

Е. Г. ВЕКШТЕЙН

СБОРНИК
ЗАДАЧ
ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

*Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР в качестве
учебного пособия для студентов высших учеб-
ных заведений*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва—1966



УДК 538. 3
В—269

2—3—2—6
66—Б3—46/15

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник задач по электродинамике задуман с целью реализации формулы: «не только знать, но и уметь». Забвение этого приводит к формальному заучиванию.

Проблема не в том, чтобы студенты шаблонно овладели основными методами решения типичных задач, а в том, и это самое главное, чтобы эта методика была осознана и базировалась на известные теоретические положения.

С этой целью в предлагаемом сборнике приводятся (в особенности в первой его части) довольно подробные и четкие указания на решение каждой задачи с ссылками на основные уравнения и формулы. В последующих частях эти указания становятся постепенно менее детальными.

С этой же целью в сборнике рассматривается в некоторых случаях решение одной и той же задачи различными методами либо указывается на возможность таких решений.

Предлагаемый сборник имеет целью также иллюстрацию и конкретизацию основных положений теоретического курса электродинамики. Для этого в сборник включены, например, задачи на расчет сил взаимодействия между зарядами и токами при помощи максвелловского тензора натяжений, несмотря на то, что эти задачи могут быть решены значительно легче иными методами.

Сборник состоит из 4 частей: электростатика; стационарные и квазистационарные токи и магнитные поля; переменное электромагнитное поле; специальная теория относительности и основы электродинамики движущихся тел.

В начале каждой части приводится краткое теоретическое введение со сводкой основных формул и указанием применяемых обозначений. Сборнику в целом предпослано краткое введение:

1) Ортогональные координаты; 2) Некоторые формулы векторного исчисления; 3) Система уравнений Максвелла.

В сборнике используется гауссова абсолютная система единиц.

При составлении сборника была использована имеющаяся у нас литература по электродинамике:

1. Л. Ландау и Е. Лифшиц. Теория поля.

2. Л. Ландау и Е. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред.

3. И. Е. Тамм. Основы теории электричества.

4. В. Смайт. Электростатика и электродинамика.

5. Дж. Стрэттон. Теория электромагнетизма и другие.

О замеченных недостатках и пожеланиях просьба сообщить в издательство.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

В любых ортогональных координатах $(x_1 x_2 x_3)$ квадрат элемента дуги

$$dl^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2,$$

где h_1, h_2, h_3 — так называемые коэффициенты Ламэ.
Элемент объема

$$dV = h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3.$$

Линии любого векторного поля $\mathbf{A}(x_1 x_2 x_3)$ определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{h_1 dx_1}{A_1} = \frac{h_2 dx_2}{A_2} = \frac{h_3 dx_3}{A_3}. \quad (\text{I})$$

Градиент скалярной функции координат

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi = \nabla \varphi &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (\text{II})$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — единичные векторы, касательные к координатным линиям в данной точке.

Дивергенция вектора

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_1) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_3) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Ротор вектора

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \times \mathbf{A}] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (\text{IV})$$

Оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right\}. \quad (\text{V})$$

В дальнейшем мы будем преимущественно пользоваться лишь декартовыми, цилиндрическими и сферическими координатами, для которых приводим явное выражение указанных операций:

а) декартовы координаты ($x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$):

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2; \quad dV = dx dy dz \quad (h_1 = h_2 = h_3 = 1).$$

Дифференциальные уравнения линий векторного поля $\mathbf{A}(x, y, z)$:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}. \quad (\text{Ia})$$

Составляющие градиента скалярной функции $\varphi(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad}_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \operatorname{grad}_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \operatorname{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (\text{IIa})$$

Дивергенция вектора $\mathbf{A}(x, y, z)$:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{IIIa})$$

Составляющие ротора вектора $\mathbf{A}(x, y, z)$:

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad \operatorname{rot}_y \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x};$$

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (\text{IVa})$$

Оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (\text{Va})$$

б) цилиндрические координаты ($x_1=R$; $x_2=\Theta$; $x_3=z$):

$$h_1 = 1; \quad h_2 = R; \quad h_3 = 1;$$

$$dl^2 = dR^2 + R^2 d\Theta^2 + dz^2; \quad dV = R dR d\Theta dz.$$

Дифференциальные уравнения линий векторного поля $\mathbf{A}(R, \Theta, z)$:

$$\frac{dR}{A_R} = \frac{R d\Theta}{A_\Theta} = \frac{dz}{A_z}. \quad (\text{Iб})$$

Составляющие градиенты скалярной функции $\varphi(R, \Theta, z)$:

$$\text{grad}_R \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial R}; \quad \text{grad}_\Theta \varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta}; \quad \text{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (\text{IIб})$$

Дивергенция вектора $\mathbf{A}(R, \Theta, z)$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial A_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{IIIб})$$

Составляющие ротора вектора $\mathbf{A}(R, \Theta, z)$:

$$\text{rot}_R \mathbf{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial A_z}{\partial \Theta} - \frac{\partial A_\Theta}{\partial z}; \quad \text{rot}_\Theta \mathbf{A} = \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R};$$

$$\text{rot}_z \mathbf{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_\Theta) - \frac{1}{R} \frac{\partial A_R}{\partial \Theta}. \quad (\text{IVб})$$

Оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (\text{Vб})$$

в) сферические координаты ($x_1=r$; $x_2=\Theta$; $x_3=\psi$):

$$h_1 = 1; \quad h_2 = r; \quad h_3 = r \sin \Theta;$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\psi^2;$$

$$dV = r^2 dr \sin \Theta d\Theta d\psi = r^2 dr d\Omega,$$

где $d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\psi$ — элементарный телесный угол.

Дифференциальные уравнения линий векторного поля $\mathbf{A}(r, \Theta, \psi)$:

$$\frac{dr}{A_r} = \frac{rd\Theta}{A_\Theta} = \frac{r \sin \Theta d\psi}{A_\psi}. \quad (\text{Iв})$$

Составляющие градиента скалярной функции $\varphi(r, \Theta, \psi)$:

$$\begin{aligned} \text{grad}_r \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial r}; & \text{grad}_\Theta \varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta}; \\ \text{grad}_\psi \varphi &= \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (\text{IIв})$$

Дивергенция вектора $\mathbf{A}(r, \Theta, \psi)$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta A_\Theta) + \\ &+ \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (\text{IIIв})$$

Составляющие ротора вектора $\mathbf{A}(r, \Theta, \psi)$:

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \Theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta A_\psi) - \frac{\partial A_\Theta}{\partial \psi} \right\}; \\ \text{rot}_\Theta \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \Theta} \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\psi) \right\}; \\ \text{rot}_\psi \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\Theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \Theta}. \end{aligned} \quad (\text{IVв})$$

Оператор Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta = \nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}. \end{aligned} \quad (\text{Vв})$$

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Ниже приведена сводка формул, которые в дальнейшем часто используются:

1. $\mathbf{A} [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{C} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} [\mathbf{C} \times \mathbf{A}];$
2. $[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B} (\mathbf{A} \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \mathbf{B});$

3. $\text{rot grad } \varphi = 0;$
4. $\text{div rot } \mathbf{A} = 0;$
5. $\text{grad } (uv) = u \text{ grad } v + v \text{ grad } u;$ (VII)
6. $\text{div } (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \text{ grad } \varphi;$
7. $\text{rot } (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{ rot } \mathbf{A} - [\mathbf{A} \times \text{grad } \varphi];$
8. $\text{div } [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{B};$
9. $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$

Далее приведены интегральные теоремы, позволяющие преобразовать друг в друга объемные, поверхностные и контурные интегралы.

1. Теорема Остроградского—Гаусса.

$$\int_V \text{div } \mathbf{A} dV = \oint_S A_n ds = \int_S \mathbf{A} dS^*, \quad (\text{VIII})$$

где n — внешняя нормаль к замкнутой поверхности S , ограничивающей данный объем V .

2. Теорема Стокса

$$\oint_L \mathbf{A} dl = \int_S \text{rot}_n \mathbf{A} dS = \int_S \text{rot } \mathbf{A} dS, \quad (\text{IX})$$

где S — поверхность, опирающаяся на замкнутый контур L ;

n — нормаль к этой поверхности, составляющая правинтовую систему с направлением контура.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

В основе макроскопической электродинамики лежат уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= 0; & \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi\rho; \\ \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0; & \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (\text{X})$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — напряженности соответственно электрического и магнитного полей, \mathbf{D} и \mathbf{B} — векторы индукции, которые определяются уравнениями

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad (\text{XI})$$

* dS — имеет направление внешней нормали.

где \mathbf{P} — вектор поляризации, т. е. объемная плотность электрического дипольного момента; \mathbf{M} — вектор намагничивания, т. е. объемная плотность магнитного момента; ρ — плотность свободных зарядов; \mathbf{j} — плотность тока.

Уравнение Максвелла следует дополнить так называемыми материальными уравнениями, которыми дается зависимость между векторами \mathbf{P} (или \mathbf{D}) и \mathbf{E} и соответственно \mathbf{M} (или \mathbf{H}) и \mathbf{H} .

В большинстве случаев эту зависимость можно считать линейной. Материальные уравнения будут сформулированы ниже для отдельных частных случаев.

Из линейности уравнений Максвелла следует, что сумма двух или нескольких решений также является решением этих уравнений, для которого плотность источников (ρ и \mathbf{j}) равна сумме плотностей для отдельных решений (принцип суперпозиции).

Из уравнений Максвелла вытекают следующие интегралы (законы сохранения):

1) закон сохранения количества электричества

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (\text{XII})$$

который в интегральной форме записывается так:

$$\frac{dq}{dt} + I = 0, \quad (\text{XIIa})$$

где $q = \int_V \rho dV$ — количество электричества, содержащегося в произвольном объеме V .

$I = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}$ — сила тока, выходящего из объема V через ограничивающую его замкнутую поверхность S ;

2) закон сохранения энергии

$$\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \mathbf{jE} + \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = 0.$$

Если коэффициенты линейной зависимости между \mathbf{D} и \mathbf{E} (и соответственно между \mathbf{B} и \mathbf{H}) не зависят от времени, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) + \mathbf{jE} + \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = 0, \quad (\text{XIII})$$

или в интегральной форме

$$-\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{jE} dV + \oint_S \mathbf{S} dS, \quad (\text{XIIIa})$$

где

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) dV \quad (\text{XIV})$$

есть энергия электромагнитного поля в объеме V ;

$\int_V \mathbf{jE} dV$ — работа сил поля в том же объеме в единицу времени, а вектор Умова—Пойтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \quad (\text{XV})$$

есть плотность потока электромагнитной энергии.

Электромагнитное поле обладает также количеством движения (импульсом):

$$\mathbf{G} = \int_V \frac{1}{c^2} \mathbf{S} dV. \quad (\text{XVI})$$

Чтобы найти решение уравнений Максвелла, оказывается удобным ввести скалярный потенциал φ и вектор — потенциал \mathbf{A}

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (\text{XVII})$$

в результате чего первая пара уравнений Максвелла (X) удовлетворяется тождественно.

Из второй пары уравнений Максвелла (X) с учетом материальных уравнений можно получить дифференциальные уравнения для определения потенциалов.

В интегральной форме первая пара уравнений Максвелла записывается так:

$$\oint_S \mathbf{B} dS = 0; \quad (\text{XVIII})$$

$$\oint_S \mathbf{D} dS = 4\pi \int_V \rho dV, \quad (\text{XIX})$$

где S замкнутая поверхность, ограничивающая произвольный объем V . Отсюда вытекают граничные условия для векторов индукции, а именно:

$$B_n^{(1)} = B_n^{(2)}; \quad (\text{XVIIIa})$$

$$D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = 4\pi\sigma, \quad (\text{XIXa})$$

где индексом (1) обозначена та сторона поверхности, куда направлена положительная нормаль n , а σ — поверхностная плотность свободных зарядов на этой поверхности.

Вторая пара уравнений Максвелла в интегральной форме записывается так:

$$\oint_l \mathbf{E} \, dl = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \, dS, \quad (\text{XX})$$

$$\oint_l \mathbf{H} \, dl = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \, dS + \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} \, dS, \quad (\text{XXI})$$

где S произвольная незамкнутая поверхность, ограниченная замкнутым контуром l . Отсюда вытекают граничные условия для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , а именно:

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)})] = 0, \text{ т. е. } E_t^{(1)} = E_t^{(2)}; \quad (\text{XXa})$$

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)})] = \frac{4\pi}{c} I, \quad (\text{XXIa})$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к рассматриваемой поверхности, а I — плотность поверхностного тока вдоль этой поверхности, т. е. сила тока, приходящегося на единицу длины.

ЗАДАЧИ

ЧАСТЬ I

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Из уравнений Максвелла (X) следует, что электростатическое поле в любой среде определяется дифференциальными уравнениями:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (1.2)$$

где

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (1.3)$$

Для преобладающего большинства изотропных диэлектриков в статическом случае имеет место следующее материальное уравнение:

$$\mathbf{P} = \kappa\mathbf{E}, \quad (1.4)$$

где κ — электрическая восприимчивость, играющая роль материальной константы.

Из (1.3) и (1.4) следует, что

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad (1.5)$$

где

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\kappa \quad (1.6)$$

есть диэлектрическая проницаемость.

Распределение связанных зарядов в поляризованном диэлектрике связано с вектором поляризации \mathbf{P} соотно-

шением

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (1.7)$$

Отсюда

$$P_n^{(1)} - P_n^{(2)} = -\sigma', \quad (1.7a)$$

где ρ' и σ' — объемная и поверхностная плотность связанных зарядов.

Распределение связанных зарядов на незаряженной ($\sigma=0$) границе двух диэлектриков определяется уравнением

$$E_n^{(1)} - E_n^{(2)} = 4\pi\sigma'. \quad (1.8)$$

Интегральная форма уравнения (1.1)

$$\oint_S D_n dS = 4\pi q, \quad (1.9)$$

где q — свободный заряд, содержащийся внутри замкнутой поверхности S , известна под названием теоремы Остроградского—Гаусса.

При помощи этой теоремы можно легко рассчитать электростатическое поле в ряде случаев, когда искомое поле обладает известной симметрией.

Таким путем можно получить (см. задачу 1.8), что напряженность поля, создаваемого в вакууме точечным зарядом q , определяется формулой (закон Кулона)

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.10)$$

Если поле создается в вакууме несколькими точечными зарядами, то (принцип суперпозиции)

$$\mathbf{E} = \sum_k \frac{q_k}{r_k^2} \frac{\mathbf{r}_k}{r_k}, \quad (1.11)$$

а в случае непрерывного распределения зарядов

$$\mathbf{E} = \int \frac{\chi \mathbf{r}}{r^3} dl + \int \frac{\sigma \mathbf{r}}{r^3} dS + \int \frac{\rho \mathbf{r}}{r^3} dV, \quad (1.12)$$

где χ , σ , ρ — соответственно линейная, поверхностная и объемная плотность зарядов.

Уравнение (1.2) тождественно удовлетворяется, если ввести скалярный потенциал φ (сравните с XVII)

$$E = - \text{grad } \varphi. \quad (1.13)$$

Отсюда работа, которая производится силами электростатического поля при перемещении точечного заряда q из положения 1 в положение 2, равна

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.14)$$

Потенциал φ будем считать определенным так, чтобы вне поля (на бесконечности) $\varphi=0$.

Этому условию нельзя удовлетворить лишь в тех случаях, когда рассматривается абстрактное поле, создаваемое бесконечно протяженными заряженными телами (бесконечная нить, бесконечные плоскости и пр.).

Точечный заряд q , находясь во внешнем поле, обладает энергией

$$W = q\varphi, \quad (1.15)$$

где φ — значение потенциала внешнего поля в точке нахождения заряда q .

Энергия взаимодействия точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k, \quad (1.16)$$

где φ_k — потенциал поля, создаваемого в точке нахождения k -го заряда (q_k) всеми остальными.

Энергия заряженного тела, или, что то же самое, энергия создаваемого им электростатического поля,

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2 dV. \quad (1.17)$$

Для системы заряженных проводников

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k, \quad (1.18)$$

$$q_k = \sum_{l=1}^n c_{kl} \varphi_l, \quad (1.19)$$

где c_{kl} — емкостные коэффициенты, зависящие лишь от формы, размеров и взаимного расположения проводников, а также от разделяющей их диэлектрической среды.

Отсюда

$$\varphi_k = \sum_{l=1}^n S_{kl} q_l, \quad (1.19a)$$

где $S_{kl} = c_{kl}^{-1}$ — потенциальные коэффициенты.

Для случая уединенного проводника

$$q = C\varphi, \quad (1.20)$$

где C — емкость проводника.

Для конденсатора

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.21)$$

По теореме взаимности Грина

$$\sum_{k=1}^n q_k \varphi'_k = \sum_{k=1}^n q'_k \varphi_k, \quad (1.22)$$

где φ_k — потенциалы проводников, когда заряды на них равны q_k ; φ'_k — потенциалы тех же проводников, когда их заряды равны q'_k .

Эта теорема верна и в том случае, когда некоторые (или все) заряды q_k точечные, но тогда под φ_k надо понимать потенциал поля в точке нахождения заряда q_k , создаваемый всеми остальными зарядами, кроме данного.

Из (1.1), (1.5) и (1.13) следует, что в однородной среде потенциал электростатического поля удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \quad (1.23)$$

Этим уравнением однозначно определяется потенциал электростатического поля в рассматриваемом объеме, если задано: 1) распределение зарядов в этом объеме и 2) граничные условия для φ либо $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на замкнутой поверхности, ограничивающей этот объем.

На границе раздела двух сред с различной диэлектрической проницаемостью из граничных условий для векторов индукции и напряженности (XIXa, XXa) вытекают следующие граничные условия для потенциала:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= 4\pi\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

где σ — поверхностная плотность свободных зарядов на границе. На границе между диэлектриком и проводником второе из граничных условий (1.24) принимает вид

$$-\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (1.24a)$$

Там, где нет зарядов, электростатический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad (1.23a)$$

решение которого однозначно определяется заданием граничных условий.

Частным решением уравнения Пуассона—Лапласа является потенциал поля, создаваемого точечным зарядом q в однородной среде, заполняющей все пространство,

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}. \quad (1.25)$$

Если поле создается несколькими точечными зарядами, то

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{\varepsilon r_k}. \quad (1.26)$$

Если поле создается непрерывным (линейным, поверхностным и объемным) распределением зарядов в однородной бесконечной среде, то

$$\varphi = \int \frac{\chi dl}{\varepsilon r} + \int \frac{\sigma dS}{\varepsilon r} + \int \frac{\rho dV}{\varepsilon r}. \quad (1.27)$$

Если электростатическое поле создается в вакууме системой зарядов, то на достаточно больших по сравнению

с размерами системы расстояниях

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu=1}^3 Q_{\mu\nu} \left(\frac{3x_{\mu}x_{\nu}}{r^5} - \frac{\delta_{\mu\nu}}{r^3} \right) + \dots, \quad (1.28)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор рассматриваемой точки поля (в качестве начала отсчета выбрана произвольная точка внутри системы зарядов); x — координаты этой точки

поля; $q = \sum_{k=1}^n q_k$ — суммарный заряд системы;

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^n q_k \mathbf{r}_k \quad (1.29)$$

— дипольный момент системы (\mathbf{r}_k — радиус-вектор заряда q_k);

$$Q_{\mu\nu} = \sum_{k=1}^n q_k \left(\xi_{\mu}^{(k)} \xi_{\nu}^{(k)} - \frac{1}{3} r_k^2 \delta_{\mu\nu} \right) \quad (1.30)$$

— тензор квадрупольного момента;

ξ_{μ}^k — координаты заряда q_k .

Если поле плоское, т. е. зависит лишь от двух декартовых координат (x, y) , то удобно пользоваться так называемым комплексным потенциалом.

Если

$$f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

есть аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$, то $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ являются решениями двумерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

и удовлетворяют уравнениям Коши—Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.31)$$

Отсюда следует, что кривые $\varphi(x, y) = \text{const}$ и $\psi(x, y) = \text{const}$ взаимно ортогональны. Если $\varphi(x, y)$ по-

тенциал электростатического поля, то силовые линии этого поля определяются уравнением $\psi(x, y) = \text{const}$, и наоборот.

На точечный заряд q во внешнем поле (\mathbf{E}) действует сила

$$\mathbf{E} = q\mathbf{E} = -q\nabla\varphi = -\nabla W. \quad (1.32)$$

Вообще, если замкнутая электростатическая система обладает энергией $W(x_1x_2\dots)$, где $x_1x_2\dots$ независимые параметры (обобщенные координаты), которыми определяется конфигурация этой системы, то действующие силы (обобщенные силы в смысле аналитической динамики) определяются формулой

$$F_k = -\frac{\partial W}{\partial x_k}. \quad (1.33)$$

Энергия диполя во внешнем поле

$$W = -\mathbf{p}\mathbf{E}. \quad (1.34)$$

Отсюда действующие на диполь силы дают момент

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p} \times \mathbf{E}] \quad (1.35)$$

и главный вектор

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p}\mathbf{E}) = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}. \quad (1.36)$$

На заряженный проводник действуют силы в направлении внешней нормали с поверхностной плотностью

$$f = \frac{\sigma E}{2} = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon}. \quad (1.37)$$

Силы, действующие на проводник в электростатическом поле, можно также вычислить по формуле

$$F_k = -\left(\frac{\partial W}{\partial x_k}\right)_q, \quad (1.38a)$$

либо

$$F_k = +\left(\frac{\partial W}{\partial x_k}\right)_\varphi \quad (1.38b)$$

в зависимости от того, поддерживается ли постоянным на проводнике его заряд q или потенциал φ .

Главный вектор пондеромоторных сил, действующих

на любой объем V , ограниченный замкнутой поверхностью S , можно вычислить по формуле (если пренебречь электрострикцией)

$$F_i = \oint_S T_{ik} dS_k, \quad (1.39)$$

где

$$T_{ik} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik} \right) \quad (1.40)$$

— максвелловский тензор натяжений.

§ 1. Закон Кулона

1.1. Вычислить непосредственно на основании закона Кулона (см. уравнение 1.12) напряженность следующих полей в вакууме (для б—в показать, что на заряженной поверхности нормальная составляющая напряженности терпит разрыв на $4\pi\sigma$):

а) поле бесконечной прямолинейной нити, равномерно заряженной с линейной плотностью χ ;

б) поле бесконечной плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ ;

в) поле бесконечно длинной поверхности круглого цилиндра, равномерно заряженной с линейной плотностью χ . Радиус цилиндра a ;

г) поле равномерно заряженной сферической поверхности. Радиус сферы a , заряд ее q ;

д) поле, создаваемое зарядом q , равномерно распределенным по объему шара радиуса a .

1.2. Заряд q равномерно распределен по объему ($\rho = \text{const}$), заключенному между двумя эксцентричными сферами так, что меньшая из них находится целиком внутри большей. Определить напряженность поля внутри пустой полости.

1.3. В основном состоянии атома водорода заряд электрона ($-e$) распределен с объемной плотностью

$$\rho = - \frac{e}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}},$$

где a — боровский радиус, r — расстояние от ядра.

Вычислить напряженность поля внутри атома.

1.4. Поле создается в вакууме равномерно заряженной окружностью радиуса a , заряд ее q . Вычислить напряженность поля на оси окружности.

1.5. Круглый диск радиуса a равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ . В какой точке на оси диска напряженность поля равна $\pi\sigma$?

1.6. Поле создается зарядом q , координаты которого $(-a, 0, 0)$ и зарядом $-q$, координаты которого $(a, 0, 0)$. Вычислить поток вектора напряженности через поверхность круглого диска радиуса a , плоскость которого перпендикулярна оси x и центр которого совпадает с началом координат.

1.7. Поле создается в вакууме равномерно заряженной прямолинейной бесконечной нитью. Линейная плотность зарядов χ . Вычислить поток вектора напряженности этого поля через поверхность квадрата со стороной $2a$, плоскость которого параллельна заряженной нити и отстоит от нее на расстоянии a .

§ 2. Теорема Остроградского—Гаусса

1.8. Вывести из уравнений Максвелла закон Кулона для вакуума.

1.9. Бесконечная прямолинейная нить равномерно заряжена с линейной плотностью χ и окружена однородным диэлектриком с проницаемостью ϵ_1 , имеющим форму бесконечного цилиндра радиуса R , а за ним ($R > R_1$) — однородным безграничным диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 . Определить напряженность поля, создаваемого заряженной нитью.

1.10. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на границе ($R = R_1$) диэлектриков предыдущей задачи.

1.11. Определить поле, создаваемое равномерно заряженной ($\sigma = \text{const}$) поверхностью бесконечно длинного круглого цилиндра радиуса a в неоднородной диэлектрической среде, проницаемость которой $\epsilon = \epsilon(R)$, где R — расстояние от оси цилиндра.

1.12. Определить объемную плотность связанных зарядов в предыдущей задаче.

1.13. Определить поле, создаваемое бесконечной равномерно заряженной ($\sigma = \text{const}$) плоскостью, если по обе

стороны от нее пространство заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью ϵ .

1.14. Определить поле плоского конденсатора, обкладки которого равномерно заряжены с поверхностной плотностью зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$. Пространство между ними заполнено неоднородным диэлектриком, проницаемость которого $\epsilon = \epsilon(x)$. Краевым эффектом пренебречь. Ось x направлена перпендикулярно к обкладкам от положительной заряженной обкладки к отрицательной.

1.15. Определить поле, создаваемое заряженным проводящим шаром радиуса a . Заряд его Q . Диэлектрическая проницаемость окружающей среды $\epsilon = \epsilon(r)$, где r — расстояние от центра шара.

1.16. Определить поверхностную плотность связанных зарядов (σ') на границе диэлектрика и шара из предыдущей задачи.

1.17. Внутренняя обкладка сферического конденсатора имеет заряд q . Наружная обкладка заземлена. Определить заряд, индуцированный на наружной обкладке.

1.18. Определить поле сферического конденсатора, радиусы обкладок которого r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$). Заряд внутренней обкладки q , наружная заземлена; между ними неоднородный диэлектрик, проницаемость которого $\epsilon = \epsilon(r)$.

1.19. Однородный диэлектрический шар радиуса a равномерно заряжен по объему ($\rho = \text{const}$), заряд его q , проницаемость шара ϵ_0 , окружающей среды — $\epsilon = \epsilon(r)$. Вычислить напряженность поля, создаваемого заряженным шаром.

1.20. Найти распределение связанных зарядов на поверхности и внутри заряженного шара из предыдущей задачи.

§ 3. Потенциал. Дифференциальное уравнение Пуассона—Лапласа

1.21. Вычислить потенциал поля, создаваемого в вакууме прямолинейным равномерно заряженным отрезком длиной $2l$ (линейная плотность χ). Определить эквипотенциальные поверхности этого поля.

1.22. Проводник имеет форму эллипсоида вращения с полуосями a и b ($b < a$), ось вращения служит ось $2a$. Заряд его q . Определить потенциал поля, создаваемого им в вакууме.

1.23. Определить потенциал и напряженность поля, создаваемого в вакууме прямолинейной бесконечной нитью, равномерно заряженной с линейной плотностью χ .

1.24. Вычислить потенциал поля, создаваемого в вакууме тонким металлическим кольцом радиуса a , несущим заряд q . Рассмотреть поле на оси кольца.

1.25. Определить потенциал и напряженность поля, создаваемого в однородной среде, заряженным проводящим шаром радиуса a . Заряд шара q . Диэлектрическая проницаемость среды ϵ .

1.26. Определить потенциал поля, создаваемого в вакууме равномерно заряженной ($\sigma = \text{const}$) поверхностью круглого цилиндра с радиусом a и высотой H в любой точке на его оси.

1.27. Заряд q равномерно распределен ($\rho = \text{const}$) по объему шара радиуса a . Вычислить потенциал и напряженность поля, создаваемого этим зарядом в вакууме.

1.28. В основном состоянии атома водорода заряд электрона ($-e$) распределен с объемной плотностью $\rho = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$, где a — боровский радиус, r — расстояние от ядра. Вычислить потенциал и напряженность поля в атоме.

1.29. Потенциал поля, создаваемого электрическим диполем с моментом p , определяется формулой

$$\Phi = \frac{p \cdot r}{r^3},$$

где r — радиус-вектор рассматриваемой точки поля, проведенный из центра диполя. Вычислить напряженность этого поля.

1.30. Найти уравнение силовых линий поля, рассмотренного в предыдущей задаче.

1.31. Определить потенциал поля, создаваемого в вакууме двойным электрическим слоем. Поверхность его S , мощность τ .

Примечание. Мощностью двойного слоя называется дипольный момент, приходящийся на единицу его поверхности.

1.32. Двойной электрический слой постоянной мощности τ имеет форму круглого диска радиуса a . Вычислить потенциал поля, создаваемого им на оси диска.

1.33. Найти уравнение силовых линий поля, создаваемого в однородной среде двумя точечными зарядами, равными по величине и противоположными по знаку. Расстояние между ними $2a$.

У к а з а н и е. Ввести переменные

$$\xi = \frac{z+a}{R}; \quad \eta = \frac{z-a}{R}.$$

При этом удастся разделить переменные в дифференциальном уравнении силовых линий.

1.34. Найти уравнение силовых линий поля, создаваемого в однородной среде двумя одноименными и равными по величине точечными зарядами, находящимися на расстоянии $2a$ друг от друга.

1.35. Показать, что дипольный момент электрически нейтральной системы не зависит от выбора начала.

1.36. Показать, что тензор квадрупольного момента аксиально симметричного распределения зарядов имеет лишь одну независимую компоненту.

1.37. Вычислить потенциал и напряженность поля, создаваемого в вакууме аксиально-симметричным квадруполем с моментом

$$Q_{zz} = Q; \quad (Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q).$$

1.38. Вычислить тензор квадрупольного момента двух концентрических колец, радиус которых a и b , несущих заряды q и $-q$.

1.39. Вычислить квадрупольный момент заряда q , равномерно распределенного ($\rho = \text{const}$) по объему эллипсоида вращения с полуосями a и b ($2a$ — ось вращения).

1.40. Потенциал электростатического поля в вакууме

$$\varphi = \begin{cases} -ax & (x > 0), \\ ax & (x < 0). \end{cases}$$

Определить распределение зарядов, которыми создается это поле.

1.41. Потенциал электростатического поля в вакууме

$$\varphi = \begin{cases} a \ln \frac{R_0}{R} & (R > R_0), \\ \frac{a}{2} \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2} \right) & (R < R_0), \end{cases}$$

где R_0 и a — постоянные. Определить соответствующее распределение зарядов. R — расстояние от заряда до оси.

1.42. Потенциал поля в вакууме

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{r} & (r > a), \\ \frac{q}{a} & (r < a), \end{cases}$$

где r — расстояние от начала координат; q и a — постоянные. Определить соответствующее распределение зарядов.

1.43. Потенциал поля в вакууме

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{r} & (r > a), \\ -\frac{1}{2} \frac{q}{a^3} r^2 + \frac{3}{2} \frac{q}{a} & (r < a), \end{cases}$$

где r — расстояние от начала координат, a и q — постоянные. Определить соответствующее распределение зарядов:

1.44. Найти распределение зарядов, создающих в вакууме потенциал Юкавы,

$$\bar{\varphi} = q \frac{e^{-r/a}}{r}.$$

1.45. Определить комплексный потенциал поля, создаваемого в вакууме бесконечной прямолинейной нитью, равномерно заряженной с линейной плотностью χ . Найти уравнение силовых линий.

1.46. Найти потенциал и уравнения силовых линий поля, созданного в вакууме двумя бесконечными и параллельными нитями, находящимися на расстоянии $2a$ друг от друга и одноименно заряженными равномерно с линейной плотностью зарядов χ .

1.47. Найти потенциал и уравнения силовых линий поля, создаваемого в вакууме двумя параллельными и

бесконечными нитями, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$ и равномерно заряженными с линейной плотностью χ и $-\chi$. Определить эквипотенциальные поверхности этого поля.

1.48. Показать, что для двумерного поля, описываемого комплексным потенциалом $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, поток электрического вектора через поверхность единицы длины (вдоль оси z), ограниченную дугой AB , равен

$$\int_A^B E_n dl = \psi(x_B y_B) - \psi(x_A y_A).$$

1.49. Исследовать поле, комплексный потенциал которого

$$f(z) = \sqrt{z}.$$

1.50. Определить при помощи уравнения Лапласа потенциал поля, создаваемого в вакууме равномерно заряженной ($\sigma = \text{const}$) бесконечно длинной поверхностью круглого цилиндра радиуса a , и вычислить напряженность этого поля.

1.51. Определить при помощи уравнения Пуассона потенциал и напряженность поля, создаваемого бесконечным плоским слоем толщиной $2a$, равномерно заряженным с объемной плотностью $\rho = \text{const}$. Диэлектрическая проницаемость слоя $\varepsilon = \text{const}$. Окружающая среда — вакуум.

1.52. Определить при помощи уравнения Пуассона потенциал и напряженность поля, создаваемого однородным шаром радиуса a , равномерно заряженным с объемной плотностью $\rho = \text{const}$. Диэлектрическая проницаемость шара $\varepsilon = \text{const}$. Окружающая среда — вакуум.

1.53. Определить при помощи уравнения Пуассона потенциал и напряженность поля, создаваемого однородным бесконечно длинным круглым цилиндром радиуса a , равномерно заряженным с объемной плотностью $\rho = \text{const}$. Диэлектрическая проницаемость цилиндра ε . Окружающая среда — вакуум.

1.54. Электростатическое поле в пространстве, свободном от зарядов, обладает аксиальной симметрией $\varphi = \varphi(R, z)$. На оси симметрии ($R=0$) потенциал поля равен $\Phi(z)$.

Показать, что в любой точке этой области

$$\varphi(R, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(z + iR \sin \alpha) d\alpha,$$

либо

$$\varphi(R, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(z + iR \cos \alpha) d\alpha.$$

1.55. Показать, что если заряженный проводящий шар погрузить наполовину в однородный жидкий диэлектрик, то создаваемое шаром поле остается сферически симметричным. Заряд шара q , радиус его a . Найти распределение зарядов на шаре. Проницаемость диэлектрика ε .

§ 4. Емкостные коэффициенты. Конденсаторы. Теорема взаимности Грина

1.56. Проводящий шар радиуса a окружен concentрическим слоем диэлектрика радиуса b . Найти емкость шара, если проницаемость диэлектрика ε .

1.57. Все пространство заполнено двумя однородными диэлектриками с проницаемостями ε_1 и ε_2 . Между ними находится проводящий шар радиуса a так, что центр его находится на плоскости раздела диэлектриков. Найти емкость шара.

1.58. Вычислить емкость цилиндрического конденсатора. Длина его l , радиусы обкладок R_1 и R_2 . Между обкладками два коаксиальных слоя однородных диэлектриков с проницаемостью ε_1 и ε_2 , граница раздела между ними — цилиндрическая поверхность радиуса R_0 . Краевым эффектом пренебречь.

1.59. Вычислить емкость плоского конденсатора. Поверхность обкладок S , между ними два плоскопараллельных слоя однородных диэлектриков. Толщина первого слоя d_1 , проницаемость ε_1 , второго — соответственно d_2 и ε_2 . Краевым эффектом пренебречь.

1.60. Вычислить емкость сферического конденсатора, заполненного наполовину однородным диэлектриком с проницаемостью ε_1 , а наполовину — однородным диэлек-

триком с проницаемостью ϵ_2 . Граница раздела между ними — плоскость, проходящая через центр обкладок. Радиусы обкладок a и b .

1.61. Точечный заряд q находится в вакууме на расстоянии l от центра заземленной проводящей сферы радиуса a ($a < l$). Определить индуцированный на сфере заряд.

1.62. Точечный заряд q находится на расстоянии l от центра заземленного проводящего шара, рассмотренного в задаче 1.56. Найти заряд, индуцированный на шаре, если $l > b$.

1.63. Точечный заряд q находится между заземленными обкладками воздушного сферического конденсатора на расстоянии r от центра обкладок. Радиусы обкладок a и b . Определить индуцированные на них заряды.

1.64. Точечный заряд q находится в воздухе между двумя заземленными параллельными металлическими пластинами на расстоянии a от одной из них. Расстояние между пластинами d . Определить индуцированные на них заряды в предположении, что размеры пластин достаточно велики (по сравнению с расстоянием d между ними).

1.65. Три проводящих шара радиуса a расположены в воздухе так, что их центры совпадают с вершинами равностороннего треугольника со стороной r , причем $r \gg a$. Каждый шар поочередно на некоторое время заземляли. Определить заряды, оставшиеся после этого на шарах, если первоначально каждый шар имел заряд q .

1.66. Четыре одинаковых проводящих шара радиуса a , центры которых совпадают с вершинами квадрата со стороной r , находятся в воздухе. Одному из шаров сообщили заряд. После этого заряженный шар соединили на некоторое время металлической проволокой поочередно с каждым из незаряженных шаров (в циклическом порядке). Определить, как распределился заряд между всеми шарами, если $r \gg a$.

1.67. Доказать при помощи теоремы взаимности Грина симметричность емкостных и потенциальных коэффициентов в уравнениях (1.19) и (1.19а).

1.68. Выразить емкость конденсатора через емкостные коэффициенты C_{kl} (см. 1.19) его обкладок.

1.69. Вычислить емкость единицы длины двух параллельных проводов круглого сечения, находящихся на расстоянии D друг от друга, если радиус проводов $a \ll D$. Диэлектрическую проницаемость окружающей среды принять равной единице.

1.70. Два достаточно длинных проводящих круглых цилиндра, радиусы которых R_1 и R_2 , расположены в воздухе так, что их оси взаимно параллельны и находятся на расстоянии D друг от друга. Найти емкость единицы длины этих цилиндров. Рассмотреть предельный случай $R_1 = R_2 = a \ll D$.

1.71. Вычислить на основании результатов предыдущей задачи емкость единицы длины воздушного цилиндрического конденсатора. Радиусы обкладок R_1 и R_2 .

1.72. Ось достаточно длинного проводящего круглого цилиндра радиуса R находится на расстоянии a от бесконечной проводящей плоскости. Используя результаты задачи 1.70, найти емкость единицы длины этой системы.

§ 5. Энергия и силы взаимодействия. Максвелловский тензор натяжений

1.73. Вычислить энергию заряженного уединенного проводящего шара радиуса a в однородной среде с проницаемостью ϵ . Заряд шара q .

1.74. Вычислить приближенно энергию двух заряженных металлических шаров, находящихся на большом расстоянии друг от друга. Радиусы шаров a и b . Заряды их q_1 и q_2 . Расстояние между их центрами r ($r \gg a$; $r \gg b$).

1.75. Вычислить энергию равномерно заряженного по объему диэлектрического шара радиуса a . Диэлектрическая проницаемость шара ϵ . Окружающая среда — вакуум. Заряд шара q .

1.76. Для основного состояния атома водорода вычислить энергию взаимодействия между ядром и электронным облаком, плотность которого

$$\rho = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}},$$

где a — боровский радиус; r — расстояние от ядра.

1.77. Вычислить энергию заряженного цилиндрического конденсатора, рассмотренного в задаче 1.58. Заряд его q .

1.78. Вычислить энергию заряженного плоского конденсатора, рассмотренного в задаче 1.59. Заряд его q .

1.79. Расстояние между обкладками плоского конденсатора d , площадь обкладок S , между ними вплотную к обкладкам находится диэлектрическая пластинка. Конденсатор заряжен от источника напряжения до разности потенциалов $\Delta\phi$ и отключен от него. Какую работу надо произвести, чтобы вынуть из конденсатора диэлектрическую пластинку?

1.80. Две вертикальные и параллельные металлические пластинки погружены частично в сосуд с жидким диэлектриком. Расстояние между пластинами d и к ним приложено напряжение $\Delta\phi$. На какую высоту h поднимется керосин между пластинами? Капиллярностью пренебречь.

1.81. Цилиндрический конденсатор погружен вертикально одним концом в жидкий диэлектрик, который поднялся между его обкладками на высоту h . К обкладкам конденсатора приложено напряжение $\Delta\phi$, радиусы их R_1 и R_2 . Найти диэлектрическую проницаемость диэлектрика, если его удельный вес δ . Капиллярностью пренебречь.

1.82. Между обкладками заряженного воздушного плоского конденсатора находится изолированная от земли металлическая пластина толщиной d , параллельная обкладкам конденсатора. Какую работу надо произвести, чтобы вынуть пластину из конденсатора? Поверхность каждой обкладки (и пластины) S , заряд их q и $-q$.

1.83. Два конденсатора, емкости которых C_1 и C_2 , заряжаются до напряжения U_1 и U_2 , после чего они соединяются между собой. Определить работу разряда при: а) параллельном и б) последовательном соединении конденсаторов.

1.84. Два одинаковых и коаксиальных металлических кольца радиуса a лежат в параллельных плоскостях на расстоянии h друг от друга. Работа, которую нужно совершить, чтобы заряд q внести из бесконечности в центры этих колец, равна соответственно A_1 и A_2 . Найти заряды колец.

1.85. Два уединенных проводника имеют в вакууме емкости C_1 и C_2 . Находясь на достаточно большом по сравнению с их размерами расстоянии r друг от друга, они заряжены до потенциалов φ_1 и φ_2 . Найти силу взаимодействия между ними.

1.86. Определить энергию взаимодействия двух электрических диполей в вакууме. Какую работу нужно затратить, чтобы два диполя расположить параллельно друг другу?

1.87. Вычислить силы, действующие на обкладки плоского конденсатора из задачи 1.14. Поверхность каждой обкладки S .

1.88. Заряженный проводящий шар, находящийся в вакууме, разрезан на две половины. Вычислить силу их отталкивания. Радиус шара a , заряд его q .

1.89. Показать, что полная сила, действующая на тело в электростатическом поле, определяется формулой

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \varepsilon \mathbf{E} (\mathbf{E}\mathbf{n}) - \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \mathbf{n} \right\} dS,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела. Интегрирование распространяется на всю поверхность тела.

1.90. Вычислить главный вектор сил, действующих на диэлектрик, находящийся между обкладками плоского конденсатора из задачи 1.14.

1.91. Показать, что кулоновская сила взаимодействия между двумя точечными зарядами q_1 и q_2 , находящимися на расстоянии r в однородной диэлектрической среде, может быть вычислена при помощи максвелловского тензора натяжений.

1.92. Вычислить энергию в силу взаимодействия двух параллельных и бесконечных нитей, равномерно заряженных с линейной плотностью χ и $-\chi$ и расположенных на расстоянии a друг от друга в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε .

1.93. Найти силу взаимодействия нитей из предыдущей задачи при помощи максвелловского тензора натяжений.

1.94. Определить силы взаимодействия между двумя электрическими диполями в вакууме для случая, когда диполи лежат в одной плоскости.

1.95. Два длинных проводящих цилиндра радиуса R расположены в вакууме параллельно друг другу и заряжены с постоянной линейной плотностью χ и $-\chi$. Найти силу взаимного притяжения цилиндров, приходящуюся на единицу длины, если расстояние между осями цилиндра D .

§ 6. Метод электрических изображений

1.96. Определить потенциал и напряженность поля, создаваемого в вакууме точечным зарядом q , находящимся на расстоянии a от бесконечной заземленной проводящей плоскости.

1.97. Вычислить поверхностную плотность зарядов, индуцированных на проводящей плоскости, рассмотренной в предыдущей задаче, и весь индуцированный заряд. Показать, что заряд, индуцированный на любом участке проводящей плоскости, пропорционален телесному углу, под которым он виден из заряда.

1.98. Электрический диполь находится в вакууме на расстоянии a от бесконечной проводящей плоскости. Момент его \mathbf{p} параллелен этой плоскости. Найти силу притяжения диполя к проводнику.

1.99. Точечный заряд q находится на одинаковом расстоянии a от двух взаимно перпендикулярных заземленных проводящих полуплоскостей. Определить создаваемое поле.

1.100. Вычислить плотность зарядов, индуцированных на проводящих полуплоскостях предыдущей задачи.

1.101. Две бесконечные заземленные проводящие полуплоскости образуют угол в 60° . Точечный заряд находится на биссекторе этого двугранного угла на расстоянии a от его ребра. Определить создаваемое им в вакууме поле.

1.102. Вычислить плотность зарядов, индуцированных на проводящих полуплоскостях, рассмотренных в предыдущей задаче.

1.103. Два точечных заряда q_1 и q_2 находятся на расстоянии l друг от друга. Между ними на равных от них расстояниях помещена достаточно больших размеров заземленная металлическая пластина толщиной d ($d < l$). Определить действующую на нее силу.

1.104. Равномерно заряженная ($\chi = \text{const}$) бесконечная прямолинейная нить находится на расстоянии a от параллельной ей бесконечной проводящей плоскости. Определить создаваемое ею в вакууме поле.

1.105. Вычислить плотность зарядов, индуцированных на проводящей плоскости, заданной в предыдущей задаче.

1.106. Бесконечная, равномерно заряженная ($\chi = \text{const}$) прямолинейная нить находится на одинаковых расстояниях a от двух параллельных ей и взаимно перпендикулярных бесконечных заземленных проводящих полуплоскостей. Определить создаваемое ею в вакууме поле.

1.107. Вычислить поверхностную плотность зарядов, индуцированных на проводящих полуплоскостях, рассмотренных в предыдущей задаче.

1.108. Точечный заряд q находится в вакууме на расстоянии l от центра заземленной проводящей сферы радиуса a ($l > a$). Определить создаваемое им поле.

1.109. Определить распределение зарядов, индуцированных на поверхности сферы, заданной в предыдущей задаче.

1.110. Два одинаковых заряда находятся на расстоянии $2l$ друг от друга. Посредине между ними расположен заземленный проводящий шар. Каким должен быть приближенно радиус (a) этого шара, чтобы уравновесить взаимное отталкивание данных зарядов.

1.111. Проводящий шар радиуса a имеет заряд q_1 . Вне шара на расстоянии l ($l > a$) от его центра находится точечный заряд q_2 . Вычислить потенциал и напряженность создаваемого ими в вакууме поля.

1.112. Используя условия задачи 1.111, найти силу, действующую на заряд q_2 , если q_1 и q_2 одного знака.

1.113. Точечный заряд q находится внутри заземленной проводящей полой сферы радиуса a на расстоянии l от ее центра ($l < a$). Определить создаваемое им в вакууме поле.

1.114. Найти распределение зарядов, индуцированных на сферической поверхности (см. условие предыдущей задачи), и суммарный индуцированный заряд.

1.115. В вакууме имеется бесконечно длинный заземленный проводящий круглый цилиндр радиуса a . Параллельно его оси протянута нить на расстоянии l ($l > a$) от

нее. Нить равномерно заряжена с линейной плотностью χ . Определить создаваемое ею поле и силу, действующую на единицу длины нити.

1.116. Найти распределение зарядов, индуцированных на поверхности цилиндра предыдущей задачи, и суммарный заряд, индуцированный на единице длины цилиндра.

1.117. Внутри бесконечно длинной заземленной проводящей цилиндрической поверхности радиуса a протянута нить параллельно оси цилиндра на расстоянии l от нее ($l < a$). Нить равномерно заряжена с линейной плотностью χ . Определить создаваемое ею поле.

1.118. Найти распределение зарядов, индуцированных на цилиндрической поверхности предыдущей задачи, и суммарный заряд, индуцированный на единице длины этой поверхности.

1.119. На каком расстоянии симметрично относительно оси нужно поместить внутри полого заземленного бесконечно длинного проводящего круглого цилиндра радиуса a две заряженные нити с линейной плотностью заряда χ и $-\chi$, чтобы действующие на нити силы взаимно уравновешивались.

1.120. В однородное поле в вакууме, напряженность которого E_0 , вносится незаряженный изолированный проводник, имеющий форму шара радиуса a . Определить установившееся поле и поляризуемость шара.

1.121. Используя условия предыдущей задачи, определить плотность зарядов, индуцированных на поверхности шара.

1.122. В однородное электрическое поле в вакууме, напряженность которого E_0 , вносится незаряженный изолированный проводящий шар радиуса a , состоящий из двух половин, плоскость раздела между которыми перпендикулярна к направлению поля. Какая сила нужна, чтобы удержать эти половинки вместе?

1.123. В однородное поле в вакууме, напряженность которого E_0 , вносится незаряженный однородной диэлектрический шар радиуса a . Определить установившееся поле. Диэлектрическая проницаемость шара ϵ . Вычислить поляризуемость шара.

1.124. Определить распределение связанных зарядов в диэлектрическом шаре, рассмотренном в предыдущей задаче.

1.125. Проводящий шар радиуса a окружен concentрической диэлектрической оболочкой, наружный радиус которой равен b , а проницаемость ϵ . Эта система вносится в однородное поле напряженности E_0 . Определить результирующее поле.

1.126. В однородное поле в вакууме, напряженность которого E_0 , внесен однородный бесконечно длинный диэлектрический цилиндр, ось которого перпендикулярна полю. Радиус цилиндра a , диэлектрическая проницаемость его ϵ . Определить установившееся поле.

1.127. Определить распределение связанных зарядов в диэлектрическом цилиндре, рассмотренном в предыдущей задаче.

1.128. В однородное поле в вакууме, напряженность которого E_0 , внесен незаряженный изолированный проводник, имеющий форму бесконечно длинного круглого цилиндра радиуса a . Ось цилиндра перпендикулярна к полю. Определить установившееся поле.

1.129. Определить плотность зарядов, индуцированных на поверхности цилиндра, заданного в предыдущей задаче.

1.130. Два однородных диэлектрика с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 граничат по плоскости. По одну сторону этой границы напряженность поля равна E_1 и составляет угол α_1 с нормалью к границе раздела. Определить величину и направление напряженности поля по другую сторону границы раздела.

1.131. Два однородных диэлектрика с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 граничат по бесконечной плоскости. По одну сторону от этой границы (в первой среде) на расстоянии a от нее находится точечный заряд q . Определить создаваемое им поле.

1.132. Вычислить поверхностную плотность связанных зарядов на границе раздела диэлектриков (см. условие предыдущей задачи).

1.133. Точечный заряд q находится в вакууме на расстоянии a от бесконечной плоской поверхности однородного диэлектрика с проницаемостью ϵ . Вычислить силу взаимодействия между ними.

1.134. Решить предыдущую задачу при помощи максвелловского тензора натяжений.

1.135. Однородный, бесконечно длинный, незаряженный диэлектрический цилиндр радиуса a находится в

вакууме в поле равномерно заряженной бесконечной нити, которая параллельна оси цилиндра и отстоит от нее на расстоянии l ($l > a$). Определить поле, если линейная плотность зарядов на нити равна χ , а диэлектрическая проницаемость цилиндра ϵ , а также силу, действующую на единицу длины заряженной нити.

1.136. Внутри однородного диэлектрического круглого цилиндра радиуса a протянута параллельно оси цилиндра и на расстоянии l ($l < a$) от нее бесконечная нить, равномерно заряженная с линейной плотностью χ . Определить создаваемое ею поле, если диэлектрическая проницаемость цилиндра ϵ .

ЧАСТЬ II

СТАЦИОНАРНЫЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ И МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Сила тока через любую поверхность S

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{j} — плотность тока.

По закону Ома в дифференциальной форме для постоянных токов

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.2)$$

где σ — удельная проводимость.

При наличии сторонних э. д. с.

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}), \quad (2.3)$$

где $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ — напряженность сторонних э.д.с.

Для стационарных токов (см. XII)

$$\text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (2.4)$$

Отсюда следует граничное условие

$$j_n^{(1)} = j_n^{(2)}. \quad (2.4a)$$

По закону Джоуля—Ленца в дифференциальной форме, объемная плотность мощности тепловых потерь

$$Q = \frac{1}{\sigma} j^2. \quad (2.5)$$

Из (2.2) и (2.4) следует, что в однородной ($\sigma = \text{const}$) проводящей среде, в которой проходят постоянные электрические токи,

$$\text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (2.4б)$$

Кроме того, в стационарном случае (см. X)

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0,$$

а потому, так же как и в электростатике, можно ввести потенциал φ , удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (2.4в)$$

Из уравнения Максвелла (X) вытекают следующие дифференциальные уравнения для магнитного поля постоянных токов:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (2.6)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.7)$$

где магнитная индукция

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}. \quad (2.8)$$

Для большинства изотропных магнетиков (слабomagнитных) в не слишком сильном постоянном поле вектор намагничивания

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}, \quad (2.9)$$

где χ — магнитная восприимчивость, зависящая от свойств и состояния вещества. Для диамагнетиков $\chi < 0$; для парамагнетиков $\chi > 0$.

Для анизотропного (кристаллического) магнетика материальное уравнение (2.9) заменяется следующим:

$$M_i = \chi_{ik} H_k, \quad (2.9а)$$

где χ_{ik} — тензор магнитной восприимчивости.

Для ферромагнетика материальное уравнение (2.9) не применимо, но можно при помощи него формально ввести магнитную восприимчивость и для ферромагнетика. Она оказывается зависящей (и притом неоднозначно) от напряженности поля.

Из (2.8) и (2.9)

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.10)$$

где

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \quad (2.10a)$$

есть магнитная проницаемость вещества.

В интегральной форме уравнение (2.7) записывается так:

$$\oint_{\dot{L}} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^n (\pm I_k), \quad (2.11)$$

где I_k — сила тока, охватываемого контуром. Знак плюс имеет место тогда, когда направление тока составляет правовинтовую систему с направлением обхода контура. Введенный ранее (см. ур. (XVII)) вектор-потенциал не определяется однозначно уравнением

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (2.12)$$

На него можно поэтому наложить дополнительное условие, в качестве которого в стационарном случае (сравните с уравн. (3.4)) обычно берут

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (2.12a)$$

Из (2.7), (2.12) и (2.12a) следует, что внутри однородного либо кусочно-однородного магнетика вектор-потенциал удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона

$$\Delta \mathbf{A} = - \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}, \quad (2.13)$$

решением которого для случая бесконечного однородного магнетика есть

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int \mathbf{j} \frac{dV}{r}, \quad (2.14)$$

где интегрирование производится по объему всех проводников с током.

Если задано распределение токов лишь в некотором конечном объеме, то уравнением Пуассона (2.13) однозначно определяется поле в этом объеме, если помимо распределения токов заданы также и граничные условия для вектора \mathbf{A} на поверхности, ограничивающей данный объем (сравните с уравн. (1.23) на стр. 16).

Из (2.12а) следует, что на границе двух магнетиков должно выполняться условие

$$A_n^{(1)} = A_n^{(2)}. \quad (2.12б)$$

Там, где нет токов, вектор-потенциал удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа

$$\Delta \mathbf{A} = 0. \quad (2.15)$$

Для линейных токов решение (2.14) принимает вид

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \mu \frac{I_k}{c} \oint_{L_k} \frac{d\mathbf{l}}{r}. \quad (2.14а)$$

Из (2.14), (2.12) и (2.10) вытекает закон Био и Савара для случая бесконечной однородной среды

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{r}]}{r^3} dV, \quad (2.16)$$

а для линейных токов

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^n \frac{I_k}{c} \oint_{L_k} \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (2.17)$$

Если система токов сосредоточена в конечной области пространства, то вдали от нее вектор-потенциал магнитного поля (если везде $\mu = 1$)

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathbf{m} \times \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (2.18)$$

где

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dV \quad (2.19)$$

есть полный магнитный момент системы.

Силы, действующие на постоянный ток \mathbf{j} со стороны внешнего магнитного поля \mathbf{A} , могут быть определены при помощи «силовой функции»

$$U = -\frac{1}{c} \int \mathbf{jA} dV, \quad (2.20)$$

а именно: виртуальная работа действующих сил

$$\delta a = -\delta_I U. \quad (2.21)$$

Индекс I указывает на то, что силовую функцию надо варьировать при постоянном значении силы тока.

Для одного контура L линейного тока

$$U = -\frac{I}{c} \int_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = -\frac{I}{c} \Phi, \quad (2.20a)$$

где

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} dS \quad (2.22)$$

есть магнитный поток внешнего поля через поверхность S , которая опирается на контур L .

На элемент длины $d\mathbf{l}$ линейного тока I во внешнем магнитном поле \mathbf{B} действует сила

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \quad (2.23)$$

На элемент объема проводника с током действует сила

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] dV. \quad (2.23a)$$

На точечный заряд q , движущийся со скоростью \mathbf{v} в магнитном поле \mathbf{B} , действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (2.24)$$

Вообще, если x_k — обобщенные координаты, которыми определяется положение проводника с током, то на него действуют обобщенные силы

$$F_k = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)_I. \quad (2.25)$$

Если внешнее поле создается в однородной среде другим линейным током I_2 , то создаваемый им магнитный поток

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} I_2, \quad (2.26)$$

а потому силовая функция взаимодействия двух линейных токов в однородной среде

$$U_{12} = -L_{12} \frac{I_1}{c} \frac{I_2}{c}, \quad (2.27)$$

где

$$L_{12} = \mu \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{dl_1 dl_2}{r_{12}} \quad (2.28)$$

есть коэффициент взаимной индукции.

Для токов, распределенных с конечной плотностью,

$$U_{12} = -\frac{\mu}{c^2} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2}{r_{12}} dV_1 dV_2. \quad (2.29)$$

Для одного токонесящего проводника силовая функция

$$\begin{aligned} U_{11} &= -\frac{\mu}{2c^2} \int_V \int_V \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}'}{r} dV dV' = -\frac{1}{2} L_{11} \left(\frac{I}{c} \right)^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \Phi_{11} \frac{I}{c}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где L_{11} — коэффициент самоиндукции.

Полная силовая функция системы токов

$$U = -\frac{1}{2c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV = -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n L_{ik} \frac{I_i}{c} \frac{I_k}{c} = -W, \quad (2.31)$$

где

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \mathbf{B} dV \quad (2.32)$$

есть энергия магнитного поля, создаваемого этими токами.

Силы, действующие в постоянном магнитном поле, могут быть определены (если пренебречь магнитоэлектрической) при помощи максвелловского тензора натяжений

$$T_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \left(H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik} \right), \quad (2.33)$$

а именно, декартовы составляющие главного вектора сил, действующих на любое тело, определяются формулой

$$F_i = \oint_S T_{ik} dS_k, \quad (2.34)$$

где S — поверхность, ограничивающая рассматриваемое тело.

На магнитный диполь (магнитную стрелку) во внешнем магнитном поле действуют такие же силы, как и в случае электрического диполя во внешнем электрическом поле, а именно главный вектор этих сил

$$\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{mH}), \quad (2.35)$$

а момент этих сил

$$\mathbf{N} = [\mathbf{m} \times \mathbf{H}]. \quad (2.36)$$

Из второго уравнения Максвелла следует, что индуцированная в любом контуре электродвижущая сила (э. д. с.) индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.37)$$

где Φ — магнитный поток через поверхность, опирающуюся на данный контур.

Для квазистационарного тока создаваемый им магнитный поток связан с мгновенным значением силы тока так же, как и для постоянного тока (см. 2.26). Отсюда следует, что квазистационарные токи в системе индуктивно связанных неподвижных контуров определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^n L_{ik} \frac{dI_k}{dt} + R_i I_i = \mathcal{E}_i^{\text{стоп}}, \quad (2.38)$$

где I_i , R_i и $\mathcal{E}_i^{\text{стор}}$ — соответственно сила тока, сопротивление и сторонняя э. д. с. i -го контура; L_{ik} — коэффициент взаимной индукции i -го и k -го контуров; L_{ii} — коэффициент самоиндукции i -го контура.

В цепи переменного тока, для которой $\mathcal{E}^{\text{стор}} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, с емкостью C и самоиндукцией L , при установившемся режиме сила тока

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (2.39)$$

где амплитуда тока

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{c^2} \omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (2.40)$$

а отставание по фазе тока от э. д. с. определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{c^2} \omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (2.41)$$

Формулой (2.40) выражается «закон Ома» для переменного тока, где

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{c^2} \omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (2.42)$$

есть полное сопротивление (импеданс) переменному току.

В комплексной форме уравнения (2.39) и (2.40) можно записать так:

$$I = A e^{i\omega t}, \quad (2.39a)$$

где комплексная амплитуда

$$A = I_0 e^{-i\varphi} = \frac{\mathcal{E}_0}{Y}. \quad (2.40a)$$

Комплексное сопротивление

$$Y = R + i \left(\frac{1}{c^2} \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (2.42a)$$

складывается из омического R , индуктивного $\frac{i}{c^2} \omega L$ и емкостного $-\frac{i}{\omega C}$ сопротивлений.

Из (2.37) следует, что если прямолинейный проводник длиной l движется со скоростью v перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля \mathbf{B} , то в нем индуцируется э. д. с.

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{1}{c} v l B. \quad (2.43)$$

§ 1. Законы постоянного тока

2.1. Между обкладками сферического конденсатора, радиусы которых r_1 и r_2 , поддерживается постоянная разность потенциалов U . Пространство между обкладками заполнено однородной средой с удельной проводимостью σ . Вычислить сопротивление между обкладками, силу тока и мощность тепловых потерь.

2.2. Между обкладками цилиндрического конденсатора, радиусы которых R_1 и R_2 , поддерживается постоянное напряжение U . Пространство между обкладками заполнено однородной средой с удельной проводимостью σ . Найти силу тока и мощность тепловых потерь на единицу длины конденсатора.

2.3. Решить предыдущую задачу для того случая, когда пространство между обкладками конденсатора заполнено двумя однородными и коаксиальными прослойками с удельными проводимостями σ_1 и σ_2 , которые граничат по цилиндрической поверхности радиуса R_0 .

2.4. Вывести закон преломления линий стационарного тока на поверхности раздела двух однородных и изотропных проводящих сред.

2.5. В неоднородной проводящей среде с проводимостью $\sigma = \sigma(x, y, z)$ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$ поддерживается стационарное распределение токов $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x, y, z)$. Найти объемное распределение зарядов в этой среде.

2.6. В грунт вставлены два достаточно длинных цилиндрических электрода радиуса a_1 и a_2 , оси которых параллельны и находятся на расстоянии l друг от друга. Найти сопротивление грунта на единицу длины электродов, рассматривая грунт как однородную проводящую среду с удельной проводимостью σ .

2.7. В проводящей среде находится система электро-

дов, на которых поддерживаются постоянные потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Токи, стекающие с этих электродов, соответственно равны I_1, I_2, \dots, I_n . Показать, что джоулево тепло, выделяющееся в среде за единицу времени,

$$Q = \sum_{i=1}^n I_i \varphi_i.$$

2.8. В круглом бесконечно длинном проводящем полом цилиндре, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно a и b , прорезана во всю длину узкая продольная щель. На краях щели поддерживаются потенциалы $-\frac{U_0}{2}$ и $+\frac{U_0}{2}$. Удельная проводимость цилиндра σ . Вычислить силу тока, приходящуюся на единицу длины цилиндра, и его распределение по поперечному сечению.

2.9. Бесконечно длинный цилиндрический коаксиальный кабель состоит из провода круглого сечения радиуса a , окруженного вторым проводом в виде коаксиального полого цилиндра, внутренний и наружный радиусы которого равны соответственно b и c .

Удельная проводимость проводов σ , диэлектрическая проницаемость изоляции между ними ϵ . По кабелю проходит постоянный ток I . Определить электрическое поле внутри кабеля.

2.10. Двухпроводная воздушная линия состоит из двух достаточно длинных параллельных проводов круглого сечения радиуса a , оси которых находятся на расстоянии $2l$ друг от друга. Удельная проводимость проводов σ . По линии проходит постоянный ток силой I . Определить электрическое поле, создаваемое этой линией. Краевыми эффектами пренебречь.

§ 2. Закон Био и Савара

2.11. Вычислить напряженность магнитного поля, создаваемого в вакууме тонким прямолинейным проводником длиной $2L$, по которому проходит ток силой I . Рассмотреть предельный случай $L \rightarrow \infty$.

2.12. Определить магнитные силовые линии поля, рассмотренного в предыдущей задаче.

2.13. В магнитном поле, создаваемом в вакууме бесконечным прямолинейным током I , находится квадрат, расположенный в одной плоскости с током так, что сторона квадрата параллельна току. Сторона квадрата равна a . На каком расстоянии b от тока находится ближайшая к нему сторона квадрата, если магнитный поток через плоскость квадрата $\Phi = \frac{2I}{c} a \ln 3$?

2.14. Линейный проводник имеет форму прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$. По нему проходит ток силой I . Вычислить напряженность создаваемого им в вакууме магнитного поля на оси, проходящей через центр прямоугольника перпендикулярно его плоскости.

2.15. Линейный проводник имеет форму правильного n -угольника со стороной $2a$. По нему проходит ток силой I . Вычислить напряженность создаваемого им магнитного поля на оси, проходящей через центр многоугольника перпендикулярно его плоскости.

2.16. По круговому контуру радиуса a проходит ток I . Определить напряженность магнитного поля, создаваемого им на оси контура (среда однородная).

2.17. Ток I проходит по дуге окружности радиуса a с центральным углом 2α . Вычислить напряженность магнитного поля в центре окружности (в воздухе).

2.18. Линейный контур с током I состоит из двух параллельных полубесконечных прямых, соединенных между собою полуокружностью радиуса a . Вычислить напряженность магнитного поля в центре этой полуокружности. Окружающая среда — воздух.

2.19. Ток I равномерно распределен по поверхности плоского кольца, внутренний и наружный радиусы которого соответственно равны a и b . Вычислить напряженность магнитного поля на оси кольца.

2.20. На цилиндрическую катушку радиуса a и длиной $2l$ равномерно намотан один слой из N витков тонкой изолированной проволоки, по которой пропущен ток силой I . Вычислить напряженность магнитного поля на оси катушки.

2.21. На цилиндрическую катушку радиуса a и длиной $2l$ намотана однослойная обмотка тонкой изолированной проволоки, по которой проходит ток силой I .

Какова должна быть линейная плотность витков $n(\xi)$ обмотки, чтобы на оси катушки получить наперед заданное распределение поля $H = H(z)$?

2.22. На цилиндрическую катушку радиуса a и длиной $2l$ намотано N витков тонкой изолированной проволоки так, что наружный радиус обмотки равен l ($l > a$). Обмотка питается током силой I . Вычислить напряженность магнитного поля на оси катушки.

§ 3. Вектор-потенциал. Дифференциальное уравнение Пуассона—Лапласа

2.23. Вычислить вектор-потенциал и напряженность магнитного поля, создаваемого в воздухе ($\mu = 1$) прямолинейным током I длиной $2L$. Рассмотреть предельный случай, когда $L \rightarrow \infty$.

2.24. Вычислить вектор-потенциал однородного магнитного поля в: а) декартовых; б) цилиндрических и в) сферических координатах.

Среда однородная с постоянной магнитной проницаемостью μ .

2.25. Вычислить вектор-потенциал магнитного поля, создаваемого в вакууме круговым током радиуса a . Сила тока I .

Показать, что на достаточно больших расстояниях от круглого витка магнитное поле его сводится к полю магнитного диполя.

2.26. Зная вектор-потенциал, вычислить напряженность магнитного поля кругового тока в вакууме. Рассмотреть напряженность поля на оси кругового тока.

2.27. Вычислить вектор-потенциал магнитного поля, создаваемого в однородной среде с магнитной проницаемостью μ , линейным током I , который течет по прямоугольному контуру со сторонами $2a$ и $2b$.

Показать, что на больших по сравнению с размерами контура расстояниях создаваемое им магнитное поле сводится к полю магнитного диполя.

2.28. Вычислить вектор-потенциал и напряженность магнитного поля, создаваемого током I , равномерно распределенным по сечению бесконечно длинного цилиндрического проводника радиуса a . Магнитная проницаемость провода μ , окружающая среда—воздух ($\mu_0 = 1$).

2.29. Ток I проходит по проводнику, имеющему форму бесконечно длинного полого цилиндра, наружный и внутренний радиусы которого равны соответственно a и b . Вычислить вектор-потенциал и напряженность создаваемого им магнитного поля. Магнитная проницаемость проводника μ , окружающая среда — воздух.

2.30. Определить вектор-потенциал, напряженность и уравнения силовых линий магнитного поля, создаваемого в воздухе двумя параллельными и направленными в одну сторону бесконечными прямолинейными токами силой I . Расстояние между токами $2a$.

2.31. Определить вектор-потенциал, напряженность и уравнения силовых линий магнитного поля, создаваемого в воздухе двумя антипараллельными бесконечными прямолинейными токами силой I . Расстояние между токами $2a$.

2.32. Бесконечный прямолинейный ток силой I находится в вакууме на расстоянии a от параллельной ему плоской поверхности однородного магнетика, заполняющего полупространство. Определить создаваемое этим током поле. Магнитная проницаемость магнетика μ .

2.33. Однородный магнетик имеет форму бесконечно длинного круглого цилиндра радиуса a , магнитная проницаемость его μ ; окружающая среда — воздух. Бесконечный прямолинейный ток проходит в воздухе параллельно оси магнетика на расстоянии l от нее. Определить создаваемое им магнитное поле.

2.34. Все пространство заполнено однородным магнетиком, в котором имеется воздушная полость в виде бесконечно длинного круглого цилиндра радиуса a . В этой полости параллельно ее оси и на расстоянии l от нее протянута тонкая проволока, по которой проходит ток силой I . Определить создаваемое этим током магнитное поле. Магнитная проницаемость магнетика μ .

2.35. Полупространство заполнено однородным магнетиком с проницаемостью μ_1 , а второе полупространство — однородным магнетиком с проницаемостью μ_2 . В первой среде имеется плоский контур L с током I , расположенный параллельно плоскости раздела обеих сред на расстоянии h от нее. Определить создаваемое током магнитное поле.

§ 4. Циркуляция магнитного вектора. Магнетик в однородном поле

2.36. Показать непосредственным интегрированием, что для магнитного поля, создаваемого в воздухе как прямоугольным, так и круговым током (см. задачи 2.14 и 2.16),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_z dz = \frac{4\pi}{c} I,$$

где ось z направлена вдоль оси симметрии контура.

Задачи 2.37—2.44 решить при помощи теоремы (2.11) о циркуляции магнитного вектора.

2.37. По бесконечно длинному цилиндрическому проводнику радиуса a проходит ток I , равномерно распределенный по площади поперечного сечения ($j = \text{const}$). Определить напряженность магнитного поля, создаваемого этим током в однородной среде.

2.38. По бесконечно длинной цилиндрической поверхности радиуса a проходит ток I , равномерно распределенный по поверхности цилиндра вдоль его образующих. Определить напряженность создаваемого им в однородной среде магнитного поля.

2.39. По бесконечно длинному полому цилиндру проходит ток I , равномерно распределенный по площади поперечного сечения. Определить напряженность создаваемого им в однородной среде магнитного поля. Внутренний и наружный радиусы проводника равны соответственно a и b .

2.40. По каждому из двух бесконечно длинных параллельных проводов круглого сечения радиуса a проходит ток I , равномерно распределенный по площади поперечного сечения. Расстояние между осями проводов $l > 2a$. В каких точках на прямой, проходящей через эти оси перпендикулярно к ним, напряженность магнитного поля равна нулю? Рассмотреть случаи параллельных и антипараллельных токов.

2.41. Бесконечно длинный проводник имеет форму круглого цилиндра радиуса a , внутри которого находится цилиндрическая полость радиуса b . Расстояние между осями обоих цилиндров $l < a - b$. По проводнику проходит ток, равномерно распределенный по площади по-

перечного сечения. Определить напряженность магнитного поля внутри полости.

2.42. На железный тор, магнитная проницаемость которого μ , намотано равномерно и достаточно густо N витков тонкой изолированной проволоки, по которой проходит ток I . Радиус сечения тора a , расстояние от центра сечения до оси тора b . Определить напряженность магнитного поля внутри тора и магнитный поток в нем. Рассеянием магнитного потока пренебречь.

2.43. На достаточно длинный железный сердечник круглого сечения радиуса a намотана равномерно обмотка из тонкой изолированной проволоки, по которой проходит ток I . Определить магнитное поле внутри сердечника. Краевым эффектом пренебречь. Магнитная проницаемость сердечника μ . Число витков на единицу длины n .

2.44. Определить напряженность магнитного поля внутри цилиндрического кабеля, описанного в задаче 2.9.

2.45. Однородный немагнитный шар ($\mu=1$) радиуса a , равномерно заряженный по объему, вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр шара. Его полный заряд q . Определить магнитный момент шара.

2.46. Немагнитный цилиндр ($\mu=1$) радиуса a и высоты h , равномерно заряженный по объему, вращается вокруг своей геометрической оси с угловой скоростью ω . Полный заряд q . Определить магнитный момент цилиндра.

2.47. В однородное магнитное поле, напряженность которого H_0 , вносится однородный магнетик с постоянной магнитной проницаемостью μ_1 , имеющий форму полого шара с радиусами a и b ($a > b$). Определить установившееся поле, если магнитная проницаемость окружающей среды и во внутренней полости равна μ_2 .

2.48. В однородное магнитное поле, напряженность которого H_0 , вносится однородный магнетик с постоянной магнитной проницаемостью μ_1 , имеющий форму полого бесконечно длинного цилиндра с радиусами a и b ($a > b$) так, что ось цилиндра перпендикулярна к направлению поля. Определить установившееся поле, если магнитная проницаемость окружающей среды и во внутренней полости равна μ_2 .

§ 5. Взаимодействие токов. Коэффициенты индуктивности

2.49. Вычислить силу взаимодействия в воздухе между двумя параллельными бесконечными прямолинейными токами; силы токов I_1 и I_2 , расстояние между ними $2a$.

2.50. Решить предыдущую задачу при помощи тензора натяжений Максвелла.

2.51. Полупространство заполнено однородным магнетиком с проницаемостью μ . На расстоянии a от плоской поверхности магнетика протянут параллельно ей тонкий бесконечно длинный провод, по которому проходит ток I . Определить взаимодействие между магнетиком и проводником с током.

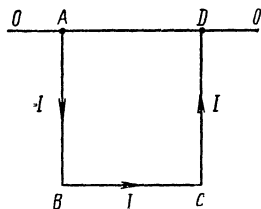


Рис. 1

2.52. Бесконечный прямолинейный ток I проходит в воздухе параллельно оси магнетика, имеющего форму бесконечно длинного круглого цилиндра радиуса a . Проницаемость магнетика μ , расстояние тока от оси магнетика $l > a$. Определить взаимодействие между током и магнетиком.

2.53. Внутри однородного магнетика, заполняющего все пространство, имеется воздушная полость цилиндрической формы радиуса a . Внутри этой полости симметрично относительно ее оси протянуты два тонких провода, по которым проходят параллельные токи I . Каково должно быть расстояние l проводов от оси полости, чтобы действующие на проводники силы взаимно уравновешивались? Проницаемость магнетика μ .

2.54. Медный провод $ABCD$ с радиусом сечения a , согнутый в виде трех сторон квадрата (рис. 1), прикреплен своими концами A и D к горизонтальной оси O , вокруг которой он может свободно вращаться в однородном вертикальном магнитном поле H . По проводу пропущен ток I . На какой угол α отклонится провод? Удельный вес меди δ .

2.55. Доказать, что силы взаимодействия между двумя замкнутыми линейными токами в однородной среде удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия.

2.56. Определить период малых колебаний магнитной стрелки в однородном магнитном поле. Стрелка может вращаться в плоскости поля. Магнитный момент ее m , напряженность поля H .

2.57. Маленькая магнитная стрелка может свободно вращаться около своей оси. На некотором расстоянии от нее находится другая магнитная стрелка, которая неподвижно закреплена в плоскости вращения первой под углом Θ к прямой, соединяющей их центры. Под каким углом α к этой прямой расположится первая стрелка?

2.58. Три маленькие магнитные стрелки закреплены своими центрами в вершинах правильного треугольника ABC и могут свободно вращаться вокруг них в плоскости этого треугольника.

В положении равновесия магнитная стрелка A параллельна стороне BC , а магнитные стрелки B и C перпендикулярны соответственно сторонам AB и AC . Магнитный момент стрелки A равен m_1 . Определить магнитные моменты m_2 и m_3 остальных двух стрелок.

2.59. Магнитная стрелка находится в воздухе на расстоянии a от плоской поверхности однородного магнетика, заполняющего полупространство. Дипольный момент стрелки m составляет угол α с нормалью к поверхности магнетика, проницаемость которого μ . Определить силы, действующие на магнитную стрелку.

2.60. Прямоугольная рамка, стороны которой равны a и b , может вращаться в воздухе вокруг своей оси симметрии, расположенной перпендикулярно направлению однородного магнитного поля. Напряженность поля H . По рамке проходит ток I . Определить действующие на нее силы.

2.61. Бесконечный прямолинейный ток I_1 и круговой ток I_2 радиуса a лежат в одной плоскости. Расстояние центра кругового тока от прямолинейного равно $b > a$. Найти силу, действующую на круговой ток.

2.62. Прямоугольная рамка с током I_1 может вращаться вокруг своей оси симметрии, которая параллельна неподвижному бесконечному прямолинейному току I_2 . Стороны рамки равны $2a$ и $2b$. Расстояние оси рамки от прямолинейного тока l . Токи находятся в воздухе ($\mu=1$). Найти вращающий момент, действующий на рамку.

2.63. Вычислить коэффициент взаимной индукции

двух одинаковых контуров, имеющих форму квадрата со стороной a и расположенных в параллельных плоскостях, находящихся на расстоянии b друг от друга, так, что соответствующие стороны контуров взаимно параллельны и находятся на том же расстоянии b друг от друга. Окружающая среда — воздух.

Вычислить силу взаимного притяжения этих контуров, когда по ним текут в параллельных направлениях токи I_1 и I_2 .

2.64. Показать, что в предельном случае $a \ll b$ контуры с токами, рассмотренные в предыдущей задаче, взаимодействуют как магнитные диполи, моменты которых направлены по нормали к плоскости контура и величина которых определяется формулами

$$m_1 = \frac{I_1}{c} a^2; \quad m_2 = \frac{I_2}{c} a^2.$$

2.65. Вычислить коэффициент взаимной индукции двух коаксиальных круговых контуров, лежащих в параллельных плоскостях. Радиусы их равны a и b . Расстояние между их центрами h . Окружающая среда — воздух. Найти силу взаимного притяжения этих контуров, когда по ним текут параллельные токи I_1 и I_2 .

2.66. Показать, что в предельном случае, когда радиусы витков, рассмотренных в предыдущей задаче, малы по сравнению с расстоянием между ними ($a \ll h$ и $b \ll h$) они взаимодействуют между собою как диполи, магнитные моменты которых направлены по оси витка и величина которых определяется формулами

$$m_1 = \frac{I_1}{c} \pi a^2; \quad m_2 = \frac{I_2}{c} \pi b^2.$$

2.67. Круговой виток радиуса a , по которому проходит ток I_1 , находится в воздухе на расстоянии b от параллельной ему плоской поверхности однородного магнетика, заполняющего полупространство. Проницаемость магнетика μ . Найти силу, с которой круговой ток притягивается к магнетiku.

2.68. Вычислить коэффициент взаимной индукции и силу взаимодействия между током I_2 по контуру равнобедренного треугольника и током I_1 по бесконечной прямой, лежащей в плоскости треугольника на расстоянии

b от ближайшей к ней и параллельной ей стороны треугольника. Сторона треугольника равна a . Принять $\mu=1$.

2.69. На круглый железный сердечник радиуса a намотана достаточно длинная катушка из n витков на единицу длины, а поверх нее короткая катушка из N витков. Вычислить коэффициент взаимной индукции этих катушек. Магнитная проницаемость железного сердечника μ . Рассеянием магнитного потока пренебречь.

2.70. На железное кольцо, имеющее форму тора, радиус сечения которого a и расстояние от центра сечения до оси тора b , намотано равномерно и плотно N_1 витков тонкой изолированной проволоки, а поверх нее другая катушка из N_2 витков. Вычислить коэффициент взаимной индукции этих катушек. Магнитная проницаемость железного сердечника μ .

2.71. Вычислить коэффициент взаимной индукции между катушкой из N витков, намотанной на тор круглого сечения радиуса a и бесконечным прямым проводом, идущим вдоль оси тора. Расстояние центра сечения тора от его оси равно b .

2.72. Вычислить самоиндукцию единицы длины бесконечной катушки круглого сечения радиуса a . Число витков на единицу длины n ; магнитная проницаемость сердечника μ .

2.73. Вычислить самоиндукцию катушки, состоящей из N витков, намотанных равномерно на железный тор круглого сечения радиуса a , центр которого находится на расстоянии b от оси тора. Магнитная проницаемость железа μ . Рассмотреть предельный случай $b \rightarrow \infty$.

2.74. Вычислить самоиндукцию единицы длины цилиндрического кабеля, состоящего из двух коаксиальных цилиндрических трубок радиуса R_1 и R_2 . Толщиной их стенок можно пренебречь. Все пространство между ними заполнено однородной изоляцией, магнитная проницаемость которой μ .

2.75. Вычислить самоиндукцию единицы длины кабеля, состоящего из двух коаксиальных цилиндрических проводов: внутреннего сплошного радиуса R_0 и наружного — полого, внутренний и наружный радиусы которого равны соответственно R_1 и R_2 . Магнитная проницаемость проводов μ_1 , а изоляционной прослойки между ними μ_2 .

2.76. Вычислить внутреннюю часть самоиндукции единицы длины прямолинейного провода круглого сечения радиуса a . Магнитная проницаемость провода μ .

2.77. Вычислить самоиндукцию тонкого кольца радиуса r из проволоки круглого сечения радиуса $a \ll r$. Магнитная проницаемость проводника μ_1 , окружающей среды μ_2 .

2.78. Вычислить самоиндукцию единицы длины двухпроводной воздушной линии, состоящей из двух одинаковых параллельных проводов круглого сечения радиуса a , расстояние между осями которых равно l . Магнитная проницаемость материала проводов $\mu=1$.

2.79. Самоиндукция плоского контура в воздухе ($\mu=1$) равна L . Найти самоиндукцию этого контура в том случае, если по одну сторону от него пространство заполнено однородным магнетиком с проницаемостью μ .

2.80. Определить движение нерелятивистского электрона в однородном магнитном поле. Напряженность поля H ; начальная скорость электрона v_0 составляет угол α с направлением поля.

2.81. Однородное электрическое поле напряженности E и однородное магнитное поле, индукция которого B , направлены взаимно перпендикулярно. Какой должна быть скорость электрона, чтобы он в этом комбинированном поле двигался равномерно и прямолинейно?

2.82. Максимальная энергия, которую можно сообщить протону при помощи циклотрона, равна W . Внутренний радиус дуанта равен R . Определить индукцию магнитного поля. Релятивистскими эффектами пренебречь.

§ 6. Закон электромагнитной индукции. Квазистационарные токи

2.83. Плоский контур вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной к полю. Индукция поля равна B . Определить э. д. с. индукции в этом контуре. Площадь, ограниченная контуром, равна S .

2.84. Определить силу тока в контуре предыдущей задачи. Самоиндукция контура L , сопротивление его R .

2.85. Цепь постоянного тока состоит из следующих

последовательно соединенных частей: аккумулятора с э. д. с. \mathcal{E} индуктивности L и двух сопротивлений R_1 и R_2 . Определить силу тока в цепи после того, как сопротивление R_2 замыкается накоротко.

2.86. Заряженный конденсатор с емкостью C замкнут на сопротивление R с самоиндукцией L . Определить заряд на обкладках конденсатора как функцию от времени, если первоначально он был равен q_0 .

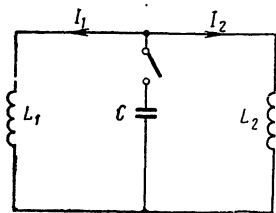


Рис. 2

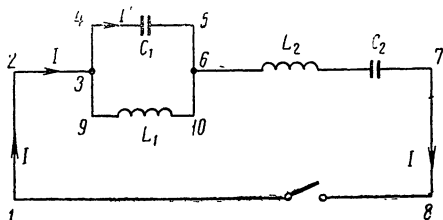


Рис. 3

2.87. Конденсатор, емкость которого C , заряжен количеством электричества q . При помощи ключа конденсатор замыкается на две параллельно соединенные между собою катушки, самоиндукции которых L_1 и L_2 (рис. 2). Найти максимальные силы тока в катушках. Сопротивлением и взаимной индукцией катушек пренебречь.

2.88. Коэффициент взаимной индукции двух колебательных контуров равен L_{12} . Параметры этих контуров (сопротивление, индуктивность и емкость) равны соответственно $R_1L_1C_1$ и $R_2L_2C_2$. На конденсаторе первого контура имеется заряд q , а контур разомкнут. Конденсатор второго контура не заряжен и контур замкнут. Составить дифференциальные уравнения, которыми определяются токи в контурах после замыкания первого из них.

2.89. Конденсатор емкости C_1 и катушка с индуктивностью L_1 соединены параллельно. К ним последовательно присоединены катушка с индуктивностью L_2 и конденсатор емкости C_2 . Составить дифференциальное уравнение, которым определяется заряд q на конденсаторе C_2 после замыкания цепи (рис. 3), если первоначально он был равен q_0 , а на конденсаторе C_1 заряда

не было. Сопротивлением катушек и подводящих проводов пренебречь.

2.90. Батарея, э. д. с. которой \mathcal{E} и внутреннее сопротивление R , конденсатор емкости C и катушка с индуктивностью L соединены параллельно (рис. 4). Определить силу тока в батарее после ее замыкания. Сопротивлением катушки и подводящих проводов пренебречь.

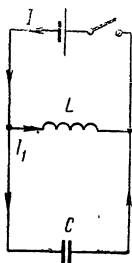


Рис. 4

2.91. После того, как в цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, установился стационарный режим, отключается батарея. Как после этого будет изменяться заряд на обкладках конденсатора.

2.92. Колебательный контур 12341 индуктивно связан с двумя другими одинаковыми колебательными контурами. Взаимное расположение контуров, их емкости и индуктивности показаны на рис. 5. Коэффициент взаимной индукции между рядом расположенными катушками равен L_{12} , взаимной индукцией между удаленными катушками, а также сопротивлением катушек и подводящих проводов пренебречь. Составить дифференциальное уравнение, которым определяется ток в контуре 12341 после его замыкания.

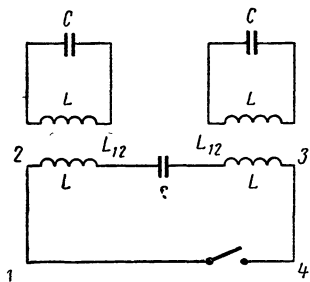


Рис. 5

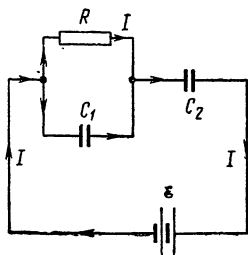


Рис. 6

2.93. Цепь состоит из последовательного соединения конденсатора емкости C_2 , батареи, э. д. с. которой \mathcal{E} , и звена, представляющего собой параллельное соединение сопротивления R и конденсатора емкости C_1 (рис. 6). Определить заряд конденсатора C_2 . Внутренним сопро-

тивлением батареи, а также индуктивностью и сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

2.94. Коэффициент взаимной индукции двух контуров равен L_{12} . Сопротивления этих контуров равны соответственно R_1 и R_2 . В первом контуре имеется аккумулятор с э. д. с., равной \mathcal{E} . Какое количество электричества пройдет через второй контур после того, как замкнут первый?

2.95. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью L , соединенной последовательно с двумя конденсаторами, емкости которых C_1 и C_2 . В момент замыкания контура заряд на конденсаторе C_1 равен Q , а на конденсаторе C_2 — нулю. Найти силу тока в контуре.

2.96. Цепь переменного тока содержит катушку с сопротивлением R и индуктивностью L . Какой емкости конденсатор нужно присоединить параллельно катушке, чтобы заряд его изменялся в одной фазе с током в основной цепи?

2.97. Какая мощность требуется для того, чтобы равномерно вращать с угловой скоростью ω плоский контур, рассмотренный в задаче 2.83.

2.98. В цепи переменного тока имеется участок ABC , состоящий из проводника AB с активным сопротивлением R , последовательно соединенного с участком BC , который представляет собою параллельное соединение активного сопротивления R и катушки с индуктивностью L и сопротивлением R . Между точками A и C поддерживается переменное напряжение $V = V_0 \cos \omega t$. Определить напряжение между точками B и C .

2.99. К параллельному соединению конденсатора емкости C и катушки с индуктивностью L (омическим сопротивлением пренебречь) приложено переменное напряжение частоты ω . При каком условии ток, питающий этот контур, равен нулю?

2.100. Два контура, омическое сопротивление, индуктивности и емкости которых равны соответственно R_1, L_1, C_1 и R_2, L_2, C_2 , связаны через активное сопротивление r (рис. 7). В первом контуре имеется генератор, э. д. с. которого $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$. Найти токи в этих контурах при установившемся режиме.

2.101. Два параллельных стержня лежат в одной плоскости с бесконечным прямолинейным током I на рас-

стояниях a и b по одну сторону от него ($a < b$). Вдоль стержней скользит со скоростью v поперечный проводник AB по направлению к сопротивлению R , на которое замкнуты стержни. Определить силу тока в контуре ABR . Сопротивлением стержней и проводника AB пренебречь.

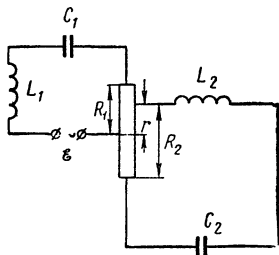


Рис. 7

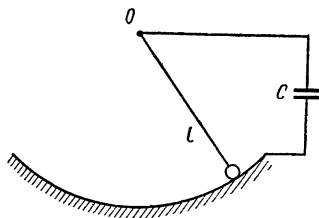


Рис. 8

2.102. Показать, что мощность индукционного тока в контуре ABR предыдущей задачи равна мощности сил, которые нужно приложить к проводнику AB , чтобы он двигался равномерно.

2.103. Стержень OA вращается с угловой скоростью ω вокруг точки O в плоскости, перпендикулярной к направлению однородного магнитного поля H . Определить э. д. с. индукции между точками O и A , если длина стержня l .

2.104. Круговой проводник радиуса a расположен в вертикальной плоскости перпендикулярно к направлению однородного магнитного поля H . Вокруг его центра O может свободно вращаться радиальный проводник OA , вес которого P . Какое напряжение нужно приложить к концам проводника OA , чтобы он равномерно вращался с угловой скоростью ω ? Самоиндукцией проводника пренебречь.

2.105. Математический маятник состоит из проводящей нити длиной l , на которой подвешен металлический шарик. Маятник может колебаться в плоскости, перпендикулярной к однородному магнитному полю H , касаясь при этом проводящей дуги круга. Точка O подвеса маятника и дуга круга соединены электрически с обкладками конденсатора, емкость которого C (рис. 8).

Определить период малых колебаний маятника. Сопротивлением проводящего контура и его самоиндукцией пренебречь.

2.106. Тяжелый горизонтальный стержень AB , масса которого m , может скользить без трения по двум вертикальным стержням AM и BN_1 , замкнутым на сопротивление R . Определить закон падения стержня AB в однородном поперечном магнитном поле H . Сопротивлением стержней и самоиндукцией контура пренебречь.

2.107. Составить дифференциальное уравнение движения стержня AB предыдущей задачи для того случая, когда стержни AM и BN замкнуты на катушку с сопротивлением R и индуктивностью L .

2.108. Решить задачу 2.106 для того случая, когда стержни AM и BN замкнуты на конденсатор, емкость которого C . Сопротивлением и самоиндукцией контура пренебречь.

ЧАСТЬ III

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Для случая переменного электромагнитного поля индукция $\mathbf{D}(t)$ зависит от значения напряженности $\mathbf{E}(t)$ во все предыдущие моменты времени. Предполагая связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} линейной, уравнение (1.5) для изотропной среды следует заменить уравнением

$$\mathbf{D}(t) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau. \quad (3.1)$$

Разлагая $\mathbf{D}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$ в интегралы Фурье, можно получить (см. задачу 3.22), что для их Фурье — компонент, т. е. для поля монохроматичной электромагнитной волны,

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad (3.2)$$

т. е. материальное уравнение типа (1.5) с тем существенным отличием, что диэлектрическая проницаемость зависит не только от свойств среды, но и от частоты

поля. Проницаемость $\epsilon(\omega)$ оказывается при этом, вообще говоря, комплексной.

Аналогично обобщается и материальное уравнение (2.10) на случай монохроматического магнитного поля, а именно

$$\mathbf{B}(\omega) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\omega). \quad (3.3)$$

Формулами (XVII) потенциалы электромагнитного поля (φ и \mathbf{A}) не определяются однозначно заданными значениями векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} , а потому можно на потенциалы φ и \mathbf{A} наложить добавочное условие, совместимое с (XVII).

Оказывается удобным подчинить потенциалы так называемому калибровочному соотношению Лоренца.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (3.4)$$

При этом для случая однородной непроводящей ($\sigma=0$) среды подстановка (XVII) во вторую пару уравнений Максвелла (X) приводит к дифференциальным уравнениям Даламбера для потенциалов

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}, \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (3.6)$$

Решениями этих уравнений являются запаздывающие потенциалы

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho\left(\xi, t - \frac{r}{v}\right)}{r} d\xi, \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(\xi, t - \frac{r}{v}\right)}{r} d\xi, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где интегрирование производится по объему всех источников.

Для однородной и изотропной непроводящей среды при отсутствии в ней зарядов ($\rho=0$) векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют волновым уравнением

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Простейшим решением этих уравнений является плоская монохроматическая электромагнитная волна, которая в комплексной форме* описывается уравнениями

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},\tag{3.9}$$

где \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 , \mathbf{k} и ω — постоянные (не зависящие от координат и времени) параметры, которые могут, вообще говоря, быть комплексными; они связаны между собой соотношениями:

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{v^2},\tag{3.10}$$

$$\mathbf{k}\mathbf{E}_0 = 0; \quad \mathbf{k}\mathbf{H}_0 = 0,\tag{3.11}$$

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0] = \frac{\mu\omega}{c} \mathbf{H}_0; \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0] = -\frac{\varepsilon\omega}{c} \mathbf{E}_0.\tag{3.12}$$

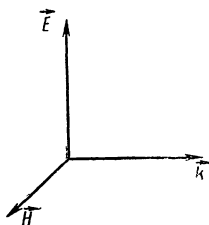


Рис. 9

Если все эти параметры вещественные, то уравнениями (3.9) описывается незатухающая линейно-поляризованная плоская монохроматическая волна, которая распространяется с фазовой скоростью v , определяемой уравнением (3.6) в направлении волнового вектора \mathbf{k} .

При этом из (3.11) следует, что волна поперечная ($\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ и $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$), а из (3.12) — что \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны и колеблются в одинаковых фазах

$$E = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H.\tag{3.12a}$$

* Физический смысл имеют вещественные части рассматриваемых выражений.

Взаимное расположение векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} иллюстрируется рис. 9.

Если же вектор \mathbf{E}_0 (а потому и \mathbf{H}_0) комплексный, а \mathbf{k} и ω по-прежнему вещественные, то его можно представить в виде

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}'_0 + i\mathbf{E}''_0,$$

где \mathbf{E}'_0 и \mathbf{E}''_0 — вещественные векторы*. Если при этом \mathbf{E}'_0 и \mathbf{E}''_0 коллинеарны, то комплексную амплитуду \mathbf{E}_0 можно представить в виде

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{A}e^{i\varphi_0},$$

где \mathbf{A} — вещественная амплитуда.

Этот случай отличается от предыдущего лишь наличием начальной фазы φ_0 .

Если же \mathbf{E}'_0 и \mathbf{E}''_0 не коллинеарны, то волна (3.9) есть суперпозиция двух волн, линейно поляризованных в разных направлениях и сдвинутых по фазе на $\frac{\pi}{2}$.

В этом случае уравнения (3.9) описывают эллиптически поляризованную волну (см. задачу 3.10).

Если же диэлектрическая проницаемость ϵ (или магнитная μ) комплексна, то волновой вектор \mathbf{k} комплексный и его можно, в общем случае, представить в виде

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''.$$

Если \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' коллинеарны, то можно положить $\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{k}_0$; волновое число

$$k = \frac{\omega}{c} (n' + in''), \quad (3.13)$$

а

$$n = n' + in'' = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (3.13a)$$

есть комплексный показатель преломления. Это соответствует волне, распространяющейся с фазовой скоростью

$$v = \frac{c}{n'},$$

* В дальнейшем, не оговаривая этого каждый раз, мы значками $'$ и $''$ будем обозначать соответственно вещественную и мнимую части рассматриваемых комплексных величин.

амплитуда которой экспоненциально затухает по закону

$$A = E_0 e^{-\frac{\omega}{c} n'' (rk_0)}, \quad (3.14)$$

где \mathbf{k}_0 — единичный вектор направления распространения. Если же \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' не коллинеарны, то это приводит к неоднородной плоской волне, для которой плоскости равных фаз $\mathbf{k}'\mathbf{r} = \text{const}$ не совпадают с плоскостями равных амплитуд $\mathbf{k}''\mathbf{r} = \text{const}$.

Из (3.9) видно, что применительно к векторам плоской монохроматической волны операторы ∇ и $\frac{\partial}{\partial t}$ определяются уравнениями

$$\nabla = i\mathbf{k}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = -i\omega, \quad (3.15)$$

а потому для плоской монохроматической волны уравнения Максвелла (X) можно в общем случае записать в виде

$$\mathbf{kD} = 0; \quad \mathbf{kB} = 0, \quad (3.11a)$$

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}; \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{H}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}. \quad (3.12б)$$

Для случая однородной волны можно положить

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{k}_0, \quad (3.10a)$$

где \mathbf{k}_0 — орт волнового вектора, и тогда для немагнитной среды ($\mu=1$) из (3.12б) следует, что

$$\mathbf{D} = \frac{c^2}{v^2} \{ \mathbf{E} - \mathbf{k}_0 (\mathbf{k}_0 \mathbf{E}) \}. \quad (3.12в)$$

Из линейности и однородности уравнения (3.8) следует, что любая линейная комбинация плоских волн также является решением этих уравнений. И, наоборот, любое решение уравнения (3.8) можно разложить по плоским волнам в виде интеграла Фурье.

При помощи волновых пакетов с резко выраженными интерференционными максимумами передают сигналы на расстояние. Интерференционный максимум распространяется с групповой скоростью

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (3.16)$$

В проводящей среде (металле) в стационарном случае объемные заряды отсутствуют ($\rho=0$). При этом уравнения Максвелла для периодического поля (частоты ω) * можно свести формально к соответствующим уравнениям для непроводящей среды путем замены

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (3.18)$$

С учетом этой замены уравнениями (3.9) описывается распространение плоской монохроматической волны в проводящей среде. Из того, что для металлов для всех волн вплоть до видимой области ($\omega < 10^{15}$) $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg 1$ следует, что электромагнитные волны в металлах быстро затухают.

Из (3.13а) и (3.18) следует, что для проводящей среды вещественная и мнимая части комплексного показателя преломления определяются уравнениями

$$\begin{aligned} n' &= \sqrt{\frac{1}{2} \mu \left\{ \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2} + \varepsilon \right\}}, \\ n'' &= \sqrt{\frac{1}{2} \mu \left\{ \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^2} - \varepsilon \right\}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Для предельного случая $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg 1$

$$n' = n'' = \sqrt{\mu \frac{2\pi\sigma}{\omega}} \gg 1. \quad (3.19a)$$

На границе двух сред электромагнитная волна испытывает отражение и преломление. Частота волны при этом не меняется. Направление распространения этих волн определяется общеизвестными законами геометрической оптики (для случая изотропных непроводящих сред), а их интенсивность и состояние поляризации — формулами Френеля. Для случая изотропных, непрово-

* Зависимость от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$.

дящих и немагнитных сред они имеют вид

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} A_{\parallel}; \quad R_{\perp} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} A_{\perp},$$

$$D_{\parallel} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} A_{\parallel}; \quad D_{\perp} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} A_{\perp}, \quad (3.20)$$

где A , R и D — амплитуды электрических векторов падающей, отраженной и преломленной волн. Значки \parallel и \perp обозначают составляющие этих амплитуд, параллельные и перпендикулярные плоскости падения.

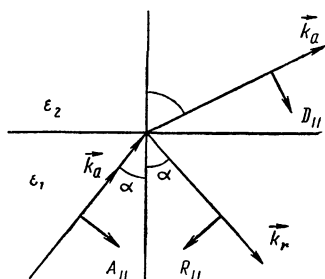


Рис. 10

Положительное направление параллельных составляющих показано на чертеже (рис. 10), а для перпендикулярных составляющих они направлены все в одну сторону, составляющую правинтовую систему с направлениями векторов \mathbf{k} и \mathbf{E}_{\parallel} (перпендикулярно плоскости чертежа от нас). Угол падения α и угол преломления β связаны между собой

законом преломления, который для немагнитных изотропных сред записывается так:

$$\sqrt{\varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \beta. \quad (3.21)$$

Для случая нормального падения ($\alpha = \beta = 0$) формулы Френеля (3.20) принимают вид

$$R_{\parallel} = \frac{n-1}{n+1} A_{\parallel}; \quad D_{\parallel} = \frac{2}{n+1} A_{\parallel},$$

$$R_{\perp} = -\frac{n-1}{n+1} A_{\perp}; \quad D_{\perp} = \frac{2}{n+1} A_{\perp}. \quad (3.20a)$$

Интенсивность электромагнитной волны, т. е. энергия, переносимая волной за единицу времени через единицу поверхности фронта волны, определяется средним значением вектора Умова—Пойнтинга.

На основании (XV) и (3.12) интенсивность волны в изотропной среде

$$J = \bar{S} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |E_0|^2. \quad (3.22)$$

Поле излучения, т. е. электромагнитное поле на достаточно большом расстоянии от источника (в волновой зоне), создаваемое в однородной непроводящей среде переменным распределением зарядов с объемной плотностью,

$$\rho(t) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(t); \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (3.23)$$

определяется потенциалами

$$\varphi = -\operatorname{div} \Pi_e; \quad \mathbf{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \Pi_e}{\partial t}, \quad (3.24)$$

где электрический поляризационный потенциал

$$\Pi_e(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\mathbf{P}\left(\xi, t - \frac{r}{v}\right)}{r} d\xi. \quad (3.25)$$

Простейшим примером такого типа излучателя электромагнитных волн служит диполь Герца, дипольный момент которого

$$p = p_z = p_0 \cos \omega t. \quad (3.26)$$

Поле дипольного излучения его в вакууме определяется уравнениями

$$E_\Theta = H_\Psi = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0 \sin \Theta \frac{\cos(kr - \omega t)}{r}, \quad (3.27)$$

$$E_r = E_\Psi = H_r = H_\Theta = 0,$$

где r , Θ и ψ — полярные координаты рассматриваемой точки поля; полярной осью служит направление дипольного момента p_0 .

В векторной форме

$$\mathbf{H} = \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p}_0 \right] \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\cos(kr - \omega t)}{r}; \quad \mathbf{E} = \left[\mathbf{H} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right]. \quad (3.27a)$$

Эта сферическая волна переносит с собой энергию, плот-

ность тока которой дается вектором Умова—Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{\ddot{\mathbf{p}} \sin^2 \Theta}{4\pi c^3 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.28)$$

Отсюда средняя (за период) полная интенсивность дипольного излучения

$$J_0 = \frac{2}{3} \frac{\overline{\dot{\mathbf{p}}^2}}{c^3} = \frac{1}{3} \frac{\omega_0^4 \rho_0^2}{c^3}. \quad (3.28a)$$

Полную мгновенную интенсивность излучения осциллятора можно записать в виде

$$J = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}}^2. \quad (3.29)$$

Эту потерю энергии осциллятора на излучение можно интерпретировать как результат действия силы «лучистого трения»

$$\mathbf{F}_S = -\eta \mathbf{v}, \text{ где } \eta = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{c^3} \equiv m\gamma. \quad (3.30)$$

Поле излучения, создаваемое в однородной непроводящей среде переменными токами с плотностью

$$\mathbf{j}(t) = c \operatorname{rot} \mathbf{M}(t) \quad (\rho = 0), \quad (3.31)$$

определяется потенциалами

$$\varphi = 0; \quad \mathbf{A} = \operatorname{rot} \Pi_m, \quad (3.32)$$

где магнитный поляризационный потенциал

$$\Pi_m(\mathbf{x}, t) = \mu \int \frac{\mathbf{M}\left(\xi, t - \frac{r}{v}\right)}{r} d\xi. \quad (3.33)$$

При расчете поля излучения достаточно вычислить векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} с точностью до членов, обратно пропорциональных первой степени расстояния r . Поэтому при дифференцировании поляризационного потенциала и потенциалов φ и \mathbf{A} достаточно дифференцировать фазовый аргумент $(t - \frac{r}{v})$, знаменатель r можно при этом не дифференцировать.

§ 1. Токи смещения. Потенциалы электромагнитного поля

3.1. Показать, что при разрядке плоского конденсатора на его обкладках ток проводимости замыкается током смещения.

3.2. Показать, что при разрядке цилиндрического и сферического конденсаторов на их обкладках ток проводимости замыкается током смещения.

3.3. Проводник имеет форму достаточно длинного круглого цилиндра радиуса a , по которому течет постоянный ток I , равномерно распределенный по его сечению. Рассмотреть миграцию энергии электромагнитного поля на поверхности проводника. Показать, что джоулево тепло, которое выделяется в проводнике, равно энергии электромагнитного поля, которая поступает в проводник извне.

3.4. Показать, что в однородной и изотропной проводящей среде при отсутствии в ней свободных зарядов потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= \frac{4\pi}{c^2} \sigma\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \\ \nabla^2\mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c^2} \sigma\mu \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},\end{aligned}$$

если подчинить их калибровочному соотношению

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{4\pi}{c^2} \sigma\mu\varphi + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

3.5. Показать, что при указанных в предыдущей задаче условиях потенциалы поля можно выразить через так называемый вектор Герца (поляризационный потенциал) при помощи соотношений

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{\Pi}; \quad \mathbf{A} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma\mu\mathbf{\Pi} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t}, \quad (1)$$

потребовав, чтобы

$$\nabla^2\mathbf{\Pi} = \frac{4\pi}{c^2} \sigma\mu \frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Выразить векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} через вектор Герца $\mathbf{\Pi}$.

3.6. Показать, что если в однородной проводящей среде можно пренебречь током смещения по сравнению

с током проводимости, то плотность тока, \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{H} удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0; \quad \nabla^2 \mathbf{j} = \frac{4\pi}{c^2} \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

и что аналогичным уравнениям удовлетворяют также векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} и \mathbf{D} .

§ 2. Электромагнитные волны в неограниченной среде. Волновые пакеты

3.7. Написать уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся в прозрачной среде ($\sigma=0$) вдоль положительной оси z и линейно-поляризованной вдоль оси x .

3.8. Написать уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся в прозрачной немагнитной ($\mu=1$) среде с показателем преломления n вдоль отрицательной оси x и поляризованной по кругу (вправо).

3.9. Написать уравнение эллиптически поляризованной сферической электромагнитной волны, распространяющейся в немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью (действительной) ϵ и проводимостью σ .

3.10. Показать, что в общем случае плоская монохроматическая волна, распространяющаяся в непроводящей среде, является эллиптически поляризованной.

3.11. Определить частоту и состояние поляризации электромагнитной волны, полученной в результате наложения двух волн одинаковой амплитуды и очень близких частот, поляризованных по кругу в противоположных направлениях и распространяющихся в одном направлении.

3.12. Показать, что если в неоднородной плоской монохроматической электромагнитной волне ($\mathbf{k}=\mathbf{k}'+i\mathbf{k}''$) электрический вектор линейно поляризован, то $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}'$ и $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}''$, а магнитный вектор описывает, вообще говоря, эллипс в плоскости, проходящей через векторы \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' . Если же магнитный вектор линейно поляризован, то $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}'$ и $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}''$, а \mathbf{E} описывает эллипс в плоскости $\mathbf{k}'\mathbf{k}''$. Магнитную проницаемость считать вещественной.

3.13. Обобщить волновые уравнения (3.8) на случай неоднородной среды. Принять среду немагнитной ($\mu=1$).

3.14. В непроводящей среде распространяется плоская монохроматическая электромагнитная волна. Вычислить вектор-потенциал этого поля, если волна а) линейно поляризована; б) поляризована по кругу.

3.15. В однородной и изотропной проводящей среде распространяется плоская монохроматическая волна. Вычислить средний поток энергии через поверхность куба, боковые ребра которого параллельны направлению распространения волны. Показать, что этот поток равен средней мощности потерь на джоулево тепло.

3.16. Показать, что интенсивность монохроматической электромагнитной волны, т. е. среднее (по времени) значение вектора Умова—Пойнтинга, равна вещественной части комплексного вектора Умова—Пойнтинга

$$\mathbf{S}^+ = \frac{c}{8\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*],$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — комплексные векторы электромагнитной волны. Проиллюстрировать это на примере предыдущей задачи.

3.17. Найти дисперсионную формулу, т. е. зависимость $n(\omega)$ для прозрачной и немагнитной ($\mu=1$) среды, если известно, что групповая скорость обратно пропорциональна фазовой.

3.18. Показать, что в прозрачной диспергирующей среде групповая скорость $u = \frac{\bar{\mathbf{S}}}{\bar{\mathcal{W}}}$, где \mathbf{S} — вектор Умова—Пойнтинга, а

$$\bar{\mathcal{W}} = \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \mathbf{E}\mathbf{E}^* + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \mathbf{H}\mathbf{H}^* \right\}$$

есть среднее (по времени) значение плотности энергии электромагнитного поля.

3.19. В однородной, прозрачной и недиспергирующей среде ($\varepsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$) распространяется в направлении оси z электромагнитный импульс, который первоначально имел форму

$$f_0(z) = \lim_{t \rightarrow 0} f(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\delta} e^{-\frac{z^2}{2\delta^2}}.$$

Определить форму импульса $f(z, t)$ в любой последующий момент времени.

3.20. В однородной, прозрачной и недиспергирующей среде распространяется в направлении оси x электромагнитный импульс, который в точке $x=0$ определяется уравнением

$$f_0(t) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, t) = \begin{cases} ae^{-i\omega_0 t} & (|t| < \frac{T}{2}), \\ 0 & (|t| > \frac{T}{2}). \end{cases}$$

Найти спектральную плотность этого импульса.

3.21. Плоская монохроматическая линейно поляризованная волна падает в воздухе ($\epsilon = \mu = 1$) на рамочную антенну. Вычислить (двумя способами) э. д. с. индукции, которая наводится в антенне. Антенна имеет форму квадрата со стороной a и расположена, как показано на чертеже (рис. 11).

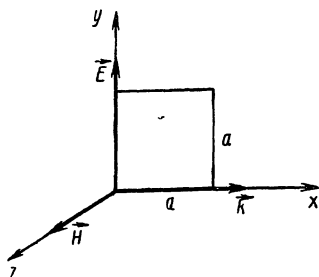


Рис. 11

§ 3. Поляризация вещества в переменном поле

3.22. Показать, что вещественная часть комплексной диэлектрической проницаемости является четной функцией частоты, а мнимая часть — нечетной функцией частоты.

3.23. Вычислить диэлектрическую проницаемость $\epsilon(\omega)$, положив в (3.1) $\epsilon(t) = Ae^{-\frac{t}{a}}$, где A и a — константы.

3.24. Определить движение свободной заряженной частицы (e, m) в поле монохроматической линейно поляризованной электромагнитной волны. Релятивистскими эффектами и радиационным торможением пренебречь.

3.25. В разреженном ионизированном газе (плазме) можно в первом приближении считать электроны свободными. Показать, что в этом приближении распространение электромагнитных волн в такой среде характеризуется мнимой проводимостью. Найти диэлектрическую проницаемость плазмы.

3.26. При какой частоте в плазме может распространяться чисто электрическая ($H=0$) продольная волна?

3.27. Плазма находится в однородном постоянном магнитном поле H_0 . Рассматривая плазму как разряженный электронный газ, определить движение электронов в поле плоской монохроматической волны, распространяющейся в направлении статического поля H_0 , а также дисперсионную формулу.

Указание. Ввести переменные $u = x + iy$, $g = E_x + iE_y$; $\mathcal{H} = H_x + iH_y$. Магнитное поле H_0 имеет направление оси z .

3.28. Вычислить групповую скорость электромагнитных волн в плазме при наличии в ней постоянного однородного магнитного поля H_0 в направлении распространения волны. Ограничиться случаем, когда $n-1 \ll 1$.

3.29. Показать, что при распространении радиоволн в ионосфере следует ожидать резонансных явлений вблизи длины волны $\lambda \approx 210$ м. Принять напряженность магнитного поля земли $H = 0,5$ э.

3.30. Исходя из модели упруго связанного электрона, вычислить тензор диэлектрической проницаемости диэлектрика при наличии в нем постоянного магнитного поля H_0 . N — число электронов в 1 см^3 . Принять собственную частоту одинаковой для всех электронов. Релятивистскими эффектами и радиационным торможением пренебречь.

Указание. Ввести в плоскости, перпендикулярной к направлению постоянного поля H_0 , циклические координаты

$$\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) \text{ и } \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy).$$

3.31. Определить фазовую скорость монохроматической электромагнитной волны в диэлектрике при наличии в нем постоянного магнитного поля H_0 . Принять магнитную проницаемость $\mu = 1$.

Указание. Воспользоваться тензором диэлектрической проницаемости, полученным в предыдущей задаче.

3.32. В диэлектрике имеется постоянное магнитное поле H_0 . Исследовать монохроматическую волну, которая распространяется: а) вдоль и б) поперек магнит-

ного поля. Диэлектрик считать прозрачным и немагнитным.

Указание. Воспользоваться тензором диэлектрической проницаемости, полученным в задаче 3.30.

§ 4. Отражение и преломление электромагнитных волн

3.33. В вакууме на безграничную плоскую поверхность однородного немагнитного диэлектрика ($\epsilon, \mu=1$) падает под углом α плоская электромагнитная волна, направление поляризации которой составляет угол Θ с плоскостью падения. Вычислить коэффициенты отражения ρ и прохождения δ .

3.34. Показать на примере предыдущей задачи, что при отражении и преломлении электромагнитной волны выполняется закон сохранения энергии.

3.35. Решить задачу 3.33 для случая, когда: 1) падающая волна не поляризована (естественный свет) и 2) падающая волна эллиптически поляризована.

3.36. Определить состояние поляризации отраженной и преломленной волн для задач 3.33 и 3.35.

3.37. Вычислить давление, производимое на поверхность диэлектрика электромагнитной волной, описанной в задаче 3.33.

3.38. Показать, что для немагнитных и непроводящих изотропных сред формулы Френеля для отраженной волны можно записать в виде

$$\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} = \frac{n^2 \cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}};$$
$$\frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = \frac{\cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}},$$

где α — угол падения; $n = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ — относительный показатель преломления.

3.39. Вычислить коэффициент отражения для случая почти скользящего падения на среду, относительный показатель преломления которой мало отличается от единицы.

3.40. Рассмотреть отражение монохроматичной пло-

ской волны на границе раздела двух однородных непроводящих и немагнитных сред ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\mu_1 = \mu_2 = 1$) для случая, когда $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и $\sin \alpha > \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$. Показать, что коэффициент отражения равен единице (полное отражение).

3.41. Показать, что при полном отражении прошедшая волна не является поперечной.

3.42. Показать, что при полном отражении среднее значение нормальной составляющей вектора Умова—Пойнтинга на границе обеих сред равно нулю.

3.43. Вычислить разность фаз между параллельной (R_{\parallel}) и перпендикулярной (R_{\perp}) составляющими электрического вектора отраженной волны при полном отражении, если падающая волна линейно поляризована.

3.44. Линейно поляризованная волна претерпевает полное отражение. При каком условии отраженная волна также линейно поляризована? При каком условии она будет поляризована по кругу?

3.45. Плоская волна падает на стеклянную призму полного отражения. Интенсивность падающей волны J_0 и поляризована она под углом в 45° к плоскости падения. Определить интенсивность J и состояние поляризации волны, выходящей из призмы. Поглощением в призме пренебречь. Показатель преломления стекла n .

3.46. Обобщить формулы Френеля на случай изотропных проводящих и магнитных сред, характеризующихся постоянными значениями ε , μ и σ .

3.47. В вакууме на безграничную плоскую поверхность немагнитного металла ($\varepsilon = \text{const}$; $\mu = 1$; $\sigma = \text{const}$) падает под углом α плоская монохроматическая волна, направление поляризации которой составляет угол Θ с плоскостью падения. Определить интенсивность и состояние поляризации отраженной волны, если интенсивность падающей линейно поляризованной волны J_0 . Рассмотреть предельный случай идеального проводника ($\sigma = \infty$).

3.48. Из вакуума на поверхность идеального проводника ($\sigma = \infty$) падает нормально плоская монохроматическая линейно поляризованная волна. Интенсивность падающей волны J . Определить плотность токов на поверхности проводника.

3.49. Как нужно расположить металлическое зерка-

до, чтобы отраженная волна имела круговую поляризацию? Падающая волна линейно поляризована.

3.50. Показать, что в предельном случае $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ магнитный вектор волны, проникающей в металл, отстает по фазе от электрического вектора на 45° .

3.51. В вакууме распространяется плоская монохроматическая волна, которая под углом α падает на плоскую границу ионосферы. Рассматривая ионосферу как разреженный электронный газ (наличие тяжелых ионов можно не учитывать), вычислить коэффициенты отражения и прохождения. Показать, что если $\omega^2 < \frac{4\pi Ne^2}{m}$ (N — число электронов в единице объема; ω — частота световой волны), то имеет место полное отражение.

3.52. В однородном, прозрачном и немагнитном диэлектрике имеется постоянное магнитное поле H_0 , направленное перпендикулярно к его поверхности. На эту поверхность в направлении магнитного поля H_0 падает в вакууме плоская монохроматическая и линейно поляризованная волна, интенсивность которой J_0 . Определить интенсивность и состояние поляризации отраженной и прошедшей волн.

Указание. Воспользоваться тензором диэлектрической проницаемости, полученным в задаче 3.30.

3.53. Плоская монохроматическая и вправо поляризованная по кругу волна падает нормально к поверхности ионосферы. В ионосфере имеется постоянное магнитное поле H_0 , направление которого совпадает с направлением распространения падающей волны. Рассматривая ионосферу как разреженный электронный газ, вычислить интенсивность и состояние поляризации отраженной волны. Интенсивность падающей волны J_0 .

3.54. Решить задачу 3.52 для случая, когда магнитное поле H_0 направлено параллельно поверхности диэлектрика и совпадает с направлением поляризации падающей волны. Падение по-прежнему нормальное.

3.55. Однородный плоскопараллельный слой толщиной a граничит с обеих сторон с однородными средами. Написать уравнения, которыми определяется прохождение монохроматической электромагнитной волны через слой.

3.56. Вычислить коэффициенты отражения и прозрачности плоскопараллельного слоя для случая нормального падения, если все три среды непроводящие и немагнитные.

3.57. Показать, что коэффициент прозрачности (при нормальном падении) тонкого плоскопараллельного слоя равен единице, если толщина его $a = \frac{\lambda_2}{4}$ и, кроме того, $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}$.

3.58. В воздухе имеется однородный и прозрачный плоскопараллельный слой толщиной a . Показатель преломления его $n > 1$. Показать, что если падающая волна, интенсивность которой J_0 , поляризована перпендикулярно (или параллельно) плоскости падения, то интенсивность отраженной волны

$$J = \frac{4\rho_{12} \sin^2 \Theta}{(1 - \rho_{12})^2 + 4\rho_{12} \sin^2 \Theta} J_0,$$

где ρ_{12} — коэффициент отражения на границе воздух—диэлектрик, $\Theta = k_2 a \sin \gamma$.

Обозначения те же, что в задаче 3.55.

3.59. Плоская волна падает под углом α на непроводящий и немагнитный плоскопараллельный слой толщиной a . Определить давление, испытываемое этим слоем.

§ 5. Резонаторы и волноводы

3.60. Показать, что в идеальный проводник ($\sigma = \infty$) электромагнитная волна не проникает. Вывести граничные условия для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} электромагнитной волны на границе с идеальным проводником.

3.61. Для монохроматической волны на границе диэлектрика с реальным проводником (металлом) $E_t \neq 0$, можно положить (граничное условие Леонтовича)

$$E_t = \zeta (\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}),$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к граничной поверхности, направленный внутрь проводника. Комплексный коэффициент пропорциональности ζ называется поверхностным импедансом металла. Выразить поток энергии через поверхность металла через его поверхностный импеданс.

3.62. Плоская монохроматичная волна падает в воздухе ($\epsilon = \mu = 1$) под углом α на плоскую поверхность металла, поверхностный импеданс которого ζ . Записать формулы Френеля для отраженной волны через ζ . Рассмотреть случай малого импеданса.

3.63. Вдоль прямого волновода распространяется монохроматичная волна электрического типа (E -волна, или поперечно магнитная TM -волна). Это значит, что составляющая магнитного вектора вдоль волновода равна нулю. Показать, что поперечные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются через продольную составляющую вектора \mathbf{E} . Вывести дифференциальное уравнение для последней. Среду, заполняющую волновод, считать однородной, изотропной и непроводящей.

3.64. Показать, что если стенки волновода идеально проводящие ($\sigma = \infty$), то чтобы векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} рассмотренной в предыдущей задаче E -волны удовлетворяли нужным граничным условиям (задача 3.60), достаточно потребовать, чтобы на стенках волновода $E_z = 0$.

3.65. Определить E -волны, которые могут распространяться вдоль прямого волновода прямоугольного сечения, поперечные размеры которого $a \times b$. Стенки волновода считать идеально проводящими. Найти наименьшую (критическую) частоту этих волн.

3.66. Показать, что для волны магнитного типа (H -волны, или поперечно электрической TE -волны), распространяющейся вдоль прямого волновода, поперечные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются через продольную составляющую вектора \mathbf{H} . Вывести дифференциальное уравнение для последней.

3.67. Стенки прямого волновода идеально проводящие. Доказать: чтобы векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} волны магнитного типа удовлетворяли нужным граничным условиям, достаточно потребовать, чтобы на контуре поперечного сечения волновода $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$.

3.68. Определить H -волны, которые могут распространяться вдоль прямого волновода прямоугольного сечения с идеально проводящими стенками. Поперечные размеры волновода $a \times b$. Найти наименьшую (критическую) частоту этих волн.

3.69. Вдоль «ленточной» линии, т. е. между двумя параллельными проводящими плоскостями, распростра-

няется монохроматичная электромагнитная волна. Определить возможные типы волн. Плоскости считать идеально проводящими.

3.70. Вычислить групповую скорость электромагнитной волны, распространяющейся вдоль прямого волновода.

3.71. Показать, что для E -волны, распространяющейся вдоль прямого волновода (вдоль оси z), энергия, приходящаяся на единицу длины волновода, определяется формулой

$$W = \frac{\varepsilon \omega^2}{8\pi \kappa^2 \sigma^2} \int |E_z|^2 dx dy,$$

где интегрирование производится по площади сечения волновода.

3.72. Вследствие конечности проводимости стенок волновода энергия волны, распространяющейся вдоль волновода, частично проникает в стенки и поглощается ими (диссипирует). Предполагая, что поверхностный импеданс ζ стенок волновода достаточно мал, показать, что амплитуда волны убывает по закону $A = A_0 e^{-\alpha}$ и что для E -волны коэффициент поглощения

$$\alpha = \frac{\varepsilon \omega \zeta'}{2\kappa^2 k c} \frac{\oint |\nabla_2 E_z|^2 dl}{\oint_S |E_z|^2 dS},$$

где l — контур, а S — площадь сечения волновода.

3.73. Показать, что для распространяющейся в волноводе H -волны коэффициент поглощения (см. задачу 3.72)

$$\alpha = \frac{c \kappa^2 \zeta'}{2k \omega \mu} \frac{\oint \left\{ |H_z|^2 + \frac{k^2}{\kappa^4} |\nabla_2 H_z|^2 \right\} dl}{\oint_S |H_z|^2 dS}.$$

3.74. Определить собственные электромагнитные колебания в полном ($\varepsilon = \mu = 1$) резонаторе, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда с идеально проводящими стенками, ребра которого равны a_1 , a_2 и a_3 . Найти наименьшую собственную частоту.

3.75. Показать, что для любого собственного электромагнитного колебания в полном ($\epsilon = \mu = 1$) резонаторе с идеально проводящими стенками средняя энергия электрического поля равна средней энергии магнитного поля, т. е.

$$\int \bar{E}^2 dV = \int \bar{H}^2 dV.$$

3.76. В полном резонаторе имеется одновременно несколько типов собственных колебаний. Показать, что полная энергия этих колебаний равна сумме энергий отдельных собственных колебаний. Стенки резонатора считать идеально проводящими. Среду, заполняющую резонатор, однородной.

У к а з а н и е. Воспользоваться тождеством

$$\int_V (\mathbf{A} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}) dV = \oint_S \{[\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}] - [\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}]\} dS,$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V ; \mathbf{A} и \mathbf{B} — произвольные векторы, удовлетворяющие обычным условиям дифференцируемости. Доказать это тождество.

3.77. Определить декремент затухания и изменение собственной частоты полого ($\epsilon = \mu = 1$) резонатора, обусловленное слабым поглощением энергии его стенками.

У к а з а н и е. Воспользоваться тождеством, приведенным в задаче 3.76.

§ 6. Излучение и рассеяние электромагнитных волн

3.78. Точечный заряд q вращается равномерно по окружности радиуса a с угловой скоростью $\omega \ll \frac{c}{a}$. Определить создаваемые им в вакууме поле излучения и интенсивность излучения.

3.79. Показать, что для изолированной системы, состоящей из частиц с одинаковым удельным зарядом $\left| \frac{q}{m} = \text{const} \right|$, интенсивность дипольного излучения равна нулю.

3.80. Частица с массой m и зарядом q пролетает со скоростью v мимо неподвижного заряда q на прицельном от него расстоянии a . Вычислить энергию, теряемую

движущейся частицей на электромагнитное излучение, если скорость ее настолько велика, что отклонение от прямолинейного движения можно считать малым.

3.81. Вычислить среднюю интенсивность дипольного излучения при эллиптическом движении двух притягивающихся заряженных частиц (m_1q_1) и (m_2q_2). Дана энергия частиц (W) и момент количества движения (M) в системе центра масс.

3.82. Найти угловое распределение в системе центра масс полной энергии дипольного излучения при пролётании одной заряженной частицы мимо другой с такой большой скоростью, что отклонение от прямолинейного движения можно считать малым.

3.83. На свободный электрон падает в вакууме световая волна. Вычислить полный эффективный поперечник рассеяния, определяемый как отношение интенсивности рассеиваемой энергии к плотности потока падающей энергии. Силой лучистого трения и релятивистскими эффектами пренебречь.

3.84. В том же приближении, что и в предыдущей задаче, вычислить дифференциальное эффективное сечение рассеяния свободным электроном монохроматической волны для следующих случаев:

- 1) падающая волна линейно поляризована;
- 2) падающая волна эллиптически поляризована. Показать, что интегрированием по углам можно получить полное сечение рассеяния, вычисленное в предыдущей задаче;
- 3) падающая волна не поляризована (естественный свет).

Найти степень деполаризации рассеянного света.

Примечание. Степень деполаризации называется отношение $\frac{J}{J_1}$, где J_2 — наименьшая, а J_1 — наибольшая интенсивности рассеянного света, поляризованного во взаимно перпендикулярных направлениях.

3.85. Вычислить дифференциальное и полное эффективное сечение рассеяния квази-упруго связанным электроном монохроматической линейно поляризованной волны. Учесть силу радиационного торможения. Релятивистскими поправками пренебречь.

3.86. Вычислить дифференциальное эффективное се-

чение рассеяния монохроматической волны на малом диэлектрическом (или проводящем) ширине радиуса a .

Диэлектрическая проницаемость шарика ϵ . Магнитная проницаемость $\mu = 1$. Принять $a \ll \frac{c}{\omega \sqrt{\epsilon}} = \lambda$.

3.87. Определить поле излучения, создаваемое в вакууме переменным магнитным диполем, момент которого

$$m = m_0 e^{-i\omega t}.$$

Показать, что это поле может быть получено из поля излучения электрического диполя путем замены:

$$\rho_0 \rightarrow m_0; \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} \text{ и } \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}.$$

3.88. Вычислить в омах сопротивление излучения рачной антенны, имеющей форму круглого витка радиуса a и питаемой током $I = I_0 \cos \omega t$. Длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg a.$$

3.89. Показать, что магнитно-дипольное излучение отсутствует у системы, состоящей из двух заряженных частиц, а также у системы, состоящей из частиц с одинаковым отношением заряда к массе.

3.90. Записать уравнение непрерывности для предельного случая линейного тока.

3.91. По прямолинейному идеальному проводнику проходит ток частоты ω . Показать, что вдоль провода ток распределен синусоидально.

3.92. Определить поле излучения, создаваемое в однородной и непроводящей среде заданным распределением токов частоты ω :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0(\xi) e^{-i\omega t}.$$

3.93. Найти поле излучения в вакууме линейной антенны длиной l , питаемой током

$$I(\xi) = I_0 \sin n\pi \left(\frac{\xi}{l} + \frac{1}{2} \right) e^{-i\omega t},$$

где

$$n = 1, 2, 3, \dots; \quad -\frac{l}{2} \leq \xi \leq +\frac{l}{2}.$$

Исследовать угловое распределение этого излучения.

3.94. Определить поле излучения (в вакууме) линейной антенны длиной l , по которой проходит бегущая волна

$$I = I_0 e^{i(k\zeta - \omega t)}; \quad -\frac{1}{2}l \leq \zeta \leq +\frac{1}{2}l.$$

ЧАСТЬ IV

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Относительно любой системы отсчета пространственно-временная локализация события определяется пространственно-временными координатами (x , y , z и t).

В дальнейшем, говоря о системах отсчета, мы всегда будем иметь в виду **инерциальные** системы отсчета.

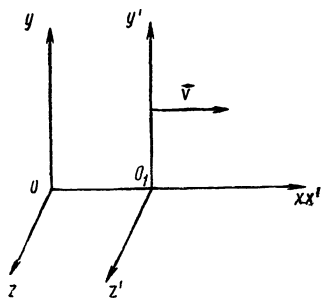


Рис. 12

Зависимость между пространственно-временными координатами одного и того же события относительно различных систем отсчета дается преобразованием Лоренца.

Для частного случая, когда система K' движется относительно системы K со скоростью v вдоль положительной оси x , совпадающей с осью x' (рис. 12) и если за начальный момент времени ($t = t' = 0$) в обеих системах выбран тот момент времени, когда оба начала сов-

падают, преобразование Лоренца выражается формулами

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (4.1)$$

Это преобразование мы будем называть **специальным преобразованием Лоренца**.

Обратное преобразование отличается лишь знаком скорости.

Преобразования Лоренца (4.1) являются следствием инвариантности 4-мерного интервала

$$\Delta S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] = \text{Inv}. \quad (4.2)$$

Дифференциал собственного времени материальной точки, т. е. времени, отсчитываемого по часам, покоящимся относительно сопутствующей системы отсчета, определяется уравнением

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (4.3)$$

Сопутствующей называется такая **инерциальная** система отсчета, относительно которой скорость материальной точки в рассматриваемый момент времени равна нулю. Собственное время есть инвариант относительно преобразования Лоренца.

Из преобразований Лоренца (4.1) следует, что в направлении движения длина движущегося тела

$$l' = l \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (4.4)$$

где l — длина тела в сопутствующей системе отсчета. В направлениях, поперечных к движению, размеры движущегося тела не меняются.

Из того же преобразования Лоренца (4.1) следует релятивистский закон сложения параллельных скоростей

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}, \quad (4.5)$$

где u' — скорость материальной точки относительно системы K' , параллельная переносной скорости v , а u — скорость той же точки относительно системы K (см. рис. 12).

В четырехмерном пространстве ($x_1=x$, $x_2=y$; $x_3=z$, $x_4=ict$) из (4.2) следует, что

$$-\Delta S^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 = \text{Inv}, \quad (4.26)$$

а потому можно рассматривать преобразование Лоренца как ортогональный поворот осей координат в этом пространстве:

$$x'_k = \sum_{l=1}^4 a_{kl} x_l; \quad x_l = \sum_{k=1}^4 a_{kl} x'_k, \quad (4.6)$$

где коэффициенты преобразования удовлетворяют условиям ортогональности

$$\sum_{k=1}^4 a_{kl} a_{km} = \delta_{lm}; \quad \sum_{l=1}^4 a_{kl} a_{jl} = \delta_{kj}. \quad (4.7)$$

Для специального преобразования Лоренца (4.1) матрица преобразования (4.6) имеет вид

$$(a_{kl}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, & 0, & 0, & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой компоненты 4-вектора (A_k) преобразуются так же, как и координаты (4.6), т. е.

$$A'_k = \sum_{l=1}^4 a_{kl} A_l; \quad A_l = \sum_{k=1}^4 a_{kl} A'_k. \quad (4.9)$$

Наиболее важными 4-векторами являются:

1) четырехмерный потенциал электромагнитного поля

$$A_k(\mathbf{A}, i\varphi), \quad (4.10)$$

где \mathbf{A} и φ — векторный и скалярный потенциалы;

2) 4-вектор плотности электрического тока

$$j_k(\mathbf{j}, ic\rho), \quad (4.11)$$

где \mathbf{j} и ρ — плотность тока и зарядов;

3) четырехмерный волновой вектор

$$k_l\left(\mathbf{k}, i\frac{\omega}{c}\right), \quad (4.12)$$

где \mathbf{k} и ω — волновой вектор и частота плоской электромагнитной волны;

4) 4-вектор скорости

$$u_k\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, i\frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right), \quad (4.13)$$

где \mathbf{u} — скорость частицы;

5) 4-вектор плотности сил

$$f_k\left(\mathbf{f}, \frac{i}{c}\mathbf{fu}\right), \quad (4.14)$$

где \mathbf{f} — объемная плотность сил; \mathbf{fu} — плотность мощности этих сил;

6) 4-вектор энергии-импульса частицы

$$p_k\left(\mathbf{p}, \frac{i}{c}W\right), \quad (4.15)$$

где \mathbf{p} и W — импульс и энергия частицы;

7) четырехмерный оператор «набла»

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nabla, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right). \quad (4.16)$$

Компоненты 4-тензора преобразуются как произведения компонент 4-векторов. Например, для 4-тензора 2-го ранга (T_{kl}) формула преобразования имеет вид

$$T'_{kl} = \sum_{r,s=1}^4 a_{kr}a_{ls}T_{rs}. \quad (4.17)$$

Примерами 4-тензоров являются:

1) 4-тензор напряженности электромагнитного поля в вакууме

$$H_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}, \quad (4.19)$$

где A_k — четырехмерный потенциал (4.10).

Из формул (XVII) следует, что компоненты этого тензора образуют следующую матрицу:

$$H_{kl} = \begin{pmatrix} 0, & H_z, & -H_y, & -iE_x \\ -H_z, & 0, & H_x, & -iE_y \\ H_y, & -H_x, & 0, & -iE_z \\ iE_x, & iE_y, & iE_z, & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

2) 4-тензор энергии-импульса электромагнитного поля в вакууме

$$T_{kl} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^4 H_{km} H_{lm} + \frac{1}{16\pi} \delta_{kl} \sum_{r,s=1}^4 H_{rs}^2. \quad (4.21)$$

Это симметричный ($T_{kl} = T_{lk}$) тензор 2-го ранга, компоненты которого образуют следующую матрицу:

$$(T_{kl}) = \begin{pmatrix} T_{xx}, & T_{xy}, & T_{xz}, & -icg_x \\ T_{yx}, & T_{yy}, & T_{yz}, & -icg_y \\ T_{zx}, & T_{zy}, & T_{zz}, & -icg_z \\ -\frac{i}{c} S_x, & -\frac{i}{c} S_y, & -\frac{i}{c} S_z, & W \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

где $T_{\mu\nu}$ — максвелловский 3-мерный тензор натяжений (1.40) (греческие индексы μ и ν пробегают значения 1, 2, 3 или соответственно x, y, z ; латинские индексы kl пробегают значения 1, 2, 3, 4); \mathbf{g} — плотность импульса; W — плотность энергии электромагнитного поля; \mathbf{S} — вектор Умова—Пойнтинга.

На основании (4.9) и (4.8) специальное преобразование Лоренца для четырехмерного волнового вектора (4.12) дает

$$\omega' = \omega \frac{1 - \beta \cos \Theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.24)$$

$$\cos \Theta' = \frac{\cos \Theta - \beta}{1 - \beta \cos \Theta}, \quad (4.25)$$

где Θ — угол между направлением распространения волны и направлением движения системы K' относительно системы K .

Первая из этих формул (4.24) дает теорию эффекта Доплера, а вторая (4.25) — явления обертации света.

На основании (4.17) и (4.8) специальное преобразование Лоренца для 4-тензора напряженности электромагнитного поля (4.20) дает формулы преобразования для векторов поля:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x; & E'_y &= \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & E'_z &= \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ H'_x &= H_x; & H'_y &= \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & H'_z &= \frac{H_z - \beta H_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{E}' , \mathbf{H}' обозначают значения векторов поля в одной и той же мировой точке относительно разных систем отсчета.

Уравнения Максвелла (X) для вакуума в лоренц-ковариантной форме имеют следующий вид:

первая пара

$$\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_m} + \frac{\partial H_{mk}}{\partial x_l} + \frac{\partial H_{lm}}{\partial x_k} = 0, \quad (4.27)$$

вторая пара

$$\sum_{l=1}^4 \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l} = \frac{4\pi}{c} j_k. \quad (4.28)$$

Первая пара уравнений Максвелла (4.27) тождественно удовлетворяется введением 4-вектора потенциала (4.19), который при дополнительном условии

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0 \quad (4.29)$$

удовлетворяет на основании (4.28) уравнению

$$\sum_{l=1}^4 \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_l^2} = -\frac{4\pi}{c} j_k. \quad (4.30)$$

Уравнение (4.29) есть лоренц-ковариантная запись калибровочного соотношения (3.4), а (4.30) — уравнения Даламбера (3.5) для вакуума.

Релятивистское дифференциальное уравнение движения материальной точки можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (4.31)$$

где

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.32)$$

есть импульс частицы, а \mathbf{F} — действующая сила; m — масса покоя.

Из (4.31) и (4.32) следует, что

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v}, \quad (4.33)$$

где

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.34)$$

есть энергия частицы.

Энергия покоя

$$W_0 = mc^2, \quad (4.34a)$$

а кинетическая энергия

$$T = W - W_0 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (4.35)$$

Импульс \mathbf{p} и энергия W частицы связаны между собой соотношением

$$W^2 = c^2(\mathbf{p}^2 + m^2c^2). \quad (4.36)$$

§ 1. Релятивистская кинематика. 4-е векторы и тензоры

4.1. Обобщить формулы преобразования Лоренца для произвольной ориентации осей координат обеих систем отсчета относительно направления их относительного движения.

Указание. Разложить радиус-вектор на две составляющие: параллельную и перпендикулярную к направлению относительного движения.

4.2. Обобщить формулы преобразования Лоренца для произвольного выбора начала отсчета (начала координат и начального момента времени).

4.3. Вывести закон сложения параллельных скоростей (4.5) путем двух специальных лоренц-преобразований.

4.4. Вывести релятивистский закон сложения скоростей для общего случая произвольной взаимной ориентации слагаемых скоростей.

Показать, что по абсолютной величине результирующая скорость

$$u = \frac{\sqrt{(u' + v)^2 - \left[\mathbf{u} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right]^2}}{1 + \frac{1}{c^2} (\mathbf{u}' \mathbf{v})}$$

4.5. Вывести закон преобразования для $\sqrt{1 - u^2/c^2}$, где u — скорость материальной точки относительно рассматриваемой системы отсчета.

4.6. Вывести формулу, которой определяется изменение направления скорости при переходе от одной системы отсчета к другой.

4.7. Два одинаковых стержня длиной l_0 (в «собственной» или сопутствующей системе отсчета) расположены вдоль одной прямой и движутся равномерно навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v (относительно некоторой системы отсчета). Какова длина одного из стержней в системе отсчета, связанной со вторым?

4.8. Вывести закон преобразования для трехмерного вектора ускорения материальной точки.

4.9. Ракета движется прямолинейно с постоянным ускорением ω_0 относительно своей сопутствующей системы. Сколько времени (по «земным часам») продлится разгон ракеты до скорости $v = 0,8 c$? Сколько времени на это уйдет по часам, находящимся в ракете?

Примечание. Принять, что ход часов не зависит от их ускорения.

4.10. Выразить компоненты 4-вектора ускорения через трехмерную скорость и ускорение. Показать, что в сопутствующей системе отсчета

$$\sum_{k=1}^4 \omega_{0k}^2 = \left(\frac{dv}{dt} \right)^2.$$

4.11. Показать, что при пространственных поворотах осей координат первые три компоненты 4-вектора преобразовываются как компоненты трехмерного вектора, а четвертая компонента — как скаляр (не меняется).

4.12. Показать, что относительно пространственных поворотов четырехмерный тензор второго ранга распадается на трехмерный тензор, два трехмерных вектора и один скаляр.

4.13. Показать, что символы Кронекера $\delta_{kl} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ образуют симметричный 4-тензор второго ранга.

4.14. Показать, что выражения

$$A_k = \sum_{l=1}^4 T_{kl} B_l$$

образуют 4-вектор, если B_l и T_{kl} — компоненты соответственно 4-вектора и 4-тензора второго ранга.

4.15. Дано, что

$$A_k = \sum_{l=1}^4 T_{kl} B_l$$

есть компоненты 4-вектора, где T_{kl} — произвольный 4-тензор второго ранга.

Показать, что B_l — 4-вектор.

4.16. Показать, что след (Sp) тензора второго ранга есть скаляр.

Примечание. Следом тензора второго ранга называется сумма его диагональных элементов:

$$\text{Sp } T = \sum_{k=1}^4 T_{kk}.$$

4.17. Показать, что элемент объема четырехмерного пространства $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ есть инвариант относительно преобразований Лоренца.

4.18. Показать, что $\psi = \left\{ \sum_{l=1}^4 (x_l - x'_l)^2 \right\}^{-1}$ есть решение

Волнового уравнения, т. е. что

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} = 0.$$

§ 2. Релятивистская электродинамика

4.19. Записать в релятивистски-ковариантной форме уравнения Максвелла для материальной среды.

4.20. Показать, что векторы поляризации (\mathbf{P}) и намагничивания (\mathbf{M}) образуют 4-тензор второго ранга.

4.21. Вывести формулы преобразования для векторов электромагнитного поля в материальной среде при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

4.22. Показать, что $B^2 - E^2$, $H^2 - D^2$, $\mathbf{E}\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}\mathbf{D}$ являются инвариантами относительно преобразования Лоренца.

4.23. Можно ли соответствующим выбором системы отсчета вместо электромагнитного поля получить чисто электрическое (или чисто магнитное) поле?

4.24. В вакууме относительно некоторой системы отсчета (K) имеются взаимно перпендикулярные электрическое ($\mathbf{E} = \text{const}$) и магнитное ($\mathbf{H} = \text{const}$) поля, причем $E < H$. Указать такую систему отсчета (K'), относительно которой поле чисто магнитное, и вычислить его напряженность.

4.25. К обкладкам воздушного цилиндрического конденсатора, радиусы которых a и b , приложено постоянное напряжение V . По внутренней обкладке в направлении ее оси проходит постоянный электрический ток I . В какой системе отсчета и при каком условии в конденсаторе имеется лишь магнитное поле? Какова его напряженность? Сопротивлением внутренней обкладки пренебречь.

4.26. Две одинаковые достаточно длинные проводящие цилиндрические поверхности заряжены с линейной плотностью $+\chi$ и $-\chi$ и расположены так, что их оси параллельны. Внутри них протянуто два провода, по которым в противоположных направлениях проходят постоянные токи силой I . Эти токи расположены так, что силовые линии создаваемого ими магнитного поля лежат на указанных цилиндрических поверхностях (см. за-

дачи 1.47, 1.70 и 2.31). Найти такую систему отсчета, относительно которой между цилиндрами нет магнитного поля. Падением напряжения на проводах пренебречь.

4.27. неподвижный диэлектрик имеет показатель преломления n_0 . Как изменится его показатель преломления, если диэлектрик движется с постоянной скоростью v ?

Обобщить формулы доплер-эффекта (4.24) и аберрации (4.25) на случай материальной среды с показателем преломления n_0 .

4.28. Показать, что для монохроматического светового пучка в вакууме, заключенном в телесном угле,

$$d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta,$$

где Θ — угол между направлением распространения света и направлением относительного движения систем отсчета, величина $\omega^2 d\Omega$ есть инвариант относительно преобразования Лоренца.

4.29. Вычислить потенциалы электромагнитного поля, создаваемого в вакууме точечным зарядом q , движущимся равномерно и прямолинейно со скоростью v .

4.30. Вычислить напряженность (\mathbf{E} , \mathbf{H}) электромагнитного поля, создаваемого в вакууме равномерно и прямолинейно движущимся точечным зарядом q .

4.31. Вычислить электромагнитную массу электрона.

Примечание. Электромагнитная масса электрона определяется уравнением $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$, где \mathbf{G} — импульс электромагнитного поля (XVI) движущегося электрона.

4.32. Вывести формулы преобразования для дипольных моментов, электрического и магнитного, при переходе к движущейся системе отсчета.

4.33. Определить электромагнитное поле, создаваемое в вакууме электрическим диполем, движущимся с постоянной скоростью v .

4.34. Монохроматический свет частоты ω_0 падает нормально к поверхности плоского зеркала, движущегося равномерно со скоростью v в направлении распространения падающего света. Определить частоту отраженного света.

4.35. На плоское зеркало падает свет под углом α . Зеркало движется равномерно со скоростью v в направлении нормали к его поверхности в сторону распространения падающего света. Определить угол отражения.

§ 3. Релятивистская механика

4.36. Вычислить «продольную» и «поперечную» массу релятивистской частицы.

Примечание. «Продольной» и «поперечной» массой называется отношение силы к ускорению частицы, когда действующая сила направлена соответственно параллельно или перпендикулярно к направлению движения.

4.37. Определить движение релятивистской заряженной частицы (m, q) в однородном постоянном электрическом поле. Начальная скорость частицы равна нулю.

4.38. Определить движение релятивистской заряженной частицы (m, q) в однородном постоянном магнитном поле (\mathbf{H}) .

4.39. Показать, что движение заряженной частицы (m, q) в электромагнитном поле (φ, \mathbf{A}) в любых обобщенных координатах (x_μ) определяется дифференциальными уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial x_\mu} = 0,$$

где функция Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - \left(q\varphi - \frac{q}{c} \mathbf{A}\mathbf{v} \right).$$

4.40. Показать, что уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле не меняются, если произвести замену $t \rightarrow -t$; $\varphi \rightarrow +\varphi$; $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$.

4.41. Показать, что если постоянное магнитное поле плоское, т. е. $A_x = A_y = 0$ и $A_z = A_z(x, y)$, то при движении заряженной частицы в этом поле

$$\frac{mv_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{q}{c} A_z = \text{const.}$$

4.42. Показать, что если постоянное магнитное поле обладает осевой симметрией, т. е. $A_R = A_z = 0$ и $A_\Theta = A_\Theta(R, z)$, то при движении заряженной частицы в этом поле

$$\frac{mR^2\dot{\Theta}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{q}{c} RA_\Theta = \text{const.}$$

4.43. Определить траекторию движения релятивистской заряженной частицы (m, q) в поперечном и постоянном магнитном поле (\mathbf{H}), считая, что частица встречает силу вязкого трения ($\mathbf{F} = -\eta\mathbf{v}$).

4.44. Вывести закон преобразования для силы при переходе от одной инерциальной системы к другой.

4.45. Два точечных заряда q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии a друг от друга, движутся с постоянной скоростью \mathbf{v} , направленной перпендикулярно к соединяющему их отрезку. Определить силу их взаимодействия.

4.46. Масса покоя частицы m . Выразить ее скорость \mathbf{v} через:

1) полную энергию W , 2) кинетическую энергию T и 3) импульс p .

4.47. Неподвижный π -мезон распадается на μ -мезон и нейтрино ($m=0$). Зная массы π - и μ -мезонов, вычислить кинетическую энергию μ -мезона.

4.48. Показать, что в отсутствии внешнего поля фотон не может превратиться в электронно-позитронную пару.

4.49. На неподвижную частицу с массой M налетает другая частица с массой m и энергией W . Определить энергию (W_1) этой частицы после столкновения в зависимости от угла (Θ) рассеяния. Столкновение считать упругим.

Рассмотреть случай $m=0$ (эффект Комптона).

4.50. Найти релятивистскую поправку к эллиптической траектории электрона (m, e) в кулоновском поле неподвижного ядра (Ze).

Указание. Как и в нерелятивистском случае, целесообразно ввести переменную $u = \frac{1}{r}$.

4.51. π_0 -мезон с массой покоя m , движущийся со скоростью v , распадается на два одинаковых γ -кванта. Определить угол разлета γ -квантов.

4.52. π_0 -мезон с массой покоя m , движущийся со скоростью v , распадается на два γ -кванта. Считая, что в системе отсчета, относительно которой мезон покоится, распределение γ -квантов по направлениям вылета изотропно, определить относительно лабораторной системы отсчета: 1) вероятность того, что один из γ -квантов вылетит под углом Θ к направлению движения π_0 -мезона;

2) каково при этом будет направление второго γ -кванта; 3) энергии этих γ -квантов.

4.53. Возбужденное атомное ядро переходит в основное состояние путем испускания γ -кванта. Масса ядра в основном состоянии m . Энергия возбуждения ΔW . Определить частоту γ -кванта.

4.54. Покоящееся тело с массой покоя M распадается на две частицы с массами покоя m_1 и m_2 . Найти распределение энергии распада $\Delta W = Mc^2 - (m_1 + m_2)c^2$ между этими частицами.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 1. Закон Кулона

1.1. а) Напряженность поля, создаваемого элементом длины нити,

$$dE = \frac{\chi dl}{r^2}.$$

Результирующая напряженность поля направлена перпендикулярно к нити и по величине (рис. 13) равна

$$E = \int dE \cdot \cos \alpha = \chi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha dl}{r^2} = \frac{\chi}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{2\chi}{R}.$$

б) Напряженность поля, создаваемого элементом поверхности заряженной плоскости,

$$dE = \frac{\sigma dS}{r^2}.$$

Результирующее поле направлено по нормали к плоскости (рис. 14) $E_y = E_z = 0$:

$$E_x = \int dE \cos \alpha = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{xRdRd\Theta}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = 2\pi\sigma \frac{x}{|x|}.$$

в) Элементарному углу $d\Theta$ соответствует бесконечно длинная полоска заряженной поверхности, которой

создается поле, напряженность которого (см. *a*)

$$dE = \frac{\chi}{\pi} \frac{d\Theta}{r}.$$

Результирующее поле направлено вдоль радиуса цилиндра, а величина его (рис. 15)

$$E = \frac{\chi}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\Theta}{r},$$

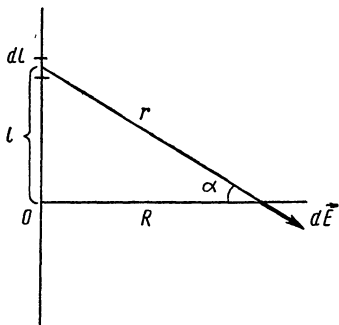


Рис. 13

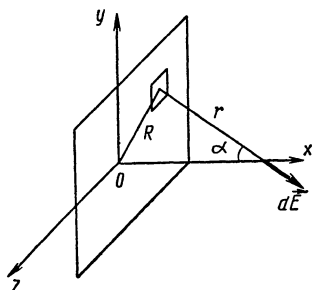


Рис. 14

где

$$\cos \alpha = \frac{R - a \cos \Theta}{r}; \quad r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos \Theta}.$$

Отсюда

$$E = \frac{\chi}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R - a \cos \Theta}{R^2 + a^2 - 2aR \cos \Theta} d\Theta = \frac{\chi}{R} \left(1 + \frac{R^2 - a^2}{|R^2 - a^2|} \right).$$

Вне цилиндра ($R > a$)

$$E = \frac{2\chi}{R}.$$

Внутри цилиндра ($R < a$)

$$E = 0.$$

2) Напряженность поля, создаваемого элементом поверхности сферы

$$dE = \frac{\sigma dS}{R^2} = \frac{q}{4\pi a^2} \frac{dS}{R^2} = \frac{q}{4\pi R^2} \sin \Theta d\Theta d\psi.$$

Результирующее поле (рис. 16) направлено вдоль радиуса сферы и равно

$$E = \int dE \cdot \cos \alpha,$$

где

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{R}; \quad b = a \sin \Theta, \quad R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \Theta}.$$

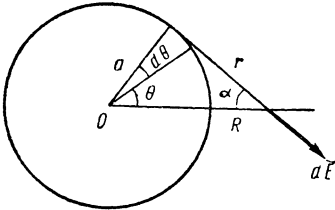


Рис. 15

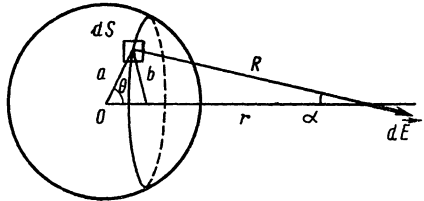


Рис. 16

Отсюда

$$E = \sigma a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \Theta - 2ar \cos \Theta}}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \Theta)^{3/2}} \sin \Theta d\Theta d\psi =$$

$$= \frac{q}{2} \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{1}{|r-a|} - \frac{1}{r+a} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{|r-a|} + \frac{1}{r+a} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{ar^2} (r+a - |r-a|) \right\}.$$

1. Вне сферы ($r > a$)

$$E = \frac{q}{r^2}.$$

2. Внутри сферы ($r < a$)

$$\vec{E} = 0.$$

д) Часть шара, ограниченная concentрическими сферами радиуса r_1 и $r_1 + dr_1$, создает вне себя ($r > r_1$) радиально симметричное поле, напряженность которого (см. 1.1, з)

$$dE = \frac{dq}{r^2} = \frac{4\pi\rho}{r^2} r_1^2 dr_1.$$

Отсюда вне шара ($r > a$) результирующая напряженность поля

$$E = \frac{4\pi\rho}{r^2} \int_0^a r_1^2 dr_1 = \frac{q}{r^2},$$

а внутри шара ($r < a$)

$$E = \frac{4\pi\rho}{r^2} \int_0^r r_1^2 dr_1 = \frac{q}{a^3} r.$$

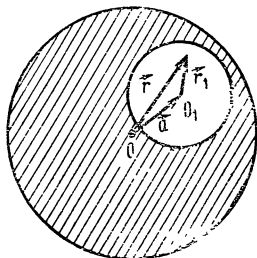


Рис. 17

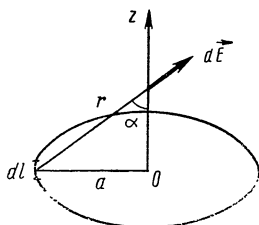


Рис. 18

1.2. Искомое поле равно разности полей, создаваемых двумя равномерно заряженными шарами, а потому (см. решение задачи 1.1, ∂ и рис. 17)

$$E = \frac{4\pi}{3} \rho r - \frac{4\pi}{3} \rho r_1 = \frac{4\pi}{3} \rho a.$$

Итак, поле внутри полости однородное.

1.3. Напряженность поля, создаваемого электронным облаком (см. задачу 1.1, ∂).

$$E_{эл} = E_r^{эл} = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(r_1) r_1^2 dr_1.$$

С учетом поля ядра получаем, что результирующая напряженность поля

$$E = E_r = \frac{e}{r^2} \left(1 + 2 \frac{r}{a} + 2 \frac{r^2}{a^2} \right) e^{-\frac{2r}{a}}.$$

1.4. Элемент длины окружности dl создает в любой точке на оси z поле, напряженность которого

$$dE = \frac{q}{2\pi a} \frac{dl}{r^2},$$

где $r = \sqrt{a^2 + z^2}$. Результирующая напряженность поля (рис. 18)

$$E_x = E_y = 0,$$

$$E_z = \int dE \cos \alpha = \frac{q}{r^2} \cos \alpha = q \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

1.5. Элементарное кольцо диска, имеющего радиус R и ширину dR , создает поле, напряженность которого (см. задачу 1.14)

$$dE_z = 2\pi\sigma R dR \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Результирующая напряженность поля

$$E = 2\pi\sigma z \int_0^a \frac{R dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi\sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2}} \right).$$

Отсюда расстояние искомой точки от диска

$$|z| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

1.6. В любой точке диска, отстоящей на расстоянии R от центра (рис. 19),

$$E_x = 2 \frac{q}{r^2} \cos \alpha = \frac{2aq}{(a^2 + R^2)^{3/2}},$$

а потому поток

$$N = \int E_x dS = 2aq \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{R dR d\theta}{(a^2 + R^2)^{3/2}} = 2\sqrt{2}\pi q (\sqrt{2} - 1).$$

1.7. Напряженность поля (см. задачу 1.1)

$$E = \frac{2\chi}{R}.$$

Отсюда (рис. 20)

$$E_n = E_z = E \cos \alpha = \frac{2\chi}{R} \frac{a}{R},$$

а потому поток

$$N = \int E_n dS = 2a\chi \int_{-a}^{+a} \int \frac{dx dy}{a^2 + y^2} = 2\pi a\chi.$$

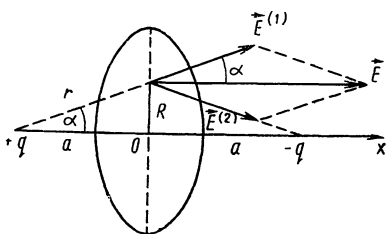


Рис. 19

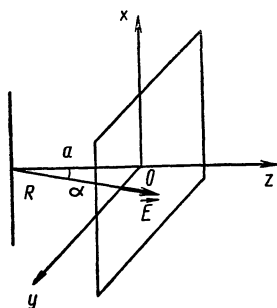


Рис. 20

§ 2. Теорема Остроградского—Гаусса

1.8. Поле, создаваемое в вакууме точечным зарядом q , обладает сферической симметрией: $E_r = E(r)$; $E_\theta = E_\psi = 0$. Применив теорему Остроградского—Гаусса (1.9) к сферической поверхности с центром в заряде q , получим, что

$$E 4\pi r^2 = 4\pi q; \quad E = \frac{q}{r^2},$$

что эквивалентно закону Кулона для силы взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме.

1.9. Поле обладает аксиальной симметрией: $D_R = D(R)$, $D_\theta = D_z = 0$. Применив теорему Остроградского—Гаусса к поверхности цилиндра высотой H и радиуса R , ось которого совпадает с заряженной нитью, получим, что (поток через основания цилиндра равен нулю)

$$D 2\pi R H = 4\pi \chi H; \quad D = \frac{2\chi}{R}.$$

Отсюда напряженность поля

$$E = \begin{cases} \frac{2\chi}{\varepsilon_1 R} & (R < R_1), \\ \frac{2\chi}{\varepsilon_2 R} & (R > R_1). \end{cases}$$

1.10. На основании (1.8) поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = \frac{\chi}{2\pi R_1} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

1.11. Аналогично задаче 1.9 находим, что

$$D \, 2\pi R H = \begin{cases} 0 & (R < a), \\ 4\pi \chi_i' H & (R > a), \end{cases}$$

где $\chi = 2\pi a \sigma$ — линейная плотность зарядов. Отсюда

$$E = E_R = \begin{cases} 0 & (R < a), \\ \frac{2\chi}{\varepsilon(R) R} & (R > a). \end{cases}$$

1.12. На основании (1.4) и (1.6) и с учетом результата предыдущей задачи, вектор поляризации

$$P = P_R = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E = \frac{\varepsilon - 1}{2\pi} \chi \frac{1}{\varepsilon(R) R}.$$

Отсюда на основании (1.7) и (IIIб) плотность связанных зарядов

$$\rho' = -\frac{a\sigma}{R} \frac{d}{dR} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right).$$

1.13. Поле перпендикулярно заряженной плоскости. Применив теорему Остроградского—Гаусса к поверхности цилиндра, основания которого параллельны заряженной плоскости и находятся по разные стороны и на равных расстояниях от нее (рис. 21), получим, что

$$2DS = 4\pi\sigma S; \quad D = 2\pi\sigma,$$

а напряженность поля

$$E = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}.$$

1.14. Поле вне конденсатора равно нулю. Аналогично задаче 1.13 находим поле внутри конденсатора:

$$D_y = D_z = 0; D_x = 4\pi\sigma;$$

$$E_y = E_z = 0; E_x = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}.$$

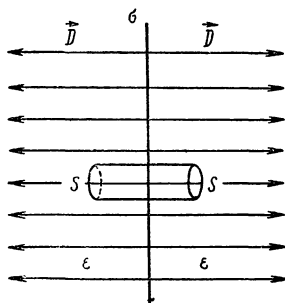


Рис. 21

1.15. Задача имеет центр симметрии, следовательно,

$$D_r = D(r); D_\theta = D_\psi = 0.$$

Применив теорему Остроградского—Гаусса к сферической поверхности, concentричной с заряженным шаром, получим

$$D 4\pi r^2 = 4\pi q.$$

Внутри шара ($r < a$) $q = 0$, а потому

$$D = E = 0.$$

Вне шара ($r > a$) $q = Q$, а потому

$$D = \frac{Q}{r^2}; E = \frac{Q}{\epsilon r^2}.$$

1.16. Из (XIXa) и (1.7a) следует

$$E_n^{(1)} - E_n^{(2)} = 4\pi(\sigma + \sigma').$$

Отсюда (см. решение предыдущей задачи)

$$\sigma' = -\sigma \left(1 - \frac{1}{\epsilon(a)} \right).$$

1.17. Представим себе замкнутую поверхность в толще наружной обкладки конденсатора, которая охватывает внутреннюю обкладку. В толще проводящей обкладки поля нет, а потому на основании теоремы Остроградского—Гаусса

$$q + q_{\text{инд}} = 0; \quad q_{\text{инд}} = -q.$$

1.18. В результате суперпозиции полей, создаваемых каждой из обкладок в отдельности (см. задачи 1.15 и 1.17), находим

$$E = \begin{cases} 0 & (r < r_1), \\ \frac{q}{\epsilon r^2} & (r_1 < r < r_2), \\ 0 & (r > r_2). \end{cases}$$

1.19. Применив теорему Остроградского—Гаусса к сферической поверхности, концентричной с заряженным шаром, получим

$$D 4\pi r^2 = 4\pi q'.$$

Вне шара ($r > a$) $q' = q$, а потому

$$D = \frac{q}{r^2}; \quad E = \frac{q}{\epsilon r^2}.$$

Внутри шара ($r < a$) $q' = \frac{q}{a^3} r^3$, а потому

$$D = \frac{q}{a^3} r; \quad E = \frac{q}{\epsilon_0 a^3} r \quad (r < a).$$

1.20. Поверхностная плотность связанных зарядов на поверхности шара (см. (1.8) и решение предыдущей задачи)

$$\sigma' = \frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right).$$

На основании (1.7) и (IIIв) объемная плотность связанных зарядов внутри шара

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0} \rho.$$

§ 3. Потенциал. Дифференциальное уравнение Пуассона—Лапласа

1.21. Если начало цилиндрической системы координат поместить в середине отрезка, а ось z направить вдоль него, то для произвольной точки (R, z) поля потенциал

$$\varphi = \int_{-l}^{+l} \frac{\chi d\xi}{\sqrt{R^2 + (z - \xi)^2}}.$$

Интегрирование дает

$$\varphi(R, z) = \chi \ln \frac{z + l + \sqrt{R^2 + (z + l)^2}}{z - l + \sqrt{R^2 + (z - l)^2}}.$$

Введем обозначения

$$z_{1,2} = z \pm l; \quad r_{1,2} = \sqrt{R^2 + z_{1,2}^2},$$

тогда уравнение эквипотенциальной поверхности запишется так:

$$\frac{z_1 + r_1}{z_2 + r_2} = C.$$

Отсюда

$$\frac{C + 1}{C - 1} = \frac{2z + r_1 + r_2}{2l + r_1 - r_2} = \frac{r_1 + r_2}{2l} \cdot \frac{1 + \frac{2z}{r_1 + r_2}}{1 + \frac{r_1 - r_2}{2l}} = \frac{r_1 + r_2}{2l}$$

так как $\frac{2z}{r_1 + r_2} = \frac{r_1 - r_2}{2l}$.

Следовательно,

$$r_1 + r_2 = \text{const.}$$

Таким образом, эквипотенциальными поверхностями являются эллипсоиды вращения, фокусы которых совпадают с концами данного отрезка.

1.22. Из решения предыдущей задачи следует, что заряженный проводящий эллипсоид вращения создает вне себя такое же поле, как и равномерно заряженный

отрезок, соединяющий фокусы эллипсоида, а потому искомый потенциал (см. решение предыдущей задачи)

$$\varphi(R, z) = \frac{q}{2c} \ln \frac{z + c + \sqrt{R^2 + (z + c)^2}}{z - c + \sqrt{R^2 + (z - c)^2}},$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — расстояние фокуса от центра эллипсоида.

1.23. Потенциал этого поля можно получить из решения задачи 1.21. Для бесконечной нити потенциал не зависит от z , а потому, положив $z=0$, для достаточно большого значения $l \gg R$ находим, что

$$\varphi = \chi \ln 4 \left(\frac{l}{R} \right)^2 = \text{const} - 2\chi \ln R.$$

Отсюда напряженность поля

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{2\chi}{R}; \quad E_\Theta = E_z = 0.$$

Тот же результат можно получить на основании дифференциального уравнения Лапласа. Поле обладает аксиальной симметрией: $\varphi = \varphi(R)$, а потому в цилиндрических координатах (см. Vб) уравнение (1.23, а) примет вид

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\varphi}{dR} \right) = 0; \quad \frac{d\varphi}{dR} = \frac{C_1}{R}; \quad \varphi = C_1 \ln R + C_2 (R \neq 0).$$

Можно положить $C_2 = 0$ (т. е. положить равным нулю потенциал на единичном расстоянии от нити), а C_1 определить при помощи теоремы Остроградского—Гаусса (1.9) (см. задачу 1.9). Отметим, что в рассматриваемой задаче нельзя положить равным нулю потенциал ни на бесконечности, ни на оси симметрии.

1.24. Вычислим потенциал в цилиндрических координатах (R, Θ, z) , направив ось z вдоль оси кольца, а начало поместим в центре кольца. Потенциал поля, очевидно, не зависит от координаты Θ , а потому, положив для рассматриваемой точки поля (R, z) $\Theta = 0$, имеем, что потенциал ее

$$\varphi(R, z) = \frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{r} = \frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{R^2 + a^2 + z^2 - 2aR \cos \psi}}.$$

Положив

$$\psi = 2\alpha + \pi \text{ и } k^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2 + z^2} (k^2 < 1),$$

получим, что

$$\varphi(R, z) = \frac{qk}{\sqrt{aR}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{qk}{\sqrt{aR}} K(k),$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

На оси кольца ($k=0$)

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2 + z^2}}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{qz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}; \quad E_R = E_\Theta = 0$$

(сравните с задачей 1.4).

1.25. Потенциал поля

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\sigma dS}{r_1} = \frac{q}{2\epsilon} \int_0^\pi \frac{\sin \Theta d\Theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \Theta}} = \\ &= \frac{q}{2ar\epsilon} (a+r - |a-r|). \end{aligned}$$

1. Внутри шара ($r < a$)

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon a}; \quad E = 0.$$

2. Вне шара ($r > a$)

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r}; \quad E = E_r = \frac{q}{\epsilon r^2}.$$

Тот же результат можно получить на основании дифференциального уравнения Лапласа. Поле обладает центральной симметрией, а потому в сферических координатах (см. V в) уравнение (1.24) примет следующий вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0; \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{C_1}{r^2}; \quad \varphi = -\frac{C_1}{r} - C_2.$$

Вне шара ($r > a$)

$$\varphi_1 = -\frac{C_1}{r} + C_2.$$

Внутри шара ($r < a$)

$$\varphi_2 = -\frac{C_3}{r} + C_4.$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий $\varphi_1 = \varphi_2$ и $D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = 4\pi\sigma$ на границе шара $r = a$, а также из условия $\varphi_\infty = 0$ ($C_2 = 0$) и требования конечности φ ($C_3 = 0$).

1.26. Если ось z направить по оси цилиндра, а ее середину принять за начало координат, то потенциал поля на оси, создаваемого элементарным кольцом шириною $d\xi$ (см. задачу 1.24), равен

$$d\varphi = \frac{2\pi a \sigma d\xi}{\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}},$$

а потому

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\pi a \sigma \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}} = \\ &= 2\pi a \sigma \ln \frac{(2z + H) + \sqrt{4a^2 + (2z + H)^2}}{(2z - H) + \sqrt{4a^2 + (2z - H)^2}}. \end{aligned}$$

1.27. Потенциал поля

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{\rho dV}{r_1} = \frac{q}{\frac{4\pi}{3} a^3} 2\pi \int_0^\pi \int_0^a \frac{r'^2 dr' \sin \Theta d\Theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Theta}} = \\ &= \frac{3q}{2a^3 r} \int_0^a r' (r + r' - |r - r'|) dr'. \end{aligned}$$

1. Вне шара ($r > a$)

$$\varphi_1 = \frac{q}{r}; \quad \mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

2. Внутри шара ($r < a$)

$$\varphi_2 = \frac{3q}{2a} - \frac{qr^2}{2a^3}; \quad \mathbf{E} = \frac{q}{a^3} \mathbf{r}.$$

Тот же результат можно получить решением дифференциального уравнения Пуассона (1.23) (см. задачу 1.52).

1.28. Потенциал поля

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{e}{r} + \int \frac{\rho dV}{R} = \frac{e}{r} - \frac{2e}{a^3} \int_{-1}^{+1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{2r_1}{a}} r_1^2 dr_1 d \cos \Theta}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \Theta}} = \\ &= \frac{e}{r} - \frac{2e}{a^3 r} \int_0^{\infty} r_1 (r + r_1 - |r - r_1|) dr_1 e^{-\frac{2r_1}{a}} = \\ &= \frac{e}{r} - \frac{2e}{a^3 r} \left\{ \int_0^r 2r_1^2 e^{-\frac{2r_1}{a}} dr_1 + 2r \int_r^{\infty} r_1 e^{-\frac{2r_1}{a}} dr_1 \right\} = \\ &= e \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) e^{-\frac{2r}{a}}. \end{aligned}$$

Отсюда напряженность поля

$$E = E_r = - \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{e}{r^2} \left(1 + 2 \frac{r}{a} + 2 \frac{r^2}{a^2} \right) e^{-\frac{2r}{a}},$$

что согласуется с результатом, полученным в задаче 1.3.

Тот же результат можно получить, решая уравнение Пуассона в сферической системе координат.

1.29. В любой плоскости, проходящей через дипольный момент, в полярных координатах (полярная ось направлена вдоль дипольного момента)

$$E_r = - \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2p}{r^3} \cos \Theta; \quad E_{\Theta} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{p}{r^3} \sin \Theta.$$

Абсолютная величина напряженности поля

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_{\Theta}^2} = \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \Theta}.$$

1.30. Из решения предыдущей задачи следует, что силовые линии лежат в плоскостях, проходящих через дипольный момент. В полярных координатах (r, Θ) , построенных на этих плоскостях, силовые линии определяются дифференциальным уравнением

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\Theta}{E_\Theta}.$$

Подставив E_r и E_Θ , вычисленные в предыдущей задаче, получим

$$\frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \Theta d\Theta}{\sin \Theta} = 2 \frac{d \sin \Theta}{\sin \Theta}.$$

Интегрируя, находим

$$r = C \sin^2 \Theta.$$

1.31. Элемент поверхности двойного слоя создает поле, потенциал которого

$$d\varphi = \frac{r d\rho}{r^3} = \frac{r\tau}{r^3} dS = \pm \tau d\Omega,$$

где $d\Omega$ — телесный угол, под которым виден элемент поверхности dS из рассматриваемой точки поля. Знак (\pm) совпадает со знаком заряда видимой стороны элемента поверхности. Потенциал всего двойного слоя

$$\varphi = \int (\pm \tau d\Omega).$$

1.32. На основании результата предыдущей задачи

$$\varphi = \pm 2\pi\tau \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

Ось z совпадает с осью диска.

1.33. Проведем ось z цилиндрической системы координат через заряды, а начало поместим посередине между ними. Потенциал поля

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r_1} - \frac{q}{\epsilon r_2},$$

где

$$r_1 = \sqrt{(r - a)^2 + R^2}; \quad r_2 = \sqrt{(z + a)^2 + R^2}.$$

Введем переменные

$$\xi = \frac{z+a}{R}; \quad \eta = \frac{z-a}{R}. \quad (*)$$

Тогда

$$r_1 = R\sqrt{1+\eta^2}; \quad r_2 = R\sqrt{1+\xi^2},$$

и мы получим

$$E_z = \frac{q}{\varepsilon R^2} \left\{ \frac{\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}} - \frac{\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}} \right\},$$

$$E_R = \frac{q}{\varepsilon R^2} \left\{ \frac{1}{(1+\eta^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+\xi^2)^{3/2}} \right\},$$

$$E_\Theta = 0.$$

Подстановка в дифференциальное уравнение (16) дает

$$\frac{dz}{dR} = \frac{\eta(1+\xi^2)^{3/2} - \xi(1+\eta^2)^{3/2}}{(1+\xi^2)^{3/2} - (1+\eta^2)^{3/2}}.$$

Из уравнений (*)

$$z = a \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}; \quad R = \frac{2a}{\xi - \eta}.$$

Дифференцируя, находим, что

$$\frac{dz}{dR} = \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{d\eta - d\xi}.$$

Итак, в переменных (ξ, η) дифференциальное уравнение силовых линий имеет вид

$$\frac{\xi - \eta \frac{d\xi}{d\eta}}{1 - \frac{d\xi}{d\eta}} = \frac{\xi - \eta \left(\frac{1 + \xi^2}{1 + \eta^2} \right)^{3/2}}{1 - \left(\frac{1 + \xi^2}{1 + \eta^2} \right)^{3/2}}.$$

Отсюда

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \left(\frac{1 + \xi^2}{1 + \eta^2} \right)^{3/2}.$$

Интегрируя, находим

$$\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} = C.$$

Это и есть искомое уравнение силовых линий, которое в переменных (z, R) принимает вид

$$\frac{z+a}{\sqrt{(z+a)^2+R^2}} - \frac{z-a}{\sqrt{(z-a)^2+R^2}} = C.$$

1.34. В случае одноименных зарядов (см. решение предыдущей задачи) уравнение силовых линий имеет вид

$$\frac{z+a}{\sqrt{(z+a)^2+R^2}} + \frac{z-a}{\sqrt{(z-a)^2+R^2}} = C.$$

1.35. При переносе начала из точки O в точку O' радиус-вектор заряда q_k относительно нового начала

$$\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k + \mathbf{O}'\mathbf{O},$$

а потому дипольный момент системы (см. 1.29)

$$\mathbf{p}' = \sum_k q_k \mathbf{r}'_k = \sum_k q_k \mathbf{r}_k = \mathbf{p}.$$

1.36. Ось симметрии примем за ось z цилиндрической системы координат и угол Θ будем отсчитывать от оси x , тогда (см. уравнение 1.30)

$$Q_{xy} = \iint \rho(R, z) R^3 dR dz \int_0^{2\pi} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta = 0;$$

$$Q_{xz} = \iint \rho(R, z) z R^2 dR dz \int_0^{2\pi} \cos \Theta d\Theta = 0;$$

$$Q_{yz} = \iint \rho(R, z) z R^2 dR dz \int_0^{2\pi} \sin \Theta d\Theta = 0;$$

$$Q_{zz} = 2\pi \iint \rho(R, z) \left\{ z^2 - \frac{1}{3}(z^2 + R^2) \right\} R dR dz \equiv Q;$$

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \iiint \rho(R, z) \left\{ R^2 \cos^2 \Theta - \frac{1}{3}(z^2 + R^2) \right\} R dR d\Theta dz = \\ &= -\frac{1}{2}Q. \end{aligned}$$

$$Q_{yy} = \iiint \rho(R, z) \left\{ R^2 \sin^2 \Theta - \frac{1}{3} (z^2 + R^2) \right\} R dR d\Theta dz = \\ = -\frac{1}{2} Q.$$

1.37. На основании (1.28) и результатов предыдущей задачи потенциал

$$\varphi = \frac{1}{2} \left\{ Q \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) - \frac{1}{2} Q \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} Q \left(\frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \right\} = \frac{3}{4} \frac{Q}{r^5} (3z^2 - r^2) = \\ = \frac{3}{4} \frac{Q}{r^3} (3 \cos^2 \Theta - 1),$$

где Θ — полярный угол, отсчитываемый от оси симметрии z .

1.38. Для аксиально-симметричного линейного распределения зарядов на основании результата, полученного в задаче 1.36, имеем

$$Q_{33} = Q = -\frac{1}{3} \sum_k q_k R^2 = -\frac{1}{3} q (a^2 - b^2), \\ Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q = \frac{1}{6} q (a^2 - b^2).$$

1.39. Квадрупольный момент (см. решение задачи 1.36)

$$Q = \frac{2\pi}{3} \rho \int_{-a}^a \int_0^{b \sqrt{1-z^2/a^2}} (2z^2 - R^2) R dR dz.$$

Пределы интегрирования вытекают из уравнения эллипсоида

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1.$$

Производя интегрирование, получаем

$$Q = \frac{8\pi}{45} ab^2 (a^2 - b^2) \rho = \frac{2}{15} (a^2 - b^2) q.$$

1.40. Напряженность поля

$$E_y = E_z = 0; \quad E_x = \begin{cases} a(x > 0), \\ -a \quad (x < 0). \end{cases}$$

Отсюда

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (x \neq 0).$$

Плоскость $x=0$ заряжена с поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} (E_x^{(1)} - E_x^{(2)}) = \frac{a}{2\pi}.$$

1.41. Напряженность поля

$$E = E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \begin{cases} \frac{a}{R} \quad (R > R_0), \\ \frac{aR}{R_0^2} \quad (R < R_0). \end{cases}$$

Вычисляя $\operatorname{div} \mathbf{E}$ в цилиндрических координатах (см. III б), получим

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \begin{cases} 0 \quad (R > R_0), \\ \frac{a}{2\pi R_0^2} \quad (R < R_0), \end{cases}$$

т. е. поле создается зарядами равномерно распределенными ($\rho = \text{const}$) по объему бесконечно длинного цилиндра радиуса R_0 .

1.42. Напряженность поля

$$E = E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{cases} \frac{q}{r^2} \quad (r > a), \\ 0 \quad (r < a). \end{cases}$$

Вычисляя $\operatorname{div} \mathbf{E}$ в сферических координатах (см. III в), находим, что объемная плотность зарядов

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (r \neq a).$$

На поверхности сферы $r=a$ поверхностная плотность зарядов

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} (E_n^{(1)} - E_n^{(2)}) = \frac{q}{4\pi a^2}.$$

Следовательно, заданное поле создается зарядом q , равномерно распределенным по поверхности сферы радиуса a .

1.43. Напряженность поля

$$E = E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} \frac{q}{r^2} & (r > a), \\ \frac{q}{a^3} r & (r < a). \end{cases}$$

Объемная плотность зарядов

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \begin{cases} 0 & (r > a), \\ \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} & (r < a). \end{cases}$$

Итак, заданное поле создается зарядом q , равномерно распределенным по объему шара радиуса a .

1.44. На основании уравнения Пуассона (1.23) в сферических координатах (см. V в) объемная плотность зарядов

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \Delta\varphi = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{q}{4\pi a^2 r} e^{-\frac{r}{a}}.$$

1.45. Потенциал этого поля (см. решение задачи 1.23)

$$\varphi = -2\chi \ln R,$$

где $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ — расстояние от заряженной нити, которая пересекает перпендикулярную к ней плоскость $z=0$ в точке (x_0, y_0) . $\ln R$ есть вещественная часть комплексной функции

$$\ln [(x-x_0) + i(y-y_0)],$$

а потому комплексный потенциал

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= -2\chi \ln [(x+iy) - (x_0+iy_0)] = \\ &= \ln [(x+iy) - (x_0+iy_0)]^{-2\chi}. \end{aligned}$$

Чтобы найти уравнение силовых линий, нужно найти мнимую часть комплексного потенциала (см. (1.31)). Положив

$$\ln [(x + iy) - (x_0 + iy_0)]^{-2\chi} = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

находим, что

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2\chi}(\varphi + i\psi)} &= e^{-\frac{\varphi}{2\chi}} \left(\cos \frac{\psi}{2\chi} - i \sin \frac{\psi}{2\chi} \right) = \\ &= (x - x_0) + i(y - y_0). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2\chi} = -\frac{y - y_0}{x - x_0},$$

а потому уравнения силовых линий имеют следующий вид:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \operatorname{const}; \quad z = \operatorname{const}.$$

1.46. Потенциал этого поля (см. решение задачи 1.23)

$$\varphi = -2\chi \ln(R_1 R_2),$$

где (рис. 22)

$$R_1 = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}; \quad R_2 = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

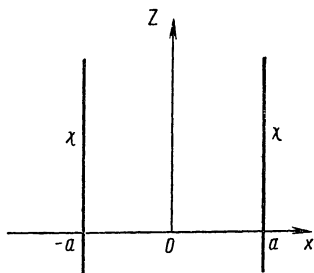


Рис. 22

Эта функция есть вещественная часть функции комплексной переменной (см. решение предыдущей задачи)

$$f(x + iy) = \ln \prod_{k=1}^2 [(x + iy) - (x_k + iy_k)]^{-2\chi},$$

где

$$x_1 = -a; \quad x_2 = a; \quad y_1 = y_2 = 0,$$

а потому

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= -2\chi \ln(x^2 - a^2 - y^2 + 2ixy) = \\ &= \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \end{aligned}$$

Отсюда силовые линии определяются уравнениями

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2\chi} = -\frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} = \operatorname{const}; \quad z = \operatorname{const}.$$

1.47. Потенциал этого поля (см. решение задачи 1.23)

$$\varphi = 2\chi \ln \frac{R_1}{R_2},$$

где

$$R_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}; \quad R_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Уравнение эквипотенциальной поверхности

$$e^{\frac{\varphi}{\chi}} = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = \operatorname{const}$$

можно записать в виде

$$\left(x - a \operatorname{cth} \frac{\varphi}{2\chi}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{sh} \frac{\varphi}{2\chi}}\right)^2.$$

Это уравнение поверхности круглого цилиндра, радиус которого

$$R = \frac{a}{\left|\operatorname{sh} \frac{\varphi}{2\chi}\right|}$$

и ось которого параллельна оси z и пересекает плоскость xy в точке с координатами

$$x_0 = a \operatorname{cth} \frac{\varphi}{2\chi}; \quad y_0 = 0.$$

Потенциал φ является вещественной частью функции комплексной переменной (см. решение задачи 1.45)

$$f(x + iy) = \ln \left[\frac{(x + iy) - (x_1 + iy_1)}{(x + iy) - (x_2 + iy_2)} \right]^{2\chi} = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

где

$$x_1 = -a; \quad x_2 = a; \quad y_1 = y_2 = 0.$$

Силовые линии определяются уравнениями

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} = \operatorname{const}; \quad z = \operatorname{const}.$$

1.48. На основании уравнений Коши—Римана (1.31)

$$E_n dl = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = d\psi.$$

Отсюда вытекает требуемое.

1.49. Из уравнения

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \sqrt{x + iy}$$

находим, что

$$\varphi^2 - \psi^2 = x; \quad 2\varphi\psi = y,$$

или

$$\varphi^2 - \left(\frac{y}{2\varphi}\right)^2 = x; \quad \left(\frac{y}{2\varphi}\right)^2 - \psi^2 = x.$$

Положив $\varphi = C$, получим уравнение эквипотенциальных поверхностей (линий), а именно

$$y^2 = 4C^2(C^2 - x).$$

Значению $\varphi = 0$ соответствует полуплоскость $y = 0; x < 0$. Рассматриваемое поле, таким образом, может быть создано указанной заряженной полуплоскостью.

1.50. Простейшим аксиально-симметричным решением уравнения Лапласа есть $\ln R$, а потому будем искать решение в виде

$$\varphi_1 = C_1 \quad (R < a),$$

$$\varphi_2 = C_2 \ln R \quad (R > a).$$

Если удастся найти постоянные C_1 и C_2 , удовлетворяющие (при $R = a$) граничным условиям

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} = 4\pi\sigma,$$

то это будет единственное решение задачи.

Из граничных условий находим, что

$$C_1 = -2\chi \ln a; \quad C_2 = -2\chi,$$

где $\chi = 2\pi a \sigma$ — заряд, отнесенный к единице длины цилиндра. Отсюда напряженность поля

$$E = E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} \begin{cases} 0 & (R < a), \\ \frac{2\chi}{R} & (R > a). \end{cases}$$

1.51. Направим ось x перпендикулярно слою, а начало поместим на средней плоскости. Тогда $\varphi = \varphi(x)$ и уравнение Пуассона (1.23) примет вид

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Интегрируя, находим:

1) внутри слоя ($|x| < a$)

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} x + C_1; \quad \varphi_1 = -\frac{2\pi\rho}{\varepsilon} x^2 + C_1 x + C_2.$$

Не уменьшая общности, можно положить $C_2 = 0$.

Из того, что $x=0$ есть плоскость симметрии, следует, что при $x=0$ $E_x=0$, а потому $C_1=0$;

2) вне слоя

а) при $x > a$

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = C_3; \quad \varphi_2 = C_3 x + C_4;$$

б) при $x < -a$

$$\frac{d\varphi_3}{dx} = C_5; \quad \varphi_3 = C_5 x + C_6.$$

Постоянные интегрирования находим из граничных условий:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \text{ и } D_x^{(1)} = D_x^{(2)} \quad (\text{при } x = a),$$

$$\varphi_1 = \varphi_3 \text{ и } D_x^{(1)} = D_x^{(2)} \quad (\text{при } x = -a).$$

Отсюда

$$C_3 = -4\pi\rho a; \quad C_5 = 4\pi\rho a; \quad C_4 = C_6 = 2\pi\rho a^2 \left(2 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Итак, внутри слоя

$$\varphi = -\frac{2\pi\rho}{\varepsilon}x^2; \quad E_x = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}x; \quad E_y = E_z = 0,$$

а вне слоя

$$\varphi = -4\pi\rho a|x| + 2\pi\rho a^2\left(2 - \frac{1}{\varepsilon}\right); \quad E_x = 4\pi\rho a \frac{x}{|x|}.$$

1.52. Потенциал рассматриваемого поля обладает сферической симметрией, т. е. $\varphi = \varphi(r)$, а потому уравнение Пуассона (1.23) принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Интегрированием находим:

1) внутри шара ($r < a$)

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{4\pi}{3} \frac{\rho}{\varepsilon} r^3 + C_1;$$

если $r = 0$, то $E_r = -\frac{d\varphi}{dr} = 0$, а потому $C_1 = 0$ и

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi}{3} \frac{\rho}{\varepsilon} r^2 + C_2;$$

2) вне шара ($r > a$)

$$\varphi_2 = \frac{C_3}{r}.$$

Постоянные интегрирования C_2 и C_3 определяются граничными условиями $\varphi_1 = \varphi_2$ и $D_r^{(1)} = D_r^{(2)}$ (при $r = a$).

Отсюда

$$C_3 = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho = q; \quad C_2 = \frac{q}{a} \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon} \right).$$

Итак, внутри шара ($r < a$)

$$\varphi_1 = -\frac{q}{2\varepsilon a^3} r^2 + \frac{q}{a} \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon} \right); \quad E_r^{(1)} = \frac{q}{\varepsilon a^3} r,$$

а вне шара ($r > a$)

$$\varphi_2 = \frac{q}{r}; \quad E_r^{(2)} = \frac{q}{r^2}.$$

1.53. Поле обладает аксиальной симметрией, т. е. $\varphi = \varphi(R)$, а потому в цилиндрических координатах уравнение Пуассона принимает вид

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\varphi}{dR} \right) = - \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Отсюда находим, что

1) внутри цилиндра

$$R \frac{d\varphi}{dR} = - \frac{2\pi\rho}{\varepsilon} R^2 + C_1.$$

На оси цилиндра ($R=0$) напряженность поля $E_R=0$, а потому $C_1=0$. Отсюда

$$\varphi_1 = - \frac{\pi\rho}{\varepsilon} R^2 + C_2,$$

2) вне цилиндра ($R > a$)

$$\varphi_2 = C_3 \ln R + C_4.$$

Не уменьшая общности, можно положить $C_4=0$.

Постоянные интегрирования C_2 и C_3 можно определить из граничных условий:

$$C_3 = - 2\pi a^2 \rho = - 2\chi; \quad C_2 = - \chi \left(2 \ln a - \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Итак, внутри цилиндра ($R < a$)

$$\varphi_1 = - \frac{\pi\rho}{\varepsilon} R^2 - \chi \left(2 \ln a - \frac{1}{\varepsilon} \right); \quad E = E_R = \frac{2\pi\rho}{\varepsilon} R,$$

а вне цилиндра ($R > a$)

$$\varphi_2 = - 2\chi \ln R; \quad E = E_R = \frac{2\chi}{R},$$

где $\chi = \pi a^2 \rho$ — линейная плотность зарядов.

1.54. Для этого достаточно показать, что $\varphi(R, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (см. (1.24) и (Vб))

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Это следует из того, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial R} &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cdot \Phi'(z + iR \sin \alpha) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \Phi'(z + iR \sin \alpha) d \cos \alpha = \\ &= -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \cdot \Phi''(z + iR \sin \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

1.55. Для этого достаточно показать, что решение уравнения Лапласа $\varphi = \frac{c}{r}$ удовлетворяет нужным граничным условиям во всем пространстве вне шара.

Из теоремы Остроградского—Гаусса (1.9) находим, что

$$c = \frac{2q}{1 + \varepsilon}.$$

На основании (XIXa) поверхностная плотность зарядов

$$\sigma = \begin{cases} \frac{q}{(1 + \varepsilon) 2\pi a^2} & (\text{в воздухе}), \\ \frac{\varepsilon q}{(1 + \varepsilon) 2\pi a^2} & (\text{в диэлектрике}). \end{cases}$$

§ 4. Емкостные коэффициенты. Конденсаторы. Теорема взаимности Грина

1.56. Напряженность поля

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{q}{\varepsilon r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} & (r > a), \\ 0 & (r < a). \end{cases}$$

Отсюда следует, что потенциал

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{r} + C_3 & (r \geq b), \\ \frac{q}{\varepsilon r} + C_2 & (a \leq r \leq b), \\ C_1 & (r \leq a). \end{cases}$$

Постоянные могут быть определены из требования непрерывности потенциала на границах $r=a$ и $r=b$ и условия $\varphi_\infty=0$. Отсюда емкость

$$C = \frac{q}{C_1} = \varepsilon \frac{a}{1 + \frac{a}{b} (\varepsilon - 1)}.$$

1.57. Методом, изложенным в решении задачи 1.55, находим, что потенциал шара

$$\varphi = \frac{2q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a}.$$

Отсюда емкость

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a.$$

1.58. Напряженность поля между обкладками

$$E = E_R = \frac{2q}{\varepsilon l R}.$$

Отсюда разность потенциалов

$$[\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E_R dR = \frac{2q}{l} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_0} \right),$$

а емкость

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{l}{\frac{2}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{2}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_0}}.$$

1.59. Ось x направим по нормали к поверхности обкладок. Между обкладками конденсатора напряженность поля

$$E_x = \frac{4\pi\sigma_0}{\varepsilon}; \quad E_y = E_z = 0,$$

а потому

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi\sigma_0 \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right); \quad C = \frac{S}{4\pi \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)}.$$

1.60. На основании результата, полученного в задаче 1.57, емкость

$$C = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1}.$$

1.61. Применим теорему взаимности Грина к системе проводящий шар — точка P .

1. Если шар заземлен, а в точке P имеется заряд q , то

$$q_1 = q_{\text{инд}}; \quad \varphi_1 = 0; \quad q_2 = q.$$

2. Если шар изолирован и несет на себе заряд q' , а в точке P заряда нет, то

$$q_1' = q'; \quad \varphi_1' = \frac{q'}{a}; \quad q_2' = 0; \quad \varphi_2' = \frac{q'}{l}.$$

Подстановка этих значений в (1.22) дает, что

$$q_{\text{инд}} = -q \frac{a}{l}.$$

1.62. Аналогично предыдущему, принимая во внимание (см. задачу 1.56), что

$$\varphi_1' = \frac{q'}{\varepsilon a} + \frac{q'}{b} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right); \quad \varphi_2' = \frac{q'}{l},$$

находим

$$q_{\text{инд}} = -q \frac{\varepsilon ab}{l(b + \varepsilon a - a)}.$$

1.63. Обозначим через q_1 и q_2 искомые индуцированные заряды и через φ_1' , φ_2' и φ' — потенциалы соответственно обкладок и точки нахождения заряда q в том случае, когда обкладки не заземлены, заряда q нет и внутренняя обкладка несет заряд q' .

На основании теоремы взаимности Грина (1.22)

$$q_1\varphi'_1 + q_2\varphi'_2 + q\varphi' = 0.$$

Принимая во внимание (см. решение задачи 1.17), что

$$q_1 + q_2 + q = 0,$$

получаем

$$q_1 = -q \frac{\varphi' - \varphi'_2}{\varphi'_1 - \varphi'_2}; \quad q_2 = -q \frac{\varphi_1 - \varphi'}{\varphi'_1 - \varphi'_2}.$$

Подставляя сюда известные (см. решение задачи 1.25) потенциалы

$$\varphi'_1 = \frac{q'}{a}; \quad \varphi'_2 = \frac{q'}{b}; \quad \varphi' = \frac{q'}{r},$$

мы получим окончательный результат

$$q_1 = -q \frac{a}{r} \frac{b-r}{b-a}; \quad q_2 = -q \frac{b}{r} \frac{r-a}{b-a}.$$

1.64. Для однородного поля между обкладками плоского конденсатора (см. решения задач 1.59 и 1.63)

$$\varphi' - \varphi'_2 = 4\pi\sigma a; \quad \varphi'_1 - \varphi'_2 = 4\pi\sigma d; \quad \varphi'_1 - \varphi' = 4\pi\sigma(d-a),$$

и мы получаем, что

$$q_1 = -q \frac{a}{d}; \quad q_2 = -q \frac{d-a}{d}.$$

1.65. Если расстояние между шарами очень велико, по сравнению с их радиусом, то можно принять, что потенциальные коэффициенты (см. 1.23 а)

$$S_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{r} & (k \neq l), \\ \frac{1}{a} & (k = l). \end{cases}$$

Если заземлить первый шар, то на нем останется заряд q_1 , определенный уравнением

$$\frac{q_1}{a} + \frac{2q'}{r} = 0,$$

Отсюда

$$q_1 = -\frac{2a}{r} q.$$

Если заземлить второй шар, то его заряд q_2 определится из уравнения

$$\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{a} + \frac{q}{r} = 0:$$
$$q_2 = -\frac{a}{r} \left(1 - \frac{2a}{r} \right) q.$$

И, наконец, если заземлить третий шар, то его заряд q_3 определится из уравнения

$$\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r} + \frac{q_3}{r} = 0:$$
$$q_3 = \frac{a^2}{r^2} \left(3 - \frac{2a}{r} \right) q.$$

1.66. При соединении первого шара со вторым их потенциалы имеют соответственно следующие значения (см. решение предыдущей задачи):

$$\varphi_1' = \frac{q_1'}{a} + \frac{q_2}{r}; \quad \varphi_2 = \frac{q_1'}{r} + \frac{q_2}{a}.$$

Из того, что $\varphi_1' = \varphi_2$ и $q = q_1' + q_2$, находим, что

$$q_2 = \frac{q}{2}.$$

При соединении первого шара с третьим имеем

$$\varphi_1'' = \frac{q_1''}{a} + \frac{q_2}{r} + \frac{q_3}{r\sqrt{2}}; \quad \varphi_3 = \frac{q_1''}{r\sqrt{2}} + \frac{q_2}{r} + \frac{q_3}{a}.$$

Из того, что $\varphi_1'' = \varphi_3$ и $q_1'' + q_3 = q_1' = q_2 = \frac{q}{2}$, находим, что

$$q_3 = \frac{q}{4}.$$

И, наконец, при соединении первого шара с четвер-

ТыМ имеем

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{r} + \frac{q_3}{r\sqrt{2}} + \frac{q_4}{r};$$

$$\varphi_4 = \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r\sqrt{2}} + \frac{q_3}{r} + \frac{q_4}{a}.$$

Из того, что $\varphi_1 = \varphi_4$ и $q_1 + q_4 = q_1' = \frac{q}{4}$, находим

$$q_1 = \frac{q}{8} \left(1 - \frac{a}{r-a} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right);$$

$$q_4 = \frac{q}{8} \left(1 + \frac{a}{r-a} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right).$$

1.67. Если в теорему взаимности Грина (1.22) вместо q_k и q_k' подставим (1.19), то получим

$$\sum_{kl} C_{kl} \varphi_l \varphi_k' = \sum_{kl} C_{kl} \varphi_l' \varphi_k = \sum_{kl} C_{lk} \varphi_k' \varphi_l.$$

Отсюда

$$C_{kl} = C_{lk}.$$

Аналогично из (1.22) и (1.19а) следует

$$\sum_{kl} q_k S_{kl} q_l' = \sum_{kl} q_k' S_{kl} q_l = \sum_{kl} S_{lk} q_k q_l'.$$

Отсюда

$$S_{kl} = S_{lk}.$$

1.68. На основании (1.19) с учетом того, что $C_{12} = C_{21}$ (см. решение предыдущей задачи)

$$q = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2; \quad -q = C_1\varphi_1 + C_{22}\varphi_2.$$

Отсюда

$$\varphi_1 = \frac{C_{12} + C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} q; \quad \varphi_2 = -\frac{C_{11} + C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} q,$$

и емкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}.$$

1.69. Если предположить, что заряд единицы длины каждого провода $+\chi$ и $-\chi$, то емкость единицы длины

$$C = \frac{\chi}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Ввиду того, что $D \gg a$, можно принять

$$\varphi = -2\chi \ln R_1 + 2\chi \ln R_2,$$

где R_1 и R_2 — расстояния рассматриваемой точки поля от оси соответственно первого ($+\chi$) и второго ($-\chi$) проводов. Отсюда

$$\varphi_1 = -2\chi \ln a + 2\chi \ln (D - a) \approx 2\chi \ln \frac{D}{a},$$

$$\varphi_2 = -2\chi \ln (D - a) + 2\chi \ln a \approx -2\chi \ln \frac{D}{a}.$$

Подстановка в исходную формулу дает

$$C = \left(4 \ln \frac{D}{a}\right)^{-1}.$$

1.70. Поверхности заряженных цилиндров эквипотенциальные. Такими цилиндрическими эквипотенциальными поверхностями характеризуется поле, создаваемое двумя параллельными нитями, заряженными с линейной плотностью $+\chi$ и $-\chi$ и находящимися на расстоянии $2a$ друг от друга. Отсюда (см. задачу 1.47)

$$R_1 = \frac{a}{\left| \operatorname{sh} \frac{\varphi_1}{2\chi} \right|}; \quad R_2 = \frac{a}{\left| \operatorname{sh} \frac{\varphi_2}{2\chi} \right|};$$

$$D = a \left| \operatorname{cth} \frac{\varphi_1}{2\chi} - \operatorname{cth} \frac{\varphi_2}{2\chi} \right|.$$

Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\varphi_1 - \varphi_2) &= \frac{1}{2} |\operatorname{sh} \varphi_1| \cdot |\operatorname{sh} \varphi_2| \times \\ &\times \left\{ \pm |\operatorname{cth} \varphi_1 - \operatorname{cth} \varphi_2|^2 \mp \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \varphi_1} \mp \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \varphi_2} \right\}, \end{aligned}$$

где верхний знак соответствует тому, что φ_1 и φ_2 противоположных знаков, т. е. цилиндры расположены

один вне другого ($D > R_1 + R_2$), а нижний знак, когда φ_1 и φ_2 одного знака, т. е. один цилиндр находится внутри другого. Отсюда

$$\operatorname{ch} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\chi} = \pm \frac{D^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2},$$

и искомая емкость

$$C = \frac{\chi}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{2 \operatorname{arch} \left(\pm \frac{D^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2} \right)}.$$

Для указанного предельного случая

$$C = \frac{1}{2 \operatorname{arch} \frac{D^2}{2a^2}} = \frac{1}{4 \ln \frac{D}{a}},$$

что совпадает с результатом, полученным в предыдущей задаче.

1.71. На основании результатов предыдущей задачи, положив $D=0$, находим, что искомая емкость

$$C = \frac{1}{2 \operatorname{arch} \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{2R_1R_2} \right)} = \frac{1}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}},$$

что совпадает с результатом, полученным в задаче 1.58.

1.72. Проводящую плоскость можно рассматривать как цилиндрическую поверхность бесконечно большого радиуса, а потому можно воспользоваться результатом, полученным в задаче 1.70; положив

$$R_1 = R; \quad D = R_2 + a; \quad R_2 \rightarrow \infty,$$

мы получим

$$C = \frac{1}{2 \operatorname{arch} \frac{a}{R}}.$$

§ 5. Энергия силы взаимодействия. Максвелловский тензор натяжений

1.73. На основании (1.18) с учетом результата задачи 1.25 энергия шара

$$W = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{q^2}{2\epsilon a}.$$

Тот же результат можно получить по формуле

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 r^2 dr.$$

1.74. Потенциалы шаров определяются приближенно уравнениями

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{r}; \quad \varphi_2 = \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{b},$$

а потому на основании (1.18) их энергия

$$W = \frac{1}{2} (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{a} + \frac{2q_1q_2}{r} + \frac{q_2^2}{b} \right).$$

1.75. На основании (1.17) с учетом результата, полученного в задаче 1.19, энергия шара

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 r^2 dr = \\ &= \frac{q^2}{2} \left\{ \frac{1}{\epsilon_0 a^6} \int_0^a r^4 dr + \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \right\} = \frac{q^2}{2a} \left(1 + \frac{1}{5\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Тот же результат можно получить по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV = \frac{1}{2} \rho \int \varphi dV.$$

1.76. Искомая энергия

$$W = e_{\text{ядра}} \varphi_{\text{обл}}(0) = -\frac{e^2}{a},$$

где $\varphi_{\text{обл}}(0)$ — потенциал электронного облака в ядре.

Как вычислено в задаче 1.28,

$$\Phi_{\text{обл}}(r) = e \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{e}{r}.$$

Отсюда

$$\Phi_{\text{обл}}(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \Phi_{\text{обл}}(r) = -\frac{e}{a}.$$

1.77. Энергия заряженного конденсатора (см. решение задачи 1.58)

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{l} \left(\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_0} \right).$$

Тот же результат можно получить, вычислив энергию поля по формуле

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon E^2 dV = \frac{l}{4} \int_{R_1}^{R_2} \epsilon E^2 R dR.$$

1.78. Энергия плоского конденсатора (см. решение задачи 1.59)

$$W = \frac{q^2}{2C} = 2\pi \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) \frac{q^2}{S}.$$

1.79. Заряженный плоский конденсатор обладает энергией

$$W_1 = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^{-2},$$

где емкость конденсатора (см. решение задачи 1.59)

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}.$$

После удаления стеклянной пластинки емкость конденсатора уменьшится в ϵ раз при постоянном заряде, а потому энергия конденсатора увеличится в ϵ раз

$$W_2 = \epsilon W_1.$$

Искомая работа

$$A = W_2 - W_1 = (\epsilon_1 - 1) W_1.$$

1.80. Если в воздушный плоский конденсатор, обкладки которого имеют ширину a , ввести диэлектрик на высоту x , то емкость конденсатора увеличится на

$$\Delta C = \frac{(\varepsilon - 1)ax}{4\pi d}.$$

Энергия конденсатора при этом увеличится на

$$\Delta W = \frac{1}{2} \Delta C \cdot (\Delta\varphi)^2 = \frac{(\varepsilon - 1)a(\Delta\varphi)^2}{8\pi d} x.$$

Отсюда на основании (1.38б) сила, с которой диэлектрик втягивается в конденсатор, равна

$$F = \left(\frac{\partial \Delta W}{\partial x} \right)_{\Delta\varphi} = \frac{(\varepsilon - 1)a}{8\pi d} (\Delta\varphi)^2.$$

Эта сила уравновешивается весом диэлектрика, а потому искомая высота

$$h = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi d^2} \frac{(\Delta\varphi)^2}{\delta},$$

где δ — удельный вес диэлектрика.

1.81. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, находим

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi(R_2^2 - R_1^2)}{(\Delta\varphi)^2} h\delta \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

1.82. В плоском конденсаторе имеется однородное поле, напряженность которого

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi \frac{q}{S}.$$

Затраченная работа равна энергии этого поля в объеме металлической пластины

$$A = \frac{E^2}{8\pi} \cdot Sd = \frac{2\pi q^2 d}{S}.$$

1.83. Искомая работа

$$A = W_1 + W_2 - W,$$

где $W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2$; $W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2$ — энергии данных кон-

денсаторов, а $W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{q^2}{2C}$ — энергия их соединения.

1. При параллельном соединении

$$q = q_1 + q_2 = C_1 U_1 + C_2 U_2; \quad C = C_1 + C_2;$$

тогда

$$A = \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} (U_1 - U_2)^2.$$

2. При последовательном соединении

$$U = U_1 + U_2; \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

следовательно,

$$A = \frac{(C_1 U_1 - C_2 U_2)^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

1.84. Работа

$$A_1 = q\varphi_1 \text{ и } A_2 = q\varphi_2,$$

где (см. решение задачи 1.24) потенциал поля в центре колец

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{\sqrt{a^2 + h^2}}; \quad \varphi_2 = \frac{q_1}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{q_2}{a}.$$

Отсюда

$$q_1 = \left(\frac{A_1}{a} - \frac{A_2}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right) \frac{a^2 (a^2 + h^2)}{qh^2};$$
$$q_2 = \left(\frac{A_2}{a} - \frac{A_1}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right) \frac{a^2 (a^2 + h^2)}{qh^2}.$$

1.85. Заряды проводников определяются приближенно уравнениями

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{r}; \quad \varphi_2 = \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{C_2}.$$

Отсюда сила взаимодействия

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{C_1 C_2 (r\varphi_1 - C_2 \varphi_2) (r\varphi_2 - C_1 \varphi_1)}{(r^2 - C_1 C_2)^2}.$$

1.86. Обозначим моменты диполей через \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 , а вектор, идущий от центра первого диполя к центру второго, — через \mathbf{r}_{12} . Энергия взаимодействия диполей (см. (1.34))

$$W_{1,2} = -\mathbf{p}_2 \mathbf{E}_{12},$$

где \mathbf{E}_{12} — напряженность поля, создаваемого первым диполем в месте нахождения второго:

$$\mathbf{E}_{12} = -\nabla_2 \Phi_{12}$$

(индекс 2 при операторе ∇ указывает на то, что дифференцирование производится по координатам второго диполя), а

$$\Phi_{12} = \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}.$$

Подстановка дает

$$W_{12} = \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}{r_{12}^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \mathbf{r}_{12})(\mathbf{p}_2 \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^5}.$$

Искомая работа равна энергии, которой обладают параллельные диполи, т. е.

$$A = W_{12} = \frac{p_1 p_2}{a^3} (1 - 3 \cos^2 \Theta),$$

где Θ — угол между направлением диполей и прямой, соединяющей их центры.

1.87. На основании (1.37) сила, действующая на левую обкладку конденсатора (рис. 23),

$$F_1 = F_{1x} = \frac{2\pi\sigma^2 S}{\epsilon_1},$$

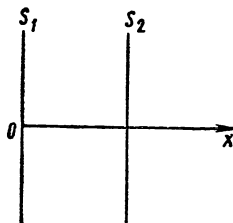


Рис. 23

а на правую обкладку действует сила

$$F_2 = -F_{2x} = -\frac{2\pi\sigma^2 S}{\varepsilon_2}.$$

где ε_1 и ε_2 — значения диэлектрической проницаемости соответственно у левой и правой обкладок.

1.88. Искомая сила направлена перпендикулярно плоскости разреза. Интегрируя проекцию поверхностной плотности силы (1.37) на это направление по полусфере, находим

$$F = \int f \cos \Theta dS = 2\pi^2\sigma^2 a^2 = \frac{q^2}{8a^2}.$$

1.89. На основании (1.39) и (1.40)

$$F_x = \frac{1}{4\pi} \oint \left\{ \varepsilon \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) \cos(n, x) + \varepsilon E_x E_y \cos(n, y) + \varepsilon E_x E_z \cos(n, z) \right\} dS = \frac{1}{4\pi} \oint \left\{ \varepsilon E_x (\mathbf{E}\mathbf{n}) - \frac{\varepsilon}{2} E^2 n_x \right\} dS,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} \oint \left\{ \varepsilon \mathbf{E} (\mathbf{E}\mathbf{n}) - \frac{\varepsilon}{2} E^2 \mathbf{n} \right\} dS.$$

1.90. На основании результата, полученного в предыдущей задаче, и пренебрегая краевым эффектом, можно искомый главный вектор представить в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2,$$

где

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left\{ \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 (\mathbf{E}_1 \mathbf{n}_1) - \frac{\varepsilon_1}{2} E_1^2 \mathbf{n}_1 \right\} dS,$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \left\{ \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 (\mathbf{E}_2 \mathbf{n}_2) - \frac{\varepsilon_2}{2} E_2^2 \mathbf{n}_2 \right\} dS,$$

S_1 — поверхность левой обкладки конденсатора, и все величины, обозначенные индексом (1), относятся к ле-

вой поверхности диэлектрика, а S_2 — поверхность правой обкладки конденсатора, и все величины, обозначенные индексом (2), относятся к правой поверхности диэлектрика.

Принимая во внимание, что \mathbf{n}_1 имеет направление отрицательной оси x (см. рис. 23), а \mathbf{n}_2 — положительной оси x и что

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_1} \mathbf{n}_1; \quad \mathbf{E}_2 = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_2} \mathbf{n}_2,$$

получим

$$F_1 = -F_{1x} = \frac{2\pi\sigma^2 S}{\varepsilon_1}; \quad F_2 = F_{2x} = \frac{2\pi\sigma^2 S}{\varepsilon_2}.$$

Таким образом, главный вектор всех сил, действующих как на обкладки конденсатора, так и на диэлектрик между ними, равен нулю (см. решение задачи 1.87).

1.91. Рассмотрим плоскость, проходящую через середину отрезка, соединяющего оба заряда, перпендикулярно к нему.

Сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 , равна главному вектору максвелловских натяжений, приложенных справа к этой бесконечной плоскости, а именно (рис. 24)

$$F_x = \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) dS.$$

Приняв во внимание, что

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= \frac{q_1 - q_2}{\varepsilon \left(R^2 + \frac{r^2}{4} \right)^{3/2}} \cdot \frac{r}{2}, \\ E^2 &= E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos 2\alpha = \\ &= \frac{(q_1^2 + q_2^2) \left(R^2 + \frac{r^2}{4} \right) + 2q_1q_2 \left(R^2 - \frac{r^2}{4} \right)}{\varepsilon^2 \left(R^2 + \frac{r^2}{4} \right)^3}. \end{aligned}$$

получим

$$F_x = - \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}.$$

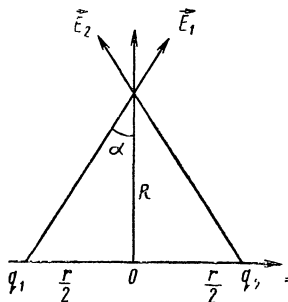


Рис. 24

Аналогично можно показать, что

$$F_y = F_z = \frac{1}{4\pi} \int \epsilon E_x E_y dS = \frac{1}{4\pi} \int \epsilon E_x E_z dS = 0.$$

1.92. Энергия единицы длины одной нити в поле другой

$$W = \chi\varphi,$$

где потенциал поля, создаваемого второй нитью в месте нахождения первой (см. решение задачи 1.9), равен

$$\varphi = \frac{2\chi \ln a}{\epsilon},$$

а потому

$$W = \frac{2\chi^2}{\epsilon} \ln a.$$

Отсюда сила, действующая на единицу длины нити,

$$F = - \frac{\partial W}{\partial a} = - \frac{2\chi^2}{\epsilon a}.$$

1.93. Рассмотрим плоскость, проходящую через середину отрезка, соединяющего данные нити, перпендику-

лярно к нему, т. е. параллельно нитям (рис. 25). На единицу длины (вдоль нитей) этой плоскости приходится сила

$$F_x = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) dy dz.$$

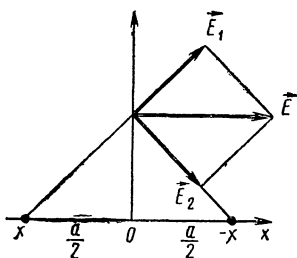


Рис. 25

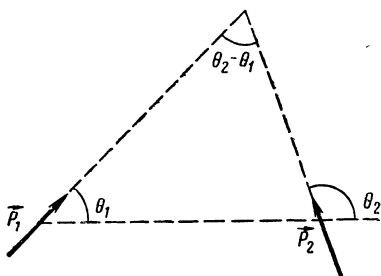


Рис. 26

где

$$E_x = E = \frac{2a\chi}{\varepsilon \left(y^2 + \frac{a^2}{4} \right)}$$

Отсюда

$$F_x = \frac{2\chi^2}{\varepsilon a}.$$

1.94. Когда оба диполя лежат в одной плоскости, то энергию их взаимодействия, вычисленную в задаче 1.86, можно записать в виде (рис. 26)

$$W_{12} = \frac{p_1 p_2}{r^3} \{ \cos(\Theta_2 - \Theta_1) - 3 \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 \}.$$

Главный вектор сил, действующих на второй диполь,

$$F = - \frac{\partial W_{12}}{\partial r} = \frac{3p_1 p_2}{r^4} \{ \cos(\Theta_1 - \Theta_2) - 3 \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 \},$$

а момент сил, действующих на этот диполь,

$$N = - \frac{\partial W_{12}}{\partial \Theta_2} = \frac{p_1 p_2}{r^3} \{ \sin(\Theta_2 - \Theta_1) - 3 \cos \Theta_1 \sin \Theta_2 \}.$$

1.95. Как было показано (см. решение задачи 1.70), поле, создаваемое заряженными цилиндрами, эквива-

лентно полю, создаваемому двумя параллельными нитями, лежащими в одной плоскости с осями этих цилиндров на расстоянии $2a$ друг от друга и заряженных с той же линейной плотностью $+\chi$ и χ , где

$$R = \frac{a}{\left| \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2\chi} \right|}; \quad D = 2a \operatorname{cth} \frac{\varphi}{2\chi}$$

(φ — потенциал положительно заряженного цилиндра). Отсюда

$$\frac{D}{R} = 2\operatorname{ch} \frac{\varphi}{2\chi}; \quad \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2\chi} = \frac{\sqrt{D^2 - 4R^2}}{2R},$$

а потому

$$a = R \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2\chi} = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - 4R^2}.$$

Сила взаимодействия (на единицу длины) (см. решение задачи 1.93)

$$F = \frac{2\chi^2}{2a} = \frac{2\chi^2}{\sqrt{D^2 - 4R^2}}.$$

§ 6. Метод электрических изображений

1.96. Выберем проводящую плоскость за координатную плоскость yz и направим ось x через заряд q .

В левом полупространстве ($x < 0$) нет зарядов, а потому потенциал поля удовлетворяет уравнению Лапласа (1.23а). На границе левого полупространства (на проводящей плоскости и на бесконечности) потенциал равен нулю. Единственным решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим этим граничным условиям, есть $\varphi = 0$, а потому и $E = 0$ ($x < 0$).

В правом полупространстве ($x > 0$) распределение зарядов и граничные условия такие же, как и в том случае, когда поле создается в вакууме (в отсутствие проводящей плоскости) двумя точечными зарядами: данным зарядом q в точке $(a, 0, 0)$ и зарядом $-q$ в точке $(-a, 0, 0)$, т. е. его изображением, а потому

$$\varphi = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \quad (x > 0)$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}$$

есть соответственно расстояния рассматриваемой точки поля (x, y, z) от данного заряда q и его зеркального изображения $(-q)$ (рис. 27).

Зная потенциал, можно вычислить напряженность поля по формуле (1.13). В декартовых координатах имеем:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{r_1^2} \frac{x-a}{r_1} - \frac{q}{r_2^2} \frac{x+a}{r_2},$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{q}{r_1^2} \frac{y}{r_1} - \frac{q}{r_2^2} \frac{y}{r_2} \quad (x > 0),$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{q}{r_1^2} \frac{z}{r_1} - \frac{q}{r_2^2} \frac{z}{r_2}.$$

1.97. На основании (XIXa) плотность индуцированных зарядов на проводящей плоскости $(x=0)$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{4\pi} (E_x^{(1)} - E_x^{(2)})_{x=0},$$

где (см. решение предыдущей задачи)

$$E_x^{(1)} = -\frac{2aq}{r^3}; \quad E_x^{(2)} = 0.$$

Расстояние от рассматриваемой точки проводящей плоскости до заряда q равно $r = \sqrt{a^2 + R^2}$; R — расстояние ее от начала координат. Отсюда

$$\sigma = -\frac{aq}{2\pi} \frac{1}{(a^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Заряд, индуцированный на элементе поверхности dS ,

$$\begin{aligned} \sigma dS &= -\frac{q}{2\pi} \frac{dS}{r^2} \frac{a}{r} = -\frac{q}{2\pi} \frac{dS}{r^2} \cos\Theta = \\ &= -\frac{q}{2\pi} d\Omega, \end{aligned}$$

где $d\Omega$ — телесный угол, под которым элемент поверхности dS виден из заряда q . Весь индуцированный заряд

$$q_{\text{инд}} = - \frac{q}{2\pi} \int d\Omega = -q.$$

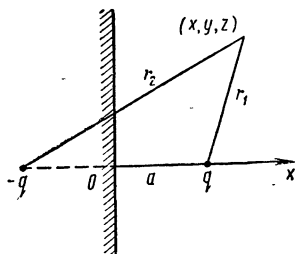


Рис. 27

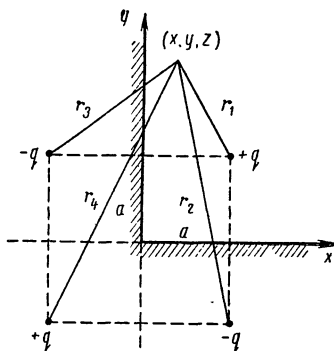


Рис. 28

1.98. Искомая сила равна силе притяжения данного диполя к своему зеркальному изображению.

На основании результата задачи 1.86

$$F = - \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{3p^2}{8a^4}.$$

1.99. Примем проводящие полуплоскости за координатные плоскости xz и yz (рис. 28). В первом квадранте, где находится заряд q , поле таково, как будто оно создается не только данным зарядом q , но и его изображениями ($-q$) и изображением изображений ($+q$):

$$\varphi = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_3} + \frac{q}{r_4} \quad (x > 0; y > 0),$$

где $r_{1,2,3,4}$ — расстояния рассматриваемой точки поля от заряда q и его изображений.

Зная потенциал, можно вычислить напряженность поля. В остальном пространстве $\varphi=0$.

1.100. На полуплоскости $x=0$ плотность индуцированных зарядов

$$\sigma_1 = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

На полуплоскости $y=0$ плотность индуцированных зарядов

$$\sigma_2 = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

На основании результатов предыдущей задачи находим

$$\sigma_1 = -\frac{aq}{2\pi} \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right); \quad \sigma_2 = -\frac{aq}{2\pi} \left(\frac{1}{R_3^3} - \frac{1}{R_4^3} \right),$$

где $R_{1,2,3,4}$ — расстояния от рассматриваемой точки поверхности до заряда и его изображений.

Полный заряд, индуцированный на каждой из полуплоскостей,

$$q_{\text{инд}}^{(1)} = q_{\text{инд}}^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \sigma_1 dy dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \sigma_2 dx dz = -\frac{q}{2}.$$

1.101. Поле между проводящими полуплоскостями таково, как будто оно создается помимо данного заряда q еще и пятью его «изображениями», которые совместно с данным зарядом расположены в вершинах правильного шестиугольника, лежащего в плоскости, перпендикулярной к ребру, и центр которого лежит на ребре (рис. 29). Потенциал поля (между плоскостями)

$$\varphi = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} + \frac{q}{r_3} - \frac{q}{r_4} + \frac{q}{r_5} - \frac{q}{r_6},$$

где $r_{1,2,3,4,5,6}$ — расстояния от рассматриваемой точки поля до данного заряда q и его изображений.

Во всем остальном пространстве потенциал поля

$$\varphi = 0.$$

Зная потенциал, можно вычислить напряженность поля.

1.102. Плотность индуцированных на полуплоскости $y=0$ (см. рис. 29) зарядов

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Воспользовавшись значением потенциала φ , полученным в предыдущей задаче, находим

$$\sigma = \frac{\epsilon - aq}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{2}{R_2^3} + \frac{1}{R_3^3} \right),$$

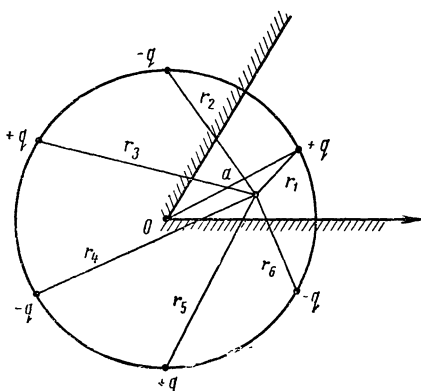


Рис. 29

где $R_{1,2,3}$ — расстояния произвольной точки полуплоскости ($y=0$) от зарядов.

1.103. Заряд q_1 притягивает пластину с такою же силой, как и свое «изображение», т. е.

$$F_1 = \frac{q_1^2}{(l-d)^2}.$$

Аналогично, сила притяжения ко второму заряду

$$F_2 = \frac{q_2^2}{(l-d)^2}.$$

Результирующая сила

$$F = F_1 - F_2.$$

1.104. Применяя метод электрических изображений (см. задачу 1.97), находим потенциал поля

$$\varphi = -2\chi \ln R_1 + 2\chi \ln R_2 = 2\chi \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (x > 0),$$

$$\varphi = 0 \quad (x < 0),$$

где

$$R_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}; \quad R_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

есть расстояния от рассматриваемой точки поля до заряженной нити и ее изображения. (Проводящая плоскость принята за координатную плоскость yz , а ось x проведена через заряженную нить.)

1.105. Поверхностная плотность индуцированных зарядов

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0}$$

На основании результатов предыдущей задачи находим, что

$$\sigma = -\frac{\chi}{\pi} \frac{a}{a^2 + y^2}$$

Индуцированный заряд, приходящийся на единицу длины (вдоль заряженной нити $\Delta z=1$) проводящей плоскости, равен

$$\chi_{\text{инд}} = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \, dy \, dz = -\chi$$

1.106. Если проводящие полуплоскости выбрать за координатные плоскости xz и yz , то, применяя метод электрических изображений (см. задачу 1.97), потенциал поля (для $x>0$ и $y>0$)

$$\varphi = -2\chi (\ln R_1 - \ln R_2 + \ln R_3 - \ln R_4) = -2\chi \ln \frac{R_1 R_3}{R_2 R_4},$$

где

$$R_1 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}; \quad R_2 = \sqrt{(x-a)^2 + (y+a)^2};$$

$$R_3 = \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2}; \quad R_4 = \sqrt{(x+a)^2 + (y-a)^2}$$

есть расстояния до нити и ее изображений. Во всем остальном пространстве $\varphi=0$.

1.107. Поверхностная плотность зарядов, индуцированных на проводящих полуплоскостях, соответственно

равна

$$\sigma_1 = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_{x=0}; \quad \sigma_2 = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

На основании результатов предыдущей задачи

$$\sigma_1 = -\frac{\chi}{\pi} \left\{ \frac{a}{a^2 + (y-a)^2} - \frac{a}{a^2 + (y+a)^2} \right\};$$

$$\sigma_2 = -\frac{\chi}{\pi} \left\{ \frac{a}{(x-a)^2 + a^2} - \frac{a}{(x+a)^2 + a^2} \right\}.$$

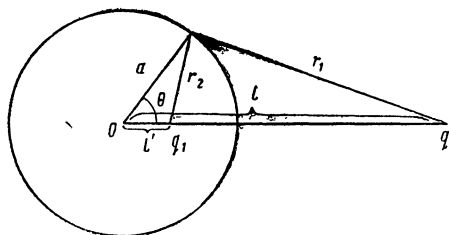


Рис. 30

Индукцированный заряд, приходящийся на единицу длины (вдоль заряженной нити) $\Delta z=1$ каждой проводящей полуплоскости, равен

$$\chi_{\text{инд}} = \int_0^{\infty} \sigma_1 dy = \int_0^{\infty} \sigma_2 dx = -\frac{\chi}{2}.$$

1.108. Потенциал поля вне шара определяется однозначно таким решением уравнения Пуассона (1.23), которое соответствует наличию одного точечного источника q и которое обращается в нуль на поверхности заземленного шара и на бесконечности.

Следуя методу изображений, мы ищем потенциал вне шара в виде (очевидно, что внутри шара $\varphi=0$)

$$\varphi = \frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}, \quad (*)$$

где $q' = -q \frac{a}{l}$ — заряд, индуцированный на сфере (см. задачу 1.61), r_1 — расстояние от рассматриваемой точки поля до данного заряда q (рис. 30); r_2 — расстояние до

изображения q' , которое из соображений симметрии следует поместить внутри шара на прямой, соединяющей центр шара с данным зарядом q . Расстояние изображения от центра шара обозначим через l' .

Остается показать, что соответствующим выбором l' можно удовлетворить граничному условию на поверхности шара. Действительно, для любой точки поверхности шара

$$r_1 = \sqrt{l^2 + a^2 - 2al \cos \Theta}; \quad r_2 = \sqrt{l'^2 + a^2 - 2al' \cos \Theta}.$$

Подстановка в уравнение (*) дает, что для любого значения Θ

$$q(l^2 + a^2 - 2al \cos \Theta)^{-\frac{1}{2}} = q \frac{a}{l} (l'^2 + a^2 - 2al' \cos \Theta)^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$l' = \frac{a^2}{l}.$$

1.109. Поверхностная плотность индуцированных зарядов

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a}.$$

Подставив значение потенциала φ (см. решение предыдущей задачи), получим

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a r_1^3} (l^2 - a^2).$$

Весь индуцированный заряд

$$q_{\text{инд}} = \oint \sigma dS = -\frac{a}{l} q.$$

1.110. Вне шара поле таково, как будто оно создается не только данными зарядами q , но также и их изображениями (см. решение задачи 1.108) $q' = -q \frac{a}{l}$, находящимися на расстоянии $l' = \frac{a^2}{l}$ по обе стороны от центра шара. Для равновесия сил, приложенных к каж-

дому из данных зарядов, нужно, чтобы

$$\frac{q^2}{4l^2} = q^2 \frac{a}{l} \frac{1}{\left(l - \frac{a^2}{l}\right)^2} + q^2 \frac{a}{l} \frac{1}{\left(l + \frac{a^2}{l}\right)^2}.$$

Отсюда

$$a \approx \frac{l}{8}.$$

1.111. Если бы шар был заземлен, то заряд его был бы $q' = -q_2 \frac{a}{l}$ (см. задачу 1.108). Фактически же заряд шара на $Q = (q_1 + q_2 \frac{a}{l})$ больше. Этот заряд создает вне шара добавочное поле, потенциал которого удовлетворяет уравнению Лапласа и постоянен на поверхности шара. Таким решением будет $\frac{Q}{r}$, а потому потенциал искомого поля

$$\varphi = \frac{q_2}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{Q}{r} \quad (r \geq a),$$

где

$$r_1 = \sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \cos \Theta}; \quad r_2 = \sqrt{r^2 + l'^2 - 2rl' \cos \Theta}$$

есть расстояния рассматриваемой точки поля от заряда q_2 и его изображения q' ($l' = \frac{a^2}{l}$).

Напряженность поля вне шара определяется уравнениями (внутри шара поля нет)

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{q_2}{r_1^3} (r - l \cos \Theta) - \\ &\quad - \frac{a}{l} \frac{q_2}{r_2^3} \left(r - \frac{a^2}{l} \cos \Theta\right) + \frac{q_1 + \frac{a}{l} q_2}{r^2}, \\ E_\Theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{q_2}{r_1^3} l \sin \Theta - \frac{a^3}{l^2} \frac{q_2}{r_2^3} \sin \Theta, \\ E_\psi &= -\frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0. \end{aligned}$$

1.112. На точечный заряд q_2 действует сила притяжения к шару

$$F_1 = \frac{q_2 |q'|}{(l-l')^2} = \frac{al}{(l^2 - a^2)^2} q_2^2$$

и сила отталкивания

$$F_2 = \frac{Qq_2}{l^2} = \frac{q_1 q_2}{l^2} + \frac{a}{l^3} q_2^2.$$

Отсюда видно, что на достаточно больших расстояниях ($l \gg a$) на заряд q_2 действует сила отталкивания, а на достаточно близких расстояниях ($l \approx a$) — сила притяжения.

1.113. Потенциал сферической поверхности и всего пространства вне нее равен нулю, а внутри сферы

$$\varphi = \frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2},$$

где

$$q' = -\frac{a}{l} q,$$

r_1 и r_2 — расстояния от рассматриваемой точки поля до заряда q и фиктивного заряда q' , находящегося на расстоянии $l' = \frac{a^2}{l}$ от центра сферической поверхности (см. решение задачи 1.108).

1.114. Плотность индуцированных зарядов

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a}.$$

Подстановка значения потенциала φ (см. предыдущую задачу) дает

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi r_1^3} \frac{a^2 - l^2}{a}.$$

Отсюда весь индуцированный заряд

$$q_{\text{инд}} = \int \sigma dS = -q.$$

1.115. Внутри цилиндра ($R < a$) поля нет ($\varphi = \text{const}$), а вне цилиндра поле создается данной заряженной

нитью и ее изображением, находящимся на расстоянии l' от оси цилиндра, а потому полагаем

$$\varphi_2 = -2\chi \ln R_1 + 2c\chi \ln R_2 \quad (R > a),$$

где

$$R_1 = \sqrt{l^2 + R^2 - 2lR \cos \Theta}; \quad R_2 = \sqrt{l'^2 + R^2 - 2Rl' \cos \Theta}$$

есть расстояния от рассматриваемой точки поля до заряженной нити и ее изображения.

Из граничных условий (1.24) при $R=a$ находим

$$C = 1; \quad l' = \frac{a^2}{l}.$$

Напряженность поля (вне цилиндра) определяется уравнениями

$$E_R = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial R} = 2\chi \left(\frac{R - l \cos \Theta}{R_1^2} - \frac{R - l' \cos \Theta}{R_2^2} \right),$$

$$E_\Theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \Theta} = 2\chi \left(\frac{l}{R_1^2} - \frac{l'}{R_2^2} \right) \sin \Theta.$$

Искомая сила равна силе взаимодействия между данной нитью и ее «изображением» (см. задачу 1.93)

$$F = \frac{2\chi^2}{(l-l')} = \frac{2l}{l^2 - a^2} \chi^2.$$

1.116. Используя результат предыдущей задачи, получаем, что поверхностная плотность индуцированных зарядов

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} (E_R)_{R=a} = -\frac{\chi}{2\pi a} \frac{l^2 - a^2}{l^2 + a^2 - 2al \cos \Theta}.$$

Заряд, индуцированный на единице длины цилиндра,

$$\chi_{\text{инд}} = \int \sigma dS = a \int_0^{2\pi} \sigma d\Theta = -\chi.$$

1.117. Аналогично задаче 1.115 положим

$$\varphi_1 = -2\chi \ln R_1 + 2C\chi \ln R_2 \quad (R < a),$$

$$\varphi_2 = C_1 \quad (R > a),$$

где

$$R_1 = \sqrt{R^2 + l^2 - 2Rl \cos \Theta} \quad \text{и} \quad R_2 = \sqrt{R^2 + l'^2 - 2Rl' \cos \Theta}$$

есть расстояния от рассматриваемой точки поля до данной нити и ее изображения.

Из граничных условий получаем

$$C = 1; \quad l' = \frac{a^2}{l}; \quad C_1 = 2\chi \ln \frac{a}{l}.$$

Напряженность поля внутри цилиндра определяется формулами

$$E_R = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = 2\chi \left(\frac{R - l \cos \Theta}{R^2 + l^2 - 2Rl \cos \Theta} - \frac{R - l' \cos \Theta}{R^2 + l'^2 - 2Rl' \cos \Theta} \right),$$

$$E_\Theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \Theta} =$$

$$= 2\chi \left(\frac{l \sin \Theta}{R^2 + l^2 - 2Rl \cos \Theta} - \frac{l' \sin \Theta}{R^2 + l'^2 - 2Rl' \cos \Theta} \right),$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0.$$

Вне цилиндра

$$E = 0.$$

1.118. Поверхностная плотность индуцированных зарядов

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} (E_R^{(1)})_{R=a}.$$

Подстановка значения E_R , найденного в предыдущей задаче, дает

$$\sigma = -\frac{\chi}{2\pi a} \frac{a^2 - l^2}{a^2 + l^2 - 2al \cos \Theta}.$$

Заряд, индуцированный на единице длины цилиндрической поверхности,

$$\chi_{\text{инд}} = \int \sigma dS = a \int_0^{2\pi} \sigma d\Theta = -\chi.$$

1.119. На каждую из данных нитей действуют силы

$$F_1 = \frac{2\chi^2}{l' - l} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{2\chi}{l' + l},$$

направленные от оси цилиндра, и сила

$$F_3 = \frac{2\chi^2}{2l},$$

направленная к оси, где $l' = \frac{a^2}{l}$.

Силы уравниваются, если

$$l = a \sqrt{\sqrt{5} - 2}.$$

1.120. Вне шара на внешнее однородное поле накладывается поле, создаваемое незаряженным поляризованным проводящим шаром. Ввиду симметрии шара потенциал последнего поля может зависеть лишь от расстояния от центра шара и направления внешнего поля. Единственным решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим этим условиям и убывающим на бесконечности, является поле диполя. Поэтому ищем потенциал в виде

$$\varphi_1 = C \quad (r < a),$$

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos \Theta + \frac{p}{r^2} \cos \Theta \quad (r > a).$$

Из граничных условий (1.24) при $r = a$ находим, что $C = 0$ и что дипольный момент шара $p = a^3 E_0$. Отсюда поляризуемость шара равна a^3 .

1.121. Плотность индуцированных зарядов

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \Theta.$$

1.122. Искомая сила, очевидно, направлена параллельно напряженности однородного поля. Интегрируя по полусфере проекцию поверхностной плотности силы (1.37), находим

$$F = \int f \cos \Theta dS = 4\pi^2 a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma^2 \cos \Theta \sin \Theta d\Theta.$$

Подставив найденное в предыдущей задаче значение σ , получим, что

$$F = \frac{9}{16} a^2 E_0^2.$$

1.123. На основании соображений, аналогичных тем, которые изложены в решении задачи 1.120, ищем потенциал искомого поля в виде

$$\varphi_1 = -Cr \cos \Theta \quad (r < a),$$

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos \Theta + \frac{\rho}{r^2} \cos \Theta \quad (r > a).$$

Из граничных условий (1.24) при $r=a$ находим напряженность поля C внутри шара и его дипольный момент ρ :

$$C = \frac{3}{\varepsilon + 2} E_0; \quad \rho = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 E_0.$$

Отсюда поляризуемость шара равна $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3$.

1.124. Объемная плотность связанных зарядов

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P} = 0 \quad (r \neq a).$$

Поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi} (E_n^{(2)} - E_n^{(1)})_{r=a} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 \cos \Theta.$$

1.125. Принимая во внимание результаты, полученные в задачах 1.120 и 1.123, потенциал искомого поля ищем в виде

$$\varphi_1 = C_1 \quad (r < a),$$

$$\varphi_2 = -C_2 r \cos \Theta + \frac{\rho_1 \cos \Theta}{r^2} \quad (a < r < b),$$

$$\varphi_3 = -E_0 r \cos \Theta + \frac{\rho_2 \cos \Theta}{r^2} \quad (r > b).$$

Остается показать, что постоянные C_1 , C_2 , ρ_1 и ρ_2 можно выбрать так, чтобы удовлетворить граничным условиям (1.24) на сферах $r=a$ и $r=b$.

Подстановка приведенных выше выражений для φ_1 , φ_2 и φ_3 даёт

$$C_1 = 0; \quad C_2 = \frac{p_1}{a^3}; \quad p_1 = \frac{3a^3b^3}{(\varepsilon + 2)b^3 + 2(\varepsilon - 1)a^3} E_0,$$

$$p_2 = b^3 \left\{ 1 - \frac{3(b^3 - a^3)}{(\varepsilon + 2)b^3 + 2(\varepsilon - 1)a^3} \right\} E_0.$$

1.126. На основании соображений, аналогичных тем, которые изложены в решении задачи 1.120, ищем поле в виде

$$\varphi_1 = -C\chi = -CR \cos \Theta \quad (R < a),$$

$$\varphi_2 = -E_0 R \cos \Theta + \frac{2p}{R} \cos \Theta \quad (R > a).$$

Ось x направлена вдоль поля; начало отсчета на оси цилиндра. Из граничных условий (1.24) при $R=a$ однозначно определяются напряженность поля C внутри цилиндра и дипольный момент единицы длины

$$C = \frac{2}{\varepsilon + 1} E_0; \quad p = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^2 E_0.$$

1.127. Объемная плотность связанных зарядов

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P} = 0 \quad (R \neq a.)$$

Поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial R} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \right)_{R=a} = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} E_0 \cos \Theta.$$

1.128. На основании соображений, аналогичных изложенным в задаче 1.120, потенциал поля ищем в виде

$$\varphi_1 = C \quad (R < a),$$

$$\varphi_2 = -E_0 R \cos \Theta + \frac{2p}{R} \cos \Theta \quad (R > a).$$

Из граничных условий на поверхности цилиндра ($R=a$) находим

$$C = 0; \quad p = \frac{1}{2} a^2 E_0.$$

1.129. Поверхностная плотность зарядов, индуциро-

ванных на поверхности цилиндра, равна

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \right)_{R=a} = \frac{E_0}{2\pi} \cos \Theta.$$

1.130. Из граничных условий

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)} \quad \text{и} \quad E_t^{(1)} = E_t^{(2)}$$

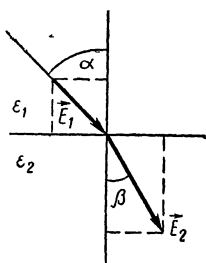


Рис. 31

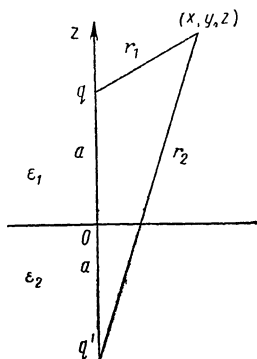


Рис. 32

находим (рис. 31)

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

и

$$E_2^2 = E_1^2 \left(\sin^2 \alpha + \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} \cos^2 \alpha \right).$$

1.131. Чтобы удовлетворить дифференциальному уравнению Пуассона—Лапласа, потенциал искомого поля ищем в виде (рис. 32)

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{q'}{\varepsilon_1 r_2} \quad (z > 0),$$

$$\varphi_2 = \frac{q''}{\varepsilon_2 r_1} \quad (z < 0),$$

где

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}$$

есть расстояния от рассматриваемой точки поля до реального и фиктивного зарядов q и q' . Подстановка в

граничные условия (1.24) (при $z=0$)

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{и} \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}$$

дает

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}; \quad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q.$$

1.132. Поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{qa}{\varepsilon_1 r^3}.$$

Легко убедиться в том, что весь поверхностный заряд равен $\frac{q'}{\varepsilon_1}$.

1.133. Сила взаимного притяжения между данным зарядом и диэлектриком (см. задачу 1.131)

$$F = \frac{q |q'|}{(2a)^2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{q^2}{4a^2}.$$

1.134. Сила, действующая на диэлектрик, имеет направление положительной оси z (см. рис. 32), а потому на основании (1.39) и (1.40)

$$F = F_z = \int T_{zz} dS = \frac{1}{4\pi} \int \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) dS,$$

где интегрирование распространяется на плоскость $z=0$.

Потенциал поля в вакууме (см. задачу 1.131)

$$\varphi_1 = \frac{q}{r_1} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{q}{r_2},$$

а потому на поверхности диэлектрика ($z=0$, $r_1=r_2=r$)

$$E_x = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{2}{\varepsilon + 1} \frac{q}{r^3} x,$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{2}{\varepsilon + 1} \frac{q}{r^3} y,$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} \frac{q}{r^3} a.$$

Подстановка в исходную формулу для силы дает

$$F = \frac{q^2}{(\varepsilon + 1)^2} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2 a^2 - R^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} R dR = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{q^2}{4a^2}$$

$$(R^2 = x^2 + y^2; \quad r^2 = R^2 + a^2),$$

что совпадает с результатом, полученным в предыдущей задаче.

1.135. Чтобы удовлетворить уравнению Пуассона—Лапласа, потенциал искомого поля ищем в виде

$$\varphi_1 = -2\chi \ln R_1 - 2C_1 \chi \ln R_2 - 2C_2 \chi \ln R \quad (R > a),$$

$$\varphi_2 = -2C_3 \chi \ln R_1 + C_4 \quad (R < a),$$

где

$$R_1 = \sqrt{R^2 + l^2 - 2Rl \cos \Theta};$$

$$R_2 = \sqrt{R^2 + l'^2 - 2Rl' \cos \Theta}; \quad l' = \frac{a^2}{l}$$

есть расстояния рассматриваемой точки поля от реальной и фиктивной нитей. Остается показать, что соответствующим выбором постоянных C_1 , C_2 , C_3 и C_4 можно удовлетворить граничным условиям (1.24) на поверхности $R = a$.

Подстановка значений φ_1 и φ_2 даёт

$$C_1 = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}; \quad C_3 = \frac{2}{\varepsilon + 1};$$

$$C_4 = -2\chi \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \ln l.$$

Нить притягивается к цилиндру с силой

$$F_1 = 2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\chi^2}{l - l'}$$

и отталкивается от него с силой

$$F_2 = 2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\chi^2}{l}.$$

Результирующая сила притяжения

$$F = F_1 - F_2 = 2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{a^2}{l(l^2 - a^2)} \chi^2.$$

1.136. Потенциал искомого поля внутри и вне цилиндра ищем соответственно в виде

$$\varphi_1 = \frac{1}{\varepsilon} (-2\chi \ln R_1 - 2C_1\chi \ln R_2) \quad (R < a),$$

$$\varphi_2 = -2C_2\chi \ln R_1 - 2C_3\chi \ln R + C_4 \quad (R > a),$$

где

$$R_1 = \sqrt{R^2 + l^2 - 2Rl \cos \Theta};$$

$$R_2 = \sqrt{R^2 + l'^2 - 2Rl' \cos \Theta}; \quad l' = \frac{a^2}{l}$$

есть расстояния рассматриваемой точки поля от реальной и фиктивной нитей.

Остается показать, что соответствующим выбором постоянных C_1 , C_2 , C_3 и C_4 можно удовлетворить граничным условиям (1.24) на поверхности цилиндра $R = a$.

Подстановка приведенных выражений для φ_1 и φ_2 дает

$$C_1 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}; \quad C_2 = \frac{2}{\varepsilon + 1}; \quad C_3 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}; \quad C_4 = 2\chi \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1};$$

$$C_4 = 2\chi \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \left(\ln a - \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{a}{l} \right).$$

ЧАСТЬ II

СТАЦИОНАРНЫЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ И МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

§ 1. Закон постоянного тока

2.1. Напряженность поля между обкладками

$$E = E_r = \frac{a}{r^2}.$$

Постоянную a можно определить из того, что

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = a \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Сила тока

$$I = \int j dS = \sigma E 4\pi r^2 = 4\pi\sigma \frac{U}{r_2 - r_1} r_1 r_2.$$

Сопротивление

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Мощность тепловых потерь

$$Q = IU = 4\pi\sigma \frac{U^2}{r_2 - r_1} r_1 r_2.$$

2.2. Сила тока, приходящаяся на единицу длины конденсатора (см. решение задачи 2.1),

$$I = 2\pi R \cdot j = 2\pi R \sigma E = \frac{2\pi\sigma U}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Мощность тепловых потерь

$$Q = IU = \frac{2\pi\sigma U^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

2.3. Сила тока, приходящегося на единицу длины конденсатора,

$$I = 2\pi R \cdot j = \frac{2\pi U}{\frac{1}{\sigma_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\sigma_2} \ln \frac{R_2}{R_0}}.$$

Мощность тепловых потерь

$$Q = IU = \frac{2\pi U^2}{\frac{1}{\sigma_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\sigma_2} \ln \frac{R_2}{R_0}}.$$

2.4. Если через α_1 и α_2 обозначить углы, которые составляет линия тока, т. е. вектор плотности тока с нормалью к поверхности раздела обеих сред (по обе стороны от нее), то из закона Ома (2.2) и граничных условий (2.4а) и (XXа) вытекает

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

2.5. Из закона Ома (2.2) и уравнения непрерывности (2.4) имеем, что

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{grad} \sigma = 0.$$

Объемная плотность зарядов

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} (\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{grad} \varepsilon).$$

Если подставить значение $\operatorname{div} \mathbf{E}$ из предыдущего равенства, то мы получим

$$\rho = \frac{\mathbf{j}}{4\pi\sigma^2} (\sigma \operatorname{grad} \varepsilon - \varepsilon \operatorname{grad} \sigma).$$

2.6. На основании (2.4в) потенциал φ электрического поля в грунте является решением уравнения Лапласа, которое однозначно определяется граничными условиями (φ_1 и φ_2) на электродах.

Как было показано (см. решение задачи 1.70), разность потенциалов на электродах

$$\varphi_1 - \varphi_2 = A \operatorname{arch} \frac{l^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}.$$

Константу A проще всего найти следующим образом. Для случая электростатического поля, рассмотренного в задаче 1.70,

$$A = 2\chi,$$

при этом

$$\int E_n dS = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 4\pi\chi = 2\pi A.$$

Для рассматриваемого здесь электрического поля в однородной проводящей среде ток, отнесенный к единице длины цилиндров,

$$\int j_n dS = - \sigma \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = I.$$

Отсюда

$$A = \frac{I}{2\pi\sigma}$$

и сопротивление на единицу длины электродов

$$R = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma} \operatorname{arsh} \frac{l^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}.$$

2.7. На основании (2.4) и (2.5) количество выделяющегося в единицу времени тепла

$$Q = \int \mathbf{jE} dV = - \int \mathbf{j}\nabla\varphi dV = - \int \operatorname{div}(\varphi\mathbf{j}) dV,$$

где интегрирование производится по всему объему среды. Отсюда по формуле Остроградского

$$Q = - \sum_{k=1}^n \oint_{S_k} \varphi j_n dS = \sum_{k=1}^n \varphi_k I_k,$$

где n — внутренняя по отношению к электродам нормаль, а потому

$$I_k = - \oint_{S_k} j_n dS,$$

где интеграл берется по поверхности k -го электрода.

2.8. В цилиндрических координатах

$$\mathbf{j} = j_\theta = \sigma E_\theta; \quad E_\theta = \frac{U_0}{2\pi R}.$$

Отсюда сила тока, приходящаяся на единицу длины цилиндра,

$$I = \int j_n dS = \int_a^b j_\theta dR = \sigma \frac{U_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

2.9. Если за ось z принять ось кабеля, то в цилиндрических координатах имеем:

1) во внутреннем проводе ($R < a$)

$$E_R = E_\theta = 0; \quad E_z^{(1)} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}; \quad \varphi_1 = - \frac{I}{\pi a^2 \sigma} z,$$

2) во внешнем проводе ($b < R < c$)

$$E_R = E_\theta = 0; \quad E_z^{(2)} = - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = - \frac{I}{\pi (c^2 - b^2) \sigma};$$

$$\varphi_2 = \frac{I}{\pi (c^2 - b^2) \sigma} z + U,$$

где U — напряжение между проводами при $z=0$;

3) между проводами ($a < R < b$) потенциал электрического поля должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \varphi_3}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} = 0$$

и условию непрерывности: $\varphi_3 = \varphi_1$ при $R=a$ и $\varphi_3 = \varphi_2$ при $R=b$.

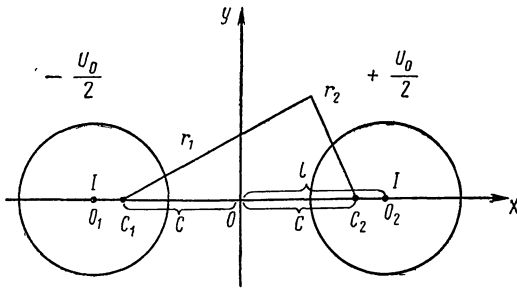


Рис. 33

На основании того, что искомое поле обладает аксиальной симметрией и граничные значения φ_1 и φ_2 зависят от z линейно, ищем решение уравнения Лапласа в виде

$$\varphi_3(R, z) = (A_1 z + B_1) \ln R + (A_2 z + B_2).$$

Из граничных условий при $R=a$ и $R=b$ нетрудно определить постоянные A_1, B_1, A_2 и B_2 . Отсюда

$$\varphi_3(R, z) = \frac{(E_1 + E_2)z + U}{\ln \frac{b}{a}} \ln R - \frac{(E_2 z + U) \ln a + E_1 z \ln b}{\ln \frac{b}{a}},$$

где E_1 и E_2 — напряженность поля соответственно во внутреннем и наружном проводах кабеля.

2.10. Направим ось z параллельно проводам (рис. 33), тогда внутри проводов

$$E_x = E_y = 0; \quad E_z^{(1)} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma};$$

$$\varphi_1 = -\frac{U_0}{2} - \frac{I}{\pi a^2 \sigma} z,$$

$$E_z^{(2)} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = -\frac{I}{\pi a^2 \sigma}; \quad \varphi_2 = \frac{U_0}{2} + \frac{I}{\pi a^2 \sigma} z.$$

Вне проводов поле определяется уравнением Лапласа и условием непрерывности потенциала на границе. Так как потенциал на поверхности проводов (φ_1 и φ_2) зависит от z линейно, решение ищем в виде

$$\varphi(x, y, z) = u(x, y) + z \cdot v(x, y),$$

где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — решения двумерного уравнения Лапласа, которые на поверхности цилиндрических проводов принимают симметричные постоянные значения

$$-U_1 = U_2 = \frac{U_0}{2}; \quad -v_1 = v_2 = \frac{I}{\pi a^2 \sigma},$$

а потому (см. решение задачи 1.70)

$$u = A \ln \frac{r_1}{r_2}; \quad v = B \ln \frac{r_1}{r_2},$$

где постоянные A и B определяются из уравнений (смысл обозначений r_1 , r_2 и c понятен из чертежа)

$$c = a \operatorname{sh} \frac{U_0}{2A}; \quad U_0 = A \operatorname{arch} \frac{2l^2 - a^2}{a^2}; \quad \frac{2I}{\pi a^2 \sigma} = B \frac{U_0}{A}.$$

§ 2. Закон Био и Савара

2.11. Напряженность поля

$$\mathbf{H} = \frac{I}{c} \int_{-L}^{+L} \frac{[dl \times \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Если направить ось z вдоль тока, начало отсчета поместить в середине проводника и обозначить через R расстояние рассматриваемой точки поля от проводника, то получим

$$H = H_\theta = \frac{I}{cR} \left\{ \frac{L-z}{\sqrt{R^2 + (L-z)^2}} + \frac{L+z}{\sqrt{R^2 + (L+z)^2}} \right\}.$$

В предельном случае $L \rightarrow \infty$

$$H = \frac{2I}{cR}.$$

2.12. В цилиндрических координатах

$$H = H_{\theta}; \quad H_R = H_z = 0,$$

а потому дифференциальные уравнения (1б) дают

$$z = \text{const}; \quad R = \text{const},$$

т. е. магнитные силовые линии имеют форму окружностей, центры которых лежат на токнесущем проводнике.

2.13. Магнитный поток

$$\Phi = \frac{2I}{c} a \ln 3 = \frac{2I}{c} a \int_a^{a+b} \frac{dR}{R} = \frac{2I}{c} a \ln \frac{a+b}{b}.$$

Отсюда

$$b = \frac{a}{2}.$$

2.14. Напряженность поля, создаваемого током вдоль каждой из сторон длиной $2b$ (см. решение задачи 2.11 и рис. 34),

$$H_1 = \frac{I}{c \sqrt{a^2 + z^2}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}}$$

и составляет с указанной осью z угол α , для которого

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Аналогично напряженность поля, создаваемого током вдоль каждой из сторон длиной $2a$,

$$H_2 = \frac{I}{c \sqrt{b^2 + z^2}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}}$$

и составляет с осью угол β , для которого

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}}.$$

Результирующая напряженность поля направлена вдоль указанной оси z и по абсолютной величине

$$H = 2(H_1 \cos \alpha + H_2 \cos \beta) = \\ = \frac{4abl}{c \sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} \left(\frac{1}{a^2 + z^2} + \frac{1}{b^2 + z^2} \right).$$

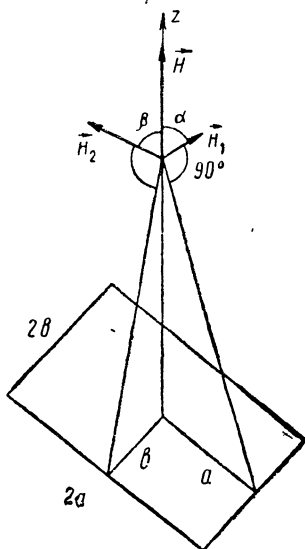


Рис. 34

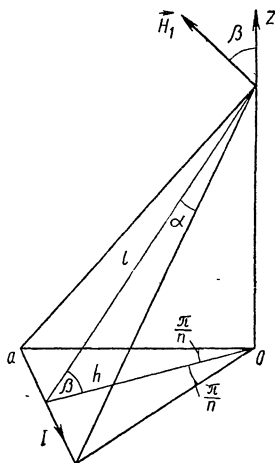


Рис. 35

2.15. Напряженность магнитного поля, создаваемого одной стороной многоугольного контура тока (см. задачу 2.11 и рис. 35),

$$H_1 = \frac{2I}{cl} \sin \alpha; \quad \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}}$$

и составляет угол β с осью z , которая проходит через центр многоугольника перпендикулярно его плоскости в сторону, составляющую правовинтовую систему с направлением тока:

$$\cos \beta = \frac{h}{l}; \quad h = a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}; \quad l = \sqrt{z^2 + h^2}.$$

Результирующая напряженность

$$H = H_z = nH_1 \cos \beta = \frac{n2I}{cl} \sin \alpha \cos \beta.$$

Окончательно получаем

$$H = n \frac{2I}{c} \frac{a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{\left(a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n} + z^2\right) \sqrt{a^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{n} + z^2}}.$$

2.16.

$$H = H_z = \frac{I}{c} \frac{-2\pi a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Ось z совпадает с осью кругового контура.

2.17.

$$H = \frac{2Ia}{ca}.$$

2.18.

$$H = \frac{I}{ca} (2 + \pi).$$

2.19. Элементарное кольцо шириною dr создает на оси z магнитное поле, напряженность которого (см. задачу 2.16)

$$dH = dH_z = \frac{I}{c(b-a)} \frac{2\pi r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Напряженность результирующего поля

$$H = H_z = \frac{2\pi I}{c(b-a)} \left\{ \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{a + \sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right\}$$

2.20. Элемент длины $d\zeta$ катушки создает поле, напряженность которого на оси z (см. задачу 2.16)

$$dH = dH_z = \frac{IN}{2lc} \frac{2\pi a^2}{[a^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}} d\zeta.$$

Результирующая напряженность поля

$$H = H_z = \frac{\pi IN}{cl} \left(\frac{z+l}{\sqrt{a^2 + (z+l)^2}} - \frac{z-l}{\sqrt{a^2 + (z-l)^2}} \right).$$

Начало отсчета находится на середине оси катушки.

2.21. Напряженность магнитного поля на оси катуш-

ки связана с плотностью витков обмотки соотношением

$$H(z) = \frac{I}{c} 2\pi a^2 \int_{-l}^{+l} \frac{n(\zeta) d\zeta}{[a^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}}.$$

Положим

$$f(\zeta) = \frac{I}{c} 2\pi a^2 n(\zeta); \quad \varphi(z - \zeta) = [a^2 + (z - \zeta)^2]^{-3/2},$$

тогда имеем

$$H(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) \varphi(z - \zeta) d\zeta.$$

Отсюда Фурье-образ функции $H(z)$

$$\begin{aligned} \bar{H}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuz} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) \varphi(z - \zeta) d\zeta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuz} f(\zeta) \varphi(z - \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Положив $\eta = z - \zeta$; $d\eta = dz$, получим

$$\begin{aligned} \bar{H}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta) e^{-i\eta u} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) e^{-iu\zeta} d\zeta = \\ &= \sqrt{2\pi} \bar{\varphi}(u) \cdot \bar{f}(u), \end{aligned}$$

где $\bar{\varphi}(u)$ и $\bar{f}(u)$ — Фурье-образы функций φ и f .
Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{I}{c} 2\pi a^2 n(\zeta) = f(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(u) e^{iu\zeta} du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{H}(u)}{\bar{\varphi}(u)} e^{iu\zeta} du. \end{aligned}$$

2.22. За ось z выберем ось катушки. Начало поме-

стим посередине катушки. Рассмотрим продольное сечение катушки, плоскость которого примем за координатную плоскость yz . Каждый элемент поверхности $dS = dydz$ сечения создает на оси поле, напряженность которого (см. задачу 2.16)

$$dH = \frac{NI}{2l(l-a)c} \frac{2\pi\eta^2}{[\eta^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} d\eta d\zeta.$$

Результирующая напряженность поля

$$H = \frac{\pi NI}{l(l-a)c} \int_{-l}^{+l} \int_a^l \frac{\eta^2 d\eta d\zeta}{[\eta^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}}.$$

После интегрирования получим

$$H = \frac{\pi NI}{l(l-a)c} \left\{ (z+l) \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + (z+l)^2}}{a + \sqrt{a^2 + (z+l)^2}} - (z-l) \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + (z-l)^2}}{a + \sqrt{a^2 + (z-l)^2}} \right\}.$$

§ 3. Вектор-потенциал. Дифференциальное уравнение Пуассона—Лапласа

2.23. Направим ось z вдоль тока и поместим начало посередине прямолинейного проводника, тогда на основании (2.14а)

$$A_x = A_y = 0; \quad A_z = \frac{I}{c} \int_{-L}^{+L} \frac{d\zeta}{r}.$$

Если расстояние от рассматриваемой точки поля до прямолинейного тока обозначить через R , то, произведя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} A_z &= -\frac{I}{c} \int_{z+L}^{z-L} \frac{du}{\sqrt{R^2 + u^2}} = \frac{I}{c} \ln \frac{z+L + \sqrt{R^2 + (z+L)^2}}{z-L + \sqrt{R^2 + (z-L)^2}} = \\ &= \frac{I}{c} \left(\operatorname{arsh} \frac{z+L}{R} - \operatorname{arsh} \frac{z-L}{R} \right). \end{aligned}$$

В предельном случае $L \rightarrow \infty$, положив $z=0$, получаем

(см. задачу 1.23)

$$A_z = \text{const} - \frac{2I}{c} \ln R.$$

Отсюда в цилиндрических координатах на основании (2.12) и (IV б)

$$\begin{aligned} H_R = H_z = 0; \quad H = H_\Theta = - \frac{\partial A_z}{\partial R} = \\ = \frac{I}{cR} \left\{ \frac{L+z}{\sqrt{R^2 + (L+z)^2}} + \frac{L-z}{\sqrt{R^2 + (L-z)^2}} \right\}, \end{aligned}$$

что совпадает с результатом, полученным в задаче 2.11.

2.24. Направим ось z вдоль поля и обозначим напряженность однородного поля через H . На основании (2.10), (2.12) и (IV)

а) в декартовых координатах

$$A_x = -\mu H y; \quad A_y = A_z = 0,$$

или

$$A_x = -\frac{1}{2} \mu H y; \quad A_y = \frac{1}{2} \mu H x; \quad A_z = 0,$$

или

$$A_y = \mu H x; \quad A_x = A_z = 0;$$

б) в цилиндрических координатах

$$A_\Theta = \frac{1}{2} \mu H R; \quad A_z = A_R = 0;$$

в) в сферических координатах

$$A_\Psi = \frac{1}{2} \mu H r \sin \Theta; \quad A_r = A_\Theta = 0.$$

Ввиду градиентной инвариантности вектор-потенциал не однозначен. Здесь приведены наиболее удобные представления вектор-потенциала однородного поля в различных системах координат.

2.25. Направим ось z вдоль оси кругового контура, а начало отсчета поместим в его центре. Ось x , от которой мы будем отсчитывать полярный угол Θ , проведем через рассматриваемую точку поля.

На основании (2.14а) в цилиндрических координатах

$$A_z = 0; A_R = -\frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin \varphi d\varphi}{r} = 0,$$

$$A_\Theta = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \varphi d\varphi}{r} = \frac{2I}{c} a \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 + z^2 - 2aR \cos \varphi}}.$$

Этот интеграл можно выразить через эллиптические интегралы, которые протабулированы; а именно, положив $\varphi = \pi + 2\alpha$ и

$$k^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2 + z^2} \quad (k < 1),$$

получим

$$A_\Theta = \frac{4I}{ck} \sqrt{\frac{a}{R}} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K - E \right\},$$

где

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad \text{и} \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

есть полные эллиптические интегралы I и II рода.

Пренебрегая высшими степенями $\frac{a}{\sqrt{R^2 + z^2}} \ll 1$ в разложении эллиптических интегралов, находим

$$A_\Theta = \frac{I}{c} \frac{\pi a^2 R}{(R^2 + z^2)^{3/2}}; A_R = A_z = 0,$$

что совпадает с вектор-потенциалом магнитного диполя, момент которого $m = \frac{I}{c} \pi a^2$ направлен по оси кругового тока (сравните с уравн. 2.19а).

2.26. На основании (2.12) в цилиндрических координатах

$$H_z = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RA_\Theta); H_R = -\frac{\partial A_\Theta}{\partial z}; H_\Theta = 0.$$

Если подставить значение вектора-потенциала A_{Θ} , полученное в предыдущей задаче, то можно получить явное выражение для напряженности магнитного поля в любой точке его. При этом следует учесть, что

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}; \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E}{k} - \frac{K}{k},$$

а также соотношение (см. решение задачи 2.25)

$$k^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2 + z^2}.$$

Таким путем можно получить

$$H_z = \frac{2I}{c} \frac{1}{\sqrt{(R+a)^2 + z^2}} \left\{ K + \frac{a^2 - R^2 - z^2}{(R-a)^2 + z^2} E \right\},$$

$$H_R = \frac{2I}{c} \frac{z}{R \sqrt{(R+a)^2 + z^2}} \left\{ -K + \frac{R^2 + z^2 + a^2}{(R-a)^2 + z^2} E \right\},$$

$$H_{\Theta} = 0.$$

На оси кругового витка $K = E = \frac{\pi}{2}$ и мы получим

$$H_z = \frac{I}{c} \frac{2\pi a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}; \quad H_R = H_{\Theta} = 0,$$

что совпадает с результатом задачи 2.16.

2.27. Если начало координат поместить в центре прямоугольного контура и координатные оси x и y направить параллельно сторонам контура, то на основании полученного в задаче 2.23 результата имеем

$$A_x = \mu \frac{I}{c} \left\{ \ln \frac{x+a+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}} - \right.$$

$$\left. - \ln \frac{x+a+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}} \right\} =$$

$$= \mu \frac{I}{c} \left\{ \operatorname{arsh} \frac{a+x}{\sqrt{(y+b)^2+z^2}} + \operatorname{arsh} \frac{a-x}{\sqrt{(y+b)^2+z^2}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arsh} \frac{a+x}{\sqrt{(y-b)^2+z^2}} - \operatorname{arsh} \frac{a-x}{\sqrt{(y-b)^2+z^2}} \right\},$$

$$\begin{aligned}
A_y &= \mu \frac{I}{c} \left\{ \ln \frac{y+b+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}{y-b+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}} - \right. \\
&\quad \left. - \ln \frac{y+b+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}{y-b+\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}} \right\} = \\
&= \mu \frac{I}{c} \left\{ \operatorname{arsh} \frac{b+y}{\sqrt{(x-a)^2+z^2}} + \operatorname{arsh} \frac{b-y}{\sqrt{(x-a)^2+z^2}} - \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{arsh} \frac{b+y}{\sqrt{(x+a)^2+z^2}} - \operatorname{arsh} \frac{b-y}{\sqrt{(x+a)^2+z^2}} \right\}; \quad A_z = 0.
\end{aligned}$$

На больших расстояниях ($a, b \ll r$), разлагая $\ln \{x \pm a + \sqrt{(x \pm a)^2 + (y \pm b)^2 + z^2}\}$ в ряд по степеням $\frac{a}{r} \ll 1$ и $\frac{b}{r} \ll 1$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, с учетом членов, содержащих вторую степень этих малых величин, находим

$$A_x = -m \frac{y}{r^3}; \quad A_y = m \frac{x}{r^3}; \quad A_z = 0,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathbf{m} \times \mathbf{r}]}{r^3},$$

где

$$m = \mu \frac{I}{c} S = \mu \frac{I}{c} 4ab$$

есть магнитный момент контура, имеющий направление оси z .

2.28. Если ось z направить вдоль оси цилиндрического провода в сторону тока, то из (2.14) следует, что $A_x = A_y = 0$; A_z определяется уравнением Пуассона (2.13). Учитывая аксиальную симметрию поля, записываем уравнение Пуассона в цилиндрических координатах (см. V б)

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dA_z}{dR} \right) = \begin{cases} -\frac{4\pi}{c} \mu \frac{I}{\pi a^2} & (R < a), \\ 0 & (R > a). \end{cases}$$

Интегрируя, получаем отсюда, что

1) внутри проводника ($R < a$)

$$A_z = -\mu \frac{I}{c} \frac{R^2}{a^2} + C_1 \ln R + C_2;$$

2) вне проводника ($R > a$)

$$A_z = C_3 \ln R + C_4.$$

Не уменьшая общности, можно положить $C_4 = 0$; из конечности поля следует, что $C_1 = 0$. Постоянные C_2 и C_3 определяются из граничного условия (XXIa) и условия непрерывности вектор-потенциала \mathbf{A} . Окончательно получаем

$$A_z = \begin{cases} -\mu \frac{I}{c} \frac{R^2}{a^2} + \mu \frac{I}{c} - \frac{2I}{c} \ln a & (R < a) \\ -\frac{2I}{c} \ln R & (R > a). \end{cases}$$

На основании (2.12) напряженность поля в цилиндрических координатах определяется уравнениями (см. IVб)

$$H = H_\Theta = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial R} = \begin{cases} \frac{2I}{ca^2} R & (R < a), \\ \frac{2I}{cR} & (R > a). \end{cases}$$

2.29. Направим ось z вдоль оси проводника в сторону тока. Аналогично предыдущему находим (см. решение задачи 2.28):

1) во внутренней полости ($R < b$)

$$A_z = C_1 \ln R + C_2;$$

2) внутри проводника ($b < R < a$)

$$A_z = -\mu \frac{I}{c} \frac{R^2}{a^2 - b^2} + C_3 \ln R + C_4;$$

3) вне проводника ($R > a$)

$$A_z = C_5 \ln R + C_6.$$

Определив постоянные интегрирования указанным в предыдущей задаче методом, получаем

$$\left. \begin{aligned} A_z^{(1)} &= 0; \quad H^{(1)} = 0 \quad (R < b); \\ A_z^{(2)} &= -\mu \frac{I}{c} \frac{R^2 - b^2}{a^2 - b^2} + 2\mu \frac{I}{c} \frac{b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{R}{b} \\ H^{(2)} = H_\Theta^{(2)} &= \frac{2I}{c} \frac{R^2 - b^2}{a^2 - b^2} \frac{1}{R} \end{aligned} \right\} (b < R < a),$$

$$\left. \begin{aligned} A_z^{(3)} &= -\frac{2I}{c} \ln \frac{R}{a} + \mu \frac{2I}{c} \frac{b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{a}{b} - \mu \frac{I}{c} \\ H^{(3)} &= H_{\Theta}^{(3)} = \frac{2I}{cR} \end{aligned} \right\} (R > a).$$

2.30. Выберем плоскость, в которой лежат токи за координатную плоскость xz и проведем ось z параллельно токам на равных от них расстояниях. Тогда (см. решение задачи 2.23)

$$A_x = A_y = 0; \quad A_z = -\frac{2I}{c} \ln(R_1 R_2),$$

где R_1 и R_2 — расстояния рассматриваемой точки поля от токов.

Воспользовавшись методом комплексного потенциала (см. (1.31) и решения задач 1.45 и 1.46) можно положить

$$\begin{aligned} A_z &= -\frac{2I}{c} \operatorname{Re} \{ \ln [(x + iy) - (x_1 + iy_1)] \times \\ &\quad \times [\ln (x + iy) - (x_2 + iy_2)] \}, \end{aligned}$$

где $x_1 = -a$; $x_2 = a$; $y_1 = y_2 = 0$ — координаты точек пересечения токов с плоскостью $z = 0$.

Положив

$$\begin{aligned} \ln [(x + iy) - (x_1 + iy_1)] [(x + iy) - (x_2 + iy_2)] &= \\ &= u(x, y) + iv(x, y), \end{aligned}$$

где

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left\{ (x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2 \right\};$$

$$v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2},$$

получаем

$$A_z = -\frac{2I}{c} u(x, y); \quad A_x = A_y = 0; \quad \mathbf{H} = \frac{2I}{c} \operatorname{grad} v(x, y).$$

Уравнения силовых линий $z = \text{const}$; $u(x, y) = \text{const}$.

2.31. Аналогично предыдущему

$$A_z = -\frac{2I}{c} u(x, y); \quad A_x = A_y = 0; \quad \mathbf{H} = \frac{2I}{c} \operatorname{grad} v(x, y),$$

где

$$u + iv = \ln \frac{x - a + iy}{x + a + iy};$$
$$u = \frac{1}{2} \ln \frac{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2}{[(x + a)^2 + y^2]^2}; \quad v = \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Уравнения силовых линий: $z = \text{const}$; $u(x, y) = \text{const}$.

2.32. Выберем поверхность магнетика за координатную плоскость $x=0$. Ось z направим параллельно току, а ось x — через проводник с током.

Вектор-потенциал искомого поля определяется уравнением Пуассона—Лапласа:

$$\Delta A_z = \begin{cases} -\frac{4\pi}{c} j & (x > 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$$
$$A_x = A_y = 0.$$

Ищем решение в виде

$$A_z^{(1)} = -\frac{2I}{c} \ln R_1 - k_1 \frac{2I}{c} \ln R_2 \quad (x > 0),$$

$$A_z^{(2)} = -\frac{2I}{c} \ln R_1 \quad (x < 0),$$

где

$$R_1 = \sqrt{(x - a)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad R_2 = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$$

есть расстояния до рассматриваемой точки поля от данного тока и его «изображения».

Постоянные k_1 и k_2 однозначно определяются граничными условиями (XVIIIa) и (XXIa) на поверхности магнетика ($x=0$), а именно

$$k_1 = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}; \quad k_2 = \frac{2\mu}{\mu + 1}.$$

2.33. Направим ось z вдоль оси цилиндрического магнетика в сторону тока, а ось x проведем через проводник с током.

Вектор-потенциал искомого поля ищем в цилиндрических координатах в виде

$$A_z^{(1)} = -\frac{2I}{c} \ln R_1 - k_1 \frac{2I}{c} \ln R_2 - k_3 \frac{2I}{c} \ln R \quad (R > a),$$

$$A_z^{(2)} = -\mu k_2 \frac{2I}{c} \ln R_1 \quad (R < a),$$

$$A_x = A_y = 0,$$

где

$$R_1 = \sqrt{R^2 + l^2 - 2Rl \cos \Theta} \quad \text{и} \quad R_2 = \sqrt{R^2 + l'^2 - 2Rl' \cos \Theta}$$

есть расстояния от рассматриваемой точки поля до данного тока и его «изображения», которое находится на расстоянии $l' = \frac{a^2}{l}$ от оси цилиндра.

Из граничных условий (XVIIIa) и (XXIa) находим

$$k_1 = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}; \quad k_2 = \frac{2}{\mu + 1}; \quad k_3 = -\frac{\mu - 1}{\mu + 1}.$$

2.34. Аналогично предыдущему, ищем решение в виде

$$A_z^{(1)} = -\frac{2I}{c} \ln R_1 - k_1 \frac{2I}{c} \ln R_2 \quad (R < a),$$

$$A_z^{(2)} = -\mu \frac{2I}{c} k_2 \ln R_1 - \mu \frac{2I}{c} k_3 \ln R \quad (R > a).$$

Из граничных условий (XVIIIa) и (XXIa)

$$k_1 = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}; \quad k_2 = \frac{2}{\mu + 1}; \quad k_3 = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}.$$

2.35. Плоскость раздела обеих сред выберем за координатную плоскость $z=0$ и направим ось z в сторону первой среды.

Вектор-потенциал искомого поля ищем в виде

$$A_1 = \mu_1 \left(\frac{I}{c} \oint_l \frac{dl}{r} + k_1 \frac{I}{c} \oint_{l'} \frac{dl'}{r'} \right) \quad (z > 0),$$

$$A_2 = \mu_2 \frac{I}{c} k_2 \oint_l \frac{dl}{r} \quad (z < 0),$$

где l' — зеркальное отражение контура l от плоскости $z=0$; r' и r — расстояния рассматриваемой точки поля от элемента длины dl' и соответственно dl .

Из граничных условий (XVIIIa) и (XXIa)

$$k_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}; \quad k_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1}.$$

§ 4. Циркуляция магнитного вектора. Магнетик в однородном поле

2.36. Для прямоугольного контура с током (см. задачу 2.14)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_z dz = \frac{4abl}{c} \cdot 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} \times \\ \times \left(\frac{1}{a^2 + z^2} + \frac{1}{b^2 + z^2} \right) dz.$$

Этот интеграл легко вычисляется путем подстановки

$$t = \frac{z}{\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}}.$$

Для кругового тока (см. задачу 2.16)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_z dz = 4\pi \frac{I}{c} a^2 \int_0^{\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = 4\pi \frac{I}{c}.$$

2.37. Поле обладает аксиальной симметрией: $H = H_{\theta}(R)$. Применяв теорему (2.11) к круговой силовой линии радиуса R , получим

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi R = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} I \frac{R^2}{a^2} & (R < a), \\ \frac{4\pi}{c} I & (R > a). \end{cases}$$

2.38. На основании соображений, изложенных в предыдущей задаче, имеем, что для контура круговой силовой линии радиуса R

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 2\pi R \cdot H = \begin{cases} 0 & (R < a), \\ \frac{4\pi}{c} I & (R > a). \end{cases}$$

2.39. На основании соображений симметрии (см. задачу 2.37) имеем, что для контура круговой силовой линии радиуса R

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 2\pi R \cdot H = \begin{cases} 0 & (R < a), \\ \frac{4\pi}{c} I \frac{R^2 - a^2}{b^2 - a^2} & (a < R < b), \\ \frac{4\pi}{c} I & (R > b). \end{cases}$$

2.40. Следует рассмотреть два случая.

1. Токи параллельные (направлены в одну сторону).

Результирующая напряженность поля равна нулю посередине между проводами и, кроме того, еще в двух точках между их осями внутри проводов на расстоянии от оси x , определяемом уравнением (см. решение задачи 2.37)

$$\frac{2I}{ca^2} x = \frac{2I}{c(l-x)}.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{2} (l - \sqrt{l^2 - 4a^2}).$$

2. Токи антипараллельные. В этом случае напряженность поля равняется нулю по одну сторону от осей обоих проводов на том же расстоянии x от ближайшей оси.

2.41. Искомое поле можно рассматривать как разность полей, создаваемых токами, которые с той же плотностью $\mathbf{j} = \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$ проходят по сплошному цилиндру радиуса a и по цилиндру радиуса b :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2,$$

где

$\mathbf{H}_1 = \frac{2\pi j}{c} [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{R}_1]$; $\mathbf{H}_2 = \frac{2\pi j}{c} [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{R}_2]$; \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 — векторы, проведенные от осей цилиндров к рассматриваемой точке, причем $\mathbf{R}_1 \perp \mathbf{z}_0$ и $\mathbf{R}_2 \perp \mathbf{z}$; \mathbf{z}_0 — единичный вектор, имеющий направление тока.

Отсюда

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi j}{c} [z_0 \times \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2] = \text{const},$$

где $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ — вектор, соединяющий оси цилиндров.

2.42. Если пренебречь рассеянием магнитного потока вне тора, то следует считать магнитные силовые линии окружностями с центром на оси тора. Применяв (2.11) к круговой силовой линии радиуса R , получим

$$H = \frac{2IN}{cR}.$$

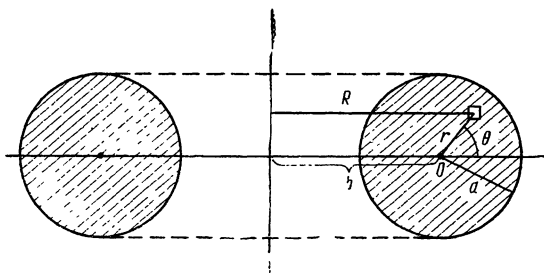


Рис. 36

Магнитный поток (рис. 36)

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \int \mathbf{B}d\mathbf{S} = \mu \frac{2IN}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{rdrd\Theta}{b+r\cos\Theta} = \\ &= \mu \frac{4\pi}{c} IN (b - \sqrt{b^2 - a^2}). \end{aligned}$$

2.43. Пренебрегая краевым эффектом, можно считать катушку бесконечно длинной, а это равносильно тору бесконечно большого радиуса.

Для тора конечного радиуса b (см. задачу 2.42) напряженность поля

$$H = \frac{2I}{c} \frac{N}{b+x} \quad (|x| \ll a),$$

где

$$N = 2\pi b n.$$

Отсюда при $b \rightarrow \infty$

$$H = \frac{4\pi}{c} In.$$

2.44.

$$H = \begin{cases} \frac{2I}{ca^2} R & (R < a), \\ \frac{2I}{cR} & (a < R < b), \\ \frac{2I}{cR} \frac{c^2 - R^2}{c^2 - b^2} & (b < R < c). \end{cases}$$

2.45. Каждый элемент объема

$$dV = r^2 dr \sin \Theta d\Theta d\psi$$

заряженного шара создает магнитный момент в направлении оси вращения, величина которого (см. (2.18))

$$dm = \frac{dl}{c} S; \quad S = \pi r^2 \sin^2 \Theta; \quad dl = \frac{\omega}{2\pi} \rho dV; \quad \rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}.$$

Отсюда результирующий магнитный момент

$$m = \frac{\omega \rho}{2c} \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{1}{5} \frac{q}{c} \omega a^2.$$

2.46. Аналогично предыдущему, каждый элемент объема заряженного цилиндра

$$dV = R dR d\Theta dz$$

создает магнитный момент в направлении оси вращения, величина которого

$$dm = \frac{dl}{c} S; \quad S = \pi R^2; \quad dl = \frac{\omega}{2\pi} \rho dV; \quad \rho = \frac{q}{\pi a^2 h}.$$

Отсюда результирующий магнитный момент

$$m = \frac{\omega \rho}{2c} \int_0^a R^3 dR \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^h dz = \frac{1}{4} \frac{q}{c} \omega a^2.$$

2.47. Поместим начало сферических координат в центре сферического магнетика и направим ось z в на-

правлении внешнего поля. Ввиду отсутствия токов иско-
мое поле может быть описано скалярным потенциалом,
который определяется уравнением Лапласа (2.17а). Ре-
шение ищем в виде (см. решение задачи 1.123)

$$\varphi_1 = -C_1 z = -C_1 r \cos \Theta \quad (r < b)$$

$$\varphi_2 = -C_2 z - C_3 \frac{z}{r^3} = -C_2 r \cos \Theta - \frac{C_3}{r^2} \cos \Theta \quad (b < r < a),$$

$$\varphi_3 = -H_0 z + C_4 \frac{z}{r^3} = -H_0 r \cos \Theta + \frac{C_4}{r^2} \cos \Theta \quad (r > a).$$

Из граничных условий (XVIIIa) и (XXIa) на границе
магнетика $r=b$ и $r=a$.

Находим

$$C_1 = \frac{9\mu_1\mu_2 a^3}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_1)a^3 - 2(\mu_1 - \mu_2)^2 b^3} H_0,$$

$$C_2 = \frac{3\mu_2(\mu_2 + 2\mu_1)a^3}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_1)a^3 - 2(\mu_1 - \mu_2)^2 b^3} H_0,$$

$$C_3 = \frac{3\mu_2(\mu_1 - \mu_2)a^3 b^3}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_1)a^3 - 2(\mu_1 - \mu_2)^2 b^3} H_0,$$

$$C_4 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 + 2\mu_1)a^3(a^3 - b^3)}{(\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_2 + 2\mu_1)a^3 - 2(\mu_1 - \mu_2)^2 b^3} H_0.$$

2.48. Поместим начало цилиндрических координат на
оси цилиндрического магнетика и направим ось z вдоль
этой оси, а угол Θ будем отсчитывать от направления
внешнего поля.

Потенциал искомого поля ищем в виде (см. задачу
1.126)

$$\varphi_1 = -C_1 R \cos \Theta \quad (R < b),$$

$$\varphi_2 = -C_2 R \cos \Theta - C_3 \frac{\cos \Theta}{R} \quad (b < R < a),$$

$$\varphi_3 = -H_0 R \cos \Theta + C_4 \frac{\cos \Theta}{R} \quad (R > a).$$

Из граничных условий (XVIIIa) и (XXIa) на поверх-
ностях $R=b$ и $R=a$ находим

$$C_1 = \frac{4\mu_1\mu_2 a^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 a^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 b^2} H_0,$$

$$C_2 = \frac{2\mu_2(\mu_1 + \mu_2) a^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 a^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 b^2} H_0,$$

$$C_3 = \frac{2\mu_2(\mu_1 - \mu_2)^2 a^2 b^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 a^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 b^2} H_0,$$

$$C_4 = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)(a^2 - b^2) a^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 a^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 b^2} H_0.$$

§ 5. Взаимодействие токов. Коэффициент индуктивности

2.49. Напряженность магнитного поля, создаваемого током I_2 в месте нахождения тока I_1 ,

$$H_2 = \frac{2I_2^2}{2ac}; \quad \mathbf{H}_2 \perp d\mathbf{l}_1.$$

Отсюда на основании (2.23) на каждую единицу длины одного тока действует со стороны другого тока сила

$$F_{12} = \frac{I_1 I_2}{ac^2}.$$

Для параллельных токов это взаимодействие имеет характер взаимного притяжения. Для антипараллельных токов — отталкивания.

2.50. Выберем плоскость, в которой лежат токи, за координатную плоскость xz , поместим начало посередине между токами и направим ось x перпендикулярно (рис. 37) к токам. На основании (2.34) и (2.33) x — составляющая силы, действующая на единицу длины первого тока,

$$F_x^{(1)} = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} T_{xx} dy dz = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (H_x^2 - H_y^2) dy \quad (\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2).$$

Из чертежа видно, что напряженность поля, создаваемого током I_1 ,

$$H_x^{(1)} = -H^{(1)} \sin \alpha = -\frac{2I_1}{cR} \frac{y}{R} = -\frac{2I_1}{c} \frac{y}{a^2 + y^2},$$

$$H_y^{(1)} = -H^{(1)} \cos \alpha = -\frac{2I_1}{cR} \frac{a}{R} = -\frac{2I_1}{c} \frac{a}{a^2 + y^2}.$$

Аналогично можно вычислить напряженность \mathbf{H}_2 поля, создаваемого током I_2 и после интегрирования получаем (для случая параллельных токов)

$$F_x^{(1)} = \frac{I_1 I_2}{ac^2}; \quad F_y^{(1)} = F_z^{(1)} = 0,$$

что совпадает с результатом предыдущей задачи.

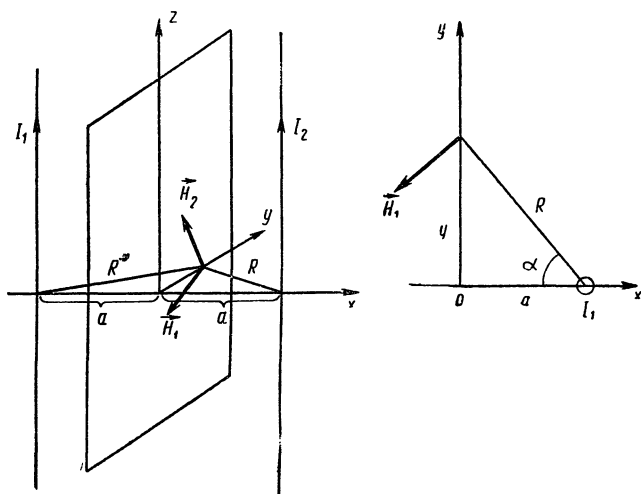


Рис. 37

2.51. Как было показано (см. задачу 2.32), в воздухе поле таково, как будто оно создается данным током I и его «изображением» силой $I' = \frac{\mu-1}{\mu+1} I$, находящимся на расстоянии $2a$ от него.

Отсюда следует, что на единицу длины провода действует сила (см. задачу 2.49) притяжения к магнетика

$$F = \frac{\mu-1}{\mu+1} \frac{I^2}{ac^2}.$$

2.52. Как было показано в задаче 2.33, вне магнетика поле таково, как будто оно создается данным током I и его «изображением» силой $I' = \frac{\mu-1}{\mu+1} I$, отстоящим

на расстоянии $l' = \frac{a^2}{l}$ от оси цилиндрического магнетика и параллельным данному току и, наконец, током той же силы I' , идущему вдоль оси цилиндрического магнетика антипараллельно данному току.

Отсюда следует, что на единицу длины проводника с током приходится сила притяжения к магнетику

$$F = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{I^2}{c^2} \left(\frac{2l}{l^2 - a^2} - \frac{2}{l} \right).$$

2.53. Как было показано в задаче 2.34, внутри полости поле таково, как будто оно создается не только данными токами, но и их «изображениями» силою $I' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I$, отстоящими на расстоянии $l' = \frac{a^2}{l}$ от оси полости.

Отсюда следует, что для равновесия нужно, чтобы

$$\frac{1}{l} + \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{2l}{l^2 + a^2} = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{2l}{a^2 - l^2}; \quad l = a \sqrt[4]{\frac{\mu + 1}{5\mu - 3}}.$$

2.54. На горизонтальный участок BC провода действует сила (см. рис. 1)

$$F = \frac{I}{c} bH,$$

где b — сторона квадрата.

Эта сила дает вращающий момент, равный

$$Fb \cos \alpha = \frac{I}{c} b^2 H \cos \alpha.$$

Силы, действующие на участки AB и CD , взаимно уравниваются.

Вес провода P дает направленный в противоположную сторону вращающий момент, равный

$$P \cdot OG \cdot \sin \alpha = 2b^2 \pi a^2 \delta \sin \alpha,$$

где G — центр тяжести провода.

В положении равновесия результирующий вращающий момент равен нулю, а потому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I}{c} \frac{H}{2\pi a^2 \delta}.$$

2.55. На основании (2.23) и (2.16а) сила, действующая на элемент длины dl_1 первого тока со стороны всего второго тока

$$d\mathbf{F}_{12} = \mu \frac{I_1 I_2}{c^2} \left[dl_1 \times \oint_{l_2} \frac{[dl_2 \times \mathbf{r}_{21}]}{r_{21}^3} \right].$$

Отсюда главный вектор сил, действующих на первый контур со стороны второго

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \mu \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{1}{r_{21}^3} \{ dl_2 (\mathbf{r}_{21} dl_1) - \mathbf{r}_{21} (dl_1 dl_2) \} = \\ &= -\mu \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \left\{ dl_2 \left(dl_1 \operatorname{grad}_1 \frac{1}{r_{21}} \right) + \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} (dl_1 dl_2) \right\}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\oint_{l_1} \oint_{l_2} dl_2 \left(dl_1 \operatorname{grad}_1 \frac{1}{r_{21}} \right) = \oint_{l_2} dl_2 \oint_{l_1} d \left(\frac{1}{r_{21}} \right) = 0,$$

получаем окончательно

$$\mathbf{F}_{12} = -\mu \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{l_1} \oint_{l_2} (dl_1 dl_2) \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3}.$$

Аналогично главный вектор сил, действующих на второй контур,

$$\mathbf{F}_{21} = -\mu \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{l_1} \oint_{l_2} (dl_1 dl_2) \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = -\mathbf{F}_{12}.$$

2.56. Дифференциальное уравнение малых колебаний стрелки

$$J \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = N = -mH\Theta,$$

где J — момент инерции стрелки. Отсюда период малых колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mH}}.$$

2.57. На первую магнитную стрелку (см. задачу 1.95)

действует вращающий момент

$$N = \frac{m_1 m_2}{r^3} \{ \sin(\alpha - \Theta) - 3 \cos \Theta \cdot \sin \alpha \},$$

где m_1 и m_2 — магнитные моменты диполей; r — расстояние между ними.

В состоянии равновесия $N=0$, а потому

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \Theta.$$

2.58. В состоянии равновесия магнитная стрелка имеет направление внешнего поля, а потому (рис. 38) в точке B поле, создаваемое моментами \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_3 , не имеет составляющей вдоль AB , т. е.

$$H_r^{(1)} + H_\Theta^{(3)} \cos 30^\circ = H_r^{(3)} \cos 60^\circ.$$

Как было получено в задаче 1.29,

$$H_r^{(1)} = \frac{2m_1}{a^3} \cos 60^\circ; \quad H_r^{(3)} = \frac{2m_3}{a^3} \cos 30^\circ; \quad H_\Theta^{(3)} = \frac{m_3}{a^3} \sin 30^\circ.$$

Подстановка в исходное уравнение дает

$$m_3 = \frac{4m_1}{\sqrt{3}}.$$

Аналогично,

$$m_2 = \frac{4m_1}{\sqrt{3}}.$$

2.59. Искомые силы равны силам, действующим на данную магнитную стрелку со стороны ее «изображения» (см. задачу 2.35), магнитный момент которого

$$m' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} m.$$

Используя результат задачи 1.95, получаем, что главный вектор сил

$$\begin{aligned} F &= 3 \frac{\mu - 1}{\mu + 1} m^2 \frac{\cos 2\alpha - 3 \cos^2 \alpha}{16a^4} = \\ &= -\frac{3}{16} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{m^2}{a^4} (1 + \cos^2 \alpha), \end{aligned}$$

а главный момент

$$N = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} m^2 \frac{\sin 2\alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha}{8a^3} =$$

$$= -\frac{1}{16} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{m^2}{a^3} \sin 2\alpha.$$

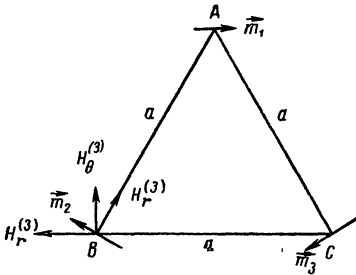


Рис. 38

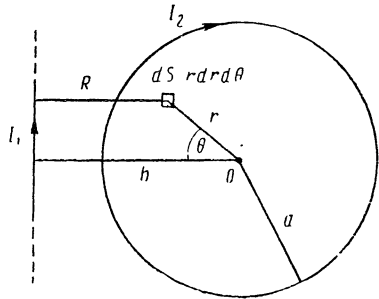


Рис. 39

2.60. На основании (2.20а) силовая функция тока

$$U = -\frac{I}{c} \bar{\Phi} = -\frac{I}{c} abH \cos \Theta.$$

Отсюда на основании (2.25) следует, что на рамку действует пара сил, момент которой

$$N = -\left(\frac{\partial U}{\partial \Theta}\right)_I = -\frac{I}{c} abH \sin \Theta,$$

где Θ — угол между нормалью к плоскости рамки и направлением поля.

Тот же результат можно получить, рассмотрев силы, действующие на отдельные стороны рамки.

2.61. На основании (2.20а) силовая функция взаимодействия (рис. 39)

$$U_{12} = -\frac{I_2}{c} \int_{S_2} \mathbf{H}_1 d\mathbf{S} = -\frac{2I_1 I_2}{c^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{b - r \cos \theta} =$$

$$= -\frac{4\pi I_1 I_2}{c^2} (b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

Отсюда результирующая сила, действующая на круговой ток,

$$F = - \left(\frac{\partial U_{12}}{\partial b} \right)_I = - \frac{4\pi I_1 I_2}{c^2} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} - 1 \right).$$

2.62. Примем плоскость рамки за координатную плоскость xz , ось z направим вдоль оси рамки в сторону тока I_2 .

Принимая во внимание, что (рис. 40)

$$H_n^{(2)} = H^{(2)} \cos \alpha; \quad H^{(2)} = \frac{2I_2}{cR}; \quad \cos \alpha = \frac{x + l \sin \Theta}{R};$$

$$R = \sqrt{x^2 + l^2 + 2xl \sin \Theta},$$

имеем

$$U = - \frac{I_1}{c} \int_{S_1} H_n^{(2)} dS = - \frac{2aI_1 I_2}{c^2} \ln \frac{b^2 + l^2 + 2lb \sin \Theta}{b^2 + l^2 - 2lb \sin \Theta}.$$

Отсюда вращающий момент

$$N = - \left(\frac{\partial U}{\partial \Theta} \right)_I = \frac{8I_1 I_2}{c^2} \frac{abl(b^2 + l^2) \cos \Theta}{(b^2 + l^2)^2 - 4b^2 l^2 \sin^2 \Theta}.$$

2.63. По определению (см. (2.28)), коэффициент взаимной индукции (полагая $\mu = 1$)

$$L_{12} = \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{dl_1 dl_2}{r_{12}}.$$

Если каждый из контуров разбить на четыре прямолинейных отрезка, то мы получим $4 \times 4 = 16$ двукратных интегралов, из которых восемь равны нулю, потому что для взаимно перпендикулярных отрезков $dl_1 dl_2 = 0$. При этом четыре раза повторяются одинаковые интегралы, а потому, если начало координат поместить в центре одного из контуров, а оси x и z направить параллельно его сторонам, то (рис. 41)

$$L_{12} = 4 \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{dz_1 dz_2}{\sqrt{b^2 + (z_2 - z_1)^2}} - \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{dz_1 dz_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + (z_2 - z_1)^2}} \right\} =$$

$$= 8 \left\{ a \ln \frac{a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}}{b(\sqrt{2a^2 + b^2} + a)} + \right. \\ \left. + \sqrt{2a^2 + b^2} - 2\sqrt{a^2 + b^2} + b \right\}.$$

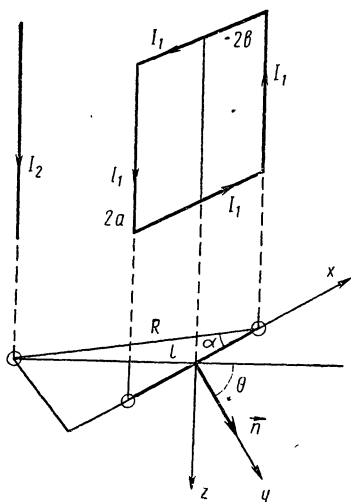


Рис. 40

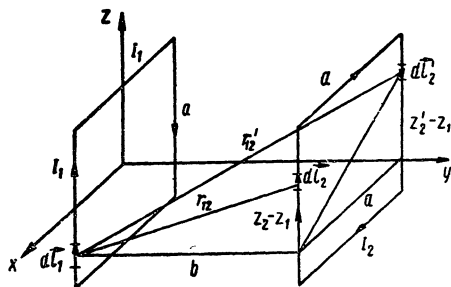


Рис. 41

На основании (2.25) и (2.27) сила взаимодействия

$$F = - \left(\frac{\partial U}{\partial b} \right)_I = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{\partial L_{12}}{b} = \\ = \frac{8I_1 I_2}{c^2} \left\{ 1 + \frac{b\sqrt{2a^2 + b^2}}{a^2 + b^2} - \frac{a^2 + 2b^2}{b\sqrt{a^2 + b^2}} \right\}.$$

2.64. Разложим полученное в предыдущей задаче выражение для силы F по степеням $\frac{a}{b} \ll 1$. Ограничившись членами, не выше четвертой степени получим

$$F = - \frac{6I_1 I_2}{c^2} \left(\frac{a}{b} \right)^4 = - \frac{6m_1 m_2}{b^4},$$

что доказывает требуемое (см. задачу 1.95).

2.65. Коэффициент взаимной индукции (рис. 42)

$$L_{12} = \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r_{12}} =$$

$$= ab \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_1) d\varphi_2}{\sqrt{h^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}.$$

Положив $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$, получим

$$L_{12} = 4\pi ab \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{h^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}} =$$

$$= \frac{8\pi}{k} \sqrt{ab} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K - E \right\},$$

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + h^2},$$

где K и E — полные эллиптические интегралы I и II родов (см. задачу 2.25).

На основании (2.25) и (2.27) сила взаимодействия

$$F = - \left(\frac{\partial U}{\partial h} \right)_I = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{\partial L_{12}}{\partial h} =$$

$$= - \frac{2\pi I_1 I_2}{c^2} \frac{kh}{\sqrt{ab}} \left\{ \left[1 + \frac{k^2}{2(1-k^2)} \right] E - K \right\}.$$

При этом использованы формулы для производных от эллиптических интегралов, приведенные в решении задачи 2.26.

2.66. Для рассматриваемого предельного случая

$$k^2 \approx \frac{4ab}{h^2} \ll 1,$$

а потому можно воспользоваться разложением эллиптических интегралов по степеням малого параметра k^2 :

$$E = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 - \dots \right),$$

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right).$$

Подстановка в общую формулу для силы взаимодействия, полученную в предыдущей задаче, дает

$$F = - \frac{2\pi I_1 I_2}{c^2} \frac{kh}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{3}{32} \pi k^4 =$$

$$= - \frac{6I_1 I_2}{c^2} \frac{\pi^2 a^2 b^2}{h^4} = - \frac{6m_1 m_2}{h^4}$$

(сравните с решением задачи 1.95).

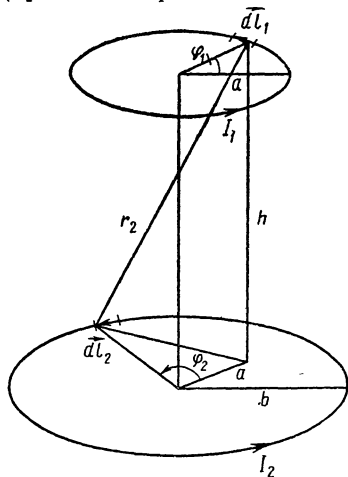


Рис. 42

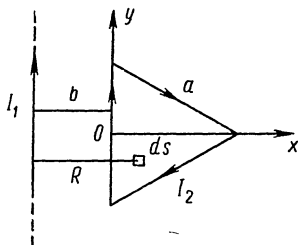


Рис. 43

2.67. В воздухе магнитное поле таково, как будто вместо магнетика имеется еще один круговой виток, являющийся «изображением» данного, по которому проходит ток $I' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I$ в направлении, параллельном данному току (см. задачу 2.35).

Отсюда следует, что сила, действующая на данный круговой ток со стороны магнетика (см. задачу 2.65).

$$F = - \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \frac{2\pi I^2}{c^2} \frac{2bk}{a} \left\{ \left[1 + \frac{k^2}{2(1 - k^2)} \right] E - K \right\},$$

где

$$k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

а E и K — полные эллиптические интегралы II и I родов.

2.68. При указанном на рис. 43 выборе осей координат магнитный поток, создаваемый бесконечным прямолинейным током I_1 , через площадь треугольника

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} H_n^{(1)} dS = \frac{2I_1}{c} \int_0^{\frac{a}{2}\sqrt{3}} \frac{dx}{b+x} \int_{-y_1}^{+y_1} dy; \quad y_1 = \frac{a}{2} - \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда на основании (2.26) коэффициент взаимной индукции

$$L_{12} = \frac{c}{I_1} \Phi_{12} = 2 \left\{ \left(a + \frac{2b}{\sqrt{3}} \right) \ln \left(1 + \frac{a\sqrt{3}}{2b} \right) - a \right\}.$$

На основании (2.25) и (2.27) сила взаимодействия

$$\begin{aligned} F &= - \left(\frac{\partial U_{12}}{\partial b} \right)_I = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{\partial L_{12}}{\partial b} = \\ &= \frac{I_1 I_2}{c^2} \left\{ \frac{4}{\sqrt{3}} \ln \left(1 + \frac{a\sqrt{3}}{b} \right) - \frac{2a}{b} \right\}. \end{aligned}$$

2.69. На основании (2.26) коэффициент взаимной индукции

$$L_{12} = \frac{c}{I_1} \Phi_{12} = \frac{c}{I_1} N \pi a^2 \mu H_1 = \mu 4\pi^2 a^2 n N,$$

потому что $H_1 = \frac{4\pi}{c} n I_1$ (см. решение задачи 2.43).

2.70. Как показано в задаче 2.42, если по первой обмотке проходит ток I_1 , то внутри тора создается магнитный поток

$$\Phi = \mu \frac{4\pi}{c} I_1 N_1 (b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

Отсюда на основании (2.26) коэффициент взаимной индукции

$$L_{21} = \frac{c}{I_1} N_2 \Phi = 4\pi\mu N_1 N_2 (b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

2.71. Если по бесконечному прямому проводу проходит ток I_1 , то им создается магнитный поток (см. решение задачи 2.42)

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int B_n dS = \mu \int H_1 dS =: \frac{2I_1}{c} \mu \int \frac{dS}{R} = \\ &= \mu \frac{4\pi I_1}{c} (b - \sqrt{b^2 - a^2}).\end{aligned}$$

Отсюда на основании (2.26) коэффициент взаимной индукции

$$L_{12} = 4\pi\mu N (b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

2.72. Из (2.31) и (2.32) следует, что энергия магнитного поля, создаваемого током I , связана с самоиндукцией L контура соотношением

$$W = \frac{1}{2c^2} LI^2 = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 dV.$$

Внутри бесконечно длинной катушки напряженность поля (см. решение задачи 2.43)

$$H = \frac{4\pi}{c} In,$$

а потому самоиндукция единицы длины катушки

$$L = 4\pi^2\mu a^2 n^2.$$

2.73. Если по катушке проходит ток I , то им создается поле лишь внутри тора, напряженность которого (см. задачу 2.42)

$$H = \frac{2IN}{cR}.$$

Энергия этого поля

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{\mu}{8\pi} \frac{4I^2 N^2}{c^2} \int \frac{dV}{R^2} = \frac{1}{2c^2} LI^2.$$

Отсюда самоиндукция катушки

$$L = 4\pi\mu N^2 (b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

В предельном случае $b \rightarrow \infty$, положив $n = \frac{N}{2\pi b}$, получим, что самоиндукция единицы длины катушки

$$L' = \frac{L}{2\pi b} = 4\pi^2\mu a^2 n^2,$$

что совпадает с результатом предыдущей задачи.

2.74. Энергия магнитного поля, приходящаяся на единицу длины кабеля,

$$W = \frac{1}{2c^2} LI^2 = \frac{\mu}{8\pi} \int_{R_1}^{R_2} H^2 \cdot 2\pi R dR = \mu \frac{I^2}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Отсюда самоиндукция единицы длины кабеля *

$$L = 2\mu \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

2.75. Зная напряженность поля (см. задачу 2.44), вычислим энергию магнитного поля, приходящуюся на единицу длины кабеля,

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mu H^2 dV = \frac{1}{2c^2} LI^2.$$

Отсюда самоиндукция единицы длины кабеля

$$L = 2\mu_2 \ln \frac{R_1}{R_0} + 2\mu_1 \frac{R_2^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \mu_1 \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

2.76. Внутренняя часть самоиндукции L' проводника определяется равенством

$$\frac{1}{2c^2} L'I^2 = \frac{1}{8\pi} \int_{V'} \mu' H^2 dV,$$

где V' — объем проводника, μ' — его магнитная проницаемость.

Для единицы длины провода, положив $H = \frac{2I}{ca^2} R$ (см. решение задачи 2.37), находим

$$L' = \frac{1}{2} \mu.$$

2.77. Если кривизна кольца достаточно мала ($r \gg a$), то можно воспользоваться результатом предыдущей задачи для определения внутренней части самоиндукции проволоки, а именно

* Здесь не учтена внутренняя часть самоиндукции проводов, так как толщина трубок, согласно условию, пренебрежимо мала.

$$L' = \frac{1}{2} \mu_1 \cdot 2\pi r = \mu_1 \pi r.$$

Остается вычислить внешнюю часть самоиндукции L'' кольца, которая определяется равенством

$$\frac{1}{2c^2} L'' I^2 = \frac{\mu_2}{8\pi} \int_{V''} H^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int_{V''} \mathbf{H} \mathbf{B} dV,$$

где V'' — объем внешнего пространства, в котором можно ввести скалярный потенциал

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m,$$

φ_m претерпевает разрыв непрерывности на величину $\frac{4\pi}{c} I$ на поверхности S_1 , опирающейся на контур кольца. Преобразуем интеграл

$$\begin{aligned} \int_{V''} \mathbf{H} \mathbf{B} dV &= - \int_{V''} \mathbf{B} \nabla \varphi_m dV = - \int_{V''} \{ \nabla (\varphi_m \mathbf{B}) - \varphi_m \nabla \mathbf{B} \} dV = \\ &= - \int_{V''} \text{div} (\varphi_m \mathbf{B}) dV = - \oint \varphi_m B_n dS. \end{aligned}$$

В последнем интеграле интегрирование распространяется на всю замкнутую поверхность, ограничивающую объем V'' , в том числе и на обе стороны поверхности S_1 , имеющей форму круга радиуса $(r-a)$.

Поток через поверхность кольца и бесконечно удаленную поверхность равен нулю, а потому

$$\frac{4\pi}{c^2} L'' I^2 = \int_{V''} \mathbf{H} \mathbf{B} dV = - \int_{-S_1} B_n (\varphi_m^{(1)} - \varphi_m^{(2)}) dS = \frac{4\pi}{c} I \Phi.$$

Магнитный поток через поверхность S_1 можно выразить через коэффициент взаимной индукции L_{12} между двумя концентрическими окружностями радиуса r и $r-a$ (см. задачу 2.65):

$$\Phi = \frac{I}{c} L_{12}.$$

Отсюда

$$L'' = L_{12} = \mu_2 \cdot 8\pi r \left(\frac{1}{2} \ln \frac{8r}{a} - 1 \right).$$

При этом учтено, что $k^2 \approx 1$, а потому $E \approx 1$; $K \approx \ln \frac{8r}{a}$.

2.78. На основании (2.31) самоиндукция проводника определяется уравнением

$$\frac{1}{2c^2} LI^2 = \frac{1}{2c} \int \mathbf{jA} dV.$$

Достаточно интегрировать по объему одного из проводов и полученный результат удвоить.

Если ось z направить вдоль тока (в рассматриваемом проводе), то (см. задачу 2.28) внутри этого провода

$$A_z = \frac{I}{c} - \frac{I}{c} \frac{R_1^2}{a^2} + \frac{2I}{c} \ln \frac{R_2}{a}; \quad A_x = A_y = 0,$$

где R_1 и R_2 — расстояния рассматриваемой точки соответственно от оси одного и другого провода.

Отсюда

$$\begin{aligned} L &= 2 \frac{c}{I^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a j_z A_z R_1 dR_1 d\Theta = \\ &= \frac{2}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(1 - \frac{R_1^2}{a^2} + 2 \ln \frac{R_2}{a} \right) R_1 dR_1 d\Theta. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^{2\pi} \ln R_2 d\Theta = \int_0^{\pi} \ln(R_1^2 + l^2 - 2R_1 l \cos \Theta) d\Theta = 2\pi \ln l,$$

получаем

$$L = 1 + 4 \ln \frac{l}{a}.$$

2.79. В воздухе магнитный поток через плоскость контура

$$\Phi = \int H_n dS = \frac{I}{c} L.$$

Аналогично при наличии магнетика

$$\Phi' = \int H'_n dS = \frac{I}{c} L',$$

где (см. задачу 2.35)

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \mathbf{H} = \frac{2\mu}{\mu + 1} \mathbf{H},$$

а потому

$$L' = \frac{2\mu}{\mu + 1} L.$$

2.80. Если ось z направить вдоль поля, то из (2.24) получим

$$v_z = v_0 \cos \alpha = \text{const.}$$

В плоскости xy электрон движется с постоянной скоростью $v = v_0 \sin \alpha$ по окружности, радиус которой определяется уравнением

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e}{c} vH.$$

Итак, электрон движется с постоянной скоростью v_0 по винтовой линии радиуса $r = \frac{mcv_0 \sin \alpha}{eH}$, шаг которой

$$h = \frac{2\pi r}{v_0 \sin \alpha} \cdot v_0 \cos \alpha = 2\pi \frac{mc}{eH} v_0 \cos \alpha.$$

2.81. Примем направление электрического поля за ось x , а направление магнитного поля — за ось y (рис. 44).

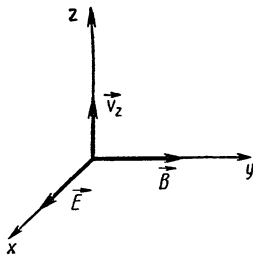


Рис. 44

Чтобы лоренцова сила (2.24) уравновесила силу электрического поля $F = eE$, нужно, чтобы

$$v_z = \frac{cE}{B} \quad \text{и} \quad v_x = 0.$$

Составляющая скорости v_y может быть произвольной.

2.82. На основании результата задачи 2.80 индукция

$$B = \frac{mc}{eR} v = \frac{mc}{eR} \sqrt{\frac{2W}{m}} = \frac{c}{eR} \sqrt{2mW}.$$

§ 6. Закон электромагнитной индукции. Квазистационарные токи

2.83. Э. д. с. индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c} SB\omega \sin(\omega t + \Theta_0),$$

где Θ_0 — угол между нормалью к контуру и направлением поля в начальный момент $t=0$.

2.84. На основании (2.38) сила тока в контуре определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_{\text{инд}}.$$

Интегрирование дает

$$I = A_0 e^{-c^2 \frac{R}{L} t} + \frac{\omega SB}{\sqrt{c^2 R^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \Theta_0 - \varphi),$$

где $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{c^2 R}$, A_0 — постоянная интегрирования, зависящая от начальной силы тока.

2.85. Сила тока в цепи была равна

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

После того как сопротивление R_2 было замкнуто накоротко, сила тока в цепи определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt} + R_1 I = \mathcal{E}.$$

Интегрирование дает (с учетом начальных условий: при $t=0, I=I_0$)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \left(1 - e^{-c^2 \frac{R_1}{L} t}\right) + \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} e^{-c^2 \frac{R_1}{L} t}.$$

2.86. Так как разность потенциалов на обкладках конденсатора равна $\frac{q}{C}$, аналогично (2.38) получаем уравнение

$$\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt} + IR = \frac{q}{C}.$$

Сила тока в контуре

$$I = -\frac{dq}{dt}.$$

Подстановка в предыдущем уравнении дает

$$\frac{L}{c^2} \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$q = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t},$$

где

$$k_{1,2} = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}; \quad \eta = \frac{c^2 R}{2L}; \quad \omega_0^2 = \frac{c^2}{LC}.$$

Из начальных условий (при $t=0, q=q_0; I = -\frac{dq}{dt}=0$)

$$A_1 = \frac{k_2}{k_2 - k_1} q_0; \quad A_2 = \frac{k_1}{k_1 - k_2} q_0.$$

2.87. На основании (2.38) для левого и правого контуров цепи в отдельности (см. рис. 2) имеем

$$\frac{1}{c^2} L_1 \frac{dI_1}{dt} = V; \quad \frac{1}{c^2} L_2 \frac{dI_2}{dt} = V,$$

где V — разность потенциалов на обкладках конденсатора. Отсюда

$$L_1 I_1 - L_2 I_2 = \text{const} = 0, \quad (1)$$

потому что при $t=0$ $I_1 = I_2 = 0$.

Максимальной величины эти токи достигают в тот момент времени, когда заряд конденсатора равен нулю. При этом энергия заряженного конденсатора $\left(\frac{q^2}{2C}\right)$ полностью превращается в энергию магнитного поля токов, т. е.

$$\frac{1}{2c^2} (L_1 I_{10}^2 + L_2 I_{20}^2) = \frac{q^2}{2C}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим, что

$$I_{10} = cq \sqrt{\frac{L_2}{CL_1(L_1 + L_2)}}; \quad I_{20} = cq \sqrt{\frac{L_1}{CL_2(L_1 + L_2)}}.$$

2.88. Токи в контурах определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{1}{c^2} L_{11} \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} I_1 = 0,$$

$$\frac{1}{c^2} L_{22} \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} I_2 = 0,$$

где

$$I = -\frac{dq_1}{dt}; \quad I_2 = -\frac{dq_2}{dt}.$$

2.89. Если ток разрядки конденсатора C_2 обозначить через I , а заряд и ток разрядки конденсатора C_1 — соответственно через q' и I' , то на основании (2.38) для контура 123456781 имеем (см. рис. 3)

$$\frac{1}{c^2} L_2 \frac{dI}{dt} = \frac{q'}{C_1} + \frac{q}{C_2},$$

а для контура 1239106781

$$\frac{1}{c^2} L_1 \frac{d}{dt} (I - I') + \frac{1}{c^2} L_2 \frac{dI}{dt} = \frac{q_2}{C}.$$

Исключив из этих уравнений q' и токи I и I' при

помощи соотношений

$$I = -\frac{dq}{dt}; \quad I' = -\frac{dq'}{dt},$$

получим искомое дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4q}{dt^4} + 2A \frac{d^2q}{dt^2} + B = 0,$$

где

$$A = c^2 \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 + L_1 C_2}{2L_1 L_2 C_1 C_2}; \quad B = \frac{c^4}{L_1 L_2 C_1 C_2}.$$

2.90. Если через q обозначить заряд на обкладке конденсатора, соединенной с положительным полюсом батареи, то на основании (2.38) имеем (см. рис. 4)

$$\frac{1}{c^2} L \frac{dI_1}{dt} + IR = \varepsilon; \quad IR = \varepsilon - \frac{q}{C},$$

где $\frac{dq}{dt} = I - I_1$.

Исключив I_1 и q , получаем

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dI}{dt} + \frac{c^2}{CL} I = \frac{c^2}{LCR} \varepsilon.$$

Интегрирование дает

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - \frac{\sin \omega t}{\omega RC} e^{-\frac{t}{2cR}} \right),$$

где

$$\omega^2 = \frac{c^2}{CL} - \frac{1}{4R^2 C^2}.$$

2.91. Заряд конденсатора определяется уравнением (см. решение задачи 2.86)

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0,$$

где

$$\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}.$$

Отсюда

$$q = -\frac{\mathcal{E}}{\omega_0 R} \sin \omega_0 t.$$

2.92. Обозначим ток в контуре 1234 через I , а в каждом из других двух контуров — через I_1 . На основании (2.38) имеем (см. рис. 5)

$$\begin{aligned} \frac{2L}{c^2} \frac{dI}{dt} + \frac{2L_{12}}{c^2} \frac{dI_1}{dt} &= \frac{q}{C}, \\ \frac{L}{c^2} \frac{dI_1}{dt} + \frac{L_{12}}{c^2} \frac{dI}{dt} &= \frac{q_1}{C}. \end{aligned}$$

Исключив q , q_1 и I_1 , получим

$$\frac{C}{c^2} (L^2 - L_{12}^2) \frac{d^4 I}{dt^4} + \frac{3}{2} L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{c^2}{2C} I = 0.$$

2.93. На основании (2.38) имеем (см. рис. 6)

$$RI_1 = \mathcal{E} - \frac{q_1}{C_1}; \quad \mathcal{E} - \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = 0.$$

Исключив $I_1 = \frac{dq_2}{dt} - \frac{dq_1}{dt}$ и q_1 , получим

$$q_2 = C_2 \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}} \right).$$

2.94. Количество электричества, прошедшего через второй контур,

$$q_2 = \int_0^{\infty} I_2 dt = \frac{1}{cR_2} (\Phi_{\infty} - \Phi_0) = \frac{L_{12}\mathcal{E}}{c^2 R_1 R_2}.$$

2.95. Сила тока определяется уравнением

$$\frac{L}{c^2} \frac{d^2 I}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) I = 0.$$

Отсюда

$$I = cQ \sqrt{\frac{C_2}{LC_1(C_1 + C_2)}} \sin \left(c \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2}} t \right).$$

2.96. На основании (2.42а) комплексные амплитуды

токов в катушке и конденсаторе определяются уравнениями

$$I_{10} = \frac{V_0}{R + \frac{i}{c^2} \omega L} = \frac{V_0}{R^2 + \frac{1}{c^4} \omega^2 L^2} \left(R - \frac{i}{c^2} \omega L \right),$$

$$I_{20} = \frac{V_0}{-\frac{i}{\omega C}} = iV_0 \omega C,$$

где V_0 — комплексная амплитуда приложенного напряжения.

Отсюда комплексная амплитуда тока в основной цепи

$$I_0 = I_{10} + I_{20} =$$

$$= V_0 \left\{ \frac{R}{R^2 + \frac{1}{c^4} \omega^2 L^2} + i \left(\omega C - \frac{\omega L}{c^2 R^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 L^2} \right) \right\}.$$

Чтобы q и I совпадали по фазе, нужно, чтобы

$$C = \frac{L}{c^2 R^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 L^2}.$$

2.97. Искомая мощность равна мощности переменного тока, который индуцируется в контуре при его вращении.

Эта мощность (см. задачи 2.83 и 2.84)

$$P = \frac{1}{2} I_0 \mathcal{E}_0 \cos \varphi = \frac{c^2 S^2 B^2 \omega^2 R}{2(c^4 R^2 + \omega^2 L^2)}.$$

2.98. Обозначим искомое напряжение между точками B и C через V_1 (в комплексной форме). Комплексная сила тока в проводнике и в катушке определяется уравнениями (см. 2.42а)

$$I_1 = \frac{V_1}{R}; \quad I_2 = \frac{V_1}{R + \frac{i}{c^2} \omega L}.$$

Напряжение между точками A и B

$$V - V_1 = IR = V_1 \left(1 + \frac{R^2 - \frac{i}{c^2} \omega LR}{R^2 + \frac{1}{c^4} \omega^2 L^2} \right).$$

Отсюда

$$V_1 = V_0 \frac{R^2 + \frac{1}{c^4} \omega^2 L^2}{\sqrt{\left(3R^2 + \frac{2}{c^4} \omega^2 L^2 \right)^2 + \frac{1}{c^4} \omega^2 L^2 R^2}} \cdot e^{i(\omega t + \varphi)},$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega LR}{3c^2 R^2 + \frac{2}{c^2} \omega^2 L^2}.$$

2.99. На основании (2.42а) комплексные сопротивления конденсатора и катушки равны соответственно

$$Y_1 = -\frac{i}{\omega C}; \quad Y_2 = \frac{i}{c^2} \omega L.$$

Отсюда комплексный ток, питающий рассматриваемый контур,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Y} = \mathcal{E} \left(\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} \right) = i \frac{\mathcal{E}}{\omega L} (\omega^2 LC - c^2)$$

и поставленное требование будет выполнено, если

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{LC}}.$$

2.100. Оба контура можно рассматривать как одну цепь переменного тока, состоящей из последовательно соединенных между собою генератора, индуктивности L_1 , емкости C_1 , сопротивления $(R_1 - r)$ и параллельного соединения сопротивления r с последовательным соединением индуктивности L_2 , емкости C_2 и сопротивления $(R_2 - r)$ (см. рис. 7).

Комплексное сопротивление этого параллельного соединения определяется уравнением

$$\frac{1}{Y_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{(R_2 - r) + i \left(\frac{1}{c^2} \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)}.$$

Комплексное сопротивление всей цепи

$$Y = (R_1 - r) + i \left(\frac{1}{c^2} \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) + Y_1.$$

Комплексная сила тока в первом контуре,

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{Y} = \left[R_2 + i \left(\frac{1}{c^2} \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \times \\ \times \left\{ R_1 R_2 - r^2 - \left(\frac{1}{c^2} \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \left(\frac{1}{c^2} \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) + \right. \\ \left. + i \left[R_1 \left(\frac{1}{c^2} \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) + R_2 \left(\frac{1}{c^2} \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] \right\}^{-1}.$$

Сила тока во втором контуре определяется уравнением

$$I_2 : (I_1 - I_2) = r : \left[(R_2 - r) + i \left(\frac{1}{c^2} \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right].$$

Отсюда

$$I_2 = \frac{r}{R_2 + i \left(\frac{1}{c^2} \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} I_1.$$

2.101. Магнитный поток

$$\Phi = \int H dS = \frac{2I}{c} x \cdot \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{2I}{c} x \cdot \ln \frac{b}{a},$$

где x — расстояние AB от R . Сила тока

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{1}{cR} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2I}{c^2 R} v \ln \frac{b}{a}.$$

2.102. На основании (2.23) на проводник AB действует сила

$$F = \frac{I_1}{c} \int_a^b H d\mathbf{r} = \frac{2I_1 I_0}{c^2} \ln \frac{b}{a}$$

в направлении, противоположном движению проводника.

Чтобы проводник AB двигался равномерно, к нему требуется приложить силу той же величины, но в сто-

рону движения. Мощность этой силы

$$P = Fv = \frac{2II_1}{c^2} v \ln \frac{b}{a} = I_1^2 R,$$

т. е. равна мощности индукционного тока.

2.103. Элемент длины стержня, находящийся на расстоянии r от точки O , движется со скоростью $v = \omega r$, а потому на основании (2.43) в нем индуцируется э.д.с.

$$d\varepsilon_{\text{инд}} = \frac{1}{c} H v dr = \frac{\omega}{c} H r dr$$

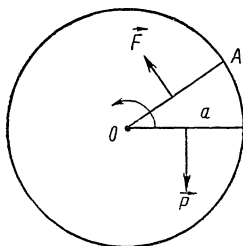


Рис. 45

Полная э. д. с. в стержне

$$\varepsilon_{\text{инд}} = \frac{\omega}{c} H \int_0^a r dr = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} H a^2.$$

2.104. Пусть в начальный момент времени ($t=0$) проводник OA занимает горизонтальное положение, от которого будем отсчитывать угол поворота $\alpha = \omega t$ (рис. 45).

Если по проводнику OA проходит ток I , то на основании (2.23) на него действует сила

$$F = \frac{I}{c} aH,$$

момент которой уравновешивает момент силы тяжести, а потому

$$\frac{I}{c} aH = P \cos \omega t.$$

Чтобы вызвать этот ток, нужно к концам проводника OA приложить напряжение (см. предыдущую задачу)

$$V = IR + \mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{cP}{aH} R \cos \omega t + \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} H a^2.$$

2.105. При колебаниях маятника в нем индуцируется э. д. с. (см. задачу 2.103)

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{1}{2c} H l^2 \frac{d\alpha}{dt},$$

где α — угол отклонения маятника от его положения равновесия.

При этом сила тока в контуре (см. рис. 8)

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{d\mathcal{E}_{\text{инд}}}{dt} = \frac{CHl^2}{2c} \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

На основании (2.23) на нить маятника действует при этом сила, момент которой

$$N = F \cdot \frac{l}{2} = \frac{CH^2 l^4}{4c^2} \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Движение маятника определяется дифференциальным уравнением

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha - N,$$

где $J = ml^2$ — момент инерции маятника. Отсюда период малых колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\left(1 + \frac{CH^2 l^2}{2c^2 m}\right) \frac{l}{g}}.$$

2.106. При падении стержня AB в нем индуцируется на основании (2.43) э.д.с., равная

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{1}{c} Hlv,$$

и на стержень AB , помимо веса (mg), действует согласно (2.23) электродинамическая сила

$$F = \frac{I}{c} lH = \frac{H^2 l^2}{c^2 R} v.$$

которая согласно правилу Ленца направлена вертикально вверх.

Падение стержня определяется дифференциальным уравнением

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{H^2 l^2}{c^2 R} v.$$

Отсюда, полагая начальную скорость стержня равной нулю, находим, что

$$v = \frac{c^2 R}{H^2 l^2} mg \left(1 - e^{-\frac{H^2 l^2}{mc^2 R} t} \right).$$

2.107. Сила тока в контуре определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} + RI = \frac{Hl}{c} v,$$

а падение стержня — дифференциальным уравнением

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{Hl}{c} I.$$

2.108. Сила тока в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{CHl}{c} \frac{dv}{dt}.$$

Падение стержня определяется уравнением

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{Hl}{c} I = mg - \frac{CH^2 l^2}{c^2} \frac{dv}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{1 + \frac{CH^2 l^2}{mc^2}} = \text{const},$$

т. е. стержень падает равноускоренно.

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 1. Токи смещения. Потенциалы электромагнитного поля

3.1. Для плоского конденсатора индукция

$$D = 4\pi\sigma,$$

плотность тока смещения

$$j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{I}{S} = j_{\text{пров}},$$

где $I = \frac{dq}{dt}$ — ток проводимости, S — поверхность обкладки.

3.2. Для цилиндрического конденсатора

$$D = \frac{2\chi}{R}; \quad j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{I}{S} = j_{\text{пров}}.$$

Для сферического конденсатора

$$D = \frac{q}{r^2}; \quad j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{I}{S} = j_{\text{пров}}.$$

3.3. На поверхности проводника

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}; \quad H = \frac{2I}{ca}$$

и имеют указанные на чертеже направления (рис. 46), а потому вектор Умова—Пойнтинга направлен внутрь проводника и по величине равен

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma}.$$

Энергия, поступающая в единицу длины проводника за единицу времени, равна

$$2\pi a S = \frac{I^2}{\pi a^2 \sigma} = RI^2,$$

где $R = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}$ — сопротивление единицы длины проводника.

3.4. При указанных условиях вторая пара уравнений Максвелла (X) может быть записана в виде (с учетом закона Ома (2.2))

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

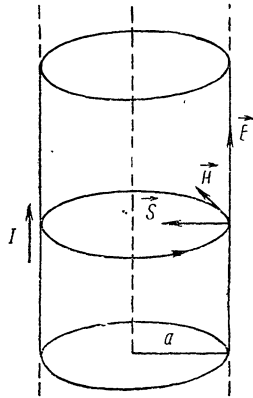


Рис. 46

Если вместо \mathbf{E} и \mathbf{B} подставить их выражения через потенциалы, то с учетом калибровочного соотношения мы получим искомые дифференциальные уравнения для потенциалов.

3.5.

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \Pi) - \nabla^2 \Pi = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Pi,$$

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \operatorname{rot} \Pi + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \Pi.$$

3.6. Из уравнений Максвелла (X), если пренебречь током смещения $\left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t}\right)$, следует, что $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, а потому

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Затем, беря rot от другого уравнения Максвелла, получаем второе требуемое уравнение.

§ 2. Электромагнитные волны в неограниченной среде. Волновые пакеты

3.7. В комплексной форме искомые уравнения имеют вид

$$E_x = A \cdot e^{i(kz - \omega t)}; \quad H_y = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\mu}} A \cdot e^{i(kz - \omega t)},$$

$$E_u = E_z = H_x = H_z = 0,$$

где A — произвольная константа, а

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

3.8. Искомые уравнения имеют вид

$$E_x = 0, \quad H_x = 0,$$

$$E_y = A e^{-i\omega \left(\frac{n}{c} x + t \right)}; \quad H_y = -nA e^{-i\omega \left(\frac{n}{c} x + t - \frac{\pi}{2} \right)};$$

$$E_z = A e^{-i\omega \left(\frac{n}{c} x + t - \frac{\pi}{2} \right)}; \quad H_z = nA e^{-i\omega \left(\frac{n}{c} x + t \right)}.$$

3.9. Искомые уравнения имеют вид

$$E_\Theta = A e^{-\kappa r} \frac{\cos(kr - \omega t)}{r};$$

$$H_\Theta = -\lambda B e^{-\kappa r} \frac{\sin(kr - \omega t + \varphi_0)}{r};$$

$$E_\Psi = B e^{-\kappa r} \frac{\sin(kr - \omega t)}{r};$$

$$H_\Psi = \lambda A e^{-\kappa r} \frac{\cos(kr - \omega t + \varphi_0)}{r};$$

$$E_r = H_r = 0,$$

где r, Θ, Ψ — сферические координаты, а действительные параметры k, κ, λ и φ_0 определяются уравнениями

$$k + i\kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}}; \quad \lambda e^{i\varphi_0} = \sqrt{\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}}.$$

(см. формулы (3.10), (3.6), (3.12) и (3.18)). Отсюда

$$k^2 = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2} + 1 \right\};$$

$$\lambda^2 = \varepsilon \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2};$$

$$\kappa^2 = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2} - 1 \right\};$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_0 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2} - 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2} + 1}.$$

3.10. Если направление распространения волны принять за ось z , то

$$E_x = A \cos \varphi; \quad E_y = B \cos(\varphi + \alpha); \quad E_z = 0,$$

где $\varphi = kz - \omega t$; A , B и α — постоянные.

Исключив из этих уравнений φ , получим

$$\frac{E_x^2}{A^2} - 2 \frac{E_x}{A} \cdot \frac{E_y}{B} \cos \alpha + \frac{E_y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha.$$

Это уравнение эллипса в плоскости (E_x, E_y) .

3.11. Если направление распространения обеих волн принять за ось z и их частоты обозначить через ω_1 и ω_2 , то

$$E_x^{(1)} = A \cos(kz - \omega_1 t); \quad E_x^{(2)} = A \cos(kz - \omega_2 t),$$

$$E_y^{(1)} = A \sin(kz - \omega_1 t); \quad E_y^{(2)} = -A \sin(kz - \omega_2 t).$$

Отсюда для результирующей волны

$$E_x = E_x^{(1)} + E_x^{(2)} = 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \left(kz - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right),$$

$$E_y = E_y^{(1)} + E_y^{(2)} = 2A \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \left(kz - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right).$$

Аналогичные формулы имеют место и для вектора

Н. Это почти линейно-поляризованная волна с частотой $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, направление поляризации которой медленно поворачивается с угловой скоростью $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$.

3.12. Если электрический вектор линейно поляризован, то амплитуду его (с точностью до несущественной начальной фазы) можно считать вещественной и тогда из (3.11) следует, что

$$\mathbf{k}'\mathbf{E}_0 = \mathbf{k}''\mathbf{E}_0 = 0.$$

Если положить $\mathbf{H} = \mathbf{H}'_0 + i\mathbf{H}''_0$, то из (3.12) имеем

$$\mathbf{H}'_0 = \frac{c}{\mu\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0]; \quad \mathbf{H}''_0 = \frac{c}{\mu\omega} [\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0].$$

Отсюда следует, что \mathbf{H}'_0 и \mathbf{H}''_0 лежат в плоскости, проходящей через \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' , и не коллинеарны, а потому магнитный вектор \mathbf{H} описывает эллипс.

Аналогично доказывается и вторая часть задачи.

3.13. Из уравнений Максвелла (X) с учетом того, что $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$, а $\mu = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{E} &= \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H} = \\ &= -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{H} &= \text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c} \text{rot} \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\varepsilon}{c} \text{rot} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \left[\text{grad } \varepsilon \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = \\ &= -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon} [\text{grad } \varepsilon \times \text{rot } \mathbf{H}]. \end{aligned}$$

Итак, окончательно

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \text{grad div } \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon} [\text{grad } \varepsilon \times \text{rot } \mathbf{H}] &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения верны и для проводящей среды, если считать комплексным (3.18).

3.14. а) Поле линейно-поляризованной плоской монохроматической волны описывается уравнениями

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}; \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E} \right],$$

где все параметры вещественные. При этом $\rho = 0$, а потому можно на основании (3.5) положить $\varphi = 0$ и тогда на основании (XVII)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{A};$$

$$\mathbf{A} = -i \frac{c}{\omega} \mathbf{E} = \frac{c}{\omega} \mathbf{E}_0 e^{i(kr - \omega t - \frac{\pi}{2})}.$$

б) Если направление распространения волны принять за направление оси z , то

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t); \quad H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \sin(kz - \omega t).$$

$$E_y = E_0 \sin(kz - \omega t); \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \cos(kz - \omega t);$$

$$E_z = H_z = 0.$$

Вектор-потенциал \mathbf{A} находим по формуле

$$\mathbf{A} = -c \int \mathbf{E} dt.$$

Отсюда

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu}{k} \mathbf{H}.$$

3.15. Если ось z направить вдоль распространения рассматриваемой волны, то (см. уравнения (3.12) и (3.13а))

$$E = E_0 e^{-\frac{\omega}{c} n' z} e^{i\left(\frac{\omega}{c} n' z - \omega t\right)};$$

$$H = \frac{1}{\mu} (n' + in'') E = \frac{1}{\mu} \sqrt{n'^2 + n''^2} E e^{i\varphi_0};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{n''}{n'}.$$

Чтобы вычислить вектор Умова—Пойнтинга, нужно векторы E и H записать в вещественной форме. Имеем

$$E = E_0 e^{-\frac{\omega}{c} n' z} \cos\left(\frac{\omega}{c} n' z - \omega t\right);$$

$$H = \frac{1}{\mu} \sqrt{n'^2 + n''^2} E_0 e^{-\frac{\omega}{c} n' z} \cos\left(\frac{\omega}{c} n' z - \omega t + \varphi_0\right).$$

Отсюда интенсивность волны, т. е. среднее значение вектора Умова—Пойнтинга,

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{c}{4\pi} \overline{E \cdot H} = \frac{c \sqrt{n'^2 + n''^2}}{8\pi\mu} E_0^2 e^{-2\frac{\omega}{c} n' z} \cos \varphi_0 = \\ &= \frac{cn'}{8\pi\mu} E_0^2 e^{-2\frac{\omega}{c} n' z}. \end{aligned}$$

Поток этого вектора через указанную поверхность куба, т. е. через оба основания куба, равен

$$\frac{cn'}{8\pi\mu} E_0^2 a^2 \left(1 - e^{-2\frac{\omega}{c} n' a}\right). \quad (*)$$

С другой стороны, мощность джоулевых потерь в объеме этого куба (см. уравнения (2.5) и (2.2)) равна

$$\begin{aligned} \int \sigma \bar{E}^2 dV &= \int_0^a \sigma \bar{E}^2 a^2 dz = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 a^2 \int_0^a e^{-2\frac{\omega}{c} n' z} dz = \\ &= \frac{ca^2 \sigma E_0^2}{4\omega n''} \left(1 - e^{-2\frac{\omega}{c} n' a}\right), \end{aligned}$$

что совпадает с выражением (*) для потока энергии, если учесть, что на основании (3.19) $n'n'' = \frac{2\pi\sigma\mu}{\omega}$.

3.16. Интенсивность волны

$$\begin{aligned} J &= \frac{c}{4\pi} \overline{[(\operatorname{Re} \mathbf{E}) \times (\operatorname{Re} \mathbf{H})]} = \\ &= \frac{c}{4\pi} \overline{\left[\frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \times \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^*)\right]} = \\ &= \frac{c}{16\pi} \overline{\{[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}] + [\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*]\}}. \end{aligned}$$

Для монохроматической волны векторы E и $H \sim e^{-i\omega t}$, а потому первое и последнее слагаемые при усреднении обращаются в нуль.

Итак,

$$J = \operatorname{Re} \frac{c}{8\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*].$$

Это выражение от времени не зависит и усреднение излишне.

Для случая, рассмотренного в предыдущей задаче, $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} (n' + in'') \mathbf{z}_0$, где \mathbf{z}_0 — единичный вектор оси z .

На основании (3.11) и (3.12) $\mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]$ и $\mathbf{k}^* \mathbf{E} = 0$, а потому

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^+ &= \frac{c^2}{8\pi\mu\omega} [\mathbf{E} \times [\mathbf{k}^* \times \mathbf{E}^*]] = \\ &= \frac{c^2}{8\pi\mu\omega} \mathbf{k}_0^* (\mathbf{E} \mathbf{E}^*) = \frac{cz_0}{8\pi\mu} (n' - in'') |\dot{\mathbf{E}}|^2. \end{aligned}$$

Отсюда интенсивность волны

$$J = \operatorname{Re} \mathbf{S}^+ = \frac{cn'}{8\pi\mu} E_0^2 e^{-2\frac{\omega}{c} n'' z},$$

что совпадает с результатом, полученным в предыдущей задаче.

3.17. Положив $u = \frac{1}{av}$, на основании (3.10) и (3.16) имеем

$$av = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{v} \right) = \frac{1}{v} - \frac{\omega}{v^2} \frac{dv}{d\omega}.$$

Отсюда

$$\frac{dv}{v - av^3} = \frac{d\omega}{\omega}.$$

Интегрируя, находим, что $\omega^2 = \frac{bv^2}{1 - av^2}$, т. е.

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{a\omega^2 + b}},$$

где a и b — постоянные. Отсюда

$$n = \frac{c}{v} = c \sqrt{a + \frac{b}{\omega^2}}.$$

3.18. Для прозрачной среды ε , μ и k вещественны, а потому на основании (3.10), (3.12) и (3.22)

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{d}{d\omega} (\omega\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{d}{d\omega} (\omega\mu) \right\} \mathbf{E}\mathbf{E}^* = \\ &= \frac{1}{2c} \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{d}{d\omega} (\omega\varepsilon) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{d}{d\omega} (\omega\mu) \right\} \bar{S} = \\ &= \frac{1}{2c} \left\{ 2\sqrt{\varepsilon\mu} + \omega \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{d\varepsilon}{d\omega} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{d\mu}{d\omega} \right) \right\} \bar{S}. \end{aligned}$$

С другой стороны, на основании (3.6), (3.10) и (3.15)

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} &= \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega} (\omega n) = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega} (\omega \sqrt{\varepsilon\mu}) = \\ &= \frac{1}{c} \left\{ \sqrt{\varepsilon\mu} + \frac{\omega}{2\sqrt{\varepsilon\mu}} \left(\varepsilon \frac{d\mu}{d\omega} + \mu \frac{d\varepsilon}{d\omega} \right) \right\} = \frac{\bar{W}}{\bar{S}}. \end{aligned}$$

3.19. Указанный электромагнитный импульс можно записать в виде

$$f(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kz - \omega t)} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ik(z - vt)} dk.$$

Отсюда

$$f_0(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikz} dk,$$

т. е. $A(k)$ есть фурье-образ функции $f_0(z)$, а потому

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(z) e^{-ikz} dz = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{k^2 \delta^2}{2}}.$$

Подстановка в исходное уравнение дает

$$f(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \delta} e^{-\frac{(vt-z)^2}{2\delta^2}}.$$

3.20. Электромагнитный импульс можно представить в виде

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega \left(\frac{x}{v} - t\right)} d\omega.$$

Отсюда

$$f_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

т. е. $A(\omega)$ это фурье-образ функции $f_0(t)$, а потому

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) e^{i\omega t} dt = \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = \frac{a}{\pi} \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)T}{2}}{\omega - \omega_0}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в исходную формулу, получим (в вещественной форме)

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)T}{2}}{\omega - \omega_0} \cos(kx - \omega t) d\omega = \\ &= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{2} \frac{(\omega - \omega_0)T}{\hbar}}{\omega - \omega_0} \cos(kx - \omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Искомая спектральная плотность равна

$$\frac{2a}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2} (\omega - \omega_0) T}{\omega - \omega_0}.$$

3.21. При указанном на чертеже (см. рис. 11) выборе осей координат рассматриваемая волна определяется уравнениями

$$E = E_y = A \cos(kx - \omega t); \quad H = H_z = A \cos(kx - \omega t).$$

Магнитный поток через площадь, ограниченную антенной,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_0^a H a dx = aA \int_0^a \cos(kx - \omega t) dx = \\ &= \frac{2aA}{k} \sin \frac{ak}{2} \cos \left(\omega t - \frac{ak}{2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда э. д. с. индукции

$$\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{d\bar{\Phi}}{dt} = 2aA \sin \frac{ak}{2} \sin \left(\omega t - \frac{ak}{2} \right).$$

Тот же результат можно получить по формуле

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} dl = aA (E_{x=a} - E_{x=0}).$$

§ 3. Поляризация вещества в переменном поле

3.22. Подставив в (3.1) вместо $\varepsilon(t)$ ее разложение в ряд Фурье

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

где

$$\varepsilon(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{i\omega t} dt \quad (*)$$

(по определению $\varepsilon(t) = 0$ для $t < 0$) и аналогичные интегралы Фурье для $\mathbf{D}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$. В результате получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} D(\omega) e^{-i\omega t} d\omega =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega') e^{-i\omega'(t-\tau)} d\omega' = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega') e^{-i\omega't} \delta(\omega' - \omega) d\omega' = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\omega) E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.
\end{aligned}$$

Отсюда следует материальное уравнение (3.2), где комплексная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ определяется уравнением (*), из которого с учетом того, что $\varepsilon(t)$ — вещественная функция, следует, что $\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega)$, а потому

$$\varepsilon'(-\omega) + i\varepsilon''(-\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega),$$

т. е.

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega); \quad \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega).$$

3.23. Разлагая $\varepsilon(t)$ в интеграл Фурье, находим

$$\varepsilon(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{i\omega t} dt = - \frac{A}{\sqrt{2\pi} \left(i\omega - \frac{1}{a} \right)},$$

что можно записать в виде

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{1 - ia\omega},$$

где $\varepsilon_0 = \frac{aA}{\sqrt{2\pi}}$ — статическая диэлектрическая проницаемость ($\omega=0$).

3.24. В указанном приближении $\left(\frac{v}{c} \ll 1 \right)$ искомое движение определяется дифференциальным уравнением

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E},$$

где

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Если за начало координат выбрать начальное положение частицы, то можно положить

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (\mathbf{k}r \ll \omega t),$$

и мы получим, полагая начальную скорость равной нулю,

$$\mathbf{r} = -\frac{e}{m\omega^2} \mathbf{E}.$$

3.25. Плотность тока $\mathbf{j} = Nev$, где N — число свободных электронов в единице объема (тяжелые ионы не успевают за быстрыми изменениями направления поля). На основании результатов предыдущей задачи скорость электронов (начальная скорость в среднем равняется нулю)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{e}{m\omega^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt} = i \frac{e}{m\omega} \mathbf{E}.$$

Отсюда

$$\mathbf{j} = i \frac{Ne^2}{m\omega} \mathbf{E},$$

т. е. проводимость

$$\sigma = i \frac{Ne^2}{m\omega}.$$

Вектор электрической индукции

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi N e \mathbf{r} = \mathbf{E} - 4\pi N \frac{e^2}{m\omega^2} \mathbf{E}.$$

Отсюда диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon = 1 - 4\pi \frac{Ne^2}{m\omega^2}.$$

3.26. Из результата, полученного в предыдущей задаче, следует, что при $\omega = \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m}}$, $\epsilon = 0$, а потому

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}r - \omega t)}; \quad \mathbf{H} = 0; \quad \mathbf{D} = \mathbf{B} = 0$$

есть решение уравнений Максвелла ($\rho = j = 0$) при условии, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{k} коллинеарны,

3.27. Направим ось z вдоль поля H_0 . Тогда дифференциальное уравнение движения электрона

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0]$$

в проекциях на декартовы оси координат запишется так:

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} E_x + \frac{eH_0}{mc} \dot{y}; \quad \ddot{y} = \frac{e}{m} E_y - \frac{eH_0}{mc} \dot{x}; \quad \ddot{z} = 0.$$

В переменных u , ε и \mathcal{H} оно примет вид

$$\ddot{u} + i \frac{eH_0}{mc} \dot{u} = \frac{e}{m} \varepsilon, \quad (*)$$

а уравнения Максвелла запишутся так:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{i}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} + \frac{i}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} iNeu. \quad (**)$$

Решение уравнений (*) и (**) можно найти в виде

$$\varepsilon = Ae^{\pm i(kz - \omega t)}; \quad \mathcal{H} = Be^{\pm i(kz - \omega t)}; \quad u = ae^{\pm i(kz - \omega t)}.$$

Подстановка их в уравнения (*) и (**) приводит к следующей системе однородных и линейных относительно A , B и a уравнений:

$$a \left(-\omega^2 \mp \frac{eH_0}{mc} \omega \right) = \frac{e}{m} A; \quad ikA = \frac{\omega}{c} B;$$

$$ikB + \frac{\omega}{c} A = -\omega \frac{4\pi}{c} Nea.$$

Условие разрешимости этих уравнений приводит к двум возможным значениям волнового числа k , а именно

$$n^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - 4\pi \frac{\left(\frac{Ne^2}{m} \right)}{\omega^2 \pm \omega \frac{eH_0}{mc}}.$$

При $H_0=0$ мы получаем отсюда решение предыдущей задачи.

Движение электронов определяется уравнением

$$u = \frac{a}{A} \mathcal{E}; \quad \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \cdot \frac{\mathbf{E}}{\omega^2 \pm \omega \frac{eH_0}{mc}},$$

что при $H_0=0$ совпадает с результатом задачи 3.24.
3.28. На основании (3.16)

$$\frac{1}{u} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{n\omega}{c} \right) = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega}.$$

Используя результат предыдущей задачи, находим

$$n \approx 1 - 2\pi \frac{\left(\frac{Ne^2}{m} \right)}{\omega^2 \pm \omega \frac{eH_0}{mc}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{c} \left\{ 1 + 2\pi \frac{N \frac{e^2}{m}}{\left(\omega \pm \frac{eH_0}{mc} \right)^2} \right\}.$$

3.29. Из результата задачи 3.27 видно, что резонансные явления имеют место, если частота волны $\omega = \frac{eH_0}{mc}$, т. е. при длине волны

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi mc^2}{eH_0} \approx 2,1 \cdot 10^4 \text{ см.}$$

3.30. Направим ось z вдоль постоянного поля H_0 . Уравнение движения электрона в поле монохроматической волны

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} + e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0]$$

в переменных ξ, η, z запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + i2\Omega \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi &= \frac{e}{m} A; & \frac{d^2 \eta}{dt^2} - i2\Omega \frac{d\eta}{dt} + \\ & + \omega_0^2 \eta &= \frac{e}{m} B, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = \frac{e}{m} E_z,$$

где

$$\Omega = \frac{eH_0}{2mc}, \quad A = -\frac{1}{\sqrt{2}}(E_x + iE_y); \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x - iE_y).$$

Отсюда (принимая во внимание, что

$$\frac{d}{dt} = -i\omega)$$

$$\xi = \frac{e}{m} \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\omega\Omega}; \quad \eta = \frac{e}{m} \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\omega\Omega};$$

$$z = \frac{e}{m} \frac{E_z}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Перейдя к переменным x, y, z , получаем

$$x = \frac{e}{m} \frac{aE_x - ibE_y}{a^2 - b^2}; \quad y = \frac{e}{m} \frac{aE_y + ibE_x}{a^2 - b^2}; \quad z = \frac{e}{m} \frac{E_z}{a},$$

где

$$a = \omega_0^2 - \omega^2; \quad b = 2\omega\Omega.$$

Составляющие вектора электрической индукции определяются уравнениями

$$D_x = E_x + 4\pi N e x; \quad D_y = E_y + 4\pi N e y; \quad D_z = E_z + 4\pi N e z$$

Отсюда находим тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{fa}{a^2 - b^2}; & \frac{-ifb}{a^2 - b^2}; & 0 \\ \frac{+ifb}{a^2 - b^2}; & 1 + \frac{fa}{a^2 - b^2}; & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{f}{a} \end{pmatrix},$$

где $f = 4\pi N \frac{e^2}{m}$.

3.31. Если спроектировать уравнение (3.12в) на декартовые оси координат и воспользоваться материаль-

ным уравнением (1.5а); то получим систему однородных уравнений относительно E_x , E_y и E_z .

Приравняв детерминант этой системы нулю и воспользовавшись результатом предыдущей задачи, получим следующее квадратное уравнение относительно v^2/c^2 .

$$\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{xx}^2 - |\varepsilon_{xy}|^2) - \frac{v^2}{c^2} [(1 + \cos^2 \Theta) \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + (1 - \cos^2 \Theta) (\varepsilon_{xx}^2 - |\varepsilon_{xy}|^2)] + (\varepsilon_{xx} \sin^2 \Theta + \varepsilon_{zz} \cos^2 \Theta) = 0,$$

где Θ — угол между направлением волнового вектора (\mathbf{k}_0) и направлением поля H_0 .

3.32. Волна распространяется: а) вдоль поля H_0 ($\Theta=0$). В этом случае фазовая скорость волны определяется уравнением (см. решение предыдущей задачи)

$$\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 (\varepsilon_{xx}^2 - |\varepsilon_{xy}|^2) - 2 \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_{xx} + 1 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\varepsilon_{xx} \pm |\varepsilon_{xy}|}.$$

Подстановка в уравнение (3.12в) с учетом материального уравнения (1.5а) и тензора ε_{ik} , полученного в задаче 3.30, дает, что $E_y = \pm iE_x$; ($E_z = 0$). Это значит, что рассматриваемая волна поляризована по кругу; вправо с показателем преломления $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{xx} + |\varepsilon_{xy}|}$ либо влево с показателем преломления $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{xx} - |\varepsilon_{xy}|}$;

б) поперек поля H_0 ($\Theta = \frac{\pi}{2}$). В этом случае фазовая скорость определяется уравнением

$$\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{xx}^2 - |\varepsilon_{xy}|^2) - \frac{v^2}{c^2} (\varepsilon_{xx}^2 - |\varepsilon_{xy}|^2 + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz}) + \varepsilon_{xx} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{1}{\varepsilon_{zz}}; \quad \frac{v_2^2}{c^2} = \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}^2 - |\varepsilon_{xy}|^2}.$$

Подстановка (3.12в) дает (не уменьшая общности можно положить $k_{0x}=1$; $k_{0y}=k_{0z}=0$), что первое значение фазовой скорости соответствует волне, поляризованной

вдоль поля H_0 , а второе — волне, поляризованной по эллипсу в плоскости xy :

$$\varepsilon_{xx} E_x = i |\varepsilon_{xy}| E_y, \quad E_z = 0$$

(не поперечная волна).

§ 4. Отражение и преломление электромагнитных волн

3.33. На основании (3.22) коэффициент отражения

$$\rho = \frac{\bar{S}_r}{\bar{S}_a} = \frac{R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2}{A_{\parallel}^2 + A_{\perp}^2}.$$

Коэффициент прохождения

$$\delta = \frac{\bar{S}_d}{\bar{S}_a} = \sqrt{\varepsilon} \frac{D_{\parallel}^2 + D_{\perp}^2}{A_{\parallel}^2 + A_{\perp}^2},$$

где $A_{\parallel} = A \cos \Theta$; $A_{\perp} = A \sin \Theta$.

Индексы a , r , d относятся соответственно к падающей, отраженной и преломленной волнам.

На основании формул Френеля (3.20) имеем отсюда, что

$$\rho = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)} \cos^2 \Theta + \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \sin^2 \Theta,$$

$$\delta = \frac{4 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \left\{ \frac{\cos^2 \Theta}{\cos^2(\alpha - \beta)} + \sin \Theta \right\} \sqrt{\varepsilon},$$

где $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$.

3.34. Закон сохранения энергии требует, чтобы энергия, приносимая (за каждую единицу времени на каждую единицу поверхности) падающей волной, равнялась энергии, уносимой отраженной и преломленной волнами, т. е. чтобы

$$J_a \cos \alpha = J_r \cos \alpha + J_d \cos \beta$$

или

$$\cos \alpha = \rho \cos \alpha + \delta \cos \beta.$$

Легко убедиться, что найденные в предыдущей задаче значения ρ и δ удовлетворяют этому требованию.

3.35. Формулы Френеля (3.20) можно записать в виде

$$R_{\parallel} = r_{\parallel} A_{\parallel}; R_{\perp} = r_{\perp} A_{\perp}; D_{\parallel} = d_{\parallel} A_{\parallel}; D_{\perp} = d_{\perp} A_{\perp}.$$

1. Для естественного (неполяризованного) света нужно результат задачи 3.33 усреднить по всевозможным значениям Θ .

Принимая во внимание, что $\cos^2\Theta = \sin^2\Theta = \frac{1}{2}$, получаем

$$\rho = \frac{1}{2}(r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2); \delta = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}(d_{\parallel}^2 + d_{\perp}^2).$$

2. Эллиптически поляризованную волну (a и b — полуоси; φ — угол между полуосью a и плоскостью падения) можно рассматривать как совокупность двух линейно-поляризованных волн с амплитудами a и b . Для них имеем

$$\rho_1 = r_{\parallel}^2 \cos^2 \varphi + r_{\perp}^2 \sin^2 \varphi; \delta_1 = \sqrt{\varepsilon}(d_{\parallel}^2 \cos^2 \varphi + d_{\perp}^2 \sin^2 \varphi),$$

$$\rho_2 = r_{\parallel}^2 \sin^2 \varphi + r_{\perp}^2 \cos^2 \varphi; \delta_2 = \sqrt{\varepsilon}(d_{\parallel}^2 \sin^2 \varphi + d_{\perp}^2 \cos^2 \varphi).$$

Отсюда

$$\rho = \frac{\rho_1 a^2 + \rho_2 b^2}{a^2 + b^2}; \delta = \frac{\delta_1 a^2 + \delta_2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

3.36. Если падающая волна линейно-поляризована, то

$$R_{\parallel} = r_{\parallel} A \cos \Theta; R_{\perp} = r_{\perp} A \sin \Theta; D_{\parallel} = d_{\parallel} A \cos \Theta;$$

$$D_{\perp} = d_{\perp} A \sin \Theta,$$

т. е. отраженная и преломленная волны также линейно-поляризованы в направлениях, составляющих с плоскостью падения соответственно углы

$$\Theta_r = \arctg\left(\frac{r_{\perp}}{r_{\parallel}} \operatorname{tg} \Theta\right); \Theta_d = \arctg\left(\frac{d_{\perp}}{d_{\parallel}} \operatorname{tg} \Theta\right).$$

Если падающая волна эллиптически поляризована, то отраженная и преломленная волны также (вообще говоря) эллиптически поляризованы, ибо состоят из двух волн, сдвинутых по фазе на 90° , амплитуды электриче-

ских векторов которых имеют составляющие

$$R_{\parallel}^{(1)} = r_{\parallel} a \cos \varphi; \quad R_{\perp}^{(1)} = r_{\perp} a \sin \varphi; \quad R_{\parallel}^{(2)} = r_{\parallel} b \sin \varphi;$$

$$R_{\perp}^{(2)} = r_{\perp} b \cos \varphi$$

для отраженной волны и

$$D_{\parallel}^{(1)} = d_{\parallel} a \cos \varphi; \quad D_{\perp}^{(1)} = d_{\perp} a \sin \varphi; \quad D_{\parallel}^{(2)} = d_{\parallel} b \sin \varphi;$$

$$D_{\perp}^{(2)} = d_{\perp} b \cos \varphi$$

для преломленной.

Если падает естественный (неполяризованный) свет, то отраженный и преломленный свет частично поляризованы, ибо

$$r_{\parallel} \neq r_{\perp} \text{ и } d_{\parallel} \neq d_{\perp}.$$

3.37. На основании (XVI) электромагнитная волна переносит в направлении распространения количество движения, объемная плотность которого

$$g = \frac{J}{c^2}.$$

Отсюда искомое давление, т. е. количество движения, сообщаемого за единицу времени единице поверхности в направлении нормали к ней,

$$p = \frac{J_a}{c} \left(\cos \alpha + \rho \cos \alpha - \frac{\delta}{n} \cos \beta \right),$$

где J_a — интенсивность падающей волны. Остальные обозначения те же, что и в задаче 3.35.

3.38. Если в формулы Френеля (3.20) положить

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}},$$

то получим требуемый результат.

3.39. Если в формулы, приведенные в условии предыдущей задачи, положить $n = 1 + \Delta n$ и пренебречь малой величиной (Δn) по сравнению с единицей, то мы получим

$$\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} = \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = \frac{1 - \sqrt{1 + 2\Delta n \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \sqrt{1 + 2\Delta n \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Введя угол скольжения $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha \ll 1$, получаем для коэффициента отражения

$$\rho = \left(\frac{\sqrt{\varphi^2 + 2\Delta n} - \varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 2\Delta n} + \varphi} \right)^2.$$

3.40. Можно воспользоваться формулами Френеля (3.20), положив

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \alpha; \quad \cos \beta = i\kappa, \quad \text{где } \kappa = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \alpha - 1}.$$

Тогда

$$r_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha - i\kappa \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}{\cos \alpha + i\kappa \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}};$$

$$r_{\perp} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cos \alpha - i\kappa}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cos \alpha + i\kappa}.$$

Отсюда $|r_{\parallel}|^2 = |r_{\perp}|^2 = 1$.

Коэффициент отражения

$$\rho = \frac{|r_{\parallel}|^2 A_{\parallel}^2 + |r_{\perp}|^2 A_{\perp}^2}{A_{\parallel}^2 + A_{\perp}^2} = 1.$$

3.41. Прошедшая волна может быть записана в виде

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{D} e^{i(\mathbf{k}_d \mathbf{r} - \omega t)}; \quad \mathbf{H}_d = \sqrt{\varepsilon_2} \left[\frac{\mathbf{k}_d}{k_d} \times \mathbf{E}_d \right].$$

Если границу раздела обеих сред принять за координатную плоскость $z=0$ ($z>0$ соответствует среде с ε_2), а плоскость падения — за координатную плоскость $y=0$, то

$$\mathbf{k}_d \mathbf{r} = k_x^d x + k_z^d z = \frac{\omega}{c} (x \sqrt{\varepsilon_1} \sin \alpha + i\kappa \sqrt{\varepsilon_2} z).$$

Отсюда

$$E_d = D e^{-\kappa \frac{\omega}{v_2} z} \exp \left\{ i \omega \left(\frac{x \sin \alpha}{v_1} - t \right) \right\}.$$

Итак, прошедшая волна распространяется вдоль оси x , т. е. вдоль границы раздела, а затухает вдоль оси z (неоднородная волна). При этом D имеет отличную от нуля составляющую D_{\parallel} , а потому $D_{\kappa} = D_{\parallel} \cos \beta \neq 0$.

3.42. Если положить

$$D_{\parallel} = |D_{\parallel}| e^{i\varphi_{\parallel}} \quad \text{и} \quad D_{\perp} = |D_{\perp}| e^{i\varphi_{\perp}},$$

то при $z=0$ для прошедшей волны имеем (см. предыдущую задачу)

$$E_x = E_{\parallel}^{(d)} \cos \beta = |D_{\parallel}| \kappa e^{i \left[\omega \left(\frac{x \sin \alpha}{v_1} - t \right) + \varphi_{\parallel} + \frac{\pi}{2} \right]},$$

$$E_y = E_{\perp}^{(d)} = |D_{\perp}| e^{i \left[\omega \left(\frac{x \sin \alpha}{v_1} - t \right) + \varphi_{\perp} \right]},$$

$$H_x = -\sqrt{\varepsilon_2} \cos \beta E_y = \kappa \sqrt{\varepsilon_2} |D_{\perp}| e^{i \left[\omega \left(\frac{x \sin \alpha}{v_1} - t \right) + \varphi_{\perp} - \frac{\pi}{2} \right]},$$

$$H_y = \sqrt{\varepsilon_2} (\cos \beta E_x - \sin \beta E_z) = |D_{\parallel}| \sqrt{\varepsilon_2} e^{i \left[\omega \left(\frac{x \sin \alpha}{v_1} - t \right) + \varphi_{\parallel} \right]}.$$

Перейдя к вещественной записи, получаем, что

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{c}{4\pi} (E_x H_y - E_y H_x) = \\ &= \frac{c}{8\pi} \left\{ -\kappa \varepsilon_2 |D_{\parallel}|^2 \sin 2 \left[\omega \left(\frac{x \sin \alpha}{v_1} - t \right) + \varphi_{\parallel} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \kappa \varepsilon_2 |D_{\perp}|^2 \sin 2 \left[\omega \left(\frac{x \sin \alpha}{v_1} - t \right) + \varphi_{\perp} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что среднее значение S_z равно нулю.

3.43. Для электрического вектора отраженной волны имеем

$$R_{\parallel} = r_{\parallel} A_{\parallel}; \quad R_{\perp} = r_{\perp} A_{\perp},$$

где (см. задачу 3.40)

$$r_{\parallel} = \frac{\cos \alpha - i\kappa \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}{\cos \alpha + i\kappa \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}; \quad r_{\perp} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cos \alpha - i\kappa}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cos \alpha - i\kappa}.$$

Положив

$$R_{\parallel} = |R_{\parallel}| e^{i\varphi_{\parallel}}; \quad R_{\perp} = |R_{\perp}| e^{i\varphi_{\perp}},$$

находим

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_{\parallel}}{2} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\kappa}{\cos \alpha}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\perp}}{2} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\kappa}{\cos \alpha}}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_{\perp} - \varphi_{\parallel}}{2} = \frac{\cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\sin^2 \alpha},$$

где $n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ — относительный показатель преломления.

3.44. Отраженная волна остается линейно-поляризованной, если $\varphi_{\perp} - \varphi_{\parallel} = 0$, т. е. если (см. предыдущую задачу) $\cos \alpha = 0$ (скользящее падение).

Поляризация по кругу получится, если $\varphi_{\perp} - \varphi_{\parallel} = \frac{\pi}{2}$, т. е. если $\sin^2 \alpha = \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}$ и если, кроме того, $|R_{\parallel}| = |R_{\perp}|$, т. е. (см. задачу 3.40) если $A_{\parallel} = A_{\perp}$ — падающая волна поляризована под углом в 45° к плоскости падения.

3.45. Интенсивность волны ослабляется лишь при входе и выходе из призмы, а потому (см. 3.20а и решение задачи 3.33)

$$J = \frac{16n^2}{(1+n)^4} J_0.$$

Фаза меняется лишь при отражении. При этом $|R_{\parallel}| = |R_{\perp}|$ и возникает разность фаз (см. задачу 3.43), для которой

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_{\perp} - \varphi_{\parallel}}{2} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 2},$$

а потому вышедшая из призмы волна эллиптически поляризована.

3.46. Запишем падающую (a), отраженную (r) и прошедшую (d) волны в виде

$$E_a = A e^{i(k_a r - \omega_a t)}; \quad E_r = R e^{i(k_r r - \omega_r t)};$$

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{D}e^{i(k_d r - \omega_d t)}; \quad \mathbf{H} = \frac{c}{\omega\mu} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}],$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \left(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right)} = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa).$$

Обычным способом, т. е. из граничных условий для векторов \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{H} на границе обеих сред, получаем

$$\begin{aligned} \omega_a &= \omega_r = \omega_d; \quad \alpha = \gamma; \quad k_1 \sin \alpha = k_2 \sin \beta; \\ (A_{\parallel} - R_{\parallel}) \cos \alpha &= D_{\parallel} \cos \beta; \quad A_{\perp} + R_{\perp} = D_{\perp}; \\ \frac{k_1}{\mu_1} (A_{\parallel} + R_{\parallel}) &= \frac{k_2}{\mu_2} D_{\parallel}; \quad \cos \alpha \frac{k_1}{\mu_1} (A_{\perp} - R_{\perp}) = \\ &= \frac{k_2}{\mu_2} D_{\perp} \cos \beta, \end{aligned}$$

где α , β , γ — углы падения, преломления и отражения

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \alpha \right)^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} &= \frac{k_2 \mu_1 \cos \alpha - k_1 \mu_2 \cos \beta}{k_2 \mu_1 \cos \alpha + k_1 \mu_2 \cos \beta}; \quad \frac{D_{\parallel}}{A_{\parallel}} = \frac{2k_1 \mu_2 \cos \alpha}{k_2 \mu_1 \cos \alpha + k_1 \mu_2 \cos \beta}; \\ \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} &= \frac{k_1 \mu_2 \cos \alpha - k_2 \mu_1 \cos \beta}{k_1 \mu_2 \cos \alpha + k_2 \mu_1 \cos \beta}; \quad \frac{D_{\perp}}{A_{\perp}} = \frac{2k_1 \mu_2 \cos \alpha}{k_1 \mu_2 \cos \alpha + k_2 \mu_1 \cos \beta}; \end{aligned}$$

При нормальном падении

$$\begin{aligned} \frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} &= \frac{\mu_1 k_2 - \mu_2 k_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1}; \quad \frac{D_{\parallel}}{A_{\parallel}} = \frac{2k_1 \mu_2}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1}, \\ \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} &= -\frac{\mu_1 k_2 - \mu_2 k_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1}; \quad \frac{D_{\perp}}{A_{\perp}} = \frac{2k_1 \mu_2}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1}. \end{aligned}$$

3.47. Интенсивность отраженной волны

$$J_r = \rho J_0,$$

где

$$\rho = \frac{|R_{\parallel}|^2 + |R_{\perp}|^2}{|A|^2}.$$

Принимая во внимание, что

$$A_{\parallel} = A \cos \Theta; A_{\perp} = A \sin \Theta,$$

имеем

$$R_{\perp} = r_{\perp} A \cos \Theta; R_{\parallel} = r_{\parallel} A \sin \Theta,$$

где r_{\parallel} и r_{\perp} определяются полученными в предыдущей задаче обобщенными формулами Френеля, если положить

$$\mu_1 = \mu_2 = 1; k_1 = \frac{\omega}{c}; k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega}},$$

а именно

$$r_{\parallel} = \frac{\left(\epsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega}\right) \cos \alpha - \sqrt{\epsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega} - \sin^2 \alpha}}{\left(\epsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega}\right) \cos \alpha + \sqrt{\epsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega} - \sin^2 \alpha}},$$

$$r_{\perp} = \frac{\cos \alpha - \sqrt{\epsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega} - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha + \sqrt{\epsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega} - \sin^2 \alpha}}.$$

Отсюда следует, что отраженная волна эллиптически поляризована, а интенсивность ее

$$J_r = \rho J_0 = J_0 (|r_{\parallel}|^2 \cos^2 \Theta + |r_{\perp}|^2 \sin^2 \Theta).$$

Если $\sigma = \infty$, то $|r_{\parallel}| = |r_{\perp}| = 1$, т. е. $J_r = J_0$ ($\rho = 1$).

3.48. Из формул Френеля (3.20а) следует, что для случая $n = \infty$

$$\mathbf{E}_r = -\mathbf{E}_a, \text{ а потому } \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_a.$$

Итак, на границе раздела, в вакууме $\mathbf{H} = 2\mathbf{H}_a$, а в проводнике $\mathbf{H} = 0$ (см. задачу 3.32).

Отсюда на основании (XXIа) поверхностная плотность токов

$$I = \frac{cH_a}{2\pi} = \frac{cA}{2\pi} \cos \omega t,$$

где амплитуда падающей волны $A = \sqrt{\frac{8\pi J}{c}}$.

3.49. Для этого нужно (см. решение задачи 3.47), чтобы

$$|r_{\parallel}| \cos \Theta = |r_{\perp}| \sin \Theta \text{ и } \varphi_{\parallel} - \varphi_{\perp} = \frac{\pi}{2}.$$

Этими уравнениями определяется угол падения α и угол Θ , образованный плоскостью падения с направлением поляризации падающей волны.

3.50. Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} связаны между собой соотношением

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}}{\mu}} \mathbf{E},$$

где

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}; \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y, z) e^{-i\omega t}.$$

Отсюда, положив $\frac{\tilde{\varepsilon}}{\mu} = \left| \frac{\tilde{\varepsilon}}{\mu} \right| e^{i\varphi}$, получим

$$\mathbf{H} = H_0(x, y, z) e^{-i\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}.$$

Если $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \rightarrow \infty$, то $\frac{\varphi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4}$.

3.51. Эта задача решается обычным способом (см. задачи 3.33, 3.38 и 3.25), а именно

$$r_{\parallel} = \frac{n^2 \cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}; \quad r_{\perp} = \frac{\cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}};$$

$$d_{\parallel} = \frac{2n \cos \alpha}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}; \quad d_{\perp} = \frac{2n \cos \alpha}{\cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}},$$

где

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}.$$

Если $\omega^2 < \frac{4\pi N e^2}{m}$, то $n^2 < 0$, и $\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$ — чисто мнимая величина, для всех значений угла падения α , а потому

$$|r_{\parallel}| = |r_{\perp}| = 1.$$

При этом коэффициент отражения

$$\rho = \frac{|r_{\parallel} A_{\parallel}|^2 + |r_{\perp} A_{\perp}|^2}{|A_{\parallel}|^2 + |A_{\perp}|^2} = 1.$$

3.52. Падающую волну с амплитудой A можно заменить двумя поляризованными по кругу (в противоположные стороны) волнами с амплитудами $\frac{A}{2}$. Отражение и преломление каждой из них определяется формулами Френеля (3.20а) с показателем преломления $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{xx} + |\varepsilon_{xy}|}$ для одной из них и $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{xx} - |\varepsilon_{xy}|}$ для другой (см. задачу 3.32). Отсюда интенсивность отраженной волны

$$J = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} \right|^2 + \left| \frac{n_2 - 1}{n_2 + 1} \right|^2 \right) J_0.$$

Интенсивность прошедшей волны

$$J_d = J_0 - J_r.$$

Отраженная волна состоит из двух поляризованных по кругу волн: одна из них поляризована вправо и имеет амплитуду $R_1 = \frac{1}{2} \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} A$, а вторая — влево и имеет амплитуду $R_2 = \frac{1}{2} \frac{n_2 - 1}{n_2 + 1} A$. Результирующая поляризация эллиптическая. Полуоси этого эллипса $R_1 + R_2$ и $R_1 - R_2$.

Прошедшая волна состоит из вправо поляризованной по кругу волны с амплитудой $D_1 = \frac{1}{n_1 + 1} A$ и влево поляризованной по кругу волны амплитудой $D_2 = \frac{1}{n_2 + 1} A$.

Эти волны распространяются с разными скоростями $v_1 = \frac{c}{n_1}$ и $v_2 = \frac{c}{n_2}$. Обычно $|\varepsilon_{xy}| \ll \varepsilon_{xx}$, а потому направление поляризации прошедшей волны (ось эллипса поляризации) поворачивается вдоль ее распространения (см. решение задачи 3.11).

3.53. Тензор диэлектрической проницаемости, полученный в задаче 3.30, применим к электронному газу, если положить $\omega_0 = 0$.

Отсюда следует, что отраженная волна также поляризована по кругу вправо, а интенсивность ее

$$J_r = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 J_0,$$

где

$$n = \sqrt{\varepsilon_{xx} + |\varepsilon_{xy}|}; \quad \varepsilon_{xx} = 1 + \frac{fa}{a^2 - b^2};$$

$$|\varepsilon_{xy}| = \frac{fb}{a^2 - b^2}; \quad a = -\omega^2;$$

остальные обозначения те же, что и в задаче 3.30.

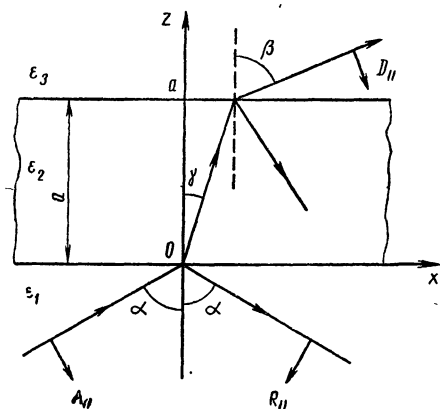


Рис. 47

3.54. Отраженная и прошедшие волны линейно поляризованы в направлении магнитного поля H_0 .

Интенсивность отраженной волны

$$J_r = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 J_0,$$

где.

$$n = \sqrt{\varepsilon_{zz}}.$$

3.55. Обозначим проницаемости и проводимости сред соответственно через $\varepsilon_1 \mu_1 \sigma_1$; $\varepsilon_2 \mu_2 \sigma_2$ (для слоя) и $\varepsilon_3 \mu_3 \sigma_3$ (рис. 47). Остальные обозначения понятны из чертежа (плоскость падения совпадает с плоскостью xz). Элек-

трические векторы падающей (a), отраженной (r) и прошедшей (d) волн можно записать в следующем виде:

$$E_a = A \exp \{i(k_1 x \sin \alpha + k_1 z \cos \alpha - \omega t)\};$$

$$E_r = R \exp \{i(k_1 x \sin \alpha - k_1 z \cos \alpha - \omega t)\};$$

$$E_d = D \exp \{i(k_3 x \sin \beta + k_3 z \cos \beta - \omega t)\}.$$

Внутри слоя

$$E_2 = M \exp \{i(k_2 x \sin \gamma + k_2 z \cos \gamma - \omega t)\} + N \exp \{i(k_2 x \sin \gamma - k_2 z \cos \gamma - \omega t)\}.$$

Во всех случаях магнитный вектор

$$H = \frac{c}{\omega \mu} [k \times E],$$

где $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \left(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right)}$, при этом $k_1 \sin \alpha = k_2 \sin \gamma = k_3 \sin \beta$. Из граничных условий для векторов E и H на плоскости $z = 0$ следует, что

$$\left. \begin{aligned} (A_{\parallel} - R_{\parallel}) \cos \alpha &= (M_{\parallel} - N_{\parallel}) \cos \gamma; \\ \cos \alpha (A_{\perp} - R_{\perp}) \frac{k_1}{\mu_1} &= \cos \gamma (M_{\perp} - N_{\perp}) \frac{k_2}{\mu_2} \\ R_{\perp} + A_{\perp} &= M_{\perp} + N_{\perp}; \\ (A_{\parallel} + R_{\parallel}) \frac{k_1}{\mu_1} &= (M_{\parallel} + N_{\parallel}) \frac{k_2}{\mu_2}. \end{aligned} \right\} (*)$$

На плоскости $z = a$ граничные условия дают

$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma (M_{\parallel} e^{ik_2 a \cos \gamma} - N_{\parallel} e^{-ik_2 a \cos \gamma}) &= D_{\parallel} \cos \beta e^{ik_3 a \cos \beta}; \\ M_{\perp} e^{ik_2 a \cos \gamma} + N_{\perp} e^{-ik_2 a \cos \gamma} &= D_{\perp} e^{ik_3 a \cos \beta}; \\ \frac{k_2}{\mu_2} \cos \gamma (M_{\perp} e^{ik_2 a \cos \gamma} - N_{\perp} e^{-ik_2 a \cos \gamma}) &= \\ &= \cos \beta D_{\perp} \frac{k_3}{\mu_3} e^{ik_3 a \cos \beta}; \\ \frac{k_2}{\mu_2} (M_{\parallel} e^{ik_2 a \cos \gamma} + N_{\parallel} e^{-ik_2 a \cos \gamma}) &= D_{\parallel} \frac{k_3}{\mu_3} e^{ik_3 a \cos \beta}. \end{aligned} \right\} (**)$$

Этими уравнениями однозначно решается задача.

3.56. Положив в уравнения (*) и (**) предыдущей задачи $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = 1$; $k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}$; $k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2}$; $k_3 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_3}$ и исключив из них M_{\parallel} , N_{\parallel} , M_{\perp} и N_{\perp} , получим

$$R_{\parallel} = -rA_{\parallel}; \quad R_{\perp} = rA_{\perp}; \quad D_{\parallel} = dA_{\parallel}; \quad D_{\perp} = dA_{\perp},$$

где

$$r = \frac{a_{12} + a_{23}e^{2ik_2a}}{1 + a_{12}a_{23}e^{2ik_2a}};$$

$$d = \frac{4e^{-ik_2a}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}\right) (e^{-ik_2a} + a_{12}a_{23}e^{ik_2a})};$$

$$a_{ij} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_j/\varepsilon_i}}{1 + \sqrt{\varepsilon_j/\varepsilon_i}}.$$

Коэффициент отражения

$$\rho = |r|^2 = \frac{(a_{12} + a_{23})^2 - 4a_{12}a_{23} \sin^2 k_2a}{(1 + a_{12}a_{23})^2 - 4a_{12}a_{23} \sin^2 k_2a}.$$

Коэффициент прозрачности

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}} |d|^2 = (1 - \rho) \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

3.57. Учитывая, что $k_2a = \frac{\pi}{2}$ и воспользовавшись результатом предыдущей задачи, получим

$$\rho = \left(\frac{a_{12} - a_{23}}{1 - a_{12}a_{23}} \right)^2 = 0,$$

если $a_{12} = a_{23}$, т. е. если $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}$.

3.58. Исключив из уравнений (*) и (**) задачи 3.55 M и N , можно получить

$$R_{\parallel} = \frac{r_{12}^{\parallel} - r_{32}^{\parallel} e^{2i\theta}}{1 - r_{12}^{\parallel} r_{32}^{\parallel} e^{2i\theta}} A_{\parallel}; \quad R_{\perp} = \frac{r_{12}^{\perp} - r_{32}^{\perp} e^{2i\theta}}{1 - r_{12}^{\perp} r_{32}^{\perp} e^{2i\theta}} A_{\perp},$$

где

$$r_{ij}^{\parallel} = \frac{\mu_i k_j \cos \alpha_i - k_i \mu_j \cos \alpha_j}{\mu_i k_j \cos \alpha_i + k_i \mu_j \cos \alpha_j}; \quad r_{ij}^{\perp} = \frac{k_i \mu_j \cos \alpha_i - \mu_i k_j \cos \alpha_j}{k_i \mu_j \cos \alpha_i + \mu_i k_j \cos \alpha_j};$$

$$\Theta = k_2 a \cos \gamma; \quad \alpha_1 = \alpha; \quad \alpha_2 = \gamma, \quad \alpha_3 = \beta.$$

Для рассматриваемого случая Θ и $r_{12} = r_{32}$ вещественны, а потому

$$\left| \frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} \right|^2 = \frac{4r_{12}^{\parallel 2} \sin^2 \Theta}{(1 - r_{12}^{\parallel 2})^2 + 4r_{12}^{\parallel 2} \sin^2 \Theta};$$

$$\left| \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} \right|^2 = \frac{4r_{12}^{\perp 2} \sin^2 \Theta}{(1 - r_{12}^{\perp 2})^2 + 4r_{12}^{\perp 2} \sin^2 \Theta},$$

где $\rho_{12} = r_{12}^2$ — коэффициент отражения на границе воздух—диэлектрик (см. решение задачи 3.47).

3.59. Давление, испытываемое слоем, измеряется количеством движения, которое получает за единицу времени единица поверхности слоя в направлении нормали к ее поверхности.

Если слой находится в воздухе ($\varepsilon = \mu = 1$), то на основании (XVI) получаем, что давление

$$p = \frac{J_a}{c} (1 + \rho - \delta) \cos^2 \alpha,$$

где J_a — интенсивность падающей волны, а ρ и δ — коэффициенты отражения и прохождения, которые можно вычислить из уравнений, полученных в задаче 3.55.

§ 5. Резонаторы и волноводы

3.60. Обозначим индексами 1 и 2 соответственно величины, относящиеся к диэлектрику ($\sigma_1 = 0$) и к идеальному проводнику ($\sigma_2 = \infty$).

Из конечности плотности тока $\mathbf{j}_2 = \sigma_2 \mathbf{E}_2$ следует, что $\mathbf{E}_2 = 0$. Из уравнения Максвелла (X) $\text{rot } \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}$ получаем, что $\mathbf{B}_2 = 0$.

Из граничных условий (XVIIIa) и (XXa) следует, что

$$B_n^{(1)} = 0 \quad \text{и} \quad E_t^{(1)} = 0.$$

3.61. Плотность тока электромагнитной энергии определяется средним значением нормальной составляющей вектора Умова—Пойнтинга (см. задачу 3.16)

$$\begin{aligned} \langle \bar{S}_n \rangle &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*] = \\ &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\zeta \mathbf{H} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{H}_t^* = \frac{c}{8\pi} \zeta' |\mathbf{H}_t|^2 \mathbf{n}, \end{aligned}$$

где $\zeta' = \operatorname{Re} \zeta$.

3.62. Если падающая волна поляризована перпендикулярно плоскости падения, то у поверхности металла (см. рис. 10 и уравнение (3.12))

$$E_t = A_{\perp} + R_{\perp}; \quad H_t = (A_{\perp} - R_{\perp}) \cos \alpha.$$

Подстановка в формулу (см. предыдущую задачу)

$$\mathbf{E}_t = \zeta [\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}]$$

дает

$$A_{\perp} + R_{\perp} = \zeta (A_{\perp} - R_{\perp}) \cos \alpha.$$

Отсюда

$$\frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = - \frac{1 - \zeta \cos \alpha}{1 + \zeta \cos \alpha}.$$

Если падающая волна поляризована параллельно плоскости падения, то

$$E_t = (A_{\parallel} - R_{\parallel}) \cos \alpha; \quad H_t = A_{\parallel} + R_{\parallel},$$

а потому

$$(A_{\parallel} - R_{\parallel}) \cos \alpha = \zeta (A_{\parallel} + R_{\parallel}).$$

Отсюда

$$\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} = \frac{\cos \alpha - \zeta}{\cos \alpha + \zeta}.$$

В случае малого импеданса ($|\zeta| \ll 1$)

$$\frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = - (1 - 2\zeta \cos \alpha);$$

$$\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} = 1 - \frac{2\zeta}{\cos \alpha} \quad (\text{если } \frac{|\zeta|}{\cos \alpha} \ll 1).$$

3.63. Направим ось z вдоль волновода. Тогда зависимость всех величин от z и t дается множителем $e^{i(kz-\omega t)}$. Записав уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

в проекциях на декартовы оси координат и положив $H_z = 0$ и $\frac{\partial}{\partial z} = ik$; $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$, нетрудно получить

$$E_x = \frac{ik}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}; \quad E_y = \frac{ik}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y},$$

$$H_x = -i \frac{\varepsilon \omega}{c \kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}; \quad H_y = i \frac{\varepsilon \omega}{c \kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

а продольная составляющая E_z определяется дифференциальным уравнением

$$\Delta_2 E_z + \kappa^2 E_z = 0,$$

где $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двухмерный оператор Лапласа;

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k^2; \quad v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon \mu}.$$

3.64. На стенках волновода должны выполняться граничные условия (см. задачу 3.60)

$$E_t = 0; \quad H_n = 0.$$

Из полученных в предыдущей задаче уравнений следует, что на любом перемещении по контуру поперечного сечения волновода

$$E_x \delta x + E_y \delta y = \frac{ik}{\kappa^2} \delta E_z = 0.$$

Это обеспечивает выполнение первого из указанных граничных условий.

Далее из тех же уравнений следует, что

$$E_x H_x + E_y H_y = 0, \quad \text{т. е. } \mathbf{E} \perp \mathbf{H},$$

что обеспечивает выполнение второго граничного условия.

3.65. Направим оси x и y вдоль стенок волновода так, чтобы последние определялись уравнениями $x=0$; $x=a$; $y=0$; $y=b$. Как показано в задачах 3.63 и 3.64, все сводится к нахождению такого решения уравнения

$$\Delta_2 E_z + \kappa^2 E_z = 0,$$

которое на стенках волновода обращается в нуль. Ищем решение в виде

$$E_z = X(x) Y(y) e^{i(kz - \omega t)}.$$

Подстановка в исходное уравнение дает, что

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -k_1^2 X; \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_2^2 Y,$$

где

$$k_1^2 + k_2^2 = \kappa^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k^2.$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющие нужным граничным условиям,

$$X = \sin k_1 x; \quad Y = \sin k_2 y,$$

где

$$k_1 = m \frac{\pi}{a}; \quad k_2 = n \frac{\pi}{b}; \quad m, n = 1, 2, 3 \dots$$

Итак, окончательно

$$E_z = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i(kz - \omega t)},$$

где

$$\omega = v \sqrt{k^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Поперечные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} можно вычислить по формулам, полученным в задаче 3.63.

Минимальная частота

$$\omega_{\min} = \frac{\pi c}{ab \sqrt{\epsilon \mu}} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

3.66. Аналогично задаче 3.63, положив в уравнениях Максвелла $E_z=0$, получаем

$$E_x = i \frac{\mu\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}; \quad E_y = -i \frac{\mu\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x};$$

$$H_x = \frac{ik}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad H_y = \frac{ik}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y};$$

$$\Delta_2 H_z + \kappa^2 H_z = 0.$$

3.67. Из полученных в предыдущей задаче формул видно, что составляющая вектора \mathbf{H} в плоскости поперечного сечения равна $\frac{ik}{\kappa^2} \nabla_2 H_z$, а потому условие $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$ эквивалентно требованию $H_n = 0$.

Далее, из тех же формул следует, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ и, кроме того, \mathbf{E} лежит в плоскости поперечного сечения ($E_z=0$), а потому $E_t=0$.

3.68. Аналогично задаче 3.65 ищем решение уравнения

$$\Delta_2 H_z + \kappa^2 H_z = 0$$

в виде

$$H_z = X(x) Y(y) e^{i(kz - \omega t)},$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ удовлетворяют тем же дифференциальным уравнениям, что и в задаче 3.65. Чтобы удовлетворить сформулированному в задаче 3.67 граничному условию, нужно положить

$$X(x) = \cos k_1 x; \quad Y(y) = \cos k_2 y,$$

где k_1 и k_2 принимают те же значения, что и в задаче 3.65, с тем лишь отличием, что $m, n=0, 1, 2, \dots$. Причем одновременно m и n не могут равняться нулю. Этому соответствовало бы $E=H=0$.

Минимальная частота

$$\omega_{\min} = \frac{\pi c}{a \sqrt{\epsilon \mu}} \quad (\text{если } a \geq b).$$

3.69. При этом остается в силе результат, полученный в предыдущих задачах (№ 3.63, 3.64, 3.66 и 3.67).

Направим ось x перпендикулярно проводящим плоскостям, а ось z в направлении распространения волны. Начало поместим на одной из плоскостей:

а) для E -волны имеем (см. задачу 3.65)

$$H_z = 0; \quad E_z = E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} e^{i(kz - \omega t)}; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\omega = v \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$;

б) для H -волны имеем (см. задачу 3.68)

$$E_z = 0; \quad H_z = H_0 \cos \frac{n\pi x}{a} e^{i(kz - \omega t)}; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\omega = v \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$.

Поперечные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} определяются формулами, полученными в задачах 3.63 и 3.66.

3.70. На основании (3.16) с учетом результата, полученного в задаче 3.63, групповая скорость

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} v \sqrt{k^2 + \kappa^2} = v \frac{k}{\sqrt{k^2 + \kappa^2}} = \frac{k v^2}{\omega}.$$

3.71. Искомую энергию можно вычислить, исходя из соотношения

$$J = Wu,$$

где полный поток энергии через сечение волновода

$$J = \int S_z^+ dx dy = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dx dy.$$

Выразив поперечные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} через продольную составляющую E_z по формулам, полученным в задаче 3.63, находим

$$J = \frac{\omega k \varepsilon}{8\pi \kappa^4} \int |\nabla_2 E_z|^2 dx dy.$$

Интегрирование по частям с учетом того, что на контуре сечения $E_z = 0$, дает

$$J = - \frac{\omega k \varepsilon}{8\pi \kappa^4} \int E_z^* \Delta_2 E_z dx dy.$$

И, наконец, принимая во внимание, что (см. задачу 3.63) $\Delta_2 E_z = -\kappa^2 E_z$, получаем

$$J = \frac{\omega k \varepsilon}{8\pi \kappa^2} \int |E_z|^2 dx dy.$$

Подстановка в исходную формулу с учетом результата предыдущей задачи дает требуемый результат.

3.72. Энергия, поглощаемая стенками волновода на единице его длины (за единицу времени),

$$-\frac{dJ}{dz} = \frac{c\zeta'}{8\pi} \oint_l |\mathbf{H}_t|^2 dl.$$

Вследствие малости ζ для \mathbf{H} можно принять его значение при $\zeta=0$. При этом у стенок $H_n=0$.

Выразив поперечные составляющие вектора \mathbf{H} через E_z , (см. задачу 3.63) получаем

$$|\mathbf{H}_t|^2 = |\mathbf{H}|^2 = H_x^* H_x + H_y^* H_y = \frac{\varepsilon^2 \omega^2}{c^2 \kappa^4} |\nabla_2 E_z|^2.$$

Отсюда, воспользовавшись выражением, полученным в предыдущей задаче для потока энергии J находим, что

$$-\frac{1}{J} \frac{dJ}{dz} = \frac{\varepsilon \omega \zeta'}{c k \kappa^2} \frac{\oint_l |\nabla_2 E_z|^2 dl}{\oint_S |E_z|^2 dS} \equiv 2\alpha,$$

т. е. $J = J_0 e^{-2\alpha z}$. Отсюда вытекает требуемое.

3.73. Для H -волны (см. задачу 3.66)

$$|\mathbf{H}_t|^2 = |\mathbf{H}|^2 = H_x^* H_x + H_y^* H_y + H_z^* H_z = |H_z|^2 + \frac{k^2}{\kappa^4} |\nabla_2 H_z|^2$$

Аналогично задаче 3.71 находим, что поток энергии через все сечение волновода

$$J = \frac{c}{8\pi} \int_S (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dS = \frac{\mu k \omega}{8\pi \kappa^2} \int_S |H_z|^2 dS.$$

Отсюда вытекает требуемое (см. решение предыдущей задачи).

3.74. Каждое собственное колебание частоты ω определяется вектором-потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$,

удовлетворяющим уравнениям (см. (3.4) и (3.5)):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0; \quad \Delta A + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A} = 0.$$

Решение последнего уравнения (для каждой декартовой составляющей) ищем в виде

$$A_l(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Подстановка этого решения в указанное уравнение дает

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -k_1^2X; \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = -k_2^2Y; \quad \frac{d^2Z}{dz^2} = -k_3^2Z,$$

где

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям $E_t=0$ и $H_n=0$, достаточно потребовать $A_t=0$ (см. уравнение (XVII)).

Чтобы удовлетворить этому граничному условию и уравнению $\operatorname{div} \mathbf{A}=0$, нужно положить

$$A_x = N_1 \cos k_1x \sin k_2y \sin k_3ze^{-i\omega t};$$

$$A_y = N_2 \sin k_1x \cos k_2y \sin k_3ze^{-i\omega t};$$

$$A_z = N_3 \sin k_1x \sin k_2y \cos k_3ze^{-i\omega t},$$

где $k_1 = n_1 \frac{\pi}{a_1}$; $k_2 = n_2 \frac{\pi}{a_2}$; $k_3 = n_3 \frac{\pi}{a_3}$; $n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots$, а также $k_1N_1 + k_2N_2 + k_3N_3 = 0$ (нулю может равняться лишь одно из чисел n_i). Если $a_1 < a_2$ и $a_2 < a_3$, то наименьшая собственная частота

$$\omega_{\min} = \frac{\pi c}{a_2 a_3} \sqrt{a_2^2 + a_3^2}.$$

3.75. Если ω_0 — собственная частота, то собственное колебание определяется формулами

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y, z) e^{-i\omega_0 t}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y, z) e^{-i\omega_0 t},$$

где \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i \frac{\omega_0}{c} \mathbf{H}_0; \quad \Delta \mathbf{E}_0 + \frac{\omega_0^2}{c^2} \mathbf{E}_0 = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_0 = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i \frac{\omega_0}{c} \mathbf{E}_0; \quad \Delta \mathbf{H}_0 + \frac{\omega_0^2}{c^2} \mathbf{H}_0 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int H_0^2 dV = -\frac{c^2}{\omega_0^2} \int (\operatorname{rot} \mathbf{E}_0)^2 dV.$$

Интегрированием по частям можно показать, что

$$\int_V (\operatorname{rot} \mathbf{E}_0)^2 dV = \oint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0] \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 dS - \int_V \mathbf{E}_0 \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{E}_0) dV.$$

Принимая во внимание, что на поверхности S резонатора $\mathbf{E}_t = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0] = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \int H_0^2 dV &= \frac{c^2}{\omega_0^2} \int \mathbf{E}_0 \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{E}_0) dV = -\frac{c^2}{\omega_0^2} \int \mathbf{E}_0 \nabla^2 \mathbf{E}_0 dV = \\ &= \int E_0^2 dV. \end{aligned}$$

3.76. Обозначим индексами 1 и 2 два различных собственных колебания ($\omega_1 \neq \omega_2$) и положим в приведенном тождестве вместо \mathbf{A} и \mathbf{B} соответственно \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 . Принимая во внимание, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \left(i\omega \frac{\mu}{c} \mathbf{E} \right) = \omega^2 \frac{\epsilon\mu}{c^2} \mathbf{E},$$

получаем

$$\begin{aligned} (\omega_2^2 - \omega_1^2) \frac{\epsilon\mu}{c^2} \int_V \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 dV &= i \frac{\mu}{c} \oint_S \{ [\mathbf{E}_2 \times \omega_1 \mathbf{H}_1] - \\ &- [\mathbf{E}_1 \times \omega_2 \mathbf{H}_2] \} dS = 0, \end{aligned}$$

потому что на поверхности резонатора $E_t = 0$. Отсюда

$$\int_V \mathbf{E}^2 dV = \int_V \left(\sum_j \mathbf{E}_j \right)^2 dV = \sum_j \int_V E_j^2 dV.$$

Аналогично, заменив в приведенном тождестве \mathbf{A} и \mathbf{B} соответственно на \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 , получим

$$\int_V \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 dV = 0,$$

а потому

$$\int_V \mathbf{H}^2 dV = \sum_j \int_V H_j^2 dV.$$

Отсюда непосредственно следует требуемое.

3.77. Положим в указанном тождестве $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{E}_0^*$, (величины, снабженные индексом 0, относятся к случаю отсутствия поглощения, когда поверхностный импеданс $\zeta = 0$, соответствующие величины без индекса относятся к реальному случаю, когда $\zeta \neq 0$, но достаточно мало). Принимая во внимание, что $\text{rot rot } \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}$ и что у стенок резонатора $E_{0t} = 0$, имеем

$$\frac{1}{c^2} (\omega_0^2 - \omega^2) \int_V \mathbf{E} \mathbf{E}_0^* dV = i \frac{1}{c} \omega_0 \oint_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}_0^*] dS.$$

Полагая $\omega_0 + \omega = 2\omega_0$ и $\mathbf{E}_t = \zeta [\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}]$ и учтя результат задачи 3.75, в первом порядке по ζ получаем

$$\omega - \omega_0 = - \frac{ic\zeta}{2} \frac{\oint_S |\mathbf{H}_0|^2 dS}{\int_V |\mathbf{E}_0|^2 dV}.$$

Мнимая часть этого выражения определяет декремент затухания (зависящий, следовательно, от $\text{Re } \zeta$), а действительная — сдвиг собственных частот (зависящий от I и ζ).

§ 6. Излучение и рассеяние электромагнитных волн

3.78. Вращающийся заряд эквивалентен двум взаимно перпендикулярным осцилляторам одинаковой амплитуды

$$x = a \cos \omega t; \quad y = a \sin \omega t; \quad z = 0,$$

сдвинутых по фазе на 90° . Отсюда на основании (3.27а) поле излучения определяется уравнениями

$$\mathbf{E} = \left[\mathbf{H} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right];$$

$$\mathbf{H} = \left\{ \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{x}_0 \right] \cos (kr - \omega t) + \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{y}_0 \right] \sin (kr - \omega t) \right\} \frac{p_0}{r} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2,$$

где \mathbf{x}_0 и \mathbf{y}_0 — единичные векторы осей x и y ; $p_0 = aq$
 Интенсивность излучения (см. (3.28))

$$J = \bar{S} = \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi c^3 r^2} (\sin^2 \Theta_1 + \sin^2 \Theta_2).$$

Обозначим через ϑ и ψ полярные углы, которыми определяется рассматриваемое направление, тогда (рис. 48)

$$\cos \Theta_1 = \sin \vartheta \cos \psi; \quad \cos \Theta_2 = \sin \vartheta \sin \psi$$

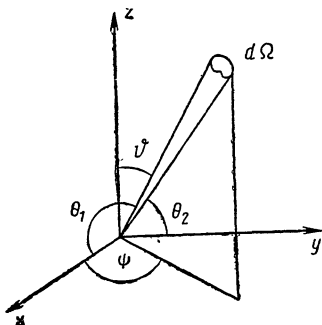


Рис. 48

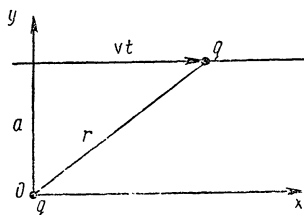


Рис. 49

и интенсивность излучения в этом направлении

$$J = \frac{\omega^4 p_0^2}{4\pi c^3 r^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right).$$

3.79. Дипольный момент системы

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^n q_k \mathbf{r}_k = \frac{q}{m} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k.$$

Так как импульс изолированной системы $\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k \equiv$
 $= \text{const}$, то

$$\ddot{\mathbf{p}} = \frac{q}{m} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k \right) = 0.$$

3.80. Излученная энергия (см. (3.29))

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{v}}^2 dt,$$

где $|\dot{\mathbf{v}}| = \frac{F}{m} = \frac{|qq_1|}{mr^2}$.

Расстояние между частицами (рис. 49)

$$r = \sqrt{a^2 + (vt)^2}.$$

Отсюда

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left(\frac{qq_1}{m} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[a^2 + (vt)^2]^2} = \frac{1}{3} \frac{\pi q^4 q_1^2}{m^2 c^3 a^3 v}.$$

3.81. Мгновенная интенсивность излучения (см. 3.28a)

$$J = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{p}}^2,$$

где дипольный момент системы $\mathbf{p} = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2$.

Поместим начало координат в центре масс ($m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0$) и введем $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, тогда

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.$$

Из уравнения движения

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}$$

($\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса) получаем для мгновенной интенсивности излучения

$$J = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \frac{q_1^2 q_2^2}{r^4}.$$

Эллиптическая траектория движения определяется (в полярных координатах) уравнением

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

где

$$a = \frac{|q_1 q_2|}{2|W|}; \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2|W|M^2}{\mu q_1^2 q_2^2}}.$$

Принимая во внимание, что момент количества движения

$$M = \mu r^2 \dot{\varphi},$$

получаем среднюю интенсивность излучения

$$\bar{J} = \frac{1}{T} \int_0^T J dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} J \frac{\mu r^2}{M} d\varphi,$$

где период обращения

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu r^2}{M} d\varphi = \frac{\mu}{M} a^2 (1 - \varepsilon^2)^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} = \\ &= 2\pi a^2 \frac{\mu}{M} \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Интегрируя, находим

$$\bar{J} = \frac{2^{3/2} |q_1 q_2|^3 |W|^{3/2} \mu^{5/2}}{3c^3 M^5} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \left(3 - \frac{2|W|M^2}{\mu q_1^2 q_2^2} \right).$$

3.82. Из (3.28) следует, что интенсивность дипольного излучения вдоль телесного угла $d\Omega$, имеющего направление единичного вектора \mathbf{n}_0 , определяется формулой

$$dJ = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}_0]^2 d\Omega.$$

Если начало координат поместить в центре масс и ввести относительное смещение зарядов \mathbf{r} (см. решение предыдущей задачи), то

$$\ddot{\mathbf{p}} = \frac{q_1 m_2 - q_2 m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}}.$$

Выберем плоскость относительно m движения за координатную плоскость xy и направим ось x вдоль относи-

тельного движения (см. рис. 49), тогда уравнение движения дает

$$\mu \ddot{r}_x = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{r_x}{r}; \quad \mu \ddot{r}_y = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{r_y}{r},$$

где можно положить

$$r_x = vt; \quad r_y = a = \text{const}; \quad r = \sqrt{a^2 + (vt)^2}.$$

Тогда исходная формула принимает следующий вид:

$$dJ = \frac{q_1^2 q_2^2}{4\pi c^3} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 \{ a^2 (1 - n_{0y}^2) + \\ + v^2 t^2 (1 - n_{0x}^2) - 2avt n_{0x} n_{0y} \} \frac{d\Omega}{(a^2 + v^2 t^2)^3}.$$

Интегрируя по времени (от $-\infty$ до $+\infty$), получаем, что вся энергия, излученная в направлении телесного угла $d\Omega$,

$$dW = \frac{q_1^2 q_2^2}{32c^3 a^3 v} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right)^2 (4 - n_{0x}^2 - n_{0y}^2) d\Omega.$$

Если в полученной формуле положить $m_2 = \infty$ и проинтегрировать по всем направлениям, то мы получим результат задачи 3.80. Проверить это предположение.

3.83. Интенсивность излучаемой (рассеиваемой) электроном энергии (см. (3.29))

$$J = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}}^2,$$

где $\dot{\mathbf{v}} = \frac{e\mathbf{E}}{m}$.

Плотность потока энергии падающей волны

$$J_0 = \frac{c}{4\pi} E^2.$$

Отсюда эффективный поперечник рассеяния

$$\sigma = \frac{J}{J_0} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} r_0^2,$$

где $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ — классический радиус электрона.

3.84. Дифференциальное эффективное сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{dJ}{J_0},$$

где dJ — интенсивность излучения в направлении $d\Omega$.

1. Для случая линейно поляризованной падающей волны

$$dJ = \frac{\sin^2 \Theta}{4\pi c^3} e^2 \dot{\mathbf{v}}^2 d\Omega,$$

где \mathbf{v} и J_0 имеют те же значения, что и в предыдущей задаче; Θ — угол между рассматриваемым направлением рассеяния ($d\Omega$) и направлением поляризации падающей волны. Отсюда

$$d\sigma = r_0^2 \sin^2 \Theta d\Omega.$$

2. Обозначим через A и B полуоси эллипса поляризации и через Θ_1 и Θ_2 — углы, которые они составляют с рассматриваемым направлением рассеяния $d\Omega$.

Эллиптически поляризованную волну можно рассматривать как совокупность двух линейно-поляризованных волн с амплитудами A и B , а потому на основании предыдущего

$$d\sigma = r_0^2 \frac{A^2 \sin^2 \Theta_1 + B^2 \sin^2 \Theta_2}{A^2 + B^2} d\Omega.$$

Направим ось z вдоль направления распространения падающей волны, а оси x и y направим вдоль осей эллипса поляризации (см. рис. 48). Обозначим через ϑ и ψ полярные углы, которыми определяется рассматриваемое направление рассеяния ($d\Omega$), тогда

$$\cos \Theta_1 = \sin \vartheta \cos \psi; \quad \cos \Theta_2 = \sin \vartheta \sin \psi,$$

а потому

$$d\sigma = r_0^2 \left(1 - \sin^2 \vartheta \frac{A^2 \cos^2 \psi + B^2 \sin^2 \psi}{A^2 + B^2} \right) d\Omega.$$

Полное сечение рассеяния

$$\begin{aligned} \sigma = \int d\sigma &= r_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(1 - \sin^2 \vartheta \frac{A^2 \cos^2 \psi + B^2 \sin^2 \psi}{A^2 + B^2} \right) \times \\ &\times \sin \vartheta d\vartheta d\psi = \frac{8}{3} \pi r_0^2. \end{aligned}$$

3. Для неполяризованного света нужно полученное выражение для $d\sigma$ усреднить по всем возможным значениям угла поляризации ψ ($\overline{\cos^2 \psi} = \overline{\sin^2 \psi} = \frac{1}{2}$),

и мы получим

$$\begin{aligned} d\sigma &= r_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \vartheta) d\Omega. \end{aligned}$$

Для линейно-поляризованной составляющей ($B=0$) при заданном ϑ минимум интенсивности рассеянного света соответствует

$$\psi = 0; \quad d\sigma_2 = r_0^2 (1 - \sin^2 \vartheta) d\Omega, \quad \text{а максимум} \quad - \quad \psi = \frac{\pi}{2};$$

$$d\sigma_1 = r_0^2 d\Omega.$$

Отсюда степень деполяризации

$$\frac{J_2}{J_1} = 1 - \sin^2 \vartheta = \cos^2 \vartheta.$$

3.85. Вынужденные колебания квази-упруго связанного электрона в поле линейно-поляризованной монохроматической волны описывается уравнением

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma},$$

где ω_0 — собственная частота электрона; ω — частота световой волны; $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{mc^3}$ — коэффициент радиационного торможения (см. уравнение (3.30)).

Ускорение

$$\dot{\mathbf{v}} = -\omega^2 \mathbf{r}.$$

Повторив выкладки, изложенные в решении задачи 3.82, получим

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \sin^2 \Theta d\Omega,$$

а полный поперечник рассеяния

$$\sigma = \frac{8}{3} \pi r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

3.86. При сделанном допущении действующее на шарик поле можно считать однородным и квазистационарным, а потому приобретаемый шаром дипольный момент (\mathbf{p}) можно рассчитать методами электростатики.

Как было показано (см. задачи 1.120 и 1.123),

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E} = \alpha \mathbf{E}_0 e^{i\omega t},$$

где поляризуемость

$$\alpha = \begin{cases} a^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} & \text{(для диэлектрика).} \\ a^3 & \text{(для проводника).} \end{cases}$$

Этот переменный диполь излучает как диполь Герца, а именно: интенсивность излучения в направлении телесного угла $d\Omega$

$$dJ = \frac{\sin^2 \Theta}{4\pi c^3} (\ddot{\mathbf{p}}^2) d\Omega.$$

Если падающая волна линейно поляризована, то отсюда следует (см. задачу 3.83), что дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 \omega^4}{c^4} \sin^2 \Theta d\Omega.$$

Для случая эллиптически поляризованного или неполяризованного света дифференциальное сечение рассеяния можно вычислить также, как и в задаче 3.84.

3.87. На основании (3.33) в волновой зоне магнитный поляризационный потенциал

$$\Pi_m = \frac{m \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} = \frac{m_0}{r} e^{i(kr - \omega t)},$$

где на основании (3.32) и (XVII)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi_m,$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot rot } \Pi_m.$$

В то время как для электрического диполя на основании (3.25) и (3.24)

$$\Pi_e = \frac{p_0}{r} e^{i(kr - \omega t)},$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \text{rot rot } \Pi_e,$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi_e.$$

3.88. Магнитный момент антенны (см. 2, 18а)

$$m = \pi a^2 \frac{J}{c} \cos \omega t.$$

Отсюда на основании результата предыдущей задачи и уравнения (3.26а) средняя интенсивность излучения

$$J_0 = R_r J_{ef}^2 = \frac{1}{3} \frac{\omega^4 m_0^2}{c^3},$$

а сопротивление излучения

$$R_r = \frac{2\pi^2 a^4 \omega^4}{3c^5} \approx 2 \cdot 10^2 \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^4 \text{ ом.}$$

3.89. Магнитный момент изолированной системы, состоящий из движущихся заряженных частиц (см. уравнение (2.19)),

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_k q_k [\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k],$$

а механический момент, т. е. момент количества движения,

$$\mathbf{M} = \sum_k m_k [\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k] = \text{const.}$$

Если отношение заряда к массе для всех частиц одинаково, то

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \frac{q}{m} \mathbf{M} = \text{const.}$$

Для системы, состоящей из двух частиц, в системе центра масс

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0 \quad \text{и} \quad m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0,$$

а потому

$$[\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2] = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1].$$

Отсюда механический момент

$$\mathbf{M} = \frac{m_1}{m_2} (m_1 + m_2) [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1],$$

а магнитный момент

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}}{2c} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{q_1}{m_1^2} + \frac{q_2}{m_2^2} \right) = \text{const.}$$

3.90. Если направление линейного тока в данной точке его принять за ось z , то, умножив почленно уравнение непрерывности,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$$

на элемент объема тока длиной dz получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (dq) + \frac{\partial}{\partial z} (J dz) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial z} = 0,$$

где $\chi = \frac{dq}{dz}$ — линейная плотность зарядов.

3.91. Направим ось z вдоль прямолинейного тока, тогда должно выполняться граничное условие (см. задачу 3.60)

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = 0,$$

а также уравнение непрерывности (см. предыдущую задачу)

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial z} = 0,$$

На оси z можно пренебречь эффектом запаздывания и положить (см. задачи 1.23, 2.23)

$$\varphi = -\frac{2\chi}{\varepsilon} \ln R; \quad A_z = -\mu \frac{2J}{c} \ln R.$$

Подстановка в исходные уравнения после исключения линейной плотности зарядов χ дает

$$\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0.$$

Отсюда

$$J = Ae^{i(kz - \omega t)} + Be^{-i(kz + \omega t)},$$

где $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}$.

3.92. Искомое поле излучения определяется поляризационным потенциалом (см. уравнение (3.25))

$$\Pi_e(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\mathbf{P}\left(\xi_1 t - \frac{r}{v}\right)}{r} d\xi, \quad \text{где } \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

а потому

$$\mathbf{P} = \frac{i}{\omega} \mathbf{j}_0(\xi) e^{-i\omega t}; \quad \Pi_e = \frac{i}{\varepsilon\omega} e^{-i\omega t} \int \mathbf{j}_0(\xi) \frac{e^{ikr}}{r} d\xi.$$

Отсюда на основании уравнения (3.24) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{grad div } \Pi_e - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2} = \\ &= \frac{i}{\varepsilon\omega} e^{-i\omega t} \int \{(\mathbf{j}_0 \nabla) \nabla + k^2 \mathbf{j}_0\} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi, \\ \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \text{rot } \frac{\partial \Pi_e}{\partial t} = \frac{1}{c} e^{-i\omega t} \int \left[\nabla \times \mathbf{j}_0 \frac{e^{ikr}}{r} \right] d\xi. \end{aligned}$$

3.93. Искомое поле излучения определяется поляризационным потенциалом (см. задачи 3.91, 3.92)

$$\Pi_e = \frac{i}{\varepsilon} e^{-i\omega t} J_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \sin n\pi \left(\frac{\zeta}{l} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{ikr'}}{r'} d\zeta \cdot \zeta_0,$$

где ζ_0 — единичный вектор, имеющий направление антенны $\omega = \frac{\pi n}{l} c$; $k = \frac{n\pi}{l}$, а расстояние (рис. 50)

$$r' = \sqrt{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos \Theta} \approx r \left(1 - \frac{\zeta \cos \Theta}{r} \right); \quad (r \gg l).$$

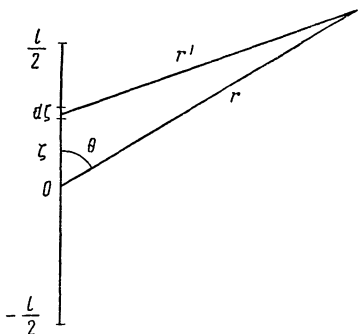


Рис. 50

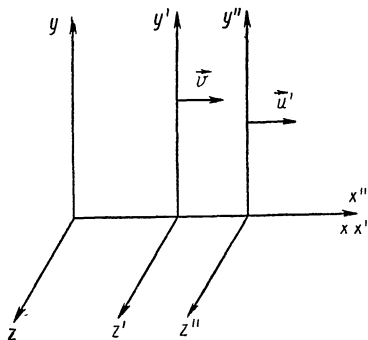


Рис. 51

В знаменателе подынтегрального выражения можно r' заменить на r , а в экспоненте $kr' = kr - k\zeta \cos \Theta$. Введя новую переменную $x = n\pi \left(\frac{\zeta}{l} + \frac{1}{2} \right)$ и интегрируя, находим

$$P_e = \frac{icJ_0}{\omega^2} F(\Theta) \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r},$$

где

$$F(\Theta) = \frac{2 \cos \left(n \frac{\pi}{2} \cos \Theta \right)}{\sin^2 \Theta} \quad (n = 1, 3, 5, \dots),$$

$$F(\Theta) = \frac{i 2 \sin \left(n \frac{\pi}{2} \cos \Theta \right)}{\sin^2 \Theta} \quad (n = 2, 4, 6, \dots).$$

Зная поляризационный потенциал, можно вычислить (см. задачу 3.87) \mathbf{E} и \mathbf{H} . Примем направление антенны ζ_0 за полярную ось, тогда в сферических координатах (см. IV в)

$$\begin{aligned}
 H_{\psi} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \Pi_e = \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} (r \Pi_e^e) = \\
 &= -\frac{\sin \Theta}{cr} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} (r \Pi_e) = \\
 &= -\frac{iJ_0}{c} F(\Theta) \cdot \sin \Theta \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}; \quad H_r = H_{\Theta} = 0.
 \end{aligned}$$

Так как в волновой зоне $E_{\Theta} = H_{\psi}$; $E_r = E_{\psi} = 0$, интенсивность излучения

$$\begin{aligned}
 S_r^+ &= \frac{c}{8\pi} E_{\Theta} H_{\psi}^* = \frac{J_0^2 \sin^2 \Theta \cdot |F(\Theta)|^2}{8\pi cr^2} = \\
 &= \frac{J_0^2}{2\pi cr^2 \sin^2 \Theta} \times \begin{cases} \cos^2 \left(n \frac{\pi}{2} \cos \Theta \right) & (n = 1, 3, 5, \dots), \\ \sin^2 \left(n \frac{\pi}{2} \cos \Theta \right) & (n = 2, 4, 6, \dots). \end{cases}
 \end{aligned}$$

3.94. Аналогично предыдущей задаче находим, что поляризационный потенциал

$$\begin{aligned}
 \Pi_e &= \frac{iJ_0}{\omega} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} e^{ik\xi(1-\cos \Theta)} d\xi = \\
 &= \frac{iJ_0}{\omega} \frac{2 \sin \left\{ \frac{kl}{2} (1 - \cos \Theta) \right\}}{k(1 - \cos \Theta)} \times \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$E_{\Theta} = H_{\psi} = -\frac{2iJ_0}{c} \frac{\sin \Theta \cdot \sin \left\{ \frac{kl}{2} (1 - \cos \Theta) \right\}}{1 - \cos \Theta} \cdot \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}.$$

Интенсивность излучения

$$S_r^+ = \frac{J_0^2 \sin^2 \Theta \cdot \sin^2 \left\{ \frac{kl}{2} (1 - \cos \Theta) \right\}}{2\pi c (1 - \cos \Theta)^2 r^2}.$$

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

§ 1. Релятивистская кинематика. 4-е векторы и тензоры

4.1. Составляющая радиуса-вектора, параллельная скорости \mathbf{v} относительного движения, равна $\mathbf{r} \frac{\mathbf{v}}{v}$, а перпендикулярная составляющая равна $\mathbf{r} - \left(\mathbf{r} \frac{\mathbf{v}}{v}\right) \frac{\mathbf{v}}{v}$.

Первая преобразовывается как координата x в специальном преобразовании (4.1), а вторая не меняется, как координаты y и z , а потому

$$\mathbf{r} \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\mathbf{r}' \frac{\mathbf{v}}{v} + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \mathbf{r} - \left(\mathbf{r} \frac{\mathbf{v}}{v}\right) \frac{\mathbf{v}}{v} = \mathbf{r}' - \left(\mathbf{r}' \frac{\mathbf{v}}{v}\right) \frac{\mathbf{v}}{v},$$

$$t = \frac{t' + \frac{1}{c^2}(\mathbf{r}'\mathbf{v})}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Из первых двух уравнений следует, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \left(\mathbf{r}' \frac{\mathbf{v}}{v}\right) \frac{\mathbf{v}}{v} + \frac{1}{v^2}(\mathbf{r}'\mathbf{v})\mathbf{v} + vt'.$$

4.2. Пусть начало в обеих системах отсчета выбрано произвольно. Обозначим через x_0, y_0, z_0, t_0 и x'_0, y'_0, z'_0, t'_0 пространственно-временные координаты одной и той же мировой точки относительно обеих систем отсчета.

Если эту мировую точку выбрать за общее начало, то в формулах (4.1) и (4.6) следует координаты x_k заменить разностью $x_k - x_{0k}$.

Итак, искомые формулы имеют вид (при указанном на рис. 12 расположении осей координат)

$$x' - x'_0 = \frac{(x - x_0) - v(t - t_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$t' - t'_0 = \frac{(t - t_0) - \frac{v}{c^2}(x - x_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$y' - y'_0 = y - y_0; \quad z' - z'_0 = z - z_0.$$

Формулы (4.6) при этом примут вид (независимо от ориентации осей координат)

$$x'_k - x'_{0k} = \sum_{l=1}^4 a_{kl}(x_l - x_{0l}),$$

а в формулах, полученных в предыдущей задаче, нужно \mathbf{r} и t заменить соответственно на $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ и $(t - t_0)$.

4.3. Рассмотрим три инерциальные системы отсчета (K , K' и K''), которые движутся друг относительно друга вдоль общей оси x (рис. 51). Пусть \mathbf{v} — скорость системы K' относительно K , а \mathbf{u}' — скорость системы K'' относительно K' .

На основании (4.1)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

$$x'' = \frac{x' - u't'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}; \quad t'' = \frac{t' - \frac{u'}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}.$$

Исключив из этих уравнений x' и t' , получим

$$x'' = \frac{x - \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}t}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \right)^2}};$$

$$t'' = \frac{t - \frac{x}{c^2} \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \right)^2}}.$$

Отсюда следует, что скорость системы K'' относительно K

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

4.4. Дифференцируя полученные в задаче 4.1а формулы преобразования, получаем

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}' - \frac{1}{v^2} \mathbf{v} (\mathbf{v} d\mathbf{r}') + \frac{1}{v^2} \mathbf{v} (\mathbf{v} d\mathbf{r}') + v dt';$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} d\mathbf{r}')}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Почленным делением этих уравнений находим

$$\mathbf{u} = \left\{ \mathbf{v} + \mathbf{u}' \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1}{v^2} (\mathbf{v} \mathbf{u}') \mathbf{v} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \right\} \left(1 + \frac{\mathbf{v} \mathbf{u}'}{c^2} \right)^{-1},$$

где $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — скорость относительно системы K ; $\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$ — скорость относительно системы K' .

Возведя в квадрат обе части полученной формулы, нетрудно получить требуемый результат для абсолютной величины результирующей скорости.

4.5. Из полученной в предыдущей задаче формулы для абсолютной величины скорости u легко получить

$$\sqrt{1 - u^2/c^2} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{\mathbf{v} \mathbf{u}'}{c^2}} \sqrt{1 - u'^2/c^2}.$$

4.6. Не уменьшая общности, можно положить

$$v_x = v; v_y = v_z = 0; u'_z = 0; u'_x = u' \cos \Theta'; u'_y = u' \sin \Theta'$$

и тогда, используя результат задачи 4.4, находим

$$u_z = 0;$$

$$u_x = u \cos \Theta = (v + u' \cos \Theta') \cdot \left(1 + \frac{1}{c^2} v u' \cos \Theta' \right)^{-1};$$

$$u_y = u \sin \Theta = u' \sin \Theta' \sqrt{1 - \beta^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{c^2} v u' \cos \Theta'\right)^{-1}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{u' \sqrt{1 - \beta^2} \sin \Theta'}{v + u' \cos \Theta'},$$

где $\Theta(\Theta')$ — угол между направлением скорости $\mathbf{u}(\mathbf{u}')$ и направлением относительного движения обеих систем отсчета.

4.7. На основании (4.5) скорость одного стержня относительно другого

$$u = \frac{2v}{1 + v^2/c^2},$$

а потому на основании (4.4) относительная длина

$$l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} = l_0 \frac{1 - v^2/c^2}{1 + v^2/c^2}.$$

4.8. Дифференцируя формулу преобразования для вектора скорости, полученную в задаче 4.4, находим

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} = & \left\{ \sqrt{1 - \beta^2} d\mathbf{u}' + \frac{1}{v^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \mathbf{v} (v d\mathbf{u}') \right\} \left(1 + \frac{v\mathbf{u}'}{c^2}\right)^{-1} - \\ & - \frac{v}{c^2} d\mathbf{u}' \left\{ \mathbf{v} + \mathbf{u}' \sqrt{1 - \beta^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{v^2} (v\mathbf{u}') \mathbf{v} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \right\} \left(1 + \frac{v\mathbf{u}'}{c^2}\right)^{-2}. \end{aligned}$$

Почленным делением на $dt = dt' \frac{1 + \frac{1}{c^2} v\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = & \frac{1 - \beta^2}{\left(1 + \frac{1}{c^2} v\mathbf{u}'\right)^2} \mathbf{w}' - \frac{v\mathbf{w}'}{c^2} \left\{ \mathbf{u}' + \frac{c^2}{v^2} (1 - \right. \\ & \left. - \sqrt{1 - \beta^2}) \mathbf{v} \right\} \frac{1 - \beta^2}{\left(1 + \frac{1}{c^2} \mathbf{u}'\mathbf{v}\right)^3}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$ — ускорение относительно системы K ,

$w' = \frac{du'}{dt'}$ — ускорение относительно системы K' .

4.9. На основании результата предыдущей задачи ускорение ракеты относительно земли

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{w_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}; \quad \frac{d\beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{w_0 dt}{c}.$$

Интегрируя, находим

$$\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{w_0}{c} t; \quad \beta = \frac{w_0 t}{\sqrt{c^2 + w_0^2 t^2}}.$$

Отсюда, положив $\beta = 0,8$, находим, что продолжительность разгона ракеты по «земным» часам

$$\Delta t = \frac{4}{3} \frac{c}{w_0},$$

а по часам ракеты (на основании (4.3))

$$\Delta t_0 = \int_0^{\Delta t} \sqrt{1 - \beta^2} dt = c \int_0^{\Delta t} \frac{dt}{\sqrt{c^2 + w_0^2 t^2}} = \frac{c}{w_0} \ln 3.$$

4.10. По определению (см. (4.13) и (4.3))

$$w_k = \frac{du_k}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{du_k}{dt}.$$

Отсюда компоненты 4-вектора ускорения

$$w_k \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right); \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right\}.$$

В сопутствующей системе $\beta = 0$ и $\frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 0$,

а потому

$$w_{0k} \left(\frac{dv}{dt}, 0 \right).$$

Отсюда вытекает требуемое.

4.11. При пространственных поворотах время не меняется ($t' = t$), а потому в преобразовании (4.6) $a_{44} = 1$, $a_{4\mu} = a_{\mu 4} = 0$ (греческий индекс пробегает три зна-

чения!) и преобразование (4.9) принимает вид

$$A'_\mu = \sum_{\nu=1}^3 a_{\mu\nu} A_\nu; \quad A'_4 = A_4.$$

4.12. Положив в преобразовании (4.17) $a_{4\mu} = a_{\mu 4} = 0$ и $a_{44} = 1$, получим

$$T'_{\mu\nu} = \sum_{\rho, \sigma=1}^3 a_{\mu\rho} a_{\nu\sigma} T_{\rho\sigma}; \quad T'_{44} = T_{44};$$

$$T'_{\mu 4} = \sum_{\rho=1}^3 a_{\mu\rho} T_{\rho 4}; \quad T'_{4\mu} = \sum_{\rho=1}^3 a_{\mu\rho} T_{4\rho}.$$

4.13. Пусть в некоторой системе отсчета (K) компоненты тензора $T_{kl} = \delta_{kl}$. Тогда в другой системе (K') на основании (4.17) и (4.7)

$$T'_{kl} = \sum_{r, s=1}^4 a_{kr} a_{ls} \delta_{rs} = \sum_{r=1}^4 a_{kr} a_{lr} = \delta_{kl},$$

что и требовалось показать.

4.14. На основании законов преобразования (4.9) и (4.17) и условия ортогональности (4.7)

$$A'_k = \sum_{l=1}^4 T'_{kl} B'_l = \sum_{l=1}^4 \left(\sum_{r, s} a_{kr} a_{ls} T_{rs} \right) \left(\sum_t a_{lt} B_t \right) =$$

$$= \sum_{rst} \left(\sum_l a_{ls} a_{lt} \right) a_{kr} T_{rs} B_t = \sum_{rs} a_{kr} T_{rs} B_s = \sum_r a_{kr} A_r.$$

4.15. На основании (4.9)

$$A'_k = \sum_{m=1}^4 a_{km} A_m,$$

т. е.

$$\sum_l T'_{kl} B'_l = \sum_m a_{km} \sum_n T_{mn} B_n,$$

или на основании (4.17)

$$\sum_l \sum_{m,n} a_{km} a_{ln} T_{mn} B_l' = \sum_{m,n} a_{km} T_{mn} B_n.$$

Из произвольности T_{mn} следует, что

$$B_n = \sum_l a_{ln} B_l',$$

что и требовалось показать.

4.16. На основании (4.17) и (4.7)

$$\text{Sp } T' = \sum_k T'_{kk} = \sum_{krs} a_{kr} a_{ks} T_{rs} = \sum_r T_{rr} = \text{Sp } T.$$

4.17. Элемент 3-мерного объема

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

где dV_0 — элемент объема в сопутствующей системе (размеры движущегося тела меняются лишь в направлении движения). На основании (4.3)

$$dx_4 = icdt = \frac{icd\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Отсюда

$$dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = icdV_0 d\tau = \text{Inv.}$$

4.18.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \sum_{l=1}^4 (x_l - x'_l)^2 \right\}^{-1} = - \left\{ \sum_{l=1}^4 (x_l - x'_l)^2 \right\}^{-2} 2(x_k - x'_k)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} = 2 \left\{ \sum_l (x_l - x'_l)^2 \right\}^{-3} \cdot 4(x_k - x'_k)^2 - 2 \left\{ \sum_k (x_l - x'_l)^2 \right\}^{-2}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} = 0$$

§ 2. Релятивистская электродинамика

4.19. В вакууме поле описывается одним тензором (4.20), а в материальной среде — двумя: напряженности и индукции

$$B_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix};$$

$$H_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix}.$$

При помощи этих тензоров первая пара уравнений Максвелла (X) в релятивистски-ковариантной форме запишется так:

$$\frac{\partial B_{kl}}{\partial x_m} + \frac{\partial B_{mk}}{\partial x_l} + \frac{\partial B_{lm}}{\partial x_k} = 0,$$

а вторая пара (X) — в виде

$$\sum_{l=1}^4 \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l} = \frac{4\pi}{c} j_k.$$

4.20. Из (1.3) и (2.8) следует, что тензор (см. предыдущую задачу) $M_{kl} = \frac{1}{4\pi} (B_{kl} - H_{kl})$ имеет следующие компоненты:

$$(M_{kl}) = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & iP_x \\ -M_z & 0 & M_x & iP_y \\ M_y & -M_x & 0 & iP_z \\ -iP_x & -iP_y & -iP_z & 0 \end{pmatrix}.$$

4.21. Эти формулы выводятся совершенно аналогично формулам (4.26) для вакуума, а именно: совершив специальное преобразование Лоренца над тензорами B_{kl} и H_{kl} (см. задачу 4.19), на основании (4.17) и (4.8)

получаем

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x; & E'_y &= \frac{E_y - \beta B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & E'_z &= \frac{E_z + \beta B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ B'_x &= B_x; & B'_y &= \frac{B_y + \beta E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & B'_z &= \frac{B_z - \beta E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ D'_x &= D_x; & D'_y &= \frac{D_y - \beta H_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & D'_z &= \frac{D_z + \beta H_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ H'_x &= H_x; & H'_y &= \frac{H_y + \beta D_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & H'_z &= \frac{H_z - \beta D_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

4.22. Из того, что приведенные в задаче 4.19 величины образуют тензор второго ранга B_{kl} , следует

$$\sum_{k,l=1}^4 B_{kl} B_{kl} = 2(B^2 - E^2) = \text{Inv.}$$

Аналогично

$$\sum_{k,l=1}^4 H_{kl} H_{kl} = 2(H^2 - D^2) = \text{Inv.}$$

Из полученных в предыдущей задаче формул преобразования получаем

$$E'V' = EV \text{ и } D'H' = DH.$$

4.23. Из полученных в предыдущей задаче инвариантов поля следует, что для этого необходимо, чтобы $E \perp V$.

Если при этом $E > V$, то поле можно свести к чисто электрическому ($B=0$). Если же $E < V$, то поле можно свести к чисто магнитному ($E=0$).

Если поле переменное (в пространстве и во времени), то вышесказанное относится к каждой мировой точке в отдельности.

4.24. Направим ось y вдоль электрического поля, а ось z — вдоль магнитного поля ($E_x = E_z = H_x = H_y = 0$). Тогда в системе K' , движущейся вдоль положительной оси x со скоростью $v = c \frac{E}{H}$, на основании (4.26) имеем,

что

$$E' = 0; \quad H' = H'_z = \sqrt{H^2 - E^2}.$$

4.25. В системе отсчета, связанной с конденсатором, между его обкладками имеется электрическое поле, направленное радиально и напряженность которого (см. задачи 1.11 и 1.23)

$$E = \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \frac{V}{R}.$$

Кроме того, там имеется и магнитное поле, силовые линии которого коаксиальны с обкладками конденсатора и напряженность которого $H = \frac{2J}{cR}$ (см. задачу 2.38).

Как показано в предыдущей задаче, если $\frac{2J}{c} > \frac{V}{\ln \frac{b}{a}}$, то в системе отсчета, движущейся вдоль тока со

скоростью $v = c \frac{E}{H} = c^2 \frac{V}{2J \ln \frac{b}{a}}$, в конденсаторе имеется

лишь магнитное поле, напряженность которого

$$H' = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4J^2}{c^2} - \frac{V^2}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^2}}$$

(если потенциал наружной обкладки конденсатора ниже потенциала внутренней обкладки).

4.26. Направим ось x в сторону тока внутри положительно заряженного цилиндра. Как было получено (см. задачу 1.70 и 2.31), электростатический потенциал поля заряженных цилиндров и вектор-потенциал магнитного поля токов определяются формулами

$$\varphi = 2\chi \ln \frac{R_1}{R_2}; \quad A_x = \frac{2J}{c} \ln \frac{R_1}{R_2}; \quad A_y = A_z = 0,$$

где R_1 и R_2 — расстояния рассматриваемой точки поля от токов.

В системе отсчета, движущейся вдоль оси x , поле описывается 4-вектором потенциала (4.10), компоненты

которого определяются преобразованием (4.9), а именно

$$A'_x = \frac{\frac{2J}{c} - \beta 2\chi}{\sqrt{1 - \beta^2}} \ln \frac{R_1}{R_2}; \quad A'_y = A'_z = 0.$$

Отсюда видно, что в системе отсчета, движущейся в указанном направлении со скоростью $v = \frac{J}{\chi}$, вектор-потенциал $\mathbf{A}' = 0$, а потому там нет магнитного поля. При условии, разумеется, что $J < c\chi$.

4.27. Для материальной среды с показателем преломления n волновой вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n \cdot \mathbf{k}_0,$$

где \mathbf{k}_0 — единичный вектор направления распространения волны.

Записав специальное преобразование Лоренца для 4х-мерного волнового вектора (4.12), получим

$$\omega n \cos \Theta = \frac{\omega_0 n_0 \cos \Theta_0 + \beta \omega_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \omega n \sin \Theta = \omega_0 n_0 \sin \Theta_0,$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1 + \beta n_0 \cos \Theta_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где Θ — угол, который составляет направление распространения волны \mathbf{k} с направлением движения \mathbf{v} диэлектрика; Θ_0 — то же, в «собственной» системе отсчета, относительно которой диэлектрик покоится.

Последняя формула представляет собою обобщение формулы доплер-эффекта (4.24) на случай материальной среды.

Из первых двух формул находим, что

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{n_0 \sin \Theta_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{n_0 \cos \Theta_0 + \beta}.$$

Это обобщение формулы (4.25).

И, наконец, исключив из полученных формул ω и Θ , получим, что показатель преломления движущегося ди-

электрика

$$n = \frac{\sqrt{n_0^2 + \beta^2(1 - n_0 \sin^2 \Theta_0) + 2n_0\beta \cos \Theta_0}}{1 + \beta n_0 \cos \Theta_0}.$$

Он зависит не только от скорости (v) движения диэлектрика, но и от направления (Θ_0) распространения света.

4.28. Дифференцируя (4.25), получаем

$$d \cos \Theta' = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \Theta)^2} d \cos \Theta.$$

Отсюда и из (4.24) непосредственно следует

$$\omega'^2 \sin \Theta' d\Theta' = \omega^2 \sin \Theta d\Theta.$$

4.29. В «собственной» системе отсчета K_0 , относительно которой заряд q покоится в начале координат, поле определяется потенциалами

$$\mathbf{A} = 0; \quad \varphi_0 = -iA_{04} = \frac{q}{r_0}.$$

В «лабораторной» системе отсчета K , относительно которой заряд движется со скоростью v вдоль оси x , на основании (4.9) и (4.8)

$$A_1 = \frac{A_1^0 - i\beta A_4^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \varphi_0; \quad A_2 = A_3 = 0;$$

$$A_4 = \frac{i\beta A_1^0 + A_4^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = i \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Принимая во внимание, что

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \frac{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

получаем окончательно

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}}; \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c} \varphi.$$

4.30. В «собственной» системе отсчета K_0

$$E_x^0 = \frac{q}{r_0^3} x_0; \quad E_y^0 = \frac{q}{r_0^3} y_0; \quad E_z^0 = \frac{q}{r_0^3} z_0; \quad \mathbf{H}_0 = 0.$$

Напряженность поля в «лабораторной» системе можно вычислять по формулам преобразования (4.26), а именно

$$E_x = E_x^0; \quad E_y = \frac{E_y^0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad E_z = \frac{E_z^0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \mathbf{H} = \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right],$$

где x_0, y_0, z_0 и r_0 нужно выразить через x, y, z и t , как в предыдущей задаче. Для E_x , например, имеем

$$E_x = \frac{q(1-\beta^2)(x-vt)}{[(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}}.$$

Тот же результат можно получить по формулам (XVII), воспользовавшись результатом предыдущей задачи.

4.31. На основании (XVI) и результатов предыдущей задачи

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{1}{4\pi c} \int \left[\mathbf{E} \times \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right] \right] dV = \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int \left\{ \frac{\mathbf{v}}{c} E^2 - \mathbf{E} \left(\mathbf{E} \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right\} dV. \end{aligned}$$

Если ось x направить вдоль движения электрона, то

$$G_x = \frac{v}{4\pi c^2} \int (E^2 - E_x^2) dV = \frac{v}{4\pi c^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \int (E_{0y}^2 + E_{0z}^2) dV_0,$$

$$G_y = -\frac{v}{4\pi c^2} \int E_{0x} E_{0y} dV_0; \quad G_z = -\frac{v}{4\pi c^2} \int E_{0x} E_{0z} dV_0.$$

Здесь учтено, что $dV = dV_0 \sqrt{1-\beta^2}$.

В «собственной» системе отсчета поле обладает центральной симметрией, а потому

$$\int E_{0x} E_{0y} dV_0 = \int E_{0x} E_{0z} dV_0 = 0;$$

$$\int E_{0y}^2 dV_0 = \int E_{0z}^2 dV_0 = \frac{1}{3} \int E_0^2 dV_0.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{v}}{6\pi c^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \int E_0^2 dV_0.$$

а потому электромагнитная масса

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $m_0 = \frac{4}{3} \frac{W_0}{c^2}$ — масса покоя, $W_0 = \frac{1}{8\pi} \int E_0^2 dV_0$ — энергия электростатического поля покоящегося электрона.

4.32. Из того, что вектор поляризации \mathbf{P} и вектор намагничивания \mathbf{M} образуют 4-тензор (см. задачу 4.20), вытекают формулы преобразования для этих векторов. Дипольные моменты, электрический (\mathbf{p}) и магнитный (\mathbf{m}), преобразуются соответственно как произведения $\mathbf{P} \cdot V$ и $\mathbf{M} \cdot V$, где $V = V_0 \sqrt{1-\beta^2}$.

Таким путем получаем, что

$$p_x = p_{0x} \sqrt{1-\beta^2}; \quad p_y = p_{0y} - \beta m_{0z}; \quad p_z = p_{0z} + \beta m_{0y},$$

$$m_x = m_{0x} \sqrt{1-\beta^2}; \quad m_y = m_{0y} + \beta p_{0z}; \quad m_z = m_{0z} - \beta p_{0y},$$

где \mathbf{p}_0 и \mathbf{m}_0 — дипольные моменты тела в «собственной» системе отсчета, относительно которой оно покоится, а \mathbf{p} и \mathbf{m} — дипольные моменты в системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью $v = v_x = c\beta$.

4.33. В «собственной» системе отсчета, относительно которой диполь покоится в начале координат, поле определяется формулами (см. задачу 1.29)

$$\varphi_0 = \frac{\mathbf{p}_0 \mathbf{r}_0}{r_0^3}; \quad \mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}_0 \mathbf{r})}{r_0^5} \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{p}_0}{r_0^3}.$$

Электромагнитное поле равномерно и прямолинейно движущегося диполя можно определить в результате специального лоренц-преобразования (см. задачу 4.30 и 4.29) по формулам

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c} \varphi; \quad E_x = E_{0x}; \quad E_y = \frac{E_{0y}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E_x = \frac{E_{0z}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \mathbf{H} = \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right],$$

где вектор \mathbf{r}_0 следует заменить вектором с компонентами

$$\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z \right).$$

4.34. В системе отсчета, связанной с зеркалом, частоту падающего света можно вычислить по формуле (4.24), а именно

$$\omega_1 = \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega_0.$$

Такую же частоту в этой системе отсчета имеет и отраженный свет, но в исходной (лабораторной) системе отсчета на основании (4.24) его частота

$$\omega = \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega_1 = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \omega_0.$$

4.35. В системе отсчета, связанной с зеркалом, на основании (4.25), угол падения определяется уравнением

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha - \beta}{1 - \beta \cos \alpha}.$$

Таким же, в этой системе отсчета, будет и угол отражения, а в «лабораторной» системе отсчета, на основании (4.25), угол отражения определяется уравнением

$$\cos \alpha'' = \frac{\cos \alpha' - \beta}{1 - \beta \cos \alpha'} = \frac{(1 + \beta^2) \cos \alpha - 2\beta}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \alpha}.$$

§ 3. Релятивистская механика

4.36. 1. Если сила направлена вдоль движения, то из (4.31) и (4.32) следует

$$\begin{aligned} E &= \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dv}{dt} + \\ &+ \frac{mv}{(\sqrt{1 - \beta^2})^3} \left(\frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \right). \end{aligned}$$

При этом

$$v(v dv) = v(v dv) = v^2 dv,$$

а потому

$$F = \frac{m}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt},$$

т. е. продольная масса

$$m_t = \frac{m}{(1 - \beta^2)^{3/2}}.$$

2. Если сила перпендикулярна к скорости, то из (4.33) и (4.34) следует, что $\beta = \text{const}$, а потому

$$\mathbf{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

т. е. поперечная масса

$$m_t = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

4.37. Направим ось x вдоль поля и за начало координат выберем начальное положение частицы. Тогда, интегрируя уравнение движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = qE,$$

получаем

$$v = \frac{q}{m} Et \left[1 + \left(\frac{qEt}{mc} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$x = \int_0^t v dt = \frac{mc^2}{qE} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc} \right)^2} - 1 \right\}; \quad y = z = 0.$$

4.38. Действующая сила (см. 2.24)

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$$

работы не производит ($\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$), а потому (см. задачу 4.36) дифференциальное уравнение движения можно записать в виде

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Отсюда следует, что движение будет таким же, как и в нерелятивистском случае (см. задачу 2.80), но с иной массой.

4.39. Для этого достаточно убедиться в том, что приведенные уравнения Лагранжа верны в декартовых координатах, ибо, как известно, уравнения Лагранжа эквивалентны вариационному принципу

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

а последний не зависит от выбора координат.

Итак, относительно декартовой координаты x ,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{q}{c} \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right),$$

$$\tilde{p}_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{q}{c} A_x,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) + \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} \right).$$

Подстановка в уравнение Лагранжа дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= q \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + \\ &+ \frac{q}{c} \left\{ \dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right\}, \end{aligned}$$

что совпадает с проекцией на ось x уравнения движения (4.31) заряженной частицы в электромагнитном поле. При этом учтены уравнения (4.32) и (XVII).

4.40. При этом замене $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \rightarrow -\mathbf{v}$, а потому (см. предыдущую задачу) функция Лагранжа и уравнения Лагранжа не меняются.

4.41. При заданном условии (см. задачу 4.39) $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$, а потому соответствующий обобщенный импульс

$$\tilde{p}_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{q}{c} A_z = \text{const.}$$

4.42. Для постоянного магнитного поля, обладающего осевой симметрией (см. задачу 4.39) $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, а потому

соответствующий обобщенный импульс

$$\tilde{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{mR^2\dot{\theta}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{q}{c} RA_\theta = \text{const.}$$

При этом учтено, что в цилиндрических координатах

$$v^2 = \dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2.$$

4.43. Направим ось z вдоль магнитного поля \mathbf{H} .

Движение происходит в плоскости $z = \text{const.}$ Интегрируя уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \frac{q}{c} H\dot{y} - \eta\dot{x}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{y}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= -\frac{q}{c} H\dot{x} - \eta\dot{y}, \end{aligned}$$

получим

$$\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{q}{c} H\dot{y} - \eta\dot{x}; \quad \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{q}{c} H\dot{x} - \eta\dot{y}.$$

Отсюда

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\frac{q}{c} H\dot{x} + \eta\dot{y}}{\frac{q}{c} H\dot{y} - \eta\dot{x}}, \quad \text{или} \quad \frac{q}{c} H(x\dot{x} + y\dot{y}) = \eta(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

В полярных координатах (R, θ)

$$x\dot{x} + y\dot{y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} R^2 \right) = R\dot{R}; \quad x\dot{y} - y\dot{x} = |[\mathbf{R} \times \mathbf{v}]| = R^2\dot{\theta},$$

а потому

$$\frac{q}{c} HR\dot{R} = \eta R^2\dot{\theta}.$$

Интегрируя, находим уравнение искомой траектории в полярных координатах:

$$R = R_0 e^{\frac{c\eta}{qH} \theta}.$$

4.44. Из (4.37) вытекают искомые формулы преобразования, а именно для специального Лоренц-преобразования имеем на основании (4.9) и (4.8), что

$$\frac{F_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left\{ \frac{F'_x}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} + \frac{\beta}{c} \frac{\mathbf{F}'\mathbf{u}'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \right\},$$

$$\frac{F_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{F'_y}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}; \quad \frac{F_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{F'_z}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}.$$

Используя результат задачи 4.5, находим окончательно, что

$$F_x = \frac{F'_x + \frac{v}{c^2} (\mathbf{F}'\mathbf{u}')}{1 + \frac{\mathbf{v}\mathbf{u}'}{c^2}};$$

$$F_y = F'_y = F'_y \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + \frac{\mathbf{v}\mathbf{u}'}{c^2}};$$

$$F_z = F'_z \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + \frac{\mathbf{v}\mathbf{u}'}{c^2}}.$$

4.45. В системе отсчета, относительно которой заряды покоятся, при указанном на чертеже (рис. 52) выборе осей координат сила, действующая на заряд q_1 ,

$$F' = F'_y = \frac{q_1 q_2}{a^2}.$$

По формулам, полученным в предыдущей задаче, находим, что в исходной («лабораторной») системе отсчета на заряд q_1 действует сила

$$F = F_y = \frac{q_1 q_2}{a^2} \sqrt{1-v^2/c^2}.$$

4.46. 1. Из (4.34) следует, что

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{W} \right)^2},$$

2. Из (4.35) имеем

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{mc^2 + T} \right)^2}.$$

3. Из (4.32) получаем

$$v = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}.$$

4.47. Из законов сохранения энергии и импульса имеем

$$m_\pi c^2 = \frac{m_\mu c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + W_\nu; \quad \frac{m_\mu c\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{W_\nu}{c}.$$

Исключив из этих уравнений энергию нейтрино W_ν , находим

$$\beta = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}.$$

Подстановка в (4.35) дает, что кинетическая энергия μ -мезона

$$T = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2}{2m_\pi} c^2.$$

4.48. Обозначим 4-векторы энергии-импульса электрона, позитрона и фотона соответственно через p_- , p_+ и k .

Согласно закону сохранения энергии-импульса, при превращении фотона в пару должно выполняться равенство $k = p_- + p_+$, или $k^2 = p_-^2 + p_+^2 + 2p_-p_+$. Из (4.15) и (4.36) следует, что $p_-^2 = p_+^2 = -m^2c^2$; $k^2 = 0$ (k^2 — квадрат

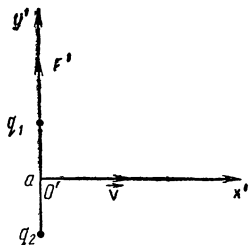


Рис. 52

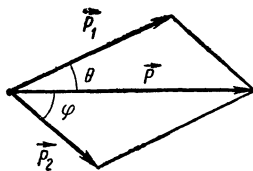


Рис. 53

«длины» вектора $k - k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = k^2 - \left(\frac{W}{c}\right)^2$ и аналогично для любого 4-вектора), а потому должно выполняться равенство

$$p_- p_+ = \mathbf{p}_- \cdot \mathbf{p}_+ - \frac{W_- W_+}{c^2} = m^2 c^2,$$

что невозможно, ибо

$$\frac{W_{\pm}}{c} \geq |\mathbf{p}_{\pm}|.$$

4.49. Обозначим через W_2 и \mathbf{p}_2 энергию и импульс частицы M после столкновения, а через \mathbf{p} и \mathbf{p}_1 — импульс частицы m до и после столкновения.

На основании законов сохранения энергии и импульса имеем

$$W + Mc^2 = W_1 + W_2,$$

$$p = p_1 \cos \Theta + p_2 \cos \varphi; \quad p_1 \sin \Theta = p_2 \sin \varphi,$$

где Θ и φ — углы, которые составляют векторы \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 с направлением вектора \mathbf{p} (рис. 53).

При помощи (4.36) можно импульсы p , p_1 и p_2 выразить через энергии W , W_1 и W_2 . После этого можно из приведенных уравнений исключить φ и W_2 и мы получим

$$(W - W_1) Mc^2 - W \cdot W_1 + \\ + \sqrt{(W^2 - m^2 c^4)(W_1^2 - m^2 c^4)} \cos \Theta + m^2 c^4 = 0.$$

Этим решается поставленная задача.

Для рассеяния фотона ($m=0$; $W=h\nu$) на неподвижном свободном электроном M получаем отсюда формулу Комптона

$$\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{Mc^2} (1 - \cos \Theta).$$

4.50. Примем неподвижное ядро за начало полярных координат (r, Θ) . На основании законов сохранения энергии и момента количества движения имеем

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{Ze^2}{r} = \text{const} \equiv W;$$

$$\frac{mr^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\Theta}{dt} = \text{const} \equiv mh,$$

где

$$v^2 = c^2\beta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2.$$

Исключив из этих уравнений β и t , получим

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\Theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{c^2}{h^2} \left[\left(\frac{W + \frac{Ze^2}{r}}{mc^2}\right)^2 - 1 \right].$$

Положим

$$u = \frac{1}{r}; \quad \frac{du}{d\Theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\Theta}.$$

Тогда последнее уравнение примет вид

$$\left(\frac{du}{d\Theta}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2}{h^2} \left[\left(\frac{W + Ze^2u}{mc^2}\right)^2 - 1 \right].$$

Дифференцируя его по Θ , получаем

$$\frac{d^2u}{d\Theta^2} + u \left(1 - \frac{Z^2e^4}{m^2c^2h^2}\right) = \frac{Ze^2W}{m^2c^2h^2}. \quad (*)$$

В нерелятивистском случае, как известно, траектория определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2u}{d\Theta^2} + u = \text{const},$$

решением которого есть эллипс

$$u = \text{const} (1 + \varepsilon \cos \Theta).$$

Введем новую переменную $\varphi = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\Theta$, где $\alpha = \frac{Z^2e^4}{m^2c^2h^2}$. Тогда с точностью до высших степеней малой

поправки α ($\alpha \ll 1$) уравнение (*) примет вид

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = A; \quad A = \frac{Ze^2 W}{m^2 c^2 \hbar^2 (1 - \alpha)},$$

решением которого есть

$$u = A \left\{ 1 + \varepsilon \cos \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \Theta \right\}.$$

Этим уравнением описывается «почти» эллиптическая траектория, которая процессирует вокруг ядра: за один оборот электрона ось эллипса поворачивается на угол $\alpha\pi$.

4.51. На основании закона сохранения энергии-импульса

$$p = k_1 + k_2 \quad \text{или} \quad p^2 = 2k_1 k_2,$$

где p , k_1 и k_2 — 4-векторы энергии-импульса π_0 -мезона и фотонов ($k_2^1 = k_2^2 = 0$).

Отсюда

$$-m^2 c^2 = 2 \left(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 - \frac{W^2}{c^2} \right) = 2 \frac{W^2}{c^2} (\cos \Theta - 1),$$

где $W = \frac{1}{2} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, а потому

$$\sin^2 \frac{\Theta}{2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}.$$

4.52. Величины, относящиеся к «собственной» системе отсчета, обозначим индексом 0. В этой системе отсчета вероятность того, что γ -квант вылетит в направлении телесного угла $d\Omega_0 = 2\pi \sin \Theta_0 d\Theta_0$, равна

$$dn = \frac{d\Omega_0}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \Theta_0 d\Theta_0.$$

На основании (4.25) в «лабораторной» системе отсчета соответствующая вероятность вылета в направлении телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta$, равна

$$dn = \frac{1}{2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \Theta)^2} \sin \Theta d\Theta.$$

2. Если в «лабораторной» системе отсчета один из γ -квантов вылетает под углом Θ , то в «собственной» системе отсчета ему соответствует на основании (4.25) угол Θ_0 , для которого

$$\cos \Theta_0 = \frac{\cos \Theta - \beta}{1 - \beta \cos \Theta}.$$

При этом второй γ -квант вылетит под углом $\Theta'_0 = \pi - \Theta_0$, которому соответствует в «лабораторной» системе

$$\cos \Theta_1 = \frac{\cos \Theta'_0 + \beta}{1 + \beta \cos \Theta'_0} = \frac{\beta - \cos \Theta_0}{1 - \beta \cos \Theta_0} = \frac{2\beta - (1 + \beta^2) \cos \Theta}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \Theta}$$

3. В системе отсчета, связанной с мезоном, каждый из γ -квантов обладает энергией $\frac{mc^2}{2}$, а в «лабораторной» системе отсчета на основании (4.24) их энергии таковы:

$$\hbar\omega = \frac{mc^2}{2} \frac{1 + \beta \cos \Theta_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{mc^2}{2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \Theta) \sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\hbar\omega_1 = \frac{mc^2}{2} \frac{1 + \beta \cos \Theta'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{mc^2}{2} \frac{1 - 2\beta \cos \Theta + \beta^2}{(1 - \beta \cos \Theta) \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

4.53. На основании законов сохранения энергии и импульса имеем

$$mc^2 + \Delta W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \hbar\omega,$$

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

Из второго уравнения находим

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^2 + 1}.$$

Подстановка в первое уравнение дает, что

$$\omega = \frac{\Delta W}{\hbar} \left(1 - \frac{\Delta W}{2mc^2 + 2\Delta W}\right),$$

4.54. Согласно законам сохранения энергии и импульса,

$$M = \frac{m_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}; \quad \frac{m_1\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{m_2\beta_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}.$$

Решая эти уравнения относительно β_1 и β_2 , находим по (4.35) кинетические энергии образовавшихся частиц:

$$T_1 = \frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2M} c^2; \quad T_2 = \frac{(M - m_2)^2 - m_1^2}{2M} c^2.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Введение	
Ортогональные координаты	5
Некоторые формулы векторного исчисления	8
Система уравнений Максвелла	9
ЗАДАЧИ	
Часть I. Электростатика	
Основные формулы	13
§ 1. Закон Кулона	20
§ 2. Теорема Остроградского — Гаусса	21
§ 3. Потенциал. Дифференциальное уравнение Пуассона—Лапласа	22
§ 4. Емкостные коэффициенты. Конденсаторы. Теорема взаимности Грина	27
§ 5. Энергия и силы взаимодействия. Максвелловский тензор натяжений	29
§ 6. Метод электрических изображений	32
Часть II. Стационарные и квазистационарные токи и магнитные поля	
Основные формулы	36
§ 1. Закон постоянного тока	44
§ 2. Закон Био и Савара	45
§ 3. Вектор-потенциал. Дифференциальное уравнение Пуассона—Лапласа	47
§ 4. Циркуляция магнитного вектора. Магнетик в однородном поле	49
§ 5. Взаимодействие токов. Коэффициенты индуктивности	51
§ 6. Закон электромагнитной индукции. Квазистационарные токи	55
Часть III. Переменное электромагнитное поле	
Основные формулы	60
§ 1. Токи смещения. Потенциалы электромагнитного поля	69
§ 2. Электромагнитные волны в неограниченной среде. Волновые пакеты	70

	Стр.
§ 3. Поляризация вещества в переменном поле	72
§ 4. Отражение и преломление электромагнитных волн	74
§ 5. Резонаторы и волноводы	77
§ 6. Излучение и рассеяние электромагнитных волн	80
Часть IV. Специальная теория относительности и основы электродинамики движущихся тел	
Основные формулы	83
§ 1. Релятивистская кинематика. 4-векторы и тензоры	89
§ 2. Релятивистская электродинамика	92
§ 3. Релятивистская механика	94
ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	
Часть I. Электростатика	
§ 1. Закон Кулона	97
§ 2. Теорема Остроградского—Гаусса	102
§ 3. Потенциал. Дифференциальное уравнение Пуассона—Лапласа	106
§ 4. Емкостные коэффициенты. Конденсаторы. Теорема взаимности Грина	123
§ 5. Энергия и силы взаимодействия. Максвелловский тензор натяжений	131
§ 6. Метод электрических изображений	140
Часть II. Стационарные и квазистационарные токи и магнитные поля	
§ 1. Закон постоянного тока	158
§ 2. Закон Био и Савара	163
§ 3. Вектор-потенциал. Дифференциальное уравнение Пуассона—Лапласа	168
§ 4. Циркуляция магнитного вектора. Магнетик в однородном поле	177
§ 5. Взаимодействие токов. Коэффициенты индуктивности	182
§ 6. Закон электромагнитной индукции. Квазистационарные токи	198
Часть III. Переменное электромагнитное поле	
§ 1. Токи смещения. Потенциалы электромагнитного поля	209
§ 2. Электромагнитные волны в неограниченной среде. Волновые пакеты	211
§ 3. Поляризация вещества в переменном поле	219
§ 4. Отражение и преломление электромагнитных волн	226
§ 5. Резонаторы и волноводы	239
§ 6. Излучение и рассеяние электромагнитных волн	248
Часть IV. Специальная теория относительности и основы электродинамики движущихся тел	
§ 1. Релятивистская кинематика. 4-векторы и тензоры	261
§ 2. Релятивистская электродинамика	268
§ 3. Релятивистская механика	275

ЕФИМ ГЕРШОВИЧ ВЕКШТЕЙН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Редактор *Е. А. Шаповал*
Редактор издательства *Г. Е. Перковская*
Переплет художника *Л. М. Чернышева*
Технический редактор *Г. Г. Киселева*
Корректор *В. В. Капусткина*

Т-13400 Сдано в набор 3/III 1966 г. Подписано к печати 31/X 1966 г.
Формат 84×108^{1/32} Объем 9,0 печ. л. Усл. п. л. 15,12
Уч.-изд. л. 12,75 Изд. № ФМ—183 Заказ 859
Тираж 25 000 экз. Цена 46 коп.

БЗ—46/15 от 21/VI 1966 г.

Москва, И-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Отпечатано с набора типографии изд-ва МГУ,
в Московской тип. № 4 Главполиграфпрома

Комитет по печати при Совете Министров СССР. Б. Переяславская, 46

**СБОРНИК
ЗАДАЧ
ПО ЭЛЕКТРО-
ДИНАМИКЕ**

Е. Г. ВЕКШТЕЙН