ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE 88

A Series of Modern Surveys
in Mathematics

André Weil

ELLIPTIC FUNCTIONS ACCORDING TO EISENSTEIN AND KRONECKER

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1976

А. Вейль

Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру

Перевод с английского
Ю. И. МАНИНА

Издательство «Мир»
Москва 1978

УДК 517.7

Эллиптические функции — одна из красивейших глав классического анализа. После некоторого периода забвения они снова вызывают широкий интерес и находят применение в различных областях математики — теории чисел, алгебраической геометрии, дифференциальных уравнениях.

Книга А. Вейля, видного французского математика, хорошо известного русскому читателю, принадлежит к редкому жанру. Это одновременно живое историко-математическое исследование, начальный курс теории эллиптических функций с многими полными доказательствами и введение в самые современные исследования. Она воплощает преемственность идей в актуальной области классического анализа.

Написанная увлекательно и с большим педагогическим мастерством, книга будет интересна математикам различных специальностей и разного уровня подготовки — от студентов младших курсов до сложившихся исследователей.

Редакция литературы по математическим наукам

В $\frac{20203\text{-}002}{041(01)\text{-}78}$ 2-78

От редакторов серии Ergebnisse der Mathematik

Мои сотрудники по редакционной коллегии серии Ergebnisse der Mathematik и я рады представить книгу Андре Вейля «Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру». Некоторых читателей, возможно, удивит публикация в этой серии сочинения, на первый взгляд посвященного истории математики и потому столь нетипичного для серии. Ознакомившись с рукописью, редакторы, однако, пришли к твердому убеждению в том, что она, внося весьма существенный вклад в историю нашей науки, в то же время представляет очень большую ценность для современных исследований. Поэтому мы без колебаний решили просить профессора Вейля согласиться на публикацию его рукописи в нашей серии и рады были получить его согласие.

Питер Хилтон,

председатель редакционной коллегии

Предисловие

«Когда строят короли, работу получают возчики» — сказал немецкий поэт [1]). Кронекер процитировал его в своем письме Кантору в сентябре 1891 г., добавив, что каждый математик одновременно и король и возчик. Несомненно, он думал о себе.

Но возчикам нужны дороги. В истории нашей науки нередко случалось так, что король открывал новый путь в землю обетованную, а его наследники, предпочитая свои тропинки, оставляли этот путь зарастать чертополохом.

Цель этой небольшой книжки — помочь расчистить одну из королевских дорог. Она возникла на основе лекций, читанных в Институте высших исследований осенью 1974 г. Я признателен Мелвину Натансону, предоставившему в мое распоряжение свои записи этих лекций. Куда приведет наша дорога, увидит будущее, но уже немало примет, что впереди плодородные земли.

Поскольку многое изложенное в этой книге заслуживает включения в элементарные курсы, нелишне указать, что она почти замкнута в себе. Даже основы теории тригонометрических функций изложены в начале гл. II ab initio методом Эйзенштейна. Было бы логично и удобно ввести так же гам-

---

[1]) Здесь процитирована вторая строка ксении «Кант и его последователи», а ее полный текст звучит так:

> «Wie doch ein einziger Reicher so viele Bettler in Nahrung
> Setzt! Wenn die Konige baun, haben die Kärrner zu tun».

(Goethes Werke, B. 1, S. 208, Aufbau-Verlag, Berlin und Weimar, 1974.) «Ксении» написаны совместно Гёте и Шиллером; упомянутая ксения приписывается Шиллеру. — *Прим. перев.*

ма-функцию в гл. III, но для краткости это введение было опущено, и предполагается, что читатель знаком с элементарными свойствами $\Gamma(s)$. В части II требуется также знакомство с теоремой Дирихле о рядах Фурье и ее частным случаем — методом суммирования Пуассона. Для наших приложений (главным образом, функциональное уравнение для тэта-функции) нужно знать несколько классических интегралов. Распределения Шварца появляются лишь в § 10 гл. VII и § 16—18 гл. VIII. Эти разделы слабо связаны с остальной частью книги и могут быть опущены без ущерба для понимания, хотя и не без потерь. В гл. VIII нельзя обойтись без функции Бесселя K_ν, введенной с помощью определенного интеграла. Разумеется, я выбрал для нее стандартное обозначение, но не пользовался никакими свойствами этой функции или, скорее, интеграла, кроме самых очевидных. В последней главе речь идет о теории чисел, и потому, конечно, предполагается некоторое знакомство с ней.

Андре Вейль

Принстон, 21 марта 1975 года

часть первая

Эйзенштейн

глава I

Введение

В 1891 г. Кронекер дал согласие выступить с лекцией на первом собрании только что основанного Немецкого математического общества. Лекция не состоялась из-за смерти его жены, но в письме Кантору, президенту Общества, Кронекер выразил надежду, что он сможет предоставить ее письменный текст, содержание которого было описано в следующих выражениях:

«Der Vortrag... sollte kurzweg den Titel haben «Über Eisenstein» ... Dabei müßten dann außer den rein arithmetischen und analytisch-arithmetischen noch ganz besonders seine rein analytischen Untersuchungen über elliptische Funktionen hervorgehoben werden, welche dem Bewußtsein der Jetztzeit ganz abhanden gekommen sind...» (Kronecker, Werke, B. V, S. 499)[1]).

Вскоре Кронекер умер, так и не написав свою лекцию. Однако он уже довольно подробно обсудил работы Эйзенштейна в своей последней большой статье об эллиптических функциях, опубликованной Берлинской Академией в 1891 г., указав, что Эйзенштейн предвосхитил некоторые из самых известных новшеств Вейерштрасса и пошел значительно дальше. Вот что пишет Кронекер:

---

[1]) «Лекция должна была называться «Об Эйзенштейне». Она была бы посвящена не столько его теоретико-числовым работам или работам, соединяющим теорию чисел с теорией функций, сколько и главным образом его чисто аналитическим исследованиям по эллиптическим функциям, так прочно забытым сейчас».

«Существенно новые точки зрения ... в особенности на теорию преобразований тэта-функций ... Эйзенштейн ввел в своей фундаментальной, но редко цитируемой статье «Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen», опубликованной в журнале Крелля в 1847 г. и содержащей совершенно оригинальные идеи...»

Если Кронекер выражается с таким энтузиазмом, довольно очевидно, что он сам только что открыл для себя эту статью. Далее он указывает на ее связи со своими текущими исследованиями, связи, которых он до того явно не замечал (Kronecker, Werke, B. V, S. 149). Обе цитаты относятся к статье Эйзенштейна «Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelprodukte, aus welchen die elliptischen Funktionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhängenden Doppelreihen». Это — часть VI его труда «Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen»; она была опубликована в *Crelles Journal*, **35** (1847), 153—274, а затем перепечатана в эйзенштейновском томе Mathematische Abhandlungen в 1847 г. с предисловием Гаусса.

Кронекер имел все основания назвать эту статью «редко цитируемой». Сомнительно, чтобы во всей математической литературе XIX века нашлась хотя бы одна ссылка на нее, кроме ссылки самого Кронекера и подстрочного примечания в диссертации Гурвица (Hurwitz, Werke, B. I, S. 31). В XX веке, возможно, ее цитировали еще два-три раза. Идеи Эйзенштейна действительно были «прочно забыты».

Не только вкус к истории побуждает нас попытаться оживить их здесь. Не говоря уже о том, что они являются превосходным введением ко многим работам Гекке, мы надеемся показать, что их можно с успехом применить к решению некоторых современных проблем, особенно в сочетании с поздними работами Кронекера, естественно их продолжающими. Возможно, эти идеи окажутся полезными и за пределами теории эллиптических функций и модулярной группы, в частности в арифметике рядов Эйзенштейна для групп Гильберта[1]), но здесь я не буду касаться этой темы.

Любой читатель Эйзенштейна должен сознавать, как остро он ощущал нехватку времени в течение всей своей непродолжительной жизни в науке. Еще в юности он жалуется на нервные приступы, заставляющие его часто прерывать работу. Позже он заболел туберкулезом, от которого и умер

[1]) Это предсказание оправдалось (быстрее, чем я ожидал) после того, как были написаны эти строки: см. G. Shimura, On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables, *Ann. Math.*, to appear.

в 1852 г. в возрасте 29 лет. Его статьи, блистательно задуманные, писались урывками; детали прорабатывались от случая к случаю; иногда связный ход мысли прерывается, чтобы возобновиться на более поздней стадии. Время от времени Крелль позволял ему послать в печать часть статьи до ее завершения. Читателю часто приходит на ум трагическая фраза Галуа: «Je n'ai pas le temps»[1]).

Поэтому было бы нелепо идти след в след за Эйзенштейном. Рассказывая его работы, я свободно перекраивал его материал (как сделал бы он сам по более зрелом размышлении) и пользовался его собственными указаниями, как улучшить изложение, когда это не означало насилия над его образом мысли.

Здесь уместно одно общее замечание по вопросам сходимости. Во времена Эйзенштейна понятие абсолютной сходимости (в отличие от «условной») было еще сравнительно новым. По словам Эйзенштейна, сам он узнал об абсолютной сходимости из статьи Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии и аккуратно пользовался ею всюду, где это необходимо. Например, начало его статьи, обсуждаемой здесь, посвящено доказательству сходимости ряда

$$\sum (n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_\nu^2)^{-\sigma}$$

при $\sigma > \nu/2$, а также более общих рядов такого типа. В наши дни все это общеизвестно и не нуждается в повторении. С другой стороны, равномерная сходимость не была известна Эйзенштейну. Он неявно и без доказательства принимает, что вводимые им ряды аналитических функций можно дифференцировать почленно; возможно, по этой причине Вейерштрасс игнорировал его работу. На самом деле этот пробел легко восполнить. Если бы потребовать этого от Эйзенштейна, он мог бы рассуждать так. Рассмотрим в качестве типичного примера ряд $\sum (x+\mu)^{-n}$, появляющийся в его теории тригонометрических функций (гл. II). Отбросив конечное число членов, мы должны рассмотреть абсолютно сходящиеся ряды

$$f_n(x) = \sum_{\mu=M}^{+\infty} (x+\mu)^{-n} + \sum_{\mu=M}^{+\infty} (x-\mu)^{-n} \qquad (n \geqslant 2),$$

$$f_1(x) = \sum_{\mu=M}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+\mu} + \frac{1}{x-\mu} \right),$$

[1]) «У меня не осталось времени». — *Прим. перев.*

где $M > 1$ — целое число. Пусть $f(x)$ — любой из этих рядов, $\varphi_\mu(x)$ — его μ-й член. Разложим $\varphi_\mu(x+y)$ по биномиальной формуле в степенной ряд по y:

$$\varphi_\mu(x+y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \varphi_{\mu,m}(x)\, y^m.$$

Тривиальная оценка показывает, что двойной ряд $\sum_{\mu,m} \varphi_{\mu,m}(x)\, y^m$ абсолютно сходится при $|x| \leqslant M-1$, $|y| < 1$. Следовательно, мы можем написать

$$f(x+y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \Bigl(\sum_\mu \varphi_{\mu,m}(x)\Bigr) y^m.$$

Но коэффициент при y^m, с точностью до очевидного постоянного множителя, совпадает с рядом, который получается из $f(x)$ m-кратным почленным дифференцированием. Это оправдывает допущения Эйзенштейна. В дальнейшем все подобные проблемы мы обходим молчанием.

глава II

Тригонометрические функции

§ 1. Как показал Эйзенштейн, его метод построения эллиптических функций прекрасно работает в более простом случае тригонометрических функций. Сверх того, этот случай не только служит поучительным введением в теорию Эйзенштейна, но и доставляет простейшие доказательства ряда фактов, открытых Эйлером и нужных для дальнейшего.

Метод основан на рассмотрении рядов вида

$$\varepsilon_n(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (x+\mu)^{-n},$$

где $n \geqslant 1$ — целое число. Случай $n > 1$ не требует объяснений. Чтобы работать с $n = 1$, введем символ $\sum_e$ («суммирование по Эйзенштейну» однократных рядов), который определяется формулой

$$\sum_{\mu} {}_e = \lim_{M \to +\infty} \sum_{\mu=-M}^{+M}.$$

После этого определим ряд ε_1 как

$$\varepsilon_1(x) = \sum_{\mu} {}_e \frac{1}{x+\mu}.$$

Поскольку ряд ε_n абсолютно сходится при $n \geqslant 2$, очевидно, что для этих n функция ε_n периодична с периодом 1. То же верно для ε_1, потому что члены этого ряда стремятся к нулю при $\mu \to \pm\infty$. Дифференцируя почленно (см. последние замечания в гл. I), находим $d\varepsilon_n/dx = -n\varepsilon_{n+1}$ при всех $n \geqslant 1$.

Разлагая $(x+\mu)^{-n}$ при $n \geqslant 1$, $\mu \neq 0$, $|x| < 1$ в степенной ряд по x, получаем для функции $\varepsilon_n(x) - x^{-n}$ ряд, сходящийся при $|x| < 1$. Для $n = 1$ он имеет вид

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_{m=1}^{+\infty} \gamma_m x^{m-1},$$

где $\gamma_m = 0$ при нечетных m и

$$\gamma_{2m} = 2 \sum_{\mu=1}^{+\infty} \mu^{-2m}.$$

Дифференцируя $n-1$ раз, получаем

$$\varepsilon_n(x) = \frac{1}{x^n} + (-1)^n \sum_{m=1}^{+\infty} \binom{2m-1}{n-1} \gamma_{2m} x^{2m-n},$$

где «биномиальные коэффициенты» $\binom{2m-1}{n-1}$ равны нулю при $2m < n$. Очевидно, функция $\varepsilon_n(x)$ четна или нечетна по x в зависимости от четности или нечетности n. Для каждого $n \geqslant 1$ коэффициент γ_n совпадает со значением $\varepsilon_n(x) - x^{-n}$ при $x = 0$.

§ 2. Следующей вопрос: как получить нелинейные соотношения между функциями ε_n? Для Эйзенштейна отправной точкой служат тождества с рациональными функциями. Возьмем две независимые переменные p, q и положим $r = p + q$. Деля на pqr, получаем

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}. \tag{1}$$

Более общо, для целых чисел m, $n \geqslant 1$ имеем

$$\frac{1}{p^m q^n} = \sum_{h=0}^{m-1} \frac{n(n+1)\ldots(n+h-1)}{h!\,p^{m-h} r^{n+h}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m(m+1)\ldots(m+k-1)}{k!\,q^{n-k} r^{m+k}}. \tag{2}$$

Это тождество можно вывести из (1), дифференцируя $m-1$ раз по p и $n-1$ раз по q. Можно также рассматривать (2) как разложение $p^{-m}(r-p)^{-n}$ на простые дроби, считая это выражение рациональной функцией от p, а r константой. При $m = n = 2$ получаем

$$\frac{1}{p^2 q^2} = \frac{1}{p^2 r^2} + \frac{1}{q^2 r^2} + \frac{2}{pr^3} + \frac{2}{qr^3}. \tag{3}$$

Положим в (3) $p = x + \mu$, $q = y + \nu - \mu$, а также $z = x + y$; тогда $r = z + \nu$. Применим к (3) «суммирование по Эйзенштейну» по μ, считая ν постоянным. Получим

$$\sum_{\mu}{}_e (p^{-2}q^{-2} - p^{-2}r^{-2} - q^{-2}r^{-2}) = 2r^{-3}[\varepsilon_1(x) + \varepsilon_1(y + \nu)].$$

Здесь можно заменить $\varepsilon_1(y+\nu)$ на $\varepsilon_1(y)$, а $\sum_e$ на $\sum$, ибо ряд абсолютно сходится. Теперь суммирование по ν приводит к тождеству

$$\varepsilon_2(x)\,\varepsilon_2(y) - \varepsilon_2(x)\,\varepsilon_2(z) - \varepsilon_2(y)\,\varepsilon_2(z) = 2\varepsilon_3(z)[\varepsilon_1(x) + \varepsilon_1(y)], \tag{4}$$

потому что все нужные ряды абсолютно сходятся. Это — формула сложения для функций ε.

§ 3. При данном нецелом значении x обе части (4) как функции от y имеют двойной полюс при $y = 0$. Разложив их в степенные ряды по y, немедленно получаем, что коэффициенты при y^{-2} и y^{-1} в обеих частях одинаковы. Сравнение постоянных членов дает:

$$3\varepsilon_4(x) = \varepsilon_2(x)^2 + 2\varepsilon_1(x)\,\varepsilon_3(x). \tag{5}$$

Аналогично, при данном x рассмотрим обе части (4) как функции от z и разложим их в ряд вблизи $z = 0$. Сравнивая постоянные члены, находим

$$\varepsilon_2(x)^2 = \varepsilon_4(x) + 2\gamma_2\varepsilon_2(x). \tag{6}$$

Поэтому $\varepsilon_1\varepsilon_3 = \varepsilon_2^2 - 3\gamma_2\varepsilon_2$. Дифференцируя, получаем $\varepsilon_2\varepsilon_3 - 2\gamma_2\varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_4$. Сравнение с (6) показывает, что $\varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2$. Подставив $\varepsilon_1\varepsilon_2$ вместо ε_3 в формулу для $\varepsilon_1\varepsilon_3$ и разделив на ε_2, находим $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2 - 3\gamma_2$. Так как $\varepsilon_2 = -d\varepsilon_1/dx$, отсюда следует, что ε_1 есть решение дифференциального уравнения $dX/dx = -X^2 - 3\gamma_2$, бесконечное при $x = 0$. Как хорошо известно, отсюда следует, что $\varepsilon_1(x) = \pi \operatorname{ctg} \pi x$.

§ 4. Интереснее, однако, сделать вид, что мы ничего не знаем о тригонометрических функциях, и определить котангенс с помощью этого дифференциального уравнения. Точнее, положим $a = (3\gamma_2)^{-1/2}$, $a > 0$. Из вышесказанного следует, что $u \to a\varepsilon_1(au)$ есть решение дифференциального уравнения $dv/du = -u^2 - 1$ с периодом a^{-1}. Очевидно, любые два его решения могут отличаться лишь сдвигом по u, так что имеется единственное решение с полюсом при $u = 0$. Если *определить* котангенс как это решение и *определить* π как его период, мы можем написать $\varepsilon_1(x) = \pi \operatorname{ctg} \pi x$ и $\gamma_2 = \pi^2/3$.

После этого элементарную теорию тригонометрических функций можно развивать несколькими способами. Следует либо пользоваться уже выведенными формулами, либо получать дальнейшие тождества с тригонометрическими функциями из тождеств с рациональными функциями, пользуясь методом, описанным в § 2. Рассмотрим, например, формулу сложения для котангенса:

$$2\varepsilon_1(x+y)\,[\varepsilon_1(x)+\varepsilon_1(y)] = [\varepsilon_1(x)+\varepsilon_1(y)]^2 - \varepsilon_2(x) - \varepsilon_2(y). \tag{7}$$

Эйзенштейн доказывает ее так. Заметим прежде всего, что для любого целого числа ν

$$\varepsilon_1(x)+\varepsilon_1(y) = \sum_{\mu}\left(\frac{1}{x+\mu}+\frac{1}{y+\nu-\mu}\right), \tag{8}$$

где ряд абсолютно сходится. Положим

$$z = x+y,\ p = x+\mu,\ q = y-\mu,\ p' = x+\mu-\nu,\ q' = y+\nu-\mu$$

и применим (1) к p, q' и p', q. Получим

$$\frac{1}{pq'}+\frac{1}{p'q} = \frac{1}{p+q'}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}\right)+\frac{1}{p'+q}\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right).$$

Эту формулу можно рассматривать как разложение на простые дроби левой части как функции от x при постоянных z, μ, ν. Обозначим правую часть буквой A. Аналогично, применив (1) к p, $-p'$ и затем к q, $-q'$, получим при $\nu \neq 0$

$$\frac{1}{pp'}+\frac{1}{qq'} = \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}\right).$$

Обозначим правую часть через B_ν и положим $B_0 = p^{-2}+q^{-2}$. Тогда

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}\right) = A + B_\nu.$$

Просуммируем это тождество по μ при постоянном ν, затем просуммируем результат по ν по Эйзенштейну. В первом суммировании ряды абсолютно сходятся. Сверх того, в левой части даже двойной ряд по (μ, ν) абсолютно сходится. Поэтому слева можно суммировать по μ и $\mu-\nu$ независимо, что в силу (8) приведет к результату

$$[\varepsilon_1(x)+\varepsilon_1(y)]^2.$$

Суммирование выражений A даст левую часть (7), суммирование B_0 даст последние два члена (7), а суммирование B_ν при $\nu \neq 0$ даст нуль. Это доказывает (7).

Другой вариант состоит в рассмотрении формулы

$$\varepsilon_1(z-x)\,[\varepsilon_2(x)-\varepsilon_2(z)] - \varepsilon_1(x)\,\varepsilon_2(z) - \varepsilon_1(z)\,\varepsilon_2(x) = 0, \tag{9}$$

которая тривиально эквивалентна (7) в силу тождества $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2 + \pi^2$ из § 3. Положим $y = z - x$ и обозначим через $f(x, y)$ левую часть (9). Тогда (4) показывает, что $\partial f/\partial y = 0$, так что вместо $f(x, y)$ можно писать просто $f(x)$. Но левая часть (9) симметрична по x, z, так что $f(x) = f(z)$ при всех x, z; значит, f есть константа. При замене x, z на $-x$, $-z$ левая часть (9) меняет знак, так что f нечетна. Поэтому $f = 0$, что снова доказывает (7).

§ 5. Отметим еще, что § 3 статьи Эйзенштейна содержит краткие указания на гораздо более общие тригонометрические тождества, которые можно вывести его методом из соответствующих тождеств для рациональных функций и которые в свою очередь можно использовать для отыскания соотношений между эллиптическими функциями. Попутно отмечена формула

$$\frac{1}{\sin u} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{u}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{u+\pi}{2},$$

которую можно переписать в виде

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{1+x}{2}\right) = \sum\nolimits_e \frac{(-1)^\nu}{x+\nu}. \qquad (10)$$

Этот ряд можно положить в основу *определения* синуса. Из (7) вытекает формула

$$2\varepsilon_1(2x)\,\varepsilon_1(x) = 2\varepsilon_1(x)^2 - \varepsilon_2(x) = \varepsilon_1(x)^2 - \pi^2.$$

Подставив в нее последовательно $\frac{x}{2}$ и $\frac{1+x}{2}$, находим, что $\varepsilon_1\left(\frac{x}{2}\right)$ и $\varepsilon_1\left(\frac{1+x}{2}\right)$ являются корнями уравнения

$$Y^2 - 2\varepsilon_1(x)\,Y - \pi^2 = 0,$$

и из (10) получаем

$$\pi/\sin \pi x = \varepsilon_2(x)^{1/2}, \qquad \varepsilon_2(x) = (\pi/\sin \pi x)^2.$$

Дифференцируя эти формулы и пользуясь тождествами § 3, находим

$$\varepsilon_1(x) = \frac{d}{dx}\log\sin \pi x. \qquad (11)$$

Если бы Эйзенштейн жил дольше и продолжил свои исследования, формула (10) и подобные ей могли бы привести его к рассмотрению более общих рядов вида $\sum \chi(\nu)\,(x+\nu)^{-n}$, где χ — некоторый характер аддитивной группы целых чисел (не обязательно конечного порядка), и соответствующих рядов в теории эллиптических функций. Как мы увидим дальше, этим, по существу, занялся Кронекер (см. гл. VII и VIII).

§ 6. Введем теперь бесконечные произведения. Начнем с предварительных замечаний. В произведении $P=\prod p_\mu$ некоторые сомножители могут обращаться в нуль. С другой стороны, мы будем переносить на произведения все определения и факты о рядах, логарифмируя почленно; поэтому во всех необходимых случаях следует отбрасывать конечное число нулевых множителей (конечность обусловлена тем, что произведение может сходиться, только если p_μ стремится к 1 при $\mu\to\pm\infty$). Под $\log p_\mu$ всегда подразумевается главная ветвь логарифма в некоторой окрестности единицы. Вне нее можно брать любую ветвь (например, для определенности, вида $\log|p_\mu|+\pi it$ с $-1\leqslant t<1$) и считать $\log 0=\infty$. Таким образом,

$$\log P=\sum \log p_\mu,$$

если произведение сходится; значение логарифма слева может лежать на любой ветви. Произведение называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum \log p_\mu$ абсолютно сходится (после исключения конечного числа членов с $p_\mu=0$). Символ $\prod_e$ отвечает $\sum_e$: согласно нашим определениям,

$$\prod_{\mu}{}_e\, p_\mu=\lim_{M\to+\infty}\prod_{\mu=-M}^{+M} p_\mu=\prod_{\mu=-M}^{+M} p_\mu\cdot\prod_{\mu=M+1}^{+\infty}(p_\mu p_{-\mu}).$$

Последнее выражение может иметь смысл, только если $p_\mu p_{-\mu}\to 1$ при $\mu\to+\infty$ (в то же время p_μ не обязаны стремиться к 1).

Таким образом, мы можем придать смысл произведению

$$P(x)=\prod_{\mu}{}'_e\left(1+\frac{x}{\mu}\right),$$

где штрих, как обычно, означает пропуск члена с $\mu=0$. По определению,

$$\log P(x)=\sum_{\mu}{}'_e\log\left(1+\frac{x}{\mu}\right).$$

В силу замечаний в конце гл. I, этот ряд можно дифференцировать почленно. Здесь, однако, Эйзенштейн ощущает необходимость в обосновании и действует, как мы могли бы действовать сегодня, дифференцируя почленно и затем интегрируя полученную формулу. Он не замечает, что этого недостаточно, не владея понятием равномерной сходимости. Как бы то ни было, он приходит к тождеству

$$\frac{d}{dx}\log P(x) = \sum\nolimits_e' \frac{1}{x+\mu} = \varepsilon_1(x) - \frac{1}{x}.$$

Из (11) следует, что $xP(x)/\sin \pi x$ есть константа; формула (10) показывает, что она равна $1/\pi$ при $x = 0$. Это дает классическое произведение Эйлера для синуса в виде

$$\sin \pi x = \pi x \prod\nolimits_e' \left(1 + \frac{x}{\mu}\right). \tag{12}$$

Из него без труда вытекает следующая формула, пригодная для нецелых значений x/u:

$$\frac{\sin \pi \dfrac{x-t}{u}}{\sin \pi \dfrac{x}{u}} = \prod_{\mu}{}_e \left(1 - \frac{t}{x + \mu u}\right). \tag{13}$$

Она понадобится нам позже.

§ 7. До сих пор нам было безразлично, работать ли с вещественными или с комплексными числами. Все рассуждения проходили в обоих случаях, кроме доказательства формулы (12): оно показывает лишь, что отношение левой и правой частей как функция вещественной переменной x равно единице на $[-1, 1]$ и постоянно в каждом интервале $[\mu, \mu+1]$. Поэтому для завершения доказательства остается лишь заметить, что правая часть периодична с периодом 2 (это очевидно).

В комплексном случае желательно вывести из предыдущих рассмотрений связь между тригонометрическими функциями и экспонентой. Эйзенштейн достигает этого, переписав формулу сложения (7) в равносильном виде

$$\varepsilon_1(x+y) = \frac{\varepsilon_1(x)\varepsilon_1(y) - \pi^2}{\varepsilon_1(x) + \varepsilon_1(y)}.$$

Введя функцию

$$\mathbf{e}(x) = \frac{\varepsilon_1(x) + \pi i}{\varepsilon_1(x) - \pi i},$$

немедленно получаем для нее формулу сложения в виде

$$\mathbf{e}(x+y) = \mathbf{e}(x)\,\mathbf{e}(y)$$

и начало разложения в нуле в виде $1 + 2\pi i x$. Поэтому $\mathbf{e}(x) = e^{2\pi i x}$, откуда следуют обычные формулы, сначала для котангенса, а затем для синуса и косинуса. Для будущих нужд отметим формулу

$$\varepsilon_1(x) = \pi i\,\frac{\mathrm{e}(x)+1}{\mathrm{e}(x)-1}. \tag{14}$$

Введя, как обычно, числа Бернулли B_m с помощью ряда

$$\frac{1}{2}\,\frac{e^v+1}{e^v-1} = \frac{1}{v} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m B_m \frac{v^{2m-1}}{(2m)!},$$

получаем ряд для $\varepsilon_1(x)$ в виде

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_{m=1}^{\infty} (2\pi)^{2m} B_m \frac{x^{2m-1}}{(2m)!}. \tag{15}$$

Пользуясь формулами из § 1, находим отсюда

$$\gamma_{2m} = 2\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{-2m} = (2\pi)^{2m} \frac{B_m}{(2m)!}. \tag{16}$$

глава III

Основные эллиптические функции

§ 1. Начиная с этого места, мы работаем с комплексными переменными. Обозначим через W некоторую решетку в комплексной плоскости. Пусть u, v — ее образующие, так что W состоит из точек вида $w = \mu u + \nu v$, где μ, ν — целые числа. Отношение v/u не вещественно, и его можно представить в виде $v/u = \delta\tau$, где $\delta = \pm 1$, а τ лежит в верхней полуплоскости. Иногда удобно писать $\delta(u, v)$ вместо δ. Положим $q = \mathbf{e}(\tau)$, где функция $\mathbf{e}$ определена в гл. II, § 7. Символом $\sqrt{q} = q^{1/2}$ всегда обозначается та ветвь, для которой $q^{1/2} = \mathbf{e}(\tau/2)$; очевидно, $|q| < 1$. Поскольку $u\bar{v} - \bar{u}v = \delta u\bar{u}(\bar{\tau} - \tau)$, мы можем записать это число в виде

$$u\bar{v} - \bar{u}v = -2\pi i\delta A, \qquad A > 0.$$

§ 2. Рассмотрим теперь ряд

$$E_n(x) = \sum_{w \in W} (x + w)^{-n}.$$

При $n \geqslant 3$ он абсолютно с одится, и никаких дополнительных объяснений не требуется. Кроме того, в силу замечаний в конце гл. I, имеем $dE_n/dx = -nE_{n+1}$.

При $n = 1$ и $n = 2$ Эйзенштейн определяет эти ряды с помощью процесса, который мы снова назовем *суммированием по Эйзенштейну*. Он зависит от выбора образующих u, v решетки W и определяется формулой

$$\sum\nolimits_e = \sum_{\nu}\nolimits_e \Big(\sum_{\mu}\nolimits_e\Big) = \lim_{N \to \infty} \sum_{\nu=-N}^{N} \Big(\lim_{M \to \infty} \sum_{\mu=-M}^{M}\Big),$$

где мы положили $w = \mu u + \nu v$. Очевидно, сумму по μ можно вычислить с помощью формул гл. II: для всех $n \geqslant 1$ имеем

$$\sum_{\mu}{}_{e} (x + w)^{-n} = u^{-n} \varepsilon_n \left(\frac{x + \nu v}{u}\right) \tag{1}$$

и, следовательно,

$$\sum{}_{e} (x + w)^{-n} = u^{-n} \varepsilon_n \left(\frac{x}{u}\right) + \\ + u^{-n} \sum_{1}^{\infty} \left(\varepsilon_n \left(\frac{x + \nu v}{u}\right) + \varepsilon_n \left(\frac{x - \nu v}{u}\right)\right). \tag{2}$$

В § 6 мы приведем более явную формулу, из которой будет ясно, что ряд (2) абсолютно сходится и (в силу замечаний в конце гл. I) его можно дифференцировать почленно. Пока приняв это на веру, определим E_n для всех $n \geqslant 1$ формулой

$$E_n(x) = \sum{}_{e} (x + w)^{-n} = \sum{}_{e} (x + \mu u + \nu v)^{-n}. \tag{3}$$

Эйзенштейн обозначает эту функцию (как и $\varepsilon_n(x)$ в теории тригонометрических функций) символом (n, x). Поскольку она зависит не только от x и решетки W, но и выбора образующих u, v этой решетки, мы при необходимости будем обозначать ее также $E_n(x; u, v)$. Если $n \geqslant 3$, можно писать $E_n(x; W)$. Из определений ясно, что функция $E_n(x)$ четна или нечетна по x в зависимости от четности или нечетности n. В частности, $E_1(-x) = -E_1(x)$.

Поскольку (3) можно дифференцировать почленно, имеем $dE_n/dx = -nE_{n+1}$ для всех $n \geqslant 1$.

§ 3. В определении суммирования $\sum_e$ можно было поменять местами μ и ν; это все равно, что поменять местами образующие u, v решетки W. Вообще, любая замена образующих W приведет к другому способу суммирования. Можно также сделать сдвиг на элемент решетки, заменив, скажем, (μ, ν) на $(\mu' + \mu_0, \nu' + \nu_0)$ и затем применив $\sum_e$ к μ', ν' вместо μ, ν. Вместо этого можно заменить x на $x + w_0$ в $E_n(x)$, где $w_0 = \mu_0 u + \nu_0 v$. Наконец, можно выбрать подрешетку $W' \subset W$ с образующими u', v' и множество R представителей для W/W' в W и применить к любой функции $f(w)$ на решетке W, например к $f(w) = (x + w)^{-n}$, метод суммирования

$$\sum_{r \in R} \left(\sum_{W'}{}_{e} f(r + w')\right) = \sum_{r \in R} \left(\sum_{\nu}{}_{e} \sum_{\mu}{}_{e} f(r + \mu u' + \nu v')\right).$$

Все эти способы дадут один и тот же ответ для абсолютно сходящихся рядов. Существенный этап теории Эйзенштейна состоит в выяснении того, чем они отличаются в применении к E_1, E_2.

Будем временно обозначать через $\sum_{e'}$ любой из этих способов суммирования, а через E'_n функцию, полученную его применением к ряду $\sum (x+w)^{-n}$. Имеем $E'_n = E_n$ для $n \geqslant 3$, потому что тогда ряд абсолютно сходится. Далее, любой такой способ суммирования совместим с почленным дифференцированием. Поэтому $dE'_1/dx = -E'_2$, $dE'_2/dx = -2E_3$. Значит, существуют такие константы A, B (не зависящие от x, но зависящие от u, v), что

$$E'_1 - E_1 = Ax + B, \qquad E'_2 - E_2 = -A. \tag{4}$$

Эйзенштейн, однако, предпочел доказать этот результат иначе (трудно сказать, произошло ли это из-за недоверия к почленному дифференцированию). Достаточно объяснить, как он вычисляет разность $E'_1 - E_1$; случай $E'_2 - E_2$ совершенно аналогичен. Заметим, что, вычисляя $E'_1 - E_1$, можно заменить конечное число членов ряда $\sum (x+w)^{-1}$ нулями. Сделаем это для всех членов с $|w| \leqslant M$ и обозначим результат символом $\sum''$ вместо $\sum$. Будем считать, что $|x| < M$. Символ $\sum'$, как обычно, обозначает пропуск члена с $\mu = \nu = 0$. Имеем, таким образом,

$$E'_1 - E_1 = \left(\sum\nolimits''_{e'} - \sum\nolimits''_{e}\right)(x+w)^{-1} =$$

$$= \left(\sum\nolimits''_{e'} - \sum\nolimits''_{e}\right)\left(\frac{1}{w} - \frac{x}{w^2} + \frac{x^2}{w^3} - \ldots\right).$$

Нетрудно убедиться, что ряд $\sum |x^n w^{-n-1}|$, распространенный на все $n \geqslant 2$ и на все w с $|w| > M$, абсолютно сходится (ибо $M > |x|$). Поэтому на все такие члены в формуле можно не обращать внимания. Восстановив теперь в сумме конечное число членов с $0 < |w| \leqslant M$, получим

$$E'_1 - E_1 = \sum\nolimits'_{e'} \frac{1}{w} - \sum\nolimits'_{e} \frac{1}{w} - x\left(\sum\nolimits'_{e'} \frac{1}{w^2} - \sum\nolimits'_{e} \frac{1}{w^2}\right).$$

Разумеется, по определению $\sum_e$, имеем $\sum'_e w^{-1} = 0$, но это может нарушаться для $\sum'_{e'}$.

§ 4. Рассмотрим теперь случай, когда $\sum_{e'}$ есть процесс суммирования, полученный применением $\sum_e$ со сдвигом в W. Как мы уже отмечали, он сводится к вычислению $E_n(x + w_0)$

для $w_0 \in W$. Поскольку все функции ε_n периодичны с периодом 1, формула (2) показывает, что все функции E_n периодичны с периодом u. С другой стороны, из формулы (1) видно, что для любого целого числа $m > 0$

$$E_1(x+mv) - E_1(x) =$$
$$= \lim_N u^{-1}\left(\sum_{N+1}^{N+m} \varepsilon_1\left(\frac{x+\nu v}{u}\right) - \sum_{-N}^{-N-1+m} \varepsilon_1\left(\frac{x+\nu v}{u}\right)\right).$$

Правую часть этой формулы мы вычислим с помощью тождества (14) гл. II, § 7, заметив, что в обозначениях § 1

$$\mathbf{e}\left(\frac{x+\nu v}{u}\right) = \mathbf{e}\left(\frac{x}{u} + \nu\,\delta\tau\right) = \mathbf{e}\left(\frac{x}{u}\right) q^{\nu\delta}.$$

Так как $|q| < 1$, это выражение стремится к нулю при $\nu\delta \to +\infty$ и к ∞ при $\nu\delta \to -\infty$. Поэтому из формулы (14) гл. II следует, что $\varepsilon_1\left(\frac{x+\nu v}{u}\right)$ стремится к $\pm \pi i$ при $\nu\delta \to -\infty$ или $+\infty$ соответственно. Следовательно,

$$E_1(x+mv) - E_1(x) = -\frac{2\pi i\delta m}{u}.$$

Разумеется, отсюда вытекает, что та же формула верна при $m \leqslant 0$. Окончательно находим

$$E_1(x+\mu u+\nu v) = E_1(x) - \frac{2\pi i\delta\nu}{u}. \tag{5}$$

Дифференцируя это тождество, получаем, что функция E_2 (и E_n для всех $n \geqslant 3$) периодична с решеткой периодов W.

§ 5. Рассмотрим теперь другие процессы суммирования, описанные в § 3. Достаточно будет разобраться с последним из них — остальные являются его частными случаями. Пусть u', v' — образующие подрешетки W' решетки W. В матричных обозначениях положим

$$(u' \;\; v') = (u \;\; v)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где a, b, c, d — целые числа и $N = ad - bc \neq 0$. В обозначениях § 1 положим $\delta' = \delta(u', v')$; тогда $\delta' = \delta \operatorname{sgn} N$. Индекс решетки W' в W равен $|N|$, так что любая система представителей R фактора W/W' в W состоит из $|N|$ элементов. Удобно раз навсегда условиться, что 0 входит в R. В частности, если $W' = W$, то $R = \{0\}$.

Применив к E_1 метод суммирования, описанный в § 3, мы получим функцию E_1', которая задается формулой

$$E_1' = \sum_{r \in R} E_1(x+r;\ u', v').$$

Согласно (4), разность $E_1' - E_1$ имеет вид $Ax + B$, и мы должны вычислить A и B. С этой целью подставим вместо x сначала $x+u$, а затем $-x$. Так как E_1 имеет период u и нечетна, получаем

$$Au = \sum_r E_1(x+u+r;\ u', v') - \sum_r E_1(x+r;\ u', v'),$$
$$2B = -\sum_r E_1(x-r;\ u', v') + \sum_r E_1(x+r;\ u', v').$$

Для любого элемента $r \in W$ можно написать $-r = r' + \omega_r'$, $r + u = r'' + \omega_r''$, где $r', r'' \in R$ и $\omega_r', \omega_r'' \in W'$. Элементы r' пробегают все R в некотором порядке; то же верно для r''. Положим теперь

$$\omega_r' = \mu_r u' + \nu_r v', \qquad \omega_r'' = \mu_r' u' + \nu_r' v'.$$

Пользуясь предыдущими формулами и формулой (5), получаем

$$Au = -\frac{2\pi i \delta'}{u'} \sum \nu_r', \qquad 2B = \frac{2\pi i \delta'}{u'} \sum \nu_r.$$

С другой стороны,

$$0 = \sum (r + r' + \omega_r) = 2 \sum r + \left(\sum \mu_r\right) u' + \left(\sum \nu_r\right) v',$$
$$0 = \sum (r'' + \omega_r'' - r - u) = \sum (\omega_r'' - u) =$$
$$= \left(\sum \mu_r'\right) u' + \left(\sum \nu_r'\right) v' - |N|\, u.$$

В последнюю формулу подставим значение u, взятое из (6). Так как $\delta' = \delta \operatorname{sgn} N$, получим

$$\sum \nu_r' = -\frac{c\delta}{\delta'}.$$

Окончательно находим

$$\sum_{r \in R} E_1(x+r;\ u', v') = E_1(x;\ u,\ v) + \frac{2\pi i \delta c x}{u u'} - \frac{\pi i \delta' \bar{\nu}}{u'}, \tag{7}$$

где число $\bar{\nu}$ определяется формулой

$$2 \sum r = \bar{\mu} u' + \bar{\nu} v'.$$

Естественно, этот результат применим также к случаю $|N| = 1$, $W' = W$, $R = \{0\}$.

§ 6. В § 2 мы отложили доказательство сходимости ряда (2); теперь мы проведем его. Положим $\zeta = x/u$, $z = \mathbf{e}(\zeta)$. Рассмотрим сначала случай $n=1$ и воспользуемся для ε_1 формулой (14) гл. II, § 7. Поскольку $v/u = \pm\tau$ и $q = \mathbf{e}(\tau)$, общий член ряда (2) можно записать в виде

$$\varepsilon_1\left(\frac{x+\nu v}{u}\right) + \varepsilon_1\left(\frac{x-\nu v}{u}\right) = \pi i\left(\frac{q^\nu z+1}{q^\nu z-1} + \frac{q^{-\nu}z+1}{q^{-\nu}z-1}\right) = -2\pi i\left(\frac{1}{1-q^\nu z} - \frac{1}{1-q^\nu z^{-1}}\right).$$

Для больших ν это выражение по абсолютной величине не превосходит $C|q|^\nu$, где C зависит от z, но не от ν. Поэтому ряд (2) абсолютно сходится. При $n \geqslant 2$ мы можем переписать (2) в виде

$$E_n(x) = u^{-n}\sum_{\nu}{}_e\, \varepsilon_n\left(\frac{x+\nu v}{u}\right) = u^{-n}\sum_{\nu}{}_e\, \varepsilon_n(\zeta+\nu\tau).$$

Покажем, что здесь суммировать по Эйзенштейну уже не обязательно, потому что ряд абсолютно сходится. В самом деле,

$$\varepsilon_n(\zeta) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\varepsilon_1(\zeta) = \frac{(-2\pi i)^n}{(n-1)!}\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Подстановка $\zeta+\nu\tau$ вместо ζ в этот ряд равносильна подстановке $q^\nu z$ вместо z при $\nu>0$ и $(q^{|\nu|}z^{-1})^{-1}$ вместо z при $\nu<0$. Пусть сначала $\nu>0$. Если ν достаточно велико, то $|q^\nu z|<1$, и мы можем рассмотреть разложение по степеням $q^\nu z$. Получим

$$\varepsilon_n(\zeta+\nu\tau) = \frac{(-2\pi i)^n}{(n-1)!}\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{1-q^\nu z}\right) = \frac{(-2\pi i)^n}{(n-1)!}\sum_{d=1}^{\infty} d^{n-1}q^{\nu d}z^d.$$

Снова для больших ν эта величина не превосходит $C|q|^\nu$ по модулю, где C зависит от z, но не от ν. Аналогичная формула имеет место для $\nu<0$. Действительно, заменив ν на $-\nu$, получим при настолько больших ν, что $|q^\nu z^{-1}|<1$:

$$\varepsilon_n(\zeta-\nu\tau) = \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}\sum_{d=1}^{\infty} d^{n-1}q^{\nu d}z^{-d}.$$

Это завершает доказательство сходимости.

§ 7. Объединяя полученные выше формулы, получаем для всех $n \geqslant 1$ следующие выражения для $E_n(x)$:

$$E_n(x) = u^{-n} \sum_{\nu=-N}^{N} \varepsilon_n(\zeta + \nu\tau) +$$
$$+ \frac{(2\pi/iu)^n}{(n-1)!} \sum_{\nu=N+1}^{+\infty} \sum_{d=1}^{+\infty} d^{n-1} q^{\nu d} \left[z^d + (-1)^n z^{-d}\right]. \tag{8}$$

Легко убедиться, что двойной ряд здесь абсолютно сходится, если N настолько велико, что $|q^{N+1}z| < 1$ и $|q^{N+1}z^{-1}| < 1$. В частности, при $|q| < |z| < |q|^{-1}$ можно взять $N = 0$.

Отсюда вытекают важные формулы для коэффициентов разложения E_1 в степенной ряд в окрестности $x = 0$. Поскольку E_1 — нечетная функция, имеем

$$E_1(x) = \frac{1}{2}\left[E_1(x) - E_1(-x)\right] = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \sum\nolimits_e' \left(\frac{1}{x+w} - \frac{1}{-x+w} \right).$$

Предположим, что $|x| < |w|$ для всех $w \in W$, кроме $w = 0$. Тогда

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - \sum\nolimits_e' \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{w^{2m}} \right).$$

Здесь частичная сумма

$$\sum_w{}' \sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{w^{2m}} = \sum_{m=2}^{\infty} \left(\sum_w{}' w^{-2m} \right) x^{2m-1}$$

абсолютно сходится. Вычитая ее из $E_1(x)$, находим, что ряд $\sum_e' w^{-2}$ имеет смысл и

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_{m=1}^{\infty} e_m x^{m-1}. \tag{9}$$

Здесь коэффициенты e_m равны нулю для нечетных m, а для четных m задаются формулами

$$e_2 = \sum\nolimits_e' w^{-2}; \quad e_{2m} = \sum\nolimits' w^{-2m} \quad (m \geqslant 2).$$

Дифференцируя, получаем для E_n степенной ряд

$$E_n(x) = \frac{1}{x^n} + (-1)^n \sum_{m=1}^{\infty} \binom{2m-1}{n-1} e_{2m} x^{2m-n}. \tag{10}$$

Коэффициент e_{2m} для всех $m \geqslant 1$ совпадает со значением $E_{2m}(x) - x^{-2m}$ при $x = 0$. Положим в (8) $n = 2m$. Если x мал, то z близок к 1, поэтому в (8) можно взять $N = 0$. При $\zeta = 0$ значение $\varepsilon_{2m}(\zeta) - \zeta^{-2m}$ равно γ_{2m} (см. формулу (16) гл. II, § 7). Следовательно, подставляя $x = 0$, $\zeta = 0$, $z = 1$ в (8), получим

$$e_{2m} = \frac{(2\pi i/u)^{2m}}{(2m-1)!}\left(\frac{(-1)^m B_m}{2m} + 2\sum_{N=1}^{\infty} \sigma_{2m-1}(N)\, q^N\right), \tag{11}$$

где $\sigma_{2m-1}(N)$ есть обычное обозначение для суммы $(2m-1)$-х степеней делителей N:

$$\sigma_{2m-1}(N) = \sum_{d \mid N} d^{2m-1}.$$

Эйзенштейн пишет $(2m, {}^*)$ и $\sum^*$ вместо наших e_{2m} и $\sum'$ соответственно. Мы будем при необходимости обозначать e_{2m} через $e_{2m}(u, v)$. Если $m \geqslant 2$, то функция $e_{2m}(u, v)$ зависит лишь от решетки W и потому может быть обозначена $e_{2m}(W)$.

§ 8. Продифференцируем формулу (7) из § 5 $n-1$ раз по x. При $n = 2$ получим

$$\sum_{r \in R} E_2(x + r;\ u',\ v') = E_2(x;\ u,\ v) - \frac{2\pi i \delta c}{uu'}, \tag{12}$$

а при $n \geqslant 3$

$$\sum_{r \in R} E_n(x + r;\ u',\ v') = E_n(x;\ u,\ v) \tag{13}$$

(тривиальное тождество, ибо в этом случае ряд абсолютно сходится). При $n = 2m$ вычтем из обеих частей x^{-n} и положим $x = 0$. Получим

$$e_2(u', v') + \sum_{r \in R'} E_2(r;\ u',\ v') = e_2(u, v) - \frac{2\pi i \delta c}{uu'}, \tag{14}$$

$$e_{2m}(u', v') + \sum_{r \in R'} E_{2m}(r;\ u',\ v') = e_{2m}(u, v) \qquad (m \geqslant 2). \tag{15}$$

Здесь мы положили $R' = R - \{0\}$ (напомним, что 0 принадлежит множеству представителей R фактора W/W' в силу наших соглашений). Для $W' = W$ формула (14) приобретает вид

$$e_2(u', v') = e_2(u, v) - \frac{2\pi i \delta c}{uu'}. \tag{16}$$

Заметим в заключение, что

$$E_2(x) - e_2 = x^{-2} + \sum\nolimits_e' [(x+w)^{-2} - w^{-2}]$$

и что ряд справа абсолютно сходится, так что $\sum_e'$ можно заменить на $\sum'$. Это $\wp$-функция Вейерштрасса, впервые введенная им в лекциях 1862 года. Функция ζ Вейерштрасса — не что иное, как $E_1(x) - e_2 x$.

глава IV

Основные соотношения и бесконечные произведения

§ 1. Основные соотношения между функциями $E_n(x)$ Эйзенштейн получает тем же методом, который он применил к тригонометрическим функциям (ср. гл. II). Однако тождество (3) гл. II, § 2 нельзя непосредственно применить к функциям E_m, введенным формулой (3) в гл. III, § 2; возникнут трудности со сходимостью. Ничто не мешает исходить из тождества (2) гл. II, § 2 с $m = n = 3$; с этого и начал Эйзенштейн. Как сам он указывал позже, можно также действовать последовательно: сначала вывести подходящее тождество для тригонометрических функций, как в гл. II, а затем уже применить его к эллиптическим функциям. Этот способ несколько проще, и мы воспользуемся им.

Как в гл. III, § 6, перепишем определение E_n в виде

$$E_n(x) = u^{-n} \sum\nolimits_e \varepsilon_n(\zeta + \nu\tau), \tag{1}$$

полагая $\zeta = x/u$, $\tau = \delta v/u$, как раньше. Для удобства ссылок перепишем также формулу (4) гл. II, § 2, заменив в ней x, y, z на ζ, ζ', $\zeta'' = \zeta + \zeta'$:

$$\varepsilon_2(\zeta)\,\varepsilon_2(\zeta') - \varepsilon_2(\zeta)\,\varepsilon_2(\zeta'') - \varepsilon_2(\zeta')\,\varepsilon_2(\zeta'') = 2\varepsilon_3(\zeta'')\,[\varepsilon_1(\zeta) + \varepsilon_1(\zeta')]. \tag{2}$$

Теперь подставим в эту формулу $\zeta + \nu\tau$ вместо ζ, $\zeta' + (\rho - \nu)\tau$ вместо ζ' и, следовательно, $\zeta'' + \rho\tau$ вместо ζ''. После этого просуммируем обе части по ν по Эйзенштейну, фиксировав ρ, и, наконец, просуммируем по ρ. В гл. III, § 6 мы убедились, что ряд (1) абсолютно сходится при $n \geqslant 2$. Поэтому во всех членах левой части (2) суммировать по ν и по ρ можно независимо; можно также суммировать по ρ и $\rho-\nu$ или по ν и $\rho-\nu$. Следовательно, переобозначив ζu, $\zeta' u$, $\zeta'' u$ через x, x', x'', мы можем записать результат двойного суммирования левой части (2) в виде

$$u^4\left[E_2(x)\,E_2(x')-E_2(x)\,E_2(x'')-E_2(x')\,E_2(x'')\right].$$

С другой стороны, применяя $\sum\limits_{\nu}{}_e$ к правой части, получаем

$$2u\varepsilon_3(\zeta''+\rho\tau)\left[E_1(x)+E_1(x'+\delta\rho v)\right].$$

С помощью формулы (5) гл. III, § 5 это выражение можно записать в виде

$$2u\varepsilon_3(\zeta''+\rho\tau)\left[E_1(x)+E_1(x')-\frac{2\pi i\rho}{u}\right].$$

Суммируя по ρ первые два члена, находим

$$2u^4E_3(x'')\left[E_1(x)+E_1(x')\right].$$

Чтобы просуммировать третий член, перепишем его в виде

$$-2\rho\varepsilon_3(\zeta''+\rho\tau)=\frac{d}{d\tau}\,\varepsilon_2(\zeta''+\rho\tau).$$

В силу формул и оценок гл. III, § 6, ряд по ρ абсолютно сходится и равен

$$-2\sum_{\rho}\rho\varepsilon_3(\zeta''+\rho\tau)=\frac{d}{d\tau}\sum_{\rho}\varepsilon_2(\zeta''+\rho\tau).$$

Теперь будем считать x, x', u, v независимыми переменными и соответственно будем понимать частные производные. Окончательно, полагая $x''=x+x'$, находим

$$E_2(x)\,E_2(x')-E_2(x)\,E_2(x'')-E_2(x')\,E_2(x'')=$$
$$=2E_3(x'')\left[E_1(x)+E_1(x')\right]+\frac{2\pi i\delta}{u}\,\frac{\partial E_2(x'')}{\partial v}\,. \qquad (3)$$

Этот результат аналогичен соответствующим формулам для тригонометрических функций и рациональных функций, отличаясь от них лишь последним членом.

§ 2. Будем теперь действовать, как в гл. II, § 3. Фиксируем x, не лежащий в решетке W. Обе части (3) как функции от x' имеют двойной полюс в точке $x'=0$. Разлагая их в ряд Лорана, убеждаемся, что члены с x'^{-2} и x'^{-1} обеих частей совпадают. Сравнивая постоянные члены, находим

$$\frac{2\pi i\delta}{u}\,\frac{\partial E_2}{\partial v}=3E_4-2E_1E_3-E_2^2. \qquad (4)$$

Аналогично, фиксировав x, рассмотрим обе части (3) как функции от x'' и разложим их в ряд Лорана вблизи $x''=0$. Сравнение постоянных членов приводит к тождеству

$$E_4 = E_2^2 - 2e_2E_2 - \frac{2\pi i\delta}{u}\frac{\partial e_2}{\partial v}. \tag{5}$$

Положим $e_2' = \partial e_2/\partial v$ и разложим обе части (5) вблизи $x=0$. Получим

$$\frac{2\pi i\delta}{u} e_2' = 5e_4 - e_2^2. \tag{6}$$

Поэтому формулу (5) можно переписать в виде

$$E_4 = (E_2 - e_2)^2 - 5e_4. \tag{7}$$

Поскольку $d^2E_2/dx^2 = 6E_4$, мы получили известное уравнение $\wp'' = 6\wp^2 - {}^1/_2 g_2$ для «функции Вейерштрасса» $\wp = E_2 - e_2$, в котором $g_2 = 60e_4$. Интегрируя его (или, как предпочитает Эйзенштейн, дифференцируя и исключая высшие производные), получаем отсюда уравнение Вейерштрасса первого порядка для $\wp$ в его каноническом виде. Эйзенштейн записывает его (за пятнадцать лет до первых лекций Вейерштрасса на эту тему) в форме

$$E_3^2 = (E_2 - e_2)^3 - 15e_4(E_2 - e_2) + 10(c - e_2e_4). \tag{8}$$

Здесь через c обозначена, по его словам, «странная константа»

$$c = -\frac{\pi i\delta}{2u}\frac{\partial e_4}{\partial v}.$$

Постоянный член в правой части (8) можно вычислить также, разложив обе части вблизи $x=0$. Тогда для него получится значение $-35e_6$. Если, в обозначениях Вейерштрасса, написать $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, это будет означать, что $g_3 = 140e_6$.

Другое важное тождество проще всего получить, проинтегрировав обе части (4) как функции от x. С точностью до постоянного слагаемого, приходим к соотношению

$$\frac{2\pi i\delta}{u}\frac{\partial E_1}{\partial v} = E_3 - E_1E_2. \tag{9}$$

Так как обе части (9) являются нечетными функциями от x, эта константа должна быть нулевой, так что формула (9) верна в том виде, в каком написана.

Как в гл. II, § 4, мы выводим из (3) формулу сложения для E_1:

$$(E_2(x) - E_2(x'))\cdot(E_1(x+x') - E_1(x) - E_1(x')) + \\ + E_3(x) - E_3(x') = 0. \tag{10}$$

Для доказательства обозначим левую часть через $F(x, x')$. Подставим в (3) вместо x, x', x'' соответственно $-x'$, x'', x и затем воспользуемся формулой (4) для исключения $\partial E_2/\partial v$. Получим

$$E_2(x') E_2(x'') - E_2(x') E_2(x'') - E_2(x'') E_2(x) +$$
$$+ 2E_3(x)(E_1(x') - E_1(x'')) - 3E_4(x) + 2E_1(x) E_3(x) + E_2(x)^2 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что левая часть совпадает с $\partial F/\partial x$, так что $F(x, x')$ не зависит от x. Так как F меняет знак при перемене местами x и x', она должна быть тождественно нулевой.

§ 3. В полной аналогии со своей теорией тригонометрических функций, Эйзенштейн вводит затем бесконечные произведения

$$f(t, x) = \prod\nolimits_e \left(1 - \frac{t}{x + w}\right), \qquad \varphi(x) = x \prod\nolimits_e' \left(1 - \frac{x}{w}\right).$$

Чтобы обосновать сходимость, скажем, φ, он замечает, что после отбрасывания x и конечного числа сомножителей с $|w| \leqslant |x|$ логарифм φ можно записать в виде

$$-\sum\nolimits_e \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (x/w)^n\right).$$

Этот двойной ряд, состоящий только из членов с $|w| > |x|$, при $n \geqslant 3$ абсолютно сходится. В случаях $n = 1$ и $n = 2$, как было показано ранее, сумма по Эйзенштейну $\sum_e$ сходится. Заметим попутно, что эти рассуждения показывают абсолютную сходимость «канонического произведения Вейерштрасса»

$$x \prod' \left(1 - \frac{x}{w}\right) \exp\left(\frac{x}{w} + \frac{x^2}{2w^2}\right),$$

которое в теории Вейерштрасса определяет σ-функцию. Пользуясь тем, что, согласно предыдущим результатам, $\sum_e' w^{-1} = 0$ и $\sum_e' w^{-2} = e_2$, получаем $\varphi = \sigma \cdot \exp(-e_2 x^2/2)$.

Будем писать $f(t, x; u, v)$ и $\varphi(x; u, v)$ вместо $f(t, x)$ и $\varphi(x)$ при необходимости.

Связь между этими функциями и E_1 очевидна: она определяется формулами

$$E_1(x) = \frac{d}{dx} \log \varphi(x), \qquad f(t, x) = \frac{\varphi(x - t)}{\varphi(x)}, \tag{11}$$
$$\varphi(t) = -[x f(t, x)]_{x=0}.$$

Согласно определению $\prod_e$, мы можем написать

$$f(t, x) = \prod_{\nu}{}_e \prod_{\mu}{}_e \left(1 - \frac{t}{x + \mu u + \nu v}\right). \qquad (12)$$

Из формулы (13) гл. II, § 6 следует, что внутреннее произведение равно

$$P_\nu = \frac{\sin \pi \dfrac{x - t + \nu v}{u}}{\sin \pi \dfrac{x + \nu v}{u}}.$$

Положим, как прежде, $\tau = \delta v/u$, $\zeta = x/u$, $q = \mathbf{e}(\tau)$, $z = \mathbf{e}(\zeta)$. Пусть, далее, $\zeta^* = (x - t)/u$, $z^* = \mathbf{e}(\zeta^*)$ и для всех $\nu \geqslant 1$

$$A_\nu = 1 - q^\nu z, \quad B_\nu = 1 - q^\nu z^{-1}, \quad A_\nu^* = 1 - q^\nu z^*, \quad B_\nu^* = 1 - q^\nu z^{*-1}.$$

Тривиальное вычисление показывает, что

$$P_0 = (z^{*1/2} - z^{*-1/2})/(z^{1/2} - z^{-1/2}), \quad P_\nu P_{-\nu} = A_\nu^* B_\nu^* / A_\nu B_\nu \quad (\nu \geqslant 1).$$

Это наводит на мысль ввести абсолютно сходящееся произведение

$$X_q(z) = (z^{1/2} - z^{-1/2}) \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - q^\nu z)(1 - q^\nu z^{-1}), \qquad (13)$$

где, как условлено выше, мы положим $z^{1/2} = \mathbf{e}(\zeta/2)$. Тогда

$$f(t, x) = X_q(z^*)/X_q(z).$$

При $x = 0$, $z = 1$ бесконечное произведение (13) принимает значение $P(q)^2$, где

$$P(q) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - q^\nu). \qquad (14)$$

Первый множитель в (13) имеет разложение

$$\mathbf{e}(x/2u) - \mathbf{e}(-x/2u) = 2\pi i x/u + \ldots .$$

Теперь из (11) немедленно следует формула

$$\varphi(x) = \frac{u}{2\pi i} \frac{X_q(z)}{P(q)^2}. \qquad (15)$$

§ 4. Данное в § 3 доказательство сходимости бесконечных произведений в определении $f(t, x)$ показывает, что функция

$$\log f(t, x) + t \sum\nolimits_e (x + w)^{-1} + \frac{t^2}{2} \sum\nolimits_e (x + w)^{-2}$$

не меняется при замене $\sum_e$ одним из методов суммирования, описанных в гл. III, § 3. Поэтому из формул гл. III, § 4—5 вытекают соответствующие формулы для $f(t, x)$.

Рассмотрим, в частности, формулу (7) гл. III, § 5 и результат ее дифференцирования. Он выглядит так:

$$\prod_{r \in R} f(t, x+r; u', v') = f(t, x; u, v)\, \mathbf{e}\left(\frac{\delta c}{2uu'}(t^2 - 2xt) + \frac{\delta' \bar{v} t}{2u'}\right). \tag{16}$$

Умножим это тождество на x и положим $x=0$. В силу (11) получаем

$$\varphi(t; u', v') \prod_{r \in R'} f(t, r; u', v') = \varphi(t; u, v)\, \mathbf{e}\left(\frac{\delta c t^2 + \delta' \bar{v} t u}{2uu'}\right), \tag{17}$$

где, как прежде, мы положили $R' = R - \{0\}$.

Рассмотрим частный случай: $ad - bc = 1$, т. е. (a, b, c, d) принадлежит модулярной группе. Тогда $W' = W$ и $R' = \varnothing$. Чтобы упростить обозначения, положим $\delta = 1$, так что $\tau = v/u$. Пусть

$$\tau' = \frac{v'}{u'} = \frac{d\tau + b}{c\tau + a}, \quad q' = \mathbf{e}(\tau'), \quad \zeta' = \frac{x}{u'} = \frac{\zeta}{c\tau + a}, \quad z' = \mathbf{e}(\zeta').$$

Заменив в (17) t на x и подставив вместо φ формулу (15), находим

$$X_{q'}(z') = X_q(z) \cdot (c\tau + a)^{-1} \frac{P(q')^2}{P(q)^2}\, \mathbf{e}\left(\frac{c\zeta\zeta'}{2}\right). \tag{18}$$

§ 5. Чтобы получить соответствующий результат для $f(t, x)$, можно также воспользоваться формулой (5) гл. III. Однако с помощью бесконечного произведения для X_q можно вывести более точное тождество. Действительно, замена x на $x+u$ всего лишь меняет знак $z^{1/2}$ и, следовательно, $X_q(z)$. С другой стороны, замена x на $x+v$ приводит к замене z на $q^\delta z$. Теперь нетрудно вычислить $X_q(q^\nu z)$ для любого ν, заметив, что абсолютно сходящиеся произведения для $X_q(z)$ и $X_q(q^\nu z)$ различаются только конечным числом множителей. Легкое вычисление показывает, что

$$X_q(q^\nu z) = q^{-\nu^2/2}(-z)^{-\nu} X_q(z). \tag{19}$$

Принимая во внимание тождество (15), получаем

$$\varphi(x + \mu u + \nu v) = (-1)^{\mu+\nu} \varphi(x)\, \mathbf{e}\left(-\delta\nu \frac{x}{u} - \delta\nu^2 \frac{v}{2u}\right). \tag{20}$$

Вместе с формулой (11) это дает нам другое доказательство формулы (5) гл. III или по крайней мере другой вариант доказательства.

§ 6. По словам Эйзенштейна, он «по недостатку места» не включил в свою работу изложение связей между «тэта-рядами» и бесконечными произведениями. Как считал Дирихле, открытие этих связей было, возможно, самым значительным достижением Якоби. Мы восполним здесь это упущение.

Любое абсолютно сходящееся произведение $\prod(1+a_n)$ можно разложить в абсолютно сходящийся ряд, просто перемножив его члены. Это элементарное рассуждение восходит, кажется, к Эйлеру; применив его к $X_q(z)$, получим разложение

$$X_q(z)=z^{1/2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{\nu=0}^{+\infty}C_{n,\nu}q^{\nu}z^{n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n(q)\,z^{n+1/2},$$

абсолютно сходящееся при $|q|<1$, $z\neq 0$, где $C_{n,\nu}$ — целые рациональные числа, а $F_n(q)$ — степенные ряды по q, абсолютно сходящиеся при $|q|<1$. Применив к этому ряду тождество (19), получим

$$F_{n+\nu}(q)=(-1)^{\nu}F_n(q)\,q^{(\nu^2+\nu+2n\nu)/2}.$$

Положим $F_0=F$. Тогда

$$X_q(z)=F(q)\,T(q,z),\qquad T(q,z)=z^{1/2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{(n^2+n)/2}z^n. \tag{21}$$

Остается вычислить $F(q)$. Формула (13) показывает, что $F(0)=1$.

В своих Fundamenta Якоби доказал, что $F(q)=P(q)^{-1}$. Следуя Кронекеру, это можно установить, выведя формулу

$$T(q^4,q^2)=T(q,iq^{1/2})\,\mathbf{e}\left(\frac{1}{8}-\frac{3\tau}{4}\right)$$

и затем выразив в ее обеих частях T через X_q с помощью (21). Результат показывает, что функция $F(q)P(q)$ не меняется при замене q на q^4. Так как она представляется степенным рядом по q, начинающимся с 1 и сходящимся при $|q|<1$, она тождественно равна 1.

§ 7. Возможно, поучительнее вывести тот же результат, пользуясь уравнениями в частных производных параболического типа для E_1 и T. Формула (9) § 2 имеет как раз такой вид, потому что $\partial E_1/\partial x=-E_2$, $\partial E_2/\partial x=-2E_3$. Соответствующие уравнения для тэта-рядов, вроде $T(q,z)$, хорошо известны. Еще до Якоби тэта-ряды ввел в математическую литературу Фурье в своих работах по уравнению теплопроводности.

Как выше, мы рассматриваем x, u, v в качестве независимых переменных, точнее, для ближайших целей, мы считаем u постоянным параметром, а x, v независимыми переменными. Частные производные понимаются соответственно. Из формулы (11) получаем

$$E_2 - E_1^2 = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad E_3 - E_1E_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right).$$

Тождество (9) из § 2 можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{4\pi i\delta}{u\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = 0.$$

Поэтому выражение в скобках должно совпадать со своим значением при $x = 0$. Так как первое слагаемое равно $E_1^2 - E_2$, а разложения E_1 и E_2 начинаются с $x^{-1} - e_2x + \ldots$, $x^{-2} + e_2 + \ldots$ соответственно, его значение в нуле равно $-3e_2$. Второй член в нуле обращается в нуль, ибо $x^{-1}\varphi(x)$ в нуле равен 1. Поэтому

$$\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{4\pi i\delta}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = -3e_2.$$

Выразим теперь φ через $T(q, z)$ с помощью формул (15) и (21) и заметим, что $T(q, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{4\pi i\delta}{u}\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\pi^2}{u^2}T = 0.$$

Тогда получим

$$\frac{4\pi i\delta}{u}\frac{\partial}{\partial v}\log\left(FP^{-2}\right) = 3e_2 - \frac{\pi^2}{u^2}. \tag{22}$$

Из определения $P(q)$ сразу же получаем

$$\frac{\partial}{\partial v}\log P(q) = \frac{2\pi i\delta}{u}q\frac{d}{dq}\log P(q) = -\frac{2\pi i\delta}{u}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\nu q^\nu}{1-q^\nu}.$$

Сравнивая правую часть этой формулы с тождеством (11) гл. III, § 7 (при $m = 1$), находим, что этот же ряд фигурирует в формуле для e_2. Поскольку мы уже установили, что $\gamma_2 = \pi^2/3$, т. е. $B_1 = {}^1/_6$, отсюда вытекает, что

$$e_2 = \frac{\pi^2}{3u^2} + \frac{8\pi^2}{u^2}q\frac{d}{dq}\log P(q) = \frac{\pi^2}{3u^2} - \frac{4\pi i\delta}{u}\frac{\partial}{\partial v}\log P(q) =$$
$$= -\frac{4\pi i\delta}{u}\frac{\partial}{\partial v}\log\left(q^{1/24}P(q)\right). \tag{23}$$

Подставив в (22) вместо e_2 второе из этих значений, мы убеждаемся, что FP^{-2} может лишь постоянным множителем отличаться от P^{-3}. Но так как F и P обращаются в 1 при $q = 0$, этот множитель равен 1. Мы снова доказали, таким образом, что $F = P^{-1}$.

§ 8. По традиции функция $q^{1/24}P(q)$, фигурирующая в (23), обозначается $\eta(\tau)$, где $q = \mathbf{e}(\tau)$, как всегда. Поэтому

$$e_2 = -\frac{4\pi i}{u^2}\frac{d}{d\tau}\log\eta(\tau), \qquad \eta(\tau) = P(\mathbf{e}(\tau))\,\mathbf{e}\left(\frac{\tau}{24}\right). \tag{24}$$

Формула преобразования (14) гл. III, § 8 позволяет теперь получить формулу преобразования для η. Как в § 4, выберем элемент модулярной группы (a, b, c, d), примем $\delta = 1$ и сохраним прежние обозначения. Имеем $d\tau'/d\tau = (u/u')^2$. Учитывая это, мы можем переписать формулу (14) гл. III в виде

$$\frac{d}{d\tau}\log\frac{\eta(\tau')}{\eta(\tau)} = \frac{1}{2}\,\frac{c}{c\tau + a}.$$

Ее правая часть является логарифмической производной от $(c\tau + a)^{1/2}$. Поэтому $\eta(\tau')/\eta(\tau)$ может отличаться от $(c\tau + a)^{1/2}$ только постоянным множителем. Обозначим этот множитель через ε_A, где $A = (a, b, c, d)$. Таким образом,

$$\eta\left(\frac{d\tau + b}{c\tau + a}\right) = \varepsilon_A\eta(\tau)\cdot(c\tau + a)^{1/2}. \tag{25}$$

Для определенности $(c\tau + a)^{1/2}$ будет обозначать ту ветвь квадратного корня, у которой вещественная часть положительна. Позже мы получим несколько более точный результат. Множители ε_A полностью вычислил Дедекинд; вероятно, поэтому η часто называют «функцией Дедекинда». Для $A = (0, -1, 1, 0)$ множитель ε_A можно определить, подставив в (25) i вместо τ. Так как η нигде не обращается в нуль, это дает $\varepsilon_A = i^{-1/2}$, так что

$$\eta(-1/\tau) = \eta(\tau)(\tau/i)^{1/2}.$$

Объединяя (25) и (18), мы приходим к формуле преобразования для тэта-функции. Как заметил уже Якоби, удобно ввести видоизмененную функцию $i^{-1}q^{1/8}T(q, z)$, считая ее аргументами ζ и τ. Следуя Кронекеру [1]), положим

$$\theta(\zeta, \tau) = i^{-1}q^{1/8}T(q, z) = \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathbf{e}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\frac{\tau}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)\right). \tag{26}$$

[1]) По типографским причинам мы пользуемся знаком θ вместо кронекеровского ϑ. Обозначения Якоби незначительно отличаются. Буквой θ пользуется Жордан в гл. VII второго тома своего «Курса анализа». По-видимому, немногие знают, что эта глава доставляет, пожалуй, лучшее из существующих классических изложений теории эллиптических и модулярных функций.

Эта функция удовлетворяет более простому уравнению, чем T:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\zeta^2}=4\pi i\,\frac{\partial\theta}{\partial\tau}.$$

Формула преобразования для нее также выглядит проще; она немедленно следует из (18), (21) и (25):

$$\theta(\zeta',\tau')=\varepsilon_A^3\,\theta(\zeta,\tau)\,\mathbf{e}\left(\frac{c\zeta\zeta'}{2}\right)\cdot(c\tau+a)^{1/2}. \tag{27}$$

Здесь, как и выше, $A=(a,b,c,d)$ берется из модулярной группы, и мы положили

$$\tau'=\frac{d\tau+b}{c\tau+a},\qquad \zeta'=\frac{\zeta}{c\tau+a}.$$

В частном случае $\tau'=-1/\tau$ мы нашли, что $\varepsilon_A=i^{-1/2}$. В терминах θ-функции это приводит к формуле, которая обычно устанавливается применением «формулы суммирования Пуассона». Стоит отметить, что данное здесь доказательство, следующее Эйзенштейну, по-видимому, существенно отличается от стандартного и доставляет более общий результат.

§ 9. Теперь уже нетрудно получить большую часть классических формул теории (а, возможно, и все такие формулы). Не претендуя на полноту, рассмотрим некоторые примеры.

Самые простые тождества получатся, если исходить из основного результата § 5—6: формулы

$$T(q,z)=P(q)\,X_q(z).$$

Ее следует продифференцировать по z и подставить в результат $z=1$ или рассмотреть значения обеих частей при $z=-1$, $\pm q^{-1/2}$ или $q^{1/3}$. Как мы уже отмечали, $dX_q(z)/dz$ принимает при $x=0$, $z=1$ значение $P(q)^2$. Поэтому

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n(2n+1)\,q^{(n^2+n)/2}=P(q)^3. \tag{27}$$

Обозначим общее значение левой и правой части через T_0. При $z=-1$ получаем

$$T_1=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q^{(n^2+n)/2}=P(q)\prod_{1}^{\infty}(1+q^{\nu})^2=P(q^2)^2\,P(q)^{-1}. \tag{28}$$

Аналогично, для $z=\pm q^{-1/2}$ и $z=q^{1/3}$ находим

$$T_2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2/2}=P(q)\prod_0^\infty(1-q^{\nu+1/2})^2=P(q^{1/2})^2P(q)^{-1}, \tag{29}$$

$$T_3=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q^{n^2/2}=P(q)\prod_0^\infty(1+q^{\nu+1/2})^2=P(q)^5P(q^2)^{-2}P(q^{1/2})^{-2}, \tag{30}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n+1}q^{(n+1)(3n+2)/6}=P(q^{1/3}). \tag{31}$$

Последняя формула (с x^3 вместо q) была открыта Эйлером в 1740 г. и доказана им в 1750 г.

§ 10. Тождества другого типа можно получить, подставив $x+x'$ вместо x' в формулу сложения (10) § 2 и выразив E_1 в этой формуле через φ с помощью (11) § 3. Результат можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\varphi(2x+x')}{\varphi(x)^2\varphi(x+x')^2}=\frac{\partial}{\partial x}\log[E_2(x)-E_2(x+x')].$$

Поэтому функции под знаком логарифмической производной в обеих частях могут различаться только множителем вида $f(x')$. Чтобы вычислить этот множитель, рассмотрим разложения вблизи $x=0$ и сравним члены с x^{-2}. Они равны соответственно $\varphi(x')^{-1}x^{-2}$ и x^{-2}, так что $f(x')=\varphi(x')^{-1}$. Поэтому

$$\frac{\varphi(2x+x')\varphi(x')}{\varphi(x)^2\varphi(x+x')^2}=E_2(x)-E_2(x+x'). \tag{32}$$

Более симметричное тождество получилось бы, если бы заменить здесь x' на $x'-x$. Можно также выразить φ через X_q или θ. Оставив эти возможности в стороне, рассмотрим лишь случай, когда $2x$ лежит в решетке периодов W. При $x\in W$ обе части (32) имеют полюс в точке x. Поэтому следует положить $x=w/2$, где $w=\mu u+\nu v\in W$, $w\notin 2W$. Пользуясь формулой (20) § 5 и заменив x' на $x-w/2$, находим, что $E_2(w/2)-E_2(x)$ отличается от функции

$$\varphi(x)^{-2}\varphi\left(x-\frac{w}{2}\right)^2 \mathrm{e}\left(-\frac{\delta\nu x}{u}\right)$$

множителем, не зависящим от x. Сравнивая разложения обеих частей вблизи $x=0$, получаем, что этот множитель равен $-\varphi(w/2)^2$. Поэтому

$$(E_2(x)-E_2(w/2))^{1/2}=-\frac{\varphi\left(x-\frac{w}{2}\right)}{\varphi(x)\,\varphi\left(\frac{w}{2}\right)}\mathrm{e}\left(-\frac{\delta\nu x}{2u}\right), \tag{33}$$

где ветвь корня слева определяется тем, что ее разложение вблизи $x=0$ начинается с x^{-1}.

Подставив в формулу (33) $w'/2$ вместо x, где $w' \in W$, $w' \notin 2W$, мы обнаруживаем, что величины

$$(E_2(w'/2) - E_2(w/2))^{1/2}$$

выражаются через величины $\varphi(w/2)$, или, что то же самое, ввиду формулы (20) § 5, через величины $\varphi\left(\frac{u}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{v}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{u \pm v}{2}\right)$. В свою очередь формула (15) § 3 позволяет выразить последние через $T(q, z)$ для $z=-1$, $z=q^{1/2}$, $z=-q^{1/2}$ соответственно. Легкие вычисления приводят к следующему результату. Положим

$$a_1 = E_2\left(\frac{u}{2}\right), \qquad a_2 = E_2\left(\frac{v}{2}\right), \qquad a_3 = E_2\left(\frac{u+v}{2}\right),$$
$$b_1 = a_3 - a_2, \qquad b_2 = a_1 - a_3, \qquad b_3 = a_1 - a_2.$$

Применим формулы (28), (29), (30) из § 9 и заметим, что их произведение приводит к тождеству

$$T_1 T_2 T_3 = P(q)^3 = T_0.$$

Тогда из (33) следует, что

$$b_1 = \frac{16\pi^2}{u^2} q^{1/2} T_1^4, \qquad b_2 = \frac{\pi^2}{u^2} T_2^4, \qquad b_3 = \frac{\pi^2}{u^2} T_3^4. \tag{34}$$

§ 11. Напомним теперь, что формулу (8) § 2 можно записать в виде

$$E_3^2 = (E_2 - e_2)^3 - 15e_4(E_2 - e_2) - 35e_6. \tag{35}$$

Правая часть является многочленом от E_2. Его корни Эйзенштейн вычислил, заметив, что E_3 — нечетная периодическая функция, так что

$$E_3\left(\frac{w}{2}\right) = E_3\left(-\frac{w}{2}\right) = -E_3\left(\frac{w}{2}\right) = 0,$$

если $w \in W$, $w \notin 2W$. Следовательно, a_1, a_2, a_3 суть корни правой части (35). Поскольку $b_i \neq 0$, отсюда следует, что

$$E_3^2 = (E_2 - a_1)(E_2 - a_2)(E_2 - a_3).$$

Дискриминант кубического многочлена справа поэтому равен

$$(b_1 b_2 b_3)^2 = 4(15e_4)^3 - 27(35e_6)^2.$$

Для удобства и по традиции эту величину умножают на 2^4 и получают классический «дискриминант» Δ. Из доказанных формул следует, что

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 2^4 3^3 5^2 \left(20e_4^3 - 49e_6^2\right) =$$
$$= \left(\frac{2\pi}{u}\right)^{12} qP(q)^{24} = \left(\frac{2\pi}{u}\right)^{12} \eta^{24}. \qquad (36)$$

Здесь e_4, e_6 и тем самым Δ зависят только от решетки периодов W. Следовательно, в формуле преобразования (25) функции η множители ε_A являются корнями из единицы степени 24. Вместо Δ мы будем при необходимости писать $\Delta(W)$ или $\Delta(u, v)$.

ГЛАВА V

Первая вариация

§ 1. Основные темы Эйзенштейна, удачно обработанные, допускают множество интересных вариаций. Как мы уже указывали (гл. I, ср. также гл. II, § 5), многие из лучших работ Кронекера состоят из таких вариаций, хотя, разумеется, Кронекер не мог не добавить к разработке эйзенштейновских мотивов и своих собственных тем. Последние будут обсуждены в гл. VII и VIII. В этой и следующей главах мы по-прежнему не будем слишком отходить от идей Эйзенштейна. Чтобы показать их широту, мы включим доказательство одного важного результата Р. М. Дамерелла[1]), в свою очередь послужившего отправным пунктом для недавней работы М. М. Вишика и Ю. И. Манина[2]).

Одно из достоинств подхода Эйзенштейна состоит в том, что он непосредственно (без обращения к теории функций комплексных переменных) доставляет много тождеств с эллиптическими функциями в той явной форме, которая удобнее всего для теоретико-числовых приложений. Начнем с нескольких дополнений к формулам, уже полученным в гл. III и IV.

Подставив в формулу (7) гл. IV, § 2 разложения в степенные ряды функций E_2, E_4 из формул (10) гл. III, § 7, мы получаем следующую рекуррентную формулу для

---

[1]) R. M. Damerell, *Acta Arithmetica*, **17** (1970), 287.
[2]) *Матем. сб.*, **95** (1974), 357—383.

коэффициентов e_{2m}:

$$\frac{1}{3}(m-3)(4m^2-1)e_{2m} = \sum_{r=2}^{m-2}(2r-1)(2m-2r-1)e_{2r}e_{2m-2r} \quad (m \geqslant 4). \quad (1)$$

Из нее видно, что все e_{2m} при $m \geqslant 2$ лежат в кольце $\mathbf{Q}[e_4, e_6]$.

Аналогично, подставив степенные ряды для E_1, E_2, E_3 в формулу (9) гл. IV, § 2, получаем

$$\frac{2\pi i\delta}{u}\,\frac{\partial e_{2m}}{\partial v} = m(2m+3)e_{2m+2} - m\sum_{r=1}^{m} e_{2r}e_{2m-2r+2} \quad (m \geqslant 1). \quad (2)$$

Индукция по λ показывает, что

$$\left(\frac{2\pi i}{u}\right)^{\lambda}\frac{\partial^{\lambda} e_{2m}}{\partial v^{\lambda}} \in \mathbf{Z}[e_2,\ e_4,\ \ldots,\ e_{2m+2\lambda}]$$

для всех $m \geqslant 1$ и $\lambda \geqslant 0$.

§ 2. Из теории аналитических функций следует, что любая мероморфная функция с решеткой периодов W, не имеющая полюсов вне W, должна быть линейной комбинацией функций E_n, $n \geqslant 2$, и единицы: это легко вытекает из теоремы Лиувилля. Значит, любой многочлен от $E_2, \ldots, E_n$ представим в таком виде. Последний результат можно непосредственно получить методами Эйзенштейна. Рассмотрим сначала функцию $E_m E_n$, $m \geqslant 3$, $n \geqslant 3$. Это произведение можно вычислить, подставив $p = x + w$, $r = w'$, $q = -x - w + w'$ в тождество (2) гл. II, § 2 и затем применив суммирования $\sum_e$ по w и $\sum'$ по w'. Так как m, $n \geqslant 3$, все ряды абсолютно сходятся, если исключить члены справа, отвечающие значениям $h = m-1$ и $h = m-2$, а также $k = n-1$ и $k = n-2$; чтобы просуммировать их, нужно применить формулу (5) гл. III, § 4. В результате получим

$$(-1)^n(E_m E_n - E_{m+n}) = \sum_{h=0}^{m-1}\binom{n+h-1}{h}E_{m-h}e_{n+h} + (-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{m+k-1}{k}E_{n-k}e_{m+k} + \frac{C}{u}\,\frac{\partial e_{m+n-2}}{\partial v},$$

где C — некоторая константа. Если r нечетно, то $e_r = 0$; следовательно, во второй сумме ненулевыми могут быть лишь члены с $(-1)^k = (-1)^m$. Как и следовало ожидать, вклады от E_1 взаимно сокращаются. Разложим это тождество в окрестности $x=0$, приравняем свободные члены и вычтем их из исходной формулы. Результат примет более удобный вид:

$$(E_m-e_m)(E_n-e_n)-(E_{m+n}-e_{m+n})=$$

$$=(-1)^n\sum_{h=1}^{m-2}\binom{n+h-1}{h}e_{n+h}(E_{m-h}-e_{m-h})+$$

$$+(-1)^m\sum_{k=1}^{n-2}\binom{m+k-1}{k}e_{m+k}(E_{n-k}-e_{n-k})+$$

$$+(-1)^m\binom{m+n}{m}e_{m+n}. \qquad (3)$$

Эта же формула оказывается верной при $m=2$, $n\geqslant 2$. Для проверки можно воспользоваться методом гл. IV, § 1, т. е. сначала вывести аналогичную формулу для функций ε_n, а затем уже перейти к E_n. Еще проще подставить x, $-x-t$ и $-t$ вместо x, x', x'' в формулу (3) гл. IV, § 1, разложить обе части по t в окрестности $t=0$ и сравнить эти разложения. При $m=n=2$ снова получится формула (7) гл. IV, § 2. Разумеется, теория аналитических функций приводит к тем же результатам.

Заметим, что e_2 входит в (3) только в комбинации E_2-e_2. Положив в (3) $m=2$, мы можем рассматривать (3) как индуктивную формулу, выражающую E_{n+2} через E_2-e_2 и функции E_m с $3\leqslant m\leqslant n$, при помощи которой в конечном счете E_{n+2} выражается через E_2-e_2 и E_3, с коэффициентами из $\mathbf{Z}[e_4, e_6, e_8, \ldots]$. С другой стороны, эта формула показывает, что функции 1, E_2-e_2, E_3, E_4, ... составляют базис в кольце, порожденном E_2-e_2 и E_3 над $\mathbf{Z}[e_4, e_6, e_8, \ldots]$.

Заметим еще, что функции E_2-e_2 и E_n для $n\geqslant 3$ и величины e_{2m} при $m\geqslant 2$ зависят только от выбора решетки W, но не от ее образующих u, v. Удобно положить

$$e(W)=\{e_4,\ e_6,\ e_8,\ \ldots\}; \qquad E(W)=\{1,\ E_2-e_2,\ E_3,\ E_4,\ \ldots\}.$$

Тогда тождество (1) показывает, что поле частных кольца $\mathbf{Z}[e(W)]$ совпадает с $\mathbf{Q}(e_4, e_6)$, а тождество (3) показывает, что $E(W)$ составляет базис кольца $\mathbf{Z}[e(W), E(W)]$ над $\mathbf{Z}[e(W)]$. Иногда по типографским соображениям мы будем писать e_W, E_W вместо $e(W)$, $E(W)$, а также просто e и E, если рассматривается фиксированная решетка W. Обратим внимание читателя на то, что в этих обозначениях e_2 не лежит в $\mathbf{Q}(e)$, а E_2 не лежит в $\mathbf{Q}(e, E)$.

§ 3. Формулы гл. III, § 8 в качестве частных случаев содержат формулы для умножения и деления аргумента эллиптических функций. Возьмем в качестве (a, b, c, d) матрицу $(N, 0, 0, N)$, где $N > 1$ — любое целое число. Тогда $W' = NW$, и в качестве R можно взять множество, состоящее из элементов вида $r = \mu u + \nu v$ с $0 \leqslant \mu, \nu < N$. Из формул (12) и (13) гл. III, § 8 находим, что при всех $n \geqslant 2$

$$\sum_{r \in R} E_n(x + r; Nu, Nv) = E_n(x; u, v).$$

Поскольку функция E_n однородна степени $-n$ по x, u, v, это дает

$$\sum_{r \in R} E_n\left(\frac{x + r}{N}\right) = N^n E_n(x). \tag{4}$$

(Мы опустили u, v для краткости.) Это — формула деления для функций E_n. Формула умножения получится, если подставить сюда Nx вместо x.

Важно заметить, что при $n = 2$ число слагаемых в левой части (4) равно N^2. Поэтому формула останется верной, если заменить E_2 на $E_2 - e_2$.

Возьмем теперь любой элемент F кольца $\mathbf{Z}[e, E]$. Как мы показали в § 2, его можно разложить по базису $E = E(W)$ с коэффициентами из $\mathbf{Z}[e]$. Поскольку каждый элемент этого базиса удовлетворяет формуле типа (4), это показывает, что сумма $\sum\limits_{r \in R} F\left(\frac{x + r}{N}\right)$ всегда лежит в кольце $\mathbf{Z}[e, E]$. Для каждой данной F ее можно вычислить явно с помощью (4).

Применив этот результат к степеням F^m с $1 \leqslant m \leqslant N^2$, мы заключаем, что функция $F\left(\frac{x}{N}\right)$ и все ее сдвиги $F\left(\frac{x + w}{N}\right)$ с $w \in W$ алгебраичны над полем $\mathbf{Q}(e, E)$ и целы над кольцом $\mathbf{Q}[e, E]$. Изучение теми же средствами группы Галуа расширения $\mathbf{Q}(e, E)$, порожденного элементами вида $F\left(\frac{x}{N}\right)$, завело бы нас слишком далеко. Как заметил уже Якоби в связи с работами Абеля, это потребовало бы введения резольвент Лагранжа для абелевых расширений поля $\mathbf{C}(e, E)$, порожденных функциями $F\left(\frac{x}{N}\right)$. Мы уже упоминали о них в конце § 5 гл. II. Более общие функции будут изучены в гл. VIII.

§ 4. Вычтем из обеих частей тождества (4) член $(N/x)^n$ и положим $x=0$. Получим

$$\sum_{r \in R'} E_n(r/N) = (N^n - 1)\, e_n. \tag{5}$$

Мы знаем, что $e_n = 0$ при нечетных n; как выше, здесь $R' = R - \{0\}$. При $n=2$ эту формулу можно переписать в виде

$$\sum_{r \in R'} (E_2(r/N) - e_2) = 0. \tag{6}$$

Возьмем снова любой элемент F кольца $\mathbf{Z}[e, E]$. Действуя, как в § 3, мы обнаруживаем прежде всего, что сумма $\sum F(r/N)$ по всем $r \in R'$ лежит в $\mathbf{Z}[e]$, а также что значение $F(w/N)$ для любого $w \in W \setminus NW$ алгебраично над полем $\mathbf{Q}(e)$ и цело над кольцом $\mathbf{Q}[e]$.

§ 5. Теперь, как в гл. III, § 5 и 8, рассмотрим общее «преобразование»

$$(u' \;\; v') = (u \;\; v)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{7}$$

с определителем $N = ad - bc$. Положим $u'' = Nu$, $v'' = Nv$ и обозначим через W, W', W'' решетки, порожденные (u, v), (u', v') и (u'', v'') соответственно. Тогда W' имеет индекс $|N|$ в W, а W'' имеет индекс $|N|$ в W'. Обозначим через S некоторую систему представителей для W'/W'' в W', содержащую нуль, и положим $S' = S - \{0\}$.

Будем обозначать через e_{2m}, e'_{2m}, e''_{2m} числа $e_{2m}(u, v)$, $e_{2m}(u', v')$ и $e_{2m}(u'', v'')$ соответственно. Так как e_{2m} однородна степени $-2m$ по u, v, имеем $e''_{2m} = N^{-2m} e_{2m}$. Формула (15) гл. III, § 8, примененная к решеткам W', W'', дает (с учетом однородности E_{2m})

$$N^{2m} e'_{2m} = e_{2m} + \sum_{s \in S'} E_{2m}(s/N) \qquad (m \geqslant 2).$$

В силу результатов § 4, это показывает, что функция e'_{2m} цела над $\mathbf{Q}[e]$. Аналогично, e''_{2m} и тем самым e_{2m} целы над $\mathbf{Q}[e']$. Более общо, пусть W_1, W_2 — две «соизмеримые» решетки. Это означает, что их пересечение имеет в каждой из них конечный индекс, или, что то же самое, $\mathbf{Q}W_1 = \mathbf{Q}W_2$. Применив доказанное только что утверждение сначала к W_1 и W_3, а затем к W_2 и W_3, получаем, что кольцо $\mathbf{Q}[e(W_1), e(W_2)]$ цело как над $\mathbf{Q}[e(W_1)]$, так и над $\mathbf{Q}[e(W_2)]$. Объединяя это замечание с результатами § 4, убеждаемся, что для любого элемента F из базиса $E(W_2)$ или всего кольца $\mathbf{Z}[e(W_2), E(W_2)]$ значения F во всех точках из $\mathbf{Q}W_2$, не лежащих в W_2, целы над кольцом $\mathbf{Q}[e(W_1)]$.

Выберем снова W и W', как выше, и возьмем любой элемент F базиса $E(W')$. Если $F=E_n(x;\, u',\, v')$, $n\geqslant 3$, то, согласно формуле (13) гл. III, § 8, имеем

$$\sum_{r\in R} F(x+r)=E_n(x;\, u,\, v).$$

Если $F=E_2(x;\, u',\, v')-e_2(u',\, v')$, аналогичный результат получается путем вычитания из тождества (12) гл. III, § 8 тождества (14) той же главы:

$$\sum_{r\in R} F(x+r)-\sum_{r\in R'} F(r)=E_2(x;\, u,\, v)-e_2(u,\, v).$$

Обозначим через f_2 вторую сумму слева. Она цела над $\mathbf{Q}[e(W)]$. Выберем теперь произвольный элемент F кольца $\mathbf{Z}[e(W'),\, E(W')]$ и разложим его по базису $E(W')$. Наши формулы показывают, что сумма $\sum F(x+r)$ по всем $r\in R$ является линейной комбинацией f_2 и элементов базиса $E(W)$ с коэффициентами из $\mathbf{Z}[e(W')]$. Поскольку это рассуждение применимо ко всем степеням F^m элемента F, а f_2 и $e(W')$ целы над $\mathbf{Q}[e(W)]$, мы нашли, что $F(x)$ и все сдвиги $F(x+w)$ с $w\in W$ целы над кольцом $\mathbf{Q}[e(W),\, E(W)]$.

§ 6. Эйзенштейн замечает, что особенно интересный случай возникает, когда $W'=\omega W$, где $\omega\in\mathbf{C}^\times$. Тогда W' порождена образующими $u'=\omega u$, $v'=\omega v$, и ω является характеристическим корнем линейного преобразования (7). Очевидно, что если ω вещественно, то ωW может быть подрешеткой W лишь в случае, когда ω — целое рациональное число. В противном случае ω должно быть целым числом некоторого мнимого квадратичного поля, и мы говорим, что W допускает комплексное умножение на ω. Это явление было открыто Абелем. Положив, как раньше, $N=ad-bc$, находим, что $N=\omega\bar{\omega}>0$. Если $\omega W=W$, $N=1$, то ω должен быть либо корнем четвертой степени из единицы (так называемый «лемнискатический» случай), либо корнем шестой степени из единицы. В той мере, в какой дело касалось прямых арифметических приложений его теории, Эйзенштейн в основном интересовался этими двумя случаями и применил свои результаты к выводу законов взаимности для четвертых и шестых степеней. Эту сторону его работы мы не будем обсуждать здесь.

Положим, как выше, $\tau = \delta v/u$. Если W допускает комплексное умножение на ω, обозначим через u', v' соответственно ωu и ωv. Пара (u', v') связана с (u, v) линейной подстановкой (7). Имеем тогда $\tau = \delta v'/u'$ и $\omega = a + c\delta\tau$, так что τ лежит в поле $k = \mathbf{Q}(\omega)$. Далее, $W = uW_1$, где решетка W_1 порождена числами 1 и τ и, значит, содержится в k. Наоборот, пусть W — такая решетка, что $v/u \in k$. В таком случае $Au^2 + Buv + Cv^2 = 0$ для подходящих целых рациональных чисел A, B, C, и W допускает комплексное умножение на $\omega = Cv/u$.

§ 7. Теперь мы покажем, что если решетка W допускает комплексное умножение, то число $e_4^3e_6^{-2}$ алгебраично над $\mathbf{Q}$; сюда формально относится и «лемнискатический случай», для которого $e_6 = 0$, $\omega = i$.

Заметим прежде всего, что любая решетка W однозначно характеризуется своими «инвариантами» $e_4(W)$, $e_6(W)$. Действительно, как мы убедились в гл. IV, § 2, функция $\wp = E_2 - e_2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'^2 = 4y^3 - 60e_4y - 140e_6.$$

Поскольку любое решение этого уравнения можно представить в виде $y = \wp(x + c)$ и поскольку $\wp$ — единственное его решение с полюсом в точке $x = 0$, W можно охарактеризовать как решетку периодов любого решения либо как решетку полюсов решения $\wp$. Отсюда следует, что если W' — другая решетка, а t — любой элемент $\mathbf{C}^\times$, то W' совпадает с tW в том и только том случае, когда

$$e_4(W') = t^{-4}e_4(W), \qquad e_6(W') = t^{-6}e_6(W).$$

Следовательно, W' имеет вид tW для некоторого $t \in \mathbf{C}^\times$ тогда и только тогда, когда «абсолютный инвариант» $e_4^3e_6^{-2}$ принимает для W и для W' одинаковые значения.

В частности, пусть W и W' связаны, как в § 5. Обозначим через ω некоторое собственное значение подстановки (7) и предположим, что оно не вещественно. Имеем $W' = \omega W$ в том и только том случае, когда $e_4' = \omega^{-4}e_4$, $e_6' = \omega^{-6}e_6$.

Если u, v произвольны, то, вообще говоря, $W' \neq \omega W$, так что либо $e_4' \neq \omega^{-4}e_4$, либо $e_6' \neq \omega^{-6}e_6$. Пусть, скажем, выполнено первое неравенство. Положим $f_4 = e_4' - \omega^{-4}e_4$; эта величина отлична от нуля. Из результатов § 5 следует, что f_4 алгебраичен над $\mathbf{Q}(e_4, e_6)$, так что существует нетривиальное соотношение $F(f_4, e_4, e_6) = 0$ с рациональными коэффициентами. Его можно записать в виде $f_4^mG(f_4, e_4, e_6) = 0$, где

G — некоторый многочлен с рациональными коэффициентами, не делящийся на f_4. Так как $f_4 \not\equiv 0$, имеем $G(f_4, e_4, e_6) = 0$ для любой решетки W. Поэтому если для какой-то решетки $f_4 = 0$, то для нее выполняется нетривиальное соотношение вида $G(0, e_4, e_6) = 0$. Учитывая, что e_4, e_6 однородны по u, v степеней соответственно -4 и -6, получаем, что величина $e_4^3 e_6^{-2}$ либо равна ∞, либо алгебраична над $\mathbf{Q}$.

§ 8. Как мы уже убедились, решетка W, допускающая комплексное умножение на ω, должна иметь вид uW_1, где W_1 — некоторая подрешетка в $k = \mathbf{Q}(\omega)$. Очевидно, при фиксированном k все такие решетки соизмеримы, и к ним можно применить результаты § 5 в сочетании с результатами § 7. К этому мы и перейдем.

Пусть k — мнимое квадратичное поле с дискриминантом $-m$. Обозначим через Ω кольцо всех целых чисел поля k. Это — решетка, и все подрешетки в k соизмеримы с ней. Выберем в Ω базис вида $(1, \tau_0)$. Можно считать, что $\operatorname{Im}(\tau_0) > 0$; кроме того, $\operatorname{Re}(\tau_0) \equiv 0$ или $\equiv 1/2 \bmod 1$ в зависимости от четности или нечетности m. Следовательно, число $q_0 = \mathbf{e}(\tau_0)$ вещественное; оно > 0 или < 0 в зависимости от четности или нечетности m.

Согласно формуле (36) гл. IV, § 11, имеем

$$\begin{gathered} \Delta(\Omega) = \Delta(1, \tau_0) = Ae_4^3 - Be_6^2 = (2\pi\eta_0^2)^{12}, \\ \eta_0 = q_0^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_0^n), \quad A = 2^6 3^3 5^3, \quad B = 2^4 3^3 5^2 7^2. \end{gathered} \tag{8}$$

Дискриминант $\Delta(\Omega)$ веществен и имеет тот же знак, что и q_0.

Удобно ввести величину

$$\varpi = 2\pi |\eta_0|^2 = 2\pi |q_0|^{1/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_0^n)^2. \tag{9}$$

Она зависит только от k, т. е. от m, и мы будем обозначать ее ϖ_m, когда нужно отметить эту зависимость явно.

Имеем $\Delta(\Omega) = \pm \varpi^{12}$. В § 7 было установлено, что число $e_4^3 e_6^{-2}$ алгебраично над $\mathbf{Q}$. Вместе с (8) это показывает, что числа $e_4 \varpi^{-4}$ и $e_6 \varpi^{-6}$ алгебраичны над $\mathbf{Q}$, или, что то же самое, числа $e_4(\varpi\Omega)$ и $e_6(\varpi\Omega)$ алгебраичны над $\mathbf{Q}$.

Пусть W_1 — некоторая подрешетка в k. Так как она соизмерима с Ω, решетка ϖW_1 соизмерима с $\varpi\Omega$. Результаты § 5 показывают, что для всех $m \geqslant 2$ числа $e_{2m}(\varpi W_1)$ алгебраичны над $\mathbf{Q}$. Более общо, пусть W — любая решетка, допускающая комплексное умножение на $\omega \in \Omega$, с образующими u, v. Как мы убедились, решетка $W_1 = u^{-1}W$ содержится в k; в частности, $v/u \in k$. С другой стороны,

$$e_{2m}(W) = (\varpi/u)^{2m} e_{2m}(\varpi W_1).$$

Таким образом, *для любой решетки с комплексным умножением на* $\omega \in \Omega$ *все числа*

$$(u/\varpi)^{2m} e_{2m}(W) \qquad (m \geqslant 2)$$

алгебраичны над $\mathbf{Q}$. В частности, если $e_4(W)$ и $e_6(W)$ алгебраичны над $\mathbf{Q}$, то этим же свойством обладают числа $\varpi^{-1}w$ для всех $w \in W$.

глава VI

Вторая вариация

§ 1. Как мы убедились в гл. IV, метод Эйзенштейна позволяет непосредственно изучать производные $\partial E_n/\partial v$, $\partial e_n/\partial v$ по образующей v; это одно из его достоинств. С помощью результатов гл. III, § 5 можно затем поменять местами u и v, получив таким образом производные по u.

На этом этапе удобно позаимствовать кое-что из техники Кронекера и ввести в теорию вещественно аналитические функции, кроме комплексно аналитических. В этой главе мы будем пользоваться ими довольно формально, в основном рассматривая многочлены от комплексно сопряженных величин $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ к x, u, v, коэффициенты которых комплексно аналитичны по x, u, v. В результате получатся формулы, с которыми удобнее работать. Причины этого вскоре станут ясны.

Как принято в вещественно аналитической теории, мы формально рассматриваем $x, u, v, \bar{x}, \bar{u}, \bar{v}$ в качестве независимых переменных и соответственно понимаем частные производные; применяя $\partial/\partial x$, $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ к функциям, которые полиномиальны или рациональны по $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$, мы рассматриваем эти последние величины как константы.

Введем дифференциальный оператор

$$\mathscr{D}=\bar{x}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial u}+\bar{v}\frac{\partial}{\partial v}. \tag{1}$$

Рассмотрим любую однородную функцию f степени $-n$ от x, u, v (например, E_n). Имеем

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}=-nf. \tag{2}$$

Следовательно, $\partial f/\partial u$ и $\mathcal{D}f$ можно выразить через f, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial v$. Поскольку $u\bar{v} - v\bar{u} \neq 0$, можно также выразить $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial v$ через f, $\partial f/\partial x$ и $\mathcal{D}f$. Преимущество оператора $\mathcal{D}$, разумеется, в том, что он инвариантен относительно группы $GL(3, \mathbf{R})$, т. е. относительно любой линейной замены x, u, v. В этой главе мы будем систематически использовать $\mathcal{D}$ вместо $\partial/\partial v$.

§ 2. Сохраним прежние обозначения; в частности, как в гл. III, § 1, будем писать

$$u\bar{v} - v\bar{u} = \delta u\bar{u}(\bar{\tau} - \tau) = -2\pi i\,\delta A, \qquad A > 0. \tag{3}$$

Очевидно, $\mathcal{D}A = 0$.

Поскольку числа u, v образуют базис $\mathbf{C}$ над $\mathbf{R}$, мы можем разложить x по этому базису: $x = \alpha u + \beta v$, где α, β вещественны. Иногда мы будем обозначать коэффициенты этого разложения $\alpha(x)$, $\beta(x)$. Имеем $\bar{x} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v}$, так что

$$\beta(x) = \frac{\bar{u}x - u\bar{x}}{2\pi i\delta A}, \qquad \mathcal{D}\beta = 0.$$

Рассмотрим, кроме E_1, функцию

$$E_1^*(x) = E_1(x) + \frac{2\pi i\delta}{u}\beta(x). \tag{4}$$

Она не комплексно аналитична по x, но этот «недостаток» компенсируется периодичностью относительно W, которая очевидна из формулы (5) гл. III, § 4.

Далее, формула (7) гл. III, § 5 показывает, что при любой замене базиса решетки W к функции $E_1(x;\,u,\,v)$ добавляется лишь линейный член. Следовательно, E_1^* можно однозначно охарактеризовать как периодическую функцию с решеткой периодов W, отличающуюся от любой из функций $E_1(x;\,u',\,v')$ на вещественно линейную добавку. Поэтому E_1^* зависит только от W, но не от выбора образующих u, v этой решетки, и мы можем обозначать ее $E_1^*(x;\,W)$. Более общо, если W' — любая подрешетка W, а R — любая система представителей W/W' в W, формула (7) гл. III, § 5 после тривиальных преобразований показывает, что

$$\sum_{r \in R} E_1^*(x + r;\,W') = E_1^*(x;\,W). \tag{5}$$

Аналогично, кроме E_2, e_2 рассмотрим функции

$$E_2^*(x) = -\frac{\partial E_1^*}{\partial x} = E_2 - \frac{\bar{u}}{Au}, \qquad e_2^* = e_2 - \frac{\bar{u}}{Au}. \tag{6}$$

Очевидно, они тоже зависят только от W, и E_2^* удовлетворяет формуле, аналогичной (5). Поскольку E_2^* отличается от E_2 лишь константой, дальнейшее дифференцирование по x приведет к прежним функциям E_n. Для формальной симметрии наших тождеств положим $E_n^* = E_n$ при всех $n \geqslant 3$.

§ 3. Поскольку функция E_1^* нечетна и периодична, она (как и функция E_3, ср. гл. IV, § 11) обращается в нуль во всех точках $^1/_2 W$, не лежащих в W. Далее, отличаясь от E_1 лишь линейным слагаемым, она удовлетворяет той же формуле сложения, что и E_1, т. е. формуле (10) гл. IV, § 2. В последней формуле мы можем также заменить E_2 на $E_2 - e_2$, с тем чтобы применить результаты гл. V, § 4. Введем теперь функцию f на $\mathbf{Q}W$, положив $f(w) = 0$ для всех $w \in W$ и $f(x) = E_1^*(x)$ для всех $x \in \mathbf{Q}W$, не лежащих в W. Тогда формула сложения, объединенная с результатами гл. V, § 4, показывает, что число $f(x + x') - f(x) - f(x')$ алгебраично над $\mathbf{Q}(e_4, e_6)$ для всех $x, x' \in \mathbf{Q}W$. Поскольку f обращается в нуль на $^1/_2 W$, отсюда следует, что значения f и тем самым также значения E_1^* алгебраичны над $\mathbf{Q}(e_4, e_6)$ во всех точках $\mathbf{Q}W$, не принадлежащих W.

Предположим теперь, что W допускает комплексное умножение на некоторое число ω. Положим $W' = \omega W$ и рассмотрим формулу для E_2^*, которая получается из (5) дифференцированием. Поскольку функция E_2^* однородна степени -2 по x, u, v и степени нуль по $\bar{u}$, $\bar{v}$, мы можем записать результат в виде

$$\omega^{-2} \sum_{r \in R} E_2^*\left(\frac{x + r}{\omega}; W\right) = E_2^*(x; W).$$

Вычтем из обеих частей x^{-2} и положим $x = 0$. Принимая во внимание, что число слагаемых в левой части равно $N = \omega\bar{\omega}$, получаем

$$\sum_{r \in R'} \left(E_2^*(r/\omega) - e_2^*\right) = \omega(\omega - \bar{\omega})\, e_2^*, \tag{7}$$

где R' имеет обычный смысл. Заметим теперь, что $E_2^* - e_2^* = E_2 - e_2$. Кроме того, след $\omega + \bar{\omega}$ является целым рациональным числом, так что $\bar{\omega}W$ содержится в W и, значит, $Nr/\omega = \bar{\omega}r$ принадлежит W. Применив результаты гл. V, § 4 к $E_2 - e_2$ и r/ω, получаем, что левая часть (7) алгебраична над полем $\mathbf{Q}(e_4, e_6)$. В частности, она алгебраична над $\mathbf{Q}$, если e_4 и e_6 алгебраичны над $\mathbf{Q}$. Учитывая, что e_2^* и E_2^* однородны степени -2 по u, v и степени нуль по $\bar{u}$, $\bar{v}$, мы можем воспользоваться последними результатами гл. V и заключить, что число $(u/\bar{\omega})^2 e_2^*(W)$ алгебраично над $\mathbf{Q}$.

§ 4. Теперь мы перейдем к изучению функций, которые получаются из E_1^* повторным применением операторов $\partial/\partial x$ и $\mathscr{D}$. Очевидно, они коммутируют. Для краткости положим $\partial_x = \partial/\partial x$. Пусть a, b — два целых числа, $b > a \geqslant 0$. Положим

$$\begin{gathered} E_{a,b}(x) = \sum_{w \in W}{}_e (\bar{x} + \bar{w})^a (x + w)^{-b} = \frac{(-1)^{b-1}}{(b-1)!} \mathscr{D}^a \partial_x^{b-a-1} E_1, \\ E_{a,b}^*(x) = \frac{(-1)^{b-1}}{(b-1)!} \mathscr{D}^a \partial_x^{b-a-1} E_1^*. \end{gathered} \tag{8}$$

Если $b \geqslant a + 3$, ряд $E_{a,b}$ абсолютно сходится, а $E_{a,b}^*$ совпадает с $E_{a,b}$. В остальных случаях $E_{a,b}^* - E_{a,b}$ легко вычисляется с помощью формул (4) и (6) из § 2. Для всех $n \geqslant 1$ функция $E_{0,n}$ совпадает с E_n, а $E_{0,n}^*$ с E_n^*.

Поскольку E_1^* однородна степени -1 по x, u, v (и степени нуль по $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$), к ней можно применить формулу (2) из § 1. С другой стороны, $\partial E_1/\partial v$ вычисляется с помощью формулы (9) гл. IV, § 2. Объединяя эти тождества с определениями E_1^* и E_2^*, получаем после несложных выкладок

$$E_{1,2}^* = -\mathscr{D}(E_1^*) = A(E_3^* - E_1^* E_2^*). \tag{9}$$

Продифференцируем эту формулу $n-1$ раз по x:

$$E_{1,n+1}^* = -\frac{1}{n}\mathscr{D}(E_n^*) = A\left(\frac{n+1}{2} E_{n+2}^* - \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{n} E_{h+1}^* E_{n-h+1}^*\right). \tag{10}$$

Индукцией по a из этого тождества находим, что $E_{a,b}^*$ для всех a, b с $b > a \geqslant 0$ представляется в виде

$$E_{a,b}^* = \frac{(A/2)^a}{(b-1)(b-2)\ldots(b-a)} P_{a,b}(E_1^*, E_2^*, E_3, \ldots, E_{a+b}), \tag{11}$$

где $P_{a,b}$ — многочлен от $a+b$ переменных степени $a+1$ с целыми рациональными коэффициентами. Далее, A и $E_{a,b}^*$ однородны степеней 1 и $-b$ соответственно по x, u, v и степеней 1 и a соответственно по $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$. Функция же E_n^* однородна степени $-n$ по x, u, v и степени нуль по $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$. Поэтому $P_{a,b}$ — «изобарический» многочлен «веса» $a+b$.

§ 5. Аналогично, для $b > a \geqslant 0$ определим $e_{a,b}$, $e^*_{a,b}$ как значения $E_{a,b} - \bar{x}^a x^{-b}$, $E^*_{a,b} - \bar{x}^a x^{-b}$ в точке $x = 0$. Тогда

$$e_{a,b} = \frac{(-1)^a}{(b-1)(b-2)\ldots(b-a)} \mathscr{D}^a(e_{b-a}).$$

Аналогичная формула имеется для $e^*_{a,b}$. Разумеется, эти величины обращаются в нуль, если разность $b - a$ нечетна.

Исходя из формулы (2) гл. V, § 1 и действуя, как прежде, в § 4, получаем

$$e^*_{1,2m+1} = -\frac{1}{2m}\mathscr{D}(e^*_{2m}) = A\left(\frac{2m+3}{2} e_{2m+2} - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} e^*_{2r} e^*_{2m-2r+2}\right),$$

откуда индукция по a позволяет вывести формулу

$$e^*_{a,b} = \frac{(A/2)^a}{(b-1)\ldots(b-a)} Q_{a,b}(e^*_2, e_4, \ldots, e_{a,b}).$$

Здесь $Q_{a,b}$ — «изобарический» многочлен степени $a+1$ и веса $a+b$ с целыми рациональными коэффициентами. Разумеется, он обращается в нуль, если $a+b$ нечетно.

§ 6. Предположим теперь, что решетка W допускает комплексное умножение на число ω. Определим k и ϖ, как в гл. V, § 8. Формула (3) § 2 показывает, что $\pi i A/u\bar{u}$ лежит в k.

Объединяя результаты § 5 с последними выводами гл. V, получаем, что числа $A^{-a}(u/\varpi)^{a+b} e^*_{a,b}$ (или $\pi^a \varpi^{-a-b} u^b \bar{u}^{-a} e^*_{a,b}$) алгебраичны над $\mathbf{Q}$.

Аналогично, объединяя результаты § 3—4 гл. V, находим, что значения функции

$$\pi^a \varpi^{-a-b} u^b \bar{u}^{-a} E^*_{a,b}(x)$$

в точках $x \in \mathbf{Q}W$, не принадлежащих W, алгебраичны над $\mathbf{Q}$.

В частности, если решетка W лежит в мнимом квадратичном поле k, то u и $\bar{u}$ лежат в этом поле. Следовательно, в этом случае величины

$$\pi^a \varpi^{-a-b} e^*_{a,b}, \qquad \pi^a \varpi^{-a-b} E^*_{a,b}(x)$$

для всех $x \in \mathbf{Q}W = k$, не лежащих в W, алгебраичны над $\mathbf{Q}$ при условии, что $b > a \geqslant 0$.

Мы можем сравнить этот вывод с теоремой Дамерелла, цитированной в гл. V, § 1. Теорема Дамерелла относится к значениям L-функций Гекке

$$L(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a})\, N\mathfrak{a}^{-s},$$

где χ — характер Гекке идеалов поля k. Последнее означает, что в поле k существует такой идеал $\mathfrak{f}$ («кондуктор» χ), что $\chi(\mathfrak{a})$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a}$ не взаимно прост с $\mathfrak{f}$, и что $\chi((\alpha)) = \alpha^e \bar{\alpha}^f$, если α — целое число поля k и $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$. Здесь e, f — два целых рациональных числа. Не теряя общности, можно считать, что $e = 0$, $f > 0$. Если бы оба числа e, f обращались в нуль, χ был бы «обыкновенным» характером (конечного порядка), а не настоящим характером Гекке. Ряд $L(s)$ абсолютно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) > 1 + \frac{f}{2}$.

Введем целое число $s = b$ в полуплоскости абсолютной сходимости и положим $a = f - b$. Предположим, что $a \geqslant 0$, т. е. $b \leqslant f$. Поскольку $b > 1 + \frac{f}{2}$, имеем $b \geqslant a + 3$. Нетрудно усмотреть, что $L(b)$ является линейной комбинацией с алгебраическими коэффициентами конечного числа величин $e_{a,b}(W)$, $E_{a,b}(x; W)$, где W пробегает конечное семейство подрешеток поля k и $x \in k$. Поэтому значение $\pi^a \varpi^{-a-b} L(b)$ алгебраично над $\mathbf{Q}$.

Теорема Дамерелла в полной формулировке утверждает, что последний факт верен для всех $b \geqslant \frac{1}{2} + \frac{f}{2}$, т. е. $b \geqslant a + 1$. Пользуясь функциональным уравнением для L, ее можно распространить тогда на все значения $1 \leqslant b \leqslant f$. Чтобы завершить доказательство теоремы Дамерелла, нам остается установить, что в случаях $b - a = 1$ или 2 величина $L(b)$ выражается через $e^*_{a,b}$, $E^*_{a,b}(x)$, аналогично случаю абсолютной сходимости. Так как определение $L(b)$ для $b \leqslant 1 + \frac{f}{2}$ требует аналитического продолжения ряда $L(s)$, конструкция которого была одним из высших достижений Кронекера в описываемой нами области, этот вопрос удобнее рассмотреть в одной из следующих глав.

часть вторая

Кронекер

глава VII

Прелюдия к Кронекеру

§ 1. Кронекер родился в 1823 г., как и Эйзенштейн; оба учились в Берлине в одни и те же годы. В 1847 г. Кронекеру пришлось покинуть Берлин ради деловых интересов семьи; к тому времени, когда он вернулся в столицу и поселился в ней постоянно, Эйзенштейн уже умер.

Первые признаки пробуждающегося интереса Кронекера к эллиптическим функциям относятся к 1853 г. (Werke, т. IV, стр. 11). Здесь Кронекер ограничивается замечанием, что его теорема об абелевых расширениях поля $\mathbf{Q}$ обобщается на гауссово поле $\mathbf{Q}(i)$ с помощью лемнискатических эллиптических функций. Нет сомнения, что Кронекер тогда изучал кроме Абеля работу Эйзенштейна о точках деления лемнискаты. Однако эта работа (и даже большая статья Эйзенштейна 1850 г.) основывалась на формулах и обозначениях Абеля и не была прямо связана с идеями работы Genaue Untersuchung 1847 г., которые мы описали в гл. I — IV.

В 1856 г. Кронекер распространяет свои исследования уже на общий случай эллиптических функций с комплексным умножением (Werke, т. IV, стр. 179, и т. V, стр. 419). Он работает полностью в обозначениях Якоби, которым остался верен навсегда.

В 1863 г. (Werke, т. IV, стр. 222) Кронекер, под влиянием работ Дирихле, вводит новые функции

$$\sum_{\mu,\nu}{}' \frac{e^{2\pi i(r\mu+s\nu)}}{(a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2)^{1+\rho}}$$

и их пределы при $\rho = 0$. В обозначениях предыдущих глав эти функции можно записать в виде

$$\sum_{w \in W}{}' \chi(w) (w\bar{w})^{-1-\rho}, \tag{1}$$

где χ — характер аддитивной группы W. Именно в этой статье Кронекер впервые формулирует частный случай своей «предельной формулы» и выводит из него решение уравнения Пелля (т. е. вычисляет некоторую единицу вещественного квадратичного поля) с помощью эллиптических функций.

§ 2. Спустя двадцать лет, после нескольких обрывочных публикаций на эти темы, Кронекер решил, наконец, изложить свои результаты систематически в серии статей, которые должна была опубликовать Берлинская Академия. Эти статьи, под общим заголовком «Zur Theorie der elliptischen Funktionen», выходили в 1883, 1885, 1886, 1889 и 1890 годах. В 1891 г., последнем перед смертью Кронекера, заголовок был изменен (без видимых причин) на «Die Legendre'sche Relation». В этих статьях Кронекер в основном занимается различными рядами. В наших обозначениях все они могут быть записаны в виде

$$\sum_{w \in W} \chi(w) (\bar{x} + \bar{w})^a \,|\, x + w \,|^{-2s}, \tag{2}$$

где $a \geqslant 0$ — целое число. Кронекер изучает их поведение при $x = 0$ и вблизи точки $s = 1 + \frac{a}{2}$ (где они перестают сходиться).

Ум Кронекера был, однако, слишком живым и беспокойным, чтобы позволить ему сосредоточиться на систематическом изложении одной темы. В юношеские годы Куммер и Дирихле уже предостерегали его от связанных с этим опасностей. Его студенты привыкли к постоянным отступлениям, когда Кронекер начинал рассказывать о том, что пришло ему на ум вчера вечером. В академической серии он часто перескакивает с одной темы на другую или возвращается к более ранним результатам и доказательствам, чтобы улучшить их. Его статья 1886 г. (Werke, т. IV, стр. 389—470), по видимости входящая в основную серию, не имеет к ней никакого отношения и посвящена чисто алгебраическим и теоретико-числовым исследованиям формул умножения и деления эллиптических функций. Именно в ней он доказывает свои знаменитые сравнения, сыгравшие фундаментальную роль в арифметической теории комплексного умножения.

Эйзенштейн явно гордился совершенно элементарным характером своих теоретико-функциональных методов. Напротив, Кронекер пользовался целым арсеналом мощных технических средств: «суммированием Пуассона» (в действительности открытым Коши), теорией вычетов Коши, теорией рядов Фурье по Дирихле и, что важнее всего, формулой Дирихле (по существу, совпадающей с нашим преобразованием Меллина)

$$\Gamma(s) \sum \frac{a}{A^s} = \int\limits_0^\infty \left(\sum a e^{-At}\right) t^{s-1}\, dt, \tag{3}$$

которую (следуя Дирихле) он предпочитал записывать в виде

$$\Gamma(1+\rho) \sum \frac{a}{A^{1+\rho}} = \int\limits_0^1 \left(\sum a z^A\right) \left(\log \frac{1}{z}\right)^\rho d\,(\log z).$$

Современный аналитик мог бы добавить к этому немногое: понятие аналитического продолжения (которое Кронекер знал, но предпочитал им не пользоваться) и более свободное использование рядов Фурье, ставшее возможным благодаря теории распределений.

Очевидно, ряды Кронекера представляют собой естественное обобщение рядов Эйзенштейна. Вводя непрерывный параметр ρ (или, в обозначениях Римана и современных, s), он следовал Дирихле. Можно отыскать прецеденты и для появления характера χ. Работая со своими рядами вне их области сходимости, Кронекер также часто пользуется «суммированием по Эйзенштейну». Однако до 1891 г. он ни разу не упоминает статьи Эйзенштейна 1847 г. Только в конце, работая над своей последней статьей для Берлинской Академии, он осознал, насколько близок был к идеям его товарища юношеских лет. Нам остается лишь гадать, какие чувства сопровождали это открытие. Успей он написать свою лекцию об Эйзенштейне, обещанную Кантору (ср. выше, гл. I), мы, вероятно, знали бы больше.

§ 3. Как до него Эйзенштейн (ср. гл. II), Кронекер обнаружил, что для изучения двойного ряда типа (2) следует сначала разобраться в соответствующих простых рядах. Более того, оба случая требуют аналогичной техники. В конечном счете Кронекер посвятил таким простым рядам значительные части двух статей (Werke, т. V, стр. 267—294 и 327—342). Его результаты здесь были во многом предвосхищены Липшицем, что он сам отмечает (ibid., стр. 330). Имеются очевидные связи между такими рядами, L-функциями Дирихле и дзета-функцией Римана (или, скорее, Эйлера). Поэтому не удивительно, что целый ряд авторов занимался этой темой в XIX веке: Липшиц еще в 1857 г., Гурвиц в 1882, Лерх несколько позже, под влиянием работ Кронекера. В конце этой главы собрана краткая библиография.

Положение историка осложняется еще тем обстоятельством, что суммирование этих рядов по Пуассону (для комплексных значений аргумента) приводит к функциям Бесселя, теория которых уже во времена Кронекера была значительно развита. Тем не менее даже в наши дни некоторые из авторов, работавших в этой области, либо не замечали, либо не отмечали появление бесселевых функций и довольствовались прямой проверкой нескольких нужных им элементарных свойств.

Мы не будем пытаться здесь распутать все ходы мысли. В этой главе мы займемся простыми рядами в качестве подготовки к описанию работ Кронекера о двойных рядах (2).

§ 4. Символом χ в этой главе будет обозначаться некоторый характер группы $\mathbf{Z}$. Обычно мы будем записывать его в виде

$$\mu \longmapsto \chi(\mu) = \mathbf{e}(-\mu y),$$

где $y \in \mathbf{R}$. Часто будет удобно считать, что $0 \leqslant y < 1$. Рассмотрим ряд

$$S_a(x,\ y,\ s) = \sum_{\mu}^{*} (\bar{x} + \mu)^a \,|\, x + \mu\,|^{-2s}\, \mathbf{e}(-\mu y), \tag{4}$$

где $a \geqslant 0$ — целое число, y вещественное, x и s комплексные, а $\sum^*$ означает суммирование по всем целым $\mu \neq -x$ (т. е. по всем целым, если x не целое). Этот ряд абсолютно сходится тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}(s) > \frac{a+1}{2}$. Кронекер (а до него Липшиц) заметил, что при $\chi \neq 1$ и $\operatorname{Re}(s) > \frac{a}{2}$ ряд все еще сходится, хотя и не абсолютно. Действительно, записав общий член (4) в виде $f(\mu)\chi(\mu)$ и положив

$$\sigma_n = \sum_{\mu=0}^{n} \chi(\mu),$$

получаем с помощью формулы Абеля «суммирования по частям»:

$$\sum_{\mu=1}^{N} f(\mu)\,\chi(\mu) = f(N)\,\sigma_N - f(1) + \sum_{n=1}^{N-1} [f(n) - f(n+1)]\,\sigma_n. \tag{5}$$

Поскольку $\chi \neq 1$, величина $|\sigma_n|$ ограничена при всех $n > 0$. С другой стороны, для больших n величины $n^{2s-a}f(n)$ и $n^{2s-a}f(n+1)$ можно разложить в степенные ряды по n^{-1}, оба начинающиеся с 1. Поэтому величина

$$|n^{2s-a+1}[f(n)-f(n+1)]|$$

ограничена, и при $N \to +\infty$ последняя сумма справа в (5) превращается в абсолютно сходящийся ряд, если $\operatorname{Re}(s) > a/2$. Поскольку то же рассуждение применимо к членам (4), отвечающим $\mu < 0$, это доказывает сходимость.

Особенно интересен ряд

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{e}(-\mu y)}{x+\mu} = 2\pi i \frac{\mathbf{e}(xy)}{\mathbf{e}(x)-1} \qquad (0 < y < 1). \tag{6}$$

Это тождество имеет место для всех $x \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$. Кронекер замечает, что оно непосредственно выводится из теоремы Дирихле о разложении периодической функции в ряд Фурье, если применить эту теорему к функции с периодом единица, равной $\mathbf{e}(xy)$ при $0 < y < 1$ и $^1/_2\,[1+\mathbf{e}(x)]$ при $y = 0$.

Вычтем x^{-1} из обеих частей (6) и положим $x = 0$. Получим

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \mu^{-1}\mathbf{e}(-\mu y) = \pi i(2y-1) \qquad (0 < y < 1). \tag{7}$$

Эту формулу также можно было установить с помощью теоремы Дирихле. Более общо, разложив обе части (6) в степенные ряды в окрестности $x = 0$, мы получим в качестве коэффициентов многочлены Бернулли от y (с точностью до нормировки). Частный случай этого результата был получен в гл. II, § 7, где мы обнаружили, что коэффициенты разложения $\varepsilon_1(x)$ вблизи $x = 0$ являются числами Бернулли. Например, сравнивая коэффициенты при x в обеих частях тождества (6), находим

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \mu^{-2}\mathbf{e}(-\mu y) = 2\pi^2\left(y^2 - y + \frac{1}{6}\right) \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1). \tag{8}$$

Здесь ряд абсолютно сходится, так что формула остается верной при $y = 0$ и $y = 1$ по непрерывности.

Кроме описанных случаев абсолютной и обыкновенной сходимости имеются значения параметров, когда ряд можно суммировать по Эйзенштейну (гл. II, § 1). Например, если x вещественно, $\chi = 1$ и $a = 2s = 1$, имеем

$$\sum\nolimits_e \operatorname{sgn}(x+\mu) = 2[x]+1$$

при условии, что x не целое число. Как обычно, $[x]$ означает целое n, такое, что $n < x < n+1$.

§ 5. Хотя Кронекер экспериментировал с различными способами суммирования рядов (2) и (4) (включая метод Эйзенштейна), ему, видимо, больше всего нравился подход, подсказанный работами Дирихле, который связан с введением комплексного параметра s. Обозначим через $S(s)$ любой из наших рядов. Он абсолютно сходится при $\operatorname{Re}(s) > \frac{a}{2}+1$ в случае (2) и $\operatorname{Re}(s) > \frac{a+1}{2}$ в случае (4). Пусть s_0 лежит на границе соответствующей полуплоскости. Тогда ряд $S(s_0+\rho)$ абсолютно сходится для положительных вещественных ρ. Если его сумма имеет предел при $\rho \to 0$, он будет называться значением $S(s_0)$ относительно суммирования «по Кронекеру». Кронекер рассматривал также варианты этого определения, в которых абсолютная сходимость заменена обычной или сходимостью «по Эйзенштейну».

Разумеется, суммирование по Кронекеру можно рассматривать как частный случай аналитического продолжения. Действительно, мы убедимся, что ряды (2) и (4) мероморфно продолжаются на всю s-плоскость. Это было показано (после решающего шага, сделанного Риманом в его статье 1859 г. о дзета-функции) современниками Кронекера — Липшицем, Гурвицем и Лерхом. На самом деле доказательство неявно содержалось в некоторых выкладках Кронекера (Werke, т. IV, стр. 486—487), однако он ни разу не упоминает аналитического продолжения. Возможно, все охлаждающиеся отношения с Вейерштрассом отбили у него вкус к этому понятию. Разумеется, мы будем им пользоваться. Приписывание $S(s)$ значений, которые принимает аналитическое продолжение этого ряда с полуплоскости его абсолютной сходимости, можно было бы по праву назвать «суммированием по Гекке», потому что Гекке широко пользовался этим методом.

§ 6. Поскольку мы ограничимся здесь лишь теми результатами о рядах (4), которые понадобятся в гл. VIII, будет удобно разобрать отдельно случаи вещественного и не вещественного x. Если x вещественно, ряд (4) можно переписать в виде

$$\sum\nolimits^* \operatorname{sgn}(x+\mu)^a |x+\mu|^{a-2s} \mathbf{e}(-\mu y).$$

Поэтому достаточно разобрать случаи $a=0$ и $a=1$. В свою очередь эти ряды сводятся к «рядам Лерха»

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi(n)(x+n)^{-s} \tag{9}$$

при $x>0$. Ясно, что L-ряды Дирихле представляются в виде конечных линейных комбинаций рядов Лерха с характерами χ конечного порядка и рациональными $x \leqslant 1$. Следует еще иметь в виду, что «односторонний» ряд (9) примерно так же связан с гамма-функцией, как ряд Эйзенштейна $\varepsilon_n(x)$ с произведением Эйлера для синуса (ср. гл. II, § 6). Поэтому теорию гамма-функции можно было бы развить на основе этой аналогии. Для краткости, однако, мы будем считать ее известной.

§ 7. В описанных выше обозначениях мы положим

$$S_a(x, y, s)=\sum_{\mu}{}^{*}(x+\mu)^a|x+\mu|^{-2s}\,\mathbf{e}(-\mu y), \tag{10}$$

где x, y вещественны и $a=0$ или 1. Формально применяя (3), находим

$$\Gamma(s)\,S_a(x, y, s)=$$
$$=\int_0^{+\infty}\sum{}^{*}\exp\left[-t(x+\mu)^2-2\pi i\mu y\right](x+\mu)^a t^{s-1}\,dt. \tag{11}$$

Заменим в обеих частях этого равенства y на 0, $(x+\mu)^a$ на $|x+\mu|^a$ и s на $\mathrm{Re}(s)$. Оба ряда тогда превратятся в ряды с положительными членами. Левая часть будет сходящейся при $\mathrm{Re}(s)>\frac{a+1}{2}$. В этом случае почленное интегрирование правой части (11) законно, и обе части формулы совпадают. Выберем теперь любое число $T>0$ и разобьем интеграл справа на сумму двух интегралов: I_0 по $0<t\leqslant T$ и I_∞ по $t>T$. Последний интеграл можно оценить сверху, заметив, что если M — целое число $\geqslant|x|$, то

$$\exp\left[-t(x+\mu)^2\right]\cdot|x+\mu|^a\leqslant\exp(-tn^2)\cdot(n+2M)$$

при $\mu>M$, $n=\mu-M$, а также при $\mu<-M$, $n=-\mu-M$. Пользуясь этим, нетрудно убедиться, что интеграл I_∞ абсолютно сходится для всех значений s, равномерно в любой ограниченной области s-плоскости. Следовательно, он представляет целую функцию от s.

Для вычисления I_0 воспользуемся хорошо известной формулой преобразования тэта-ряда:

$$\sum_{\mu} \exp[-t(x+\mu)^2 - 2\pi i \mu y](x+\mu)^a =$$

$$= i^{-a} \mathbf{e}(xy) \left(\frac{\pi}{t}\right)^{a+1/2} \sum_{\nu} \exp\left[-\frac{\pi^2}{t}(y+\nu)^2 + 2\pi i \nu x\right](y+\nu)^a. \quad (12)$$

Ее нетрудно получить суммированием по Пуассону или, что то же самое, разложением в ряд Фурье правой части (12), периодичной по y с периодом 1. Можно также применить суммирование по Пуассону при $a=0$, а затем, дифференцируя по x, получить формулу (12) при $a=1$.

Применим это тождество к подынтегральному выражению в I_0 и сделаем замену переменной $t = \pi^2/u$. Получится интеграл, подобный I_∞, и, возможно, два дополнительных члена, отвечающих $\mu = -x$ в левой части (12), если x — целое число, и $\nu = -y$ в правой части (12), если y — целое число. Поскольку мы предположили, что $\operatorname{Re}(s) > \frac{a+1}{2}$, эти члены (которые могут появиться лишь при $a=0$) можно проинтегрировать непосредственно. Окончательный результат выглядит так. Выделяя явно параметры, определяющие I_∞, будем записывать этот интеграл в виде $I_\infty(T, x, y, a, s)$ и положим

$$I'_\infty = I_\infty\left(\frac{\pi^2}{T},\ y,\ -x,\ a,\ a-s+\frac{1}{2}\right). \quad (13)$$

Вместе с I_∞ это тоже целая функция от s. Положим $\varepsilon = 1$, если x — целое число и $a=0$; в противном случае $\varepsilon = 0$; аналогично, пусть $\varepsilon' = 1$, если y — целое число и $a=0$, и $\varepsilon' = 0$ в противном случае. Тогда

$$\Gamma(s) S_a(x,\ y,\ s) = I_\infty + i^{-a} \pi^{2s-a-1/2} \mathbf{e}(xy) I'_\infty -$$

$$- \varepsilon \mathbf{e}(xy) \frac{T^s}{s} + \varepsilon' \sqrt{\pi}\ \frac{T^{s-1/2}}{s-1/2}. \quad (14)$$

Эта формула показывает, что левая часть мероморфно продолжается на всю s-плоскость, а полюсы ее могут быть в точках $s=0$ и $s=1/2$. Определив функцию $S_a(x, y, s)$ с помощью формулы (14) для всех s и положив $T=\pi$, мы можем непосредственно проверить справедливость функционального уравнения

$$\Gamma(s) S_a(x,\ y,\ s) =$$

$$= i^{-a} \pi^{2s-a-1/2} \mathbf{e}(xy) \Gamma(a-s+1/2) S_a(y, -x,\ a-s+1/2). \quad (15)$$

При рациональных значениях x и y оно, по существу, эквивалентно функциональным уравнениям для L-рядов Дирихле.

§ 8. В § 4 мы установили, что правая часть (10) сходится в обычном смысле, если y не целое число и $\operatorname{Re}(s) > a/2$. То же рассуждение показывает, что сумма голоморфна по s и потому совпадает с $S_a(x, y, s)$. Разумеется, если бы мы не могли установить голоморфность суммы (в обычном смысле слова или по Эйзенштейну), последнее утверждение могло бы оказаться ложным. Рассмотрим несколько особенно интересных частных случаев.

Начнем с функции $S_1(x, 0, {}^1/_2)$ при нецелых x. Формально она определяется рядом $\sum \operatorname{sgn}(x+\mu)$, суммирование по Эйзенштейну которого приводит к значению $2[x]+1$ (ср. § 4). С другой стороны, уравнение (15) показывает, что

$$S_1(x,\ 0,\ {}^1/_2) = \frac{1}{\pi i} S_1(0,\ -x,\ 1).$$

Правая часть здесь, как мы только что заметили, определяется рядом в точке его обычной сходимости и потому может быть вычислена по формуле (7). Поэтому

$$S_1(x,\ 0,\ {}^1/_2) = 2\langle -x\rangle - 1 = 1 - 2\langle x\rangle, \tag{16}$$

где мы, как принято, положили $\langle x\rangle = x - [x]$ («дробная часть» x).

Поскольку $\Gamma(s)$ имеет полюс в точке $s=0$, формула (14) показывает, что $S_a(x, y, 0) = 0$, за исключением случаев, когда $a=0$ и x — целое число. Вычислим $\partial S_0(x, 0, s)/\partial s$ при $s=0$. Представив $\Gamma(s)$ в виде $s^{-1}\Gamma(s+1)$, получаем с помощью (15) следующее разложение вблизи точки $s=0$:

$$S_0(x,\ 0,\ s) = s\frac{\pi^{2s-{}^1/_2}\,\Gamma({}^1/_2 - s)}{\Gamma(1+s)} S_0\Big(0, -x, \frac{1}{2} - s\Big) =$$
$$= sS_0(0, -x,\ {}^1/_2) + \ldots .$$

Как выше, значение $S_0(0, -x,\ {}^1/_2)$ при нецелых x определяется сходящимся рядом

$$S_0(0, -x,\ {}^1/_2) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{\mathbf{e}(\mu x)}{|\mu|}.$$

Можно непосредственно установить, что это — ряд Фурье для функции $\log|2\sin\pi x|^{-2}$. Следующий способ, возможно, поучительнее. Положим $f(x) = S_0(0,\ -x,\ {}^1/_2)$; из написанной формулы ясно, что $f({}^1/_2) = -2\log 2$. В области абсолютной сходимости ряд для $S_0(x, 0, s)$ можно дифференцировать почленно. Это дает формулу

$$\frac{\partial}{\partial x} S_0(x, 0, s) = -2sS_1(x, 0, s+1),$$

которая, по свойству аналитического продолжения, должна быть верна для всех s. Дифференцируя ее по s и полагая $s = 0$, находим $df/dx = -2S_1(x, 0, 1)$. Функция $S_1(x, 0, 1)$ формально определяется рядом $\sum (x+\mu)^{-1}$. Суммируя его по Эйзенштейну, получаем $\pi \operatorname{ctg} \pi x$. Для проверки того, что это и есть $S_1(x, 0, 1)$, заметим, что обе функции нечетны по x. Более общо, функция $S_a(x, 0, s)$ четна по x при $a = 0$ и нечетна при $a = 1$. С другой стороны, дифференцируя ряд для $S_1(x, 0, s)$ почленно в области абсолютной сходимости и затем пользуясь аналитическим продолжением, мы, в точности как для $S_0(x, 0, s)$, находим, что $dS_1(x, 0, 1)/dx = -S_0(x, 0, 1)$, причем последняя функция задается абсолютно сходящимся рядом $-\sum (x+\mu)^{-2}$. Таким образом, $S_1(x, 0, 1)$ и $\pi \operatorname{ctg} \pi x$ могут отличаться только на аддитивную константу, и так как обе они нечетны, они совпадают. Поэтому и $f(x)$ может отличаться от $\log|2 \sin \pi x|^{-2}$ только на аддитивную константу, а так как значения этих функций совпадают при $x = 1/2$ и они периодичны с периодом единица, они совпадают для нецелых значений x.

§ 9. Теперь мы перейдем к вычислению $\partial S_1(x, 0, s)/\partial s$ при $s = 1/2$. Положим

$$H(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+n)^{-s} \tag{17}$$

при $x > 0$, $\operatorname{Re}(s) > 1$. Имеем

$$H(x+1, s) = H(x, s) - x^{-s}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial H(x, s)}{\partial x} = -sH(x, s+1). \tag{19}$$

С другой стороны, при $\operatorname{Re}(s) > 1$ и $0 < x \leqslant 1$

$$H(x, s) = \frac{1}{2} S_0\left(x, 0, \frac{s}{2}\right) + \frac{1}{2} S_1\left(x, 0, \frac{s+1}{2}\right). \tag{20}$$

Вместе с (18) и (14) этот результат показывает, что $H(x, s)$ при всех $x > 0$ продолжается до мероморфной функции во всей s-плоскости с единственным полюсом при $s = 1$ и вычетом единица. Функцию $H(x, s)$ иногда называют «функцией

Гурвица». В традиционных обозначениях

$$\zeta(s) = H(1, s) = {}^1/_2 S_0\left(0, 0, \frac{s}{2}\right),$$

так что из (15) следует хорошо известное функциональное уравнение для дзета-функции.

При $s = 0$ формула (14) дает $H(1, 0) = \zeta(0) = -{}^1/_2$. При $s = 0$ и $0 < x < 1$ формула (20) в соединении с (14) и (16) показывает, что

$$H(x, 0) = {}^1/_2 - \langle x \rangle.$$

Пользуясь формулой (18), которая верна для всех s по свойству аналитического продолжения, получаем

$$H(x, 0) = {}^1/_2 - x \qquad (x > 0). \tag{21}$$

Для всех $N \geqslant 0$, $x > 0$ и $\mathrm{Re}(s) > 1$ имеем

$$H(x, s) - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} \zeta(s+i)(-x)^i =$$

$$= x^{-s} + \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-s} - \sum_{i=0}^{N} \binom{s+i-1}{i} \left(\frac{-x}{n}\right)^i\right].$$

Поскольку правая часть абсолютно сходится при $\mathrm{Re}(s) > -N$, аналитическое продолжение показывает, что тождество остается верным в этой полуплоскости. Его можно рассматривать как формулу для аналитического продолжения $H(x, s)$, коль скоро аналитическое продолжение $\zeta(s)$ уже получено. Положим в этой формуле $N = 1$, затем почленно продифференцируем ее один раз по s и дважды по x. Полагая $F(x) = (\partial H/\partial s)_{s=0}$, получим при $s = 0$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^{-2} = H(x, 2) > 0.$$

С другой стороны, продифференцируем (18) по s и положим $s = 0$. Это дает

$$F(x+1) - F(x) = \log x.$$

Хорошо известно, что эти два свойства, вместе с положительностью d^2F/dx^2, характеризуют функцию $\log \Gamma(x)$ с точностью до аддитивной константы[1]). Поэтому $F(x) = \log C\Gamma(x)$ для подходящей константы C.

---

[1]) См., например, E. Artin, Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Hamb. Math. Einzelschr., № 11, 1931.

Заменим теперь в формуле (20) x на $1-x$ при $0<x<1$ и сложим результат с (20). Поскольку функция S_0 четна по x, S_1 нечетна и обе периодичны, получаем

$$S_0\left(x,\, 0,\, \frac{s}{2}\right) = H(x, s) + H(1-x, s). \tag{22}$$

Разумеется, эту формулу можно было бы проверить и непосредственно. Дифференцируя ее по s и полагая $s=0$, ввиду результатов § 8 получаем

$$\log|2\sin\pi x|^{-1} = \log[C^2\Gamma(x)\Gamma(1-x)] \qquad (0<x<1).$$

Поэтому достаточно знать, что $\Gamma(^1/_2)=\sqrt{\pi}$, чтобы заключить, что $C^2 = 1/2\pi$. Окончательно

$$\left(\frac{\partial H(x,s)}{\partial s}\right)_{s=0} = \log\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}. \tag{23}$$

Эту формулу открыл Лерх в 1894 г. (см. [7c] в библиографии в конце этой главы). Наконец, подобно тому как мы вывели формулу (22), можно установить, что

$$S_1\left(x,\, 0,\, \frac{s+1}{2}\right) = H(x, s) - H(1-x,\, s),$$

и затем вычислить значение $\partial S_1(x, 0, s)/\partial s$ при $s = {}^1/_2$.

Формула (23) при $x=1$ дает значение $\zeta'(0)$. Более общо, с ее помощью можно вычислить значения $L'(0)$, где $L(s)$ — любая функция Дирихле. Мы воспользуемся этим в гл. IX. Функциональное уравнение (15) в сочетании с упомянутой выше формулой для $\partial S_1(x, 0, s)/\partial s$ в точке $s = {}^1/_2$ непосредственно приводит к знаменитой формуле Куммера для $\log\Gamma(x)$ в интервале $0<x<1$, полученной им в 1847 г. Наоборот, из этой формулы и результатов § 7 можно вывести тождество (23), но это требует несколько большего труда.

§ 10. Теория распределений позволяет переосмыслить некоторые из установленных результатов. Остановимся на этом вкратце.

Хорошо известно, что на $\mathbf{R}$, на $\mathbf{C}$ и вообще на любом локальном поле существует единственное (с точностью до постоянного множителя) распределение, которое под действием мультипликативной группы поля умножается на данный квазихарактер ω этой группы. Это распределение, подходящим образом нормированное, иногда называют «распределением Тэйта»; мы будем говорить, что оно отвечает ω.

Здесь мы будем заниматься полем $\mathbf{R}$. Все квазихарактеры $\mathbf{R}^\times$ имеют вид

$$x \longmapsto \omega(x) = (\operatorname{sgn} x)^a |x|^z,$$

где $a=0$ или 1 и $z \in \mathbf{C}$. Пусть сначала $\omega(x)=x^{-n}$, где $n \geqslant 0$ — целое число. Тогда квазихарактеру ω отвечает распределение $(d^n/dx^n)_{x=0}$ с носителем в точке $x=0$. В остальных случаях значение распределения на функции Φ из «пространства Шварца» определяется формулой

$$D_\omega(\Phi)=\mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)\,\omega(x)\,|x|^{-1}dx. \tag{24}$$

Напомним, что Φ бесконечно дифференцируема и «быстро убывает». Символ Pf («конечная часть») означает сам интеграл, если он абсолютно сходится, а в общем случае предел выражения

$$\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\Phi(x)\,\omega(x)\,|x|^{-1}dx-\varepsilon^{a+z}P\left(\varepsilon^2\right) \qquad (\varepsilon>0) \tag{25}$$

при $\varepsilon \to 0$, где P — многочлен, выбранный так, чтобы этот предел существовал. Такой многочлен всегда существует, потому что Φ бесконечно дифференцируема вблизи $x=0$.

Правая часть (24) также определена, если (a) Φ всюду локально интегрируема; (b) Φ m-кратно непрерывно дифференцируема вблизи $x=0$, где $m>-\mathrm{Re}(z)$; (c) при $x\to\pm\infty$ справедлива оценка $\Phi=O(|x|^\lambda)$, где $\lambda<-\mathrm{Re}(z)$.

Предположим, что $\mathrm{Re}(z)<0$, и выберем функцию φ на $T=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, ограниченную, интегрируемую и бесконечно дифференцируемую вблизи нуля. Обозначим через Φ следующую функцию на $\mathbf{R}$:

$$\Phi(x)=\varphi(x \bmod 1)\,\mathbf{e}(-xy)$$

и положим $\Delta(\varphi)=D_\omega(\Phi)$. Очевидно, Δ является распределением на T. Для любой непрерывной функции φ, носитель которой не содержит нуля, имеем

$$\Delta(\varphi)=\int_0^1\varphi(x \bmod 1)\,\mathbf{e}(-xy)\,S_a\left(x,\ y,\ \frac{a+1-z}{2}\right)dx,$$

где подынтегральное выражение периодично по x с периодом единица. На общепринятом языке это означает, что Δ совпадает с функцией

$$\mathbf{e}(-xy)\,S_a\left(x,\ y,\ \frac{a+1-z}{2}\right) \tag{26}$$

вне нуля. С другой стороны, коэффициенты Фурье распределения Δ определяются формулами

$$d_\nu=\Delta\left[\mathbf{e}(-\nu x)\right]=D_\omega\left[\mathbf{e}(-x(y+\nu))\right].$$

Нетрудно убедиться, что $D_\omega(1)=0$, так что $d_\nu=0$, если $y+\nu=0$. В противном случае

$$d_\nu = D_\omega[\mathbf{e}(-x)]\,\omega(y+\nu)^{-1},$$

так как D_ω отвечает квазихарактеру ω. Поэтому, положив $A_\omega = D_\omega[\mathbf{e}(-x)]$, находим, что ряд Фурье для Δ равен $A_\omega S_a\left(y,\ -x,\ \frac{a+z}{2}\right)$. Величину A_ω проще всего вычислить, исходя из определения (25) и сдвинув контур интегрирования на мнимую ось в x-плоскости. Детали мы оставляем в качестве упражнения читателю. В результате находим:

$$A_\omega = (2\pi)^{-z}\,\Gamma(z)\left[\mathbf{e}(-z/4) + (-1)^a\,\mathbf{e}(z/4)\right].$$

Пользуясь хорошо известными тождествами для Γ и полагая $G(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, мы можем переписать последнюю формулу в виде

$$A_\omega = i^{-a}\pi^{\frac{1}{2}-z}\,\Gamma\left(\frac{a+z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1-z}{2}\right)^{-1} =$$
$$= i^{-a}G(a+z)\,G(a+1-z)^{-1}.$$

Это наводит на мысль связать с квазихарактером ω не распределения D_ω, Δ, а $G(a+z)^{-1}D_\omega$ и $G(a+z)^{-1}\Delta$. Действительно, в более систематической теории удобно поступить именно так. Учитывая (26), получаем, что только что выведенное выражение для A_ω формально равносильно тождеству (15) § 7, но осмыслено иначе.

Определенное выше распределение Δ для $\operatorname{Re}(z)<0$ и квазихарактера ω, не имеющего вида $\omega(x)=x^{-n}$, мы будем теперь обозначать Δ_ω. Пользуясь вычисленным выше рядом Фурье для Δ_ω, нетрудно обнаружить, что если φ — любая бесконечно дифференцируемая функция на T, то $G(a+z)^{-1}\Delta_\omega(\varphi)$ как функция от z аналитически продолжается на всю z-плоскость. Этим можно воспользоваться, чтобы определить $G(a+z)^{-1}\Delta_\omega$ как распределение для всех квазихарактеров ω. Ряд Фурье этого распределения равен

$$i^{-a}G(a+1-z)^{-1}\,S_a\left(y,\ -x,\ \frac{a+z}{2}\right). \tag{27}$$

К числу самых полезных свойств распределений на T относится то обстоятельство, что их ряды Фурье всегда можно дифференцировать почленно. Здесь мы проиллюстрируем это на одном хорошо известном примере. Для $\omega(x)=x$, $y=0$ ряд (27) имеет вид

$$\sum{}' \frac{\mathbf{e}(\nu x)}{i\nu}. \tag{28}$$

Дифференцируя его, получаем ряд Фурье распределения $2\pi(\delta_0 - 1)$, где δ_0 — «распределение Дирака» (масса 1 в точке 0). Следовательно, (28) представляет функцию с разрывом в нуле и постоянной производной -2π вне нуля. Поскольку она нечетна по x, она должна совпадать с $\pi(1 - 2\langle x \rangle)$. Этот результат следует сравнить с формулой (7) § 4.

§ 11. Рассмотрим теперь ряд (4) для комплексных значений x. Запишем его в виде

$$S_a(\zeta, y, s) = \sum_{\mu} (\bar{\zeta} + \mu)^a |\zeta + \mu|^{-2s} \mathbf{e}(-\mu y), \tag{29}$$

где $a \geqslant 0$ — целое число, $\zeta = \xi + i\eta$, ξ, η и y — вещественные числа и $\eta \neq 0$. Из-за последнего условия здесь нельзя ограничиться только случаями $a = 0$, $a = 1$, как в § 7. С другой стороны, оно же избавляет нас от необходимости рассматривать сумму $\sum^*$. Предположим сначала, что $\mathrm{Re}(s) > \frac{a+1}{2}$. В этом случае ряд (29) абсолютно сходится и функция

$$S_a(\zeta, y, s)\, \mathbf{e}(-\xi y)$$

периодична по ξ с периодом единица, так что ее можно разложить в ряд Фурье. Поскольку функция (29) введена здесь лишь для исследования двойного ряда Кронекера в гл. VIII, нас будет интересовать только этот ряд Фурье. При более систематическом изложении следовало бы рассмотреть также, например, связь между значениями $S_a(\zeta, y, s)$ при комплексных ζ и $S_a(x, y, s)$ при вещественных x, т. е. поведение $S_a(\zeta, y, s)$, когда η стремится к нулю. Мы оставим эти вопросы в стороне; читатель может обратиться к статьям Липшица (см. библиографию к этой главе).

Исключив случай, когда z лежит на отрицательной половине вещественной оси, а t — комплексное число, мы будем всегда понимать под z^t для комплексных t величину $e^{t \log z}$, где в качестве $\log z$ взято «главное значение» (т. е. $\mathrm{Im}(\log z)$ принадлежит интервалу $]-\pi, \pi[$). В частности, $|z|^{2s} = z^s \bar{z}^s$. Как в гл. VI, дифференциальные операторы $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar{z}$ обычным образом действуют на вещественно аналитических (или вещественно дифференцируемых) функциях от $z \in \mathbf{C}$.

Пусть F — некоторая функция от $\zeta = \xi + i\eta$, определенная в полосе $a < \eta < b$ и такая, что $F(\zeta)\,\mathbf{e}(-\xi y)$ периодична с периодом единица по ξ. Разложив последнюю в ряд Фурье, получаем для F представление

$$F(\zeta) = \sum_{\nu} f_\nu(\eta)\, \mathbf{e}[(y + \nu)\xi] = \sum_{\nu} \int_0^1 F(x + i\eta)\, \mathbf{e}[(y + \nu)(\xi - x)]\, dx.$$

Для краткости мы будем называть его «рядом Фурье» функции F. Обозначим через $F_\nu(\zeta)$ его ν-й член. Оператор $F \longmapsto F_\nu$ коммутирует со сдвигами ζ-плоскости, а значит, и с $\partial/\partial\xi$, $\partial/\partial\eta$ (или, что то же самое, с $\partial/\partial\zeta$, $\partial/\partial\bar{\zeta}$). Он коммутирует также с оператором $F \longmapsto \varphi F$, где φ — любая функция от η. Поэтому если D — любой линейный дифференциальный оператор по ζ, коэффициенты которого зависят только от η, то из условия $D(F)=0$ вытекает, что $D(F_\nu)=0$ для всех ν. Применив это соображение к функции $F=S_a(\zeta, y, s)$ и оператору

$$D = 2i\eta \frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\bar{\zeta}} + (a-s)\frac{\partial}{\partial\zeta} + s\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}},$$

получаем, что коэффициенты f_ν соответствующего ряда Фурье должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\eta\frac{d^2 f_\nu}{d\eta^2} + (2s-a)\frac{df_\nu}{d\eta} + [2a\pi(y+\nu) - 4\pi^2(y+\nu)^2\eta]\, f_\nu = 0. \quad (30)$$

Кроме того $\left(\text{по-прежнему при } \operatorname{Re}(s) > \frac{a+1}{2}\right)$, очевидно, что f_ν стремятся к нулю при $|\eta| \to \infty$. Например, если $y+\nu=0$, то f_ν должны иметь вид $C|\eta|^{1+a-2s}$, где C — константа, при $\eta \neq 0$. Впрочем, это очевидно из соображений однородности. В случае $y+\nu \neq 0$, пользуясь элементарными свойствами бесселевых функций, можно также показать, что (30) определяет f_ν однозначно с точностью до постоянного множителя. Эту функцию можно явно выписать через функции $K_{s-a-\frac{1}{2}}$ и ее производные. Мы сделаем это и явно вычислим константу C с помощью формул Фурье для коэффициентов f_ν.

§ 12. Удобно рассмотреть сначала случай $a=0$. При $a>0$ и $\operatorname{Re}(s) > a + {}^1/_2$ можно будет затем применить формулу

$$S_a(\zeta, y, s) = \frac{(-1)^a}{(s-1)(s-2)\ldots(s-a)}\frac{\partial^a}{\partial\zeta^a}S_0(\zeta, y, s-a) \quad (31)$$

и получить с ее помощью ряд Фурье для $S_a(\zeta, y, s)$. Наконец, пользуясь аналитическим продолжением в s-плоскости, мы установим справедливость соответствующей формулы для $\frac{a+1}{2} < \operatorname{Re}(s) \leqslant a+\frac{1}{2}$ и продолжим $S_a(\zeta, y, s)$ аналитически даже в полуплоскость $\operatorname{Re}(s) \leqslant \frac{a+1}{2}$.

Итак, применим формулы Фурье к вычислению коэффициентов f_ν для функции $S_0(\zeta, y, s)$. Разумеется, это то же самое, что суммирование ряда (29) при $a=0$ по Пуассону. Получим

$$S_0(\zeta, y, s)=\sum_{\nu}\varphi(\eta, y+\nu)\,\mathbf{e}\,[(y+\nu)\xi], \tag{32}$$

где функция φ определена формулой

$$\varphi(\eta, y)=\int_{-\infty}^{+\infty}|\zeta|^{-2s}\,\mathbf{e}\,(-y\xi)\,d\xi. \tag{33}$$

Это, по существу, классический интеграл, исследование которого имеет длинную историю [1]). Умножив его на $\Gamma(s)$ и применив преобразование Дирихле (см. § 2), получим

$$\Gamma(s)\,\varphi(\eta, y)=\iint\exp\left[-t\left(\xi^2+\eta^2\right)-2\pi iy\xi\right]t^{s-1}\,dt\,d\xi=$$

$$=\sqrt{\pi}\int_{0}^{+\infty}\exp\left(-t\eta^2-\frac{\pi^2y^2}{t}\right)t^{s-{}^3/_2}\,dt. \tag{34}$$

При $y=0$ находим:

$$\varphi(\eta, 0)=|\eta|^{1-2s}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(s-{}^1/_2)}{\Gamma(s)}. \tag{35}$$

Если $y\neq 0$, рассматриваемый интеграл немногим отличается от стандартного определения так называемой функции K (ср. цитированную книгу Ватсона, § 6.22, стр. 183, и библиографию в ней). Его рассматривал еще Пуассон. Для любого комплексного числа z и $\mathrm{Re}(Y)>0$ положим

$$K_z(2Y)={}^1/_2\int_{0}^{+\infty}\exp\left[-Y\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]t^{z-1}\,dt. \tag{36}$$

При каждом значении Y этот интеграл является четной целой функцией от z. Из (34) следует, что

$$\Gamma(s)\,\varphi(\eta, y)=2\sqrt{\pi}\,|\pi y/\eta|^{z}K_z(2|\pi y\eta|)=$$

$$=2\sqrt{\pi}\,|\pi y|^{2z}Y^{-z}K_z(2Y) \tag{37}$$

$$\left(y\neq 0,\ z=s-\frac{1}{2},\ \ Y=|\pi y\eta|\right).$$

Теперь можно написать ряд Фурье для функции $S_0(\zeta, y, s)$ и, заменив в нем s на $s-a$, воспользоваться формулой (31),

---

[1]) Ср. G. N Watson, Theory of Bessel Functions, § 6.16 (pp. 172—173); там же имеется библиография.

чтобы вычислить ряд Фурье для $S_a(\zeta, y, s)$ при $\operatorname{Re}(s) > a + 1/2$. Выкладки вполне шаблонные, и мы ограничимся формулировкой результата. Для $\varepsilon = \pm 1$ и $Y > 0$ положим

$$\Phi_\varepsilon(Y, a, z) = e^{2\varepsilon Y} \frac{d^a}{dY^a} \left[e^{-2\varepsilon Y} Y^{-z} K_z(2Y)\right]. \tag{38}$$

Ряд Фурье для S_a имеет вид

$$S_a(\zeta, y, s) = 2(\delta i)^{-a} \Gamma(s)^{-1} \sum_\nu C_\nu \mathbf{e}[(y+\nu)\xi], \tag{39}$$

где $\delta = \operatorname{sgn}\eta$, а коэффициенты C_ν выглядят так. При $y + \nu = 0$ имеем

$$C_\nu = \pi \frac{\Gamma(2s - a - 1)}{\Gamma(s - a)} |2\eta|^{a+1-2s}. \tag{40}$$

В остальных случаях

$$C_\nu = \sqrt{\pi}(-2)^{-a} |\pi(y+\nu)|^{2s-a-1} \times \\ \times \Phi_\varepsilon\left(|\pi(y+\nu)\eta|, a, s - a - \frac{1}{2}\right), \tag{41}$$

где $\varepsilon = \operatorname{sgn}[(y+\nu)\eta]$.

Функция K_z при $Y \to +\infty$ допускает хорошо известное асимптотическое разложение (ср. книгу Ватсона, § 7.23, стр. 202). Однако здесь нам достаточно знать, что для всех z функция $K_z(2Y)$ и все ее производные допускают оценку $O(e^{-\lambda Y})$ с некоторым $\lambda > 0$ (на самом деле с любым $\lambda < 2$), а это нетрудно получить непосредственно. Поэтому та же оценка годится для Φ_ε, так что ряд в правой части (39) сходится для всех значений параметров (со скоростью геометрической прогрессии). Согласно принципу аналитического продолжения, тождество (39) остается в силе всюду, где определена его левая часть, т. е. при $\operatorname{Re}(s) > \frac{a+1}{2}$. Более того, формулу (39) можно использовать в качестве определения $S_a(\zeta, y, s)$ для всех значений a, ζ, y, s, кроме тех случаев, когда y — целое число и постоянный член (39), определяемый формулой (40), обращается в бесконечность.

§ 13. Рассмотрим теперь некоторую положительно определенную бинарную квадратичную форму $F(X, Y)$ с вещественными коэффициентами и запишем ее в виде

$$F(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2 = A(X + \zeta Y)(X + \bar{\zeta} Y)$$

Вместо ряда $S_a(\zeta, y, s)$ мы могли бы изучать построенный с помощью этой формы ряд

$$A^{-s} S_a(\zeta, y, s) = \sum_\mu (\mu + \bar{\zeta})^a F(\mu, 1)^{-s} \mathbf{e}(-\mu y).$$

Разумеется, с точностью до влияния множителя A^{-s} результаты были бы теми же самыми.

Кронекер, изучая свои двойные ряды, судя по разным признакам, как будто придавал особое значение тому обстоятельству, что многие факты, относящиеся к положительно определенным формам $F(X, Y)$, переносятся на случай комплекснозначных форм с положительно определенной вещественной частью. Объясним вкратце, как это делается. Запишем квадратичную форму в виде

$$F(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2 = A(X + \zeta Y)(X + \zeta' Y)$$

и предположим, что $\operatorname{Re}[F(X, Y)] > 0$ для всех вещественных X, Y, так что ζ, ζ' заведомо не вещественны. Для всех вещественных t значение $F(t, 1)$ остается в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > 0$. Если бы $\operatorname{Im}(\zeta)$ и $\operatorname{Im}(\zeta')$ были одновременно положительны, то аргументы чисел $t + \zeta$, $t + \zeta'$ при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ убывали бы от π до 0, а аргумент $A^{-1}F(t, 1)$ убывал бы от 2π до 0 вопреки предположению [1]). По аналогичным причинам $\operatorname{Im}(\zeta)$ и $\operatorname{Im}(\zeta')$ не могут быть одновременно отрицательны.

Наоборот, если $\operatorname{Im}(\zeta)$ и $\operatorname{Im}(\zeta')$ имеют разные знаки, то аргумент числа $(t + \zeta')(t + \bar{\zeta})^{-1}$, совпадающий с аргументом $A^{-1}F(t, 1)$, меняется от 0 до 0, когда t меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Поскольку число $(t + \zeta')(t + \bar{\zeta})^{-1}$ лежит на некоторой окружности в комплексной плоскости, она должна целиком лежать в некоторой полуплоскости. Это означает, что A можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $\operatorname{Re}[F(t, 1)] > 0$ для всех вещественных t. Положив $\eta = \frac{1}{2i}(\zeta - \zeta')$, $\delta = \operatorname{sgn} \operatorname{Re}(\eta)$, нетрудно убедиться, что для этого подходит число $A = 1/\delta\eta$. Положим еще $\xi = {}^1/_2(\zeta + \zeta')$. При данных ξ, η мнимые части ζ и ζ' имеют разные знаки тогда и только тогда, когда $|\operatorname{Im}(\xi)| < |\operatorname{Re}(\eta)|$. При данном η допустимые значения ξ заполняют полосу в комплексной ξ-плоскости. Будем писать $\eta' = \delta\eta$, так что $\operatorname{Re}(\eta') > 0$ и $A = \eta'^{-1}$.

В этих обозначениях мы покажем, как перенести результаты § 12 на ряды вида

$$S'_a = \eta'^{-s} \sum_{\mu} (\mu + \zeta')^a F(\mu, 1)^{-s} \mathbf{e}(-\mu y),$$

[1]) Здесь и в оставшихся главах книги мы заимствуем ряд рассуждений из лекций К. Зигеля: C. L. Siegel, Lectures on advanced analytic number-theory, Tata Institute of Fund. Research, Bombay, 1961.

где y — вещественное число. В случае $\zeta' = \bar{\zeta}$ этот ряд совпадает с (29). При фиксированном η функция $S'_a \mathbf{e}(-\xi y)$ голоморфна по ξ и периодична с периодом 1 в той полосе, которая была описана выше. В точности, как в § 11—12, вычисление ряда Фурье этой функции сводится к суммированию S'_a по Пуассону. Кроме того, S'_a можно выразить через S'_0 с помощью формулы, ничем не отличающейся от (31).

Для S'_0 формулы Фурье дают

$$S'_0 = \eta'^{-s} \sum_{\nu} \psi(\eta', y+\nu)\, \mathbf{e}[(y+\nu)\xi],$$

где функция ψ определяется как интеграл

$$\psi(\eta', y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\eta' + \frac{t^2}{\eta'}\right)^{-s} \mathbf{e}(-ty)\, dt$$

вдоль вещественной t-оси. Применяя к нему преобразование Дирихле, получаем при $y \neq 0$

$$\Gamma(s)\, \psi(\eta', y) = 2\sqrt{\pi\eta'}\, |\pi y|^z K_z(2Y)$$
$$\left(z = s - \frac{1}{2},\ Y = \pi |y| \eta'\right),$$

а при $y = 0$

$$\Gamma(s)\, \psi(\eta', 0) = \eta'^{1-s} \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right).$$

После этого те же выкладки, что и в § 12, приводят к тождеству (39); нужно лишь заменить $|\eta|$ на η' и положить $\varepsilon = \delta \operatorname{sgn}(y+\nu)$. Оценки, обеспечивающие сходимость, остаются теми же ввиду очевидного неравенства

$$|K_z(2Y)| \leqslant K_{\mathrm{Re}(z)}[2\,\mathrm{Re}(Y)].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Malmstén C. J., De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis, *Crelles J.*, 38 (1849), 1—39.

2. Lipschitz R., Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe, *Crelles J.*, **54** (1857), 313—328.

3. Hurwitz A., Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Funktionen $F(s) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten, *Zeitschr. für Math. Phys.*, **27** (1882), 86—101 (Math. Werke, Bd. I, 72—88).

4. Lerch M., Note sur la fonction $\mathfrak{R}(w, x, s) = \sum_{0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi ix}}{(w+k)^s}$, *Acta Math.*, **11** (1887—88), 19—24.

5. Lipschitz R., Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen, *Crelles J.*, **105** (1889), 127—156.

6. Lerch M., Sur certains développements en séries trigonométriques, *Ann. Toulouse* (I), **3** (1889), 1—11.

7. Lerch M., (a) Grundzüge der Theorie der Malmsténschen Reichen, Rozpravy česke akad., I, № 27 (1892); (b) Studien auf dem Gebiete der Malmstén'schen Reihen, ibid. II, № 4, 23 (1893); (c) Weitere Studien ..., ibid. III, № 28 (1894) (эти статьи написаны по-чешски; см. также их авторские рефераты в Jarhbuch über die Fortschr. d. Math., 1892, S. 446—452; 1893—94, S. 790—793, 484—486).

8. Lerch M., Über den Kronecker'schen Beweis der sogenannten Kronecker'schen Grenzformel, *Arch. Math. Phys.* (III), **6** (1904), 85—94.

глава VIII

Двойной ряд Кронекера

§ 1. Как в первой части, мы выберем некоторую решетку W в комплексной плоскости и две ее образующие u, v. Таким образом, W состоит из точек вида $w = \mu u + \nu v$, где μ, ν — целые числа. Символом χ обозначим некоторый характер аддитивной группы W. Иногда мы будем писать $\chi(\mu, \nu)$ вместо $\chi(\mu u + \nu v)$.

Все двойные ряды, которыми занимался Кронекер к концу жизни, имели вид

$$\sum \chi(w)(\bar{x} + \bar{w})^a |x + w|^{-2s}. \tag{1}$$

Он же ввел большую часть технических средств в теории таких рядов. Однако в указанной общности эти ряды рассматривал лишь Лерх, находившийся под влиянием работ Кронекера. Сам Кронекер до 1889 г. ограничивался рассмотрением случая $a = 0$, $x = 0$ (т. е. ряда (1) гл. VII, § 1) и интересовался главным образом значением в точке $s = 1$. В 1890 и 1891 годах (особенно в последний год, отчасти под влиянием переоткрытия работ Эйзенштейна) он стал придавать особое значение случаю $a = s = 1$, т. е. ряду

$$\sum_{w \in W} \frac{\chi(w)}{x + w}. \tag{2}$$

По-видимому, к этому времени Кронекер начал рассматривать ряд (1) как ключ ко всей теории эллиптических функций (Werke, т. V, стр. 103—104). Начнем с изложения его основных результатов о таких рядах.

Кронекер экспериментировал с разными методами суммирования, включая метод

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{\mu=-N}^{N}\ \sum_{\nu=-N}^{N}\right)$$

и даже вариант «суммирования по Кронекеру», исходя из странного ряда $\sum\chi(w)(x+w)^{-1}$ (Werke, т. V, стр. 104—127). В конце концов он счел суммирование по Эйзенштейну самым подходящим. Этот метод мы и изложим ниже.

§ 2. Как в главах III и IV, положим

$$\zeta=x/u,\quad \tau=\delta v/u,\quad z=\mathbf{e}(\zeta),\quad q=\mathbf{e}(\tau).$$

Пусть, далее,

$$\chi(u)=\mathbf{e}(-\delta\beta_0),\quad \chi(v)=\mathbf{e}(\delta\alpha_0),\quad x_0=\alpha_0u+\beta_0v,$$
$$\zeta_0=x_0/u,\quad z_0=\mathbf{e}(\zeta_0).$$

В этих обозначениях сумму ряда (2) в надлежащей интерпретации Кронекер записывает в виде $\operatorname{Ser}(x_0, x, u, v)$. Будем считать, что $x\notin W$; кроме того, временно предположим, что $\chi(u)\neq 1$. Тогда можно выбрать β_0 таким образом, что $0<\delta\beta_0<1$. Так как $|z_0|=|q|^{\delta\beta_0}$, имеем $1>|z_0|>|q|$.

В силу формулы (6) гл. VII, § 4, получаем

$$\sum_{\mu}\frac{\chi(\mu u+\nu v)}{x+\mu u+\nu v}=\frac{2\pi i}{u}\,\mathbf{e}\left(\frac{\delta\beta_0x}{u}\right)\frac{z_0^{\delta\nu}}{q^{\delta\nu}z-1}.$$

Ряд слева сходится в обычном смысле слова. Поскольку $1>|z_0|>|q|$, сумма правых частей этого равенства по ν абсолютно сходится. Таким образом,

$$\sum\nolimits_e\frac{\chi(w)}{x+w}=\frac{2\pi i}{u}\,\mathbf{e}\left(\frac{\delta\beta_0x}{u}\right)F(q, z, z_0), \tag{3}$$

где функция F определяется при $1>|w|>|q|$ рядом

$$F(q, z, w)=\sum_{\nu}\frac{w^{\nu}}{q^{\nu}z-1}. \tag{4}$$

В случае $1>|z|>|q|$ это равенство можно переписать в более симметричной форме

$$F(q, z, w)=1-\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-w}+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}q^{mn}\left(z^{-m}w^{-n}-z^{m}w^{n}\right).$$

§ 3. Теперь, довольно близко следуя Кронекеру (Werke, т. IV, стр. 309—318), мы покажем, что функцию F можно следующим образом выразить через бесконечные произведения $X_q(z)$, $P(q)$, введенные в гл. IV, § 3:

$$F(q, z, w) = \frac{P(q)^2 X_q(zw)}{X_q(z) X_q(w)}. \tag{5}$$

Фиксировав q, обозначим правую часть этой формулы через $\Phi(z, w)$. Очевидно, что $\Phi(z, w)$ как функция от w мероморфна при $w \neq 0$ и имеет полюсы в нулях X_q, т. е. в точках $w = q^\nu$. Следовательно, при $1 > |w| > |q|$ ее можно разложить в ряд Лорана

$$\Phi(z, w) = \sum_\nu f_\nu(z) w^\nu.$$

Формула (19) гл. IV, § 5 показывает, что

$$\Phi(z, w) = w\Phi(qz, w) = z\Phi(z, qw). \tag{6}$$

Согласно первому из этих равенств, получаем, что для всех ν

$$f_\nu(z) = f_0(q^\nu z).$$

Второе равенство показывает, что при $|q|^{-1} > |w| > 1$ имеем

$$\Phi(z, w) = \sum_\nu z f_\nu(z) q^\nu w^\nu.$$

Пусть γ, γ' — окружности $|w| = |q|^{1/2}$, $|w| = |q|^{-1/2}$ в w-плоскости, ориентированные против часовой стрелки. Интегралы от $(2\pi i w)^{-1}\Phi(z, w)dw$ вдоль γ и γ' равны $f_0(z)$ и $zf_0(z)$ соответственно. По теореме Коши разность этих двух интегралов равна вычету $w^{-1}\Phi$ в точке $w = 1$. Этот вычет равен единице, потому что $P(q)^2$ совпадает с производной $X_q(w)$ в точке $w = 1$. Поэтому $(z-1)f_0(z) = 1$, что завершает доказательство тождества (5).

§ 4. Теперь мы определим функцию $F(q, z, w)$ формулой (5) для всех значений z, w. Заменим x_0 на $x_0 + w_0$, где $w_0 \in W$. Тогда z_0 заменится на $q^\nu z_0$, где ν — некоторое целое число. Формула (6) показывает, что правая часть (3) не изменится. В частности, формула (3) останется верной при условии, что $\chi(u) \neq 1$. Если $\chi \neq 1$, но $\chi(u) = 1$, то левая часть (3) не будет сходиться даже по Эйзенштейну. Все же, если заменить суммирование $\sum_e$ подходящим его вариантом, то формула (3), в которой $F(q, z, w)$ определяется по-прежнему посредством (5), останется верной. Это нетрудно проделать, пользуясь результатами гл. II.

Учитывая формулу (15) гл. IV, § 3, мы можем переписать формулы (3) и (5) в виде

$$\sum\nolimits_e \frac{\chi(w)}{x+w} = \mathbf{e}\left(\frac{\delta\beta_0 x}{u}\right)\frac{\varphi(x+x_0)}{\varphi(x)\,\varphi(x_0)} \tag{7}$$

при условии, что $\chi(u)\neq 1$. Из формулы (17) гл. IV, § 4 непосредственно видно, что правая часть не зависит от выбора образующих u, v решетки W.

§ 5. Это последнее утверждение можно получить и другим способом. Положим

$$\lambda(w, s) = \chi(w)(\bar{x}+\bar{w})|x+w|^{-2s}$$

и рассмотрим ряд $\sum\lambda(w, s)$. При $s=1$ он формально совпадает с рядом в левой части (7). Предположим, что $x\notin W$ и что $\chi(u)\neq 1$. Пользуясь результатами гл. VII, § 4 и § 11, мы можем заключить, что

$$\sum_{\mu}\lambda(\mu u+\nu v,\ s) = \chi(\nu v)\,\bar{u}\,|u|^{-2s}S_1(\zeta+\delta\nu\tau,\ \delta\beta_0,\ s). \tag{8}$$

Левая часть здесь сходится в обычном смысле при $\mathrm{Re}(s)>{}^1/_2$: это доказано в гл. VII, § 4. Правая часть определяется с помощью формулы (29) гл. VII, § 11 при $\mathrm{Re}(s)>1$ и с помощью формул (39) и (41) гл. VII, § 12 для произвольных s. Формула (40) гл. VII, § 12 здесь не нужна, потому что $x\notin W$ и, следовательно, величина $\zeta+\delta\nu\tau$ не может лежать в $\mathbf{Z}$. При $\mathrm{Re}(s)>1$ тождество (8) справедливо; поэтому оно остается верным при $\mathrm{Re}(s)>{}^1/_2$ в силу принципа аналитического продолжения.

Просуммируем теперь тождество (8) по ν. Подставив вместо S_1 справа выражение этой функции в виде ряда (39) гл. VII, § 12, мы получим двойной ряд, абсолютно сходящийся для всех s. (Для проверки этого хватает грубых оценок функции Бесселя K_z и, следовательно, Φ_ε, данных в конце гл. VII, § 12.) Отсюда находим

$$\sum\nolimits_e \frac{\chi(w)}{x+w} = \sum_{\nu}\Bigl(\sum_{\mu}\lambda(w, 1)\Bigr) = \lim_{s\to 1}\sum_{\nu}\Bigl(\sum_{\mu}\lambda(w, s)\Bigr)$$

при условии, что $x\notin W$ и $\chi(u)\neq 1$. Предел справа берется по $s>1$, $s\to 1$. Поскольку двойной ряд справа абсолютно сходится при $s>{}^3/_2$ и потому его сумма не зависит от выбора образующих u, v решетки W, то же верно при аналитическом продолжении вдоль вещественной оси в s-плоскости. Значит, и левая часть обладает этим свойством.

§ 6. Перейдем теперь к ряду Кронекера

$$G(s, \chi) = \sum{}' \chi(w) |w|^{-2s},$$

где $\sum{}'$, как обычно, обозначает сумму по всем $w \in W$, кроме нуля. Как прежде, положим $w = \mu u + \nu v$, $|w|^2 = F(\mu, \nu)$, $\chi(w) = \chi(\mu, \nu)$. Тогда

$$G(s, \chi) = \sum{}' \chi(\mu, \nu) F(\mu, \nu)^{-s}, \tag{9}$$

где F — положительно определенная квадратичная форма. Наоборот, любую такую форму можно представить в виде $|\mu u + \nu v|^2$. Решетка W допускает комплексное умножение (в смысле гл. V, § 6) тогда и только тогда, когда F можно представить в виде $F = cF_1$, где F_1 — форма с целыми коэффициентами.

Ряды типа (9) с $\chi = 1$ и для формы F с целыми коэффициентами впервые появились в работе Дирихле о числе классов бинарных квадратичных форм. Он установил, что представленная этим рядом функция имеет в точке $s = 1$ простой полюс с вычетом $2\pi D^{-1/2}$, где $-D$ — дискриминант формы F. Его доказательство проходит и для форм с нецелыми коэффициентами.

Основные результаты Кронекера состоят в вычислении (a) значений $G(1, \chi)$ при $\chi \neq 1$; (b) постоянного члена в разложении $G(s, 1)$ вблизи $s = 1$. Последний результат известен как «предельная формула» («Kroneckersche Grenzformel»). Иногда ее называют «первой предельной формулой», а предыдущую — «второй». Сам Кронекер вывел результат (b) из (a), сначала для форм с целыми коэффициентами (Werke, т. IV, стр. 376—379), а затем в общем случае (Werke, т. IV, стр. 482—495)[1]. Кронекер несколько раз отмечал, что его формулы можно обобщить также на случай бинарной квадратичной формы с положительно определенной вещественной частью (ср. выше, гл. VII, § 13). Это нетрудно сделать, пользуясь результатами гл. VII, § 13, но мы не будем касаться этого случая здесь.

§ 7. Позднейшие авторы (М. Лерх, Х. Вебер и другие) обнаружили, что работать непосредственно с $G(s, 1)$ еще проще. Их доказательства мало отличаются друг от друга. Здесь

---

[1]) Общее доказательство «первой предельной формулы» получил Х. Вебер еще в 1881 г. под влиянием статьи Кронекера 1863 г.; см. Werke, т. IV, стр. 221—225, а также Dedekind, Werke, т. II, стр. 225. Доказательство Вебера опубликовано в *Math. Ann.*, **33** (1889), 392—395.

мы следуем статье Чоула — Сельберга, *Crelles J.*, **227** (1967), 86—110. В обозначениях гл. VII, § 4 и § 11 имеем

$$G(s,1)=|u|^{-2s}\sum_{\mu,\,\nu}{}'|\mu+\nu\tau|^{-2s}=|u|^{-2s}\sum_{\nu}S_0(\nu\tau,0,s),\qquad(10)$$

где ряд справа абсолютно сходится при $\mathrm{Re}(s)>1$.

Член $S_0(0,0,s)$ здесь совпадает с $2\zeta(2s)$. Формула (15) гл. VII, § 7 дает для него хорошо известное функциональное уравнение. Формула (14) того же параграфа показывает, что у этой функции имеется единственный полюс в точке $s={}^1/_2$ с вычетом единица. После этого из формулы (15) вытекает, что $2\zeta(0)=-1$, а из формулы (23) гл. VII, § 9 следует, что $2\zeta'(0)=-\log(2\pi)$. Наконец, снова применяя формулу (15) и стандартные сведения о $\Gamma(s)$, находим, что постоянный член в разложении $\zeta(2s)$ вблизи $s={}^1/_2$ совпадает с константой Эйлера $\gamma=-\Gamma'(1)$.

Рассмотрим теперь члены ряда в правой части (10), отвечающие значениям $\nu\neq0$. Положим $\tau=\xi+i\omega$. В силу определения τ имеем $\omega>0$. Для вычисления S_0 используем формулы (32), (35), (37) гл. VII, § 12. Получаем

$$S_0(\nu\tau,0,s)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-{}^1/_2)\,\Gamma(s)^{-1}|\omega\nu|^{1-2s}+$$
$$+2\pi^s\Gamma(s)^{-1}\sum_{\rho}{}'|\rho/\omega\nu|^z K_z(2\pi\omega|\nu\rho|)\,\mathbf{e}(\nu\rho\xi),\qquad(11)$$

где $z=s-{}^1/_2$. Подставляя это выражение в (10), находим

$$|u|^{2s}G(s,1)=2\zeta(2s)+2\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(s-\frac{1}{2}\Big)\Gamma(s)^{-1}\omega^{1-2s}\zeta(2s-1)+$$
$$+2\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)^{-1}(\pi/\omega)^z G_1(z),\qquad(12)$$

где через $G_1(z)$ обозначен двойной ряд

$$G_1(z)=\sum_{\nu}{}'\sum_{\rho}{}'|\rho/\nu|^z K_z(2\pi\omega|\nu\rho|)\,\mathbf{e}(\nu\rho\xi).\qquad(13)$$

С помощью оценок для K_z, выведенных в конце гл. VII, § 12, нетрудно проверить, что этот двойной ряд абсолютно сходится при любом z и представляет целую функцию от z. Меняя местами ν и ρ в формуле (13), убеждаемся, что эта функция четная.

§ 8. Принимая во внимание функциональное уравнение для функции ζ и известные тождества для $\Gamma(s)$, мы можем переписать формулу (12) в более удобном виде:

$$|u|^{2s}G(s,1)=2\zeta(2s)+2\Gamma(1-s)\,\Gamma(s)^{-1}(\pi/\omega)^{2s-1}\zeta(2-2s)+$$
$$+2\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)^{-1}(\pi/\omega)^z G_1(z).\qquad(14)$$

Умножив ее на $\Gamma(s)(\pi/\omega)^{-z}$, получим четную функцию по z. Это и есть «функциональное уравнение» для $G(s, 1)$; в § 13 мы докажем более общий результат. Из этой формулы видно также, что $G(s, 1)$ не имеет в s-плоскости полюсов вне точки $s = 1$, а ее вычет в этой точке равен $\pi/(\omega u\bar{u})$, или, что то же самое, $2\pi D^{-1/2}$, где $-D$ — дискриминант квадратичной формы $F(\mu, \nu)$. Это установил Дирихле. Формула (14) показывает также, что $G(0, 1) = -1$.

Для вычисления следующего члена в разложении $G(s, 1)$ как в точке $s = 0$, так и $s = 1$, нам нужно определить значение $G_1(^1/_2)$. Хорошо известно, что $K_{1/2}(2Y) = \frac{1}{2}(\pi/Y)^{1/2} e^{-2Y}$. Это нетрудно проверить непосредственно, сделав замену переменной $t^{1/2} - t^{-1/2} = \theta$ в интеграле (36) гл. VII, § 12. Отсюда следует, что

$$\sqrt{\omega}\, G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum_{\rho=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu}(q^{\nu\rho} + \bar{q}^{\nu\rho}) = -\log[P(q)P(\bar{q})].$$

Мы положили здесь $q = \mathbf{e}(\tau)$, как обычно; $\bar{q} = \mathbf{e}(-\bar{\tau})$ — комплексно сопряженная величина; $P(q)$ — бесконечное произведение, определенное формулой (14) гл. IV, § 3.

Пользуясь доказанными выше свойствами $\zeta(s)$ и известными свойствами $\Gamma(s)$, мы можем теперь вычислить первые два члена разложений $G(s, 1)$ в точках $s = 1$ и $s = 0$. В формулах естественно появляется «дискриминант» $\Delta = \Delta(W)$, определенный выражением (36) гл. IV, § 11. Введем, как в гл. VI, § 2, обозначения

$$u\bar{v} - v\bar{u} = -\delta u\bar{u}(\tau - \bar{\tau}) = -2i\delta\omega u\bar{u} = -2\pi i\,\delta A, \tag{15}$$

где константа $A = \omega u\bar{u}/\pi$ зависит только от решетки W, но не от выбора образующих u, v этой решетки.

Разложение $G(s, 1)$ вблизи $s = 1$ начинается с членов

$$AG(s, 1) = \frac{1}{s-1} + 2\gamma - \log(A^2) - \frac{1}{12}\log(\Delta\bar{\Delta}) + \ldots, \tag{16}$$

где γ — постоянная Эйлера, а опущенные слагаемые обращаются в нуль в точке $s = 1$. Это и есть предельная формула Кронекера.

Вблизи точки $s = 0$ имеем

$$G(s, 1) = -1 - \frac{s}{12}\log(\Delta\bar{\Delta}) + \ldots. \tag{17}$$

Функциональное уравнение для $G(s, 1)$ позволяет легко вывести любую из этих формул из другой. Как часто случается с рядами Дирихле арифметического типа, формула для $s=0$ проще.

§ 9. Теперь мы рассмотрим поведение функций $G(s, \chi)$ с $\chi \neq 1$, в частности, в точке $s=1$. Вычисляя $G(1, \chi)$ через известные функции, мы стоим перед выбором одного из двух методов суммирования — по Эйзенштейну или по Кронекеру. Мы покажем, что оба метода дают один и тот же результат. Когда сам Кронекер занимался этим рядом (Werke, т. IV, стр. 347—351), он пользовался (несомненно, не зная этого) важной идеей метода Эйзенштейна.

В обозначениях § 2 мы можем формально написать:

$$G(s, \chi)=\sum_{\mu, \nu}{}' F(\mu, \nu)^{-s} \chi(\mu u+\nu v)=$$
$$=\sum_{\mu, \nu}{}' |u|^{-2s} |\mu+\delta\nu\tau|^{-2s} \mathbf{e}(-\delta\beta_0\mu+\delta\alpha_0\nu)=\sum_{\nu} A_\nu(s), \quad (18)$$

где

$$A_\nu(s)=|u|^{-2s} S_0(\nu\tau, \delta\beta_0, s)\, \mathbf{e}(\alpha_0\nu) \quad (19)$$

и функция S_0, как всегда, определяется формулой (4) гл. VII, § 4. При $\operatorname{Re}(s)>1$ все ряды здесь абсолютно сходятся.

Положим $s=1$. Из формулы (8) гл. VII, § 4 следует, что

$$A_0(1)=\frac{2\pi^2}{u\bar{u}}\left(\beta_0^2-\delta\beta_0+\frac{1}{6}\right) \qquad (0 \leqslant \delta\beta_0<1). \quad (20)$$

Чтобы вычислить $A_\nu(1)$ при $\nu \neq 0$, Кронекер исходит из тождества, по существу совпадающего с тождеством (1) гл. II, § 2, которое было отправным пунктом и для Эйзенштейна:

$$F(\mu, \nu)^{-1}=(\mu u+\nu v)^{-1}(\mu \bar{u}+\nu \bar{v})^{-1}=$$
$$=(2i\delta\omega u\bar{u})^{-1}\left(\frac{\nu^{-1}}{\mu+\delta\nu\bar{\tau}}-\frac{\nu^{-1}}{\mu+\delta\nu\tau}\right). \quad (21)$$

В действительности в этом месте (Werke, т. IV, стр. 350—351) Кронекер работает с квадратичной формой F с положительно определенной вещественной частью (ср. гл. VII, § 13). Этот случай, более общий, чем рассматриваемый здесь, можно разобрать в точности тем же методом.

Предположим сначала, что $0<\delta\beta_0<1$. Вычислим $A_\nu(1)$ с помощью формулы (6) гл. VII, § 4 и тождества (21). Получим

$$A_\nu(1)=\sum_{\mu} F(\mu, \nu)^{-1} \chi(\mu u+\nu v)=A^{-1}[f_{\delta\nu}(\tau, \zeta_0)-f_{\delta\nu}(\bar{\tau}, \bar{\zeta}_0)], \quad (22)$$

где ζ_0 определена, как в § 2, а функция f_ν определена для всех $\nu \neq 0$ формулой

$$f_\nu(\tau, \zeta_0) = \nu^{-1} \frac{\mathbf{e}(\nu\zeta_0)}{1 - \mathbf{e}(\nu\tau)} = \frac{\nu^{-1} z_0^\nu}{1 - q^\nu}.$$

Следует заметить, что ряд (22) абсолютно сходится. Поскольку $\mathbf{e}(\bar{\zeta}_0) = \bar{z}_0^{-1}$, $\mathbf{e}(\bar{\tau}) = \bar{q}^{-1}$, имеем

$$f_{-\nu}(\bar{\tau}, \bar{\zeta}_0) = -\frac{\nu^{-1} \bar{z}_0^\nu}{1 - \bar{q}^\nu}.$$

Бесконечное произведение $X_q(z)$, определенное в гл. IV, § 3, можно записать в виде

$$X_q(z) = -z^{-1/2} \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - q^n z)(1 - q^{n+1} z^{-1}).$$

При $1 > |z| > |q|$ получим

$$\log(-z^{1/2} X_q(z)) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{-1}(q^{n\nu} z^\nu + q^{(n+1)\nu} z^{-\nu}) =$$
$$= -\sum{}' f_\nu(\tau, \zeta).$$

Все ряды здесь абсолютно сходятся. Если $|z| = 1$, $z \neq 1$, формула Абеля суммирования по частям (см. гл. VII, § 4) показывает, что правая часть продолжает сходиться в обычном смысле слова. Поэтому формула остается верной по непрерывности. Заменим в ней q, z сначала на q, z_0, а затем на $\bar{q}$, $\bar{z}_0$. Предполагая теперь, что $0 \leqslant \delta\beta_0 < 1$, имеем $1 \geqslant |z_0| > |q|$. Кроме того, в прежних обозначениях, $\log|q| = -2\pi\omega$ и $\log|z_0| = -2\pi\delta\beta_0\omega$. Объединяя все полученные тождества, находим окончательно

$$\sum\nolimits_e' \chi(w)\, |w|^{-2} = A_0(1) + \sum_\nu{}' A_{\delta\nu}(1) =$$
$$= \frac{2\pi^2}{u\bar{u}} \left(\beta_0^2 + \frac{1}{6}\right) - A^{-1} \log[X_q(z_0)\, X_{\bar{q}}(\bar{z}_0)]. \qquad (23)$$

Мы установили эту формулу при $0 \leqslant \delta\beta_0 < 1$. Но левая часть ее не зависит от выбора β_0 при данном χ. Что касается правой части, то, пользуясь формулой (19) гл. IV, § 5, нетрудно установить, что она не меняется при замене β_0 на $\beta_0 + 1$ и соответственно z_0 на $q^\delta z_0$. Поэтому формула (23) верна без ограничений, если только $\chi \neq 1$.

§ 10. Теперь рассмотрим суммирование по Кронекеру. В формуле (19) при $\nu \neq 0$ заменим $S_0(\nu\tau, \delta\beta_0, s)$ его значением по формуле (32) гл. VII, § 12. Соответствующий ряд состоит из членов вида (37) (тот же параграф), содержащих функцию K_z с $z = s - {}^1/_2$, и, если β_0 — целое число (т. е. $\chi(u) = 1$), из еще одного члена, определяемого формулой (35) того же параграфа. Все члены, содержащие K_z, образуют двойной ряд, сумму которого мы обозначим $C(s)$. С другой стороны, при $\chi(u) = 1$ соберем вместе все члены вида (35). Их сумма имеет вид

$$B(s) = \sum_{\nu}{}' |u|^{-2s} \mathbf{e}(\alpha_0\nu) \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \Gamma(s)^{-1} |\omega\nu|^{1-2s} =$$

$$= |u|^{-2s} \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \Gamma(s)^{-1} \omega^{1-2s} S_0\left(0, -\alpha_0, s - \frac{1}{2}\right). \tag{24}$$

При $\chi(u) \neq 1$ положим $B(s) = 0$.

Таким образом, при $\mathrm{Re}(s) > 1$ имеем

$$\sum{}' \chi(w) |w|^{-2s} = A_0(s) + B(s) + C(s). \tag{25}$$

Грубая оценка K_z, указанная в конце гл. VII, § 12, показывает, что двойной ряд $C(s)$ абсолютно сходится при всех s и представляет целую функцию от s. Формула (14) гл. VII, § 7 показывает, что функции $A_0(s)$ и $B(s)$ мероморфны во всей s-плоскости. Точнее говоря, функция $A_0(s)$ цела, если только $\chi(u) \neq 1$; при $\chi(u) = 1$ она имеет единственный простой полюс в точке $s = {}^1/_2$ с вычетом $|u|^{-1}$. Если $\chi(u) = 1$, функция $B(s)$ имеет полюс с вычетом $-|u|^{-1}$ в точке $s = {}^1/_2$, а если к тому же α_0 — целое число, т. е. $\chi(v) = 1$, у нее имеется дополнительный полюс в точке $s = 1$ с вычетом A^{-1}. При $\chi = 1$ мы снова получаем результат, доказанный в § 8. В остальных случаях это рассуждение показывает, что функция (25) цела по s.

§ 11. При $\mathrm{Re}(s) > 1$ левая часть (25) зависит только от решетки W и характера χ, но не от выбора образующих u, v решетки W. Следовательно, то же верно относительно правой части при $\mathrm{Re}(s) > 1$. Аналитическое продолжение позволяет распространить это утверждение на все значения s. Рассмотрим теперь ряд $\sum A_\nu(s)$. Если $\chi(u) \neq 1$, он абсолютно сходится при всех s, ибо этим свойством обладает ряд $C(s)$. При $\chi(u) = 1$ его значение в точке $s = 1$ совпадает с правой частью (23). Иными словами, «суммирование по Кронекеру» приводит к тому же значению $G(s, \chi)$, что и «суммирование по Эйзенштейну».

Это показывает заодно, что левая и правая части тождества (23) не зависят от выбора образующих u, v решетки W, если только $\chi(u) \neq 1$. По непрерывности, то же верно при

$\chi(u)=1$, если $\chi\neq 1$. Для правой части это можно проверить и непосредственно, пользуясь формулами (15), (17) и (25) гл. IV. Третье доказательство, основанное на представлении функции $X_q(z_0)X_{\bar q}(\bar z_0)$ двойным тэта-рядом, который зависит только от квадратичной формы F, можно найти у Кронекера (Werke, т. IV, стр. 354—355). Ср. также лекции Зигеля в Бомбее, на которые мы ссылались в гл. VII, § 13, стр. 81.

§ 12. Известны два метода аналитического продолжения всех рядов типа (1), оба восходящие к Кронекеру. Первым из них мы пользовались в применении к ряду $G(s,\chi)$. Достаточно будет описать его вкратце в общем случае.

В обозначениях § 2 и с константой A, определенной формулой (15) § 9, имеем

$$\chi(w)=\exp[A^{-1}(\bar x_0 w - x_0\bar w)]. \tag{26}$$

Обозначим функцию, представленную рядом (1) при $\mathrm{Re}(s)>\frac{a}{2}+1$, символом

$$K_a(x, x_0, s)=\sum\nolimits^{*}\chi(w)(\bar x+\bar w)^a|x+w|^{-2s}. \tag{27}$$

Сумма $\sum^{*}$ берется по всем $w\in W$, кроме $-x$, если $x\in W$. Результат зависит только от x, x_0, s и решетки W. При необходимости мы будем обозначать его также $K_a(x, x_0, s; W)$. Как всегда, a — целое неотрицательное число.

В обозначениях гл. VII, § 7 и 11, имеем

$$K_a(x, x_0, s)=\sum_{\nu}\bar u^a|u|^{-2s}S_a(\zeta+\nu\tau,\ \delta\beta_0 s)\,\mathbf{e}(\alpha_0\nu). \tag{28}$$

Положив, как выше, $x=\alpha u+\beta v$ с вещественными α, β, получим $\zeta=\alpha+\delta\beta\tau$. Число $\zeta+\nu\tau$ будет вещественным, если $\nu=-\delta\beta$. В случае когда β целое, мы будем обозначать символом $A(s)$ тот член правой части (28), который отвечает $\nu=-\delta\beta$:

$$\begin{aligned}A(s)&=\bar u^a|u|^{-2s}S_a(\alpha,\ \delta\beta_0,\ s)\,\mathbf{e}(-\delta\beta\alpha_0)=\\&=\bar u^a|u|^{-2s}S_b\Big(\alpha,\ \delta\beta_0,\ s-\frac{a-b}{2}\Big)\,\mathbf{e}(-\delta\beta\alpha_0),\end{aligned}$$

где $b=0$ или 1, $b\equiv a \bmod 2$. Если число β не целое, положим $A(s)=0$.

Ко всем остальным слагаемым в правой части формулы (28) применима формула (39) гл. VII, § 12. С ее помощью каждое слагаемое представляется в виде ряда, члены которого задаются формулой (41) того же параграфа, за исключением, возможно, одного слагаемого, которое определяется формулой (40) и присутствует в том и только том случае, когда β_0 — целое число. В этом последнем случае соберем вместе все слагаемые вида (40) и обозначим сумму этого ряда через $B(s)$. Имеем

$$i^a\bar{u}^{-a}|u|^{2s}\omega^{2s-a-1}B(s)=$$

$$=2^{a+2-2s}\pi\frac{\Gamma(2s-a-1)}{\Gamma(s)\Gamma(s-a)}S_a\left(\delta\beta,\,-\alpha_0,\,s-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(s-\frac{a+b}{2}\right)}{\Gamma(s)\Gamma(s-a)}\,\Gamma\left(s-\frac{a+1-b}{2}\right)S_b\left(\delta\beta,-\alpha_0,s-\frac{a+1-b}{2}\right),$$

где b определено выше. Если же β_0 не целое, положим $B(s)=0$.

Сумму всех остальных членов, определяемых формулой (41) гл. VII, § 12, обозначим через $C(s)$. Функция $C(s)$ определяется двойным рядом, все члены которого содержат функцию Бесселя K_z. Наши прежние оценки показывают, что этот ряд абсолютно сходится при всех s и является целой функцией от s. Функции $A(s)$ и $B(s)$, когда они не обращаются в нуль, вычисляются с помощью формулы (14) гл. VII, § 7. Они мероморфны во всей s-плоскости и имеют не более чем простые полюсы при $b=0$ в точках $s=\frac{a+1}{2}$ и $s=\frac{a}{2}+1$. Вычисление вычетов в этих полюсах с помощью формулы (14) гл. VII, § 7 показывает, что на самом деле только точка $s=1$ может быть полюсом и только в случае $a=0$, $\chi=1$.

§ 13. К тем же результатам можно прийти и, видимо, еще более естественно, если воспользоваться другим методом аналитического продолжения простого ряда $S_a(x,y,s)$. Для вещественных значений x это метод гл. VII, § 7.

Применив преобразование Дирихле к формуле (27), получим

$$\Gamma(s)\,K_a(x,\,x_0,\,s)=\int\limits_0^{+\infty}\Theta_a^*(t,\,x,\,x_0)\,t^{s-1}\,dt, \tag{29}$$

где мы положили

$$\Theta_a^*(t,\,x,\,x_0)=\sum\nolimits^*\exp\left[-t\,|x+w|^2\right]\chi(w)\,(\bar{x}+\bar{w})^a=$$

$$=\sum\nolimits^*\exp\left[-t\,|x+w|^2+A^{-1}(\bar{x}_0w-x_0\bar{w})\right](\bar{x}+\bar{w})^a.$$

Суммирование $\sum^*$ производится по всем точкам решетки $w\in W$, кроме $-x$, как и выше. Аналогичную сумму, распространенную на все точки решетки, обозначим через Θ_a.

Таким образом, $\overset{*}{\Theta}_a = \Theta_a - \chi(-x)$, если $a = 0$ и $x \in W$; $\overset{*}{\Theta}_a = \Theta_a$ в остальных случаях.

Продолжим χ до характера аддитивной группы $\mathbf{C}$, положив для любого $x \in \mathbf{C}$

$$\chi(x) = \exp\left[A^{-1}(\bar{x}_0 x - x_0 \bar{x})\right].$$

Функция $\Theta_a(t, x, x_0)\chi(x)$ периодична по x с решеткой периодов W. Представив снова x в виде $\alpha u + \beta v$, получим, что она периодична по α, β с периодом единица. Можно разложить эту функцию в ряд Фурье по α, β, вычислив его коэффициенты по формулам Фурье. Это то же самое, что применять к Θ_a формулу суммирования Пуассона. Еще удобнее преобразовать таким образом Θ_0 и затем вычислить Θ_a как a-кратную производную Θ_0 по x (в гл. VII, § 7 мы поступили таким же образом с простым тэта-рядом). Получим

$$\Theta_a(t, x, x_0) = (At)^{-a-1}\,\Theta_a\left(A^{-2}t^{-1}, x_0, x\right)\chi(-x). \qquad (30)$$

Теперь разобьем интеграл (29) в сумму интегралов по $0 < t \leqslant T$ и по $t > T$. Второй из них, который мы обозначим $I_\infty(T, x, x_0, a, s)$, абсолютно сходится для всех s и определяет целую функцию от s. В первом интеграле выразим $\overset{*}{\Theta}_a$ через Θ_a, применим формулу (30) и, наконец, произведем замену переменной $t = A^{-2}u^{-1}$. Получим

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\,K_a(x, x_0, s) = I_\infty(T, x, x_0, a, s) + \\ + A^{a+1-2s} I_\infty\left(A^{-2}T^{-1}, x_0, x, a, a+1-s\right)\chi(-x) - \\ - \varepsilon\,\frac{T^s}{s}\,\chi(-x) + \varepsilon' A^{-a-1}\,\frac{T^{s-a-1}}{s-a-1},\end{aligned} \qquad (31)$$

где $\varepsilon = 1$, если $a = 0$, $x \in W$; $\varepsilon = 0$ в противном случае; $\varepsilon' = 1$, если $a = 0$, $x_0 \in W$; $\varepsilon' = 0$ в противном случае.

В результате получится мероморфное аналитическое продолжение левой части (29) на всю s-плоскость. Полюсы могут лежать только в точках $s = 0$ (если $a = 0$, $x \in W$) и $s = 1$ (если $a = 0$, $x_0 \in W$). При $a = 0$, $x \in W$ вычет в точке $s = 0$ равен $-\chi(-x)$, т. е. -1 при $x = 0$. Если $a = 0$, $x_0 = 0$ (т. е. $\chi = 1$), вычет в точке $s = 1$ равен A^{-1}.

Положив $T = A^{-1}$ в формуле (31), получим функциональное уравнение

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\,K_a(x, x_0, s) = \\ = A^{a+1-2s}\Gamma(a+1-s)\,K_a(x_0, x, a+1-s)\chi(-x).\end{aligned} \qquad (32)$$

Заметим еще, что при $\operatorname{Re}(s) > \frac{a}{2} + 1$ функция $K_a(x, 0, s)$ четна или нечетна по x в зависимости от четности или нечетности a и периодична по x с решеткой периодов W. Аналитическое продолжение показывает, что это остается верным при всех s.

§ 14. Теперь мы в состоянии решить вопрос, рассмотрение которого было отложено на будущее в конце гл. VI. Функции $E_{a,b}$, $E^*_{a,b}$ были определены формулой (8) гл. VI, § 4. Очевидно, для всех $x \notin W$ имеем

$$E_{a,b}(x) = E^*_{a,b}(x) = K_{a+b}(x, 0, b),$$

если только ряд, определяющий $E_{a,b}$, сходится абсолютно, т. е. $b \geqslant a + 3$. Покажем, что тождество

$$E^*_{a,b}(x) = K_{a+b}(x, 0, b) \tag{33}$$

остается справедливым и при $b - a = 1$ или 2. Действительно, при $\operatorname{Re}(s) > \frac{a}{2} + 1$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} K_a(x, x_0, s) = -sK_{a+1}(x, x_0, s + 1). \tag{34}$$

Аналогично, если $a > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} K_a(x, x_0, s) = (a - s) K_{a-1}(x, x_0, s). \tag{35}$$

Кроме того,

$$\mathscr{D} K_a(x, 0, s) = -sK_{a+2}(x, 0, s + 1), \tag{36}$$

где дифференциальный оператор $\mathscr{D}$ определен формулой (1) гл. VI, § 1. Аналитическое продолжение показывает, что эти формулы справедливы для всех s.

В частности, из формулы (35) видно, что $K_a(x, x_0, a)$ является голоморфной функцией от x при $a > 0$ и $x \notin W$. Исключением является случай, когда $K_{a-1}(x, x_0, s)$ имеет полюс в точке $s = a$. В § 13 мы убедились, что это возможно лишь при $a = 1$ и $x_0 \in W$. Там же было показано, что вычет $K_0(x, 0, s)$ в точке $s = 1$ равен A^{-1}. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} K_1(x, 0, 1) = -A^{-1}.$$

После этих замечаний рассмотрим сначала функцию $K_2(x, 0, 2)$. Установленные выше формулы показывают, что ее производные по x и $\bar{x}$ совпадают с производными $E_{0,2}$, т. е.

E_2. Поэтому $K_2(x, 0, 2)$ может отличаться от E_2 только константой. Теперь рассмотрим разность $K_1(x, 0, 1) - E_1(x)$. Ее производные по x и $\bar{x}$ постоянны, и она нечетна по x, следовательно, она является вещественно линейной функцией от x. Поскольку $K_1(x, 0, 1)$ периодична по x с решеткой периодов W, это позволяет заключить, как в гл. VI, § 2, что эта функция совпадает с E_1^*. Пользуясь теперь формулами (34), (36) и (8) гл. VI, § 4, находим, что тождество (33) верно для всех $b > a \geqslant 0$.

§ 15. Из формулы (27) очевидно, сначала для $\mathrm{Re}(s) > \frac{a}{2} + 1$, а затем по аналитическому продолжению для всех s, что

$$K_a(0, x_0, s) = [K_a(x, x_0, s) - \bar{x}^a |x|^{-2s}]_{x=0}.$$

Сравнивая этот результат с определением $e^*_{a,b}$ в гл. VI, § 5 и пользуясь выводами § 14, получаем

$$e^*_{a,b} = K_{a+b}(0, 0, b),$$

если только $b > a \geqslant 0$. Тем самым мы доказали все утверждения, высказанные в конце гл. VI. В частности, полагая $N = a + b$, мы установили, что числа

$$\pi^{N-b} \varpi^{-N} K_N(x, 0, b)$$

алгебраичны над $\mathbf{Q}$, если $\mathbf{Q}W$ есть мнимое квадратичное поле k, $x \in k$ и $b \leqslant N$, $N < 2b$.

В заключение (не выходя за поставленные нами рамки) рассмотрим случай, когда характер χ, входящий в определение функции $K_a(x, x_0, s)$, имеет конечный порядок. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $x_0 \in \mathbf{Q}W$, т. е. чтобы ядро ограничения χ на W было подрешеткой $W' \subset W$. Обозначим через R некоторую систему представителей факторгруппы W/W' в W. Тогда при $\mathrm{Re}(s) > \frac{a}{2} + 1$ и, в силу аналитического продолжения, при всех s имеем

$$K_a(x, x_0, s;\ W) = \sum_{r \in R} \chi(r)\, K_a(x + r, 0, s;\ W').$$

Вместе с доказанным выше результатом это позволяет заключить, что числа

$$\pi^{N-b} \varpi^{-N} K_N(x, x_0, b)$$

алгебраичны над $\mathbf{Q}$, если $W \subset k$, $x \in k$, $x_0 \in k$, $0 < N/2 < b \leqslant N$.

Наконец, в силу функционального уравнения (32), последнее утверждение остается верным при $0 < b \leqslant N$. Мы оставляем читателю переформулировку этого утверждения в терминах значений L-функций Гекке мнимых квадратичных полей.

§ 16. В гл. VII, § 10 мы показали, как перевести некоторые из результатов этой главы на язык теории распределений. Проделаем эту же работу с двойным рядом Кронекера.

Обозначим через $|dx\,d\bar{x}|$ нормированную меру Хаара на $\mathbf{C}$. Пусть W — некоторая решетка в $\mathbf{C}$. Фактор по ней $T = \mathbf{C}/W$ представляет собой комплексный тор. Положив, как обычно, $x = \alpha u + \beta v$, получаем $|dx\,d\bar{x}| = 2\pi A\,d\alpha\,d\beta$, где $d\alpha\,d\beta$ — мера Хаара на T, нормированная условием $\int\limits_T d\alpha\,d\beta = 1$.

Для любой интегрируемой функции f на T отображение

$$\varphi \longmapsto \Delta(\varphi) = \int\limits_T \varphi f\,d\alpha\,d\beta \tag{37}$$

является распределением на T, которое мы будем обозначать символом $\Delta = f\,d\alpha\,d\beta$ или, для краткости, просто f. Мы будем говорить даже, что Δ «есть» функция f.

Члены рядов Фурье на $T = \mathbf{C}/W$ нумеруются характерами тора T, или, что то же самое, теми характерами $\mathbf{C}$, которые тривиальны на W. Их можно записать в виде

$$x = \alpha u + \beta v \longmapsto \psi_{\mu\nu}(x) = \mathbf{e}(\delta\nu\alpha - \delta\mu\beta) = \exp\left[A^{-1}(w\bar{x} - \bar{w}x)\right], \tag{38}$$

где, как обычно, $w \in W$, $w = \mu u + \nu v$. С любым распределением Δ на T связан ряд Фурье

$$\sum_{\mu,\nu} \Delta\left(\psi_{\mu\nu}^{-1}\right)\psi_{\mu\nu}.$$

Наоборот, любой формальный ряд Фурье на T, коэффициенты которого растут не быстрее $O((\mu^2+\nu^2)^N)$ для какого-нибудь N, отвечает некоторому распределению.

Как в гл. VII, § 10, будем говорить, что распределение на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ отвечает квазихарактеру ω мультипликативной группы $\mathbf{C}^\times$, если оно умножается на ω под действием этой группы.

Для каждого ω существует единственное отвечающее ему распределение (с точностью до постоянного множителя). Если $\omega(x) = x^{-m}\bar{x}^{-n}$, где m, n — целые неотрицательные числа, квазихарактеру ω отвечает распределение $(\partial^{m+n}/\partial x^m \partial\bar{x}^n)_{x=0}$ с носителем в нуле.

Любой квазихарактер $\mathbf{C}^\times$ либо имеет вид

$$x \longmapsto \omega(x) = \bar{x}^a |x|^{2-2s},$$

где $s \in \mathbf{C}$, $a \geqslant 0$ — неотрицательное целое число, либо комплексно сопряжен к такому квазихарактеру. За исключением случаев $\omega(x) = x^{-m}\bar{x}^{-n}$ с целыми m, $n \geqslant 0$, распределение, отвечающее ω, определяется формулой

$$D_\omega(\Phi) = \mathrm{Pf} \int \Phi(x)\,\omega(x)\,|x|^{-2}\,|dx\,d\bar{x}|.$$

Правую часть следует понимать как предел выражения

$$\int\limits_{x\bar{x} \geqslant \varepsilon} \Phi(x)\,\omega(x)\,|x|^{-2}\,|dx\,d\bar{x}| - \varepsilon^{a+1-s}P(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \to 0$, где многочлен P выбран так, чтобы этот предел существовал. Это определение корректно, если (a) функция Φ всюду локально интегрируема; (b) она m-кратно непрерывно дифференцируема в окрестности $x = 0$, где $m > 2\,\mathrm{Re}(s) - a - 2$; (c) она допускает при $|x| \to \infty$ оценку вида $O(|x|^\lambda)$, где $\lambda < 2\,\mathrm{Re}(s) - a - 2$.

Начиная с этого места, будем считать, что $\mathrm{Re}(s) > \frac{a}{2} + 1$. В силу сказанного, значение $D_\omega(\Phi)$ определено, если в качестве Φ взять любой характер аддитивной группы $\mathbf{C}$. Обозначим через ψ характер $\psi(x) = \mathbf{e}(x + \bar{x})$, через ψ_b — характер $\psi_b(x) = \psi(bx)$; в частности, $\psi_0 = 1$. Положим $B_\omega = D_\omega(\psi)$ и $f(b) = D_\omega(\psi_b)$. Поскольку D_ω принадлежит ω, имеем $f(by) = f(b)\,\omega(y)^{-1}$ для всех b и всех $y \neq 0$. Так как $\omega \neq 1$, отсюда следует, что $f(0) = 0$, т. е. $D_\omega(1) = 0$. Кроме того, $f(b) = B_\omega \cdot \omega(b)^{-1}$ при $b \neq 0$.

Константу B_ω можно вычислить несколькими способами. Поскольку это вычисление относится скорее к теории «распределения Тэйта» D_ω и его преобразования Фурье, ограничимся результатом:

$$B_\omega = i^a (2\pi)^{2s-a-1} \frac{\Gamma(a+1-s)}{\Gamma(s)}.$$

§ **17.** В прежних обозначениях вернемся к решетке W и тору $T = \mathbf{C}/W$. Выбрав точку $x_0 \in \mathbf{C}$, определим характер χ группы $\mathbf{C}$ формулой

$$\chi(x) = \exp\left[A^{-1}(\bar{x}_0 x - x_0 \bar{x})\right].$$

Мы могли бы записать его также в виде ψ_b, где $b = (2\pi i A)^{-1}\,\bar{x}_0$.

Пусть φ — некоторая ограниченная интегрируемая функция на торе T, бесконечно дифференцируемая вблизи нуля. Свяжем с ней функцию

$$\Phi(x) = \varphi(x \bmod W)\,\chi(x)$$

на $\mathbf{C}$ и обозначим через Δ или $\Delta(\omega, x_0)$ распределение на T, для которого $\Delta(\varphi) = D_\omega(\Phi)$. Оно определено корректно, потому что мы предположили, что $\operatorname{Re}(s) > \frac{a}{2} + 1$. В очевидных обозначениях его можно представить в виде

$$\Delta(\varphi) = \operatorname{Pf} \int\limits_T \varphi(x)\, K_a(x, x_0, s)\, \chi(x) |dx\, d\bar{x}|,$$

где подынтегральное выражение, периодичное по x с решеткой периодов W, следует рассматривать как функцию на T.

Если носитель φ не содержит нуля, символ Pf можно опустить. Это означает, что Δ вне нуля «есть» функция

$$2\pi A K_a(x, x_0, s)\, \chi(x). \tag{39}$$

Теперь нетрудно написать ряд Фурье распределения Δ. Согласно нашим определениям, коэффициент этого ряда при характере $\psi_{\mu\nu}$, определенном формулой (38), равен $D_\omega(\Phi)$, где Φ имеет вид

$$\Phi(x) = \exp\left[A^{-1}(\bar{x}_0 + \bar{w})\, x - A^{-1}(x_0 + w)\, \bar{x}\right].$$

Иными словами, Φ есть характер ψ_b группы $\mathbf{C}$ с

$$b = (2\pi i A)^{-1}(\bar{x}_0 + \bar{w}).$$

Поэтому соответствующий коэффициент равен нулю при $b = 0$ и $f(b) = B_\omega \cdot \omega(b)^{-1}$ в остальных случаях. Таким образом, ряд Фурье распределения Δ имеет вид

$$2\pi A^{a+2-2s} \frac{\Gamma(a+1-s)}{\Gamma(s)} \sum{}^{*} (\bar{x}_0 + \bar{w})^a |x_0 + w|^{2(s-a-1)} \times$$
$$\times \exp\left[A^{-1}(w\bar{x} - \bar{w}x)\right] = 2\pi A^{a+2-2s} \frac{\Gamma(a+1-s)}{\Gamma(s)} K_a(x_0, x, a+1-s). \tag{40}$$

Последний множитель справа следует понимать формально, ибо соответствующий ряд может расходиться.

«Приравнивая» это выражение и (39), мы приходим к тождеству, формально совпадающему с функциональным уравнением (32), но, разумеется, имеющему другой смысл.

§ 18. Ряд Фурье (40) определяет некоторое распределение и при $\mathrm{Re}(s) \leqslant \frac{a}{2}+1$, если только s не является полюсом функции $\Gamma(a+1-s)$, т. е. если ω нельзя представить в виде $x^{-m}\bar{x}^{-n}$ с целыми неотрицательными m, n. Это распределение в очевидном смысле слова можно рассматривать как аналитическое продолжение $\Delta(\omega, x_0)$ на всю s-плоскость. Вне нуля оно, по свойству аналитического продолжения, по-прежнему «равно» функции (39). В действительности при $\mathrm{Re}(s) < a/2$ ряд (40) абсолютно сходится, так что его сумма равна (39) в обычном смысле.

Мы не будем развивать этот подход дальше и заключим изложение лишь одним интересным примером. Рассмотрим распределение Δ_0 на T, которое задается рядом Фурье

$$K_0(0,\ x,\ 1) = \sum{}' |w|^{-2} \exp\left[A^{-1}(w\bar{x} - \bar{w}x)\right].$$

С точностью до замены x_0 на x он совпадает с рядом $G(1, \chi)$ § 9—10, для которого мы доказали тождество Кронекера (23), § 9. Выведем теперь его другим методом.

Обозначим через $\mathscr{L}$ «лапласиан», или «оператор Бельтрами», $\partial^2/\partial x \partial \bar{x}$ на T. Поскольку ряды Фурье распределений можно дифференцировать почленно, имеем

$$\mathscr{L}(\Delta_0) = A^{-2}\Big(1 - \sum_{w \in W} \exp\left[A^{-1}(w\bar{x} - \bar{w}x)\right]\Big). \tag{41}$$

Ряд, являющийся формальной суммой всех характеров тора T, представляет «распределение Дирака» μ_0, т. е. единичную массу в точке нуль. Поэтому правая часть (41) равна $A^{-2}(1-\mu_0)$. Любые два решения уравнения (41) отличаются на гармоническую функцию на T, т. е. на константу. Следовательно, уравнение (41) вместе с условием $\Delta_0(1) = 0$ определяет Δ_0 однозначно. В частности, Δ_0 вещественно.

Положив, как выше (ср. гл. VI, § 2), $\beta = \beta(x)$, где $x = \alpha u + \beta v$, находим с помощью простой выкладки

$$\mathscr{L}\left[\beta(x)^2\right] = \frac{1}{2}\,|u/\pi A|^2.$$

С другой стороны, как хорошо известно,

$$\mathscr{L}\left[\log(x\bar{x})\,|dx\, d\bar{x}|\right] = 2\pi\mu_0$$

в смысле теории распределений: это почти непосредственно вытекает из определений. Следовательно,

$$\mathscr{L}\left[\log(x\bar{x})\, d\alpha\, d\beta\right] = A^{-1}\mu_0.$$

Наконец, хорошо известно, что вещественнозначное распределение гармонично тогда и только тогда, когда оно всюду локально представимо в виде $\log|f(x)|^2$, где f — голоморфная не обращающаяся в нуль функция.

Рассмотрим теперь функцию

$$F(x) = 2\pi^2 |u|^{-2} \beta(x)^2 - A^{-1} \log |X_q[\mathrm{e}(x/u)]|^2.$$

Как мы уже отмечали в § 9, она периодична по x с решеткой периодов W, так что ее можно считать функцией на торе T. Из сделанных выше замечаний ясно, что распределение $\Delta_0 - F(x)$ гармонично на T и потому является константой. Поскольку функция $\log|x|^2$ локально интегрируема вблизи нуля, F интегрируема на торе. Учитывая, что $\Delta_0(1) = 0$, находим

$$\Delta_0 = F - \int_T F \, d\alpha \, d\beta.$$

Вычисление интеграла здесь является стандартным упражнением. Оно приводит, как и следовало ожидать, к формуле Кронекера

$$\Delta_0 = F + \frac{1}{3}\pi^2 |u|^{-2},$$

показывающей заодно, что Δ_0 «равно» интегрируемой функции на T. Это просто функция Грина на торе T с римановой метрикой $ds^2 = |dx|^2$.

глава IX

Финал: Allegro con brio

(УРАВНЕНИЕ ПЕЛЛЯ И ФОРМУЛА ЧОУЛА — СЕЛЬБЕРГА)

§ 1. Заложив фундамент теории эллиптических функций, Эйзенштейн сумел возвести по своему проекту значительную часть всего здания и оставить указания, каким он хотел его видеть. Кронекер долго вынашивал гордый план гораздо более грандиозного строения и уже к концу жизни начал закладывать его основания, но сверх того успел немного. Бесполезно гадать о его дальнейших замыслах; возможно, он и сам их не знал.

С другой стороны, теоретико-числовые мотивировки его последних титанических усилий угадываются без труда и заслуживают краткого отступления. Куммер, а затем Дирихле учили его и остались его друзьями на всю жизнь. Арифметические работы Куммера концентрировались вокруг теории круговых полей, их классов идеалов и чисел классов. Дирихле в другом контексте первый обнаружил, что эти числа классов выражаются через значения L-функций Дирихле в точке $s = 1$, т. е. в конечном счете через значения простых рядов, изученных в гл. VII, при подходящих значениях их аргументов. Передоказав эти результаты на языке своей теории идеалов, Куммер перешел к исследованию p-адических свойств соответствующих значений, начав с доказательства знаменитых сравнений для чисел Бернулли. Эти его открытия относятся к самым глубоким; по важности они, возможно, превосходят более эффектные приложения к проблеме Ферма и даже к законам взаимности.

Сравнительно рано (в 1853 г.) Кронекер нашел инвариантное объяснение роли излюбленных Куммером круговых полей: они не только являются абелевыми расширениями поля рациональных чисел (что открыл Гаусс), но их объединение исчерпывает все абелевы расширения.

В той же статье (Werke, т. IV, стр. 10—11), где Кронекер сформулировал это важнейшее открытие, он привел соответствующий результат для гауссова поля $\mathbf{Q}(i)$ в терминах деления лемнискатических функций. Это породило идею, что комплексное умножение должно играть ту же роль для соответствующего мнимого квадратичного поля, что деление круга для $\mathbf{Q}$ и лемнискаты для $\mathbf{Q}(i)$. Кронекер пишет об этом в письме к Дирихле в мае 1857 г. (Werke, т. V, стр. 420; ср. также Werke, т. IV, стр. 179—183). Эта идея, как он писал позже Дедекинду, была любимой мечтой его юности («mein liebster Jugendtraum», Werke, т. V, стр. 455).

Впоследствии эти слова часто истолковывались просто как программа распространения на мнимые квадратичные поля его теоремы 1853 г. о поле $\mathbf{Q}$. Иными словами, речь как будто шла о гипотезе, что деление эллиптических функций с комплексным умножением порождает все абелевы расширения соответствующего поля. Однако эта интерпретация представляется чересчур узкой.

Верно, что его статья 1886 г. (Werke, т. IV, стр. 389—470), где он устанавливает свои знаменитые сравнения, была, видимо, подготовкой к доказательству этой гипотезы. Сам он ее не доказал, но дал все необходимые технические средства, оставив завершение этой работы своим последователям.

Тем не менее сама гипотеза вполне могла быть лишь частью его юношеской мечты, возможно самым ее началом. Кронекер хотел распространить на мнимые квадратичные поля и их абелевы расширения всю совокупность результатов Куммера о числах классов круговых полей и их p-адических свойствах.

Видимо, именно эту грандиозную программу Кронекер собирался выполнить в своей серии работ, представленных Берлинской Академии. Излишне говорить, что он ее не завершил.

Он успел с известной полнотой построить лишь аналитическую часть. Целое созвездие позднейших авторов: Вебер, Фютер, Хассе, Гекке, Мейер, Зигель, Рамачандра — занимались оставшимися вопросами, но, возможно, не исчерпали даже чисто арифметических аспектов ситуации [1]. p-адические

---

[1]) Читатель сможет найти библиографию и полезные исторические сведения, а также важнейшие, пожалуй, из современных результатов в работах: C. Meyer, Berechnung der Klassenzahl ... (Ak. — Verlag, Berlin 1957); C. L. Siegel, Lectures on advanced analytic number-theory (Tata Institute Fund. Res., Bombay 1961), ch. II; K. Ramachandra, Some applications of Kronecker's limit-formulas, *Ann. of Math*, **80** (1964), 104—148.

штудии вообще едва начались; замечательная работа Эйзенштейна 1850 г. о лемнискате, в которой столь многие результаты Куммера о полях деления круга были перенесены на этот случай, была почти забыта, а исследования Гурвица и Герглотца оставались изолированными до самых последних дней. Поскольку все это не относится к предмету нашей книги, мы лишь подчеркнем важность этой темы для будущего.

§ 2. Оставшаяся часть книги посвящена двум примерам, почерпнутым из работ Кронекера, которые показывают, какие приложения теории он имел в виду. Первый из них воспроизводит содержание его работы 1863 г. об «уравнении Пелля» (Werke, т. IV, стр. 221—225; ср. также Werke, т. IV, стр. 379—389). Второй пример Кронекер разобрал не до конца (Werke, т. IV, стр. 376—379); недостававшее соображение добавил Лерх в 1894 г. (это наша формула (23) гл. VII, § 9). Обе темы вместе впервые объединили Чоула и Сельберг в 1949 г. (*Proc. Nat. Ac. USA*, **35**, 371—374; ср. также *Crelles J.*, **227** (1967), 86—110). В нашем изложении некоторые основные факты теории полей классов будут считаться известными. Излишне говорить, что Дирихле и Кронекер умели доказывать их непосредственно.

В 1841 г. Дирихле распространил на гауссово поле $\mathbf{Q}(i)$ значительную часть своих результатов об L-рядах над $\mathbf{Q}$ и заметил, что эти ряды суммируются в терминах лемнискатических функций (Dirichlet, Werke, т. I, стр. 503—618). Его теория квадратичных форм над $\mathbf{Q}(i)$, по существу, была теорией квадратичных расширений поля $\mathbf{Q}(i)$, и он отметил ряд замечательных свойств биквадратичных полей вида $\mathbf{Q}\left(i, \sqrt{m}\right)$, их дзета-функций и L-функций (ibid, стр. 508 и 612—618). Таково было положение дел перед работой Кронекера 1863 г.

С современной точки зрения идея Кронекера выглядит довольно простой. Пусть K — расширение поля $\mathbf{Q}$ с группой Галуа типа (2, 2). Тогда K имеет три квадратичных подполя k_0, k_1, k_2 и совпадает с композитом любых двух из них. Предположим, что K не вещественно. Тогда ровно одно из полей k_α, скажем k_2, вещественно. Обозначим через $\varepsilon > 1$ фундаментальную единицу поля k_2.

Пусть $\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_K$ — дзета-функции полей $\mathbf{Q}$, k_α, K соответственно. Положим $L_\alpha = \zeta_\alpha/\zeta$; это L-функция Дирихле над $\mathbf{Q}$, отвечающая квадратичному полю k_α. Тогда $\zeta_K = \zeta L_0 L_1 L_2$. Положив $s = 1$, получаем отсюда соотношение между числами классов полей K, k_0, k_1, k_2. Это соотношение было одним из основных результатов Дирихле, который ограничился случаем $k_0 = \mathbf{Q}(i)$.

Положим теперь $\Lambda = \zeta_K/\zeta_0 = L_1L_2$. В этом тождестве, которое Дирихле тоже рассматривал при $k_0 = \mathbf{Q}(i)$, Λ является L-рядом над k_0, связанным с квадратичным расширением K поля k_0. Поэтому он представляется в виде линейной комбинации двойных рядов того типа, которые были изучены в гл. VIII нашей книги. Функции же L_1, L_2 являются аналогичными линейными комбинациями простых рядов, рассмотренных в гл. VII. Поэтому соотношение $\Lambda = L_1L_2$ доставляет некоторое нелинейное тождество арифметического происхождения между такими рядами. Положим в этом тождестве $s=1$. Его правая часть тогда выражается по формулам Дирихле через числа классов полей k_1, k_2 и единицу ε поля k_2. С другой стороны, $\Lambda(1)$ вычисляется через эллиптические функции с помощью предельной формулы Кронекера. Эти эллиптические функции допускают комплексное умножение на k_0. Таким образом, некоторая единица поля k_2, т. е. решение «уравнения Пелля», оказывается выраженной через эллиптические функции.

Это открытие Кронекер сделал в 1863 г. В то время оно было довольно сенсационным.

§ 3. Сам Кронекер считал поле k_0 фиксированным и рассматривал K как простейший случай абелева расширения поля k_0, абелева даже над $\mathbf{Q}$. Чтобы получить более простые формулы, он ограничился случаем, когда K над k_0 не разветвлено. По тем же соображениям этим случаем ограничимся и мы[1]).

Для $\alpha = 0, 1, 2$ обозначим через D_α дискриминант поля k_α, через h_α его число классов и через w_α число корней из единицы в k_α. Поскольку поле k_2 вещественно, $w_2 = 2$. Положим $m_\alpha = |D_\alpha|$; тогда $D_0 = -m_0$, $D_1 = -m_1$, $D_2 = m_2$. Характер Дирихле, отвечающий полю k_α, совпадает с символом Лежандра $\chi_\alpha(a) = (D_\alpha/n)$. Поэтому

$$L_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_\alpha(n)\, n^{-s} = m_\alpha^{-s} \sum_{n=1}^{m_\alpha - 1} \chi_\alpha(n)\, H\left(\frac{n}{m_\alpha}, s\right), \qquad (1)$$

где функция $H(x, s)$ определена в гл. VII, § 9. Значение L_α в точке $s=1$ можно вычислить либо с помощью результатов гл. VII, либо (что, по существу, то же самое) с помощью классических формул Дирихле. Разумеется,

---

[1]) Кронекер отметил, что и без этого условия верны аналогичные результаты: в этом смысл его слов «und selbst dann, wenn dieselben einen gemeinsamen Factor haben», Werke, B. IV, S. 223.

Кронекер пользовался формулами Дирихле, которые дают

$$L_1(1)=\frac{2\pi}{w_1}\frac{h_1}{\sqrt{m_1}}, \qquad L_2(1)=\frac{2h_2}{\sqrt{m_2}}\log\varepsilon. \tag{2}$$

С другой стороны, как хорошо известно, поле K не разветвлено над k_0 тогда и только тогда, когда $D_0=D_1D_2$ и D_1, D_2 взаимно просты. В этом случае характер χ поля K над k_0 является так называемым «характером рода», т. е. характером второго порядка группы классов идеалов поля k_0. Поэтому в ряде

$$\Lambda(s)=\sum\chi(\mathfrak{m})\,N(\mathfrak{m})^{-s} \tag{3}$$

все идеалы из одного класса имеют один и тот же коэффициент $\chi(\mathfrak{m})$.

Пусть $\mathfrak{a}$ — любой дробный идеал поля k_0. Объединим в сумме (3) все идеалы, эквивалентные $\mathfrak{a}^{-1}$. Они имеют вид $\alpha\mathfrak{a}^{-1}$, где $\alpha\in\mathfrak{a}$, $\alpha\neq 0$. Идеал $\alpha'\mathfrak{a}^{-1}$ совпадает с $\alpha\mathfrak{a}^{-1}$ тогда и только тогда, когда α'/α является корнем из единицы. Таким образом, ряд (3) приводится к виду

$$w_0^{-1}\chi(\mathfrak{a})^{-1}\,N(\mathfrak{a})^s\sum_{\alpha\in\mathfrak{a}}{}'\,|\alpha|^{-2s}, \tag{4}$$

где $w_0=2$, ибо иначе $D_0=-3$ или -4 и D_0 нельзя представить в виде D_1D_2 с взаимно простыми D_1, D_2.

Рассмотрим идеал $\mathfrak{a}$ как решетку в **C** и применим к ней предельную формулу Кронекера, т. е. формулу (16) гл. VIII, § 8. При $W=\mathfrak{a}$ константа A в этой формуле, которую следует вычислять с помощью формулы (15) того же параграфа, равна

$$A=\frac{N(\mathfrak{a})}{2\pi}\sqrt{m_0}\,.$$

Имеем $\bar{\mathfrak{a}}=N(\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}^{-1}$. Положим $\Delta=\Delta(\mathfrak{a})$, где $\Delta(W)$ определено в гл. IV, § 11. Так как эта функция однородна степени -12 по u, v, т. е. по W, получаем

$$\bar{\Delta}=\Delta(\bar{\mathfrak{a}})=N(\mathfrak{a})^{-12}\,\Delta(\mathfrak{a}^{-1}).$$

Обозначим с учетом этого

$$F(\mathfrak{a})=\Delta(\mathfrak{a})\,\Delta(\mathfrak{a}^{-1})=N(\mathfrak{a})^{12}\,|\Delta(\mathfrak{a})|^2.$$

Очевидно, эта функция зависит лишь от класса идеала $\mathfrak{a}$.

Применив теперь формулу Кронекера к ряду (4), получим

$$N(\mathfrak{a})^s\sum|\alpha|^{-2s}=\frac{2\pi}{\sqrt{m_0}}\left(\frac{1}{s-1}+C_0-\frac{1}{12}\log F(\mathfrak{a})+\ldots\right), \tag{5}$$

где C_0 — сумма членов, зависящих только от k_0, но не от $\mathfrak{a}$.

Выберем теперь систему представителей $\mathfrak{a}_i$ классов идеалов поля k_0. Поскольку порядок χ равен 2, имеем $\chi=\chi^{-1}$. Так как этот характер не тривиален, $\sum\chi(\mathfrak{a}_i)=0$. Объединяя формулы (4) и (5), получаем

$$\Lambda(1)=-\frac{1}{12}\frac{\pi}{\sqrt{m_0}}\sum\chi(\mathfrak{a}_i)\log F(\mathfrak{a}_i).$$

Учитывая, что $\Lambda=L_1L_2$, и пользуясь формулами (2), находим окончательный результат Кронекера:

$$h_1h_2\log\varepsilon=-\frac{w_1}{48}\sum\chi(\mathfrak{a}_i)\log F(\mathfrak{a}_i). \tag{6}$$

Вместо того чтобы вычислять обе части тождества $\Lambda=$ $=L_1L_2$ в точке $s=1$, мы могли бы сделать то же для $s=0$. Левая часть вычисляется по формуле (17) гл. VIII, § 8, а правая — по формуле (21) гл. VII, § 9. Правая часть (6) тогда записалась бы «в элементарном виде» через «круговую единицу» ε^{h_2}. Разумеется, оба варианта эквивалентны.

§ 4. Кронекер заметил, что в точности то же рассуждение можно применить к тождеству $\zeta_0=\zeta L_0$. Здесь

$$\zeta_0(s)=\sum N(\mathfrak{m})^{-s}=\frac{1}{w_0}\sum_i N(\mathfrak{a}_i)^s\sum_{\alpha\in\mathfrak{a}_i}{}'|\alpha|^{-2s},$$

и предельная формула Кронекера дает первые два члена разложения ζ_0 вблизи $s=1$. Вычислять вблизи $s=0$ еще легче, хотя результаты, по существу, те же. Формула (17) гл. VIII, § 8 показывает прежде всего, что $\zeta_0(0)=-h_0/w_0$. Разумеется, это находится в согласии с тем, что $\zeta(0)=-1/2$ и $L_0(0)=$ $=2h_0/w_0$. Далее, имеем

$$\zeta_0'(0)=-\frac{1}{12w_0}\sum\log F(\mathfrak{a}_\iota).$$

Вместо этого тождества Кронекер получает равносильное ему для первых двух членов разложения ζ_0 в точке $s=1$. Однако он ограничивается записью их через известные величины и ряд

$$L_0'(1)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\chi_0(n)\frac{\log n}{n}.$$

Чтобы получить полный результат, следует воспользоваться теоремой Лерха (т. е. формулой (23) гл. VII, § 9) или же, как делают в цитированной работе Чоула и Сельберг, каким-нибудь равносильным результатом, например рядом Куммера для $\log \Gamma(s)$. Теорема Лерха вместе с формулой (1) дает:

$$L_0'(0) == L_0(0) \log m_0 + \sum_{n=1}^{m_0-1} \chi_0(n) \log \Gamma(n/m_0).$$

Приравнивая производные ζ_0 и ζL_0 в нуле, получаем формулу Чоула — Сельберга. Мы будем писать k, m, h, w, χ вместо k_0, m_0, h_0, w_0, χ_0. Переходя от логарифмов к самим числам, мы можем записать эту формулу в виде

$$\prod_{i=1}^{h} F(\mathfrak{a}_i) = \left(\frac{2\pi}{m}\right)^{12h} \prod_{n=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{n}{m}\right)^{6w\chi(n)}. \tag{7}$$

Например, при $h=1$ мы можем взять в качестве $\mathfrak{a}_1$ кольцо Ω всех целых чисел поля k. Тогда в обозначениях гл. V, § 8 левая часть формулы (7) равна ϖ^{24}. Следовательно, константа ϖ выражается через значения $\Gamma(s)$ в рациональных точках. В общем случае мы знаем (в силу определения Δ в гл. IV, § 11 и последних результатов гл. VI, § 6), что числа $\varpi^{-12}\Delta(\mathfrak{a})$ для всех $\mathfrak{a}$ алгебраичны над $\mathbf{Q}$. Следовательно, ϖ отличается от числа

$$\sqrt{\pi} \prod_{n=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{n}{m}\right)^{w\chi(n)/4h}$$

множителем, алгебраичным над $\mathbf{Q}$. Поэтому то же имеет место для любого поля эллиптических функций с комплексным умножением на k, если только это поле определено уравнением с алгебраическими коэффициентами.

Список обозначений

$\exp(x) = e^x$; $\mathbf{e}(x) = \exp(2\pi i x)$.

Глава II: $\varepsilon_n(x)$, $\sum\limits_{\mu}{}_e$ (однократное суммирование по Эйзенштейну); $\sum_e$, γ_m: § 1; $\prod\limits_{\mu}{}_e$, $\prod_e$: § 6; B_m: § 7.

Глава III: W, u, v, δ, τ, q, A: § 1; $E_n(x)$, $\sum\limits_{\mu,\nu}{}_e$ (двукратное суммирование по Эйзенштейну); $\sum_e$: § 2; W', u', v', (a, b, c, d), R: § 5; ζ, z: § 6; e_m: § 7; R': § 8.

Глава IV: $f(t, x)$, $\varphi(x)$, $X_q(z)$, $P(q)$: § 3; $T(q, z)$: § 6; $\eta(\tau)$, $\theta(\zeta, \tau)$: § 8; Δ, $\Delta(u, v)$, $\Delta(W)$: § 11.

Глава V: $e(W)$, $E(W)$, e, E: § 2; ω (комплексный множитель): § 6; ϖ, ϖ_m: § 8.

Глава VI: $\mathscr{D}$: § 1; A, α, β, $\beta(x)$, E_n^*, e_2^*: § 2; $E_{a,b}$, $E_{a,b}^*$: § 4; $e_{a,b}$, $e_{a,b}^*$: § 5.

Глава VII: $\chi(\mu)$, $S_a(x, y, s)$, $\sum^*$: § 4; $S_a(x, y, s)$ (при $a = 0$ или 1, $x \in \mathbf{R}$): § 7; $H(x, s)$: § 9; $S_a(\zeta, y, s)$ (при $a \geqslant 0$, $\zeta \in \mathbf{C}$, $\zeta \notin \mathbf{R}$): § 11; K_z: § 12.

Глава VIII: $\chi(w)$, $\chi(\mu, \nu)$: § 1; ζ, τ, z, q, α_0, β_0, x_0, ζ_0, z_0, $F(q, z, w)$: § 2; $G(s, \chi)$: § 6; $\tau = \xi + i\omega$: § 7; A: § 8; $K_a(x, x_0, s)$: § 12; Θ_a^*, Θ_a: § 13.

Оглавление

ИБ № 987

А. Вейль

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПО ЭЙЗЕНШТЕЙНУ И КРОНЕКЕРУ

Редактор Н. Плужникова

Художник В. Медников Художественный редактор В. Шаповалов

Технический редактор А. Резоухова Корректор О. Туркова

Сдано в набор 09.11.77. Подписано к печати 02.03.78. Формат 60×90[1]/16. Бумага типографская № 3. Латинская гарнитура. Высокая печать. 3,50 бум. л. 7,00 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 5,38. Зак. 846. Цена 40 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“ Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.