вид¹⁾)

$$T(\varepsilon) = 3 - 2 \log 2 - 3\alpha\varepsilon^{2/3} - \frac{1}{6} \varepsilon \log \varepsilon - 1,3246\varepsilon + O(\varepsilon^{7/6}),$$

где $\alpha \approx -2,338$ является наибольшим нулем функции Эйри $\text{Ai}(z)$.

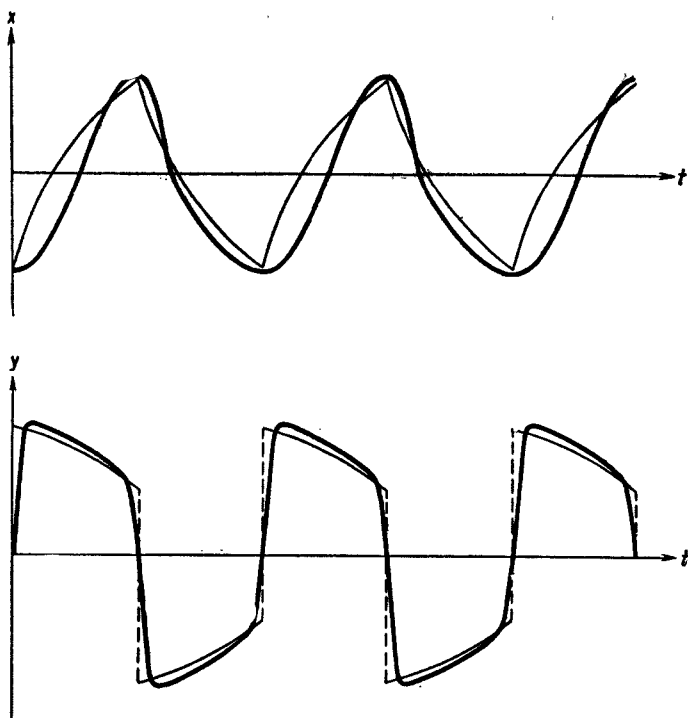


Рис. 43.4.

Из статей, где рассматриваются неавтономные системы, допускающие периодические решения типа релаксационных колебаний, мы упомянем работу Венделя [1].

Возникновение релаксационных колебаний не ограничивается, вероятно, системами второго порядка. Основная теория для систем n уравнений в достаточно общем случае была развита Левинсоном [1], но, насколько нам известно, никакие физически важные системы еще не изучены с этой точки зрения.

¹⁾ Наиболее общие результаты по асимптотическому представлению периода релаксационных колебаний получены в работах Розова [1], [2].

44. Периодические решения сингулярно возмущенных задач. Линейная теория

44.1. Некоторые свойства линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

Исходным пунктом большинства исследований по линейным дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами является следующий классический результат, называемый часто теоремой Флоке¹⁾.

Теорема 44.1. Пусть $A(t)$ — непрерывная матрица с периодом ω , т. е. $A(t+\omega) = A(t)$. Тогда существует непрерывная матрица $P(t)$ с периодом ω и $\det P(t) \neq 0$, такая, что преобразование

$$y = P(t)z \quad (44.1)$$

переводит дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \quad (44.2)$$

в уравнение

$$\frac{dz}{dt} = Rz, \quad (44.3)$$

где R — постоянная матрица.

Ни P , ни R не являются, конечно, единственными, так как преобразование (44.1) можно подвергнуть любому преобразованию с постоянной неособой матрицей. Нетрудно, однако, показать, что жорданова форма R определяется матрицей $A(t)$ единственным образом. Простое доказательство теоремы 44.1 подобно доказательству формулы (3.15). Его можно найти, например, у Коддингтона и Левинсона [2], гл. 3, § 5.

Если бы существовал простой способ нахождения матрицы $P(t)$, то теория системы (44.2) полностью следовала бы из теоремы 44.1, так как

$$y = P(t)e^{Rt} \quad (44.4)$$

является фундаментальной системой решений для (44.2). Однако теорема Флоке является только теоремой существования и почти ничего не дает для фактического решения системы (44.2).

Не умаляя общности, можно считать R жордановой матрицей, так как этого нетрудно достичь путем линейного преобразования зависимой переменной с постоянной матрицей. Тогда

¹⁾ В отечественной литературе эта теорема называется теоремой Ляпунова (см., например, Малкин [1]). — Прим. ред.

очевидно, что (44.3) — и, следовательно, (44.1) — имеет частное нетривиальное решение с периодом ω тогда и только тогда, когда по крайней мере одно собственное значение матрицы R имеет вид $\lambda = \frac{2\pi ki}{\omega}$, где k — целое число. Собственные значения матрицы R называются характеристическими показателями уравнения (44.2).

Даже если $A(t)$ действительна при действительных t , матрицы $P(t)$ и R из теоремы 44.1 могут быть комплексными. Это можно усмотреть из доказательства этой теоремы. Можно показать, что если $A(t)$ голоморфна при всех действительных t , то такой же является $P(t)$.

Обратимся теперь к неоднородным системам

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + b(t), \quad (44.5)$$

в которых $A(t)$ и вектор $b(t)$ имеют период ω , и поставим вопрос об условиях, при которых (44.5) имеет решения периода ω . Это будет тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = Rz + P^{-1}(t)b(t), \quad (44.6)$$

получающееся в результате преобразования (44.1), имеет решения периода ω .

Общее решение (44.6) имеет вид

$$z = e^{Rt}c + \int_0^t e^{R(t-\tau)}P^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau, \quad (44.7)$$

где c — произвольный постоянный вектор. Необходимым и достаточным условием относительно c для того, чтобы функция (44.7) имела период ω , является равенство

$$0 = z(\omega) - z(0) = (e^{R\omega} - I)c + \int_0^\omega e^{R(\omega-\tau)}P^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau.$$

Это уравнение может быть решено относительно c при любом $b(t)$ тогда и только тогда, когда

$$\det(e^{R\omega} - I) \neq 0, \quad (44.8)$$

и в этом случае решение единственно. В свою очередь условие (44.8) выполняется тогда и только тогда, когда ни один характеристический показатель R не равен $\frac{2\pi ki}{\omega}$ (k — целое число).

Это доказывает следующую лемму.

Лемма 44.1. Неоднородное дифференциальное уравнение (44.5) имеет решение периода ω для всех $b(t)$ с периодом ω тогда и только тогда, когда соответствующее однородное уравнение не имеет нетривиального решения периода ω . В этом случае периодическое решение (44.5) единственно.

Отметим, что в утверждении леммы речь идет о «всех $b(t)$ ». Если однородное уравнение имеет нетривиальное периодическое решение, то неоднородное уравнение может иметь периодические решения только для определенных функций $b(t)$. Ясно, что в этом случае существует бесконечно много периодических решений, так как мы можем прибавить к данному периодическому решению неоднородного уравнения периодическое решение однородного уравнения, умноженное на любую постоянную. Этот факт будет иметь значение в разд. 45.2.

Периодическое решение уравнения (44.5) можно выразить через фундаментальную матрицу однородного уравнения с помощью формулы вариации постоянных.

Лемма 44.2. Предположим, что однородное уравнение, соответствующее (44.5), не имеет нетривиального решения с периодом ω . Тогда нетривиальное решение (44.5) с периодом ω имеет представление

$$y(t) = [Y^{-1}(t + \omega) - Y^{-1}(t)]^{-1} \int_t^{t+\omega} Y^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau, \quad (44.9)$$

где $Y(t)$ — любая фундаментальная матрица однородного уравнения.

Доказательство. Каждое решение однородной системы имеет вид $Y(t)c$, где c — постоянный вектор. Так как однородное уравнение не имеет нетривиального решения периода ω , то равенство $Y(t + \omega)c - Y(t)c = 0$ может иметь место только при $c = 0$, так что определитель матрицы $Y(t + \omega) - Y(t)$ нигде не равен нулю. Общее решение уравнения (44.5) в силу формулы вариации постоянных имеет вид

$$y(t) = Y(t)k + Y(t) \int_{\sigma}^t Y^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau. \quad (44.10)$$

Здесь k — произвольный постоянный вектор, а σ — произвольное постоянное число. При любом σ значение k в (44.10), которое дает единственное периодическое решение, может быть не-

посредственно вычислено из условия периодичности $y(\sigma + \omega) - y(\sigma) = 0$. Получается

$$k = [Y(\sigma) - Y(\sigma + \omega)]^{-1} Y(\sigma + \omega) \int_{\sigma}^{\sigma + \omega} Y^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau.$$

Подставляя это выражение в (44.10), получим

$$y(t) = Y(t) [Y(\sigma) - Y(\sigma + \omega)]^{-1} Y(\sigma + \omega) \int_{\sigma}^{\sigma + \omega} Y^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau + \\ + Y(t) \int_{\sigma}^t Y^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau.$$

Так как $y(t)$ единственно, то правая часть не зависит от σ , и последняя формула останется верной, если σ заменить на t . После небольших выкладок это приводит к формуле (44.9), и лемма доказана.

Если $A(t)$ — непостоянная матрица, то фундаментальная система $Y(t)$ однородного уравнения обычно не известна. В дальнейшем будет предпочтительней оперировать с формулой, которая является интегральным *уравнением*, а не интегральным *представлением*, но которая не содержит неизвестной фундаментальной матрицы. Эта идея принадлежит Флатто и Левинсону [1].

Лемма 44.3. *Предположим, что матрица $A(t)$ ни при каком значении t не имеет собственного значения вида $\frac{2\pi ki}{\omega}$. Тогда любое решение с периодом ω дифференциального уравнения (44.5) удовлетворяет интегральному уравнению*

$$y(t) = [e^{-A(t)\omega} - I]^{-1} \int_t^{t+\omega} e^{-A(t)(\tau-t)} \{ [A(\tau) - A(t)] y(\tau) + b(\tau) \} d\tau. \quad (44.11)$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ является частным периодическим решением уравнения (44.5). Запишем (44.5) в виде

$$\frac{dy}{dt} = A(\sigma) y + [A(t) - A(\sigma)] y + b(t),$$

где σ — некоторое число. В силу нашего предположения дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $\frac{dy}{dt} = A(\sigma) y$ не имеет нетривиального периодического решения ни при

каком значении σ . Функция $Y(t) = e^{A(\sigma)t}$ является одной из фундаментальных матриц этого уравнения. Применяя (44.9), получим, что $y(t)$ для всех σ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t) = [e^{-A(\sigma)(t+\omega)} - e^{-A(\sigma)t}]^{-1} \int_t^{t+\omega} e^{-A(\sigma)\tau} \{ [A(\tau) - A(\sigma)] y(\tau) + b(\tau) \} d\tau.$$

Так как левая часть не зависит от σ , то и правая часть не зависит от σ , и мы можем заменить σ на t . Внося множитель $e^{A(\sigma)t}$ под знак интеграла, получим формулу (44.11).

Сформулируем теперь без доказательства два результата, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 44.4. Пусть M — постоянная $(n \times n)$ -матрица, собственные значения которой λ_j , $j=1, 2, \dots, n$, удовлетворяют неравенству

$$\max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} \lambda_j \leq -\lambda_0 < 0.$$

Если $0 < \mu < \lambda_0$, то существует такая постоянная K , что

$$\|e^{Mt}\| \leq Ke^{-\mu t} \quad \text{при } t \geq 0,$$

причем постоянная K зависит только от μ , λ_0 и $\|M\|$.

Эта лемма доказана Левиным и Левинсоном [1]. Если норму $\|M\|$ в конце утверждения леммы заменить самой матрицей M , то лемма станет более простой. Трудность заключается в том, чтобы показать, что постоянная K может быть взята одной и той же для всех матриц M , у которых μ , λ_0 и $\|M\|$ имеют одни и те же значения.

Лемма 44.5. Пусть $M(x)$ есть $(n \times n)$ -матрица, голоморфная в замкнутой ограниченной области G на комплексной x -плоскости. Предположим, что собственные значения $\lambda_j(x)$, $j=1, 2, \dots, n$, матрицы $M(x)$ состоят из двух групп $\lambda_1(x), \dots, \lambda_p(x)$ и $\lambda_{p+1}(x), \dots, \lambda_n(x)$, так что $\lambda_j(x) \neq \lambda_k(x)$ при всех $x \in G$, если $j \leq p$, $k > p$. Тогда существует такая матрица $T(x)$, голоморфная при $x \in G$ и имеющая в этой области голоморфную обратную матрицу, что $T^{-1}(x)M(x)T(x) = N(x)$ при всех $x \in G$ имеет блочного-диагональный вид

$$N(x) = N_{11}(x) \oplus N_{22}(x).$$

Собственные значения $N_{11}(x)$ равны $\lambda_1(x), \dots, \lambda_p(x)$, а собственные значения $N_{22}(x)$ равны $\lambda_{p+1}(x), \dots, \lambda_n(x)$. Если, в частности, $M(x)$ — периодическая матрица с периодом ω , то в качестве $T(x)$ также можно взять периодическую матрицу с периодом ω .

Сходство между этой леммой и теоремой 25.1 очевидно. Различие заключается в том, что настоящая лемма дает глобальный результат, справедливый во всей области G , и, следовательно, является более сильной, чем теорема 25.1. Простой способ расширения результата этой теоремы путем некоторого процесса аналитического продолжения пока не найден. Лемма 44.5 была доказана Сибуй [14]. Его метод не опирается на теорему о неявной функции.

44.2. Некоторые свойства линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, зависящими от малого параметра

Обратимся теперь к дифференциальным системам вида

$$\varepsilon^n \frac{dy}{dt} = A(t, \varepsilon) y, \quad (44.12)$$

где $A(t, \varepsilon)$, в добавление к нашим обычным предположениям, имеет действительный не зависящий от ε период ω по t и $\varepsilon > 0$.

Сингулярная зависимость от ε , хотя и вызывает некоторые новые трудности, дает возможность, как будет сейчас показано, установить существование или отсутствие периодических решений непосредственно по свойствам главной матрицы $A_0(t)$ из асимптотического ряда для $A(t, \varepsilon)$. Введем следующее

Предположение (A). Периодическая матрица $A_0(t)$ ни при каком действительном значении t не имеет чисто мнимого собственного значения.

Покажем, что при этом предположении дифференциальная система (44.12) не имеет нетривиального периодического решения, по крайней мере для достаточно малых ε .

Из леммы 44.5 и предположения (A) следует существование линейного преобразования функции y с такой периодической матрицей $T_0(t)$, что $T_0^{-1}(t) A_0(t) T_0(t)$ (главная матрица преобразованного уравнения) является прямой суммой двух матриц, первая из которых имеет собственные значения только с положительными действительными частями, а вторая — только с отрицательными действительными частями.

Если бы мы имели глобальное обобщение нашей фундаментальной теоремы 26.2, то мы могли бы полностью расщепить дифференциальное уравнение (44.12) на две отдельные системы, в каждой из которых все собственные значения главной матрицы располагались бы при малых ε в одной полуплоскости. Однако такая глобальная теория до сих пор не развита. Поэтому мы должны довольствоваться приближенной блок-диагонализацией, основанной на формальной теории § 25.

Ввиду предположения (А) и леммы 44.5 формальное построение, описанное в § 25, дает формальный ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} T_r(t) \varepsilon^r,$$

коэффициенты которого являются голоморфными не только вблизи некоторой точки, но для всех действительных t , и имеют период ω . Преобразование, описанное в теореме 25.2, формально приводит систему (44.12) к блочно-диагональному виду. Простое обобщение теоремы 9.3 показывает далее, что существует матричная функция $T(t, \varepsilon)$, голоморфная при всех действительных t и всех малых положительных ε , с периодом ω по t и имеющая при всех действительных t асимптотическое представление

$$T(t, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} T_r(t) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (44.13)$$

Преобразование

$$y = T(t, \varepsilon) z \quad (44.14)$$

переводит (44.12) в систему того же типа

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dt} = D(t, \varepsilon) z \quad (44.15)$$

со следующим свойством:

$$D(t, \varepsilon) = \tilde{D}(t, \varepsilon) + D^*(t, \varepsilon), \quad (44.16)$$

где

$$\tilde{D}(t, \varepsilon) = \tilde{D}_+(t, \varepsilon) \oplus \tilde{D}_-(t, \varepsilon). \quad (44.17)$$

При всех действительных t все собственные значения главной матрицы $\tilde{D}_{+0}(t)$ из разложения в ряд $\tilde{D}_+(t, \varepsilon)$ лежат в правой полуплоскости, а все собственные значения матрицы $\tilde{D}_{-0}(t)$ лежат в левой полуплоскости. Матрица $D^*(t, \varepsilon)$ при всех действительных t асимптотически равна нулю, т. е.

$$D^*(t, \varepsilon) \sim 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (44.18)$$

Выберем ε_0 столь малым, чтобы при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ собственные значения матрицы $\tilde{D}(t, \varepsilon)$ были отграничены от мнимой оси.

Предположим теперь, что система (44.12) имеет нетривиальное решение с периодом ω , и приведем это предположение к противоречию. Тогда то же самое справедливо в отношении преобразованной системы (44.15). Последняя система в силу леммы 44.3 может быть преобразована в интегральное уравнение. Положим для краткости

$$W(t, s, \varepsilon) = \{\exp[-\varepsilon^{-h} \tilde{D}(t, \varepsilon) \omega] - I\}^{-1} \exp[-\varepsilon^{-h} \tilde{D}(t, \varepsilon) s]. \quad (44.19)$$

Тогда применение формулы (44.11) дает следующее интегральное уравнение для периодического решения уравнения (44.15):

$$z(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-h} \int_t^{t+\omega} W(t, \tau-t, \varepsilon) [\tilde{D}(\tau, \varepsilon) - \tilde{D}(t, \varepsilon) + D^*(\tau, \varepsilon)] z(\tau, \varepsilon) d\tau. \quad (44.20)$$

Матричное ядро W является прямой суммой двух блоков

$$W = W_+ \oplus W_-,$$

где

$$W_+(t, s, \varepsilon) = \{\exp[-\varepsilon^{-h}\tilde{D}_+(t, \varepsilon)\omega] - I\}^{-1} \exp[-\varepsilon^{-h}\tilde{D}_+(t, \varepsilon)s], \quad (44.21)$$

$$W_-(t, s, \varepsilon) = \{I - \exp[\varepsilon^{-h}\tilde{D}_-(t, \varepsilon)\omega]\}^{-1} \exp[-\varepsilon^{-h}\tilde{D}_-(t, \varepsilon)(s-\omega)].$$

Данное выражение для $W_-(t, s, \varepsilon)$ получается из (44.19) перенесением матрицы $\exp\{-\varepsilon^{-h}\tilde{D}_-(t, \varepsilon)\omega\}$ во второй сомножитель. В обеих формулах (44.21) первый множитель равномерно ограничен вследствие нашего предположения о собственных значениях матриц \tilde{D}_+ и \tilde{D}_- . Обращаясь к лемме 44.4, получим, что матрицы в (44.21) удовлетворяют при всех t неравенствам вида

$$\begin{aligned} \|W_+(t, s, \varepsilon)\| &\leq c e^{-\varepsilon^{-h}\mu s}, & s \geq 0, \\ \|W_-(t, s, \varepsilon)\| &\leq c e^{-\varepsilon^{-h}\mu(\omega-s)}, & \omega - s \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь c и μ — некоторые положительные постоянные, не зависящие от t , s и ε при условии, что ε_0 достаточно мало. Следовательно,

$$\|W(t, s, \varepsilon)\| \leq c [e^{-\varepsilon^{-h}\mu s} + e^{-\varepsilon^{-h}\mu(\omega-s)}] \quad \text{при } 0 \leq s \leq \omega. \quad (44.22)$$

Кроме того, вследствие (44.18)

$$\|D^*(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{2h}. \quad (44.23)$$

Подставим (44.22) и (44.23) в неравенство

$$\begin{aligned} \|z(t, \varepsilon)\| &\leq \max \|z(t, \varepsilon)\| \cdot \varepsilon^{-h} \int_t^{t+\omega} \|W(t, \tau-t, \varepsilon)\| \times \\ &\quad \times (\|\tilde{D}(\tau, \varepsilon) - \tilde{D}(t, \varepsilon)\| + \|D^*(\tau, \varepsilon)\|) d\tau, \quad (44.24) \end{aligned}$$

которое следует из (44.20), и заметим, что $\|\tilde{D}(\tau, \varepsilon) - \tilde{D}(t, \varepsilon)\|$ равна нулю при $\tau=t$ и при $\tau=t+\omega$. Интегрирование по частям (мы опустим детали этого вычисления) дает тогда неравенство

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq k\varepsilon^h \max \|z(t, \varepsilon)\|, \quad (44.25)$$

где постоянная k зависит от μ , но не зависит от ε . Из формулы (44.25) следует, что $z(t, \varepsilon)$ должно равняться нулю, по крайней мере для всех ε , меньших чем $k^{-1/h}$.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 44.2. Пусть матрица $A(t, \varepsilon)$ голоморфна по обеим переменным при всех действительных t и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Предположим, что $A(t, \varepsilon)$ имеет действительный период ω , не зависящий от ε , и при всех действительных t допускает равномерное асимптотическое разложение

$$A(t, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r(t) \varepsilon^r \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

Если $A_0(t)$ ни при каком действительном значении t не имеет чисто мнимого собственного значения, то дифференциальное уравнение (44.12) при достаточно малых ε не имеет нетривиального решения с периодом ω .

При предположениях теоремы 44.2 неоднородное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dt} = A(t, \varepsilon)y + b(t, \varepsilon), \quad (44.26)$$

в котором $b(t+\omega, \varepsilon) = b(t, \varepsilon)$, имеет единственное решение периода ω . Это следует из леммы 44.1. Вычисления, которые привели к формуле (44.22), дают также полезную оценку для периодического решения (44.26), так как это периодическое решение вследствие формулы (44.11) удовлетворяет эквивалентному неоднородному интегральному уравнению.

Лемма 44.6. Пусть $A(t, \varepsilon)$ удовлетворяет предположениям теоремы 44.2. Тогда единственное решение с периодом ω неоднородного дифференциального уравнения (44.26) при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ (ε_1 — постоянная) удовлетворяет неравенству

$$\|y(t, \varepsilon)\| \leq k_1 \max_t \|b(t, \varepsilon)\|,$$

где постоянная k_1 не зависит от ε и $b(t, \varepsilon)$.

Для доказательства леммы нужно сначала преобразовать (44.26) с помощью (44.14) в уравнение

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dt} = D(t, \varepsilon)z + T^{-1}(t, \varepsilon)b(t, \varepsilon)$$

и далее действовать так же, как при доказательстве теоремы 44.2.

Задача 44.1. Провести детально доказательство леммы 44.6.

Задача 44.2. Доказать, что если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} b(t, \varepsilon) = b_0(t)$$

и выполнены условия леммы 44.6, то периодическое решение (44.26) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(t, \varepsilon) = -A_0^{-1}(t) b_0(t).$$

(Указание: положить в (44.26) $y = v - A_0^{-1}(t) b_0(t)$ и применить к дифференциальному уравнению относительно v лемму 44.6.)

Если $b(t, \varepsilon)$ является аналитической функцией и имеет равномерное асимптотическое разложение

$$b(t, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} b_r(t) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

то, как легко видеть, (44.26) может быть формально решено с помощью ряда с периодическими коэффициентами

$$\sum_{r=0}^{\infty} y_r(t) \varepsilon^r.$$

Используя указание к задаче 44.2, нетрудно показать, что это формальное решение является асимптотическим представлением периодического решения.

Задача 44.3. Провести доказательство сделанных утверждений.

Методы и результаты данного раздела можно обобщить на дифференциальные уравнения более общего вида (42.1) и соответствующие неоднородные уравнения

$$\varepsilon^H \frac{dy}{dt} = A(t, \varepsilon) y + b(t, \varepsilon). \quad (44.27)$$

Для нас особенно интересен случай, когда задача является сингулярно возмущенной в строгом смысле, т. е. когда

$$h_s = 0. \quad (44.28)$$

Рассмотрим этот случай при условии, что выполнено предположение I из разд. 42.1.

Мы не можем применить теорему 42.3, так как не знаем, существует ли преобразование $y = P(t, \varepsilon) u$ из этой теоремы при всех действительных t . Однако наверняка существует преобразование $y = \hat{P}(t, \varepsilon) u$ с матрицей $\hat{P}(t, \varepsilon)$, для которой формальный ряд P , указанный в теореме 42.1, является асимптотическим

разложением при всех действительных t , которое приводит дифференциальное уравнение (44.27) к приближенному блочно-диагональному виду, аналогичному формуле (42.21), т. е.

$$\varepsilon^H \frac{du}{dt} = [\hat{B}(t, \varepsilon) + B^*(t, \varepsilon)] u + \hat{b}(t, \varepsilon), \quad (44.29)$$

где \hat{B} и B^* обладают такими же свойствами, как и в (42.21), и

$$\hat{b}(t, \varepsilon) = \varepsilon^H \hat{P}^{-1}(t, \varepsilon) \varepsilon^{-H} b(t, \varepsilon). \quad (44.30)$$

Чтобы можно было продолжить исследование уравнения (44.29) и соответствующего однородного уравнения подобно тому, как это было сделано с уравнениями (44.26) и (44.12), первые $s-1$ блоков главного члена матрицы $\hat{B}(t, \varepsilon)$ должны удовлетворять аналогу предположения (A), т. е. матрицы $B_{jjo}(t)$, $j=1, 2, \dots, s-1$, не должны иметь чисто мнимых собственных значений. Для B_{ss0} это условие не обязательно. Вместо него мы потребуем, чтобы уравнение $\frac{dv_0}{dt} = B_{ss0}(t) v_0$ не имело нетривиальных решений периода ω . Согласно сказанному в конце разд. 42.3, в частности ввиду следствия из теоремы 42.4 и формулы (42.32), мы можем сформулировать эти предположения в терминах данной матрицы $A(t, \varepsilon)$.

Предположение (B).

(а) При $\varepsilon \rightarrow +0$ аргументы неограниченных собственных значений матрицы $\varepsilon^{-H} A(t, \varepsilon)$ не стремятся к $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$.

(б) Пусть $A_0(t)$ расчленена на блоки

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} A_{110}(t) & A_{120}(t) \\ A_{210}(t) & A_{220}(t) \end{pmatrix},$$

где $A_{220}(t)$ имеет размерность $m_s \times m_s$. Тогда ни один характеристический показатель (в смысле разд. 44.1) матрицы $A_{220}(t) - A_{210}(t) A_{110}^{-1}(t) A_{120}(t)$ не является целым кратным $\frac{2\pi i}{\omega}$.

При добавлении этого предположения теорема 44.2 и лемма 44.6 обобщаются на дифференциальные уравнения вида (44.27) следующим образом.

Теорема 44.3. Пусть матрица $A(t, \varepsilon)$ голоморфна по обеим переменным при всех действительных t и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Предположим, что $A(t, \varepsilon)$ имеет действительный период ω , не зависящий от ε , и при всех действительных t имеет равномерное асимптотическое разложение

$$A(t, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r(t) \varepsilon^r, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Пусть H определяется так же, как в (42.2), (42.3), и $h_s=0$. Пусть $b(t, \varepsilon)$ при всех ε из интервала $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ является непрерывной функцией t с периодом ω . Если $A(t, \varepsilon)$ удовлетворяет предположению I разд. 42.1 и предположению (B) данного раздела, то система дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^H \frac{dy}{dt} = A(t, \varepsilon)y + b(t, \varepsilon) \quad (44.31)$$

при всех достаточно малых ε имеет единственное решение $y(t, \varepsilon)$ с периодом ω , и это решение удовлетворяет неравенству

$$\|y\| \leq K \max \|b\|, \quad (44.32)$$

где K — постоянная, не зависящая от ε .

Доказательство. Уравнение (44.31) имеет периодическое решение тогда и только тогда, когда (44.29) имеет периодическое решение, и если периодическое решение последнего уравнения удовлетворяет неравенству вида

$$\|u\| \leq \hat{K} \max \|\hat{b}\|, \quad (44.33)$$

то (44.32) будет выполнено. Здесь используется тот факт, что $\varepsilon^H \hat{P}^{-1}(t, \varepsilon) \varepsilon^{-H}$ ограничена при всех действительных t и всех малых ε (см. теорему 42.1, пункт (d)).

Чтобы доказать (44.33), предположим, что (44.29) имеет решение u периода ω . Разобьем n скалярных уравнений, образующих (44.29), на s последовательных групп, состоящих из m_1, m_2, \dots, m_s уравнений соответственно. Пусть $u^{(j)}$, $j=1, 2, \dots, s$, есть вектор размерности m_j , образованный компонентами вектора u из j -й группы. Первые $s-1$ из этих групп уравнений можно записать в векторной форме

$$\varepsilon^{h_j} \frac{du^{(j)}}{dt} = \hat{B}_{jj}(t, \varepsilon) u^{(j)} + \hat{B}_j^*(t, \varepsilon) u + \hat{b}^{(j)}(t, \varepsilon), \quad j=1, 2, \dots, s-1, \quad (44.34)$$

где $\hat{B}_j^*(t, \varepsilon)$ — матрица с m_j строками и n столбцами, асимптотически равная нулю, а $\hat{b}^{(j)}(t, \varepsilon)$ есть m_j -мерный вектор, образованный компонентами $\hat{b}(t, \varepsilon)$ в этой группе. Последнее уравнение размерности m_s имеет вид

$$\frac{du^{(s)}}{dt} = B_{ss0}(t) u^{(s)} + \varepsilon E_s(t, \varepsilon) u + \hat{b}^{(s)}(t, \varepsilon), \quad (44.35)$$

где $E_s(t, \varepsilon)$ ограничена. Каждое уравнение (44.34) можно рассматривать как уравнение вида (44.26), причем вектор $u^{(j)}$

является зависимой переменной, а $B_j(t, \varepsilon)u + \tilde{b}^{(j)}(t, \varepsilon)$ — неоднородным членом. Применяя лемму 44.6, получим

$$\|u^{(j)}(t, \varepsilon)\| \leq k_2(\varepsilon \max \|u\| + \max \|\tilde{b}\|), \quad j = 1, 2, \dots, s-1, \quad (44.36)$$

где k_2 — некоторая достаточно большая постоянная. Применяя далее к (44.35) формулу (44.9) из леммы 44.2, получим, что (44.36) справедливо при $j=s$, если k_2 снова достаточно велико. Суммирование этих s неравенств дает

$$\|u\| \leq sk_2(\varepsilon \max \|u\| + \max \|\tilde{b}\|),$$

откуда при достаточно малом ε_1 ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$) следует неравенство (44.33), в котором $\hat{K} = (1 - sk_2\varepsilon_1)^{-1}$. Таким образом, неравенству (44.33) и, следовательно, (44.32) удовлетворяет любое периодическое решение. Если $b \equiv 0$, то отсюда вытекает $y \equiv 0$, и, следовательно, периодическое решение уравнения (44.31) в силу леммы 44.1 существует и единственно. Это завершает доказательство теоремы 44.3.

На основе теории, развитой в этом разделе и сформулированной для общего случая в теореме 44.3, нахождение периодических решений в виде ряда для линейных сингулярно возмущенных задач является достаточно простой задачей. Так как эти задачи можно рассматривать как частные случаи более общих, нелинейных задач, то мы перейдем непосредственно к рассмотрению нелинейных задач.

45. Разложения в ряд для периодических решений сингулярно возмущенных задач

45.1. Решения с заданным периодом

Мы будем рассматривать системы аналитических дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^H \frac{dy}{dt} = f(y, t, \varepsilon), \quad (45.1)$$

где f имеет по t период ω . Диагональная матрица H определяется так же, как в (42.2), (42.3), с дополнительным условием

$$h_s = 0. \quad (45.2)$$

Тогда соответствующая укороченная система имеет вид

$$\Omega \frac{dy_0}{dt} = f(y_0, t, 0), \quad (45.3)$$

где через Ω обозначена матрица

$$\Omega = 0 \cdot I_{n-m_s} \oplus I_{m_s}. \quad (45.4)$$

Как и в некоторых предыдущих случаях, мы предположим, что решение $y_0(t)$ укороченной системы (45.3) известно. Потребуем, чтобы это решение было периодическим с периодом ω . Мы хотим доказать, что при соответствующих условиях существует периодическое решение полной системы с тем же самым периодом ω , которое стремится к $y_0(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, мы хотим представить это решение в виде ряда.

Предположим, что функция f голоморфна по всем переменным при $\|y\| \leq \eta$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ и всех действительных t .

Полученные ниже результаты нетрудно обобщить на случай, когда функция f имеет особенность при $\varepsilon = 0$, так что $f(y, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ представима асимптотическим рядом по степеням ε равномерно при $\|y\| \leq \eta$ и всех действительных t .

Положим в уравнении (45.1)

$$y = y_0(t) + z. \quad (45.5)$$

Это приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon^H \frac{dz}{dt} &= f(y_0(t) + z, t, \varepsilon) - \varepsilon^H \frac{dy_0}{dt} = \\ &= f(y_0(t), t, \varepsilon) - \varepsilon^H \frac{dy_0}{dt} + f_y(y_0(t), t, \varepsilon)z + g(z, t, \varepsilon), \end{aligned}$$

где f_y означает матрицу из частных производных компонент вектора f по компонентам y (матрица Якоби), а функция $g(z, t, \varepsilon)$ при $z=0$ равна нулю вместе с ее первыми частными производными по компонентам z . При наших предположениях имеет место равенство

$$f(y_0(t), t, \varepsilon) - \varepsilon^H \frac{dy_0}{dt} = \varepsilon a(t, \varepsilon), \quad (45.6)$$

где $a(t, \varepsilon)$ голоморфна при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$.

Если ввести матрицу $A(t, \varepsilon)$

$$A(t, \varepsilon) = f_y(y_0(t), t, \varepsilon), \quad (45.7)$$

то исходное дифференциальное уравнение (45.1) примет вид

$$\varepsilon^H \frac{dz}{dt} = \varepsilon a(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)z + g(z, t, \varepsilon). \quad (45.8)$$

Теперь наша задача заключается в том, чтобы найти периодическое решение уравнения (45.8), которое стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Асимптотическое решение уравнения (45.8) будет найдено при условиях, что матрица $A(t, \varepsilon)$ удовлетворяет предположениям I (см. разд. 42.1) и (B) (см. разд. 44.2), так что можно применить теорему 44.3.

Если подставить

$$z = \sum_{r=1}^{\infty} y_r(t) \varepsilon^r \quad (45.9)$$

в (45.8) и выполнить обычные формальные действия, то получим рекуррентную последовательность уравнений

$$\Omega \frac{dy_r}{dt} = A_0(t) y_r + \varphi_r, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (45.10)$$

где каждое φ_r является многочленом относительно компонент y_j , $\frac{dy_j}{dt}$, $j \leq r-1$, с периодическими коэффициентами. В частности, $\varphi_1 = a_0(t) = a(t, 0)$.

Для исследования этих дифференциальных уравнений относительно y_r расщепим y_r на два вектора $y_r^{(1)}$ и $y_r^{(2)}$ размерностей $n - m_s$ и m_s соответственно и таким же образом определим $\varphi_r^{(1)}$ и $\varphi_r^{(2)}$. Тогда (45.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} 0 &= A_{110}(t) y_r^{(1)} + A_{120}(t) y_r^{(2)} + \varphi_r^{(1)}, \\ \frac{dy_r^{(2)}}{dt} &= A_{210}(t) y_r^{(1)} + A_{220}(t) y_r^{(2)} + \varphi_r^{(2)}. \end{aligned} \quad (45.11)$$

В силу предположения I матрица $A_{110}(t)$ неособая. Следовательно, мы можем исключить $y_r^{(1)}$ из (45.11) и получить дифференциальное уравнение относительно $y_r^{(2)}$

$$\begin{aligned} \frac{dy_r^{(2)}}{dt} &= [A_{220}(t) - A_{210}(t) A_{110}^{-1}(t) A_{120}(t)] y_r^{(2)} + \\ &+ \varphi_r^{(2)} - A_{210}(t) A_{110}^{-1}(t) \varphi_r^{(1)}. \end{aligned}$$

Если φ_r является известной периодической функцией t , то из предположения (B) (часть (b)) и теоремы 44.2 вытекает, что последнее уравнение имеет единственное решение периода ω . Это означает, что уравнения (45.10) могут быть последовательно удовлетворены с помощью однозначно определяемых периодических функций $y_r(t)$ периода ω .

Таким образом, мы построили для уравнения (45.8) формальное решение в виде степенного ряда (45.9) с периодическими коэффициентами. Заметим, что для этого построения понадобилось только одно из $s-1$ условий предположения I и

только вторая часть предположения (В). Однако для доказательства того, что ряд (45.9) является асимптотическим разложением истинного решения системы (45.8) с периодом ω , предположения I и (В) потребуются полностью. Это доказательство очень близко к подобным доказательствам, проведенным ранее. Основой его является теорема 44.3. Пусть $\hat{z}(t, \varepsilon)$ является периодической аналитической функцией, которая при $\varepsilon \rightarrow +0$ представима в виде асимптотического ряда (45.9). Если мы положим в (45.8)

$$z = z(t, \varepsilon) + v \quad (45.12)$$

и заметим, что

$$\varepsilon^H \frac{d\hat{z}}{dt} - \varepsilon a(t, \varepsilon) - A(t, \varepsilon)\hat{z} - g(\hat{z}, t, \varepsilon) \sim 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0,$$

то получим для v дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^H \frac{dv}{dt} = \alpha(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)v + g(\hat{z}(t, \varepsilon) + v, t, \varepsilon) - g(\hat{z}(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (45.13)$$

где

$$\alpha(t, \varepsilon) \sim 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (45.14)$$

Покажем, что (45.13) имеет периодическое решение, которое при $\varepsilon \rightarrow +0$ асимптотически равно нулю.

С этой целью используем один из вариантов метода последовательных приближений Пикара. Положим $v_0 \equiv 0$ и определим $v_r(t, \varepsilon)$, $r=1, 2, \dots$, рекуррентно как единственное решение с периодом ω линейной системы относительно v_r :

$$\varepsilon^H \frac{dv_r}{dt} = \alpha(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)v_r + g(\hat{z}(t, \varepsilon) + v_{r-1}, t, \varepsilon) - g(\hat{z}(t, \varepsilon), t, \varepsilon).$$

Из теоремы 44.3 и формулы (45.14) вытекает, что при всех t и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\|v_1 - v_0\| = \|v_1\| \leq c\varepsilon^m. \quad (45.15)$$

Положительное целое число m произвольно, а постоянная c зависит от m . Так как $v_{r+1} - v_r$ является периодическим решением дифференциального уравнения

$$\varepsilon^H \frac{d(v_{r+1} - v_r)}{dt} = A(t, \varepsilon)(v_r - v_{r-1}) + g(\hat{z} + v_r, t, \varepsilon) - g(\hat{z} + v_{r-1}, t, \varepsilon),$$

то снова в силу теоремы 44.3 получаем

$$\|v_{r+1} - v_r\| \leq K \max \|g(\hat{z} + v_r, t, \varepsilon) - g(\hat{z} + v_{r-1}, t, \varepsilon)\|. \quad (45.16)$$

Правую часть можно оценить с помощью леммы 14.3, если отождествить вектор v из этой леммы с функцией $g(y, t, \varepsilon)$ и вектор z из леммы с вектором y . Выберем число β из этой леммы равным, например, $\frac{1}{2}K$. Пусть $z_0(\beta)$ такое же, как в лемме 14.3; возьмем $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ таким малым, чтобы при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ и при всех действительных t имели место неравенства

$$\|v_1\| \leq \frac{z_0(\beta)}{4}, \quad (45.17)$$

$$\|\hat{z}\| \leq \frac{z_0(\beta)}{2}. \quad (45.18)$$

Это возможно вследствие (45.15) и того факта, что суммирование в (45.9) начинается с $r=1$. Покажем теперь по индукции, что для всех $r \geq 0$

$$\|v_{r+1}\| \leq 2 \max_t \|v_1\|, \quad (45.19)$$

$$\|v_{r+1} - v_r\| \leq 2^{-r} \max_t \|v_1\|. \quad (45.20)$$

Действительно, если два последних неравенства верны при всех $j < r$, то к правой части (45.16) можно применить лемму 14.3, что дает

$$\|v_{r+1} - v_r\| \leq \frac{1}{2} \max_t \|v_r - v_{r-1}\|,$$

откуда следует (45.20). Кроме того,

$$\|v_{r+1}\| \leq \sum_{j=1}^{r+1} \|v_j - v_{j-1}\| \leq \max_t \|v_1\| \sum_{j=1}^{r+1} \frac{1}{2^{j-1}} \leq 2 \max_t \|v_1\|,$$

так что (45.19) также выполнено.

Из (45.20) обычным образом вытекает, что v_r равномерно при всех действительных t и при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ стремится к предельной функции $v(t, \varepsilon)$, которая удовлетворяет неравенству

$$\|v\| \leq 2 \max_t \|v_1\| \leq 2c\varepsilon^m.$$

Это означает, что $v \sim 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Наконец, $\frac{dv_r}{dt}$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно сходится к $\frac{dv}{dt}$ вследствие определения и равномерной сходимости v_r . Следовательно, v является периодическим решением (45.13).

Тем самым мы завершили доказательство следующей теоремы.

Теорема 45.1. Пусть n -мерная векторная функция $f(y, t, \varepsilon)$ голоморфна по всем переменным при $\|y\| \leq \eta$ (y есть n -мерный вектор), всех действительных t и $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ и, кроме того, имеет действительный период ω по t . Пусть H определяется формулами (42.2), (42.3) и $h_s = 0$. Предположим, что $y_0(t)$ является решением с периодом ω укороченного дифференциального уравнения

$$\Omega \frac{dy_0}{dt} = f(y_0, t, 0),$$

где Ω определяется формулой (45.4). Если матрица Якоби

$$A(t, \varepsilon) = f_y(y, t, \varepsilon)|_{y=y_0(t)}$$

удовлетворяет предположениям I и (B), то исходное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^H \frac{dy}{dt} = f(y, t, \varepsilon)$$

имеет при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ (ε_1 — постоянная) решение с периодом ω , которое при $\varepsilon \rightarrow +0$ допускает равномерное асимптотическое разложение

$$y(t, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} y_r(t) \varepsilon^r.$$

45.2. Автономные системы

Предположения теоремы 45.1 не охватывают важных «автономных» задач, т. е. дифференциальных уравнений, которые не содержат явно t . Рассмотрим систему вида

$$\varepsilon^H \frac{dy}{dt} = f(y, \varepsilon), \quad (45.21)$$

где f не зависит от t . Предположим, как и ранее, что укороченная система

$$\Omega \frac{dy_0}{dt} = f(y_0, 0) \quad (45.22)$$

имеет решение $y_0(t)$ периода ω и что матрица Якоби

$$A(t, \varepsilon) = f_y(y, \varepsilon)|_{y=y_0(t)}$$

удовлетворяет предположению I. Тогда пункт (b) предположения (B) не будет, вообще говоря, выполнен. Это можно показать следующим образом.

Линейной однородной системе

$$\Omega \frac{d\zeta}{dt} = A(t, 0)\zeta \quad (45.23)$$

удовлетворяет производная $\zeta = \frac{dy_0}{dt}$. Вектор $\zeta^{(2)}$, образованный последними m_s компонентами ζ , является тогда решением с периодом ω дифференциального уравнения

$$\frac{d\zeta^{(2)}}{dt} = [A_{220}(t) - A_{210}(t)A_{110}^{-1}(t)A_{120}(t)]\zeta^{(2)} \quad (45.24)$$

Тем самым пункт (b) предположения (B) может быть выполнен только в весьма исключительном случае $\zeta^{(2)} \equiv 0$, т. е. если последние m_s компонент $y_0(t)$ являются постоянными.

Система (45.21) обычно не имеет решений с тем же самым периодом, что и основное решение $y_0(t)$ уравнения (45.22). Мы покажем, однако, что при соответствующих условиях существуют периодические решения $y(t, \varepsilon)$ уравнения (45.21) с периодом $\pi(\varepsilon)$, зависящим от ε таким образом, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \pi(\varepsilon) = \omega \quad (45.25)$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(t, \varepsilon) = y_0(t). \quad (45.26)$$

Частью нашей задачи является теперь определение периода $\pi(\varepsilon)$ в виде ряда. Заметим, что для любого периодического решения $y(t, \varepsilon)$ уравнения (45.21) векторная функция $y(t+k, \varepsilon)$, где k — любая действительная постоянная, снова является решением с тем же самым периодом. Следовательно, периодическое решение, если оно вообще существует, не единственно. С другой стороны, траектория, соответствующая функции $y(t+k, \varepsilon)$, является одной и той же для всех k . Изменение k сводится к изменению начальной точки на траектории. Постоянная k может даже зависеть от ε .

Если бы мы знали заранее, что данное уравнение (45.21) имеет решение с известным периодом $\pi(\varepsilon)$, то мы могли бы преобразовать это уравнение в другое дифференциальное уравнение, которое имело бы периодическое решение с тем же самым периодом ω для всех рассматриваемых значений ε , с помощью простой замены независимой переменной t на новую переменную τ по формуле

$$t = \frac{\pi(\varepsilon)}{\omega} \tau. \quad (45.27)$$

Тогда система приняла бы вид

$$\varepsilon^H \frac{dy}{d\tau} = \frac{\pi(\varepsilon)}{\omega} f(y, \varepsilon). \quad (45.28)$$

Мы теперь обратим предыдущие рассуждения, рассматривая $\pi(\varepsilon)$ в (45.27) как дополнительную неизвестную функцию ε , которую нужно определить так, чтобы (45.28) имело решение $y^*(\tau, \varepsilon)$ с периодом ω по τ для всех достаточно малых ε . Кроме того, $\pi(\varepsilon)$ должно удовлетворять соотношению (45.25). Тогда (45.26) будет выполнено, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y^*(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau), \quad (45.29)$$

так как $y^* \left(\frac{t\omega}{\pi(\varepsilon)}, \varepsilon \right)$ является периодическим решением (45.21).

Как и в неавтономном случае, введем новую зависимую переменную z , полагая $y = y_0(\tau) + z$ (см. формулу (45.5)). Дифференциальное уравнение (45.28) примет вид

$$\varepsilon^H \frac{dz}{d\tau} = \frac{\pi(\varepsilon)}{\omega} f(y_0(\tau), \varepsilon) - \varepsilon^H \frac{dy_0}{d\tau} + \\ + \frac{\pi(\varepsilon)}{\omega} f_y(y_0(\tau), \varepsilon)z + \frac{\pi(\varepsilon)}{\omega} g(z, \tau, \varepsilon),$$

или, если определить $a(t, \varepsilon)$ и $A(t, \varepsilon)$, как и в формулах (45.6) и (45.7),

$$\varepsilon^H \frac{dz}{d\tau} = \varepsilon a(\tau, \varepsilon) + \left(\frac{\pi(\varepsilon)}{\omega} - 1 \right) f(y_0(\tau), \varepsilon) + \\ + \frac{\pi(\varepsilon)}{\omega} A(\tau, \varepsilon)z + \frac{\pi(\varepsilon)}{\omega} g(z, \tau, \varepsilon), \quad (45.30)$$

что аналогично (45.8).

Для получения формального решения в виде ряда этого дифференциального уравнения с неизвестным параметром $\pi(\varepsilon)$ заменим z степенным рядом (45.9), в котором t заменено на τ , и положим

$$\frac{\pi(\varepsilon)}{\omega} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r \varepsilon^r. \quad (45.31)$$

Рекуррентные формулы для y_r имеют теперь вид

$$\Omega \frac{dy_r}{d\tau} = A_0(\tau) y_r + \varphi_r + \rho_r f(y_0(\tau), 0), \quad r = 1, 2, \dots, \quad (45.32)$$

который отличается от (45.10) наличием последнего члена и тем, что φ_r зависит теперь также от $\rho_1, \dots, \rho_{r-1}$.

Аналогом (45.11) является система

$$0 = A_{110}(\tau) y_r^{(1)} + A_{120}(\tau) y_r^{(2)} + \varphi_r^{(1)}$$

$$\frac{dy_r^{(2)}}{d\tau} = A_{210}(\tau) y_r^{(1)} + A_{220}(\tau) y_r^{(2)} + \varphi_r^{(2)} + \rho_r f^{(2)}(y_0(\tau), 0), \quad r=1, 2,$$

На этом аналогия с неавтономным случаем кончается, поскольку, как отмечалось ранее, однородное уравнение, соответствующее (45.32), имеет, вообще говоря, нетривиальные решения с периодом ω . Поэтому само уравнение (45.32) не будет, вообще говоря, иметь решение с периодом ω . Оно будет иметь такое решение лишь в том случае, когда параметр ρ_r можно задать произвольно. Мы покажем, что при соответствующем выборе ρ_r и соответствующем изменении пункта (b) условия (B) периодические решения уравнения (45.32) действительно будут существовать. Новое условие имеет следующий вид.

Предположение (B*).

(a) То же самое, что и в пункте (a) предположения (B).

(b) В точности один из m_s характеристических показателей дифференциального уравнения (45.24) является целым кратным $\frac{2\pi i}{\omega}$.

Исследование уравнения (45.32) облегчается тем обстоятельством, что решением (45.23) с периодом ω , как уже отмечалось, является $\frac{dy_0}{dt}$. В силу (45.22) мы имеем $f^{(2)}(y_0(\tau), 0) = \frac{dy_0^{(2)}}{d\tau} = \eta_0^{(2)}$, и, следовательно, $f^{(2)}(y_0(\tau), 0)$ сама является периодическим решением (45.24), т. е. однородного уравнения, соответствующего (45.32).

Для дальнейшего рассмотрения обозначения уравнения (45.32) являются слишком громоздкими. Поэтому мы сформулируем и докажем основную лемму в независимых обозначениях, соответствующих обозначениям разд. 44.1.

Лемма 45.1. Пусть $A(t)$ — непрерывная $(n \times n)$ -матрица с действительным периодом ω , и пусть $b(t)$ — непрерывный n -вектор с тем же периодом. Предположим, что в точности один из n характеристических показателей $A(t)$ равен целому кратному $\frac{2\pi i}{\omega}$. Если $v = p(t)$ является решением с периодом ω однородного уравнения $\frac{dv}{dt} = A(t)v$, то постоянную ρ можно выбрать так, и

притом единственным образом, что дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v + b(t) + \rho p(t) \quad (45.33)$$

будет иметь решения с периодом ω .

Доказательство. Легко проверить, что $v = tp(t)$ является частным решением уравнения $\frac{dv}{dt} = A(t)v + p(t)$. По теореме Флоке (теорема 44.1) однородная система $\frac{dv}{dt} = A(t)v$ имеет фундаментальную матрицу решений $V(t)$ вида $V(t) = P(t)e^{Rt}$, где $P(t)$ имеет период ω , а постоянная матрица R имеет жорданову форму. Так как в силу наших предположений однородное дифференциальное уравнение имеет только одно линейно независимое решение $p(t)$ с периодом ω , то мы можем считать, что первый столбец в $V(t)$ равен $p(t)$. Тогда общее решение уравнения (45.33) имеет вид

$$v(t) = V(t)k + V(t) \int_{\sigma}^t V^{-1}(\tau)b(\tau) d\tau + \rho tp(t),$$

где σ — произвольная действительная постоянная, а k — произвольный постоянный комплексный вектор. Это решение имеет период ω тогда и только тогда, когда k , σ , ρ удовлетворяют соотношению

$$[V(\sigma + \omega) - V(\sigma)]k + V(\sigma + \omega) \int_{\sigma}^{\sigma + \omega} V^{-1}(\tau)b(\tau) d\tau + \rho \omega p(\sigma) = 0. \quad (45.34)$$

Так как первым столбцом в $V(t)$ является периодический вектор $p(t)$, то уравнение (45.34) при данном σ представляет собой систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными ρ , k_2 , k_3 , ..., k_n . Покажем, что матрица коэффициентов этой системы неособая. Пусть $v_1(t) = p(t)$, $v_2(t)$, ..., $v_n(t)$ — вектор-столбцы, образующие $V(t)$. Тогда нужно показать, что матрица

$$\{p(\sigma), v_2(\sigma + \omega) - v_2(\sigma), \dots, v_n(\sigma + \omega) - v_n(\sigma)\} \quad (45.35)$$

не является особой. Очевидно, $v_j(t) = P(t)w_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, где $w_j(t)$ является j -м столбцом матрицы e^{Rt} . Кроме того, $v_1(t) = p(t)$. Следовательно, (45.35) является неособой тогда и только тогда, когда матрица

$$\{w_1(\sigma), w_2(\sigma + \omega) - w_2(\sigma), \dots, w_n(\sigma + \omega) - w_n(\sigma)\} \quad (45.36)$$

является неособой. Так как R — жорданова матрица, то $e^{Rt} = [\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)]$ содержит ниже главной диагонали только нулевые элементы. Если обозначить собственные значения R (т. е. характеристические показатели $A(t)$) через λ_j , то диагональные элементы матрицы (45.36) будут иметь вид

$$e^{\lambda_1 \sigma}, e^{\lambda_2(\sigma+\omega)} - e^{\lambda_2 \sigma}, \dots, e^{\lambda_n(\sigma+\omega)} - e^{\lambda_n \sigma}.$$

В силу наших предположений $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ не являются целыми кратными $\frac{2\pi i}{\omega}$. Следовательно, матрица (45.35) неособая.

Возвращаясь к уравнению (45.34), мы видим, что оно может быть удовлетворено при соответствующем выборе k и ρ . Остается доказать, что ρ единственно. Предположим, что $v^*(t)$ и $v^{**}(t)$ являются периодическими решениями (45.33), соответствующими значениям $\rho = \rho^*$ и $\rho = \rho^{**}$. Тогда $v(t) = \dot{v}^*(t) - v^{**}(t)$ является периодическим решением уравнения $\frac{dv}{dt} = A(t)v + (\rho^* - \rho^{**})p(t)$, которое имеет вид (45.33) с $b(t) = 0$, и (45.34) запишется теперь в виде

$$[V(\sigma + \omega) - V(\sigma)]k + (\rho^* - \rho^{**})\omega p(\sigma) = 0.$$

Матрица коэффициентов этой линейной однородной системы алгебраических уравнений относительно $\rho^* - \rho^{**}, k_2, \dots, k_n$, как мы видели в первой части доказательства, не является особой. Поэтому $\rho^* - \rho^{**} = 0$. Кроме того, $k_2 = \dots = k_n = 0$. Это завершает доказательство леммы.

Из леммы 45.1 следует, что дифференциальные уравнения (45.32) могут быть последовательно удовлетворены при $r = 1, 2, \dots$ с помощью функций $y_r(\tau)$ периода ω и соответствующих чисел ρ_r . Отметим попутно, что матрица $P(t)$ из теоремы Флоке была удобным инструментом для доказательства леммы 45.1, хотя знание ее не требовалось для решения уравнений (45.32). После того как существование решения доказано, отсюда немедленно следует, что уравнение (45.33) имеет периодические решения независимо от того, какая фундаментальная матрица $Y(t)$ используется.

Если для уравнения (45.32) найдено одно решение с периодом ω , то все другие получаются прибавлением к нему соответствующего кратного функции $p(\tau) = f^{(2)}(y_0(\tau), 0)$. В силу этого выбор частного периодического решения $y_r(\tau)$, которое берется при рекуррентном вычислении решения в виде ряда, может быть сделан однозначным с помощью некоторого условия. Например, мы можем потребовать, чтобы при $\tau = 0$ одна из компонент $y_r(0)$ равнялась нулю. Это возможно, если соответствующая компонента $p(0)$ отлична от нуля. Не умаляя общно-

сти, мы можем поэтому ввести условие, что *первая компонента вектора $y_r(0)$ равна нулю при $r=1, 2, \dots$*

Тогда существуют в точности один формальный ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} y_r(\tau) \varepsilon^r$$

с коэффициентами периода ω и в точности один ряд

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r \varepsilon^r,$$

такие, что дифференциальное уравнение (45.30) будет формально удовлетворено, если эти ряды подставить соответственно вместо z и $\pi(\varepsilon)/\omega$. Остается показать, что существуют истинное решение z и соответствующий ему период $\pi(\varepsilon)$, такие, что эти ряды являются для них асимптотическими разложениями. Мы опустим доказательство этого утверждения. Его можно получить после соответствующего доказательства для неавтономного случая с помощью введения дополнительной неизвестной скалярной функции ρ и присоединения дифференциального уравнения $\frac{d\rho}{d\tau} = 0$ к системе (45.30). Получающаяся система $n+1$ дифференциальных уравнений относительно $n+1$ скалярных функций является неавтономной, и относительно нее будет справедливо все доказанное ранее для неавтономных систем, если предварительно показать, что из предположения (B*) для исходной автономной системы вытекает выполнение предположения (B) для расширенной системы.

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью факториальных рядов

46. Факториальные ряды и интегралы Лапласа

46.1. Введение

В общей теории интегрирования с помощью асимптотических рядов, развитой в гл. IV, не требовалось, чтобы матричная функция $A(x)$ в дифференциальном уравнении

$$x^{-q} \frac{dY}{dx} = A(x)Y \quad (46.1)$$

была голоморфной на бесконечности, а требовалось только существование в некотором секторе асимптотического представления

$$A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}.$$

Так как по теореме 9.3 каждый формальный степенной ряд является асимптотическим разложением некоторой аналитической функции, то, как легко видеть, при асимптотическом решении указанного уравнения может встретиться любой формальный степенной ряд. В большинстве задач, которые важны в приложениях, функция $A(x)$ является голоморфной при $x = \infty$, и можно ожидать, что это свойство будет отражено асимптотическим рядом, фигурирующим в решении уравнения (46.1), таким образом, что этот ряд будет принадлежать некоторому подклассу из множества всех формальных рядов.

Имеется несколько специальных классов расходящихся рядов, которые были предметом широкого изучения. Целью этих исследований обычно был анализ «суммируемости» этих рядов. Суммируемость не является строго определенным понятием. Грубо говоря, она связана со следующим положением: данный формальный процесс, примененный к функции $f(x)$, дает некоторый обычно расходящийся ряд, и задача заключается в том, чтобы заменить этот расходящийся ряд некоторым сходящимся процессом, который позволил бы вычислить функцию $f(x)$ с любой желаемой точностью.

Тем самым мы приходим, естественно, к вопросу, не принадлежит ли класс расходящихся рядов, возникающих при решении уравнения (46.1) с голоморфной на бесконечности матрицей $A(x)$, к одному из типов рядов, изученных с других позиций. Утвердительный ответ не только представлял бы теоретический интерес, но и мог бы быть полезным в вычислительной работе, так как сходящийся процесс в противоположность представлению в виде асимптотического ряда обладает неограниченной точностью.

Основные результаты по этой проблеме были получены Хорном [3], [4], который показал, что функции, представимые в нашей теории асимптотическими рядами, могут быть вычислены с помощью *сходящихся факториальных рядов*, если $A(x)$ голоморфна при $x = \infty$. Хорн предполагал, что собственные значения $A(\infty)$ различны. Даже в этом частном случае теория очень сложна, что не удивительно, так как ее целью является более точная информация, чем та, которая получается при интегрировании с помощью асимптотических рядов.

Случай кратных собственных значений рассмотрен в статьях Тржизинского [2] и Территина Х. [3], причем в первой рассматривается одно уравнение, а во второй — система. Обе статьи довольно сложны алгебраически и устанавливают желаемую суммируемость с помощью факториальных рядов только при определенных ограничениях. До сих пор остается открытым вопрос: можно ли избежать этих ограничений с помощью усовершенствования доказательств или с помощью расширения типа рассматриваемых факториальных рядов?

Прежде чем изложить упомянутые результаты, мы дадим краткое введение в теорию факториальных рядов. Так как имеется превосходное изложение этого вопроса (Нёрлунд [1], гл. VI, и Борель [1], стр. 234—245), то мы не будем здесь приводить все доказательства.

46.2. Основная теорема о факториальных рядах

Факториальным рядом называется бесконечный ряд вида

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{x(x+1)\dots(x+r)} \quad (46.2)$$

Введение таких рядов можно мотивировать разными способами, например их можно рассматривать как конечно-разностный аналог рядов по отрицательным степеням x , поскольку в теории конечных разностей «факториальные многочлены», подобные $x(x+1)\dots(x+r)$, часто играют такую же роль, что обычные степени в дифференциальном исчислении.

Другой естественный подход к этим рядам связан с теорией преобразования Лапласа. Пусть функция $F(x)$ представлена в виде интеграла Лапласа

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(t) dt, \quad (46.3)$$

где интегрирование ведется по действительной оси. Оставим пока в стороне вопросы сходимости и произведем формальные действия. Если вместо $f(t)$ подставить ее ряд по степеням t , то почленное интегрирование приводит к ряду для $F(x)$ по степеням x^{-1} . Но если сначала в интеграле Лапласа (46.3) сделать замену $s = e^{-t}$, то получим

$$F(x) = \int_0^1 s^{x-1} \varphi(s) ds, \quad (46.4)$$

где

$$\varphi(s) = f\left(\log \frac{1}{s}\right).$$

Если теперь разложить $\varphi(s)$ в ряд с центром разложения в точке $t=0$, т. е. $s=1$,

$$\varphi(s) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r (1-s)^r, \quad (46.5)$$

то подстановка (46.5) в (46.4) с последующим интегрированием по частям приводит к факториальному ряду

$$F(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r! c_r}{x(x+1) \dots (x+r)}. \quad (46.6)$$

Этот второй подход к теории факториальных рядов является более удобным для систематического изучения их свойств. Мы видим, например, что любая функция $F(x)$, для которой справедливы предыдущие вычисления, представима сходящимся факториальным рядом.

В проведенном рассуждении подразумевались три условия:

(а) $F(x)$ представима в виде интеграла Лапласа;

(б) $\varphi(s)$ голоморфна при $|1-s| < 1$;

(с) допустимо почленное интегрирование в (46.4) после подстановки (46.5).

В приложениях $F(x)$ будет аналитической функцией, разлагающейся в асимптотический степенной ряд в некоторой полуплоскости. Если эта полуплоскость определяется неравенством вида $\operatorname{Re} x \geq \kappa$ и если $F(\infty) = 0$, чего всегда можно добиться с

помощью поворота и вычитания постоянной, то условие (а) будет выполнено. В самом деле, можно доказать следующий результат (см. Нёрлунд [1]):

Теорема 46.1. Если

$$F(x) = \frac{a_0}{x} + \frac{\mu(x)}{x^2}, \quad (46.7)$$

где $\mu(x)$ голоморфна и ограничена при $\Re x \geq x$, то $F(x)$ может быть представлена в этой полуплоскости в виде

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(t) dt.$$

Что касается условия (b), то тут удастся сделать немного, чтобы приспособить его к потребностям данной главы. Иногда

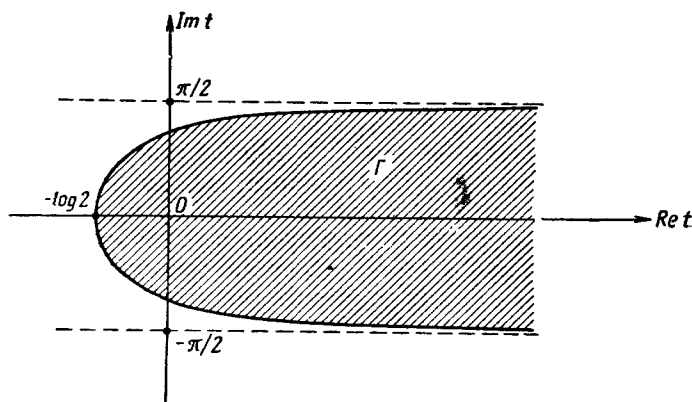


Рис. 46.1.

удобно вернуться от функции $\varphi(s)$ к $f(t)$ с помощью замены $t = \log \frac{1}{s}$. При этом круг $|1 - s| < 1$ отображается в область Γ такого вида, как показанная на рис. 46.1, если берется та ветвь логарифма, которая действительна для положительных s .

Часто бывает трудно или невозможно установить, что $f(t)$ действительно голоморфна в этой области. Например, мы можем только утверждать, что $f(t)$ голоморфна в некоторой узкой полосе Γ^* , состоящей из всех точек, расстояние которых от положительной оси не превышает некоторого малого положительного числа. В таком случае можно удовлетворить условию (b), переходя от x к переменной

$$x^* = \frac{x}{\omega} \quad (46.8)$$

и полагая одновременно

$$t^* = t\omega, \quad (46.9)$$

где ω — достаточно большое положительное число, так как (46.3) эквивалентно равенству

$$F(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} e^{-t^* x} f\left(\frac{t^*}{\omega}\right) dt^*. \quad (46.10)$$

Если $f(t)$ голоморфна в описанной полосе на t -плоскости, то можно выбрать ω столь большим, что $f\left(\frac{t^*}{\omega}\right)$ будет голоморфна в области Γ^* на t^* -плоскости. Это преобразование приводит, конечно, к расширению понятия факториальных рядов, так как мы должны теперь в (46.2) писать $\frac{x}{\omega}$ вместо x .

Обращаясь к условию (с), заметим, что функция $f(t)$ имеет, вообще говоря, особенность при $t = +\infty$, или, что эквивалентно, $\varphi(s)$ имеет особенность при $s=0$. Предположим, что условие (b) выполнено и что $s=0$ является *единственной* особенностью $\varphi(s)$ на окружности $|1-s|=1$. Этого можно всегда достичь с помощью преобразований вида (46.8), (46.9) при условии, что $f(t)$ с самого начала была голоморфной в некоторой полосе Γ^* . Сходимость интеграла в (46.4) является следствием предположения (a). Заметим, что этот факт совместим с очень сложным поведением $\varphi(s)$ вблизи $s=0$. Простейшим достаточным условием на $\varphi(s)$ для сходимости интеграла при $\operatorname{Re} x > \kappa$ является условие

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^x \varphi(s) = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} x \geq \kappa. \quad (46.11)$$

Далее можно показать, что для функции $\varphi(s)$, голоморфной в круге $|1-s| \leq 1$, за исключением точки $s=0$, равномерное в круге выполнение равенства (46.11) является также достаточным условием для законности почленного интегрирования, ведущего от (46.4) к (46.6). Этот отнюдь не тривиальный результат обычно доказывается с помощью понятия «порядка» аналитической функции в круге ее сходимости (Нёрлунд [1], гл. III).

Нёрлунд доказал ([1], стр. 208), что эти условия, при которых имеет место разложение в факториальный ряд, являются не только достаточными, но и необходимыми (это доказывается еще проще). Возвращаясь к t -плоскости, мы можем сформулировать полученные результаты следующим образом.

Теорема 46.2. (Основная теорема о факториальных рядах.) Пусть $F(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(1) \quad F(x) = \frac{a_0}{x} + \frac{\mu(x)}{x^2},$$

где $\mu(x)$ голоморфна и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} x \geq \kappa > 0$;

(2) функция $f(t)$, определяемая неявно уравнением

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(t) dt,$$

голоморфна в некоторой полубесконечной полосе, содержащей неотрицательную полуось t ;

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\omega t} f(t) = 0 \text{ в этой полосе.}$$

Тогда существует положительная постоянная $\omega_0 \geq 1$, такая, что при

$$\omega > \omega_0, \quad \operatorname{Re} x > \kappa$$

функция $F(x)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд вида

$$F(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{\frac{x}{\omega} \left[\left(\frac{x}{\omega} \right) + 1 \right] \dots \left[\left(\frac{x}{\omega} \right) + r \right]}$$

Условия (1), (2) и (3) являются также необходимыми условиями существования такого разложения.

46.3. Некоторые свойства факториальных рядов

Теперь мы перечислим кратко некоторые элементарные свойства факториальных рядов, которые при систематическом изложении следовало бы поместить раньше только что сформулированной основной теоремы (опущенные здесь доказательства см. в работе Нёрлунда [1]).

Область сходимости факториального ряда ограничена слева линией $\operatorname{Re} x = \lambda$ (λ может быть равно $+\infty$ или $-\infty$). Если $\lambda \leq 0$, то неположительные целые числа являются изолированными точками расходимости. Во всех последующих утверждениях они должны быть исключены с помощью малых окружностей. Сходимость равномерна при $\operatorname{Re} x \geq \lambda + \delta$, где δ — произвольно малое положительное число. Существует абсцисса μ абсолютной сходимости, удовлетворяющая неравенствам

$$\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1,$$

так что ряд сходится абсолютно при $\operatorname{Re} x > \mu$, но не сходится абсолютно при $\operatorname{Re} x < \mu$.

Представление функции факториальным рядом единственно, т. е. функции $F(x)$ соответствует в лучшем случае один сходящийся ряд вида (46.2).

Теорема 46.3. Функция $F(x)$, которая может быть разложена в сходящийся факториальный ряд, имеет асимптотическое представление в виде ряда по степеням x^{-1} , справедливое при стремлении x к бесконечности в правой полуплоскости.

Доказательство. Очевидно,

$$\frac{1}{x+r} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-r)^s}{x^{s+1}} \quad \text{при } |x| > r.$$

Этот сходящийся ряд заведомо является асимптотическим представлением функции $\frac{1}{x+r}$. Вообще каждая частичная сумма из n членов факториального ряда вида (46.2) представима в виде асимптотического ряда. Если мы хотим, чтобы остаточный член этого асимптотического представления был ограничен в некотором секторе при $|x| \geq R$, где R не зависит от n , то этот сектор не должен содержать отрицательную действительную полуось. Если факториальный ряд для $F(x)$ сходится, то мы имеем

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{r=0}^n \frac{a_r}{x(x+1)\dots(x+r)} + \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{a_r}{x(x+1)\dots(x+r)} = \\ &= \sum_{r=0}^m \frac{b_r}{x^{r+1}} + E_{mn}(x) x^{-m-2} + E_n(x) x^{-n-2}, \end{aligned} \quad (46.12)$$

где $E_{mn}(x)$ при фиксированных m и n ограничена в каждом секторе $|x| \geq R$, $|\arg x| \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$. С другой стороны, $E_n(x)$ при данном n ограничена в каждой полуплоскости $\operatorname{Re} x \geq \lambda + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, где λ является абсциссой сходимости факториального ряда. Так как m и n можно взять произвольно большими, то формула (46.12) доказывает теорему.

Обратное утверждение, конечно, неверно. Однако если $F(z)$ задана в виде асимптотического степенного ряда и если известно, что она разлагается в сходящийся факториальный ряд, то фактическое преобразование первого ряда во второй представляет определенный вычислительный интерес. Это преобразование можно выполнить весьма просто с помощью алгоритма,

который восходит к Стирлингу и описан, например, у Нильсена [1], стр. 437. Вначале x^{-p} , $p > 1$, разлагается в факториальный ряд путем применения к интегралу Лапласа для x^{-p}

$$x^{-p} = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} dt$$

метода, описанного в начале разд. 46.2. В этом случае мы имеем

$$\varphi(s) = \frac{1}{\Gamma(p)} \left(\log \frac{1}{s} \right)^{p-1}. \quad (46.13)$$

Разложение этой функции в ряд по степеням $1-s$ требует некоторых не совсем очевидных рассуждений.

Пусть $G(\log s)$ — аналитическая функция от $\log s$. Нетрудно показать, например по индукции, что

$$\frac{d^n}{ds^n} G(\log s) = s^{-n} \sum_{v=0}^{n-1} (-1)^v \Gamma_v^n G^{(n-v)}(\log s), \quad n \geq 1, \quad (46.14)$$

где Γ_v^n — определенные постоянные, одни и те же для всех функций $G(z)$. Чтобы определить их, положим $G(z) = e^{-cz}$. Тогда $G(\log s) = s^{-c}$ и

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n} G(\log s) &= (-1)^n c(c+1)(c+2) \dots (c+n-1) s^{-c-n}, \\ G^{(k)}(\log s) &= (-1)^k c^k s^{-c}. \end{aligned}$$

Следовательно, (46.14) имеет для этой функции вид

$$c(c+1) \dots (c+n-1) = \sum_{v=0}^{n-1} \Gamma_v^n c^{n-v}.$$

Выполняя умножение в левой части, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_0^n &= 1, \\ \Gamma_v^n &= \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{v-1} \\ \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{v-1}}}^{n-1} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{v-1}, \quad v > 0. \end{aligned} \quad (46.15)$$

Другими словами, чтобы получить Γ_v^n , нужно составить все комбинации (без повторений) из $n-1$ целых чисел $1, 2, \dots, n-1$ по v чисел в каждой, перемножить числа в каждой комбинации и полученные результаты сложить. Заметим, что если через $S_v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ обозначить элементарную симметричную функцию v -го порядка от $n-1$ переменных, то

$\Gamma_n^* = S_n (1, 2, \dots, n-1)$. Эти числа иногда называют *факториальными коэффициентами*, или *числами Стирлинга*. Для их вычисления имеются более удобные методы (см. Шлёмильх [1], стр. 29, 30).

Применение формулы (46.14) к функции (46.13) при $p > 1$ дает

$$\varphi^{(r)}(1) = \begin{cases} 0, & r < p-1, \\ (-1)^r \Gamma_{r-p+1}^*, & r \geq p-1, \end{cases}$$

и, следовательно, в силу формул (46.6) и (46.5)

$$x^{-p} = \sum_{r=p-1}^{\infty} \frac{\Gamma_{r-p+1}^*}{x(x+1)\dots(x+r)}, \quad p > 1. \quad (46.16)$$

Чтобы получить факториальный ряд для

$$F(x) \sim \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c_p}{x^p}, \quad (46.17)$$

достаточно теперь подставить (46.16) в (46.17) и перегруппировать члены полученного двойного ряда. Тогда получим

$$F(x) = \frac{c_1}{x} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_2 \Gamma_{r-1}^* + c_3 \Gamma_{r-2}^* + \dots + c_{r+1} \Gamma_0^*}{x(x+1)\dots(x+r)}. \quad (46.18)$$

Теорема 46.4. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ допускают разложения в сходящиеся факториальные ряды при $\operatorname{Re} x > \kappa$, то

$$[C_1 + F_1(x)][C_2 + F_2(x)] - C_1 C_2 \quad (C_1, C_2 - \text{постоянные})$$

также допускает разложение в сходящийся факториальный ряд в той же полуплоскости.

Доказательство можно найти в работе Нёрлунда [1], стр. 218.

46.4. Некоторые теоремы о преобразовании Лапласа

В заключение § 46 мы сформулируем, в основном без доказательства, несколько известных теорем, которые понадобятся в дальнейшем.

Теорема 46.5. Если $F(x)$ голоморфна на бесконечности, т. е. если

$$F(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{x^r}, \quad |x| > x_0,$$

то

$$F(x) = a_0 + \int_0^{\infty} e^{-tx} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} x > x_0,$$

где $f(x)$ — целая функция, разлагающаяся в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r}{(r-1)!} x^{r-1}.$$

Кроме того,

$$f(x) = O(e^{M|x|}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (46.19)$$

для всех $|x| > x_0$.

Доказательство можно найти у Уиддера [1], стр. 94—95, или у Дётша [1], стр. 62. Целую функцию, удовлетворяющую соотношению вида (46.19), будем называть функцией экспоненциального типа.

Теорема 46.6. Пусть

$$F_1(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f_1(t) dt, \quad \operatorname{Re} x \geq \kappa,$$

$$F_2(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f_2(t) dt, \quad \operatorname{Re} x \geq \kappa.$$

Если хотя бы один из этих двух интегралов сходится абсолютно, то

$$F_1(x) F_2(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \varphi(t) dt, \quad \operatorname{Re} x \geq \kappa,$$

где

$$\varphi(x) = \int_0^x f_1(t) f_2(x-t) dt$$

(см. Уиддер [1], стр. 84; Дётш [1], стр. 165). Функция $\varphi(x)$ называется «сверткой» функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Теорема 46.7. Если

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(t) dt$$

сходится при $\operatorname{Re} x > \kappa$, то $F(x)$ голоморфна в этой полуплоскости и допустимо дифференцирование под знаком интеграла (см. Уиддер [1], стр. 57, и Дётш [1], стр. 43).

Эти теоремы, сформулированные для скалярных функций, легко переносятся на матричные функции.

Теорема 46.8. Если $f(t)$ голоморфна в некотором секторе, содержащем действительную положительную полуось t , и если в этом секторе

$$f(t) = O(e^{a|t|}) \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

то

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(t) dt$$

представима при $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$ асимптотическим рядом по степеням x^{-1} .

Доказательство. Функция $F(x)$, существование которой очевидно, голоморфна в полуплоскости сходимости интеграла Лапласа (теорема 46.7). В силу теоремы 9.1 достаточно доказать, что все производные $\frac{d^r F(z^{-1})}{dz^r}$ при $z \rightarrow 0$ в правой полуплоскости имеют предел, или, эквивалентно, что в правой полуплоскости существует

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{r+1} F^{(r)}(x).$$

Поэтому в силу теоремы 46.7 мы должны доказать существование предела

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^{r+1} \int_0^{\infty} t^r e^{-tx} f(t) dt \right\}.$$

После замены $xt = \tau$ выражение в скобках примет вид

$$\int_{C(\theta)} \tau^r e^{-\tau} f\left(\frac{\tau}{x}\right) d\tau, \quad (46.20)$$

где $\theta = \arg x$, а $C(\theta)$ — луч $\arg \tau = \theta$. Для любого θ_0 из интервала $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ интеграл сходится равномерно в области $|\theta| \leq \theta_0$, $|x| \geq \frac{2a}{\cos \theta_0}$, так как он мажорируется там — с точностью до постоянного множителя — сходящимся интегралом

$$\int_0^{\infty} |\tau|^r \exp[|\tau|(a|x|^{-1} - \cos \theta)] d|\tau| \leq \int_0^{\infty} |\tau|^r \exp\left[-|\tau| \frac{\cos \theta_0}{2}\right] d|\tau|.$$

Следовательно, мы можем перейти к пределу под знаком интеграла (46.20), и получающийся предел

$$f(0) \int_{c(\theta)} \tau^r e^{-\tau} d\tau$$

в силу интегральной теоремы Коши не зависит в этой области от θ .

47. Решение дифференциальных уравнений ранга единица с помощью факториальных рядов

47.1. Предварительные преобразования

Чтобы выявить сущность излагаемой теории, мы рассмотрим сначала относительно простой случай систем дифференциальных уравнений ранга единица, т. е. систем, которые в матричном обозначении можно записать в виде

$$Y' = A(x)Y, \quad (47.1)$$

где

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}. \quad (47.2)$$

Везде в дальнейшем мы ограничимся случаем, когда все собственные значения λ_j матрицы A_0 различны.

В силу теоремы 12.3 и ее следствия в любой открытой полуплоскости S , ограниченной некоторой прямой, проходящей через точку $x=0$, существует фундаментальная матрица решений уравнения (47.1) вида

$$Y(x) = \hat{Y}(x) x^D e^{\Lambda x}, \quad (47.3)$$

где

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad (47.4)$$

D — диагональная матрица, и в каждом замкнутом подсекторе полуплоскости S

$$\hat{Y}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \hat{Y}_r x^{-r}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (47.5)$$

В этом разделе мы хотим показать, что функция $\hat{Y}(x)$ — \hat{Y}_0 может быть представлена сходящимся факториальным рядом.

Начнем с двух предварительных упрощающих преобразований. Путем поворота

$$x^* = x e^{-i\alpha} \quad (47.6)$$

с соответствующим углом α мы можем преобразовать S в сектор, который делится пополам положительной действительной полуосью. Предположим, что наш исходный сектор S находится уже в таком положении. Это не ограничивает общности, так как в конце нашего доказательства мы можем подвергнуть полученные результаты обратному к (47.6) преобразованию.

Если проделать процедуру формальной диагонализации из § 11 только с конечным числом членов, т. е. если в теореме 11.1 заменить ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}$$

многочленом

$$\sum_{r=0}^N P_r x^{-r}$$

с произвольным N , то в результате преобразования

$$Y = \left(\sum_{r=0}^N P_r x^{-r} \right) Z,$$

примененного к данному дифференциальному уравнению (47.1), получится дифференциальное уравнение того же типа, в котором первые N членов степенного ряда для матрицы коэффициентов будут диагональны. Пусть в результате такого преобразования $\hat{Y}^*(x)$ соответствует $\hat{Y}(x)$, и предположим, что мы доказали для $\hat{Y}^*(x) - \hat{Y}_0^*$ разложимость в сходящийся факториальный ряд. Тогда то же самое верно и для $\hat{Y}(x) - \hat{Y}_0$, что следует из теоремы 46.4, так как

$$\sum_{r=1}^N P_r x^{-r}$$

представима в виде факториального ряда (см. формулу (46.16)). Поэтому, не умаляя общности, можно предположить, что

$$A_0, A_1, \dots, A_N \text{ диагональны.} \quad (47.7)$$

Для задачи ранга единица, такой, как (47.1), достаточно взять $N=2$. Заметим, что тогда в силу теоремы 12.3

$$A_0 = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (47.8)$$

Задача состоит теперь в том, чтобы показать, что матричная функция

$$U(x) = \hat{Y}(x) - \hat{Y}_0 \quad (47.9)$$

удовлетворяет трем условиям теоремы 46.2. Условие (1), несомненно, выполняется в каждом подсекторе правой полуплоскости

в силу следствия из теоремы 12.3. Оно выполняется также и во всей полуплоскости, если $\arg x = \pm \frac{\pi}{2}$ не являются лучами раздела (см. разд. 15.3). Это условие относится к собственным значениям A_0 . Однако если мы вспомним, что наша теперешняя формулировка задачи получена с помощью поворота из более общей постановки, в которой S был *любым* сектором с углом, меньшим π , то увидим, что в исходной постановке это условие исключает только те полуплоскости, для которых лучи раздела являются граничными лучами.

47.2. Присоединенное интегральное уравнение

Чтобы проверить условия (2) и (3) теоремы 46.2, мы выведем сначала дифференциальное уравнение относительно матрицы $U(x)$ из (47.9). Если мы положим

$$A(x) = A_0 + A_1 x^{-1} + \tilde{A}(x), \quad (47.10)$$

подставим

$$(U(x) + \hat{Y}_0) e^{A_0 x + A_1 \log x}$$

вместо Y в (47.1) и заметим, что

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} \hat{Y}_r x^{-r} \right) e^{A_0 x + A_1 \log x}$$

является формальным решением дифференциального уравнения, то получим после небольших вычислений дифференциальное уравнение относительно $U(x)$

$$U' = (A_0 U - U A_0) + (A_1 U - U A_1) x^{-1} + \tilde{A}(x) \hat{Y}_0 + \hat{A}(x) U. \quad (47.11)$$

Условия (2) и (3) теоремы 46.2 относятся к обратному преобразованию Лапласа $U(x)$ в $u(t)$. Так как $U(x)$ удовлетворяет условию (1), то теорема 46.1 гарантирует существование $u(t)$, т. е.

$$U(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} u(t) dt. \quad (47.12)$$

Кроме того, $\tilde{A}(x)$ при $x \rightarrow \infty$ имеет порядок $O(x^{-2})$ и голоморфна при $x = \infty$, так что

$$\tilde{A}(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \tilde{a}(t) dt, \quad (47.13)$$

где $\tilde{a}(t)$ в силу теоремы 46.5 является целой матричной функцией экспоненциального типа, равной нулю при $t=0$:

$$\tilde{a}(0) = 0. \quad (47.14)$$

Поэтому мы можем подвергнуть дифференциальное уравнение (47.11) преобразованию Лапласа и с помощью теоремы 46.6 о свертке получить интегральное уравнение относительно матрицы $u(t)$

$$-tu(t) = A_0 u(t) - u(t)A_0 + \int_0^t (A_1 u(\tau) - u(\tau)A_1) d\tau + \\ + \tilde{a}(t) \tilde{Y}_0 + \int \tilde{a}(t-\tau) u(\tau) d\tau. \quad (47.15)$$

Чтобы выявить структуру этого интегрального уравнения, удобно изменить обозначения и обозначить n^2 элементов $u(t)$ через $v_j(t)$, $j=1, 2, \dots, n^2$. Порядок нумерации возьмем таким, чтобы n диагональных элементов $u(t)$ были первыми. Тогда интегральное уравнение примет вид

$$(\mu_j - t) v_j(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{n^2} g_{jk}(t-\tau) v_k(\tau) d\tau + h_j(t), \quad j=1, 2, \dots, n^2. \quad (47.16)$$

Постоянные μ_j являются разностями $\lambda_\nu - \lambda_\mu$, $\mu, \nu=1, \dots, n$, собственных значений A_0 . Поэтому

$$\mu_j \begin{cases} = 0, & j=1, \dots, n, \\ \neq 0, & j=n+1, \dots, n^2. \end{cases} \quad (47.17)$$

Первые n уравнений (47.16) имеют особенности при $t=0$, которые могут вызвать опасение, что решения $v_j(t)$ также будут иметь особенности при $t=0$. В этом случае они не могли бы удовлетворять условию (2) теоремы 46.2, которой мы хотим воспользоваться. Однако мы покажем, что свойство (47.14) спасает положение. Из него и из того факта, что диагональные элементы матрицы $A_1 u(t) - u(t)A_1$ равны нулю, вытекает, что

$$g_{jk}(t) = t g_{jk}^*(t), \quad j=1, \dots, n, \quad k=1, \dots, n^2, \quad (47.18)$$

и

$$h_j(t) = t h_j^*(t), \quad j=1, \dots, n^2. \quad (47.19)$$

Наличие множителя t в левых частях первых n уравнений (47.16) делает невозможным применение известных теорем об

интегральных уравнениях. Вместо этого мы повторим рассуждения, проводимые при обычном доказательстве существования методом последовательных приближений, сделав необходимые видоизменения, вызванные наличием особенностей.

47.3. Решение интегрального уравнения

Пусть B — замкнутая область τ -плоскости, получающаяся объединением фиксированного круга с центром в точке $\tau=0$ и бесконечного сектора $|\arg \tau| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Напомним наше предположение, что мнимая ось не содержит линию раздела для рассматриваемого дифференциального уравнения. Это эквивалентно утверждению, что $\operatorname{Re}[(\lambda_\nu - \lambda_\mu)x]$, $\nu \neq \mu$, не равна нулю для чисто мнимых x , или, другими словами, что отличные от нуля разности $\lambda_\nu - \lambda_\mu$ не являются действительными. Эти разности $\lambda_\nu - \lambda_\mu$ равны ненулевым значениям μ_j в (47.16). Следовательно, если θ и радиус круга с центром в точке $\tau=0$ выбраны достаточно малыми, то область B будет находиться на положительном расстоянии от точек μ_j , $j > n$.

Так как функции h_j , g_{jk} , h_j^* , g_{jk}^* являются функциями экспоненциального типа и так как бесконечная часть B лежит в правой полуплоскости, то существует такое положительное число ρ , что функции

$$\begin{aligned} \tilde{h}_j(t) &= e^{-\rho t} h_j(t), & \tilde{g}_{jk}(t) &= e^{-\rho t} g_{jk}(t), \\ \tilde{h}_j^*(t) &= e^{-\rho t} h_j^*(t), & \tilde{g}_{jk}^*(t) &= e^{-\rho t} g_{jk}^*(t) \end{aligned} \quad (47.20)$$

ограничены в B . Введем в интегральных уравнениях новые функции

$$\tilde{v}_j(t) = e^{-\rho t} v_j(t). \quad (47.21)$$

Уравнения примут вид

$$(\mu_j - t) \tilde{v}_j(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{n^2} \tilde{g}_{jk}(t - \tau) \tilde{v}_k(\tau) d\tau + \tilde{h}_j(t). \quad (47.22)$$

Далее определим, как обычно, последовательность функций $\tilde{v}_j^{(r)}(t)$, $r = 0, \dots$, посредством рекуррентной формулы

$$(\mu_j - t) \tilde{v}_j^{(r+1)}(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{n^2} \tilde{g}_{jk}(t - \tau) \tilde{v}_k^{(r)}(\tau) d\tau + \tilde{h}_j(t) \quad (47.23)$$

с начальной функцией

$$\tilde{v}_j^{(0)}(t) = 0.$$

Тогда для разностей

$$\tilde{w}_j^{(r+1)} = \tilde{w}_j^{(r+1)} - \tilde{w}_j^{(r)} \quad (47.24)$$

получится рекуррентная формула

$$(\mu_j - t) \tilde{w}_j^{(r+1)}(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{n^2} \tilde{g}_{jk}(t - \tau) \tilde{w}_k^{(r)}(\tau) d\tau \quad (47.25)$$

и соотношение

$$\tilde{w}_j^{(1)}(t) = \frac{\tilde{h}_j(t)}{\mu_j - t}. \quad (47.26)$$

Пусть K — общая верхняя грань величин $|\tilde{h}_j|$, $|\tilde{h}_j^*|$, $|\tilde{g}_{jk}|$, $|\tilde{g}_{jk}^*|$ в области B . Принимая во внимание формулы (47.16) и соотношения $\tilde{h}_j(t) = t\tilde{h}_j^*(t)$, которые следуют из (47.19) и (47.20), получим из (47.26)

$$|\tilde{w}_j^{(1)}(t)| \leq \frac{K}{\delta}, \quad j = 1, \dots, n^2,$$

где δ — некоторое положительное число, не превышающее расстояния от B до множества $\{\mu_j\}$, $j = n+1, \dots, n^2$. Кроме того, $\tilde{w}_j^{(1)}(t)$ голоморфна в B . Покажем по индукции, что все $\tilde{w}_j^{(r)}(t)$ также голоморфны в B и

$$|\tilde{w}_j^{(v)}(t)| \leq \left(\frac{K}{\delta}\right)^v \frac{m^{v-1} |t|^{v-1}}{(v-1)!}, \quad t \in B, \quad (47.27)$$

где мы положили для краткости

$$m = n^2.$$

Предположим, что это доказано для $v \leq r$. Тогда правая часть (47.25) голоморфна в B и равна нулю при $t=0$. Следовательно, $\tilde{w}_j^{(r+1)}(t)$ является голоморфной в B для всех j . Если подставить (47.27) в (47.25), то для $j \leq n$ получим

$$|t| |\tilde{w}_j^{(r+1)}(t)| \leq \left(\frac{K}{\delta}\right)^r \frac{m^{r-1}}{(r-1)!} \int_0^{|t|} mK (|t| - |\tau|) |\tau|^{r-1} d|\tau|, \quad j \leq n.$$

При этом было использовано соотношение (47.18) и в качестве пути интегрирования в (47.25) был взят прямолинейный сегмент. Несложное вычисление приводит к неравенству

$$|\tilde{w}_j^{(r+1)}(t)| \leq \frac{K^{r+1}}{\delta^r} \cdot \frac{m^r |t|^r}{r!}, \quad j \leq n, \quad t \in B,$$

правая часть которого меньше, чем правая часть (47.27) при $v=r+1$. Для $j>n$ подобным же образом получим неравенство

$$|\mu_j - t| |\tilde{\omega}_j^{(r+1)}(t)| \leq \left(\frac{K}{\delta}\right)^r \frac{m^{r-1}}{(r-1)!} \int_0^{|t|} mK |\tau|^{r-1} d|\tau|,$$

из которого непосредственно следует формула (47.27), так как $|\mu_j - t| > \delta$ в B .

Остается провести обычные хорошо известные рассуждения, которые мы не будем здесь повторять и которые приводят к утверждению, что интегральное уравнение (47.22) имеет единственное решение, голоморфное в B и удовлетворяющее там неравенству

$$|\tilde{v}_j(t)| \leq \frac{K}{\delta} e^{\frac{Km|t|}{\delta}}.$$

Возвращаясь к функциям $v_j(t)$ с помощью уравнений (47.21), получим, что они удовлетворяют в B неравенству

$$|v_j(t)| \leq \frac{K}{\delta} \exp\left[\left(\frac{K}{\delta} m + p\right) |t|\right]. \quad (47.28)$$

Таким образом, мы проверили все условия теоремы 46.2. Прежде чем сформулировать полученный результат в виде теоремы, напомним, что в предыдущем рассуждении переменная x была получена из переменной, обозначенной вначале также через x , путем поворота на угол $-\alpha$, который приводит к повороту собственных значений на угол $+\alpha$.

Теорема 47.1. Пусть дано матричное дифференциальное уравнение вида

$$Y' = A(x)Y,$$

где $A(x)$ голоморфна на бесконечности. Предположим, что собственные значения λ_j , $j=1, \dots, n$, матрицы $A(\infty)$ различны, и пусть α — любой угол, для которого

$$\alpha \neq -\arg(\lambda_\nu - \lambda_\mu), \quad \nu, \mu = 1, \dots, n, \quad \nu \neq \mu.$$

Тогда существуют комплексные постоянные ρ_1, \dots, ρ_n и положительные числа $\omega_0 \geq 1$ и κ , такие, что при $\omega \geq \omega_0$ дифференциальное уравнение имеет в полуплоскости

$$\operatorname{Re}(xe^{-i\alpha}) > \kappa \quad (47.29)$$

решение $Y(x) = \{y_{jk}(x)\}$ вида

$$y_{jk}(x) = \exp(\lambda_k x + \rho_k \log x) \left\{ y_{0,jk} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_{r,jk}}{(xe^{-i\alpha/\omega}) [(xe^{-i\alpha/\omega}) + 1] \dots [(xe^{-i\alpha/\omega}) + r]} \right\},$$

причем ряд сходится в полуплоскости (47.29) и матрица $\hat{Y}_0 = \{y_{0, jk}\}$ неособая.

Замечание 1. Предположение о голоморфности $A(x)$ на бесконечности не было использовано в полной мере при доказательстве теоремы 47.1. Существенным было только то, что $A(x)$ была голоморфной в полуплоскости (47.29) и являлась лапласовским преобразованием функции, голоморфной в некотором секторе, содержащем положительную полуось t , и имевшей там самое большое экспоненциальный рост при $t \rightarrow \infty$. Поэтому наша теория применима, например, к скалярному уравнению $y' = A(x)y$, где

$$A(x) = e^x \text{Ei}(-x),$$

поскольку $A(x)$, как легко проверить, является лапласовским преобразованием функции $-(t+1)^{-1}$. Функция $A(x)$ имеет особенность при $x = \infty$ и многозначна, но та ее ветвь, которая действительна при положительных x , представима при $|\arg x| < \pi$ в виде асимптотического ряда

$$A(x) \sim -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2!}{x^3} + \dots \pm \frac{m!}{x^{m+1}} \mp \dots$$

(см. разд. 7.1).

Замечание 2. Наличие в теореме 47.1 двух не определенных точно постоянных ω_0 и κ является недостатком с вычислительной точки зрения. Относительно ω_0 нетрудно сделать более точное утверждение. Если несколько обобщить доказательство существования решения интегрального уравнения (47.16), то окажется, что $v_j(t)$ не имеют особенностей в конечной плоскости, за исключением, быть может, точек $t = \mu_j$ ($j > n$), т. е. $t = \lambda_\nu - \lambda_\mu$. Здесь мы снова предположим, что $A(x)$ голоморфна на бесконечности. Если мы вспомним определение ω в разд. 46.2, то увидим, что достаточно сделать ω_0 столь большим, чтобы все точки $\omega_0(\lambda_\nu - \lambda_\mu)$ лежали вне области $|e^{-t} - 1| < 1$, показанной на рис. 46.1. Этот критерий справедлив, если угол α в теореме 47.1 равен нулю, как предполагалось в доказательстве. В общем случае сначала нужно выполнить предварительное преобразование (47.6), которое умножает собственные значения на $e^{i\alpha}$. Следовательно, множество точек

$$\omega_0(\lambda_\nu - \lambda_\mu) e^{i\alpha}, \quad \nu \neq \mu, \quad \nu, \mu = 1, \dots, n,$$

должно лежать вне области Γ на рис. 46.1.

По отношению к κ наше доказательство дает менее удовлетворительную информацию. Мы знаем, что κ определяется двумя условиями (1) и (3) теоремы 46.2, причем $F(x)$ и $f(x)$ являются соответственно элементами матриц $U(x)$ и $u(x)$. Далее, $U(x) = Y(x)x^{-D}e^{-\Lambda x} - Y_0$, а $Y(x)$ как решение линейного дифференциального уравнения (47.1) голоморфна везде, кроме, быть может, особых точек $A(x)$. Следовательно, условие (1) будет выполнено, если взять κ не меньше, чем радиус сходимости R ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}.$$

Условие (3) вместе с (47.28) дает для κ достаточное неравенство $\kappa > \left(\frac{K}{\delta}\right)n^2 + \rho$. В силу теоремы 46.5 и определения ρ в формулах (47.20) достаточно взять $\rho > \frac{R}{\cos \theta}$, где 2θ — центральный угол сектора, используемого в определении области B . Так как этот угол можно взять произвольно малым, то мы получаем в качестве достаточного условия неравенство

$$\kappa > \left(\frac{K}{\delta}\right)n^2 + R,$$

однако ввиду трудности определения K практическое значение этого неравенства ограничено. Кроме того, оно является излишне ограничительным.

З а м е ч а н и е 3. Мы завершаем этот раздел замечанием, что в проведенных исследованиях мы не должны были учитывать асимптотическую теорию гл. III. Вместо этого мы могли начать наше рассмотрение с интегрального уравнения (47.15). Наше доказательство аналитических свойств его решения проходит независимо от того, какие эвристические рассуждения приводят к построению этого уравнения. Матричная функция $U(x)$ может быть далее определена с помощью уравнения (47.12). Этот лапласовский интеграл сходится и ограничен по x в соответствующей полуплоскости, так как $u(t)$ растет вдоль пути интегрирования не более чем экспоненциально. По теореме 46.7 $U(x)$ голоморфна в этой полуплоскости, а в силу теоремы 46.8 она удовлетворяет условию (1) теоремы 46.2. Следовательно, $U(x)$ разложима в факториальный ряд. Наконец, $U(x)$ является решением дифференциального уравнения (47.11), так как оно получается с помощью преобразования Лапласа из уравнения (47.15).

48. Замечания о решении дифференциальных уравнений более высокого ранга с помощью факториальных рядов

Теорема 47.1 содержала два существенных ограничения. Ранг сингулярности при $x = \infty$ был равен единице, и собственные значения $A(\infty)$ были различны. Если второе из этих условий опустить, то задача становится чрезвычайно трудной, и даже наиболее полные результаты, полученные Территином Х. [3], не являются, как уже отмечалось ранее, исчерпывающими. Если собственные значения $A(\infty)$ различны, но ранг дифференциального уравнения больше единицы, т. е. если оно имеет вид

$$x^{-q} \frac{dY}{dx} = A(x)Y, \quad (48.1)$$

причем

$$q > 0, \quad (48.2)$$

то некоторое видоизменение нашего прежнего метода снова приводит к решению в виде факториального ряда, хотя формулы становятся теперь несколько сложнее.

Предварительно заметим, что преобразование

$$\xi = x^{q+1}$$

переводит уравнение ранга единица

$$\frac{dY}{d\xi} = A(\xi)Y$$

в уравнение ранга $q+1$

$$x^{-q} \frac{dY}{dx} = (q+1)A(x^{q+1})Y.$$

Поэтому если оказывается, что матрица коэффициентов в задаче ранга $q+1$ аналитична по x^{q+1} при $x = \infty$, то фактически мы имеем дело с задачей ранга единица. Это замечание является поводом для искусственного преобразования, которое сводит дифференциальное уравнение ранга $q+1$ к дифференциальному уравнению ранга единица. Новая система, вообще говоря, будет иметь порядок $(q+1)n$ вместо n . Точное утверждение состоит в следующем (см. Территин Х. [4]):

Теорема 48.1. Каждой линейной векторной системе дифференциальных уравнений

$$x^{-q} \frac{dy}{dx} = A(x)y \quad (48.3)$$

ранга $q+1$ и размерности n с голоморфной при $x=\infty$ матрицей коэффициентов $A(x)$ соответствует система ранга единица и размерности $n(q+1)$

$$\frac{du}{dt} = M(t)u, \quad (48.4)$$

в которой матрица коэффициентов $M(t)$ голоморфна при $t=\infty$ и которая обладает следующим свойством. Пусть вектор $u(t)$ является решением (48.4). Обозначим через $u^{(0)}(t)$ вектор размерности n , образованный первыми n компонентами u , через $u^{(1)}$ — вектор размерности n , образованный второй группой из n компонент вектора u , и так далее до $u^{(q)}$. Тогда

$$y = \sum_{j=0}^q x^{-j} u^{(j)}(x^{q+1}) \quad (48.5)$$

является решением (48.3), и все решения (48.3) могут быть представлены в виде (48.5).

Доказательство. Подставим в (48.3) вместо y выражение

$$y = \sum_{j=0}^q x^{-j} y^{(j)}, \quad (48.6)$$

где $y^{(j)}$ — функции x , которые мы хотим выбрать таким образом, чтобы (48.6) удовлетворяло дифференциальному уравнению (48.3). (Здесь верхний индекс не означает дифференцирования.) Получим соотношение вида

$$\sum_{j=0}^q x^{-j-q} \frac{dy^{(j)}}{dx} = \sum_{k=0}^q g_k(x) y^{(k)}, \quad (48.7)$$

в котором $g_k(x)$ являются известными функциями, голоморфными при $x=\infty$. Далее объединим члены в рядах для $g_k(x)$ по степеням x^{-1} в $q+1$ группу так, чтобы в каждой группе показатели степеней были сравнимы по модулю $q+1$. Тогда получим

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^q x^{-j} h_{kj}(x^{-q-1}),$$

где функции $h_{kj}(x^{-q-1})$ голоморфны по x^{-q-1} при всех больших x , и (48.7) примет вид

$$\sum_{j=0}^q x^{-j-q} \frac{dy^{(j)}}{dx} = \sum_{j=0}^q x^{-j} \sum_{k=0}^q h_{kj}(x^{-q-1}) y^{(k)}.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если будет выполнено каждое из следующих $q+1$ соотношений:

$$x^{-q} \frac{dy^{(j)}}{dx} = \sum_{k=0}^q h_{kj} (x^{-q-1}) y^{(k)}, \quad j=0, 1, \dots, q. \quad (48.8)$$

Сделаем замену переменной

$$t = x^{q+1} \quad (48.9)$$

и положим

$$y^{(j)}(x) = u^{(j)}(t).$$

Тогда (48.8) преобразуется в систему

$$\frac{du^{(j)}}{dt} = (q+1) \sum_{k=0}^q h_{kj} (t^{-1}) u^{(k)}, \quad j=0, 1, \dots, q. \quad (48.10)$$

Уравнения (48.10) образуют систему порядка $n(q+1)$ вида (48.4). Мы доказали, что для любого решения (48.10) функция $y(x)$, определяемая формулой (48.5), является решением (48.3). Чтобы показать, что все решения (48.3) могут быть представлены в виде (48.5), возьмем комплексное число x_0 столь большим, чтобы $A(x)$ была голоморфна при $x=x_0$. Если $u(t)$ является частным решением (48.4), для которого $u^{(0)}(x_0^{q+1})=y(x_0)$, $u^{(j)}(x_0^{q+1})=0$, $j=1, 2, \dots, q$, то левая и правая части в (48.5) совпадают при $x=x_0$ и, следовательно, тождественны. Это завершает доказательство теоремы 48.1.

К сожалению, теорема 48.1 не сводит задачу представления решений (48.3) в виде факториальных рядов к случаю, рассмотренному в теореме 47.1. Причина заключается в том, что, хотя уравнение (48.4) имеет ранг единица, собственные значения главной матрицы $M(\infty)$ не являются различными, даже если они различны у матрицы $A(\infty)$. В самом деле, легко проверить, что $M(\infty)$ имеет блочный вид

$$M(\infty) = (q+1) \begin{pmatrix} A_0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ A_1 & A_0 & \dots & \dots & 0 \\ A_2 & A_1 & A_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_q & A_{q-1} & A_{q-2} & \dots & A_0 \end{pmatrix}$$

Собственными значениями $M(\infty)$ являются те же самые числа λ_j , $j=1, \dots, n$, что и у матрицы $A(\infty)=A_0$, но все они имеют кратность $n>1$.

Задача 48.1. Выразить все коэффициенты M_r в разложении

$$M(t) = \sum_{r=0}^{\infty} M_r t^{-r}$$

через коэффициенты A_r в разложении

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}.$$

Несмотря на наличие кратных собственных значений, метод доказательства теоремы 47.1 может быть применен с определенными видоизменениями к уравнению (48.4). Подробности этого доказательства и более общие случаи можно найти у Территина [3]. Сформулируем окончательный результат относительно исходного уравнения (48.1).

Теорема 48.2. Пусть дано матричное дифференциальное уравнение вида

$$x^{-q} Y' = A(x) Y, \quad q \geq 0,$$

где $A(x)$ голоморфна на бесконечности. Предположим, что собственные значения λ_j , $j = 1, \dots, n$, различны, и пусть α — любой угол, для которого

$$\alpha \neq -\arg(\lambda_\nu - \lambda_\mu), \quad \nu, \mu = 1, \dots, n, \quad \nu \neq \mu.$$

Тогда существуют положительные числа $\omega_0 \geq 1$ и κ , такие, что при $\omega \geq \omega_0$ в каждой односвязной области, в которой

$$\operatorname{Re}(x^{q+1} e^{-i\alpha}) > \kappa,$$

дифференциальное уравнение имеет матричное решение $Y(x) = \{y_{jk}(x)\}$ вида

$$y_{jk}(x) = e^{p_k(x)} \left[\sum_{s=0}^q x^{-s} \left\{ y_{s,jk} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_{sr,jk}}{(x^{q+1} e^{-i\alpha/\omega}) [(x^{q+1} e^{-i\alpha/\omega}) + 1] \dots [(x^{q+1} e^{-i\alpha/\omega}) + r]} \right\} \right],$$

где

$$p_k(x) = \frac{\lambda_k}{q+1} x^{q+1} + \alpha_{k,1} x^q + \dots + \alpha_{k,q} x + \alpha_{k,q+1} \log x,$$

величины $\alpha_{k,\nu}$, $\nu = 1, \dots, q+1$, $k = 1, \dots, n$, являются комплексными постоянными и матрица $\hat{Y}_0 = \{y_{0,jk}\}$ неособая.

ДОБАВЛЕНИЕ 1

Асимптотика решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области

М. В. Федорюк

Асимптотические разложения по параметру решений линейных дифференциальных уравнений описываются в гл. VI—VIII настоящей книги В. Вазова. При этом автор рассматривает в основном задачи локального характера, т. е. исследует асимптотику решений по параметру в окрестности обычной точки уравнения или точки поворота. В настоящем добавлении исследуется асимптотика решений уравнений второго порядка с аналитическими (целыми) коэффициентами в целом, т. е. во всей комплексной плоскости независимого переменного. К сожалению, для уравнений более высокого порядка такая задача мало изучена.

В этом добавлении изложены в основном вопросы, рассмотренные в работах Евграфова и Федорюка [1], Олвера [5], Федорюка [1], [2], [5], Хединга [1], [2] и других. Автор надеется, что это добавление будет доступным не только для математиков, но и для механиков, физиков и других специалистов, интересующихся асимптотическими методами. Все основные формулы и теоремы приведены в этом добавлении, доказательства же, за исключением основных, отсутствуют.

1. Асимптотические формулы для решений

1.1. Формальные разложения

Рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2 q(x) y = 0, \quad (1.1)$$

где $\lambda \rightarrow +\infty$ — большой параметр. Получим чисто формальным способом асимптотические формулы для решений уравнения (1.1). Будем искать решение этого уравнения в виде

$$y = \exp\left(\sum_{-1}^{\infty} \lambda^{-j} \int^x a_j(t) dt\right).$$

Подставляя эту формулу в (1.1), получаем тождество

$$\left(\sum_{-1}^{\infty} \lambda^{-j} \alpha_j \right)^2 + \sum_{-1}^{\infty} \lambda^{-j} \alpha'_j - \lambda^2 q = 0, \quad (1.2)$$

понимаемое в смысле равенства формальных степенных рядов по λ^{-1} . Приравнявая нулю коэффициенты при степенях λ , получаем

$$\alpha_{-1}^2 = q, \quad \alpha_{j+1} = -\frac{1}{2\alpha_{-1}} \left(\sum_0^j \alpha_k \alpha_{j-k} + \alpha'_j \right).$$

Выберем одну из ветвей \sqrt{q} и положим $\alpha_{-1} = \sqrt{q}$; тогда

$$\alpha_{j+1} = -\frac{1}{2\sqrt{q}} \left(\sum_0^j \alpha_k \alpha_{j-k} + \alpha'_j \right). \quad (1.3)$$

Следовательно, уравнению (1.1) формально удовлетворяют два решения вида

$$y_1 = q^{-1/4}(x) \exp(\lambda \xi(x_0, x)) \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j} \int_{x_1}^x \alpha_j(t) dt \right), \quad (1.4)$$

$$y_2 = q^{-1/4}(x) \exp(-\lambda \xi(x_0, x)) \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} (-\lambda)^{-j} \int_{x_1}^x \alpha_j(t) dt \right), \quad (1.5)$$

где использовано обозначение

$$\xi(x_0, x) = \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt. \quad (1.6)$$

Ряды (1.4), (1.5), как правило, расходятся, но можно ожидать, что при определенных условиях на функцию $q(x)$ формулы (1.4), (1.5) являются асимптотическими разложениями при $\lambda \rightarrow +\infty$ некоторых решений уравнения (1.1). Этот вопрос мы выясним в следующих разделах.

Заметим только, что формулы (1.4), (1.5) непригодны в точках поворота, т. е. в точках, в которых $q(x) = 0$. Действительно, если функция $q(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 , то любое решение уравнения (1.1) непрерывно в точке x_0 . Если x_0 — точка поворота, то $q^{-1/4}(x_0) = \infty$, так что формулы (1.4), (1.5) непригодны в точках поворота.

1.2. Асимптотика решений уравнений второго порядка при вещественных x . Главный член асимптотики

Рассмотрим уравнение

$$y'' - Q(x)y = 0 \quad (1.7)$$

на интервале (a, b) . Введем обозначения

$$\delta(x, Q) = \frac{1}{8} \frac{Q''(x)}{(Q(x))^{3/2}} - \frac{5}{32} \frac{(Q'(x))^2}{(Q(x))^{5/2}}, \quad (1.8)$$

$$\rho(x, Q) = \left| \int_b^x |\delta(t, Q)| dt \right|. \quad (1.9)$$

Заметим, что $\delta(x, Q) = \alpha_1(x)$ (см. (1.3)). Если ясно, о какой функции Q идет речь, то в выражениях δ и ρ будем опускать зависимость от Q .

Получим оценки для решений уравнения (1.7) (см. Олвер [5], Федорюк [5]). Приведенная ниже лемма 1.1 является основной в настоящем параграфе.

Лемма 1.1. Пусть $Q(x)$ — комплекснозначная функция, $Q''(x)$ непрерывна при $x \in (a, b)$, $a < b$, и

$$Q(x) \neq 0, \quad x \in (a, b). \quad (1.10)$$

Пусть на интервале (a, b) можно выделить ветвь \sqrt{Q} , такую, что

$$\operatorname{Re} \sqrt{Q(x)} \geq 0, \quad x \in (a, b), \quad (1.11)$$

и выполнено условие

$$\rho(a, Q) < \frac{1}{2} \quad (1.12)$$

Тогда уравнение (1.7) имеет решение $y_1(x)$, такое, что при $x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} |y_1(x) - Q^{-1/4}(x) \exp(-\xi(x_0, x))| &\leq \\ &\leq 4\gamma |Q(x)|^{-1/4} \exp(-\operatorname{Re} \xi(x_0, x)) \rho(x, Q), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} |y_1'(x) + Q^{1/4}(x) \exp(-\xi(x_0, x))| &\leq \\ &\leq |Q(x)|^{1/4} \exp(-\operatorname{Re} \xi(x_0, x)) (4\gamma \rho(x, Q) + \\ &+ \frac{1}{4} |Q'(x)| |Q(x)|^{-1/2} (1 + 4\gamma \rho(x, Q))). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь

$$\gamma = (1 - 2\rho(a, Q))^{-1}, \quad (1.15)$$

$$\xi(x_0, x) = \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt, \quad (1.16)$$

ветвь \sqrt{Q} в формулах (1.13), (1.14) выбрана в соответствии с (1.11) и $x_0 \in (a, b)$.

З а м е ч а н и е. Условие (1.11) означает следующее. Функция $w = q(x)$ отображает интервал (a, b) на кривую l , лежащую в плоскости w . В окрестности точки $w_0 = q(x_0) \neq 0$, где $x_0 \in (a, b)$, можно выделить регулярную ветвь $f_1(w)$ функции $\zeta = \sqrt{w}$. Продолжим аналитически эту ветвь вдоль l , и пусть L_1 — образ l при отображении $\zeta = f_1(w)$. При другом выборе ветви имеем $f_2(w) \equiv -f_1(w)$, и пусть L_2 — образ l при отображении $\zeta = f_2(w)$. Условие (1.11) считается выполненным, если хотя бы одна из кривых L_1, L_2 лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сведем уравнение (1.7) к системе первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

Сделаем преобразование

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{Q} - \frac{Q'}{4Q} & -\sqrt{Q} - \frac{Q'}{4Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \left[\sqrt{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{Q'}{4Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta(x, Q) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right]. \quad (1.18)$$

Полагая

$$v_j = Q^{-1/4}(x) \exp(-\xi(x_0, x)) u_j, \quad j = 1, 2, \quad (1.19)$$

получаем

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \left[2\sqrt{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta(x, Q) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Заменим эту систему системой интегральных уравнений

$$u_1 = \int_b^x \exp(2\xi(t, x)) \delta(u_1 + u_2) dt, \quad (1.21)$$

$$u_2 = 1 - \int_b^x \delta(u_1 + u_2) dt,$$

или в операторной форме

$$U = U_0 + AU, \quad (1.22)$$

где $U = (u_1, u_2)$, $U_0 = (0, 1)$ и A — интегральный оператор. Применим к уравнению (1.22) принцип сжатых отображений. Пусть

M — банахово пространство вектор-функций $U(x) = (u_1(x), u_2(x))$, непрерывных и ограниченных на интервале (a, b) , с нормой $\|U\| = \sup_{(a, b)} (\max_{i=1,2} |u_i(x)|)$. Так как $a < b$, то в первом из уравнений (1.21) $t \geq x$, так что $\operatorname{Re} \xi(t, x) \leq 0$ в силу (1.11). Следовательно, если $U \in M$, то при $x \in (a, b)$ получаем из (1.21)

$$|(AU)_j(x)| \leq 2\|U\|\rho(x), \quad j=1, 2. \quad (1.23)$$

Из этой оценки и (1.12) следует, что оператор A действует из M в M и, кроме того, что $\|A\| < 1$. Поэтому к уравнению (1.22) применим принцип сжатых отображений, и это уравнение имеет решение $U \in M$, такое, что $\|U\| \leq \gamma$, где γ определяется из (1.15). Так как

$$u_1 = (AU)_1, \quad u_2 - 1 = (AU)_2,$$

то из (1.23) получаем

$$|u_1(x)| \leq 2\gamma\rho(x), \quad |u_2(x) - 1| \leq 2\gamma\rho(x)$$

при $x \in (a, b)$. Выражая y, y' через u_1, u_2 с помощью формул (1.17), (1.19), получаем оценки (1.13), (1.14).

Следствие. Пусть функция $Q = Q(x, \lambda)$ определена при $x \in (a, b)$, $\lambda \in G$, где G — область в комплексной плоскости λ , и Q регулярна по λ при $\lambda \in G$ и при любом фиксированном $x \in (a, b)$. Если условия леммы 1.1 выполнены при всех $\lambda \in G$, то решение $y_1(x, \lambda)$ регулярно по λ при $\lambda \in G$ и при любом фиксированном $x \in (a, b)$.

Это вытекает из того, что ряд из последовательных приближений сходится равномерно по $\lambda \in G$ и все его члены регулярны по λ при $\lambda \in G$ и при любом фиксированном $x \in (a, b)$.

Точно так же доказывается

Лемма 1.2. Пусть условия леммы 1.1 выполнены. Тогда уравнение (1.7) имеет решение $y_2(x)$, такое, что при $x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} |y_2(x) - Q^{-1/4}(x) \exp(\xi(x_0, x))| &\leq \\ &\leq 4\gamma |Q(x)|^{-1/4} \exp(\operatorname{Re} \xi(x_0, x)) \rho_1(x, Q), \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} |y_2'(x) - Q^{1/4}(x) \exp(\xi(x_0, x))| &\leq \\ &\leq |Q(x)|^{1/4} \exp(\operatorname{Re} \xi(x_0, x)) (4\gamma\rho_1(x, Q) + \\ &+ \frac{1}{4} |Q'(x)| |Q(x)|^{-1/2} (1 + 4\gamma\rho_1(x, Q))), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где

$$\rho_1(x, Q) = \left| \int_a^x |\delta(t, Q)| dt \right|. \quad (1.26)$$

Лемма 1.1 позволяет получить главный член асимптотического разложения для одного из решений уравнения второго порядка как для больших значений независимой переменной, так и для больших значений параметра (вне точек поворота). Приведем примеры.

Лемма 1.3. Пусть $Q(x)$ — комплекснозначная функция, $Q''(x)$ непрерывна при $x \geq 0$ и

$$Q(x) \neq 0, \operatorname{Re} \sqrt{Q(x)} \geq 0, x \geq 0. \quad (1.27)$$

Пусть, кроме того,

$$\int_0^{\infty} |\delta(x, Q)| dx < \infty. \quad (1.28)$$

Тогда уравнение (1.7) имеет решение $y_1(x)$, такое, что при $x \rightarrow +\infty$

$$y_1(x) = Q^{-1/4}(x) \exp(-\xi(x_0, x))(1 + o(1)). \quad (1.29)$$

Если, кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q'(x)(Q(x))^{-1/2} = 0, \quad (1.30)$$

то при $x \rightarrow +\infty$

$$y_1'(x) = -Q^{1/4}(x) \exp(-\xi(x_0, x))(1 + o(1)). \quad (1.31)$$

Доказательство. В данном случае

$$\rho(x, Q) = \int_x^{\infty} |\delta(t, Q)| dt = o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (1.32)$$

в силу сходимости этого интеграла. Поэтому существует $a > 0$, такое, что $\rho(x, Q) < \frac{1}{2}$ при $x \geq a$. К интервалу $(a, +\infty)$ применима лемма 1.1, и из оценки (1.13) и (1.32) получаем (1.29). Если выполнено (1.30), то (1.31) следует из (1.14). Лемма доказана.

Условие (1.28) выполняется для функций $Q(x)$ вида ax^α ($\alpha > -2$), $a \exp(bx^\alpha)$ ($\alpha > 0, b > 0$), $(\ln x)^\alpha$ ($-\infty < x < \infty$), а также для функций, главный член асимптотики которых при $x \rightarrow +\infty$ имеет указанный выше вид, если эту асимптотику можно дважды почленно дифференцировать. В частности, если $Q(x)$ — полином, то все условия леммы 1.3 выполнены при $x \geq a$, где a достаточно велико. Кроме того, в (1.29) $o(1)$ можно заменить на $O\left(x^{-\frac{n}{2}-1}\right)$, где n — степень $Q(x)$.

Формула (1.29) справедлива также в окрестности конечной особой точки a уравнения (1.7), если $\int_a^{\infty} |\delta(x, Q)| dx < \infty$. Эти замечания относятся также к леммам 1.4, 1.6.

Теперь мы построим второе линейно независимое решение уравнения (1.7). При этом придется несколько видоизменить доказательство леммы 1.1.

Лемма 1.4. Пусть функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1.3 при $x \geq 0$. Тогда уравнение (1.7) имеет решение $y_2(x)$, такое, что при $x \rightarrow +\infty$

$$y_2(x) = Q^{-1/4}(x) \exp(\xi(x_0, x))(1 + o(1)). \quad (1.33)$$

Если выполнено условие (1.30), то при $x \rightarrow +\infty$

$$y_2'(x) = Q^{1/4}(x) \exp(\xi(x_0, x))(1 + o(1)). \quad (1.34)$$

Решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, где y_1 построено в лемме 1.3, линейно независимы.

Доказательство. Функция $\operatorname{Re} \xi(0, x)$ неубывающая в силу (1.27). Следовательно, возможны два случая:

$$\text{а) } \operatorname{Re} \xi(0, +\infty) < \infty; \quad \text{б) } \operatorname{Re} \xi(0, +\infty) = +\infty.$$

Как и в лемме 1.1, сведем уравнение (1.7) к системе, сделаем преобразование (1.17) и затем положим

$$v_j = Q^{-1/4}(x) \exp(\xi(x_0, x)) u_j, \quad j=1, 2. \quad (1.35)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \left[-2\sqrt{Q} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta(x, Q) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Заменим эту систему системой интегральных уравнений. В случае а) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_{\infty}^x \delta(u_1 + u_2) dt, \\ u_2 &= 1 - \int_{\infty}^x \exp(-2\xi(x, t)) \delta(u_1 + u_2) dt, \end{aligned} \quad (1.37)$$

или в операторной записи

$$U = U_0 + AU.$$

Введем банахово пространство M_a вектор-функций $U(x)$, непрерывных и ограниченных при $x \geq a$, где a будет выбрано ниже,

с той же нормой, что и в лемме 1.1. Если $U \in M_a$, то из (1.36) следует, что

$$\begin{aligned} |(AU)_1(x)| &\leq 2\|U\|\rho(x), \\ |(AU)_2(x)| &\leq 2\|U\|e^{2a\rho(x)} \end{aligned} \quad (1.38)$$

при $x \geq a$, где

$$\rho(x) = \int_x^{\infty} |\delta(t, Q)| dt, \quad a = \operatorname{Re} \xi(x_0, +\infty). \quad (1.39)$$

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) = 0$, то из (1.38) следует, что $\|A\| < 1$ в M_a , если $a > 0$ достаточно велико. Далее, точно так же, как и в лемме 1.1, получаем оценки при $x \geq a$:

$$\begin{aligned} |y_2(x) - Q^{-1/4}(x) \exp(\xi(x_0, x))| &\leq \gamma' |Q(x)|^{-1/4} \exp(\operatorname{Re} \xi(x_0, x)) \rho(x), \\ |y'_2(x) - Q^{1/4}(x) \exp(\xi(x_0, x))| &\leq \\ &\leq \left(4\gamma' \rho(x) + \frac{1}{4} |Q'(x)| |Q(x)|^{-3/2} (1 + 4\gamma' \rho(x, Q)) \right), \end{aligned}$$

где $\gamma' = (1 - \|A\|)^{-1}$. Из этих оценок и из (1.30), (1.32) следуют формулы (1.33), (1.34) в случае а).

В случае б) систему (1.36) заменим системой интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_{\infty}^x \delta(u_1 + u_2) dt, \\ u_2 &= 1 - \int_a^x \exp(-2\xi(t, x)) \delta(u_1 + u_2) dt, \end{aligned} \quad (1.40)$$

или в операторной записи

$$U = U_0 + AU.$$

Здесь $a > 0$ будет выбрано ниже. Снова введем банахово пространство M_a . Если $U \in M_a$, то для $|(AU)_1(x)|$ из (1.40) получаем оценку (1.38). Далее, при $x \geq a$

$$|(AU)_2(x)| \leq 2\|U\| \int_a^x \exp(-2 \operatorname{Re} \xi(t, x)) |\delta(t)| dt. \quad (1.41)$$

Так как $t \leq x$ и $\operatorname{Re} \sqrt{Q} \geq 0$, то

$$|(AU)_2(x)| \leq 2\|U\| \int_a^x |\delta(t)| dt$$

при $x \geq a$. За счет увеличения a последний интеграл может быть сделан сколь угодно малым, так что $\|A\| < 1$ в M_a , если $a \geq a_0$, где a_0 достаточно велико. Следовательно, уравнение (1.40) имеет решение $U \in M_a$ при $a \geq a_0$. Покажем, что при $x \rightarrow +\infty$

$$u_1(x) = o(1), \quad u_2(x) = 1 + o(1). \quad (1.42)$$

Так как $u_1(x) = (AU)_1(x)$, то (1.42) для $u_1(x)$ следует из оценки (1.38) и из (1.32). Далее, $u_2(x) - 1 = (AU)_2(x)$. Покажем, что интеграл в правой части неравенства (1.41) стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Этот интеграл равен

$$\begin{aligned} \exp(-2 \operatorname{Re} \xi(a, x)) \int_a^b \exp(2 \operatorname{Re} \xi(a, t)) |\delta(t)| dt + \\ + \int_b^x \exp(-2 \operatorname{Re} \xi(t, x)) |\delta(t)| dt = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Выберем $b > a$ настолько большим, чтобы

$$\int_b^{\infty} |\delta(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, поскольку $\operatorname{Re} \xi(t, x) \geq 0$. Далее, так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \xi(0, x) = +\infty$ в силу условия б), то можно выбрать $x > a$

настолько большим, чтобы было $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, интеграл в правой части (1.41) стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Выражая y, y' через u_1 и u_2 и используя (1.42), получаем (1.33), (1.34).

Остается доказать линейную независимость решений y_1 и y_2 . Выберем x_0 одним и тем же для y_1 и y_2 . Вычисляя вронскиан $w(x)$ этих решений с помощью асимптотических формул, получаем, что при $x \rightarrow +\infty$

$$w(x) = -2 + o(1).$$

Лемма доказана.

Применим лемму 1.1 к уравнениям с параметром.

Лемма 1.5. Пусть $[a, b]$ — конечный отрезок, функция $q''(x)$ непрерывна на этом отрезке и

$$q(x) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{q(x)} \geq 0, \quad x \in [a, b]. \quad (1.43)$$

Тогда уравнение (1.1)

$$y'' - \lambda^2 q(x) y = 0$$

имеет два решения $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$, таких, что при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= (q(x))^{-1/4} \exp(\mp \lambda \xi(x_0, x)) (1 + O(\lambda^{-1})), \\ y'_{1,2} &= \mp \lambda (q(x))^{1/4} \exp(\mp \lambda \xi(x_0, x)) (1 + O(\lambda^{-1})), \end{aligned} \quad (1.44)$$

где $O(\lambda^{-1})$ равномерно по $x \in [a, b]$ и $\xi(x_0, x) = \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt$.

Решения y_1 , y_2 при достаточно больших $\lambda > 0$ линейно независимы.

Доказательство. Применим лемму 1.1. В данном случае $Q = \lambda^2 q(x)$, так что при $\lambda > 0$ условия (1.10) и (1.11) леммы 1.1 следуют из (1.43). Далее, $\rho(x, Q) = \lambda^{-1} \rho(x, q)$, так что при $x \in [a, b]$

$$\rho(x, Q) \leq C \lambda^{-1}, \quad (1.45)$$

где C не зависит от λ . Следовательно, при достаточно больших $\lambda > 0$ условие (1.12) леммы 1.1 также будет выполнено. Поэтому из оценок (1.13), (1.14) и из (1.45) следует существование решения y_1 , для которого имеет место (1.44). Существование решения y_2 следует из леммы 1.2. Линейная независимость y_1 и y_2 следует из того, что при $\lambda \rightarrow +\infty$ вронскиан этих решений равен $-2\lambda + O(1)$.

Наконец, лемма 1.1 позволяет получить асимптотические формулы для решений уравнения (1.1), пригодные и при $x \rightarrow +\infty$, и при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Лемма 1.6. Пусть функция $q(x)$ при $x \geq 0$ удовлетворяет условиям леммы 1.5 и

$$\int_0^{\infty} |\delta(t, q)| dt < \infty. \quad (1.46)$$

Тогда для всякого $\lambda_0 > 0$ существует $x(\lambda_0) < \infty$, такое, что уравнение (1.1) имеет решение $y_1(x, \lambda)$, для которого при

$$x \geq x(\lambda_0), \quad \lambda \geq \lambda_0 \quad (1.47)$$

справедливы оценки

$$y_1 = q^{-1/4}(x) \exp(-\lambda \xi(x_0, x)) (1 + \lambda^{-1} \Phi_1(x, \lambda)), \quad (1.48)$$

$$y'_1 = -\lambda q^{1/4}(x) \exp(-\lambda \xi(x_0, x)) (1 + \lambda^{-1} \Phi_2(x, \lambda)). \quad (1.49)$$

Эти формулы пригодны и при $x \geq 0$ фиксированном, $\lambda \rightarrow +\infty$ равномерно по $x \geq 0$, и при $\lambda > 0$ фиксированном, $x \rightarrow +\infty$ равномерно по $\lambda \geq \lambda_0 > 0$.

Доказательство. В данном случае $Q = \lambda^2 q(x)$, так что

$$\rho(x, Q) = \lambda^{-1} \rho(x, q),$$

и лемма следует из оценок (1.13), (1.14) и условия (1.46).

Лемму 1.1 можно применять и для получения асимптотики решений уравнения Штурма — Лиувилля

$$y'' + q(x)y = \lambda y,$$

но за недостатком места мы не будем этот случай рассматривать. Кроме того, из леммы 1.1 можно получить асимптотику решений уравнения (1.1) и при комплексных λ . Например, если в лемме 1.5 имеем $q(x) > 0$ при $x \in [a, b]$, то формулы (1.44) пригодны при $|\lambda| \rightarrow +\infty$, $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Действительно, так как $\sqrt{q} > 0$ на отрезке $[a, b]$, то $\operatorname{Re} Q \equiv \operatorname{Re}(\lambda \sqrt{q}) \geq 0$ при $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$, и условие (1.11) леммы 1.1 выполнено.

1.3. Следующие члены асимптотического разложения

Приведем оценки для решений уравнения (1.7), позволяющие получить следующие члены асимптотического разложения. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_N(x) &= 2|Q|^{-1/2} \sum_0^N |\alpha_j|, \\ \tau_N(x) &= \left(\sum_0^N |\alpha_j|^2 + \sum_0^N |\alpha'_j| \right) |Q|^{-1/2}, \\ \delta_N(x) &= 2|Q|^{-1/2} \left(|\alpha'_N| + \sum_{N < i+j} |\alpha_i \alpha_j| \right), \\ \rho_N(x) &= \left| \int_a^x \delta_N(t) dt \right|, \end{aligned} \tag{1.50}$$

где $\alpha_j(x)$ определены формулой (1.3).

Лемма 1.7. Пусть $Q(x)$ — комплекснозначная функция, $Q^{(N+1)}(x)$ непрерывна при $x \in (a, b)$, $N \geq 1$,

$$Q(x) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{Q(x)} \geq 0, \quad x \in (a, b). \tag{1.51}$$

Пусть выполнены условия

$$\sigma_N^0 = \sup_{(a, b)} \sigma_N(x) < 1, \quad \int_a^b \tau_N(t) dt < \omega < \infty, \tag{1.52}$$

$$\gamma = \rho_N(b) (1 - \sigma_N^0)^{-1} \exp(\omega (1 - \sigma_N^0)^{-1}) < \frac{1}{2}.$$

Тогда уравнение (1.7) имеет решение $y(x)$, такое, что при $x \in (a, b)$

$$|y - w_N| \leq |\omega_N| 2\gamma_1 \rho_N(x), \quad (1.53)$$

$$|y' - a_N w_N| \leq |\omega_N| (|a_N| + |b_N|) 2\gamma_1 \rho_N(x), \quad (1.54)$$

где

$$\gamma_1 = \exp(\omega(1 - \sigma_N^0)^{-1})(1 - \gamma)^{-1}. \quad (1.55)$$

Здесь

$$a_N = \sum_{-1}^N a_j, \quad b_N = \sum_{-1}^N (-1)^j a_j, \quad (1.56)$$

$$g_N = (q - a_N b_N - a'_N)(a_N - b_N)^{-1} - \alpha_{-1} - \alpha_0, \quad (1.57)$$

$$w_N = q^{-1/4}(x) \exp\left(\xi(x_0, x) + \int_a^x g_N(t) dt\right). \quad (1.58)$$

Доказательство (см. Федорюк [5]). Метод доказательства тот же, что и в лемме 1.1, только вместо преобразования (1.17) делается преобразование

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \omega_N \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_N & b_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Из этой леммы следует

Лемма 1.8. Пусть $[a, b]$ — конечный отрезок, функция $q(x)$ бесконечно дифференцируема на этом отрезке и удовлетворяет условию (1.43). Тогда уравнение (1.1) имеет решения $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$, для которых при $\lambda \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические формулы (1.4), (1.5) равномерно по $x \in [a, b]$. Эти формулы можно дифференцировать по λ любое число раз.

Доказательство. Покажем, что при достаточно больших $\lambda > 0$ все условия леммы 1.7 выполнены. В данном случае $Q(x) = \lambda^2 q(x)$, так что

$$a_j(x, Q) = \lambda^{-j} a_j(x, q).$$

Имеем при $x \in [a, b]$, $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \sigma_N(x) &= O(\lambda^{-1}), & \tau_N(x) &= O(\lambda^{-1}), \\ \delta_N(x) &= O(\lambda^{-N-1}), & \rho_N(x) &= O(\lambda^{-N-1}) \end{aligned}$$

равномерно по $x \in [a, b]$. Поэтому условие (1.52) выполнено при достаточно больших $\lambda > 0$. Далее,

$$a_N = \sum_{j=1}^N \lambda^{-j} a_j, \quad b_N = \sum_{j=1}^N (-\lambda)^{-j} a_j,$$

$$a_N + b_N = 2 \sum_0^{[N/2]} \lambda^{1-2j} a_{2j-1} + \lambda^{-N} (1 + (-1)^N) a_N,$$

так что

$$g_N = \sum_1^N \lambda^{-j} a_j + O(\lambda^{-N-1}).$$

Подставляя в (1.53), получаем

$$|y - w_N| \leq C |w_N| \lambda^{-N-1},$$

где C не зависит от x и λ . Так как $N > 0$ произвольно, то из этой оценки следует существование решения y_2 , для которого справедливо асимптотическое разложение (1.5). Аналогично доказывается существование решения y_1 . С помощью (1.54) можно проверить, что асимптотическое разложение y_2' получается дифференцированием разложения для y_2 , а затем, используя уравнение (1.1), можно показать, что это справедливо и для $y_2^{(n)}$ при любом $n \geq 0$.

Замечание 1. Можно показать также, что в условиях леммы 1.8 асимптотическое разложение для y_1, y_2 можно дифференцировать по λ любое число раз.

Замечание 2. Если $q(x)$ — полином и условия леммы 1.8 выполнены на полуоси $x \geq 0$, то можно показать, что асимптотическое разложение (1.53) для решения $y_2(x, \lambda)$ пригодно и при $x \rightarrow +\infty$, $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, где λ_0 фиксировано, равномерно по λ , и при $\lambda \rightarrow +\infty$ равномерно по $x \geq 0$. Это следует из леммы 1.7.

1.4. Асимптотика решений уравнения (1.1) при комплексных z

Пусть D — область в комплексной плоскости z и функция $Q(z)$ регулярна в D . Рассмотрим уравнение

$$y'' - Q(z)y = 0 \quad (1.59)$$

и докажем лемму, аналогичную основной лемме 1.1. Введем

Определение 1.1. Кривая $\alpha^+(z_0, z_1)$, соединяющая точки z_0 и z_1 , называется *каноническим путем*, если выполнены условия

- 1) $Q(z) \neq 0$ при $z \in \alpha^+(z_0, z_1)$;

2) функция $\operatorname{Re} \xi(z_0, z)$ не убывает при движении z вдоль $\alpha^+(z_0, z_1)$, где

$$\xi(z_0, z) = \int_{z_0}^z \sqrt{Q(t)} dt.$$

Если $z_1 = \infty$ или z_1 — особая точка функции Q , то будем предполагать, что

$$\sup_{z \in \alpha^+(z_0, z_1)} \operatorname{Re} \xi(z_0, z) = +\infty. \quad (1.60)$$

Лемма 1.9. Пусть D — односвязная область в комплексной плоскости z , функция $Q(z)$ регулярна и отлична от нуля в \bar{D} . Пусть существует точка $z_0 \in \partial D$, такая, что всякую точку $z \in D$ можно соединить с z_0 каноническим путем $\alpha^+(z_0, z)$. Обозначим

$$\rho(z, D) = \inf_{\alpha^+(z_0, z)} \int_{\alpha^+(z_0, z)} |\delta(t, Q)| dt, \quad (1.61)$$

$$\rho(D) = \sup_{z \in D} \rho(z, D). \quad (1.62)$$

Пусть

$$\rho(D) < \frac{1}{2}. \quad (1.63)$$

Тогда уравнение (1.59) имеет в области D решение $y_1(z)$, такое, что при $z \in D$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |y_1(z) - Q^{-1/4}(z) \exp(\xi(z_0, z))| &\leq \\ &\leq 4\gamma |Q(z)|^{-1/4} \exp(\operatorname{Re} \xi(z_0, z)) \rho(z, D), \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned} |y_1'(z) + Q^{1/4}(z) \exp(\xi(z_0, z))| &\leq \\ &\leq |Q(z)|^{1/4} \exp(\operatorname{Re} \xi(z_0, z)) \left(4\gamma \rho(z, D) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} |Q'(z)| |Q(z)|^{-3/2} (1 + 4\gamma \rho(z, D)) \right), \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$\gamma = (1 - \rho(D))^{-1}. \quad (1.66)$$

Здесь ветвь $\sqrt{Q(z)}$ в области D выбрана таким образом, что

$$\operatorname{Re} \xi(z_0, z) \geq 0, \quad z \in D. \quad (1.67)$$

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 1.1. Преобразуем уравнение (1.59) к системе (1.20) и

заменяем эту систему системой интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_{\alpha^+} \exp(2\xi(t, z)) \delta(u_1 + u_2) dt, \\ u_2 &= 1 - \int_{\alpha^+} \delta(u_1 + u_2) dt, \\ \alpha^+ &= \alpha^+(z_0, z), \end{aligned} \quad (1.68)$$

или в операторной форме

$$U = U_0 + AU.$$

Здесь $U = (u_1, u_2)$, $U_0 = (0, 1)$ и A — интегральный оператор. Введем банахово пространство M вектор-функций $U(z)$, непрерывных и ограниченных в \bar{D} , с нормой $\|U(z)\| = \sup_{z \in \bar{D}} (\max_{j=1,2} |u_j(z)|)$. Тогда оператор A действует из M в M . Далее, так как $\alpha^+(z_0, z)$ — канонический путь, то в формуле (1.68)

$$\operatorname{Re} \xi(t, z) \leq 0, \quad t, z \in \alpha^+(z_0, z).$$

Следовательно, если $U \in M$, то при $z \in \bar{D}$

$$|(AU)_j(z)| \leq 2 \|U\| \int_{\alpha^+(z_0, z)} |\delta(t)| dt, \quad j = 1, 2.$$

Так как эта оценка справедлива для любого пути $\alpha^+(z_0, z)$, то

$$|(AU)_j(z)| \leq 2 \|U\| \rho(z, D) < \|U\|, \quad j = 1, 2,$$

в силу (1.63). Следовательно, $\|A\| < 1$. В остальном доказательство проводится так же, как и в лемме 1.1.

Из этой леммы можно извлечь следствия, аналогичные леммам 1.2—1.6. Кроме того, если область D удовлетворяет условиям леммы 1.9, то можно доказать лемму, аналогичную лемме 1.7, которая позволяет получать следующие члены асимптотики. Читатель может без труда сформулировать и доказать соответствующие утверждения.

2. Асимптотика решений уравнения $y'' - \lambda^2 q(z)y = 0$ в комплексной плоскости z

В этом параграфе будет построен алгоритм, позволяющий находить асимптотику решений уравнения

$$y'' - \lambda^2 q(z)y = 0 \quad (2.1)$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$ во всей комплексной плоскости z , за исключением сколь угодно малых (но не зависящих от λ) окрестностей то-

чек поворота. Асимптотика фундаментальной системы решений уравнения (2.1) в окрестности точек поворота найдена в работах Дородницына [2], Лангера [1], [5], [7], Черри [2] и других, так что, сшивая асимптотики вне и в окрестности точек поворота, можно найти асимптотику решений во всей комплексной плоскости z .

Подробное изложение основных результатов этого параграфа см. Евграфов и Федорюк [1].

2.1. Топология линий Стокса

В лемме 1.1 были получены оценки для решений уравнения (2.1) в некоторой области D комплексной плоскости z . При этом условии на область D было сформулировано в терминах канонических путей. Наша цель — выяснить вид таких областей. Для этого нам понадобятся линии Стокса уравнения (2.1). Напомним, что точка z_0 называется точкой поворота уравнения (2.1), если $q(z_0) = 0$. Точка z_0 называется точкой поворота порядка m , если $q(z)$ имеет в точке z_0 нуль кратности m , и простой точкой поворота, если $m = 1$.

Всюду в этом параграфе предполагается, что $q(z)$ — целая функция. Напомним обозначения:

$$\xi(z_0, z) = \int_{z_0}^z \sqrt{q(t)} dt, \quad \xi(z) = \int \sqrt{q(z)} dz.$$

Определение 2.1. *Линией Стокса* уравнения (2.1) называется максимальная связная регулярная компонента линии уровня

$$\operatorname{Re} \xi(z) = \operatorname{const},$$

выходящая из точки поворота.

Локальную структуру линий уровня $\operatorname{Re} \xi = \operatorname{const}$ описывает следующая

Лемма 2.1. *Пусть линия уровня $l: \operatorname{Re} \xi(z) = \operatorname{const}$ проходит через точку z_0 . Тогда*

1) *если z_0 не является точкой поворота, то l в окрестности точки z_0 является простой аналитической кривой;*

2) *если z_0 — точка поворота порядка m , то из точки z_0 выходят $m+2$ линии Стокса, которые образуют между собой равные углы в точке z_0 и являются аналитическими кривыми.*

В частности, если z_0 — простая точка поворота, то из точки z_0 выходят 3 линии Стокса и угол между двумя соседними кривыми в точке z_0 равен $\frac{2\pi}{3}$.

Наметим доказательство. Если $q^{(j)}(z_0) = 0$, $j \leq m-1$, $q^{(m)}(z_0) \neq 0$, где $m \geq 0$, то при малых $z - z_0$

$$\xi(z_0, z) \sim a(z - z_0)^{\frac{m}{2}+1}, \quad a \neq 0.$$

Уравнение $\operatorname{Re}\left(a z^{\frac{m}{2}+1}\right) = 0$ определяет при $m=0$ прямую, а при $m \geq 1$ оно определяет $m+2$ луча, которые выходят из точки $\xi=0$ и образуют равные углы друг с другом. Из этих соображений следует лемма.

Исследуем структуру линий уровня $\operatorname{Re} \xi = \text{const}$ в целом.

Лемма 2.2. Пусть l — максимальная связная компонента линии уровня $\operatorname{Re} \xi = \text{const}$, не содержащая точек поворота. Тогда l является простой аналитической кривой. При этом возможны следующие случаи:

- 1) начало и конец l совпадают с точкой $z = \infty$;
- 2) l соединяет точку поворота с точкой $z = \infty$;
- 3) l соединяет две точки поворота.

Кроме того, линия уровня $\operatorname{Re} \xi = \text{const}$ не может содержать компоненты, гомеоморфной окружности.

Заметим, что линия Стокса имеет вид 2) или 3). Всякая связная компонента линии уровня $\operatorname{Re} \xi = \text{const}$ либо не содержит точек поворота — и тогда она является бесконечной кривой, которая гомеоморфна прямой, либо состоит из конечного или счетного числа линий Стокса. Типичный случай — это линия, содержащая одну простую точку поворота и состоящая из трех бесконечных линий Стокса. Например, если $q(z) = z$, то линия уровня $\operatorname{Re} \xi(0, z) = 0$ состоит из трех лучей $\arg z = \pm \frac{\pi}{3}$, π .

Выясним структуру областей, на которые линии Стокса разбивают комплексную плоскость C^1 . Обозначим через Φ множество линий Стокса функции $q(z)$. Если D — односвязная область в C^1 , в которой $q(z) \neq 0$, то в D функция $\xi(z)$ распадается на регулярные ветви, которые мы также обозначим $\xi(z)$. При этом любые две ветви связаны соотношением $\xi_2(z) = \pm \xi_1(z) + a$, где a — постоянная. В частности, если одна ветвь $\xi(z)$ однолистка в D , то и все ветви однолистки в D .

Определение 2.2. Область D в комплексной плоскости z называется областью типа полуплоскости (типа полосы), если

- 1) D односвязна,
- 2) $\xi(z)$ однолистка в D и $\xi(D)$ есть полуплоскость $\operatorname{Re} \xi > a$ (или $\operatorname{Re} \xi < a$) (соответственно для полосы $a < \operatorname{Re} \xi < b$).

Граница области типа полуплоскости состоит из одной связанной компоненты, граница области типа полосы — из двух связанных компонент.

Теорема 2.1. Пусть $q(z) \not\equiv \text{const}$, и пусть для любой линии $l: \text{Re } \xi(z) = \text{const}$ выполнено условие

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l}} |\text{Im } \xi(z)| = \infty. \quad (2.2)$$

Тогда $C^1 \setminus \Phi$ состоит из областей типа полуплоскости и типа полосы. Если $q(z)$ — полином, то $\bar{\Phi} = \Phi$.

Доказательство. Пусть M — образ C^1 при отображении $\xi = \xi(z_0, z)$ (это многолистная поверхность, лежащая над плоскостью ξ) и $M' = \xi(C^1 \setminus \Phi)$. Пусть линия уровня $l: \text{Re } \xi = \text{const}$ не проходит через точки поворота. Тогда функция $\text{Im } \xi$ строго монотонна вдоль l , так что $\xi(l)$ есть прямая $\text{Re } \xi = \text{const}$ и это отображение взаимно однозначно. Следовательно, если точка $\xi_0 \in M'$, то и вся вертикальная прямая $\text{Re } \xi = \text{Re } \xi_0$, проходящая через точку ξ_0 , принадлежит M' . Следовательно, M' распадается на полосы $a < \text{Re } \xi < b$. Прообраз M' есть область типа полосы, если a и b конечны, и типа полуплоскости, если ровно одно из чисел a и b бесконечно. Если же $a = -\infty$, $b = +\infty$, то ξ взаимно однозначно отображает C^1 на плоскость ξ ; в этом случае $q \equiv \text{const}$, что противоречит условию теоремы.

2.2. Асимптотические формулы для решений

В этом разделе с помощью леммы 1.9 и теоремы 2.1 мы построим решения уравнения (2.1) с заданным поведением на бесконечности. В этом параграфе будем рассматривать канонические пути вида $\alpha^+(z, \infty)$, т. е. пути, соединяющие точку z с точкой $z = \infty$, и будем обозначать их через $\alpha^+(z)$. Через $\alpha^-(z)$ обозначим путь, который обладает теми же свойствами, что и путь $\alpha^+(z)$, но для функции $-\xi(z)$.

Теорема 2.2. Пусть функция $q(z)$ регулярна в области D и для каждой точки $z \in D$ существует канонический путь $\alpha^+(z)$. Обозначим

$$\rho^+(z, D) = \inf_{\alpha^+(z)} \int_{\alpha^+(z)} |\delta(t, q)| |dt|, \quad (2.3)$$

$$\rho^+(D) = \sup_{z \in D} \rho^+(z, D). \quad (2.4)$$

Пусть выполнено условие

$$\rho^+(\bar{D}) < \infty. \quad (2.5)$$

Тогда в области D существует решение $y_1(z, \lambda)$ уравнения (2.1), такое, что при $\lambda > 4\rho^+(D)$ и при $z \in D$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |y_1(z, \lambda) - (q(z))^{-1/4} \exp(-\lambda \xi(z_0, z))| &\leq \\ &\leq 8\lambda^{-1} |q(z)|^{-1/4} \exp(-\lambda \operatorname{Re} \xi(z_0, z)) \rho^+(z, D), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} |y_1'(z, \lambda) + \lambda (q(z))^{1/4} \exp(-\lambda \xi(z_0, z))| &\leq \\ &\leq |q(z)|^{1/4} \exp(-\lambda \operatorname{Re} \xi(z_0, z)) (8\rho^+(z, D)) + \\ &+ \lambda^{-1} |q'(z)| |q(z)|^{-1/2} (1 + 8\rho^+(z, D)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Доказательство этой теоремы следует из леммы 1.9. Уравнение (2.1) имеет вид (1.59), где $Q = \lambda^2 q(z)$. Так как

$$\int_{z_0}^z \sqrt{Q} dt = \lambda \int_{z_0}^z \sqrt{q} dt,$$

то при $\lambda > 0$ путь $\alpha^+(z)$, канонический для функции $q(z)$, является каноническим для функции Q , и область D удовлетворяет условиям леммы 1.9. Далее,

$$\rho^+(z, D, Q) = \lambda^{-1} \rho^+(z, D, q),$$

так что при $\lambda > 4\rho^+(D, q)$ имеем

$$\rho^+(D, Q) = \lambda^{-1} \rho^+(D, q) < \frac{1}{2},$$

и условие (1.63) выполнено. Поэтому все условия леммы 1.9 выполнены, и из оценок (1.64), (1.65) следуют оценки (2.6), (2.7).

Точно так же доказывается

Теорема 2.2'. Пусть функция $q(z)$ регулярна в области D и для каждой точки $z \in D$ существует канонический путь $\alpha^-(z)$. Пусть

$$\rho^-(\bar{D}) < \infty, \quad (2.8)$$

где $\rho^-(z, D)$ и $\rho^-(D)$ определяются по формулам (2.3), (2.4), в которых следует заменить $\alpha^+(z)$ на $\alpha^-(z)$. Тогда уравнение

(2.1) имеет в области D решение $y_2(z, \lambda)$, такое, что при $\lambda > 4\rho^-(\bar{D})$ и при $z \in D$ справедливы оценки

$$|y_2(z, \lambda) - (q(z))^{-1/4} \exp(\lambda \xi(z_0, z))| \leq \leq 8\lambda^{-1} |q(z)|^{-1/4} \exp(\operatorname{Re} \lambda \xi(z_0, z)) \rho^-(z, D), \quad (2.9)$$

$$|y_2'(z, \lambda) - \lambda (q(z))^{1/4} \exp(\lambda \xi(z_0, z))| \leq \leq |q(z)|^{1/4} \exp(\lambda \operatorname{Re} \xi(z_0, z)) (8\rho^-(z, D) + + \lambda^{-1} |q'(z)| |q(z)|^{-3/2} (1 + 8\rho^-(z, D))). \quad (2.10)$$

Из оценок, полученных в теоремах 2.2 и 2.2', следуют асимптотические формулы для решений уравнения (2.1) при $\lambda \rightarrow +\infty$. Именно, из (2.6) и (2.9) следует, что при $\lambda \rightarrow +\infty$ равномерно по $z \in D_1$ (соответственно $z \in D_2$)

$$y_1(z) = (q(z))^{-1/4} \exp(-\lambda \xi(z_0, z)) (1 + O(\lambda^{-1})), \quad (2.11)$$

$$y_2(z) = (q(z))^{-1/4} \exp(\lambda \xi(z_0, z)) (1 + O(\lambda^{-1})). \quad (2.12)$$

Если выполнено условие

$$\sup_{z \in D} |q'(z)| |q(z)|^{-3/2} < \infty, \quad (2.13)$$

где $D = D_1$ или $D = D_2$, то при $\lambda \rightarrow +\infty$ равномерно по $z \in D_1$ (соответственно $z \in D_2$)

$$y_1'(z) = -\lambda (q(z))^{1/4} \exp(-\lambda \xi(z_0, z)) (1 + O(\lambda^{-1})), \quad (2.14)$$

$$y_2'(z) = \lambda (q(z))^{1/4} \exp(\lambda \xi(z_0, z)) (1 + O(\lambda^{-1})), \quad (2.15)$$

что следует из (2.7) и (2.10).

Кроме того, что очень существенно, оценки, полученные в теоремах 2.2 и 2.2', позволяют получить асимптотические формулы не только по λ , но и по z . Именно, пусть условия теоремы 2.2 выполнены и

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D}} q'(z) (q(z))^{-3/2} = 0. \quad (2.16)$$

Если $z \rightarrow \infty$ внутри D_1 так, что $\operatorname{Re} \xi(z_0, z) \rightarrow +\infty$, то

$$\begin{aligned} y_1(z) &\sim (q(z))^{-1/4} \exp(-\lambda \xi(z_0, z)), \\ y_1'(z) &\sim -\lambda (q(z))^{1/4} \exp(-\lambda \xi(z_0, z)) \end{aligned} \quad (2.17)$$

равномерно по $\lambda \geq \lambda_0$, где $\lambda_0 > 0$ — любое. Аналогично, если выполнены условия теоремы 2.2' и условие (2.17) для D_2 и если

$z \rightarrow \infty$ внутри D_2 так, что $\operatorname{Re} \xi(z_0, z) \rightarrow -\infty$, то

$$\begin{aligned} y_2(z) &\sim (q(z))^{-1/4} \exp(\lambda \xi(z_0, z)), \\ y_2'(z) &\sim \lambda (q(z))^{1/4} \exp(\lambda \xi(z_0, z)) \end{aligned} \quad (2.18)$$

равномерно по $\lambda \geq \lambda_0 > 0$. Это следует из (2.7) и (2.10). При этом формулы (2.17) и (2.18) для y_1, y_2 (но не для их производных) верны и без условия (2.16).

2.3. Области применимости асимптотики

Выясним вид областей, удовлетворяющих условиям теорем 2.2 и 2.2'. Напомним, что $q(z)$ — целая функция. Обозначим через G^1 комплексную плоскость z , из которой удалены фиксированные непересекающиеся окрестности линий Стокса следующего вида. Пусть l — линия Стокса и $L = \xi(l)$ — ее образ при отображении $\xi = \xi(z)$. Через $U(L)$ обозначим ε -окрестность линии L , а через $U(l)$ — ее прообраз в C^1 , и положим $\tilde{C}^1 = C^1 \setminus \cup U(l)$, где объединение берется по всем линиям Стокса. Эти окрестности можно выбрать сколь угодно малыми, но не зависящими от λ . Через \tilde{C}_0^1 обозначим комплексную плоскость, из которой удалены фиксированные непересекающиеся окрестности всех точек поворота, лежащие внутри области $\cup U(l)$.

Если D — множество в плоскости z , то обозначим $\tilde{D} = D \cap \tilde{C}^1$ и $\tilde{D}^0 = D \cap \tilde{C}_0^1$.

Из теоремы 2.2 следует

Теорема 2.3. Пусть $q(z)$ — целая функция и D — область типа полуплоскости. Выберем ветвь $\xi(z_0, z)$ в D (здесь точка $z_0 \neq \infty$ лежит в \tilde{D}) так, чтобы $\operatorname{Re} \xi > 0$ в D . Если условие (2.5) выполнено для \tilde{D} , то при $\lambda > 4\rho^+(\tilde{D})$ в области D существует решение $y_1(z, \lambda)$, для которого при $\lambda > 4\rho^+(\tilde{D})$ и при $z \in \tilde{D}$ справедливы оценки (2.6), (2.7).

Доказательство. Область $\xi(\tilde{D}) = G$ имеет вид $\operatorname{Re} \xi > \varepsilon > 0$. Покажем, что для каждой точки $z \in \tilde{D}$ существует канонический путь $\alpha^+(z)$. Пусть $\xi^* \in G$ и L — луч $\operatorname{Im} \xi = \operatorname{Im} \xi^*$, $\operatorname{Re} \xi^* \leq \operatorname{Re} \xi < +\infty$. Тогда $\xi^{-1}(L)$ является каноническим путем $\alpha^+(z^*)$, где $z^* = \xi^{-1}(\xi^*)$. Путь $\alpha^+(z^*)$ бесконечно много, так как в качестве L можно взять любую кривую с началом в точке z^* , вдоль которой $\operatorname{Re} \xi$ монотонно изменяется от $\operatorname{Re} \xi^*$ до $+\infty$. Область \tilde{D} удовлетворяет условиям теоремы 2.2, что и доказывает настоящую теорему.

Теоремы 2.2, 2.2' применимы и к более широким областям.

Определение 2.3. Область D называется *канонической*, если функция $\xi(z)$ однолистка в D и $\xi(D)$ есть вся плоскость ξ с конечным или бесконечным числом вертикальных разрезов.

Каноническая область D всегда односвязна.

Теорема 2.4. Пусть D — каноническая область и

$$\rho^\pm(\bar{D}) < \infty. \quad (2.19)$$

Тогда в области D существуют решения $y_1(z, \lambda)$ и $y_2(z, \lambda)$, для которых при $\lambda > 4$ так $\rho^\pm(\bar{D})$ и при $z \in \bar{D}$ справедливы оценки (2.6), (2.7) и (2.9), (2.10). При достаточно больших $\lambda > 0$ эти решения линейно независимы.

Доказательство. Пусть $\xi^* \in \xi(D)$. Так как $\xi(D)$ есть вся плоскость ξ с вертикальными разрезами, то можно построить кривую (и даже ломаную) $L^+ \subset \xi(D)$ с началом в точке ξ^* , вдоль которой $\operatorname{Re} \xi$ изменяется монотонно от $\operatorname{Re} \xi^*$ до $+\infty$. Тогда $\xi^{-1}(L^+)$ есть канонический путь $\alpha^+(z^*)$, где $z^* = \xi^{-1}(\xi^*)$. Аналогично для всякой точки $z^* \in \bar{D}$ можно построить канонический путь $\alpha^-(z^*)$. То же самое верно и для \bar{D} . Поэтому \bar{D} удовлетворяет условиям теорем 2.2 и 2.2', и существование искомого решений y_1, y_2 доказано. Линейная независимость y_1 и y_2 при больших $\lambda > 0$ следует из того, что при $\lambda \rightarrow +\infty$ вронсиан этих решений равен $-2\lambda + O(1)$.

Следствие. Пусть D — каноническая область, выполнено условие (2.19), и пусть

$$\lim |\ln q(z)| (\operatorname{Re} \xi(z_0, z))^{-1} = 0, \quad (2.20)$$

когда $z \rightarrow \infty$ в области D так, что $|\operatorname{Re} \xi(z_0, z)| \rightarrow \infty$. Тогда при $z \rightarrow \infty, z \in D$

$$\begin{aligned} y_1 &\rightarrow 0, \quad y_2 \rightarrow \infty \quad (\operatorname{Re} \xi(z_0, z) \rightarrow +\infty), \\ y_1 &\rightarrow \infty, \quad y_2 \rightarrow 0 \quad (\operatorname{Re} \xi(z_0, z) \rightarrow -\infty) \end{aligned} \quad (2.21)$$

при любом фиксированном $\lambda > 0$ (равномерно по $\lambda \geq \lambda_0 > 0$).

Это следует из формул (2.17), (2.18).

Определение 2.4. Целая функция $q(z) \not\equiv \text{const}$ по определению принадлежит классу A , если

- 1) $\bar{\Phi} = \Phi$, где Φ — множество всех линий Стокса функции q ;
- 2) $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l}} |\operatorname{Im} \xi(z)| = \infty$ для любой линии уровня $l: \operatorname{Re} \xi = \text{const}$;
- 3) для любой канонической области D имеем $\rho^\pm(\bar{D}) < \infty$;
- 4) $\lim_{z \rightarrow \infty} q'(z) (q(z))^{-3/2} = \lim_{z \rightarrow \infty} |\ln q(z)| (\operatorname{Re} \xi(z))^{-1} = 0$, если $z \rightarrow \infty$ в канонической области D так, что $|\operatorname{Re} \xi(z)| \rightarrow \infty$.

Класс A содержит, в частности, все полиномы. Если $q(z) \in A$, то для уравнения (2.1) справедливы все факты, доказанные в этом параграфе. Всюду в дальнейшем рассматриваются функции $q(z)$ из класса A .

Итак, пусть $q(z) \in A$. Тогда имеется конечное или бесконечное число областей типа полуплоскости, и каждой из них соответствует некоторое вполне определенное решение уравнения (2.1). Именно, имеет место

Лемма 2.3. Пусть $q(z) \in A$ и $\lambda > 0$ фиксировано. Пусть D — область типа полуплоскости. Тогда существует единственное, с точностью до постоянного множителя, решение $y(z, D)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее следующему краевому условию на бесконечности:

$$\lim y(z, D) = 0 \quad (2.22)$$

при $z \rightarrow \infty$, $z \in D$, так, что $\operatorname{Re} \xi(z_0, z) \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Дополним область D до канонической области D_0 . Всякое решение имеет вид $y = ay_1 + by_2$, где y_j — решения, построенные в теореме 2.5. Пусть $z \rightarrow \infty$ в D так, что $\operatorname{Re} \xi(z_0, z) \rightarrow +\infty$; тогда $y \rightarrow 0$, $y_1 \rightarrow 0$ и $y_2 \rightarrow \infty$, откуда следует, что $b = 0$. Поэтому $y = ay_1$, и лемма доказана.

Следующая теорема указывает максимальную возможную область, в которой применима асимптотика вида (2.11).

Теорема 2.6. Пусть $q(z) \in A$ и

- 1) все нули $q(z)$ простые;
- 2) все линии Стокса бесконечны (т. е. не существует линий Стокса, которые соединяют две точки поворота).

Пусть D — область типа полуплоскости и $y(z)$ — решение уравнения (2.1), удовлетворяющее краевому условию (2.22).

Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$y(z) = (q(z))^{-1/4} \exp(-\lambda \xi(z_0, z)) (1 + O(\lambda^{-1})) \quad (2.23)$$

в области $G = G(D)$, где G — вся комплексная плоскость z , из которой удалены окрестности некоторых линий Стокса. Если z_0 — точка поворота, то G не содержит ровно одну из трех линий Стокса, выходящих из z_0 (эта линия однозначно определяется заданием исходной области D). Здесь $O(\lambda^{-1})$ равномерно по $z \in G$.

Доказательство см. в работе Евграфова и Федорюка [1], стр. 20.

Окрестности линий Стокса, не входящие в G , можно выбрать сколь угодно малыми (но не зависящими от λ).

Теорема 2.6 точна. Во-первых, асимптотика вида (2.23) непригодна на линиях Стокса, не входящих в G . Действительно, в противном случае эта асимптотика была бы пригодна в некоторой окрестности одной из точек поворота, скажем z_0 . Так как $y(z)$ — целая функция, то правая часть формулы (2.23) и, в частности, $\xi(z_0, z)$ (при больших λ) были бы однозначны в окрестности точки z_0 . Но это невозможно, так как точка z_0 является точкой ветвления функции $\xi(z_0, z)$.

Во-вторых, если одно из условий 1) или 2) теоремы 2.6 не выполняется, то можно показать, что из области применимости асимптотики (2.23) выпадают не только окрестности линий Стокса, но и целые области типа полуплоскости.

Решение $y(z)$, построенное в теореме 2.6, при $z \rightarrow \infty$ ведет себя следующим образом. Если $z \rightarrow \infty$ в области типа полуплоскости так, что $|\operatorname{Re} \xi| \rightarrow \infty$, то $y \rightarrow 0$ в исходной области D и $y \rightarrow \infty$ во всех остальных областях. При $z \rightarrow \infty$ в областях типа полосы y сильно осциллирует.

С помощью леммы 1.7 можно получить асимптотические ряды для решений уравнения (2.1). Если $q(z)$ — полином, то для решений y_1, y_2 , построенных в теореме 2.4, имеют место формулы

$$y_1(z) \sim (q(z))^{-1/4} \exp(-\lambda \xi(z_0, z)) \times \\ \times \exp\left(-\sum_1^{\infty} (-\lambda)^{-j} \int_{\alpha^+(z)} a_j(t) dt\right), \\ y_2(z) \sim (q(z))^{-1/4} \exp(\lambda \xi(z_0, z)) \exp\left(-\sum_1^{\infty} \lambda^{-j} \int_{\alpha^+(z)} a_j(t) dt\right). \quad (2.24)$$

Эти формулы пригодны при $\lambda \rightarrow +\infty$ равномерно по $z \in \bar{D}$ и при $z \rightarrow \infty, z \in D$: для y_1 — если $\operatorname{Re} \xi(z_0, z) \rightarrow +\infty$, и для y_2 — если $\operatorname{Re} \xi(z_0, z) \rightarrow -\infty$ равномерно по $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, где λ_0 — любое. Формулы (2.24) можно дифференцировать по z и по λ любое число раз.

Формулы (2.24) пригодны и для широкого класса целых функций $q(z)$; условия на q ясны из леммы 1.8.

2.4. Асимптотика решений уравнения (2.1) в целом

Введем некоторые специальные фундаментальные системы решений (ф.с.р.). Пусть даны линия Стокса S и точка поворота z_0 , которая является началом S . Выберем ветвь $\xi(z_0, z)$ так, чтобы

$$\operatorname{Im} \xi(z_0, z) > 0, \quad z \in S.$$

Тогда $\operatorname{Re} \xi > 0$ справа и $\operatorname{Re} \xi < 0$ слева от S вблизи S . Пусть $D \supset S$ — каноническая область. Тройке (S, z_0, D) поставим в соответствие ф. с. р. $u(z)$, $v(z)$, которую будем называть *элементарной* ф. с. р. Эти решения при $z \in D$ имеют вид

$$\begin{aligned} u(z) &\sim c(q(z))^{-1/4} \exp(\lambda \xi(z_0, z)), \\ v(z) &\sim c(q(z))^{-1/4} \exp(-\lambda \xi(z_0, z)), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где c — нормировочная постоянная,

$$|c| = 1, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in S}} \arg [c(q(z))^{-1/4}] = 0. \quad (2.26)$$

Асимптотика (2.24) для $u(z)$ (соответственно $v(z)$) имеет место, если $z \rightarrow \infty$, $z \in D$, так, что $\operatorname{Re} \xi(z_0, z) \rightarrow -\infty$ (соответственно $+\infty$). Существование таких решений доказано в теореме 2.4. Кроме того, из леммы 2.3 следует, что u и v (при любом фиксированном $\lambda > 0$) определены однозначно (условием на бесконечности типа (2.22) и заданием c). Если $\lambda \geq \lambda_0$ и $\lambda_0 > 0$ достаточно велико, то решения u , v линейно независимы и образуют ф. с. р. уравнения (2.1). Кроме того, если $\lambda \rightarrow +\infty$, то при $z \in D$ имеем

$$\begin{aligned} u(z) &= c(q(z))^{-1/4} \exp(\lambda \xi(z_0, z))(1 + O(\lambda^{-1})), \\ v(z) &= c(q(z))^{-1/4} \exp(-\lambda \xi(z_0, z))(1 + O(\lambda^{-1})), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $O(\lambda^{-1})$ равномерно по $z \in D$.

Рассмотрим все элементарные ф. с. р. Асимптотика каждой из них пригодна в своей канонической области. Далее, любую линию Стокса можно заключить в некоторую каноническую область. Поэтому UD , где объединение берется по всем каноническим областям, покрывает всю комплексную плоскость z , за исключением фиксированных окрестностей точек поворота. Следовательно, если нам удастся выразить данное решение $y(z, \lambda)$ уравнения (2.1) через все элементарные ф. с. р., то мы найдем его асимптотику при $\lambda \rightarrow +\infty$ во всей комплексной плоскости z , за исключением сколь угодно малых (но не зависящих от λ) окрестностей точек поворота. Тем самым будет решена основная задача, которая рассматривается в этом параграфе.

Наша теория построена для решения задач, в которых граничные условия ставятся на бесконечности, — задача на собственные значения и собственные функции на полуоси или на всей оси, задача о рассеянии и т. п. В таких задачах нетрудно выразить данное решение через некоторую подходящую элементарную ф. с. р. Таким образом, остается установить связь между различными элементарными ф. с. р.

Пусть y — некоторое решение уравнения (2.1) и (u_1, v_1) , (u_2, v_2) — две элементарные ф. с. р. Тогда

$$y = \alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1 = \alpha_2 u_2 + \beta_2 v_2,$$

где α_j, β_j зависят только от λ . Введем матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \Omega_{12} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Матрицу Ω_{12} будем называть *матрицей перехода от (u_1, v_1) к (u_2, v_2)* . Матрица Ω_{12} зависит только от λ . Ясно, что $\Omega_{13} = \Omega_{23} \Omega_{12}$.

В работе Евграфова и Федорюка [1] употребляются другие матрицы перехода Ω^* , связанные с нашими матрицами соотношением $\Omega^* = (\Omega^T)^{-1}$.

Можно показать, что матрица перехода от одной элементарной ф. с. р. к другой элементарной ф. с. р. является произведением конечного числа матриц одного из следующих четырех типов.

1. Переход $(S, z_1, D) \rightarrow (S, z_2, D)$ (т. е. переход от элементарной ф. с. р. (u_1, v_1) , которая определяется заданием первой тройки, к (u_2, v_2) , которая определяется заданием второй тройки). Здесь S — конечная линия Стокса, соединяющая точки z_1, z_2 , и S, D — одни и те же для обеих ф. с. р. В этом случае

$$\Omega_{12} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\lambda a} \\ e^{i\lambda a} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\alpha = |\xi(z_1, z_2)|, \quad e^{i\varphi_0} = \frac{c_2}{c_1}. \quad (2.30)$$

Замечание. Пусть функция $q(x)$ вещественна при вещественных x и $q(x) < 0$, $x \in (x_1, x_2)$, $q(x_1) = q(x_2) = 0$. Тогда интервал $S = (x_1, x_2)$ является линией Стокса. В этом случае $\varphi_0 = 0$ в (2.29).

2. Переход $(S_1, z_1, D) \rightarrow (S_2, z_2, D)$. Здесь линии Стокса S_1, S_2 лежат в одной и той же канонической области. Пусть также лучи $\xi(S_1)$ и $\xi(S_2)$ направлены в одну сторону. Тогда

$$\Omega_{12} = e^{i\varphi_0} \begin{pmatrix} e^{-\lambda a} & 0 \\ 0 & e^{\lambda a} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$$a = \xi(z_1, z_2), \quad (2.32)$$

и φ_0 определяется из (2.30).

Замечание. Пусть функция $q(x)$ вещественна при вещественных x и $q(x) > 0$, $x \in (x_1, x_2)$, $q(x_1) = q(x_2) = 0$, где $x_1 < x_2$. Тогда из точек x_1 и x_2 выходят по 3 линии Стокса; пусть S_1, S_2

выходят из x_1, x_2 соответственно и лежат в верхней полуплоскости. Тогда $\varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$ в (2.31).

Формулы (2.29) и (2.31) пригодны при всех $\lambda > 0$.

3. $(S, z_0, D_1) \rightarrow (S, z_0, D_2)$. В этом случае линия Стокса и ее начало z_0 одни и те же для обеих ф. с. р. и меняется только каноническая область. Пусть $D = D_1 \cap D_2$. Тогда $\xi(D)$ есть полоса $-\sigma < \operatorname{Re} \xi < \sigma^+$, где $\sigma^\pm > 0$, $\xi = \xi(z_0, z)$. При $\lambda \rightarrow +\infty$ имеем

$$\Omega_{12} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \beta_{ii} &= 1 + O(\lambda^{-1}), & i &= 1, 2, \\ \beta_{12} &= O(\exp(-2\lambda(\sigma^+ - \varepsilon))), \\ \beta_{21} &= O(\exp(-2\lambda(\sigma^- - \varepsilon))), \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Если $\sigma^+ = +\infty$, то $\beta_{12} = 0$, если $\sigma^- = +\infty$, то $\beta_{21} = 0$.

Таким образом, если матрица перехода интересует нас с точностью до $O(\lambda^{-1})$, то можно не заботиться о выборе канонической области, так как матрица (2.33) — единичная с точностью до $O(\lambda^{-1})$.

4. Пусть z_0 — простая точка поворота, $S_j (j=1, 2, 3)$ — линии Стокса, выходящие из точки z_0 , и элементарные ф. с. р. (u_j, v_j) определяются заданием (S_j, z_0, D_j) (в дальнейшем все индексы берутся mod 4). Пусть S_{j+1} лежит слева от S_j и часть D_j , лежащая слева от S_j , совпадает с частью D_{j+1} , лежащей справа от S_{j+1} . Тогда

$$\Omega_{j, j+1} = e^{-i\pi/6} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{j, j+1}^{-1} \\ 1 & i\alpha_{j, j+2} \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\alpha_{ij} = 1 + O(\lambda^{-1}). \quad (2.36)$$

Кроме того,

$$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} = 1. \quad (2.37)$$

З а м е ч а н и е. Если z_0 — точка поворота порядка m и S_1, S_2 — две соседние линии Стокса, выходящие из z_0 , причем переход с S_1 на S_2 происходит против часовой стрелки, то

$$\Omega_{12} = e^{-i\pi m/2(m+2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 + O(\lambda^{-1}) \\ 1 & 2i \sin \frac{\pi m}{2(m+2)} + O(\lambda^{-1}) \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Таким образом, мы построили алгоритм, позволяющий найти асимптотику любого решения y уравнения (2.1) во всей ком-

плескной плоскости z , за исключением точек поворота. Для этого необходимо проделать следующее:

- 1) начертить линии Стокса;
- 2) выразить y через некоторую элементарную ф. с. р.;
- 3) перемножить матрицы перехода.

Этот метод был применён Федорюком [1], [2] для решения задачи на собственные значения и задачи о рассеянии. При этом поскольку задачи обычно ставятся на вещественной оси, то достаточно знать расположение небольшого числа линий Стокса, находящихся вблизи вещественной оси.

В заключение приведем более точные формулы для матриц перехода типа 3 и 4. Эти формулы доказаны для полиномов $q(z)$, но пригодны также и для широкого класса целых функций $q(z)$.

В случае 3 при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\beta_{11} \sim -\exp\left(-\sum_1^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{l^+} \alpha_k(t) dt\right),$$

$$\beta_{22} \sim -\exp\left(-\sum_i^{\infty} \lambda^{-k} \int_{l^-} \alpha_k(t) dt\right),$$
(2.39)

где α_k определяются из (1.3), путь l^+ (соответственно l^-) начинается в D_1 там, где $\operatorname{Re} \xi \rightarrow +\infty$ (соответственно $-\infty$), и оканчивается в D_2 там, где $\operatorname{Re} \xi \rightarrow +\infty$ (соответственно $-\infty$).

В случае 4

$$\alpha_{j, j+1} \sim \exp\left(\sum_1^{\infty} (-\lambda)^{-k} \alpha_{jk}\right),$$
(2.40)

$$\alpha_{jk} = \int_{l_{j, j+1}} \alpha_k(t) dt.$$
(2.41)

Здесь путь $l_{j, j+1} \subset D_j \cup D_{j+1}$ начинается в D_{j+1} там, где $\operatorname{Re} \xi(z_0, z) \rightarrow +\infty$, и кончается в D_j там, где $\operatorname{Re} \xi(z_0, z) \rightarrow -\infty$. Ветвь $\sqrt{q(z)}$ выбирается так же, как и для (u_j, v_j) .

Если функция $q(x)$ вещественна при вещественных x , то можно получить еще более точные сведения о матрицах перехода (см. Федорюк [2], леммы 2.9, 2.10).

Развитые здесь методы можно перенести и на уравнения вида

$$y'' - q(z, \lambda)y = 0,$$
(2.42)

где q — целая функция z и λ , а также на уравнения вида (2.1) и (2.42), где q — рациональная функция z . Однако для уравнений более высокого порядка задача об исследовании асимптотики решений в целом не сделана.

ДОБАВЛЕНИЕ 2

Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных задач

А. Б. Васильева

1. Задача Коши

В § 40 автором данной книги построено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши. Автор использует формализм, развитый в работах Васильевой [3]—[11], интерпретируя его на свой лад, и дает оценку остаточного члена примерно так же, как это делалось в [10]. Однако уже после появления работы [10] А. Б. Васильевой и ее учениками этот формализм был приведен к наиболее простому и удобному для использования виду. Мы считаем целесообразным посвятить этому несколько страниц.

Рассмотрим две системы, одна из которых является регулярно возмущенной

$$\frac{dz}{dt} = F(t, z, \varepsilon) \quad (1.1)$$

(т. е. $F(t, z, \varepsilon)$ обладает непрерывными производными по всем аргументам до некоторого порядка; для простоты будем считать, что, как это принято в данной книге, $F(t, z, \varepsilon)$ имеет бесконечное число непрерывных производных), а другая — сингулярно возмущенной

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y), \\ \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обратимся сначала к регулярному случаю (1.1). Известно, что для построения асимптотического разложения решения задачи Коши $z|_{t=0} = z^0$ можно воспользоваться степенным рядом. Запишем решение формально в виде

$$z(t, \varepsilon) = \bar{z}_0(t) + \varepsilon \bar{z}_1(t) + \dots \quad (1.3)$$

Подставим этот ряд в (1.1) и в начальные условия. Далее, разлагая формально левую и правую части уравнения по степеням ε и приравнивая члены с одинаковыми степенями ε ,

можно получить уравнения для последовательного определения $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots$ — так называемые *уравнения в вариациях*. Чтобы однозначно определить решения всех этих уравнений, нужно задать начальные условия. Они задаются из следующих соображений. Так как z^0 от ε не зависит, оно может быть формально представлено в виде $z^0 = z^0 + 0 \cdot \varepsilon + 0 \cdot \varepsilon^2 + \dots$. Поэтому естественно положить $\bar{z}_0|_{t=0} = z^0$, $\bar{z}_k|_{t=0} = 0$ ($k > 0$). Построенный по указанному правилу ряд (1.3) может, вообще говоря, не быть сходящимся, но при достаточной гладкости $F(t, z, \varepsilon)$ будет асимптотическим в смысле определения, данного в этой книге. Нетрудно видеть, что в данном случае построенное асимптотическое разложение представляет собой ряд Маклорена. Этот результат является классическим.

Рассмотрим теперь задачу Коши для (1.2)

$$y|_{t=0} = y^0, \quad x|_{t=0} = x^0. \quad (1.4)$$

Уже на простейших примерах можно убедиться, что для решения задачи (1.2), (1.4) представление типа (1.3) не имеет места. Рассмотрим линейное уравнение первого порядка

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t).$$

Пользуясь известной элементарной формулой для решения (см. гл. 1, (2.11) для случая $n=1$) и интегрируя далее по частям, получим

$$y(t, \varepsilon) = \left[y^0 + \frac{B(0)}{A(0)} \right] e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t A d\xi} - \frac{B(t)}{A(t)} + \int_0^t \left(\frac{B}{A} \right)' e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t A d\xi} d\tau. \quad (1.5)$$

Нетрудно заметить, что, продолжая таким образом интегрировать по частям, мы будем получать асимптотический ряд, содержащий члены двух типов: члены чисто степенные по ε (главным членом такого типа является член $-\frac{B(t)}{A(t)}$, представляющий собой решение вырожденного уравнения $A(t)y + B(t) = 0$) и члены, содержащие помимо степени ε экспоненциальный мно-

житель $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t A d\xi\right)$ (главным членом такого типа является $\left[y^0 + \frac{B(0)}{A(0)} \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t A d\xi\right)$). Вследствие условия устойчивости

(D') (см. разд. 40.1), которое в данном случае сводится к требованию $A(t) < 0$, эти члены (будем называть их *пограничными членами*) быстро затухают с ростом t , однако вблизи $t=0$ они

существенны. Нетрудно видеть, что первое слагаемое в (1.5) как раз осуществляет поправку к решению вырожденного уравнения на ту потерю дополнительных условий, которая неизбежно происходит, если брать только вырожденное решение, поскольку оно всегда удовлетворяет уравнению более низкого порядка. Вырожденное решение вместе с пограничным членом дает равномерную асимптотику с остаточным членом порядка ε , в то время как одно вырожденное решение такой равномерной асимптотики не дает.

После этих замечаний приведем алгоритм построения асимптотического разложения для общего нелинейного случая (1.2). Будем предполагать, что корень $y = \varphi(x, t)$ уравнения $g(t, x, y) = 0$ удовлетворяет условию (D') разд. 40.1¹⁾.

Формализм, т. е. правило написания асимптотического разложения, состоит в следующем²⁾ (при изложении все же будем пояснять происхождение того или иного правила).

Будем асимптотическое разложение решения задачи Коши для системы (1.2) искать в виде

$$z = \bar{z} + \Pi z \quad (1.6)$$

(здесь и в дальнейшем под z понимается x и y в совокупности), где $\bar{z} = \bar{z}_0(t) + \varepsilon \bar{z}_1(t) + \dots$ означает формальный степенной ряд по ε с коэффициентами, зависящими от t , а $\Pi z = \Pi_0 z + \varepsilon \Pi_1 z + \dots$ — формальный степенной ряд по ε с коэффициентами, зависящими от $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$. Этот ряд будем называть *пограничным рядом*, а его члены — *пограничными членами*. Подставим (1.6) в (1.2), но при написании производной от Πz нужно в качестве независимого переменного брать τ . Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d}{d\tau} \Pi y &= g(t, \bar{x} + \Pi x, \bar{y} + \Pi y), \\ \varepsilon \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d}{d\tau} \Pi x &= \varepsilon f(t, \bar{x} + \Pi x, \bar{y} + \Pi y) \end{aligned} \quad (1.7)$$

(для симметрии второе уравнение (1.2) помножено на ε). Первые части (1.7) тоже нужно представить в виде разложения.

¹⁾ Наше рассмотрение справедливо для общего случая, когда f и g — векторы. Только при этом условии (D') заменяется требованием, чтобы корни характеристического уравнения

$$\text{Det} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{y=\varphi(x, t)} - \lambda I \right) = 0 \quad (D'')$$

имели отрицательные действительные части для $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$, $0 \leq t \leq T_0$.

²⁾ К соответствующей форме алгоритм был приведен М. И. Иманалиевым и применялся им для исследования интегро-дифференциальных уравнений.

Для этого преобразуем тождественно правые части (1.7) следующим образом (все выписываем только для g , так как для f преобразования те же): $g(t, \bar{x} + \Pi x, \bar{y} + \Pi y) = g(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)) + g(\tau\varepsilon, \bar{x}(\tau\varepsilon) + \Pi x, \bar{y}(\tau\varepsilon) + \Pi y) - g(\tau\varepsilon, \bar{x}(\tau\varepsilon), \bar{y}(\tau\varepsilon))$. Обозначим через \bar{g} степенное разложение $g(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))$ по параметру ε с коэффициентами, зависящими от t , а через Πg — степенное разложение разности $g(\tau\varepsilon, \bar{x}(\tau\varepsilon) + \Pi x, \bar{y}(\tau\varepsilon) + \Pi y) - g(\tau\varepsilon, \bar{x}(\tau\varepsilon), \bar{y}(\tau\varepsilon))$ по ε с коэффициентами, зависящими от τ . Таким образом, подставляя эти разложения в правые части (1.7), имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d}{d\tau} \Pi y &= \bar{g} + \Pi g, \\ \varepsilon \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d}{d\tau} \Pi x &= \varepsilon (\bar{f} + \Pi f). \end{aligned}$$

Приравняем теперь коэффициенты при одинаковых степенях ε , причем отдельно коэффициенты, зависящие от t , и коэффициенты, зависящие от τ , и получим следующие обобщенные системы уравнений в вариациях. Распишем сначала более детально уравнения нулевого приближения

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{g}_0, & \frac{d}{d\tau} \Pi_0 y &= \Pi_0 g, \\ \text{a) } \frac{d\bar{x}_0}{dt} &= \bar{f}_0, & \text{b) } \frac{d}{d\tau} \Pi_0 x &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

или в более развернутом виде

$$\begin{aligned} 0 &= g(t, \bar{x}_0(t), \bar{y}_0(t)), \\ \text{a) } \frac{d\bar{x}_0}{dt} &= f(t, \bar{x}_0(t), \bar{y}_0(t)), \\ \frac{d}{d\tau} \Pi_0 y &= g(0, \bar{x}_0(0) + \Pi_0 x, y_0(0) + \Pi_0 y) - \\ \text{b) } &- g(0, \bar{x}_0(0), \bar{y}_0(0)) \equiv g(0, \bar{x}_0(0) + \Pi_0 x, y_0(0) + \Pi_0 y), \\ \frac{d}{d\tau} \Pi_0 x &= 0 \end{aligned} \quad (1.8')$$

В первой из этих систем мы узнаем без труда укороченную систему.

Начиная с $k=1$ уравнения в вариациях линейны и имеют вид

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{d}{dt} \bar{y}_{k-1} &= \bar{g}_k, & \frac{d}{d\tau} \Pi_k y &= \Pi_k g, \\ \frac{d}{dt} \bar{x}_k &= \bar{f}_k, & \text{b) } \frac{d}{d\tau} \Pi_k x &= \Pi_{k-1} f. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Чтобы из этих систем определить коэффициенты разложения (1.7), нужно задать начальные условия. Для этого подставим (1.7) в начальные условия (1.4)

$$\begin{aligned}\bar{y}(0) + \Pi y|_{\tau=0} &= y^0, \\ \bar{x}(0) + \Pi x|_{\tau=0} &= x^0.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Отсюда в нулевом приближении имеем

$$\begin{aligned}\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y|_{\tau=0} &= y^0, \\ \bar{x}_0(0) + \Pi_0 x|_{\tau=0} &= x^0.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Рассмотрим второе из условий (1.11). Без каких-либо дополнительных соображений из него нельзя однозначно определить начальные условия для *двух* неизвестных функций $\bar{x}_0(0)$ и $\Pi_0 x|_{\tau=0}$. Таким дополнительным соображением будет служить условие убывания пограничных членов при фиксированном t и $\varepsilon \rightarrow \infty$ (т. е. при $\tau \rightarrow \infty$) — см. разобранный выше пример. Таким образом, для определения $\Pi_0 x$ мы имеем условие $\Pi_0 x|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. Так как $\frac{d}{d\tau} \Pi_0 x = 0$, то, пользуясь этим дополнительным условием, получим $\Pi_0 x \equiv 0$. А тогда из (1.11) определится $\bar{x}_0(0) = x^0$, после чего полностью определится решение системы (1.8а). Оно в точности совпадает с вырожденным решением, участвующим в теореме 39.1 о предельном переходе и обозначенным там $y_0(t)$, $x_0(t)$. Вырожденное решение представляет собой, таким образом, главный член регулярной части разложения z в полном соответствии с тем результатом, который мы имели в примере. Далее, из первого уравнения (1.11) определяются начальные условия для $\Pi_0 y$ ($\bar{y}_0(0)$ уже определено из (1.8'а), а именно $\bar{y}_0(t) = \varphi(\bar{x}_0(t), t)$) в виде $\Pi_0 y|_{\tau=0} = y^0 - \bar{y}_0(0)$, после чего из первого уравнения системы (1.8'б), которая в силу $\Pi_0 x \equiv 0$ имеет вид

$$\frac{d}{d\tau} \Pi_0 y = g(0, \bar{x}_0(0), \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y),$$

определим $\Pi_0 y$. Нетрудно видеть, что это уравнение совпадает с (39.18), если не считать видоизменения, связанного с неавтономностью системы (1.2)¹⁾, но только в нем сделана замена

¹⁾ Присоединенное уравнение (39.9) для неавтономной системы имеет вид

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t, x, y),$$

где t и x рассматриваются как параметры. Вместо (39.18) будем в этом случае иметь уравнение $\frac{d\tilde{y}}{d\tau} = g(0, \alpha, \tilde{y})$, т. е. присоединенное уравнение, отнесенное к начальной точке, другими словами, присоединенное уравнение, в котором параметры t и x равны их начальным значениям.

переменных $\tilde{y} = \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y$. В этих переменных точкой покоя будет $\Pi_0 y = 0$ и в силу условия (D') и принадлежности начальной точки $(0, x^0, y^0)$ области влияния устойчивого корня¹⁾ $y = \varphi(x, t)$ имеем $\Pi_0 y \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е. Пользуясь условием (D'), нетрудно получить более точную оценку убывания $\Pi_0 y$ при $\tau \rightarrow \infty$. Она имеет вид

$$|\Pi_0 y| < C e^{-\alpha \tau},$$

где C и α — некоторые положительные постоянные.

Перейдем к построению первого приближения. Из (1.10) получим

$$\begin{aligned} \bar{y}_1(0) + \Pi_1 y|_{\tau=0} &= 0, \\ \bar{x}_1(0) + \Pi_1 x|_{\tau=0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Так как $\Pi_0 z$ уже определено, то известно и $\Pi_0 f$. Поэтому из (1.9b) для $k=1$ имеем

$$\Pi_1 x = \Pi_1 x|_{\tau=0} + \int_0^{\tau} \Pi_0 f \, d\tau.$$

Если опять воспользоваться требованием убывания $\Pi_1 x$ на бесконечности, то получим

$$0 = \Pi_1 x|_{\tau=0} + \int_0^{\infty} \Pi_0 f \, d\tau$$

(интеграл оказывается сходящимся в силу экспоненциального убывания $\Pi_0 z$, а вместе с ним $\Pi_0 f$). Отсюда

$$\Pi_1 x|_{\tau=0} = - \int_0^{\infty} \Pi_0 f \, d\tau,$$

а, следовательно, из (1.12)

$$\bar{x}_1(0) = \int_0^{\infty} \Pi_0 f \, d\tau.$$

Этим условием полностью определится решение (1.9a), $k=1$, а значит, и $\bar{y}_1(t)$, а тогда из (1.12) определится начальное условие для $\Pi_1 y$

$$\Pi_1 y|_{\tau=0} = -\bar{y}_1(0),$$

и тем самым из первого уравнения (1.9b), $k=1$, определится $\Pi_1 y$.

¹⁾ См. теорему 39.1.

Совершенно аналогично определяются $\Pi_k x$, \bar{x}_k , \bar{y}_k и $\Pi_k y$ ($k > 1$) из системы (1.9) с помощью начальных условий

$$\begin{aligned} \Pi_k x|_{\tau \rightarrow \infty} &= 0, \\ \bar{x}_k|_{t=0} &= \int_0^{\infty} \Pi_{k-1} f d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \Pi_k y|_{\tau=0} &= -\bar{y}_k(0), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, формальное разложение (1.6) построено.

Это разложение совпадает с описанным в разд. 40.1, но форма записи более компактная. Это разложение, как показано в работах А. Б. Васильевой и в разд. 40.1, является асимптотическим для решения задачи (1.2), (1.4), т. е. если обозначить через Z_n частичную сумму ряда (1.6), содержащую n членов разложения \bar{z} и n членов разложения Πz , то для решения $z(t, \varepsilon)$ задачи (1.2), (1.4) имеет место неравенство

$$|z(t, \varepsilon) - Z_n| \leq C\varepsilon^{n+1},$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от ε при достаточно малых ε и одна и та же для всех $t \in [0, T_0]$.

Замечание. Так как все пограничные члены экспоненциально убывают при $\tau \rightarrow \infty$, то в области $0 < t^0 \leq t \leq T_0$ асимптотическим разложением решения можно считать одну регулярную часть, т. е. \bar{z} . Это представление является обычным маклореновским представлением, коэффициенты которого определяются, однако, совершенно иначе, нежели в случае (1.1). Как уже было указано выше, в регулярном случае (1.1) начальные условия для определения \bar{z}_k нулевые. Здесь же, во-первых, начальные условия задаются не для всех \bar{z}_k , а только для \bar{x}_k , так как соответствующие уравнения в вариациях имеют более низкий порядок, чем исходная система, и эти начальные условия для \bar{x}_k не являются нулевыми, а даются формулами (1.13).

2. Краевые задачи

Вопрос о краевых задачах в настоящей книге освещен несколько бегло и односторонне. Но, к сожалению, мы здесь также ограничены объемом. Все же хотелось бы подчеркнуть два момента:

1. Полученная асимптотика решения задачи Коши дает принципиальную возможность построить во многих случаях асимптотическое разложение решения краевой задачи, а также

задач с другими дополнительными условиями и доказать теоремы существования для этих задач.

2. В случае если действительные части корней характеристического уравнения (D'') оказываются разных знаков, предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ в решении задачи Коши, вообще говоря, не имеет места, однако можно указать некоторый класс краевых задач, решения которых стремятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторому решению вырожденного уравнения и обладают асимптотическим разложением, совершенно аналогичным (1.6). В данной книге этот вопрос для нелинейных уравнений не рассматривался вовсе.

Начнем с п. 1. Асимптотическое разложение (1.6) содержит как параметры начальные значения z^0 . Возникает возможность, определяя надлежащим образом z^0 , удовлетворять различным дополнительным условиям. Именно на этом пути удастся исследовать вопрос о существовании, единственности и асимптотике решения двухточечной краевой задачи, а также многоточечной, с подвижной границей и др. (см. обзор Васильевой [10]). Останемся более подробно на двухточечной краевой задаче.

Пусть краевое условие имеет вид

$$R(z(0), z(1)) = 0. \quad (2.1)$$

Подставим сюда асимптотическое разложение (1.6), соответствующее начальной точке $t=t^0$, в которой неизвестное начальное значение в свою очередь представлено как степенное разложение по ε

$$z^0(\varepsilon) = z_0^0 + \varepsilon z_1^0 + \dots \quad (2.2)$$

Приведенные в § 1 формулы относятся к случаю $t^0=0$ и не зависящих от ε начальных значений z^0 , но очевидным образом видоизменяются применительно к случаю регулярной зависимости z^0 от ε и отличного от нуля t^0 . А именно τ следует положить равным $\frac{t-t^0}{\varepsilon}$, а формулы (1.13) для определения начальных условий для уравнений в вариациях заменить следующими

$$\begin{aligned} \Pi_k x|_{\tau=\infty} &= 0, \\ \bar{x}_0|_{t=t^0} &= x_0^0, \quad \bar{x}_k|_{t=t^0} = x_k^0 + \int_0^\infty \Pi_{k-1} f d\tau \quad (k > 0), \\ \Pi_k y|_{\tau=0} &= y_k^0 - \bar{y}_k(t^0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Представляя R после подстановки также в виде разложения по ε и приравнявая члены этого разложения нулю, получим

уравнения для определения коэффициентов (2.2), а тем самым (1.6) будет давать некоторое формальное решение, удовлетворяющее краевому условию (2.1). В окрестности нулевого члена такого разложения можно доказать существование точного решения поставленной краевой задачи. Заметим, что вспомогательную начальную точку t^0 можно выбирать по-разному. Если в построении (1.6) участвует корень $y = \varphi(x, t)$, устойчивый вправо¹⁾, то полагаем $t^0 = 0$, а если устойчивый влево, то следует положить $t^0 = 1$. Если же уравнение $g(t, x, y) = 0$ имеет по крайней мере два корня: $y = \varphi^-(x, t)$ и $y = \varphi^+(x, t)$, один из которых φ^- устойчив влево, а другой φ^+ устойчив вправо, то в качестве t^0 можно взять некоторую внутреннюю точку отрезка $0 \leq t \leq 1$. Решение по-прежнему дается разложением (1.6), но справа от t^0 в построении (1.6) участвует корень $\varphi^+(x, t)$, а слева — корень $\varphi^-(x, t)$. Различный выбор t^0 приводит к различным решениям краевой задачи (2.1), качественно отличающимся друг от друга. В случае $t^0 = 0$ или $t^0 = 1$ (случай (а)) решение имеет в пределе скачок y и связанный с этим пограничный слой на одном из концов отрезка $[0, 1]$, а в случае $0 < t^0 < 1$ (случай (б)) решение имеет скачок y и связанный с этим пограничный слой в некоторой внутренней точке отрезка $[0, 1]$ (внутренний пограничный слой). График предельной функции для x в этом случае представляет собой ломаную линию, состоящую из двух звеньев. Заметим, что эти различные решения могут осуществляться для одного и того же уравнения (1.2) и при одном и том же условии (2.1).

Остановимся несколько подробнее на построении решения в случае (а) с начальной точкой $t^0 = 0$. Итак, подставим в (2.1) разложение (1.6), где $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, а коэффициенты определены начальными условиями (2.3). Заметим, что $(\bar{z} + \Pi z) |_{t=0} = z^0(\varepsilon) = z_0^0 + \varepsilon z_1^0 + \dots$. Что касается $t = 1$, то в этой точке любое $\Pi_k z$ в силу экспоненциального убывания пренебрежимо мало по сравнению с любым членом \bar{z} . Поэтому вместо $z(1)$ можно подставить $\bar{z}(1)$. После этого найдем

$$R(z^0, \bar{z}(1)) = R_0 + \varepsilon R_1 + \dots$$

Отсюда имеем $R_0 = 0, R_1 = 0, \dots$. Рассмотрим уравнение $R_0 = 0$. Очевидно, $R_0 = R(z_0^0, \bar{z}_0(1))$. Здесь $\bar{z}_0(1)$ — это значение при $t = 1$ решения системы (1.8'а), определяемое условием $\bar{x}_0(0) = x_0^0$, и, таким образом, $\bar{z}_0(1)$ является функцией x_0^0 , а тем самым $R_0 =$

¹⁾ Корень $\varphi(x, t)$ называется устойчивым вправо, если в (D'') $\operatorname{Re} \lambda < 0$, и устойчивым влево, если $\operatorname{Re} \lambda > 0$ (в этом последнем случае все сказанное выше по поводу задачи Коши имеет место слева от начальной точки).

сложной функцией z_0^0 , которую и будем рассматривать как неизвестное в уравнении $R_0=0$. Число уравнений совпадает с числом неизвестных и равно размерности z , или, что то же, числу уравнений в системе (1.2). Будем предполагать, что уравнение $R_0=0$ разрешимо относительно z_0^0 и что соответствующий функциональный определитель Δ_0 отличен от нуля. Далее, R_1 представляет собой линейную функцию относительно z_1^0 и $\bar{z}_1(1)$ коэффициенты и свободный член которой зависят только от z_0^0 и, таким образом, известны; $\bar{z}_1(t)$ есть решение системы (1.9a), $k=1$, определяемое начальным условием (2.3), $k=1$, и, следовательно, $\bar{z}_1(1)$ есть функция x_1^0 и притом линейная. Тем самым R_1 является сложной линейной функцией z_1^0 . Более детальное исследование показывает, что определитель линейной системы $R_1=0$ относительно неизвестных z_1^0 совпадает с Δ_0 и, следовательно, эта система разрешима относительно z_1^0 . По той же причине оказываются разрешимыми все уравнения $R_k=0$ относительно неизвестных z_k^0 . Определив z_k^0 , можно построить формальное решение (1.6). Оказывается, что это формальное решение является асимптотическим разложением некоторого действительно существующего решения краевой задачи (2.1). А именно, отличие от нуля Δ_0 обеспечивает в окрестности значения z_0^0 существование такого $Z_0(\varepsilon)$ (ряд (2.2) является для $Z_0(\varepsilon)$ асимптотическим рядом), что решение задачи Коши $z|_{t=0} = Z_0(\varepsilon)$ в точности удовлетворяет поставленным краевым условиям (2.1), а ряд (1.6), построенный только что описанным приемом, будет являться для этого решения асимптотическим разложением.

Обратимся к случаю (b). Как уже указывалось выше, формальное решение в этом случае ищется в виде $\bar{z}^- + \Pi^- z$ слева от t^0 и в виде $\bar{z}^+ + \Pi^+ z$ справа от t^0 (индексы \pm соответствуют корням φ^+ и φ^- , участвующим в построении). Заметим, что применяя формулы (2.3) для определения \bar{z}_k^- и $\Pi_k^- z$, нужно, очевидно, ∞ заменить на $-\infty$. Подставляя эти ряды в (2.1), получим

$$R(\bar{z}_0^-(0), \bar{z}^+(1)) = R_0 + \varepsilon R_1 + \dots = 0,$$

откуда $R_0=0$, $R_1=0$, При этом $R_0 = R(\bar{z}_0^-(0), \bar{z}_0^+(1))$. Как $\bar{z}_0^-(0)$, так и $\bar{z}_0^+(1)$ являются функциями x_0^0 . Кроме того, они зависят еще от t^0 , которое также заранее неизвестно. Будем предполагать, что уравнение $R_0=0$ разрешимо относительно t^0 , x_0^0 и что соответствующий функциональный определитель Δ_0

отличен от нуля (заметим, что для того, чтобы число уравнений было равно числу неизвестных, нужно, чтобы y было одномерным). Как оказывается, отличие от нуля Δ_0 обеспечит также и разрешимость всех уравнений $R_k=0$ ($k>0$), в которых неизвестными будут y_{k-1}^0, x_k^0 . В этом случае также справедлива некоторая теорема существования, аналогичная той, о которой говорилось в случае (а). Детальное описание обоих случаев можно найти в обзорной статье Васильевой [10]. В настоящей книге этот случай разбирается на некотором частном примере в разд. 41.4.

Однако не все краевые задачи поддаются исследованию при помощи разложения (1.6), даже если выполнено соответствующее условие устойчивости корня. Например, если рассмотреть систему $\varepsilon \frac{dy}{dt} = -y + 1, \frac{dx}{dt} = y$ с краевым условием $x(0) = x(1) = 0$, непосредственным расчетом можно убедиться, что решение этой краевой задачи не может быть описано при помощи (1.6) по той причине, что в этой задаче $y(0)$ бесконечно велико при $\varepsilon \rightarrow 0$. Чтобы иметь возможность дать описание таких классов краевых задач, нужно предварительно рассмотреть задачу Коши при бесконечно больших начальных значениях для y . Это было сделано М. И. Вишиком и Л. А. Люстерником в работе [7]. В этом случае асимптотика носит весьма сложный характер. Предельная функция, соответствующая x , по-прежнему определяется из вырожденного уравнения, но в отличие от случая, описанного в § 1, начальное значение этой предельной функции отлично от x^0 . В [7] для этого начального значения даны эффективные формулы. Если f и g линейны по y , то асимптотика упрощается: для этого случая справедливо разложение (1.6), но с добавлением для y члена вида $\frac{1}{\varepsilon} \Pi_{-1} y$. Этот квазилинейный случай в настоящей книге достаточно подробно разобран в разд. 41.3.

Обратимся теперь к п. 2. Использование (1.6) имеет тот недостаток, что требует одинакового знака всех $\text{Re } \lambda$, а это, вообще говоря, не является необходимым для того, чтобы имел место предельный переход в решении краевой задачи. В этом можно убедиться на простейшем примере

$$\varepsilon \frac{dy_1}{dt} = y_2 + 1, \quad \varepsilon \frac{dy_2}{dt} = y_1, \quad y_2(0) = y_2(1) = 0$$

(y_1, y_2 — компоненты вектора y),

для которого $\text{Re } \lambda$ имеют разные знаки. Асимптотическое разложение решения для такого рода случаев (нелинейных) было дано В. А. Тупчиевым [1]—[3] (см. также обзор Васильевой [10]).

Итак, пусть характеристическое уравнение (D'') имеет p корней с отрицательными и $M-p$ с положительными действительными частями (M — размерность вектора y). Краевое условие зададим в виде

$$\begin{aligned} \alpha y(0) &= \alpha y^0, & \beta y(1) &= \beta y^0, \\ x(0) &= x^0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где α — диагональная матрица, у которой p элементов единицы, а прочие $M-p$ нули, β — диагональная матрица, у которой p элементов нули, а $M-p$ единицы; другими словами, на левом конце отрезка $[0, 1]$ заданы p компонент вектора y , а на правом $M-p$ компонент. Тогда при некоторых дополнительных требованиях на z^0 , аналогичных введенному для задачи Коши требованию принадлежности начальной точки области влияния корня $y = \varphi(x, t)$ ¹⁾, решение краевой задачи (2.4) стремится к решению \bar{z} вырожденной системы, определяемому условием $\bar{x}|_{t=0} = x^0$. Предельный переход для x оказывается равномерным на $0 \leq t \leq 1$, а для y появляется пограничный слой, но в отличие от задачи Коши он возникает теперь как в окрестности $t=0$, так и в окрестности $t=1$. Соответственно этому для описания решения вместо (39.18) нужно ввести две присоединенные системы: около $t=0$ и около $t=1$,

$$\frac{dy}{d\tau_i} = g(i, \bar{x}(i), y), \quad \tau_i = \frac{t-i}{\varepsilon} \quad (i=0, 1). \quad (2.5)$$

Рассмотрим левую присоединенную систему ($i=0$). Известно, что если характеристическое уравнение (D'') имеет p корней с отрицательными действительными частями, то существует так называемое устойчивое начальное многообразие размерности p , обладающее тем свойством, что если начальная точка лежит на этом многообразии, то соответствующая траектория при $\tau_0 \rightarrow \infty$ стремится к $\varphi(\bar{x}(0), 0)$. Это понятие обобщает понятие устойчивой сепаратрисы седла в двумерном случае. Если, определяя решение левой присоединенной системы, задать p компонент вектора y , то остальные $M-p$ можно подобрать таким образом, чтобы точка $y|_{\tau_0=0}$ лежала на устойчивом начальном многообразии. Это, вообще говоря, можно сделать, поскольку $(M-p)$ -мерная гиперплоскость $\alpha y = \alpha y^0$, вообще говоря, пересекает p -мерное многообразие. Аналогичными свойствами обладает правая присоединенная система ($i=1$).

Эти предварительные замечания поясняют формулировку теоремы, доказанной В. А. Тупчиевым, которая в общих чертах такова: пусть p корней характеристического уравнения (D'')

¹⁾ См. теорему 39.1.

имеют отрицательные действительные части, а остальные $M-p$ — положительные действительные части; пусть устойчивое начальное многообразие левой присоединенной системы пересекает гиперплоскость $\alpha y = \alpha y^0$ в одной точке, а устойчивое начальное многообразие правой присоединенной системы пересекает гиперплоскость $\beta y = \beta y^0$ также в одной точке. Тогда существует единственное решение краевой задачи (2.4), и оно стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению вырожденной системы, определяемому условием $\bar{x}|_{t=0} = x^0$.

Что касается асимптотического разложения, то оно строится, аналогично тому, как это делалось для задачи Коши, только пограничные члены появляются в окрестности обоих концов отрезка $[0, 1]$. Обозначим их соответственно $\overset{(0)}{\Pi}z$ и $\overset{(1)}{\Pi}z$, причем коэффициенты $\overset{(i)}{\Pi}z$ зависят от τ_i . Имеем

$$z = \bar{z} + \overset{(0)}{\Pi}z + \overset{(1)}{\Pi}z. \quad (2.6)$$

Чтобы получить уравнения в вариациях, правые части нужно преобразовать к виду (все выписываем только для g)

$$\bar{g} + \overset{(0)}{\Pi}g + \overset{(1)}{\Pi}g,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{g} &= g(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)), \\ \overset{(i)}{\Pi}g &= g(i + \tau_i \varepsilon, \bar{x}(i + \tau_i \varepsilon) + \overset{(i)}{\Pi}x, \bar{y}(i + \tau_i \varepsilon) + \overset{(i)}{\Pi}y) - \\ &\quad - g(i + \tau_i \varepsilon, \bar{x}(i + \tau_i \varepsilon), \bar{y}(i + \tau_i \varepsilon)), \end{aligned}$$

и приравнять отдельно члены, зависящие от t , τ_0 и τ_1 . Уравнения в вариациях порядка k имеют вид

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{d\bar{y}_{k-1}}{dt} &= \bar{g}_k, & \text{b) } \frac{d}{d\tau_i} \overset{(i)}{\Pi}_k y &= \overset{(i)}{\Pi}_k g, & i &= 0, 1, \\ & & & & k &= 1, 2, \dots, \\ \frac{d\bar{x}_k}{dt} &= \bar{f}_k, & \frac{d}{d\tau_i} \overset{(i)}{\Pi}_k x &= \overset{(i)}{\Pi}_{k-1} f, & & \end{aligned} \quad (2.7)$$

а дополнительные условия к ним

$$\begin{aligned} \overset{(i)}{\Pi}_k x|_{\tau_i \rightarrow (-1)^i \infty} \rightarrow 0 \quad \text{или} \quad \overset{(i)}{\Pi}_k x|_{\tau_i=0} &= - \int_0^{(-1)^i \infty} \overset{(i)}{\Pi}_{k-1} f d\tau_i, \\ \bar{x}_0(0) &= x^0, \quad \bar{x}_k(0) = \int_0^{\infty} \overset{(0)}{\Pi}_{k-1} f d\tau_0 \quad (k > 0), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \alpha \Pi_k^{(0)} y |_{\tau_0=0} &= -\alpha \bar{y}_k(0), & \Pi_k^{(0)} y |_{\tau_0 \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, \\ \beta \Pi_k^{(1)} y |_{\tau_1=0} &= -\beta \bar{y}_k(0), & \Pi_k^{(1)} y |_{\tau_1 \rightarrow -\infty} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Требование $\Pi_k^{(0)} y |_{\tau_0 \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ эквивалентно требованию, чтобы начальная точка $\Pi_k^{(0)} y |_{\tau_0=0}$ лежала на устойчивом начальном многообразии первого уравнения (2.7b), $i=0$. Аналогичное замечание относится к $\Pi_k^{(1)}$.

В. А. Тупчиевым показано, что частичная сумма Z_n ряда (2.6), содержащая по n слагаемых \bar{z} , $\Pi_k^{(0)} z$ и $\Pi_k^{(1)} z$, является для решения задачи (2.4) асимптотическим представлением с той же равномерной на $[0, 1]$ оценкой остаточного члена порядка ε^{n+1} , как и для задачи Коши.

Встречаются задачи, при решении которых приходится сочетать все изложенные методы. Например, при наличии $M+1$ корней: $\varphi_1(x, t)$, для которого $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_M > 0$, $\varphi_2(x, t)$, для которого $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0, \operatorname{Re} \lambda_2 > 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_M > 0$, и т. д., наконец, $\varphi_{M+1}(x, t)$, для которого $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_M < 0$, — может существовать решение, такое, что x имеет в пределе M угловых точек. Они соответствуют переходам от корня φ_1 , устойчивого влево, к корням $\varphi_2, \varphi_3, \dots$, у которых постепенно возрастает степень устойчивости вправо (Тупчиев [3], см. также обзор Васильевой [10]). Этими же методами можно также описывать переходы между корнями с одинаковой степенью устойчивости (Васильева (в соавторстве с Тупчиевым) [1]).

ЛИТЕРАТУРА

Айнс Е. Л.

- [1] Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.

Аносов Д. В.

- [1] О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, *Матем. сб.*, 50 (1960), № 3, 299—334.

Апостол (Apostol T.)

- [1] *Mathematical Analysis*, Addison — Wesley, Reading, Mass., 1957.

Биркгоф (Birkhoff G. D.)

- [1] On the asymptotic character of the solutions of certain differential equations containing a parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 9 (1908), 219—231.
[2] Singular points of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 10 (1909), 436—470.

Борель (Borel E.)

- [1] *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, 1928.

Борисович Ю. Г.

- [1] О периодических решениях дифференциально-операторных уравнений с малым параметром при производной, *Докл. АН СССР*, 148 (1963), № 2, 255—258.

де Брёйи Н. Г.

- [1] Асимптотические методы в анализе, М., 1961.

Бриллюэн (Brillouin L.)

- [1] Remarques sur la mécanique ondulatoire, *J. Phys. Radium*, 7 (1926), 353—368.
[2] A practical method for solving Hill's equation, *Quart. Appl. Math.*, 6 (1948), 167—178.

Брио, Буке (Briot J. C., Bouquet C. A. A.)

- [1] Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles, *J. Ecole Polytech.*, 21 (1856), cahier 36.

Бриш Н. И.

- [1] О краевых задачах для уравнения $ey'' = f(x, y, y')$ при малых ε , *Докл. АН СССР*, 95 (1954), № 3, 429—432.
[2] О первой краевой задаче для линейного уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной, *Уч. зап. Минского госуд. пед. инст.*, 5 (1956), 3—13.

Брэгг (Bragg R. E.)

- [1] Fundamental solutions of a linear ordinary differential equation of the third order in the neighborhood of a single second order turning point, *Duke Math. J.*, 29 (1958), 239—264.

Бутузов В. Ф.

- [1] К вопросу об асимптотике решений интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при производной, *Дифференциальные уравнения*, 2 (1966), № 3, 391—406.

Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В.

- [1] Асимптотические представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений, сб. *Итоги Науки, Математика*, М., 1968.

Вазов (Wasow W.)

- [1] On the asymptotic solution of boundary value problems for ordinary differential equations containing a parameter, *J. Math. Phys.*, 32 (1944), 173—183.
[2] The complex asymptotic theory of a fourth order differential equation of hydrodynamics, *Ann. Math.*, 49 (1948), 852—871.

- [3] On the construction of periodic solutions of singular perturbation problems, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Ann. of Math. Studies, v. 20, Princeton, 1950, 313—350.
- [4] A study of the solutions of the differential equation $y^{(4)} + \lambda^2(xy'' + y) = 0$ for large values of λ , *Ann. Math.*, (2), 52 (1950), 350—361.
- [5] Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point, *Ann. Math.*, 58 (1953), 222—252.
- [6] Singular perturbations of boundary value problems for nonlinear differential equations of the second order, *Comm. Pure Appl. Math.*, 9 (1956), 93—113.
- [7] Solution of nonlinear differential equations with a parameter by asymptotic series, *Ann. Math.*, 69 (1959), 486—509.
- [8] A turning point problem for a system of two linear differential equations, *J. Math. Phys.*, 38 (1960), 257—278.
- [9] Turning point problems for systems of linear equations, I. The formal theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, 14 (1961), 657—673.
- [10] Turning point problems for systems of linear differential equations, II. The analytic theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, 15 (1962), 173—187.
- [11] On holomorphically similar matrices, *J. Math. Anal. Appl.*, 4 (1962), 202—206.
- [12] Simplification of turning point problems for system of linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106 (1963), 100—114.
- [13] Singular perturbation problems of systems of two ordinary analytic differential equations, *Arch. Rational Mech. Analysis*, 14 (1963), 61—80.

В а с и л ь е в а А. Б.

- [1] О дифференцировании решений дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, *Докл. АН СССР*, 61 (1948), № 4, 597—599.
- [2] О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры, *Матем. сб.*, 31 (73), (1952), № 3, 587—644.
- [3] Асимптотические формулы для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих при производных параметры различных порядков малости, *Докл. АН СССР*, 128 (1959), № 6, 1110—1113.
- [4] Равномерное приближение к решению системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производной и приложение к крайевым задачам, *Докл. АН СССР*, 124 (1959), № 3, 509—512.
- [5] О многократном дифференцировании по параметру решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной, *Матем. сб.*, 48 (90) (1959), № 3, 311—334.
- [6] Построение равномерного приближения для решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, *Матем. сб.*, 50 (1960), № 1, 43—58.
- [7] Асимптотика решений некоторых крайевых задач для уравнений с малым параметром при старшей производной, *Докл. АН СССР*, 135 (1960), № 6, 1303—1306.
- [8] Асимптотические формулы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, справедливые на полубесконечном промежутке, *Докл. АН СССР*, 142 (1964), № 4, 769—772.
- [9] Асимптотика решений дифференциально-разностных уравнений в случае малого отклонения аргумента, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2 (1962), № 5, 768—786.
- [10] Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, *Успехи матем. наук*, 18 (1963), № 3, 15—86.

- [1] Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 3 (1963), № 4, 611—642.

Васильева А. Б., Тупчиев В. А.

- [1] О периодических решениях систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, близких к разрывным, *Докл. АН СССР*, 178, № 4 (1968).

Вебер (Weber H.)

- [1] Zur Theorie der Besselschen Funktionen, *Math. Ann.*, 37 (1890), 404—416.

Вендель (Wendel J. G.)

- [1] Singular perturbations of a Van der Pol equation, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, *Ann. Math. Studies*, v. 20, Princeton, 1950, 243—290.

Вентцель (Wentzel G.)

- [1] Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingung für die Zwecke der Wellenmechanik, *Z. Physik*, 38 (1926), 518—529.

Вишик М. И., Люстерник Л. А.

- [1] Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, *Успехи матем. наук*, 12 (1957), № 5, 3—122.
- [2] Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений, *Докл. АН СССР*, 121 (1958), № 5, 778—781.
- [3] Асимптотическая теория решений задач с быстро колеблющимися граничными условиями для уравнений в частных производных, *Докл. АН СССР*, 119 (1958), 636—639.
- [4] Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с большими и быстро меняющимися коэффициентами, *Докл. АН СССР*, 125 (1959), 247—250.
- [5] Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и несамосопряженных дифференциальных уравнений, *Успехи матем. наук*, 15 (1960), № 3, 3—80.
- [6] Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими и быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями, *Успехи матем. наук*, 15 (1960), № 4 (94), 27—95.
- [7] О начальном скачке для нелинейных уравнений, содержащих малый параметр, *Докл. АН СССР*, 132 (1960), № 6, 1242—1245.

Волк И. М.

- [1] О периодических решениях неавтономных систем, зависящих от малого параметра, *Прикл. матем. и мех.*, 10 (1946), № 5—6, 559—574.
- [2] Некоторые обобщения метода малого параметра в теории периодических движений неавтономных систем, *Прикл. матем. и мех.*, 11 (1947), № 4, 433—444.
- [3] О периодических решениях автономных систем, *Прикл. матем. и мех.*, 12 (1948), № 1, 29—38.

Волосов В. М.

- [1] Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной, *Матем. сб.*, 30 (72) (1952).
- [2] К теории нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков с малым параметром при старшей производной, *Матем. сб.*, 31 (73) (1952), № 3, 645—674.
- [3] Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений, *Успехи матем. наук*, 17 (1962), № 6, 3—126.

- [4] Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанные с усреднением, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 3 (1963), № 1, 3—53.

Градштейн И. С.

- [1] Дифференциальные уравнения с малым множителем при производных и теория устойчивости Ляпунова, *Докл. АН СССР*, 65 (1949), № 6, 789—792.
 [2] Линейные уравнения с переменными коэффициентами и малыми параметрами при старших производных, *Матем. сб.*, 27 (69), (1950), № 1, 47—68.
 [3] Применение теории устойчивости А. М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных, *Матем. сб.*, 32 (74) (1953), № 2, 263—286.
 [4] О решениях на временной полупрямой дифференциальных уравнений с малыми множителями, *Матем. сб.*, 32 (74) (1953), № 3, 533—544.

Грин (Green G.)

- [1] On the motion of waves in a variable canal of small depth and width, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 6 (1837), 457—462.

Гроза Л. А.

- [1] Асимптотическое разложение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в банаховых пространствах, *Докл. АН СССР*, 121 (1958), № 6, 963—966.

Дётш (Doetsh G.)

- [1] *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Berlin, 1937.

Джефрис (Jeffreys H.)

- [1] On certain approximate solutions of linear differential equations of second order, *Proc. London Math. Soc.*, (2), 23 (1924), 428—436.

Дородницын А. А.

- [1] Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля, *Прикл. матем. и мех.*, 11 (1947), 313—328.
 [2] Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка, *Успехи матем. наук*, 7 (1952), № 6, 3—96.

Дюлюа (Dulac H.)

- [1] Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, *J. Ecole Polytech.*, 2^e ser., cahier 9 (1904).
 [2] Points singuliers des équations différentielles, *Mémorial des Sciences Math. Fasc.*, 61, Paris, Gautier-Villars, 1934.

Евграфов М. А.

- [1] Асимптотические оценки и целые функции, М., 1960.

Евграфов М. А., Федорюк М. В.

- [1] Асимптотика решений уравнения $w'' - p(z, \lambda)w = 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ в комплексной плоскости z , *Успехи матем. наук*, 21 (1966), № 1, 3—50.

Задирака К. В.

- [1] О системе нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при некоторых производных, *Докл. АН СССР*, 109 (1956), № 2, 256—259.
 [2] Поведение особо возмущенных автономных нелинейных дифференциальных систем вблизи семейства цилиндров, *Укр. матем. ж.*, 14 (1962), № 3, 235—249.
 [3] О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы, *Укр. матем. ж.*, 17 (1965), № 1, 47—63.

- Ивано (Iwano M.)
- [1] Intégration analytique d'un système d'équations non linéaires dans le voisinage d'un point singulier, *Ann. Mat. Pura Appl.*, (4); I, 44 (1957), 261—292; II, 47 (1959), 91—149.
 - [2] Convergent solutions of a system of ordinary non-linear differential equations containing a small parameter, *Comment. Math. Univ. St. Paul*, 10 (1961), 27—56.
 - [3] On a system of non-linear ordinary differential equations containing a parameter, II, *Kodai Math. Seminar Reports*, 14 (1962), 95—109.
- Ивано, Сибуйя (Iwano M., Sibuya Y.)
- [1] Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter, *Kodai Math. Seminar Reports*, 15 (1963), 1—28.
- Иванова Н. А.
- [1] Асимптотика функции Грина обыкновенного линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, зависящими от малого параметра, *Докл. АН СССР*, 140 (1961), № 1, 29—32.
- Казаринов (Kazarinoff N. D.)
- [1] Asymptotic expansions for the Whittaker functions of large complex order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78 (1955), 305—328.
 - [2] Asymptotic solutions with respect to a parameter of a differential equation having an irregular singular point, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 62—69.
 - [3] Asymptotic theory of second order differential equations with two simple turning points, *Arch. Rational Mech. Analysis*, 2 (1958), 129—150.
 - [4] Asymptotic forms for the Whittaker functions with both parameters large, *J. Math. Mech.*, 6 (1958), 341—360.
- Казаринов, Маккельви (Kazarinoff N. D., McKelvey R.)
- [1] Asymptotic solutions of differential equations in a domain containing a regular singular point, *Canad. J. Math.*, 8 (1956), 97—104.
- Картрайт (Cartwright M.)
- [1] Van der Pol's equation for relaxation oscillations, *Contrib. to the Theory of Nonlinear Oscillations*, v. II, Princeton, 1952, 3—18.
- Кашуэлл (Cashwell E. D.)
- [1] The asymptotic solutions of an ordinary differential equation in which the coefficient of the parameter is singular, *Pacific J. Math.*, 1 (1963), 337—353.
- Климушев А. И.
- [1] О зависимости решений системы дифференциальных уравнений с последствием от малого параметра при производных, *Тр. Уральского политехн. ин-та*, сб. 139 (1964), 5—11.
- Коваль П. И.
- [1] Асимптотическое поведение решений почти треугольных систем линейных разностных и дифференциальных уравнений, *Докл. АН СССР*, 124 (1959), № 6, 1203—1206.
- Коддингтон, Левинсон (Coddington E. A., Levinson N.)
- [1] A boundary value problem for a non-linear differential equation with a small parameter, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3 (1952), 73—81.
 - [2] Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.
- Крамерс (Kramers H. A.)
- [1] Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung, *Z. Physik*, 39 (1926), 828—840.
 - [2] Das Eigenwertproblem im eindimensionalen periodischen Kraftfeld, *Physik*, 2 (1935), 483—490.

Лангер (Langer R. E.)

- [1] On the asymptotic solutions of ordinary differential equations with an application to the Bessel functions of large order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33** (1931), 23—64.
- [2] On the asymptotic solutions of differential equations with an application to the Bessel functions of large complex order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **34** (1932), 447—480.
- [3] The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 90—106.
- [4] The solutions of the Mathieu equation with complex variables and at least one parameter large, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 637—695.
- [5] The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to the Stokes' phenomenon, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40** (1934), 545—582.
- [6] On the asymptotic solutions of ordinary differential equations with reference to the Stokes' phenomenon about a singular point, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 397—416.
- [7] The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to a turning point, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 461—490.
- [8] The solutions of the differential equation $v'''' + \lambda^2 z v' + 3\mu \lambda^2 v = 0$, *Duke Math. J.*, **22** (1955), 525—542.
- [9] On the asymptotic forms of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a turning point, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80** (1955), 93—123.
- [10] The solutions of a class of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a multiple turning point, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 93—110.
- [11] On the construction of related differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 394—410.
- [12] On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order with a special reference to an equation of hydrodynamics, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957), 144—191.
- [13] The asymptotic solutions of a linear differential equation of the second order with two turning points, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959), 113—142.
- [14] Formal solutions and a related equation for a class of fourth order differential equations of a hydrodynamic type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **92** (1959), 371—410.
- [15] Turning points in linear asymptotic theory, *Bol. Soc. Mat. Mex.* (2), **5** (1960), 1—12.

Ласалль (La Salle J.)

- [1] Relaxation oscillations, *Quart. J. Appl. Math.*, **7** (1949), 1—19.

Левин (Levin J. J.)

- [1] Singular perturbations of nonlinear systems of differential equations related to conditional stability, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 609—620.
- [2] The asymptotic behavior of the stable initial manifolds of a system of nonlinear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85** (1957), 357—368.

Левин, Левинсон (Levin J. J., Levinson N.)

- [1] Singular Perturbations of nonlinear systems of differential equations and an associated boundary layer equation, *J. Rational Mech. Analysis*, **3** (1954), 247—270.

- Левинсон (Levinson N.)
 [1] Perturbations of discontinuous solutions of non-linear systems of differential equations, *Acta Math.*, **82** (1951), 71—106.
 [2] A boundary value problem for a singularly perturbed differential equation, *Duke Math. J.*, **25** (1958), 331—342.
- Линь (Lin C. C.)
 [1] On the stability of two dimensional parallel flows, *Quart Appl. Math.*, Part I, **3** (1945), 117—142; Part II, **3** (1945), 218—234.
 [2] On the stability of two dimensional parallel flows, Part III, *Quart. App. Math.*, **3** (1946), 277—301.
 [3] Теория гидродинамической устойчивости, ИЛ, М., 1958.
- Линь, Рабенштейн (Lin C. C., Rabenstein A. L.)
 [1] On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **94** (1960), 24—57.
- Лиувиль (Liouville J.)
 [1] Second mémoire sur le développement des fonctions en séries dont divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable, *J. Math. Pure Appl.*, **2** (1837), 16—35.
- Ломов С. А.
 [1] Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих малый параметр и вырождающихся на границе области, *Тр. Моск. энерг. ин-та*, вып. 42 (1962), 9—144.
 [2] Степенной пограничный слой в задачах с малым параметром, *Докл. АН СССР*, **148** (1963), № 3, 516—519.
- Макаева Г. С.
 [1] Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с малым параметром, системы «быстрых движений» которых гамма-милтоновы, *Изв. АН СССР*, Сер. матем., **25** (1961), № 5, 685—716.
- Маккельви (McKelvey R. W.)
 [1] The solutions of second order ordinary differential equations about a turning point of order two, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 103—123.
- Малкин И. Г.
 [1] Теория устойчивости движения, «Наука», М., 1966.
- Мальмквист (Malmquist J.)
 [1] Sur l'étude analytique des solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage d'un point singulier d'indétermination, *Acta Math.*, Part I, **73** (1941), 87—129; Part II, **74** (1941), 1—64; Part III, **74** (1941), 109—128.
 [2] Sur les points singuliers des équations différentielles, *Ark. Mat. Astr. Fys.*, **29A** (1943), № 18, 11.
- Маслов В. П.
 [1] Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965.
- Мексин (Meksyn D.)
 [1] Asymptotic integrals of a fourth order differential equation containing a large parameter, *Proc. London Math. Soc.*, (2), **49** (1947), 436—457.
- фон Мизес (von Mises R.)
 [1] Die Grenzschichte in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, *Acta Univ. Szeged.*, Sect. Sci. Math., **12** (1950), 29—34.
- Миранкер (Miranker W. L.)
 [1] Singular perturbation analysis of the differential equations of a tunnel diode circuit, *Quart. Appl. Math.*, **20** (1962), 279—299.

- [2] Singular perturbation eigenvalues by a method of undetermined coefficients, *J. Math. Phys.*, **42** (1963), 47—58.

Мищенко Е. Ф.

- [1] Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **21** (1957), № 5, 627—654.

- [2] Асимптотическая теория релаксационных колебаний, описываемых системами второго порядка, *Матем. сб.*, **44** (1958), № 4, 457—480.

Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.

- [1] Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным, *Докл. АН СССР*, **102** (1955), № 5, 889—891.

- [2] Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **23** (1959), № 5.

Мозер (Moser J.)

- [1] Singular perturbations of eigenvalue problems for linear differential equations of even order, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 251—278.

- [2] The order of a singularity in Fuchs's theory, *Math. Z.*, **72** (1959), 379—398.

- [3] Note on asymptotic expansions, MRC Tech. Summary Rep., No. 104, Math. Res. Ctr., U. S. Army, Univ. of Wisconsin, 1959.

Молчанов А. М.

- [1] Равномерная асимптотика линейных систем, *Докл. АН СССР*, **173** (1967), № 3, 519—522.

Моравец (Morawetz C. S.)

- [1] Asymptotic solutions of the stability equations of a compressible fluid, *J. Math. and Phys.*, **33** (1954), 1—26.

Нагумо (Nagumo M.)

- [1] Über das Verhalten des Integrals von $\lambda y'' + f(x, y, y', \lambda) = 0$ für $\lambda \rightarrow 0$, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, **21** (1939), 529—534.

Нильсен (Nilsen N.)

- [1] Recherches sur les séries de factorielles, *Ann. Ecole Norm.*, ser. 3, **19** (1902), 409—453.

Нёрлунд (Nörlund N. E.)

- [1] Leçons sur les Séries d'Interpolation, Gauthiers — Villars, Paris, 1926.

Нуайон (Noaillon P.)

- [1] Développements asymptotiques dans les équations linéaires à paramètre variable, *Mem. Soc. Roy. Sciences Liège*, III ser. 9, 1912.

Ньюелл (Newell H. E., Jr.)

- [1] The asymptotic forms of the solution of an ordinary linear matrix equation in the complex domain, *Duke Math. J.*, **9** (1942), 245—258.

Окубо (Okubo K.)

- [1] On certain reduction theorems for systems of differential equations which contain a turning point, *Proc. Japan Acad.*, **37** (1961), 544—549.

- [2] A global representation of a fundamental set of solutions and a Stokes phenomenon for a system of linear ordinary differential equations, *J. Math. Soc. Japan*, **15** (1963), 268—288.

Олвер (Olver F. W. J.)

- [1] The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, ser. A, **247** (1954), 307—327.

- [2] The asymptotic expansion of Bessel functions of large order, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, ser. A, **247** (1954), 328—368.

- [3] The asymptotic solution of linear differential equations of the second order in a domain containing one transition point, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, ser. A, **248** (1956), 65—97.

- [4] Uniform asymptotic expansions of solutions of linear second order differential equations for large values of a parameter, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, ser. A, **250** (1958), 479—517.
- [5] Error bounds for the Liouville — Green (or WKB) approximation, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **57** (1961), 790—810.
- [6] Error analysis of phase-integral methods, I. General theory for simple turning points, *J. Res. Nat. Bur. Standarts*, **B69**, (1965), № 4, 271—290.
- [7] Error analysis of phase-integral methods, II. Application to wave-penetration problems, *J. Res. Nat. Bur. Standarts*, **B69** (1965), № 4, 291—300.
- [8] On the asymptotic solutions of second-order differential equations having an irregular singularity of rank one, with an application to Whittaker functions, *J. Soc. Industr. and Appl. Math.*, **B2** (1965), № 2, 225—243.
- [9] Error bounds for asymptotic expansions, with an application to cylinder functions of large argument. Asymptotic Solut. Different. Equat. and Their Applic., New York—London—Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 163—183, 1965.

Олейник О. А., Жижина А. И.

- [1] О краевой задаче для уравнения $\epsilon y'' = F(x, y, y')$ при малых ϵ , *Матем. сб.*, **31** (73) (1952), № 3, 707—717.

Перрон (Perron O.)

- [1] Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung bei grossen Werten der unabhängigen Variablen, *Math. Z.*, **1** (1918), 27—43.

Понтрягин Л. С.

- [1] Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **21** (1957), № 5, 605—626.

Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В.

- [1] Периодическое решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, *Докл. АН СССР*, **132** (1960), № 3, 537—540.

Пугачев Н. С.

- [1] Об асимптотических представлениях интегралов систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, *Матем. сб.*, **15** (57) (1944), № 1, 13—46.

Пулькин С. С., Розов Н. Х.

- [1] К асимптотической теории релаксационных колебаний в системах с одной степенью свободы. Вычисление фазовых траекторий, *Вестн. Моск. ун-та*, матем., механ., № 2 (1964), 70—82.

Рабенштейн (Rabenstein A. L.)

- [1] Asymptotic solutions of $u^{(4)} + \lambda^2(zu'' + \alpha u' + \beta u) = 0$ for large $|\lambda|$, *Arch. Rational Mech. Analysis*, **1** (1958), 418—435.
- [2] The determination of the inverse matrix for a basic reference equation for the theory of hydrodynamic stability, *Arch. Rational Mech. Analysis*, **2** (1959), 355—366.

Райт (Wright E. M.)

- [1] The asymptotic expansion of integral functions and of the coefficients in their Taylor series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), 409—438.

Ранг (Rang E. R.)

- [1] Periodic solutions of singular perturbation problems, Tech. Rept. № 1, Dept. of Math. Univ. of Minnesota, School of Technol., 1957.

- [2] Periodic solutions of singular perturbation problems, Proc. of Intern. Symp. on Nonlinear Diff. Equations, Academic Press, New York, 1963, 377—383.

Раух (Rauch L. L.)

- [1] Oscillations of a third order autonomous system, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations I, Ann. of Math. Studies, v. 20, Princeton, 1950, 39—88.

Ритт (Ritt J. F.)

- [1] On the derivatives of a function at a point, *Ann. Math.*, 18 (1916), 18—23.

Рожков В. И.

- [1] Об асимптотике решений уравнений нейтрального типа с малым запаздыванием, сб. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы, «Наука», М., 1964, 161—175.
- [2] Асимптотические формулы по малому запаздыванию для решения уравнения нейтрального типа с двумя запаздываниями, сб. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы, «Наука», М., 1964, 176—182.
- [3] Уравнения нейтрального типа с переменным малым запаздыванием, *Дифференц. уравнения*, 2 (1966), № 3, 407—416.

Розов Н. Х.

- [1] Асимптотическое вычисление близких к разрывным периодических решений систем дифференциальных уравнений второго порядка, *Докл. АН СССР*, 145 (1962), № 1, 38—40.
- [2] К асимптотической теории релаксационных колебаний в системах с одной степенью свободы, II. Вычисление периода предельного цикла, *Вестн. Моск. ун-та*, матем., мех. (1964), № 3, 56—65.

Рэлей (Rayleigh J. W.)

- [1] On the stability or instability of certain fluid motions, *Proc. London Math. Soc.*, 11 (1880), 57; 19 (1887), 67—74.

Сацкая Н. С.

- [1] Об одном дифференциальном уравнении с малым параметром, *Матем. сб.*, 60 (1963), № 4, 499—505.

Свенсон (Swanson C. A.)

- [1] Differential equations with singular points, Techn. Rep. 16, Contract Nonr-220 (11), Dept. of Math. Cal. Inst. Techn., 1956.

Сибуйя (Sibuya Y.)

- [1] Sur un système des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients périodiques et contenant des paramètres, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo*, (1), 7 (1954), 229—241.
- [2] Second order linear ordinary differential equations containing a large parameter, *Proc. Japan. Acad.*, 34 (1958), 229—234.
- [3] Sur réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo*, (1), 7 (1958), 527—540.
- [4] On the problem of turning points, MRC Tech. Sum. Report, No. 105, Math. Res. Ctr. U. S. Army, Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1959.
- [5] On perturbations of discontinuous solutions of ordinary differential equations, *Nat. Sci. Rep., Ochanomizu Univ.*, 11 (1960), 1—18.
- [6] On nonlinear ordinary differential equations containing a parameter, *J. Math. Mech.*, 9 (1960), 369—398.
- [7] Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point, *Funkcial. Ekvac.*, 4 (1962), 29—56.

- [8] Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a parameter, *Funkcial. Ekvac.*, 4 (1962), 83—113.
- [9] Formal solutions of a linear ordinary differential equation of the n -th order at a turning point, *Funkcial. Ekvac.*, 4 (1962), 115—139.
- [10] Simplification of a linear ordinary differential equation of the n -th order at a turning point, *Arch. Rational Mech. Analysis*, 13 (1963), 206—221.
- [11] Asymptotic solutions of a linear ordinary differential equation of n -th order about a simple turning point, Internat. Symp. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mech., Academic Press, New York, 1963, 485—488.
- [12] Asymptotic solutions of initial value problems of ordinary differential equations with a small parameter in the derivative, *Arch. Rational Mech. Analysis*, I: 14 (1963), 304—311; II: 15 (1964), 247—262.
- [13] On the problem of turning points for systems of linear ordinary differential equations of higher orders, Proc. Sympos., Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Application, Math. Res. Ctr., U. S. Army, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., Wiley, New York, 1964, 145—162.
- [14] Some global properties of matrices of functions of one variable, *Math. Ann.*, 161 (1965), 67—77.

Тейлор (Taylor W. C.)

- [1] A complete set of asymptotic formulas for the Whittaker functions and the Laguerre polynomials, *J. Math. Phys.*, 18 (1939), 34—49.

Территин У. (Turritin W. J.)

- [1] Asymptotic solutions of certain ordinary differential equations associated with multiple roots of the characteristic equation, *Amer. J. Math.*, 58 (1936), 364—376.

Территин Х. (Turritin H. L.)

- [1] Stokes multipliers for asymptotic solution of a certain differential equation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68 (1950), 304—329.
- [2] Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary differential equations, Contributions to the Theory of Nonlinear oscillations, II, Ann. of Math. Studies, Princeton, v. 29, 1952, 81—116. (Русский перевод: сб. *Математика*, 1: 2 (1957), 29—59.)
- [3] Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point, *Acta Math.*, 93 (1955), 27—66.
- [4] Reducing the rank of ordinary differential equations, *Duke Math. J.*, 30 (1963), 271—274.
- [5] Solvable related equations pertaining to turning point problems, Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications, ed. C. H. Wilcox, Wiley, New York, 1964, 27—52.

Тихонов А. Н.

- [1] О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, *Матем. сб.*, 22 (64) (1948), № 2, 193—204.
- [2] О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры, *Матем. сб.*, 27 (69) (1950), 147—156.
- [3] Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных, *Матем. сб.*, 31 (73) (1952), № 3, 575—586.

Торн (Thorne R. C.)

- [1] The asymptotic solution of differential equations with a turning point and singularities, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 53 (1957), 382—398.

- [2] The asymptotic solution of linear second order differential equations in a domain containing a turning point and a regular singularity, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, ser. A., **249** (1957), 585—596.

Т р ж и з и н с к и й (Т r j i t z i n s k y W. J.)

- [1] Analytic theory of linear differential equations, *Acta Math*, **62** (1934), 167—226.
 [2] Laplace integrals and factorial series in the theory of linear differential and difference equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 80—146.
 [3] Theory of linear differential equations containing a parameter, *Acta Math.*, **67** (1936), 1—50.
 [4] Theory of nonlinear singular differential systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **42** (1937), 225—231.
 [5] Analytic theory of nonlinear singular differential equations, *Mem. Soc. Math.*, **90** (1938).
 [6] Developments in the analytic theory of algebraic differential equations, *Acta Math.*, **73** (1941), 1—85.

Т у п ч и е в Н. А.

- [1] О существовании, единственности и асимптотике решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, *Докл. АН СССР*, **142** (1962), № 6, 1261—1264.
 [2] Асимптотика решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром при производной, *Докл. АН СССР*, **143** (1962), № 6, 1296—1299.
 [3] Об угловых решениях краевых задач с малым параметром при производной в системе уравнений первого порядка, *Вестн. Моск. ун-та, матем., мех.* (1963), № 3, 17—24.

У и д д е р (Widder D. V.)

- [1] *The Laplace Transform*, Princeton, 1941.

У и т т е к е р Э., В а т с о н Г.

- [1] Курс современного анализа, т. I, II, Физматгиз, М., 1963.

У р а б е М.

- [1] Численное исследование периодических решений уравнения Ван-дер-Поля, Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. II, АН УССР, Киев, 1963, 367—376.

Ф а б р и (Fabry E.)

- [1] Sur les intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels, Thèse, Paris, 1885.

Ф е д о р ю к М. В.

- [1] Асимптотика дискретного спектра оператора $w''(x) - \lambda^2 p(x)w(x)$, *Матем. сб.*, **68** (110) (1965), № 1, 68—97.
 [2] Одномерная задача о рассеянии в квазиклассическом приближении, *Дифференц. уравнения*, I: 1 (1965), № 5, 631—646; II: 1 (1965), № 11, 1525—1536.
 [3] Топология линий Стокса уравнений второго порядка, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **29** (1965), в. 3, 645—656.
 [4] Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n -го порядка, *Дифференц. уравнения*, 2 (1966), № 4, 492—507.
 [5] Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов, *Тр. Моск. матем. общ.*, **15** (1966), 296—395.
 [6] Асимптотика собственных значений и собственных функций одномерных сингулярных дифференциальных операторов, *Докл. АН СССР*, **169** (1966), № 2, 288—291.

- [7] Аналитические свойства амплитуды рассеяния в одномерном случае, *Дифференц. уравнения*, 4 (1968).
- Фенъеш (Fénelon I.)
 [1] Über das Divergenzproblem der WKB-Methode, *Acta Phys. Akad. Sci. Hung.*, 4 (1954), 133—147.
- Фландерс, Стокер (Flanders D. A., Stoker J. J.)
 [1] The limit case of relaxation oscillations, *Studies in Non-linear Vibration Theory*, New York Univ., 1946, 313—328.
- Флатто, Левинсон (Flatto L., Levinson N.)
 [1] Periodic solutions of singularly perturbed systems, *J. Rational Mech. Analysis*, 4 (1955), 943—950. (Русский перевод: сб. *Математика*, 2:2 (1958), 61—68.)
- Форд (Ford W. B.)
 [1] The asymptotic developments of functions defined by MacLaurin series, Univ. of Michigan Science series, № 11, 1936.
- Фрёман Н., Фрёман П.
 [1] ВКБ-приближение, «Мир», М., 1967.
- Фридрихс (Friedrichs K. O.)
 [1] On non-linear vibrations of third order, *Studies in Nonlinear Vibration Theory*, New York University (1946), 65—103.
 [2] Special Topics in Analysis (Lecture Notes), New York University, 1953.
 [3] Asymptotic phenomena in mathematical physics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 61 (1955), 485—504.
- Фридрихс, Вазов (Friedrichs K. O., Wasow W.)
 [1] Singular perturbations of non-linear oscillations, *Duke Math. J.*, 13 (1946), 367—381.
- Хааг (Haag J.)
 [1] Etude asymptotique des oscillations de relaxation, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 60 (1943), 35—111.
 [2] Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillation de relaxation, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 61 (1944), 73—117.
- Хабер, Левинсон (Haber S., Levinson N.)
 [1] A boundary value problem for a singularly perturbed differential equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1955), 866—872.
- Хапаев М. М.
 [1] Линейные дифференциальные уравнения с малыми коэффициентами при нескольких старших производных в окрестности регулярно особой точки уравнения, *Успехи матем. наук*, 16 (1961), № 4, 187—194.
 [2] Асимптотика в окрестности иррегулярной особой точки решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с малыми коэффициентами при старших производных, *Матем. сб.*, 57 (1962), № 2, 187—200.
- Харрис (Harris W. A., Jr.)
 [1] Singular perturbations of two-point boundary problems for systems of ordinary differential equations, *Arch. Rational Mech. Analysis*, 5 (1960), 212—225.
 [2] Singular perturbation problems, *Bol. Soc. Mat. Mex.* (2), 5 (1960), 245—254.
 [3] Singular perturbations of two-point boundary problems, *J. Math. Mech.*, 11 (1962), 371—382.
 [4] A boundary value problem for a singularly perturbed system of non-linear differential equations, *Intern. Sympos. Nonlinear Mech.*, Academic Press, New York, 1963, 489—495.

Хединг (Heading J.)

- [1] The Stokes phenomenon and certain n th order differential equations, I, II, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 53 (1957), 399—441.
- [2] Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), «Мир», М., 1965.

Хирасава (Hirasawa Y.)

- [1] On singular perturbation problems of nonlinear systems of differential equations, *Comment. Math. Univ. St. Paul*, 3 (1955), 115—122.
- [2] On singular perturbation problems of nonlinear systems of differential equations III, *Comment. Math. Univ. St. Paul*, 4 (1955), 93—104.

Хорн (Horn J.)

- [1] Über die Reichenentwicklung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen, *J. Reine Angew. Math.*, 116 (1896), 265—306; 117 (1897), 104—128; 254—266.
- [2] Über das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle, *J. Reine Angew. Math.*, 119 (1898), 196—209; 267—290.
- [3] Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, 71 (1912), 510—532.
- [4] Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen, *Jahresber. Deut. Math. Ver.*, 24 (1915), 309—325; 25 (1915), 74—83.
- [5] Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale, I, II, *Mat. Z.*, 49 (1944), 339—350; 684—701.

Хукухара (Hukuhara M.)

- [1] Sur les propriétés asymptotiques des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires contenant un paramètre, *Mem. Fac. Engrg., Kyushu Imp. Univ.*, 8 (1937), 249—280.
- [2] Intégration formelle d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier, *Ann. Math. Pura Appl., Bologna*, (4), 19 (1940), 35—44.
- [3] Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires III, *Mém. Fac. Sci., Kyushu Univ.*, 2 (1942), 125—137.

Хукухара, Ивано (Hukuhara M., Iwano M.)

- [1] Étude de la convergence des solutions formelles d'un système différentiel ordinaire linéaire, *Funkcial. Ekvac.*, 2 (1959), 1—18.

Хьюдж (Hughes H. K.)

- [1] The asymptotic developments of a class of entire functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51 (1945), 456—461.

Чезарни Л.

- [1] Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, «Мир», М., 1964.

Чен (Tschep Y.)

- [1] Über das Verhalten der Lösungen einer Folge von Differentialgleichungen, welche im Limes ausarten, *Comp. Math.*, 2 (1935), 378—401.

Черри (Cherry T. M.)

- [1] Uniform asymptotic expansions, *J. London Math. Soc.*, 24 (1949), 121—130.
- [2] Uniform asymptotic formulae for functions with transition points, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68 (1950), 224—257.

Шеффе (Scheffé H.)

- [1] Asymptotic solutions of certain linear differential equations in which the coefficient of the parameter may have a zero, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40 (1936), 127—154.

Шлёмилх (Schlömilch O.)

- [1] Compendium der Höheren Analysis, B. II, Aufl. 4, Braunschweig, 1895.

Эрдейи (Erdélyi A.)

- [1] Asymptotic solutions of differential equations with transition points, Proc. Intern. Congr. of Math. Amsterdam, v. 3, 1954, 92—101.
 [2] Differential equations with transition points, I. The first approximation, Tech. Rep. 6, Dept. of Math., Calif. Inst. Tech., Pasadena, 1955.
 [3] Asymptotic factorization of ordinary linear differential operators containing a large parameter, Tech. Rep. 8, Dept. of Math., Calif. Inst. Tech., Pasadena, 1956.
 [4] Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962.
 [5] Asymptotic solutions of differential equations with transition points or singularities, *J. of Math. Phys.*, 1 (1960), 16—26.
 [6] On a nonlinear boundary value problem involving a small parameter, *J. Austral. Math. Soc.*, 2 (1961—1962), 425—439.

Эрдейи, Кеинеди, Макгрегор (Erdélyi A., Kennedy M., McGregor J. L.)

- [1] Parabolic cylinder functions of large order, *J. Rational Mech. and Analysis*, 3 (1954), 459—485.
 [2] Asymptotic forms of Coulomb wave functions, I, Tech. Rep. 4, Dept. of Math., Calif. Inst. Tech., Pasadena, 1955.

Эрдейи, Свенсон (Erdélyi A., Swanson C. A.)

- [1] Asymptotic forms of Coulomb wave function, II, Tech. Rep. 5, Dept. of Math., Calif. Inst. Tech., Pasadena, 1955.
 [2] Asymptotic forms of Whittaker's confluent hypergeometric functions, Mem. Amer. Math. Soc., v. 25, 1957.

Юэ (Huet D.)

- [1] Phénomènes de perturbation singulière, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 246 (1958), 2096—2098.

Янке Е., Эмде Ф.

- [1] Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, М., 1959.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	9
Глава I. <i>Некоторые основные свойства линейных дифференциальных уравнений в комплексной области</i>	
1. Предварительные замечания	11
2. Основная теорема существования и ее следствия	13
3. Циклические соотношения относительно особых точек	20
Глава II. <i>Регулярно особые точки</i>	
4. Метод решения	30
5. Решения в окрестности регулярно особой точки	33
Глава III. <i>Асимптотические степенные ряды</i>	
6. Вводные замечания относительно иррегулярных особых точек	45
7. Определение асимптотического степенного ряда	46
8. Элементарные свойства асимптотических рядов	49
9. Существование асимптотического разложения	56
Глава IV. <i>Иррегулярно особые точки</i>	
10. Введение	66
11. Формальное упрощение	69
12. Аналитическое упрощение и асимптотическое решение	73
13. Различные замечания	79
14. Доказательство главной асимптотической теоремы существования в случае, когда все собственные значения различны	83
15. Явление Стокса	96
Глава V. <i>Обобщение, получаемое при помощи жордановой канонической формы</i>	
16. Жорданова каноническая форма	109
17. Решения в окрестности регулярно особой точки. Общий случай	115
18. Доказательство теоремы 12.1. Общий случай	121
19. Асимптотическое решение в окрестности иррегулярно особой точки. Общий случай	122
Глава VI. <i>Некоторые специальные асимптотические методы</i>	
20. Введение	140
21. Получение асимптотических разложений из сходящихся степенных рядов	141
22. Метод контурного интегрирования Лапласа	148
23. Метод перевала	152
Глава VII. <i>Асимптотические разложения по параметру</i>	
24. Введение	161
25. Формальная теория	164
26. Аналитическое упрощение	171
27. Доказательство теоремы 26.1	176
28. Срезающее преобразование	180

Глава VIII. *Точки поворота*

29. Задачи, которые приводятся к уравнению Эйри. Формальная теория 186
 30. Задачи, которые приводятся к уравнению Эйри. Аналитическая теория 200
 31. Краткий обзор других задач, связанных с точками поворота 217

Глава IX. *Нелинейные уравнения*

32. Введение 231
 33. Решение в виде асимптотического степенного ряда 234
 34. Преобразование в линейное дифференциальное уравнение 237
 35. Решение в виде экспоненциального ряда 248
 36. Нелинейные уравнения с параметром 253

Глава X. *Сингулярные возмущения*

37. Краевые задачи для линейных уравнений 264
 38. Краевые задачи для линейных уравнений: метод Вишика и Люстерника 274
 39. Начальная задача для нелинейных уравнений. Качественная теория 287
 40. Разложения в ряд для начальной задачи 301
 41. Нелинейная двухточечная краевая задача 323
 42. Расщепление общих линейных сингулярно возмущенных систем 339
 43. Периодические решения сингулярно возмущенных задач. Общие замечания 352
 44. Периодические решения сингулярно возмущенных задач. Линейная теория 358
 45. Разложения в ряд для периодических решений сингулярно возмущенных задач 370

Глава XI. *Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью факториальных рядов*

46. Факториальные ряды и интегралы Лапласа 382
 47. Решение дифференциальных уравнений ранга единица с помощью факториальных рядов 393
 48. Замечания о решении дифференциальных уравнений более высокого ранга с помощью факториальных рядов 402

Добавление 1. *Асимптотика решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области. М. В. Федорук*

1. Асимптотические формулы для решений 406
 2. Асимптотика решений уравнения $y'' - \lambda^2 q(z)y = 0$ в комплексной плоскости z 420

Добавление 2. *Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных задач. А. Б. Васильева*

1. Задача Коши 434
 2. Краевые задачи 440

Литература 448