И. Н. ВЕКУА

НОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

11-5-4

Редактор *Р. М. Гутерман.* Техн. редактор *А. И. Сипелёва.*

Подписано к печати 22/X 1948 г. 18,5 печ. л. 19,96 уч.-изд. л. 43 140 тип. зн. в печ. л. Тираж 5 000 экз. А-07593. Цена книги 12 р. Переплёт 2р. Заказ № 653.

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР, Москва, Трёхпрудный, 9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава третья

Граничные задачи

Глава четвёртая

Общие представления решений системы дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа и его применения

Глава пятая

Общие представления решений одного класса дифференциальных уравнений эллиптического типа высшего порядка и их применения

I. Общие представления решений уравнения (M)

II. Граничные задачи

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава шестая

Приложения в теории упругости

I. Плоская задача стационарных колебаний упругого цилиндра

II. Изгиб тонких пластинок

III. Применения к теории тонкой сферической оболочки

IV. Применения к теории тонких пологих упругих оболочек

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методы и результаты теории функций комплексной переменной всё шире и глубже проникают в различные теоретические и прикладные дисциплины. Особенно большая и плодотворная работа проведена в этом направлении в Советском Союзе. Благодаря применению этих методов советским учёным удалось получить первоклассные результаты в теории чисел, теории упругости, гидродинамике и др.

В этой книге, на базе теории функций комплексной переменной, развиваются специальные методы для изучения одного класса дифференциальных уравнений эллиптического типа, охватывающего много важных уравнений математической физики. Эти методы, в отличие от известных общих методов, позволяют глубже проникнуть в природу решений такого рода уравнений и полнее раскрыть их свойства. С их помощью удаётся по-новому подойти к изучению классических проблем, а также исследовать ряд новых задач, имеющих важное теоретическое и прикладное значение. Например, эти методы позволили исследовать ряд новых граничных задач общего вида, которые в целом ряде важных для практики случаев решаются эффективно.

Книга написана главным образом на базе собственных исследований автора, проводимых им в течение ряда лет в Математическом институте им. А. М. Размадзе Академии Наук Грузинской ССР и на Физико-математическом факультете Тбилисского государственного университета имени И. В. Сталина, причём значительная часть этих результатов публикуется здесь впервые. Кроме того, первые три параграфа главы IV написаны на основе ещё не опубликованных результатов А. В. Бицадзе.

При написании этой книги я часто обращался за советами к академику Н. И. Мусхелишвили, который всегда с неослабным вниманием следил за ходом моей работы и давал мне весьма ценные указания. Поэтому считаю своим приятным долгом выразить ему искреннюю благодарность. Выражаю глубокую благодарность также А. В. Бицадзе и М. И. Вишику, которые оказали мне большую помощь в процессе подготовки и печатания этой книги.

И. Векуа

ВВЕДЕНИЕ

В этой книге систематически применяется теория функций комплексной переменной к изучению линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа с аналитическими коэффициентами, зависящими от двух независимых переменных.

В первой главе выводятся формулы, выражающие все регулярные решения дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа через аналитические функции одной комплексной переменной в односвязных и в многосвязных плоских областях. Эти общие представления решений задаются линейными операторами, сопоставляющими каждой паре аналитических функций $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ комплексных переменных $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$ определённое, вообще говоря, комплексное решение данного уравнения. Ядра этих операторов выражаются при помощи так называемой функции Римана, которая зависит лишь от коэффициентов уравнения и строится в общем случае методом последовательных приближений; в отдельных конкретных случаях функция Римана и, следовательно, ядра вышеупомянутых операторов выражаются в явном виде через известные специальные функции (Бесселя, Лежандра и др.).

Эти общие представления весьма чётко выявляют структурные особенности всего класса решений дифференциальных уравнений и дают возможность распространить ряд предложений, известных для класса аналитических функций одной комплексной переменной, на класс функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям эллиптического типа. Кроме того, они находят важные применения при изучении граничных задач, а также в теории специальных функций.

Во второй главе изучаются вопросы аппроксимации и разложения в ряд решений дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. Пользуясь общими представлениями, мы строим так называемые полные системы частных решений дифференциального уравнения, которые обладают следующим свойством: *всякое регулярное в данной области решение можно приблизить равномерно внутри области линейными комбинациями частных решений, принадлежащих какой-нибудь полной системе.*

Глава третья посвящена изучению весьма общего вида линейных граничных задач, когда в краевых условиях наряду с граничными значениями искомого решения фигурируют также его производные до некоторого определённого порядка.

В четвёртой главе изучаются вопросы интегрирования системы определённого вида дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа и выводятся общие представления решений её, с помощью которых изучаются граничные задачи.

Пятая глава посвящена изучению специального класса дифференциальных уравнений порядка выше второго, весьма важного с точки зрения приложений, так как многие задачи математической физики, например теория упругих пластинок и оболочек, приводят к уравнениям рассматриваемого нами класса. Здесь выводятся общие формулы, выражающие все регулярные решения дифференциальных уравнений упомянутого класса через аналитические функции комплексной переменной, и с их помощью доказываются различные свойства решений. В частности, эти формулы применяются к изучению граничных задач.

В последней, шестой, главе даются некоторые приложения результатов предыдущих глав к теории упругости. Здесь рассматриваются уравнения плоских стационарных колебаний упругого цилиндра, изгиба и устойчивости пластинок, тонкой сферической оболочки и пологих упругих оболочек и выводятся общие представления их решений через аналитические функции комплексной переменной. С помощью полученных общих формул решены основные граничные задачи для односвязной области в случае плоского колебания цилиндра; решена также краевая задача для сферического сегмента с закреплённым краем.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В этой главе выводятся формулы, дающие общие представления через голоморфные функции одной комплексной переменной решений уравнений вида

$$E(u)=\Delta u+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=f(x, y),$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа и a, b, c, f — заданные аналитические функции переменных x, y в некоторой области $\mathfrak{T}$ плоскости oxy. В первых трёх параграфах мы излагаем материал, имеющий для дальнейшего вспомогательное значение.

§ 1. О некоторых основных понятиях, терминах и обозначениях. В этом параграфе мы даём разъяснение некоторых основных терминов, понятий и обозначений, которыми будем часто пользоваться в дальнейшем.

1°. Упорядоченную совокупность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть *точкой* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Эти числа, которые могут принимать вообще комплексные значения, будем называть *координатами точки*. Точку иногда будем обозначать одной буквой.

Множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям

$$|x_1-x_1^0|<\rho, \quad |x_2-x_2^0|<\rho, \ldots, |x_n-x_n^0|<\rho, \tag{1.1}$$

где $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — некоторая фиксированная точка, а ρ — некоторое положительное число, будем называть *ρ-окрестностью точки* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Предельной точкой множества $\mathfrak{M}$ назовём точку, любая ρ-окрестность которой содержит бесконечную совокупность точек множества $\mathfrak{M}$. Через $\mathfrak{M}'$ мы будем обозначать множество предельных точек множества $\mathfrak{M}$. Множество $\mathfrak{M}+\mathfrak{M}'$ называется *замыканием* множества $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$, то множество $\mathfrak{M}$ называется *замкнутым*, а если $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ называется *плотным в себе*. Множество, одновременно замкнутое и плотное в себе, называется *совершенным*.

Замкнутое множество называется *связным*, если нельзя его разложить на два непустых замкнутых множества без общих точек. Замкнутое связное множество называется *континуумом*. В частности, *точка является континуумом*. Если континуум содержит более одной точки, то он является *совершенным связным* множеством.

Внутренней точкой множества называется такая его точка, для которой существует ρ-окрестность, состоящая целиком из точек данного множества.

Внешней точкой множества называется точка, обладающая ρ-окрестностью, не содержащей ни одной точки данного множества.

Точка, не являющаяся ни внутренней, ни внешней точкой для данного множества, называется его *граничной точкой*. Совокупность граничных точек множества называется его *границей*. Нетрудно доказать, что *граница — замкнутое множество*.

Точечное множество $\mathfrak{M}$ называется *открытым*, если всякая его точка является внутренней точкой.

Открытое множество называется *связным*, если его нельзя представить в виде суммы двух открытых непересекающихся множеств. Связное открытое множество называется *областью*.

Очевидно, любая ρ-окрестность какой-нибудь точки является областью. Множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, когда переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ изменяются независимо друг от друга соответственно в областях $T_1, T_2, \ldots, T_n$ комплексной плоскости, является также областью. Такая область называется *цилиндрической* и обозначается обычно через $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$. Например, ρ-окрестность точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ представляет собой цилиндрическую область; в этом случае T_k есть круг

$$|x_k - x_k^0| < \rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \tag{1.2}$$

Плоскость, дополненную бесконечно удалённой точкой, назовём *полной плоскостью*. При помощи стереографической проекции полная плоскость отображается взаимно однозначно и конформно на поверхность единичной сферы.

2°. Пусть на множестве $\mathfrak{M}$ точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана некоторая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Будем говорить, что функция f удовлетворяет *условию Гельдера* на $\mathfrak{M}$, если для любых двух точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ множества $\mathfrak{M}$ имеет место неравенство:

$$|f(x_1', x_2', \ldots, x_n') - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < K \sum_{k=1}^{n} |x_k' - x_k|^{\alpha}, \tag{1.3}$$

где K и α — положительные постоянные, $0 < \alpha \leqslant 1$, которые не зависят от выбора точек $(x_1', \ldots, x_n')$, $(x_1, \ldots, x_n)$.

Функции, удовлетворяющие условию (1.3), очевидно, непрерывны на $\mathfrak{M}$. Такие функции будем называть также функциями, *непрерывными в смысле Гельдера* на $\mathfrak{M}$. Те свойства таких функций, которые нам понадобятся в дальнейшем, изложены в книге акад. Н. И. Мусхелишвили [1] (см. гл. 1).

3°. Пусть L — простая (замкнутая или разомкнутая) плоская кривая, заданная уравнениями

$$x = x(s), \quad y = y(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant l), \tag{1.4}$$

где $x(s)$, $y(s)$ — непрерывные функции, причём $x(s_1) + iy(s_1) \neq \neq x(s_2) + iy(s_2)$, если

$$0 < |s_2 - s_1| < l, \quad 0 \leqslant s_1 \leqslant l, \quad 0 \leqslant s_2 \leqslant l.$$

В случае замкнутой кривой, кроме того, имеем: $x(s+l) = x(s)$, $y(s+l) = y(s)$.

Если функции $x(s)$ и $y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$ и $y'(s)$ на сегменте $[0, l]$, не обращающиеся одновременно в нуль, то кривую L будем называть *гладкой*. Если L — простая гладкая кривая, то угол $\theta(s)$, составленный касательной к L в точке $(x(s), y(s))$ с каким-нибудь постоянным направлением, является непрерывной функцией на сегменте $[0, l]$. Если $x'(s)$ и $y'(s)$ непрерывны в смысле Гельдера на сегменте $[0, l]$, то $\theta(s)$ также будет непрерывной в смысле Гельдера на L. Такие кривые в дальнейшем будем называть *кривыми, гладкими в смысле Гельдера*.

Мы будем в дальнейшем пользоваться также терминами «*кусочно-гладкая кривая*» и «*кусочно-гладкая в смысле Гельдера кривая*», смысл которых ясен без разъяснений.

4°. Пусть T — плоская область, дополнение которой до полной плоскости состоит из $m+1$ непересекающихся континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, причём C_0 содержит бесконечно удалённую точку, а $C_1, \ldots, C_m$ — ограниченные множества; в частности, C_0 может состоять только из одной бесконечно удалённой точки; также и некоторые из $C_1, \ldots, C_m$ или все они могут содержать лишь по одной точке. Такие области мы будем называть $(m+1)$-*связными областями*. При $m=0$ область T будем называть *односвязной*, а при $m > 0$ — *многосвязной*.

Пусть $L_0, L_1, \ldots, L_m$ — границы $C_0, C_1, \ldots, C_m$ соответственно. Тогда границей области T будет множество $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$.

Если $L_0, L_1, \ldots, L_m$ — простые гладкие кривые, то область T будем называть *областью класса A*, а если $L_0, L_1, \ldots, L_m$ суть простые гладкие в смысле Гельдера кривые, то область T будем называть *областью класса Ah*.

5°. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *аналитической в точке* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если существует такая ρ-окрестность этой точки, внутри которой имеет место разложение:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} a_{k_1 \ldots k_n} (x_1 - x_1^0)^{k_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{k_n}, \quad (1.5)$$

где $a_{k_1 \ldots k_n}$ — постоянные. Нетрудно доказать, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно *внутри* указанной окрестности [1]) и что

$$a_{k_1 \ldots k_n} = \frac{1}{k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right)_{\substack{x_1 = x_1^0, \\ \cdots\cdots \\ x_n = x_n^0}}, \quad (1.6)$$

т. е. (1.5) является рядом Тейлора функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ — аналитическая в любой точке множества $\mathfrak{M}$, то говорят, что она является *аналитической на этом множестве*.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — аналитическая функция действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некоторой области D пространства n измерений. Тогда *существует единственная функция $f^*(z_1, \ldots, z_n)$ комплексных переменных $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$, аналитическая в некоторой области D^* пространства $2n$ измерений, которая совпадает с $f(x_1, \ldots, x_n)$ при $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$, причём, очевидно, $D \subset D^*$.* Функция $f^*(z_1, \ldots, z_n)$ называется *аналитическим продолжением* функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из области действительных значений аргументов $x_1, \ldots, x_n$ в область их комплексных значений.

Это обстоятельство, доказательство которого мы здесь не приводим, позволяет аргументам аналитической функции действительных переменных придавать также комплексные значения. Конечно, эти комплексные аргументы имеют определённую область изменения, которая зависит от характера заданной функции; вообще, мнимые части этих комплексных аргументов должны быть достаточно малыми. Но если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ такова, что её ряд Тейлора сходится для всех действительных значений аргументов, то тогда её аргументам можно придавать любые комплексные значения. Такие функции будем называть *целыми функциями*.

6°. Пусть T — область в плоскости комплексной переменной z. В дальнейшем через $\overline{T}$ будем обозначать зеркальное отображение

---

[1]) Когда мы говорим, что ряд сходится равномерно внутри области, это значит, что ряд равномерно сходится на всяком замкнутом подмножестве этой области.

области T относительно действительной оси. Если T симметрична относительно этой оси, то T и $\overline{T}$, очевидно, совпадают.

Пусть переменная z изменяется в T. Тогда сопряжённая переменная $\bar{z}$ будет изменяться в $\overline{T}$. Если $f(z)$ — голоморфная функция в T, то сопряжённая с ней функция $\overline{f(z)}$ будет, очевидно, голоморфной функцией от $\bar{z}$ в $\overline{T}$.

§ 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка эллиптического типа в канонической форме. Приведение к нормальному виду. 1°. Как известно, линейное дифференциальное уравнение второго порядка эллиптического типа с двумя независимыми переменными всегда можно привести к следующей так называемой *канонической форме*:

$$E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y), \qquad \text{(E)}$$

где Δ — оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, коэффициенты a, b, c и свободный член f дифференциального уравнения (E) — заданные функции переменных x, y; $u(x, y)$ — искомая функция, называемая *решением* уравнения (E).

Во всём дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициенты a, b, c и свободный член f уравнения (E) являются аналитическими функциями в некоторой области $\mathfrak{T}$ плоскости $z = x + iy$. Область $\mathfrak{T}$ мы будем называть областью задания уравнения (E).

При $f(x, y) = 0$ уравнение (E) будем называть *однородным* и обозначать через (E_0).

Пусть T — некоторая область, принадлежащая $\mathfrak{T}$. Если функция $u(x, y)$ имеет в области T непрерывные частные производные первого и второго порядков и удовлетворяет уравнению (E), то мы будем её называть *регулярным решением* этого уравнения. Если решение $u(x, y)$ уравнения (E) является аналитической функцией в области T, то его мы будем называть *аналитическим решением*.

Решение $u(x, y)$ уравнения (E), его коэффициенты a, b, c и свободный член f являются вообще комплексными функциями действительных аргументов x, y. Тот случай, когда $u(x, y)$ вместе с функциями a, b, c принимает действительные значения при действительных аргументах x, y, мы будем всегда оговаривать особо, причём в этом случае будем называть $u(x, y)$ *действительным решением* уравнения.

Наряду с уравнением (E) рассмотрим также следующее уравнение:

$$E^*(v) = \Delta v - \frac{\partial av}{\partial x} - \frac{\partial bv}{\partial y} + cv = f^*, \qquad \text{(E*)}$$

где f^* — некоторая аналитическая функция. Уравнение (E*) называется уравнением, *сопряжённым* с (E). Очевидно, области задания уравнений (E) и (E*) совпадают; кроме того, ясно также, что уравнение (E) в свою очередь является сопряжённым с (E*).

2°. Введём теперь в рассмотрение следующие переменные:

$$z = x + iy, \quad \zeta = x - iy, \tag{2.1}$$

которые, очевидно, принимают сопряжённые значения лишь тогда, когда x, y действительны. В этом случае вместо ζ будем писать иногда $\bar{z}$. Если переменные x, y принимают независимые комплексные значения, то z, ζ также будут принимать независимые комплексные значения. Из (2.1) имеем

$$x = \frac{1}{2}(z+\zeta), \quad y = \frac{1}{2i}(z-\zeta). \tag{2.2}$$

Пусть $f(x, y)$ — некоторая аналитическая функция переменных x, y. Если эту функцию мы продолжим аналитически в область комплексных значений переменных x, y и затем вместо этих переменных подставим выражения (2.2), то получим аналитическую функцию $F(z, \zeta)$ двух комплексных переменных z, ζ; очевидно $F(z, \zeta) = f\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)$.

Рассмотрим теперь дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{2.3}$$

которые, как нетрудно видеть, обладают следующим свойством:

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}\left(\frac{\partial^q}{\partial \zeta^q}\right) = \frac{\partial^q}{\partial \zeta^q}\left(\frac{\partial^p}{\partial z^p}\right) \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Поэтому однозначно определены операторы вида

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \zeta^q} = \frac{1}{2^{p+q}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^q \quad (p, q = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.5}$$

В частности,

$$4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta. \tag{2.6}$$

Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ мы можем применять к любой дифференцируемой функции. Однако надо помнить, что нельзя $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial \zeta}$ рассматривать, вообще говоря, как частные производные по z и ζ; таковыми они будут лишь тогда, когда u является аналитической функцией переменных z, ζ.

Используя формулы (2.2), (2.3) и (2.6), мы можем записать уравнение (E) в виде:

$$F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \zeta} + A(z, \zeta)\frac{\partial u}{\partial z} + B(z, \zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta} + C(z, \zeta)\,u = F(z, \zeta), \qquad \text{(F)}$$

где

$$\begin{aligned} A(z, \zeta) &= \frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) + ib\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)\right],\\ B(z, \zeta) &= \frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) - ib\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)\right],\\ C(z, \zeta) &= \frac{1}{4}c\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right), \quad F(z, \zeta) = \frac{1}{4}f\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right). \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Уравнение (F) мы будем называть *комплексной формой* уравнения (E). Очевидно, уравнения (E) и (F) по существу не отличаются друг от друга, но всё же мы будем употреблять для их обозначения различные символы: $E(u)$ будет обозначать всё время операцию, которая производится над u в левой части уравнения (E) в переменных x, y, а $F(u)$ — ту же операцию (с точностью до постоянного множителя), выраженную в переменных z, ζ, т. е. операцию, данную в левой части уравнения (F).

Комплексной формой сопряжённого уравнения (E*), очевидно, будет

$$F^*(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial \zeta} - \frac{\partial A v}{\partial z} - \frac{\partial B v}{\partial \zeta} + Cv = F^*(z, \zeta). \qquad (\text{F}^*)$$

3°. Обозначим теперь через $\mathfrak{D}$ односвязную область, принадлежащую $\mathfrak{T}$, которая обладает следующим свойством: $A(z, \zeta)$, $B(z, \zeta)$, $C(z, \zeta)$ *являются аналитическими функциями двух комплексных переменных* z, ζ *в цилиндрической области* $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, т. е. при $z \in \mathfrak{D}$, $\zeta \in \overline{\mathfrak{D}}$.

Такую область мы назовём *основной областью* уравнения (E). Очевидно, область, являющаяся основной для уравнения (E), будет также основной областью для сопряжённого уравнения (E*) и наоборот.

Нетрудно видеть, что основная область всегда существует. В качестве такой области можно взять, например, любую, достаточно малую ρ-окрестность любой точки области $\mathfrak{T}$. Если, в частности, коэффициенты a, b, c уравнения (E) суть целые функции переменных x, y, то функции A, B, C будут также целыми функциями переменных z, ζ, и в этом случае в качестве основной области $\mathfrak{D}$ можно взять всю комплексную плоскость z.

Заметим, что если $\mathfrak{D}$ является основной областью для уравнения (E), то любая её односвязная подобласть будет также основной областью.

4°. Рассмотрим теперь однородное уравнение

$$F(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial\zeta}+C(z,\zeta)u=0 \qquad (\mathrm{F}_0)$$

и подставим сюда вместо u функцию

$$u=\Lambda u', \tag{2.8}$$

где Λ — произвольная аналитическая функция переменных z, ζ в цилиндрической области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, причём $\mathfrak{D}$ — некоторая основная область уравнения (E_0); мы предполагаем, кроме того, что $|\Lambda|>0$ в $\mathfrak{D}$. Тогда для u' мы получим уравнение:

$$F'(u')=\frac{\partial^2 u'}{\partial z\,\partial\zeta}+A'(z,\zeta)\frac{\partial u'}{\partial z}+B'(z,\zeta)\frac{\partial u'}{\partial\zeta}+C'(z,\zeta)\,u'=0, \quad (\mathrm{F}_0')$$

где

$$\begin{gathered}A'=A+\frac{\partial\lg\Lambda}{\partial\zeta}, \qquad B'=B+\frac{\partial\lg\Lambda}{\partial z}.\\ C'=C+A\frac{\partial\lg\Lambda}{\partial z}+B\frac{\partial\lg\Lambda}{\partial\zeta}+\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial z\,\partial\zeta}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Таким образом, подстановка (2.8) не изменяет вида уравнения (F_0), но, конечно, при этом изменяются коэффициенты, которые в новом уравнении зависят от функции Λ. Мы можем теперь воспользоваться произвольностью этой функции и выбрать её так, чтобы коэффициенты нового уравнения удовлетворяли тем или иным условиям.

Потребуем, например, чтобы

$$A'B'-C'=0. \tag{2.10}$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы Λ было решением уравнения

$$\frac{\partial^2\lg\Lambda}{\partial z\,\partial\zeta}=A(z,\zeta)B(z,\zeta)-C(z,\zeta). \tag{2.11}$$

Отсюда сразу находим, что

$$\lg\Lambda=\Phi(z)+\Psi(\zeta)-\int_{z_0}^{z}dt\int_{\zeta_0}^{\zeta}[C(t,\tau)-A(t,\tau)B(t,\tau)]\,d\tau, \tag{2.12}$$

где z_0, ζ_0 — фиксированные точки областей $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$, а $\Phi(z)$, $\Psi(\zeta)$ — произвольные голоморфные функции в $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно. Выбирая теперь эти функции в следующем виде:

$$\Phi'(z)=-B(z,\zeta_0), \qquad \Psi'(\zeta)=-A(z_0,\zeta), \tag{2.13}$$

в силу (2.12), из (2.9) получим:

$$A'(z, \zeta) = \int_{z_0}^{z} h(t, \zeta)\,dt, \quad B'(z, \zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} k(z, \tau)\,d\tau, \tag{2.14}$$

где

$$\begin{aligned} h(z, \zeta) &= \frac{\partial A(z, \zeta)}{\partial z} + A(z, \zeta)\,B(z, \zeta) - C(z, \zeta), \\ k(z, \zeta) &= \frac{\partial B(z, \zeta)}{\partial \zeta} + A(z, \zeta)\,B(z, \zeta) - C(z, \zeta). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Функции h, k называются *инвариантами* уравнения (F); очевидно, они — аналитические функции переменных z, ζ в цилиндрической области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$.

Из (2.12) при помощи условий (2.13) функция Λ определяется лишь с точностью до постоянного множителя, отличного от нуля. Поэтому для Λ мы можем взять выражение

$$\Lambda = \Lambda(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = \exp\left\{ -\int_{z_0}^{z} B(t, \zeta_0)\,dt - \int_{\zeta_0}^{\zeta} A(z_0, \tau)\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} [A(t, \tau)\,B(t, \tau) - C(t, \tau)]\,d\tau \right\}. \tag{2.16}$$

Очевидно, $\Lambda(z, \zeta, z_0, \zeta_0)$ — аналитическая функция четырёх переменных z, ζ, z_0, ζ_0 в цилиндрической области: $z, z_0 \in \mathfrak{D}$, $\zeta, \zeta_0 \in \overline{\mathfrak{D}}$.

Таким образом, мы пришли к следующему результату:

Если Λ задана формулой (2.16), *то при помощи подстановки* (2.8) *уравнение* (F_0) *приводится к виду*:

$$F'(u') = \frac{\partial^2 u'}{\partial z\,\partial \zeta} + A'(z, \zeta)\frac{\partial u'}{\partial z} + B'(z, \zeta)\frac{\partial u'}{\partial \zeta} + A'(z, \zeta)\,B'(z, \zeta)\,u' = 0, \tag{2.17}$$

где A' и B' выражаются формулами (2.14) *и, следовательно, удовлетворяют условиям*

$$A'(z_0, \zeta) = 0, \quad B'(z, \zeta_0) = 0. \tag{2.18}$$

Поэтому мы можем всегда, когда это будет целесообразно, при изучении уравнения вида (F_0) ограничиться рассмотрением того случая, когда его коэффициенты удовлетворяют условиям (2.10) и (2.18).

В дальнейшем условимся говорить, что уравнение (F_0) приведено к *первой нормальной форме* в точке (z_0, ζ_0), если его коэффициенты удовлетворяют условиям (2.10) и (2.18).

Функцию Λ, определённую формулой (2.16), будем называть *первым нормальным множителем* уравнения (F_0).

Нетрудно проверить, что первым нормальным множителем сопряжённого уравнения (F_0^*) будет функция

$$\Lambda^* = \Lambda(z_0, \zeta_0, z, \zeta). \tag{2.19}$$

Наконец, отметим ещё, что путём подходящего подбора функции Λ и при помощи формулы (2.8) уравнение (F_0) можно привести также к любому из следующих видов (см., например, Дарбу [1], стр. 23—27):

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial z\,\partial\zeta} + \left\{ \int_{\zeta_0}^{\zeta} [k(z, \tau) - h(z, \tau)]\,d\tau \right\} \frac{\partial u'}{\partial\zeta} - h(z, \zeta)\,u' = 0, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial z\,\partial\zeta} + \left\{ \int_{z_0}^{z} [h(t, \zeta) - k(t, \zeta)]\,dt \right\} \frac{\partial u'}{\partial z} - k(z, \zeta)\,u' = 0. \tag{2.21}$$

В частности, при $h = k$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial z\,\partial\zeta} - h(z, \zeta)\,u' = 0. \tag{2.22}$$

Уравнения (2.20) и (2.21) мы назовём соответственно *второй* и *третьей нормальными формами* уравнения (F_0), а уравнение (2.22) мы назовём просто *нормальной формой* для уравнения (F_0), имеющего равные инварианты.

§ 3. Интегральные уравнения типа Вольтерра в комплексной области. При изучении структурных свойств решений уравнения (E), приведённого в предыдущем параграфе, весьма важную вспомогательную роль будет играть интегральное уравнение вида

$$w(z, \zeta) - \int_{z_0}^{z} K_1(z, \zeta, \xi)\,w(\xi, \zeta)\,d\xi - \int_{\zeta_0}^{\zeta} K_2(\zeta, z, \eta)\,w(z, \eta)\,d\eta -$$
$$- \int_{z_0}^{z} d\xi \int_{\zeta_0}^{\zeta} K(z, \zeta, \xi, \eta)\,w(\xi, \eta)\,d\eta = F(z, \zeta), \tag{3.1}$$

где K_1, K_2, K, F—заданные аналитические функции своих аргументов в области z, $\xi \in T$, $\zeta, \eta \in T^*$, причём T, T^*—некоторые односвязные области комплексной плоскости; z_0 и ζ_0—фиксированные точки, принадлежащие T и T^* соответственно.

Мы ниже докажем, что *существует всегда единственная функция $w(z, \zeta)$ двух комплексных переменных z, ζ, аналитическая в цилиндрической области (T, T^*), которая будет решением уравнения* (3.1). Доказательство этого предложения можно провести методом последовательных приближений. Однако непосредственное применение этого метода, как это делают обычно, приводит к довольно громоздким выкладкам (см., например, Мюнтц [1], § 28). Поэтому ниже мы даём несколько иной способ решения уравнения (3.1), который весьма просто приводит к цели.

1°. Рассмотрим сперва уравнение частного вида:

$$w_1(z, \zeta) - \int_{z_0}^{z} K_1(z, \zeta, \xi)\, w_1(\xi, \zeta)\, d\xi = F(z, \zeta), \tag{3.2}$$

где в данном случае ζ играет роль параметра; $\zeta \in T^*$. Обычным методом последовательных приближений мы легко докажем, что это уравнение имеет решение, которое выражается формулой:

$$w_1(z, \zeta) = F(z, \zeta) + \int_{z_0}^{z} \Gamma_1(z, \zeta, \xi)\, F(\xi, \zeta)\, d\xi, \tag{3.3}$$

где

$$\Gamma_1(z, \zeta, \xi) = K_1^{(1)}(z, \zeta, \xi) + K_1^{(2)}(z, \zeta, \xi) + \ldots; \tag{3.4}$$

здесь $K_1^{(1)}, K_1^{(2)}, \ldots$ — так называемые итерированные ядра:

$$K_1^{(1)} = K_1,\quad K_1^{(n)}(z, \zeta, \xi) = \int_{\xi}^{z} K_1(z, \zeta, t)\, K_1^{(n-1)}(t, \zeta, \xi)\, dt, \tag{3.5}$$
$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Нетрудно доказать, что ряд (3.4) абсолютно и равномерно сходится внутри цилиндрической области: $z, \xi \in T$, $\zeta \in T^*$. Поэтому его сумма $\Gamma_1(z, \zeta, \xi)$ представляет собой аналитическую функцию переменных z, ζ, ξ в этой области. Функция $w_1(z, \zeta)$, заданная формулой (3.3), очевидно, является аналитической в области (T, T^*).

Аналогично можно доказать, что уравнение

$$w_2(z, \zeta) - \int_{\zeta_0}^{\zeta} K_2(\zeta, z, \eta)\, w_2(z, \eta)\, d\eta = F(z, \zeta) \tag{3.6}$$

также имеет решение, которое выражается формулой:

$$w_2(z, \zeta) = F(z, \zeta) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Gamma_2(\zeta, z, \eta)\, F(z, \eta)\, d\eta, \tag{3.7}$$

где

$$\Gamma_2(\zeta, z, \eta) = K_2^{(1)}(\zeta, z, \eta) + K_2^{(2)}(\zeta, z, \eta) + \ldots, \tag{3.8}$$

причём

$$K_2^{(1)} = K_2, \quad K_2^{(n)}(\zeta, z, \eta) = \int_\eta^\zeta K_2(\zeta, z, \tau) K_2^{(n-1)}(\tau, z, \eta)\, d\tau$$
$$(n = 2, 3, \ldots). \tag{3.9}$$

Ряд (3.8) сходится абсолютно и равномерно внутри цилиндрической области: $z \in T$, $\zeta, \eta \in T^*$, и, следовательно, его сумма $\Gamma_2(\zeta, z, \eta)$ является аналитической функцией своих аргументов в этой области. Функция $w_2(z, \zeta)$, очевидно, также является аналитической в (T, T^*).

Нетрудно видеть, что Γ_1 и Γ_2 удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Gamma_1(z, \zeta, \xi) = K_1(z, \zeta, \xi) + \int_\xi^z K_1(z, \zeta, t)\, \Gamma_1(t, \zeta, \xi)\, dt =$$
$$= K_1(z, \zeta, \xi) + \int_\xi^z \Gamma_1(z, \zeta, t)\, K_1(t, \zeta, \xi)\, dt, \tag{3.10}$$

$$\Gamma_2(\zeta, z, \eta) = K_2(\zeta, z, \eta) + \int_\eta^\zeta K_2(\zeta, z, \tau)\, \Gamma_2(\tau, z, \eta)\, d\tau =$$
$$= K_2(\zeta, z, \eta) + \int_\eta^\zeta \Gamma_2(\zeta, z, \tau)\, K_2(\tau, z, \eta)\, d\tau. \tag{3.11}$$

Ищем теперь решение уравнения (3.1) в виде:

$$w(z, \zeta) = w_0(z, \zeta) + \int_{z_0}^z \Gamma_1(z, \zeta, \xi)\, w_0(\xi, \zeta)\, d\xi +$$
$$+ \int_{\zeta_0}^\zeta \Gamma_2(\zeta, z, \eta)\, w_0(z, \eta)\, d\eta, \tag{3.12}$$

где $w_0(z, \zeta)$ — новая неизвестная функция, аналитическая в области (T, T^*). Подставляя (3.12) в (3.1) и принимая во внимание (3.10) и (3.11), получим:

$$w_0(z, \zeta) - \int_{z_0}^z d\xi \int_{\zeta_0}^\zeta K_0(z, \zeta, \xi, \eta)\, w_0(\xi, \eta)\, d\eta = F(z, \zeta), \tag{3.13}$$

где

$$K_0(z, \zeta, \xi, \eta) = K_1(z, \zeta, \xi)\Gamma_2(\zeta, \xi, \eta) + K_2(\zeta, z, \eta)\Gamma_1(z, \eta, \xi) + \\ + K(z, \zeta, \xi, \eta) + \int_\xi^z K(z, \zeta, \xi_1, \eta)\Gamma_1(\xi_1, \eta, \xi)\,d\xi_1 + \\ + \int_\eta^\zeta K(z, \zeta, \xi, \eta_1)\Gamma_2(\eta_1, \xi, \eta)\,d\eta_1. \quad (3.14)$$

Очевидно, $K_0(z, \zeta, \xi, \eta)$ — аналитическая функция в области $z, \xi \in T$, $\zeta, \eta \in T^*$.

Применяя теперь к уравнению (3.13) метод последовательных приближений, найдём, что оно имеет решение, которое выражается в виде:

$$w_0(z, \zeta) = F(z, \zeta) + \int_{z_0}^z d\xi \int_{\zeta_0}^\zeta \Gamma_0(z, \zeta, \xi, \eta) F(\xi, \eta)\,d\eta, \quad (3.15)$$

где

$$\Gamma_0(z, \zeta, \xi, \eta) = K_0^{(1)}(z, \zeta, \xi, \eta) + K_0^{(2)}(z, \zeta, \xi, \eta) + \ldots, \quad (3.16)$$

причём

$$K_0^{(1)} = K_0,\ K_0^{(n)} = \int_\xi^z dt \int_\eta^\zeta K_0(z, \zeta, t, \tau) K_0^{(n-1)}(t, \tau, \xi, \eta)\,d\tau \quad (3.17)$$
$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Нетрудно доказать, что ряд (3.16) сходится абсолютно и равномерно внутри области $z, \xi \in T$, $\zeta, \eta \in T^*$; следовательно, его сумма $\Gamma_0(z, \zeta, \xi, \eta)$ является аналитической функцией в этой же области. Ясно, что функция $w_0(z, \zeta)$, определённая формулой (3.15), является аналитической в области (T, T^*).

Подставляя теперь выражение (3.15) в (3.12), получим:

$$w(z, \zeta) = F(z, \zeta) + \int_{z_0}^z \Gamma_1(z, \zeta, \xi) F(\xi, \zeta)\,d\xi + \int_{\zeta_0}^\zeta \Gamma_2(\zeta, z, \eta) F(z, \eta)\,d\eta + \\ + \int_{z_0}^z d\xi \int_{\zeta_0}^\zeta \Gamma(z, \zeta, \xi, \eta) F(\xi, \eta)\,d\eta, \quad (3.18)$$

где

$$\Gamma(z, \zeta, \xi, \eta) = \Gamma_0(z, \zeta, \xi, \eta) + \int_\xi^z \Gamma_1(z, \zeta, \xi_1)\Gamma_0(\xi_1, \zeta, \xi, \eta)\,d\xi_1 + \\ + \int_\eta^\zeta \Gamma_2(\zeta, z, \eta_1)\Gamma_0(z, \eta_1, \xi, \eta)\,d\eta_1. \quad (3.19)$$

Очевидно, $w(z,\zeta)$ представляет собой аналитическую функцию переменных z, ζ в области (T, T^*) и удовлетворяет уравнению (3.1). Остаётся теперь доказать единственность полученного решения. Для этого надо доказать, что однородное уравнение

$$w(z,\zeta)-\int_{z_0}^{z} K_1(z,\zeta,\xi)\,w(\xi,\zeta)\,d\xi-\int_{\zeta_0}^{\zeta} K_2(\zeta,z;\eta)\,w(z,\eta)\,d\eta-\\ -\int_{z_0}^{z} d\xi\int_{\zeta_0}^{\zeta} K(z,\zeta,\xi,\eta)\,w(\xi,\eta)\,d\eta=0 \qquad (3.20)$$

не имеет (аналитического) решения, отличного от нуля. Но это следует из того, что производные всех порядков решения уравнения (3.20) обращаются в нуль в точке (z_0, ζ_0). Таким образом, полностью доказано предложение, сформулированное нами в начале этого параграфа.

2°. Вышеизложенную теорию нетрудно распространить также на систему интегральных уравнений вида

$$w_i(z,\zeta)-\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{z_0}^{z} K_1^{ik}(z,\zeta,\xi)\,w_k(\xi,\zeta)\,d\xi+\int_{\zeta_0}^{\zeta} K_2^{ik}(\zeta,z,\eta)\,w_k(z,\eta)\,d\eta+\right.\\ \left.+\int_{z_0}^{z} d\xi\int_{\zeta_0}^{\zeta} K^{ik}(z,\zeta,\xi,\eta)\,w_k(\xi,\eta)\,d\eta\right\}=F_i(z,\zeta)\ (i=1,2,\ldots,n), \qquad (3.21)$$

где K_1^{ik}, K_2^{ik}, K^{ik}, F_i — заданные аналитические функции своих аргументов в области $z,\xi\in T$, $\zeta,\eta\in T^*$; $w_1(z,\zeta),\ldots,w_n(z,\zeta)$ — искомые функции, аналитические в области (T, T^*).

Используя матричные обозначения (см., например, Мусхелишвили [1], гл. VI, § 124), систему (3.21) можно записать в следующем виде:

$$\boldsymbol{W}(z,\zeta)-\int_{z_0}^{z} \boldsymbol{K}_1(z,\zeta,\xi)\,\boldsymbol{W}(\xi,\zeta)\,d\xi-\int_{\zeta_0}^{\zeta} \boldsymbol{K}_2(\zeta,z,\eta)\,\boldsymbol{W}(z,\eta)\,d\eta-\\ -\int_{z_0}^{z} d\xi\int_{\zeta_0}^{\zeta} \boldsymbol{K}(z,\zeta,\xi,\eta)\,\boldsymbol{W}(\xi,\eta)\,d\eta=\boldsymbol{F}(z,\zeta), \qquad (3.22)$$

где $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$, $\boldsymbol{K}$ — матрицы с элементами K_1^{ik}, K_2^{ik}, K^{ik} $(i, k=1,\ldots,n)$, а $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{F}$ — векторы с элементами w_i, F_i $(i=1,\ldots,n)$ соответственно.

Внешнее сходство, существующее между уравнениями (3.1) и (3.22), позволяет применить к последнему метод решения, развитый выше для уравнения (3.1). Этим путём легко докажем, что решение уравнения (3.22) или, что то же самое, системы уравнений (3.21) существует и даётся формулой:

$$W(z,\zeta)=F(z,\zeta)+\int_{z_0}^{z}\Gamma_1(z,\zeta,\xi)F(\xi,\zeta)\,d\xi+$$
$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Gamma_2(\zeta,z,\eta)F(z,\eta)\,d\eta+\int_{z_0}^{z}d\xi\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Gamma(z,\zeta,\xi,\eta)F(\xi,\eta)\,d\eta, \quad (3.23)$$

где Γ_1, Γ_2, Γ — матрицы с элементами $\Gamma_1^{ik}(z,\zeta,\xi)$, $\Gamma_2^{ik}(\zeta,z,\eta)$, $\Gamma^{ik}(z,\zeta,\xi,\eta)$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$, которые суть вполне определённые аналитические функции своих аргументов в области $z, \xi\in T$, $\zeta,\eta\in T^*$. Если вместо векторного равенства (3.23) мы напишем соответствующие скалярные уравнения, то получим:

$$w_i(z,\zeta)=F_i(z,\zeta)+\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{z_0}^{z}\Gamma_1^{ik}(z,\zeta,\xi)F_k(\xi,\zeta)\,d\xi+\right.$$
$$\left.+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Gamma_2^{ik}(\zeta,z,\eta)F_k(z,\eta)\,d\eta+\int_{z_0}^{z}d\xi\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Gamma^{ik}(z,\zeta,\xi,\eta)F_k(\xi,\eta)\,d\eta\right\} \quad (3.24)$$
$$(i=1,2,\ldots,n).$$

Замечание. В (3.23) мы можем подставлять вместо F любую матрицу, элементы которой являются аналитическими функциями переменных z, ζ в области (T, T^*). Тогда, очевидно, W будет матрицей, удовлетворяющей матричному уравнению (3.22). Этим замечанием мы воспользуемся ниже, в § 28.

§ 4. Функция Римана уравнения (E_0). Рассмотрим однородное уравнение

$$E(u)=\Delta u+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=0, \qquad (E_0)$$

которое можно записать ещё в виде

$$F(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial\zeta}+C(z,\zeta)u=0, \qquad (F_0)$$

где $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$, а A, B, C определяются формулами (2.7).

1°. Пусть $\mathfrak{D}$ — некоторая основная область уравнения (F_0) (§ 2, n° 4). Рассмотрим теперь аналитическую в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ функцию $V(z,\zeta)$, удовлетворяющую уравнению

$$F^*(V)=\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial\zeta}-\frac{\partial AV}{\partial z}-\frac{\partial BV}{\partial\zeta}+CV=0 \qquad (F_0^*)$$

и условиям

$$V|_{z=t} = \exp \int_{\tau}^{\zeta} A(t, \eta)\, d\eta, \qquad V|_{\zeta=\tau} = \exp \int_{t}^{z} B(\xi, \tau)\, d\xi, \tag{4.1}$$

где t и τ — фиксированные точки в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно.

Функцию V, существование которой мы докажем ниже, назовём *функцией Римана* для уравнения (E_0).

Уравнение (F_0^*) мы можем переписать ещё в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \zeta} \Big[V(z, \zeta) - \int_{\tau}^{\zeta} A(z, \eta) V(z, \eta)\, d\eta - \int_{t}^{z} B(\xi, \zeta) V(\xi, \zeta)\, d\xi + \\ + \int_{t}^{z} d\xi \int_{\tau}^{\zeta} C(\xi, \eta) V(\xi, \eta)\, d\eta \Big] = 0. \tag{4.2}$$

Так как выражение, находящееся внутри скобок, является аналитической функцией переменных z, ζ в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, то будем иметь:

$$V(z, \zeta) - \int_{\tau}^{\zeta} A(z, \eta) V(z, \eta)\, d\eta - \int_{t}^{z} B(\xi, \zeta) V(\xi, \zeta)\, d\xi + \\ + \int_{t}^{z} d\xi \int_{\tau}^{\zeta} C(\xi, \eta) V(\xi, \eta)\, d\eta = \Phi(z) + \Psi(\zeta), \tag{4.3}$$

где $\Phi(z)$, $\Psi(\zeta)$ — голоморфные функции в $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно. Принимая теперь во внимание условия (4.1), легко найдём, что $\Phi(z) + \Psi(\zeta) = 1$. Следовательно, V удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$V(z, \zeta) - \int_{t}^{z} B(\xi, \zeta) V(\xi, \zeta)\, d\xi - \int_{\tau}^{\zeta} A(z, \eta) V(z, \eta)\, d\eta + \\ + \int_{t}^{z} d\xi \int_{\tau}^{\zeta} C(\xi, \eta) V(\xi, \eta)\, d\eta = 1. \tag{4.4}$$

Это уравнение является частным видом интегрального уравнения (3.1), рассмотренного нами в предыдущем параграфе. Поэтому уравнение (4.4) имеет единственное решение, являющееся аналитической функцией переменных z, ζ в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$. Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению (F_0^*) и условиям (4.1). Таким образом, существование и единственность функции Римана доказаны.

Очевидно, функция Римана $V(z, \zeta)$ зависит также от t, τ; из интегрального уравнения (4.4) сразу вытекает, что V является аналитической функцией четырёх переменных z, ζ, t, τ в цилиндрической области $z, t \in \mathfrak{D}$, $\zeta, \tau \in \overline{\mathfrak{D}}$. В дальнейшем функцию V мы будем обозначать через $G(z, \zeta, t, \tau)$.

Изучим теперь некоторые основные свойства функции Римана $G(z, \zeta, t, \tau)$.

2°. Прежде всего, в силу условий (4.1), имеем:

$$\begin{aligned} G(t, \zeta, t, \tau) &= \exp \int_{\tau}^{\zeta} A(t, \eta)\, d\eta \qquad (t \in \mathfrak{D},\ \zeta, \tau \in \overline{\mathfrak{D}}), \\ G(z, \tau, t, \tau) &= \exp \int_{t}^{z} B(\xi, \tau)\, d\xi \qquad (z, t \in \mathfrak{D},\ \tau \in \overline{\mathfrak{D}}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Эти условия равносильны следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial \zeta} - A(t, \zeta) G = 0 \quad \text{при} \quad z = t \in \mathfrak{D}, \quad \zeta, \tau \in \overline{\mathfrak{D}}, \\ &\frac{\partial G}{\partial z} - B(z, \tau) G = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \tau \in \overline{\mathfrak{D}}, \quad z, t \in \mathfrak{D}, \\ &G(t, \tau, t, \tau) = 1 \quad \text{при} \quad t \in \mathfrak{D}, \quad \tau \in \overline{\mathfrak{D}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Из (4.5) получаем также:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial \tau} + A(z, \tau) G = 0 \quad \text{при} \quad t = z \in \mathfrak{D}, \quad \tau, \zeta \in \overline{\mathfrak{D}}, \\ &\frac{\partial G}{\partial t} + B(t, \zeta) G = 0 \quad \text{при} \quad \tau = \zeta \in \overline{\mathfrak{D}}, \quad t, z \in \mathfrak{D}, \\ &G(z, \zeta, z, \zeta) = 1 \quad \text{при} \quad z \in \mathfrak{D}, \quad \zeta \in \overline{\mathfrak{D}}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

Очевидно, условия (4.7) эквивалентны условиям (4.5).

3°. Пусть $U(z, \zeta)$ — некоторая аналитическая функция переменных z, ζ в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$. Тогда имеет место тождество

$$\frac{\partial^2 UG}{\partial z\, \partial \zeta} - GF(U) = \frac{\partial}{\partial z}\left[U\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta} - AG\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[U\left(\frac{\partial G}{\partial z} - BG\right)\right], \tag{4.8}$$

где $G = G(z, \zeta, t, \tau)$, $U = U(z, \zeta)$. При проверке этого равенства надо принять во внимание, что $G(z, \zeta, t, \tau)$ относительно первых двух аргументов z, ζ удовлетворяет уравнению (F_0^*).

Переставим местами в равенстве (4.8) переменные z, t и ζ, τ соответственно и после этого проинтегрируем его по переменным t, τ в пределах z_0, z и ζ_0, ζ соответственно, где z_0, ζ_0 — фиксированные точки, $z_0 \in \mathfrak{D}$, $\zeta_0 \in \overline{\mathfrak{D}}$. Тогда, принимая во внимание условия (4.6), получим:

$$\begin{gathered}
U(z, \zeta) = U(z_0, \zeta_0)\, G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) + \\
+ \int_{z_0}^{z} G(t, \zeta_0, z, \zeta) \left[\frac{\partial U(t, \zeta_0)}{\partial t} + B(t, \zeta_0)\, U(t, \zeta_0)\right] dt + \\
+ \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(z_0, \tau, z, \zeta) \left[\frac{\partial U(z_0, \tau)}{\partial \tau} + A(z_0, \tau)\, U(z_0, \tau)\right] d\tau + \\
+ \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(t, \tau, z, \zeta)\, F[U(t, \tau)]\, d\tau. \qquad (4.9)
\end{gathered}$$

Это есть тождество, справедливое для любой функции $U(z, \zeta)$, аналитической в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, где $\mathfrak{D}$ — некоторая основная область уравнения (E_0).

Положим, в частности, $U(z, \zeta) = G(z_0, \zeta_0, z, \zeta)$. Тогда, принимая во внимание условия (4.7), из (4.9) получим:

$$\int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(t, \tau, z, \zeta)\, F[G(z_0, \zeta_0, t, \tau)]\, d\tau = 0. \qquad (4.10)$$

Отсюда сразу вытекает, что $F[G(z_0, \zeta_0, t, \tau)] = 0$, т. е. функция $G(z_0, \zeta_0, z, \zeta)$ относительно последних двух аргументов z, ζ является решением уравнения (F_0) в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$. Принимая теперь во внимание условия (4.7), легко заключим, что $G(z, \zeta, t, \tau)$ как функция последних двух аргументов t, τ представляет собой функцию Римана для сопряжённого уравнения (F_0^*).

4°. Принимая во внимание вышеприведённые свойства функции $G(t, \tau, z, \zeta)$, легко докажем, что выражение

$$U_0(z, \zeta) = \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(t, \tau, z, \zeta)\, F(t, \tau)\, d\tau, \qquad (4.11)$$

где F — какая-нибудь аналитическая функция своих аргументов в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, представляет собой аналитическую функцию переменных z, ζ в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, удовлетворяющую уравнению

$$F(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial \zeta} + A(z, \zeta)\frac{\partial U}{\partial z} + B(z, \zeta)\frac{\partial U}{\partial \zeta} + C(z, \zeta)\, U = F(z, \zeta), \qquad (F)$$

т. е. формула (4.11) даёт частное решение этого уравнения.

§ 5. Несколько частных примеров. Рассмотрим теперь несколько частных видов уравнения (E_0), для которых функцию Римана G можно выразить в явном виде при помощи известных специальных функций.

1°. Тривиальным примером является уравнение Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{5.1}$$

для которого функция Римана $G = 1$; в самом деле, в этом случае $A = B = C = 0$, и интегральное уравнение (4.4) даёт: $V = G = 1$.

2°. Рассмотрим теперь уравнение

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0, \tag{5.2}$$

где λ — вообще комплексная постоянная. Это уравнение встречается во многих разделах математической физики (теория упругости, теория электромагнитных волн и др.); его иногда называют *метагармоническим* уравнением, а его решения — *метагармоническими функциями*; постоянную λ назовём *параметром метагармонической функции* (см. работы автора [1], [12], [15], [18], [19], [23]).

Уравнение (5.2) можно записать ещё в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \zeta} + \frac{\lambda^2}{4} u = 0, \tag{5.3}$$

где $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$. Так как в данном случае $A = B = 0$, $C = \lambda^2/4$, то интегральное уравнение (4.4), определяющее функцию Римана, примет вид:

$$V(z, \zeta) + \frac{\lambda^2}{4} \int_t^z d\xi \int_\tau^\zeta V(\xi, \eta)\, d\eta = 1. \tag{5.4}$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений, получим:

$$V = G(z, \zeta, t, \tau) = J_0\left(\lambda \sqrt{(z - t)(\zeta - \tau)}\right), \tag{5.5}$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Очевидно, G — целая функция переменных z, ζ, t, τ.

3°. Рассмотрим теперь уравнение

$$\Delta u + \frac{a_0}{y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_0}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{5.6}$$

где a_0, b_0 — постоянные. В комплексных переменных $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$ это уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \zeta} - \frac{\beta'}{z - \zeta} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\beta}{z - \zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \tag{5.7}$$

где

$$\beta = \frac{b_0 + ia_0}{2}, \quad \beta' = \frac{b_0 - ia_0}{2}. \tag{5.8}$$

Для уравнения (5.7), которое называется уравнением Эйлера, в качестве основной области $\mathfrak{D}$ можно взять либо верхнюю полуплоскость ($\operatorname{Im} z > 0$), либо нижнюю полуплоскость ($\operatorname{Im} z < 0$). Функция Римана для уравнения (5.8) имеет вид:

$$G(z, \zeta, t, \tau) = (\tau - z)^{-\beta'} (\zeta - t)^{-\beta} (\zeta - z)^{\beta + \beta'} F\left(\beta', \beta, 1, \frac{(z-t)(\zeta-\tau)}{(z-\tau)(\zeta-t)}\right), \tag{5.9}$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрический ряд Гаусса. Для вывода этой формулы пользоваться интегральным уравнением (4.4) не совсем удобно, ибо оно приводит к весьма громоздким вычислениям; её вывод можно найти, например, в книге Горна [1] (стр. 138).

4°. Рассмотрим ещё уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + n(n+1)u = 0, \tag{5.10}$$

где n — постоянное число, а θ, φ — географические координаты точки, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Это уравнение также часто встречается в математической физике; с ним тесно связаны функции Лежандра первого и второго рода (см. работы автора [21], [22]).

Если ввести новые переменные

$$x = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \qquad y = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi, \tag{5.11}$$

то уравнение (5.10) примет вид:

$$\Delta u + \frac{4n(n+1)}{(1+x^2+y^2)^2}u = 0. \tag{5.12}$$

Запишем теперь последнее уравнение в комплексной форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial\zeta} + \frac{n(n+1)}{(1+z\zeta)^2}u = 0, \tag{5.13}$$

где $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$. Для построения функции Римана этого уравнения можно пользоваться интегральным уравнением (4.4), но это приводит к громоздким вычислениям. Поэтому для указанной цели мы прибегаем к другому способу.

Уравнение (5.13) обладает следующим, легко проверяемым свойством: *если $U(z, \zeta)$ — решение этого уравнения, то функция*

$$U\left(\xi\frac{z-t}{1+\tau z}, \frac{1}{\xi}\frac{\zeta-\tau}{1+t\zeta}\right) \tag{5.14}$$

есть также его решение; здесь t, τ, ξ — произвольные коплексные постоянные, которые удовлетворяют неравенствам $\xi \neq 0$, $1 + t\tau \neq 0$.

Легко проверить, что $P_n(\cos\theta)$, где P_n — функция Лежандра первого рода с индексом n, является решением уравнения (5.10).*

Это сразу вытекает из того, что $P_n(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-z^2)P''_n(z)-2zP'_n(z)+n(n+1)P_n(z)=0. \tag{5.15}$$

Напомним, что если n — целое число, то $P_n(z)$ — полином степени n, а если n не есть целое число, то $P_n(z)$ представляет собой аналитическую функцию на плоскости z, разрезанной вдоль действительной оси от точки -1 до $-\infty$. Точка $z=-1$ является логарифмической точкой разветвления функции $P_n(z)$[1].

Из (5.11) сразу вытекает, что $\cos\theta=(1-z\zeta)/(1+z\zeta)$. Поэтому $P_n[(1-z\zeta)/(1+z\zeta)]$ будет решением уравнения (5.13). Следовательно, на основании вышеотмеченного свойства решений этого уравнения функция

$$G(t,\tau,z,\zeta)=P_n\left(\frac{(1-z\zeta)(1-t\tau)+2z\tau+2\zeta t}{(1+z\zeta)(1+t\tau)}\right), \tag{5.16}$$

где t, τ — произвольные комплексные числа, $t\tau\neq-1$, удовлетворяет уравнению (5.13). Нетрудно видеть, что

$$G(t,\tau,t,\zeta)=G(t,\tau,z,\tau)=1, \tag{5.17}$$

$$G(t,\tau,z,\zeta)=G(z,\zeta,t,\tau). \tag{5.18}$$

Сравнивая эти равенства с условием (4.5), сразу убедимся, что функция G, определённая формулой (5.16), является функцией Римана уравнения (5.13).

Заметим, наконец, что основной областью $\mathfrak{D}$ для уравнения (5.13) может быть любая односвязная область, которая удовлетворяет следующему условию: если $z\in\mathfrak{D}$, $\zeta\in\overline{\mathfrak{D}}$, то $z\zeta\neq-1$. В частности, в качестве $\mathfrak{D}$ можно взять единичный круг $|z|<1$ или полуплоскости $\operatorname{Im} z\lessgtr 0$.

Мы укажем теперь ещё один путь получения формулы (5.16).

Заметим, что между уравнением (5.13) и уравнением Эйлера (5.7) существует тесная связь. В самом деле, если положить

$$z=z', \quad \zeta=-\frac{1}{\zeta'}, \tag{5.19}$$

то уравнение (5.13) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z'\,\partial\zeta'}+\frac{n(n+1)}{(z'-\zeta')^2}u=0. \tag{5.20}$$

При помощи подстановки

$$u=(\zeta'-z')^{-n}u' \tag{5.21}$$

[1] Все необходимые для нас в дальнейшем сведения о свойствах функции $P_n(z)$ можно найти в книге Уиттекера и Ватсона [1], гл. 15.

мы приводим уравнение (5.20) к виду:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial z' \partial \zeta'} + \frac{n}{z'-\zeta'}\frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{n}{z'-\zeta'}\frac{\partial u'}{\partial \zeta'} = 0. \tag{5.22}$$

Это есть частный случай уравнения Эйлера (5.7): $\beta' = \beta = -n$. На основании (5.9) и (5.21) легко найдём, что функцией Римана уравнения (5.13) является

$$G(z, \zeta, t, \tau) = \\ = \left(\frac{(1+t\zeta)(1+\tau z)}{(1+t\tau)(1+z\zeta)}\right)^n F\left(-n, -n, 1, \frac{(z-t)(\tau-\zeta)}{(1+\tau z)(1+t\zeta)}\right), \tag{5.23}$$

Докажем теперь, что эта формула совпадает с формулой (5.16).

Если ввести обозначение

$$\sigma = \frac{(z-t)(\tau-\zeta)}{(1+\tau z)(1+t\zeta)}, \tag{5.24}$$

то легко видеть, что формула (5.23) примет вид:

$$G = (1-\sigma)^{-n} F(-n, -n, 1, \sigma). \tag{5.25}$$

Функция $y_1 = F(-n, -n, 1, \sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma(1-\sigma) y'' + [1-(1-2n)\sigma] y' - n^2 y = 0. \tag{5.26}$$

Легко проверить, что этому уравнению удовлетворяет также функция $y_2 = (1-\sigma)^n F(n+1, -n, 1, \sigma/(\sigma-1))$. Но так как $y_1(0) = y_2(0)$, $y_1'(0) = y_2'(0)$, то

$$F(-n, -n, 1, \sigma) = (1-\sigma)^n F\left(n+1, -n, 1, \frac{\sigma}{\sigma-1}\right). \tag{5.27}$$

Кроме того, мы знаем, что (см., например, Уиттекер и Ватсон [1], стр. 103)

$$P_n(z) = F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-z}{2}\right). \tag{5.28}$$

В силу (5.28), (5.27) и (5.24), из (5.25) получим формулу (5.16).

§ 6. Аналитические решения уравнения (E_0). Решение задачи Гурса. 1°. Пусть $U(z, \zeta)$ — аналитическая функция переменных z, ζ в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, удовлетворяющая уравнению

$$F(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \zeta} + A(z, \zeta)\frac{\partial U}{\partial z} + B(z, \zeta)\frac{\partial U}{\partial \zeta} + C(z, \zeta) U = 0. \tag{F_0}$$

Тогда из тождества (4.9) получим:

$$U(z, \zeta) = a_0 G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \zeta_0, z, \zeta)\, dt + \\ + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(\tau) G(z_0, \tau, z, \zeta)\, d\tau, \tag{6.1}$$

где

$$\alpha_0 = U(z_0, \zeta_0), \quad \Phi(z) = \frac{\partial U(z, \zeta_0)}{\partial z} + B(z, \zeta_0) U(z, \zeta_0),$$
$$\Phi^*(\zeta) = \frac{\partial U(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} + A(z_0, \zeta) U(z_0, \zeta). \tag{6.2}$$

Очевидно, $\Phi(z), \Phi^*(\zeta)$ — голоморфные функции в $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ соответственно.

Легко теперь видеть, что *формула* (6.1), *где* α_0 — *произвольная постоянная*, $\Phi(z), \Phi^*(\zeta)$ — *произвольные функции, голоморфные в* $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ *соответственно, даёт все аналитические в* $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ *решения уравнения* (F_0).

Если в (6.1) подставим $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$, где (x, y) — точка области $\mathfrak{D}$, то получим аналитическую в области $\mathfrak{D}$ функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0. \tag{E_0}$$

Таким образом, мы имеем следующее предложение:

Пусть $\mathfrak{D}$ — *некоторая основная область уравнения* (E_0) (см. § 2, n° 3). *Тогда формула*

$$u(x, y) = \alpha_0 G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \zeta_0, z, \zeta)\, dt +$$
$$+ \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(\tau) G(z_0, \tau, z, \zeta)\, d\tau \tag{6.3}$$
$$(z = x + iy, \quad \zeta = x - iy, \quad (x, y) \in \mathfrak{D}),$$

где α_0 — *произвольная постоянная*, $\Phi(z), \Phi^*(\zeta)$ — *произвольные голоморфные функции в* $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ *соответственно, даёт аналитические в области* $\mathfrak{D}$ *решения уравнения* (E_0).

Заметим, что z_0, ζ_0 — произвольно зафиксированные точки в $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ соответственно, причём, очевидно, мы можем положить $\zeta_0 = \overline{z}_0$.

Таким образом, формула (6.3) даёт нам бесконечное множество аналитических решений уравнения (E_0) в области $\mathfrak{D}$. Ниже мы докажем, что эта формула исчерпывает весь класс регулярных в $\mathfrak{D}$ решений этого уравнения.

2°. Введём следующие обозначения:

$$\Pi_{\zeta_0} = \mathscr{E}(z \in \mathfrak{D}, \zeta = \zeta_0), \quad \Pi^*_{z_0} = \mathscr{E}(z = z_0, \zeta \in \overline{\mathfrak{D}}),$$

где символ $\mathscr{E}$ заменяет слово «множество». Очевидно, Π_{ζ_0}, $\Pi^*_{z_0}$ — двумерные области, которые мы будем называть *характеристиками* уравнения (F_0).

Формулы (6.2) и (6.1) показывают, что всякое решение $U(z,\zeta)$ уравнения (F_0), аналитическое в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, выражается единственным образом через значения $U(z,\zeta)$ на характеристиках $\Pi_{\zeta_0}, \Pi^*_{z_0}$. В частности, если на $\Pi_{\zeta_0}, \Pi^*_{z_0}$ функция $U(z,\zeta)$ обращается в нуль, то она равна нулю всюду в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$.

Мы можем теперь решить следующую задачу (Гурса):

Найти такое аналитическое в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ решение $U(z,\zeta)$ уравнения (F_0), которое на характеристиках $\Pi_{\zeta_0}, \Pi^*_{z_0}$ принимает наперёд заданные значения:

$$U(z,\zeta_0)=\varphi(z), \quad U(z_0,\zeta)=\varphi^*(\zeta), \tag{6.4}$$

где $\varphi(z), \varphi^*(\zeta)$ — какие-нибудь голоморфные функции в $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ соответственно, удовлетворяющие условию

$$\varphi(z_0)=\varphi^*(\zeta_0).$$

Нетрудно проверить, что решение этой задачи выражается формулой

$$U(z,\zeta)=\varphi(z_0)\,G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)+\int_{z_0}^{z}G(t,\zeta_0,z,\zeta)\,[\varphi'(t)+B(t,\zeta_0)\,\varphi(t)]\,dt+$$
$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta}G(z_0,\tau,z,\zeta)\,[\varphi^{*\prime}(\tau)+A(z_0,\tau)\,\varphi^*(\tau)]\,d\tau. \tag{6.5}$$

Единственность решения была доказана выше.

3°. Из формулы (6.1) мы можем получить ряд новых формул, также дающих решения уравнения (F_0).

Рассмотрим функции

$$\Phi_0(z)=\frac{\alpha_0}{2}+\int_{z_0}^{z}\Phi(t)\,dt, \quad \Phi_0^*(\zeta)=\frac{\alpha_0}{2}+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^*(\tau)\,d\tau. \tag{6.6}$$

Очевидно, $\Phi_0(z), \Phi_0^*(\zeta)$ — голоморфные функции в $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ соответственно, удовлетворяющие условию

$$\Phi_0(z_0)=\Phi_0^*(\zeta_0). \tag{6.7}$$

Принимая во внимание (6.6), при помощи интегрирования по частям мы можем формулу (6.1) переписать в виде:

$$U(z,\zeta)=G(z,\zeta_0,z,\zeta)\,\Phi_0(z)-\int_{z_0}^{z}\Phi_0(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,\zeta_0,z,\zeta)\,dt+$$
$$+G(z_0,\zeta,z,\zeta)\Phi_0^*(\zeta)-\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi_0^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}G(z_0,\tau,z,\zeta)\,d\tau. \tag{6.8}$$

Подставляя сюда вместо $\Phi_0(z)$ и $\Phi_0^*(\zeta)$ любые функции, голоморфные в $\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$ соответственно, мы получим аналитические в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ решения уравнения (F_0). Отметим, что функции $\Phi_0(z)$ и $\Phi_0^*(\zeta)$ однозначно определяются через $U(z,\zeta)$, если соблюдено условие (6.7). Если же это условие не соблюдено, то функции Φ_0 и Φ_0^* определяются с точностью до постоянных слагаемых C_0, $-C_0$ соответственно.

4° Введём теперь в рассмотрение функции

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} \Phi_0(t)\,dt \quad \text{и} \quad \varphi^*(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{(\zeta-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \Phi_0^*(\tau)\,d\tau, \tag{6.9}$$

где n и m — какие-нибудь натуральные числа. Очевидно, $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ — голоморфные функции в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{gathered}
\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(z_0) = 0, \\
\varphi^*(\zeta_0) = \varphi^{*\prime}(\zeta_0) = \cdots = \varphi^{*(m-1)}(\zeta_0) = 0, \\
\varphi^{(n)}(z_0) = \varphi^{*(m)}(\zeta_0).
\end{gathered} \tag{6.10}$$

Принимая во внимание, что

$$\Phi_0(z) = \varphi^{(n)}(z), \qquad \Phi_0^*(\zeta) = \varphi^{*(m)}(\zeta), \tag{6.11}$$

и учитывая условия (6.10), при помощи надлежащего числа интегрирований по частям из формулы (6.8) получим:

$$\begin{aligned}
U(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} G(t,\zeta_0,z,\zeta)\right]_{t=z} \varphi^{(n-k)}(z) &- \\
-(-1)^n \int_{z_0}^{z} \varphi(t) \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} G(t,\zeta_0,z,\zeta)\,dt &+ \\
+ \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \left[\frac{\partial^k}{\partial \tau^k} G(z_0,\tau,z,\zeta)\right]_{\tau=\zeta} \varphi^{*(m-k)}(\zeta) &- \\
-(-1)^m \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi^*(\tau) \frac{\partial^{m+1}}{\partial \tau^{m+1}} G(z_0,\tau,z,\zeta)\,d\tau&.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Здесь m, n могут принимать любые целые неотрицательные значения. Для любых функций $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$, голоморфных в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно, эта формула даёт аналитическое в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ решение уравнения (F_0). Надо отметить, что функции φ и φ^* однозначно определяются через $U(z,\zeta)$, если соблюдены условия (6.10).

Формула (6.8) позволяет строить решения уравнения (E_0), имеющие особенности сколь угодно большого порядка в заданной точке.

5°. Мы можем теперь обобщить ещё более формулы (6.1), (6.8) и (6.12).

Рассмотрим, кроме фиксированных точек z_0, ζ_0 $(z_0 \in \mathfrak{D}, \zeta_0 \in \overline{\mathfrak{D}})$, также другие фиксированные точки z_1, ζ_1 $(z_1 \in \mathfrak{D}, \zeta_1 \in \overline{\mathfrak{D}})$. Легко проверить, что формула

$$U(z,\zeta) = \alpha_0 G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \zeta_1, z, \zeta)\, dt + \\ + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(\tau) G(z_1, \tau, z, \zeta)\, d\tau, \tag{6.13}$$

где α_0 — любая постоянная, $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$ — любые голоморфные функции в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно, даёт аналитические в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ решения уравнения (F_0). Докажем, что постоянная α_0 и функции Φ, Φ^* однозначно определяются через $U(z, \zeta)$.

В самом деле, из (6.13) имеем:

$$\alpha_0 = U(z_0, \zeta_0), \tag{6.14}$$

$$\int_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \zeta_1, z, \zeta_0)\, dt = U(z, \zeta_0) - U(z_0, \zeta_0) G(z_0, \zeta_0, z, \zeta_0), \tag{6.15}$$

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(\tau) G(z_1, \tau, z_0, \zeta)\, d\tau = U(z_0, \zeta) - U(z_0, \zeta_0) G(z_0, \zeta_0, z_0, \zeta). \tag{6.16}$$

Дифференцируя обе части (6.15) и (6.16) по z и ζ соответственно, получим:

$$G(z, \zeta_1, z, \zeta_0)\Phi(z) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) \frac{\partial}{\partial z} G(t, \zeta_1, z, \zeta_0)\, dt = \\ = \frac{\partial}{\partial z}[U(z, \zeta_0) - U(z_0, \zeta_0) G(z_0, \zeta_0, z, \zeta_0)], \tag{6.17}$$

$$G(z_1, \zeta, z_0, \zeta)\Phi^*(\zeta) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \zeta} G(z_1, \tau, z_0, \zeta)\, d\tau = \\ = \frac{\partial}{\partial \zeta}[U(z_0, \zeta) - U(z_0, \zeta_0) G(z_0, \zeta_0, z_0, \zeta)]. \tag{6.18}$$

Но на основании (4.5) имеем:

$$G(z, \zeta_1, z, \zeta_0) = \exp \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} A(z, \eta)\, d\eta \neq 0,$$
$$G(z_1, \zeta, z_0, \zeta) = \exp \int_{z_0}^{z_1} B(\xi, \zeta)\, d\xi \neq 0. \tag{6.19}$$

Поэтому (6.17) и (6.18) представляют собой интегральные уравнения типа Вольтерра, решения которых, согласно результатам § 3, существуют, определяются единственным образом и являются аналитическими функциями в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно. Таким образом, наше предложение доказано.

Аналогично можно обобщить также формулы (6.8) и (6.12).

§ 7. Элементарные решения. Формулы, выведенные в предыдущем параграфе, позволяют получить ряд замечательных частных решений уравнения (E_0). В частности, мы можем из них получить так называемые *элементарные решения*. Это такие решения, которые в некоторой окрестности произвольно выбранной точки (x_0, y_0) имеют вид:

$$g(x, y) \lg [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + g_0(x, y), \tag{7.1}$$

где g и g_0 — непрерывные функции, имеющие непрерывные производные первого и второго порядков внутри указанной окрестности, причём $g(x_0, y_0) \neq 0$. Точка (x_0, y_0), в которой выражение (7.1) обращается в бесконечность, называется *полюсом элементарного решения*.

Если умножить выражение (7.1) на какую-нибудь постоянную, отличную от нуля, и прибавить к нему какое-нибудь решение уравнения (E_0), регулярное в окрестности точки (x_0, y_0), то опять получим элементарное решение уравнения (E_0). Поэтому мы можем элементарные решения подчинять некоторым дополнительным условиям. Этим обстоятельством мы воспользуемся ниже.

1°. Перейдём теперь к построению элементарных решений уравнения (E_0). С этой целью мы воспользуемся формулой (6.8). Подставим туда функции:

$$\Phi_0(z) = K_0 \lg (z - z_0), \quad \Phi_0^*(\zeta) = K_0 \lg (\zeta - \zeta_0), \tag{7.2}$$

где K_0 — некоторая постоянная, отличная от нуля. Тогда после простых и очевидных выкладок получим следующее частное решение уравнения (F_0):

$$\Omega_1(z, \zeta, z_0, \zeta_0) =$$
$$= K_0 \{G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) \lg [(z - z_0)(\zeta - \zeta_0)] - \Omega_0(z, \zeta, z_0, \zeta_0)\}, \tag{7.3}$$

где

$$\Omega_0(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = \int_0^1 \lg\sigma \, \frac{\partial}{\partial\sigma}[G(z_0+(z-z_0)\sigma, \zeta_0, z, \zeta) + \\ + G(z_0, \zeta_0+(\zeta-\zeta_0)\sigma, z, \zeta)]\, d\sigma. \quad (7.4)$$

Очевидно, Ω_1 — многозначная функция. Но если мы подставим в (7.3) вместо z, ζ, z_0, ζ_0 выражения: $z = x+iy$, $\zeta = x-iy$, $z_0 = x_0+iy_0$, $\zeta_0 = x_0 - iy_0$, где (x, y), (x_0, y_0) — точки области $\mathfrak{D}$, то получим однозначную функцию

$$\omega_1(x, y, x_0, y_0) = \\ = K_0\{g(x, y, x_0, y_0)\lg[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2] - g_0(x, y, x_0, y_0)\}, \quad (7.5)$$

являющуюся решением уравнения (E_0); здесь

$$g(x, y, x_0, y_0) = G(x_0+iy_0, \; x_0-iy_0, \; x+iy, \; x-iy), \quad (7.6)$$

$$g_0(x, y, x_0, y_0) = \Omega_0(x+iy, \; x-iy, \; x_0+iy_0, \; x_0-iy_0). \quad (7.7)$$

Очевидно; g и g_0 — аналитические функции переменных x, y внутри некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причём $g(x_0, y_0, x_0, y_0) = 1$. Следовательно, $\omega_1(x, y, x_0, y_0)$ является элементарным решением уравнения (E_0) с полюсом в точке (x_0, y_0).

2°. Построим теперь элементарные решения сопряжённого с (E_0) уравнения

$$E^*(v) = \Delta v - \frac{\partial av}{\partial x} - \frac{\partial bv}{\partial y} + cv = 0. \quad (E_0^*)$$

Для этого уравнения формула (6.8), очевидно, записывается в следующем виде:

$$U(z, \zeta) = G(z, \zeta, z, \zeta_0)\Phi_0(z) - \int_{z_0}^{z} \Phi_0(t)\frac{\partial}{\partial t}G(z, \zeta, t, \zeta_0)\,dt + \\ + G(z, \zeta, z_0, \zeta)\Phi_0^*(\zeta) - \int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi_0^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}G(z, \zeta, z_0, \tau)\,d\tau. \quad (7.8)$$

Подставляя сюда функции вида (7.2), получим:

$$\Omega_1^*(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = \\ = K_0\{G(z, \zeta, z_0, \zeta_0)\lg[(z-z_0)(\zeta-\zeta_0)] - \Omega_0^*(z, \zeta, z_0, \zeta_0)\}, \quad (7.9)$$

где

$$\Omega_0^*(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = \int_0^1 \lg\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}[G(z, \zeta, z_0+(z-z_0)\sigma, \zeta_0) + \\ + G(z, \zeta, z_0, \zeta_0+(\zeta-\zeta_0)\sigma)]\,d\sigma. \quad (7.10)$$

Заменяя в (7.9) z, ζ, z_0, ζ_0 через $x+iy$, $x-iy$, x_0+iy_0, x_0-iy_0

соответственно, получим:

$$\omega_1^*(x, y, x_0, y_0) =$$
$$= K_0 \{g(x_0, y_0, x, y) \lg [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] - g_0^*(x, y, x_0, y_0)\} \quad (7.11)$$

где g определяется формулой (7.6), а

$$g_0^*(x, y, x_0, y_0) = \Omega_0^*(x+iy,\ x-iy,\ x_0+iy_0,\ x_0-iy_0). \quad (7.12)$$

Рассмотрим теперь функцию $\omega_1(x_0, y_0, x, y)$, которую получим, если в (7.5) поменяем местами точки (x_0, y_0) и (x, y). Очевидно, *главные части* (члены, содержащие логарифмы) функций $\omega_1(x_0, y_0, x, y)$ и $\omega_1^*(x, y, x_0, y_0)$ совпадают, но их регулярные части вообще различны. Поэтому $\omega_1(x_0, y_0, x, y)$ не будет, вообще говоря, элементарным решением уравнения (E_0^*). Но, оказывается, имеет место следующее предложение:

Существуют такие элементарные решения $\omega(x, y, x_0, y_0)$ уравнения (E_0) с полюсом в точке (x_0, y_0), которые относительно переменных x_0, y_0 являются элементарными решениями сопряжённого уравнения (E_0^*) с полюсом в точке (x, y).

Такие элементарные решения мы будем называть *стандартными элементарными решениями.*

Докажем, что одним из таких решений будет функция

$$\omega(x, y, x_0, y_0) =$$
$$= \omega_1(x, y, x_0, y_0) - \int_{z_1}^{z_0} d\xi \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} G(z_0, \zeta_0, \xi, \eta) F_{\xi\eta}^*[\Omega_1(z, \zeta, \xi, \eta)]\, d\eta \quad (7.13)$$
$$(z = x+iy,\ \zeta = x-iy,\ z_0 = x_0+iy_0,\ \zeta_0 = x_0-iy_0),$$

где

$$F_{\xi\eta}^*[\ ] = \frac{\partial^2 [\ ]}{\partial\xi\, \partial\eta} - \frac{\partial A(\xi, \eta)[\ ]}{\partial\xi} - \frac{\partial B(\xi, \eta)[\ ]}{\partial\eta} + C(\xi, \eta)[\ ], \quad (7.14)$$

а z_1, ζ_1 — фиксированные точки, $z_1 \in \mathfrak{D}$, $\zeta_1 \in \overline{\mathfrak{D}}$. Прежде всего покажем, что $F_{\xi\eta}^*[\Omega_1(z, \zeta, \xi, \eta)]$ является аналитической функцией переменных z, ζ, ξ, η в области $z, \xi \in \mathfrak{D}$, $\zeta, \eta \in \overline{\mathfrak{D}}$.

Имеем:

$$F_{\xi\eta}^*[\Omega_1^*(\xi, \eta, z_0, \zeta_0)] = 0. \quad (7.15)$$

Очевидно, Ω_0^* — аналитическая функция своих аргументов в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$. Сравнивая (7.9) с (7.3), найдём, что разность $\Omega_1(z, \zeta, \xi, \eta) - \Omega_1(\xi, \eta, z, \zeta)$ есть аналитическая функция переменных z, ζ, ξ, η в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$. Отсюда, в силу (7.15), сразу получим, что $F_{\xi\eta}^*[\Omega_1(z, \zeta, \xi, \eta)]$ — аналитическая функция переменных z, ζ, ξ, η в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$. На основании этого второе слагаемое правой части (7.13) представляет собой функцию двух точек (x, y), (x_0, y_0), аналитическую относительно любой из пар переменных x, y и x_0, y_0 в области $\mathfrak{D}$. Легко теперь проверить, что выражение (7.13) как функция точки (x, y) представляет собой элементарное решение уравнения (E_0) с полюсом в точке $(x_0\ y_0)$, а как функция точки (x_0, y_0) является элементарным решением сопряжённого уравнения (E_0^*) с полюсом в точке (x, y). Таким образом, наше предложение доказано.

В дальнейшем постоянную K_0, входящую в (7.13), мы будем считать равной $-1/4\pi$; элементарное решение при таком выборе постоянной K_0 мы будем называть *нормированным* элементарным решением.

§ 8. Аналитический характер решений уравнения (E_0). 1°. Пусть T — некоторая $(m+1)$-связная область, границу которой обозначим через L; предположим, что L состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых $L_0, L_1, \ldots, L_m$, из которых L_0 охватывает все остальные. Положительным направлением на каждой из этих кривых будем считать то направление, которое оставляет область T слева. Пусть $u(x, y)$, $v(x, y)$ — однозначные функции, имеющие непрерывные частные производные первого и второго порядков внутри T и непрерывные частные производные первого порядка в $T+L$. Тогда, как нетрудно проверить, имеет место формула

$$\iint_T [vE(u)-uE^*(v)]\,dx\,dy=$$
$$=\int_L \left[u\frac{dv}{d\nu}-v\frac{du}{d\nu}-uv\,(a\cos(\nu, x)+b\cos(\nu, y))\right]ds, \quad (8.1)$$

где ν обозначает внутреннюю нормаль;

$$E(u)=\Delta u+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)\,u,$$
$$E^*(v)=\Delta v-\frac{\partial av}{\partial x}-\frac{\partial bv}{\partial y}+cv;$$

предполагаем, что a, b, c — аналитические функции в $T+L$.

Из (8.1) непосредственно вытекают следующие предложения:

I. *Если u и v — регулярные решения в T уравнений* (E_0) *и* (E_0^*) *соответственно, то будем иметь*:

$$\int_L \left[u\frac{dv}{d\nu}-v\frac{du}{d\nu}-uv\,(a\cos(\nu, x)+b\cos(\nu, y))\right]ds=0. \quad (8.2)$$

II. *Если $u(x, y)$ — регулярное в области T $(T\subset\mathfrak{D})$ решение уравнения* (E_0), *то будем иметь*:

$$u(x, y)=\int_L \left[u\frac{d}{d\nu}\,\omega(x, y, \xi, \eta)-\omega(x, y, \xi, \eta)\,Nu\right]ds, \quad (8.3)$$

где (x, y) — *любая точка области* T, (ξ, η) — *точка интегрирования*, ν — *внутренняя нормаль в точке* (ξ, η), $\omega(x, y, \xi, \eta)$ — *нормированное стандартное элементарное решение уравнения* (E_0) *и, наконец,*

$$Nu = \frac{du}{d\nu} + (a \cos(\nu, x) + b \cos(\nu, y)) u. \tag{8.4}$$

III. Из формулы (8.3) сразу получаем следующую известную теорему (Пикар):

Теорема. *Если* a, b, c — *аналитические функции в области* T, *то всякое регулярное в* T *решение уравнения* (E_0) *является аналитической функцией переменных* x, y *в этой области.*

2°. Формулу (8.3) мы можем записать также в виде:

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y) + \ldots + u_m(x, y), \tag{8.5}$$

где

$$u_k(x, y) = \int_{L_k} \left[u \frac{d}{d\nu} \omega(x, y, \xi, \eta) - \omega(x, y, \xi, \eta) Nu \right] ds \tag{8.6}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, m).$$

Пусть $T_0, T_1, \ldots, T_m$ — односвязные области, ограниченные кривыми $L_0, L_1, \ldots, L_m$ соответственно. Предположим, что $T_0 \subset \mathfrak{D}$. Пусть $T'_k = \mathfrak{D} - T_k$ $(k = 1, \ldots, m)$. Очевидно, $T'_1, \ldots, T'_m$ — двусвязные области (конечные или бесконечные). Принимая во внимание свойства функции $\omega(x, y, \xi, \eta)$, будем иметь: $u_0(x, y)$ — регулярное в T_0, а $u_k(x, y)$ — регулярные в T_k и T'_k $(k = 1, \ldots, m)$ решения уравнения (E_0).

Предположим теперь, что $u(x, y)$ — решение уравнения (E_0), регулярное в области D, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, причём C_0 находится вне T_0, а $C_1, \ldots, C_m$ лежат внутри $T_1, \ldots, T_m$ соответственно. Пусть $D_0 = D + C_1 + \ldots + C_m$ $(D_0 \subset \mathfrak{D})$, $D_k = \mathfrak{D} - C_k$ $(k = 1, \ldots, m)$. Тогда, используя (8.2), легко докажем, что формула (8.5) сохраняет силу для любого регулярного в D решения уравнения (E_0), причём $u_0(x, y)$ — регулярное в D_0, а $u_k(x, y)$ — регулярное в D_k $(k = 1, \ldots, m)$ решение уравнения (E_0). Заметим, что эти функции вовсе не зависят от кривых L_k; при помощи (8.2) легко докажем, что в формуле (8.6) в качестве L_k можно взять любую кусочно-гладкую простую замкнутую кривую, лежащую в D и отделяющую точку (x, y). и континуумы C_j $(j \neq k)$ от континуума C_k.

§ 9. Аналитическое продолжение решений уравнения (E_0) в область комплексных значений аргументов.

1°. Пусть $\mathfrak{D}$ — основная область уравнения (E_0). Возьмём внутри $\mathfrak{D}$ некоторую односвязную область T, ограниченную простой замкнутой кусочно-гладкой кривой L; мы считаем, что $T + L \subset \mathfrak{D}$.

Тогда любое решение $u(x, y)$ уравнения (E_0), регулярное в $\mathfrak{D}$, мы можем внутри T представить по формуле (8.3). Подставим теперь в правую часть (8.3) вместо переменных x, y комплексные выражения: $x=(z+\zeta)/2$, $y=(z-\zeta)/2i$, где $z\in T$, $\zeta\in\overline{T}$. Тогда мы получим следующую функцию:

$$U(z, \zeta)=\int\limits_L \left[u \frac{d}{d\nu}\Omega(z, \zeta, t, \bar{t})-\Omega(z, \zeta, t, \bar{t}) Nu\right] ds, \tag{9.1}$$

где $\Omega(z, \zeta, t, \bar{t})=\omega\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}, \frac{t+\bar{t}}{2}, \frac{t-\bar{t}}{2i}\right)$, причём $t=\xi+i\eta\in L$. Согласно формулам (7.13), (7.5) и (7.3) имеем:

$$\Omega(z, \zeta, t, \bar{t})=$$
$$=-\frac{1}{4\pi} G(t, \bar{t}, z, \zeta) \lg[(t-z)(\bar{t}-\zeta)]+\Omega_0'(z, \zeta, t, \bar{t}), \tag{9.2}$$

где Ω_0' — аналитическая функция своих аргументов в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$. На основании (9.2) легко докажем, что $U(z, \zeta)$ — аналитическая функция переменных z, ζ в $(T, \overline{T})$. Но область T мы можем взять такой, чтобы её граница была сколь угодно близка к границе $\mathfrak{D}$. Кроме того, $u(x, y)$, очевидно, вовсе не зависит от выбора области T. Поэтому $U(z, \zeta)$ будет аналитической функцией переменных z, ζ в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, которая при $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$, где $(x, y)\in\mathfrak{D}$, совпадает с $u(x, y)$. Следовательно, $U(z, \zeta)$ представляет собой аналитическое продолжение функции $u(x, y)$ в область комплексных значений переменных x, y. Таким образом, мы имеем следующую теорему:

Теорема. *Аналитическое продолжение регулярного в основной области $\mathfrak{D}$ решения $u(x, y)$ уравнения (E_0) в область комплексных значений аргументов является аналитической функцией переменных z, ζ в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ и выражается формулой* (9.1), *где в качестве L можно взять любую простую замкнутую кусочно-гладкую кривую, лежащую в $\mathfrak{D}$*[1].

Таким образом, *если $u(x, y)$ — регулярное в $\mathfrak{D}$ решение уравнения (E_0), то выражение*

$$U(z, \zeta)=u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) \tag{9.3}$$

представляет собой аналитическую функцию переменных z, ζ в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, осуществляющую аналитическое продолжение функции $u(x, y)$ в область комплексных значений аргументов x, y.

---

[1]) Если $\mathfrak{D}$ совпадает с плоскостью z, то в качестве L можно взять окружность сколь угодно большого радиуса.

В частности, *если начало координат лежит в $\mathfrak{D}$, то из* (9.3) *видно, что* $u(z/2, z/2i)$ *и* $u(\zeta/2, i\zeta/2)$ — *голоморфные функции в* $\mathfrak{D}$ *и* $\overline{\mathfrak{D}}$ *соответственно.*

2°. Аналитическое продолжение решений уравнения (E_0) в область комплексных значений аргументов возможно и в случае многосвязной области. Но тогда, как увидим ниже, мы получим вообще многозначные функции.

Для большей ясности рассмотрим сперва случай, когда область является двусвязной. Пусть D — некоторая двусвязная область, дополнение которой состоит из двух континуумов C_0 и C_1, причём C_0 содержит бесконечную точку, а C_1 — ограниченное множество. Будем предполагать, что $D+C_1$ принадлежит некоторой основной области $\mathfrak{D}$ уравнения (E_0). Пусть $D_0=D+C_1$, $D_1=\mathfrak{D}-C_1$.

Пусть $u(x, y)$ — некоторое решение уравнения (E_0), регулярное в D. Мы можем его представить в виде (см. формулы (8.5) и (8.6))

$$u(x, y)=u_0(x, y)+u_1(x, y), \tag{9.4}$$

где

$$u_0(x, y)=\int_{L_0}\left[u\frac{d}{d\nu}\omega(x, y, \xi, \eta)-\omega(x, y, \xi, \eta)Nu\right]ds, \tag{9.5}$$

$$u_1(x, y)=\int_{L_1}\left[u\frac{d}{d\nu}\omega(x, y, \xi, \eta)-\omega(x, y, \xi, \eta)Nu\right]ds. \tag{9.6}$$

Здесь L_0 и L_1 — любые простые замкнутые кусочно-гладкие кривые, лежащие в D и отделяющие C_0, C_1 от точки (x,y) соответственно; очевидно, u_0 и u_1 не зависят от выбора этих кривых и представляют собой регулярные решения уравнения (E_0) в D_0 и D_1 соответственно.

Проведём теперь в области D разрез, соединяющий C_0 и C_1. Тогда получим односвязную область D'. Продолжая из области D' аналитическую функцию $u(x, y)$ в область комплексных значений x, y, согласно доказанной выше теореме получим функцию

$$U(z, \zeta)=u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)=U_0(z, \zeta)+U_1(z, \zeta), \tag{9.7}$$

где

$$U_0(z, \zeta)=u_0\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right), \quad U_1(z, \zeta)=u_1\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right). \tag{9.8}$$

Очевидно, $U_0(z, \zeta)$ — аналитическая функция в $(D_0, \overline{D}_0)$, которая представляет собой аналитическое продолжение $u_0(x, y)$; $U_1(z, \zeta)$, является аналитической функцией в области $(D_1', \overline{D}_1')$, но в области $(D_1, \overline{D}_1)$ она, вообще говоря, будет многозначной функцией. Выясним характер многозначности этой функции.

Возьмём на C_1 и $\bar{C}_1$ некоторые фиксированные точки z_1 и ζ_1 соответственно. Тогда из (9.6) и (9.8) будем иметь:

$$U_1(z,\zeta)=P_1(z,\zeta)\lg\left[(z-z_1)(\zeta-\zeta_1)\right]+U_1'(z,\zeta), \tag{9.9}$$

где

$$P_1(z,\zeta)=$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{L_1}\left[u\frac{d}{d\nu}G(t,\bar{t},z,\zeta)-G(t,\bar{t},z,\zeta)Nu\right]ds, \tag{9.10}$$

$$U_1'(z,\zeta)=$$
$$=\int\limits_{L_1}\left[u\frac{d}{d\nu}\Omega'(z,\zeta,t,\bar{t})-\Omega'(z,\zeta,t,\bar{t})Nu\right]ds, \tag{9.11}$$

причём Ω' имеет следующий вид:

$$\Omega'(z,\zeta,t,\bar{t})=$$
$$=-\frac{1}{4\pi}G(t,\bar{t},z,\zeta)\lg\frac{(z-t)(\zeta-\bar{t})}{(z-z_1)(\zeta-\zeta_1)}+\Omega_0'(z,\zeta,t,\bar{t}), \tag{9.12}$$

где Ω_0' — аналитическая функция своих аргументов в области $(\mathfrak{D}, \bar{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}, \bar{\mathfrak{D}})$.

Выбирая определённую ветвь многозначной функции Ω', мы легко докажем, что $U_1'(z,\zeta)$ — аналитическая функция переменных z,ζ в $(D_1, \bar{D}_1)$. Поэтому характер многозначности функции $U_1(z,\zeta)$ целиком определяется первым слагаемым правой части (9.9). Множитель $P_1(z,\zeta)$ этого слагаемого, как видно из (9.10), представляет собой аналитическую функцию переменных z, ζ в $(\mathfrak{D}, \bar{\mathfrak{D}})$ и удовлетворяет уравнению

$$F(U)=\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial\zeta}+A(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial z}+B(z,\zeta)\frac{\partial U}{\partial\zeta}+C(z,\zeta)U=0. \tag{F$_0$}$$

Подставляя (9.9) в (9.7), будем иметь:

$$U(z,\zeta)=P_1(z,\zeta)\lg\left[(z-z_1)(\zeta-\zeta_1)\right]+U^*(z,\zeta), \tag{9.13}$$

где

$$U^*(z,\zeta)=U_0(z,\zeta)+U_1'(z,\zeta). \tag{9.14}$$

Очевидно, $U^*(z,\zeta)$ — аналитическая функция z, ζ в $(D, \bar{D})$.

Таким образом, *аналитическое продолжение регулярного в двусвязной области D решения уравнения* (E_0) *приводит, вообще говоря, к многозначной функции вида* (9.13).

Если мы рассмотрим общий случай, когда D — многосвязная область, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, причём C_0 содержит бесконечную точку, а $C_1, \ldots, C_m$ — ограниченные множества, то *аналитическое про-*

должение любого решения $u(x, y)$ уравнения (E_0), регулярного в D, приводит к функции двух переменных z, ζ, имеющей вид:

$$U(z, \zeta) = \sum_{k=1}^{m} P_k(z, \zeta) \lg [(z - z_k)(\zeta - \zeta_k)] + U^*(z, \zeta), \qquad (9.15)$$

где z_k и ζ_k — фиксированные точки на C_k и $\overline{C}_k$ соответственно ($k = 1, \ldots, m$); $U^*(z, \zeta)$ — аналитическая функция переменных z, ζ в $(D, \overline{D})$ и

$$P_k(z, \zeta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{L_k} \left[u \frac{d}{d\nu} G(t, \bar{t}, z, \zeta) - G(t, \bar{t}, z, \zeta) Nu \right] ds \qquad (9.16)$$

$$(k = 1, \ldots, m).$$

Здесь L_k — любая простая замкнутая кусочно-гладкая кривая, лежащая в D и отделяющая C_k от остальных континуумов C_j ($j = 1, \ldots, m$; $j \neq k$). Очевидно, $P_k(z, \zeta)$ ($k = 1, \ldots, m$) — аналитические функции переменных z, ζ в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, удовлетворяющие уравнению (F_0). Легко видеть, что P_k не зависит от выбора кривых L_k.

§ 10. Общие представления решений уравнения (E_0) в односвязных областях. 1°. Пусть $\mathfrak{D}$ — некоторая основная область уравнения

$$E(u) = \Delta u + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = 0. \qquad (E_0)$$

Пусть $u(x, y)$ — некоторое регулярное в $\mathfrak{D}$ решение этого уравнения; продолжая его аналитически в область комплексных значений аргументов x, y, согласно теореме предыдущего параграфа, получим функцию

$$U(z, \zeta) = u\left(\frac{z + \zeta}{2}, \frac{z - \zeta}{2i} \right),$$

аналитическую относительно переменных z, ζ в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ и удовлетворяющую уравнению

$$F(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \zeta} + A(z, \zeta) \frac{\partial U}{\partial z} + B(z, \zeta) \frac{\partial U}{\partial \zeta} + C(z, \zeta) U = 0. \qquad (F_0)$$

Согласно результатам § 6 (формула (6.1)) функцию $U(z, \zeta)$ можно представить в виде:

$$U(z, \zeta) = \alpha_0 G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \zeta_0, z, \zeta) dt +$$

$$+ \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(\tau) G(z_0, \tau, z, \zeta) d\tau, \qquad (10.1)$$

где z_0, ζ_0 — фиксированные точки, $z_0 \in \mathfrak{D}$, $\zeta_0 \in \overline{\mathfrak{D}}$;

$$\begin{gathered}
\alpha_0 = U(z_0, \zeta_0), \quad \Phi(z) = \frac{\partial U(z, \zeta_0)}{\partial z} + B(z, \zeta_0)\, U(z, \zeta_0), \\
\Phi^*(\zeta) = \frac{\partial U(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} + A(z_0, \zeta)\, U(z_0, \zeta).
\end{gathered} \tag{10.2}$$

Подставляя теперь в (10.1) $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$, где (x, y) — точка области $\mathfrak{D}$, получим:

$$u(x, y) = \alpha_0 G(z_0, \zeta_0, z, \bar{z}) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t)\, G(t, \zeta_0, z, \bar{z})\, dt + \int_{\zeta_0}^{\bar{z}} \Phi^*(\tau)\, G(z_0, \tau, z, \bar{z})\, d\tau. \tag{10.3}$$

Таким образом мы доказали, что любое регулярное в $\mathfrak{D}$ решение $u(x, y)$ уравнения (E_0) можно представить в виде (10.3), где α_0 — постоянная, а $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$ — голоморфные функции в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно, которые однозначно определяются при помощи формул (10.2) через $u(x, y)$. С другой стороны, как мы уже отмечали в § 6, правая часть (10.3) представляет собой всегда (т. е. для любой постоянной α_0 и для любых функций $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$, голоморфных в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно) регулярное в $\mathfrak{D}$ решение уравнения (E_0). Поэтому мы имеем следующее предложение:

Теорема. *Пусть $\mathfrak{D}$ — некоторая основная область уравнения (E_0). Тогда формула (10.3), где α_0 — любая постоянная и $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$ — любые голоморфные функции в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно, даёт все регулярные в $\mathfrak{D}$ решения уравнения (E_0); причём α_0, Φ, Φ^* однозначно определяются через $u(x, y)$ при помощи формул (10.2).*

2°. Мы можем формулу (10.3) записать ещё несколько в ином виде. Подставляя в (10.1) вместо Φ и Φ^* их выражения (10.2) и затем интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned}
U(z, \zeta) = {} & -U(z_0, \zeta_0)\, G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) + \\
& + G(z, \zeta_0, z, \zeta)\, U(z, \zeta_0) - \int_{z_0}^{z} U(t, \zeta_0)\, H(t, \zeta_0, z, \zeta)\, dt + \\
& + G(z_0, \zeta, z, \zeta)\, U(z_0, \zeta) - \int_{\zeta_0}^{\zeta} U(z_0, \tau)\, H^*(z_0, \tau, z, \zeta)\, d\tau,
\end{aligned} \tag{10.4}$$

где

$$\begin{aligned} H(t,\zeta_0,z,\zeta) &= \frac{\partial}{\partial t} G(t,\zeta_0,z,\zeta) - B(t,\zeta_0)\, G(t,\zeta_0,z,\zeta),\\ H^*(z_0,\tau,z,\zeta) &= \frac{\partial}{\partial \tau} G(z_0,\tau,z,\zeta) - A(z_0,\tau)\, G(z_0,\tau,z,\zeta). \end{aligned} \tag{10.5}$$

Подставляя теперь вместо $U(z,\zeta)$ в (10.4) $G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)$, будем иметь:

$$2G(z_0,\zeta_0,z,\zeta) = G(z,\zeta_0,z,\zeta)\,G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0) + G(z_0,\zeta,z,\zeta)\,G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta) - \int_{z_0}^{z} G(z_0,\zeta_0,t,\zeta_0)\,H(t,\zeta_0,z,\zeta)\,dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(z_0,\zeta_0,z_0,\tau)\,H^*(z_0,\tau,z,\zeta)\,d\tau. \tag{10.6}$$

Если внести последнее выражение в (10.4), то получим:

$$U(z,\zeta) = G(z,\zeta_0,z,\zeta)\,\varphi(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi(t)\,H(t,\zeta_0,z,\zeta)\,dt + G(z_0,\zeta,z,\zeta)\,\varphi^*(\zeta) - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi^*(\tau)\,H^*(z_0,\tau,z,\zeta)\,d\tau, \tag{10.7}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= U(z,\zeta_0) - \frac{1}{2} U(z_0,\zeta_0)\, G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0),\\ \varphi^*(\zeta) &= U(z_0,\zeta) - \frac{1}{2} U(z_0,\zeta_0)\, G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta). \end{aligned} \tag{10.8}$$

Подставляя в (10.7) $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$, где $(x,y)\in\mathfrak{D}$, получим:

$$u(x,y) = G(z,\zeta_0,z,\bar z)\,\varphi(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi(t)\,H(t,\zeta_0,z,\bar z)\,dt + G(z_0,\bar z,z,\bar z)\,\varphi^*(\bar z) - \int_{\zeta_0}^{\bar z} \varphi^*(\tau)\,H^*(z_0,\tau,z,\bar z)\,d\tau. \tag{10.9}$$

Эта формула, где $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ — произвольные голоморфные функции в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно, даёт нам также все регулярные в $\mathfrak{D}$ решения уравнения (E_0).

Выясним теперь степень определённости функций φ и φ^*.

Из формул (10.5), согласно (4.6), получим:

$$H(t,\zeta_0,z,\zeta_0) = H(z_0,\tau,z_0,\zeta) = 0. \tag{10.10}$$

На основании последних равенств и в силу (4.5) из (10.7) следует

$$U(z,\zeta_0)=\varphi(z)+G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)\,\varphi^*(\zeta_0),$$
$$U(z_0,\zeta)=\varphi^*(\zeta)+G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)\,\varphi(z_0). \tag{10.11}$$

Отсюда имеем:

$$U(z_0,\zeta_0)=\varphi(z_0)+\varphi^*(\zeta_0), \tag{10.12}$$

т. е. $\varphi(z_0)$ и $\varphi^*(\zeta_0)$ имеют вид:

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)+K_0,\quad \varphi^*(\zeta_0)=\frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)-K_0, \tag{10.13}$$

где K_0 — любая постоянная. Подставляя (10.13) в (10.11), получим:

$$\varphi(z)=U(z,\zeta_0)-\frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)\,G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)+K_0\,G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0),$$
$$\varphi^*(\zeta)=U(z_0,\zeta)-\frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)\,G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)-K_0\,G(z_0,\zeta_0;z_0,\zeta). \tag{10.14}$$

Подставим теперь в правую часть (10.7) функции: $\varphi(z)=K_0G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)$ и $\varphi^*(\zeta)=-K_0G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)$ (K_0 — любая постоянная) и полученное выражение обозначим через $U_0(z,\zeta)$. Докажем, что $U_0(z,\zeta)=0$. В самом деле, U_0 — аналитическое решение уравнения (F_0) в области ($\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$), которое, согласно (10.10) и (4.5), удовлетворяет условиям: $U_0(z,\zeta_0)=0$, $U_0(z_0,\zeta)=0$, т. е. U_0 есть решение однородной задачи Гурса для уравнения (F_0). Следовательно, $U_0(z,\zeta)=0$ всюду в $\mathfrak{D}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, функции $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$, входящие в (10.7) и (10.9), определяются через $u(x,y)$ с точностью до слагаемых $K_0G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)$ и $-K_0G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)$ соответственно, где K_0 — произвольная постоянная. В частности, мы можем положить $K_0=0$, что, очевидно, равносильно требованию

$$\varphi(z_0)=\varphi^*(\zeta_0). \tag{10.15}$$

При соблюдении этого условия $\varphi(z)$ *и* $\varphi^*(\zeta)$ *однозначно определяются через* $u(x,y)$ *по формулам* (10.8).

3°. Вводя теперь обозначения

$$\Phi_0(z)=\frac{a_0}{2}+\int_{z_0}^{z}\Phi(t)\,dt,\quad \Phi_0^*(\zeta)=\frac{a_0}{2}+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^*(\tau)\,d\tau, \tag{10.16}$$

мы можем записать формулу (10.3) в виде:

$$u(x, y) = G(z, \zeta_0, z, \bar{z})\,\Phi_0(z) - \int_{z_0}^{z} \Phi_0(t)\,\frac{\partial}{\partial t} G(t, \zeta_0, z, \bar{z})\,dt +$$
$$+ G(z_0, \bar{z}, z, \bar{z})\,\Phi_0^*(\bar{z}) - \int_{\zeta_0}^{\bar{z}} \Phi_0^*(\tau)\,\frac{\partial}{\partial \tau} G(z_0, \tau, z, \bar{z})\,d\tau. \quad (10.17)$$

Эта формула, где $\Phi_0(z)$ и $\Phi_0^*(\zeta)$ — любые голоморфные функции в $\mathfrak{D}$ и $\bar{\mathfrak{D}}$ соответственно, даёт нам, как и формулы (10.3), (10.9), *все решения уравнения* (E_0), *регулярные в* $\mathfrak{D}$.

Как показывает (10.16), функции Φ_0 и Φ_0^* однозначно определяются через $u(x, y)$, если соблюдено условие

$$\Phi_0(z_0) = \Phi_0^*(\zeta_0). \quad (10.18)$$

Если это условие отбросить, то функции Φ_0 и Φ_0^* определяются через $u(x, y)$ с точностью до слагаемых K_0 и $-K_0$ соответственно, где K_0 — произвольная постоянная; это легко вытекает из (10.17).

4°. Мы можем для представления всех регулярных в $\mathfrak{D}$ решений уравнения (E_0) пользоваться также следующей общей формулой (см. формулу (6.12)):

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} G(t, \zeta_0, z, \bar{z})\right]_{t=z} \varphi^{(n-k)}(z) -$$
$$- (-1)^n \int_{z_0}^{z} \varphi(t)\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} G(t, \zeta_0, z, \bar{z})\,dt +$$
$$+ \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \left[\frac{\partial^k}{\partial \tau^k} G(z_0, \tau, z, \bar{z})\right]_{\tau=\bar{z}} \varphi^{*(m-k)}(\bar{z}) -$$
$$- (-1)^m \int_{\zeta_0}^{\bar{z}} \varphi^*(\tau)\,\frac{\partial^{m+1}}{\partial \tau^{m+1}} G(z_0, \tau, z, \bar{z})\,d\tau, \quad (10.19)$$

где m, n — любые неотрицательные целые числа, а $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ — любые функции, голоморфные в $\mathfrak{D}$ и $\bar{\mathfrak{D}}$ соответственно. Если эти функции подчинить условиям:

$$\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(z_0) = 0,$$
$$\varphi^*(\zeta_0) = \varphi^{*\prime}(\zeta_0) = \ldots = \varphi^{*(m-1)}(\zeta_0) = 0,$$
$$\varphi^{(n)}(z_0) = \varphi^{*(m)}(\zeta_0),$$

то они определятся однозначно через $u(x, y)$ (см. § 6).

5°. Мы можем теперь вместо формул (10.3), (10.9), (10.17) и (10.19) написать ещё более общие формулы, дающие также представления всех регулярных решений уравнения (E_0).

Пусть D—некоторая односвязная область, лежащая в $\mathfrak{D}$. Оставляя в силе предположение, что z_0 и ζ_0—фиксированные точки, принадлежащие $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$, рассмотрим ещё другие фиксированные точки z_1 и ζ_1, принадлежащие D и $\overline{D}$ соответственно ($D \subset \mathfrak{D}$); точки z_0, ζ_0 вообще могут не принадлежать D и $\overline{D}$.

Мы можем считать $A(z_1, \zeta) = 0$, $B(z, \zeta_1) = 0$ (см. § 2, n° 4), вследствие чего, в силу (4,5) будем иметь:

$$G(z_1, \tau, z_1, \zeta) = 1, \quad G(t, \zeta_1, z, \zeta_1) = 1. \tag{10.20}$$

Нетрудно доказать, что все решения уравнения (E_0), регулярные в D, можно представить в виде:

$$u(x, y) = \alpha_0 G(z_1, \zeta_1, z, \bar{z}) + \int_{z_1}^{z} \Phi(t) G(t, \zeta_0, z, \bar{z}) \, dt + \\ + \int_{\zeta_1}^{\bar{z}} \Phi^*(\tau) G(z_0, \tau, z, \bar{z}) \, d\tau, \tag{10.21}$$

где постоянная α_0 и голоморфные в D и $\overline{D}$ функции $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$ однозначно определяются через $u(x, y)$. Это утверждение непосредственно вытекает из формулы (6.13), если воспользоваться теоремой § 9.

Вместо формул (10.9) и (10.17) мы можем взять также более общие формулы:

$$u(x, y) = G(z, \zeta_0, z, \bar{z}) \varphi(z) - \int_{z_1}^{z} \varphi(t) H(t, \zeta_0, z, \bar{z}) \, dt + \\ + G(z_0, \bar{z}, z, \bar{z}) \varphi^*(\bar{z}) - \int_{\zeta_1}^{\bar{z}} \varphi^*(\tau) H^*(z_0, \tau, z, \bar{z}) \, d\tau, \tag{10.22}$$

$$u(x, y) = G(z, \zeta_0, z, \bar{z}) \Phi(z) - \int_{z_1}^{z} \Phi(t) \frac{\partial}{\partial t} G(t, \zeta_0, z, \bar{z}) \, dt + \\ + G(z_1, \bar{z}, z, \bar{z}) \Phi^*(\bar{z}) - \int_{\zeta_1}^{\bar{z}} \Phi^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} G(z_0, \tau, z, \bar{z}) \, d\tau, \tag{10.23}$$

где $\varphi(z)$, $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$, $\varphi^*(\zeta)$—любые функции, голоморфные в D и $\overline{D}$ соответственно. *Любая из этих формул даёт общее представление всех регулярных в D решений уравнения* (E_0). Докажем это предложение и выясним степень определённости функций $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$, $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$. Мы ограничимся доказательством формулы (10.22), так как для формулы (10.23) рассуждения вполне аналогичны.

Нетрудно видеть, что при любом выборе функций $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$, голоморфных в D и $\overline{D}$ соответственно, формула (10.22) даёт нам регулярное в D решение уравнения (E_0); найдём теперь связь между $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ и соответствующим им решением $u(x, y)$.

Пусть $U(z, \zeta)$ — аналитическое продолжение функции $u(x, y)$ в область комплексных значений x, y. Согласно (10.22) имеем:

$$U(z,\zeta) = G(z, \zeta_0, z, \zeta)\,\varphi(z) - \int_{z_1}^{z} \varphi(t)\,H(t, \zeta_0, z, \zeta)\,dt + \\ + G(z_0, \zeta, z, \zeta)\,\varphi^*(\zeta) - \int_{\zeta_1}^{\zeta} \varphi^*(\tau)\,H^*(z_0, \tau, z, \zeta)\,d\tau; \qquad (10.24)$$

очевидно, $U(z, \zeta)$ — аналитическая функция переменных z, ζ в $(D, \overline{D})$ и удовлетворяет уравнению (F_0). Из (10.24), в силу (10.20), получим:

$$U(z, \zeta_1) = G(z, \zeta_0, z, \zeta_1)\,\varphi(z) - \int_{z_1}^{z} \varphi(t)\,H(t, \zeta_0, z, \zeta_1)\,dt + \varphi^*(\zeta_1), \qquad (10.25)$$

$$U(z_1, \zeta) = G(z_0, \zeta, z_1, \zeta)\,\varphi^*(\zeta) - \\ - \int_{\zeta_1}^{\zeta} \varphi^*(\tau)\,H^*(z_0, \tau, z_1, \zeta)\,d\tau + \varphi(z_1). \qquad (10.26)$$

В частности,

$$U(z_1, \zeta_1) = \varphi(z_1) + \varphi^*(\zeta_1), \qquad (10.27)$$

т. е. $\varphi(z_1)$ и $\varphi^*(\zeta_1)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi(z_1) &= \frac{1}{2} U(z_1, \zeta_1) + K_0, \\ \varphi^*(\zeta_1) &= \frac{1}{2} U(z_1, \zeta_1) - K_0, \end{aligned} \qquad (10.28)$$

где K_0 — произвольная постоянная. Подставляя (10.28) в (10.25) и (10.26), мы увидим, что $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned} \varphi(z) - \int_{z_1}^{z} K(z, t)\,\varphi(t)\,dt &= f(z), \\ \varphi^*(\zeta) - \int_{\zeta_1}^{\zeta} K^*(\zeta, \tau)\,\varphi^*(\tau)\,d\tau &= f^*(\zeta), \end{aligned} \qquad (10.29)$$

где

$$K(z, t)=\frac{H(t, \zeta_0, z, \zeta_1)}{G(z, \zeta_0, z, \zeta_1)}, \quad K^*(\zeta, \tau)=\frac{H^*(z_0, \tau, z_1, \zeta)}{G(z_0, \zeta, z_1, \zeta)}, \tag{10.30}$$

$$f(z)=\frac{U(z, \zeta_1)}{G(z, \zeta_0, z, \zeta_1)}-\frac{\frac{1}{2} U(z_1, \zeta_1)-K_0}{G(z, \zeta_0, z, \zeta_1)}, \tag{10.31}$$

$$f^*(\zeta)=\frac{U(z_1, \zeta)}{G(z_0, \zeta, z_1, \zeta)}-\frac{\frac{1}{2} U(z_1, \zeta_1)+K_0}{G(z_0, \zeta, z_1, \zeta)}.$$

Очевидно, $K(z, t)$ и $K^*(\zeta, \tau)$ — аналитические функции в $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})$ и $(\overline{\mathfrak{D}}, \overline{\mathfrak{D}})$, а $f(z)$, $f^*(\zeta)$ — голоморфные функции в D и $\overline{D}$ соответственно. Решая уравнения (10.29) и имея в виду формулы (10.31), получим:

$$\varphi(z)=\psi(z)+K_0\psi_0(z), \quad \varphi^*(\zeta)=\psi^*(\zeta)+K_0\psi_0^*(\zeta), \tag{10.32}$$

где $\psi(z)$ и $\psi^*(\zeta)$ — решения интегральных уравнений (10.29), когда их правые части имеют вид:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{U(z, \zeta_1)}{G(z, \zeta_0, z, \zeta_1)}-\frac{1}{2} \frac{U(z_1, \zeta_1)}{G(z, \zeta_0, z, \zeta_1)}, \\ f^*(\zeta) &= \frac{U(z_1, \zeta)}{G(z_0, \zeta, z_1, \zeta)}-\frac{1}{2} \frac{U(z_1, \zeta_1)}{G(z_0, \zeta, z_1, \zeta)}; \end{aligned} \tag{10.33}$$

функции $\psi_0(z)$ и $\psi_0^*(\zeta)$ являются решениями тех же интегральных уравнений, когда их правые части имеют вид:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{G(z, \zeta_0, z, \zeta_1)}, \\ f^*(\zeta) &= -\frac{1}{G(z_0, \zeta, z_1, \zeta)}. \end{aligned} \tag{10.34}$$

Следовательно, $\psi(z)$ и $\psi^*(\zeta)$ — голоморфные функции в D и $\overline{D}$, которые однозначно определяются через $u(x, y)$, а $\psi_0(z)$ и $\psi_0^*(\zeta)$ — вполне определённые голоморфные функции в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$, которые зависят лишь от функции Римана G.

Подставим теперь в (10.24) функции $\varphi=K_0\psi_0(z)$, $\varphi^*=K_0\psi_0^*(\zeta)$ и полученное выражение обозначим через $U_0(z, \zeta)$. Очевидно, $U_0(z, \zeta)$ — аналитическая функция в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, удовлетворяющая уравнению (F_0). Тогда, в силу тех интегральных уравнений, решениями которых являются функции ψ_0 и ψ_0^*, легко найдём, что $U_0(z_1, \zeta)=U_0(z, \zeta_1)=0$. Следовательно, $U_0(z, \zeta)=0$ всюду в $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$. В силу этого $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ определяются через $u(x, y)$ с точностью до слагаемых $K_0\psi_0(z)$ и $K_0\psi_0^*(\zeta)$ соответственно. В частности, если положим $K_0=0$, то φ и φ^* будут определены однозначно через $u(x, y)$; они будут решениями интегральных уравнений (10.29), когда их правые части имеют вид

(10.33). Но предположение $K_0=0$, как показывают формулы (10.28), равносильно требованию

$$\varphi(z_1)=\varphi^*(\zeta_1). \tag{10.35}$$

Докажем теперь, что любое регулярное в D решение $u(x, y)$ уравнения (E_0) можно представить в виде (10.22). Для этой цели продолжим $u(x, y)$ в область комплексных значений переменных x, y; тогда получим функцию $U(z,\zeta)$, которая будет аналитической в $(D,\overline{D})$. Пусть $\psi(z)$ и $\psi^*(\zeta)$ — решения интегральных уравнений (10.29), когда их правые части имеют вид (10.33); очевидно, эти решения суть голоморфные функции в D и $\overline{D}$ и удовлетворяют условию (10.35). Подставляя теперь функции $\psi(z)$ и $\psi^*(\zeta)$ в (10.22), получим некоторое регулярное в D решение $u^*(x, y)$ уравнения (E_0). Докажем, что $u^*(x, y)=u(x, y)$ всюду в D.

Пусть $U^*(z,\zeta)$ — аналитическое продолжение $u^*(x, y)$ в область комплексных значений x, y; очевидно, $U^*(z,\zeta)$ — аналитическая функция в $(D,\overline{D})$ и удовлетворяет уравнению (F_0). Нетрудно проверить, что

$$U^*(z_1,\zeta)=U(z_1,\zeta), \quad U^*(z,\zeta_1)=U(z,\zeta_1), \tag{10.36}$$

т. е. аналитические в $(D,\overline{D})$ решения $U(z,\zeta)$ и $U^*(z,\zeta)$ уравнения (F_0) совпадают на характеристиках; это значит, что $U(z,\zeta)=U^*(z,\zeta)$ всюду в $(D,\overline{D})$. Отсюда, в частности, получим $u^*(x, y)=u(x, y)$ всюду в D, что и требовалось доказать.

Таким образом, мы доказали, *что все регулярные в D решения уравнения* (E_0) *даются формулой* (10.22), *где $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ — произвольные функции, голоморфные в D и $\overline{D}$; эти функции определяются однозначно через соответствующее им решение $u(x, y)$, если соблюдено условие* (10.35); *без этого условия φ и φ^* определяются через $u(x, y)$ с точностью до слагаемых вида $K_0\psi_0(z)$ и $\overline{K}_0\psi_0^*(\zeta)$, где K_0 — любая постоянная.*

Можно доказать совершенно аналогично и формулу (10.23). Заметим, что функции $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ и в этом случае определяются однозначно через $u(x, y)$, если их подчинить условиям (10.35).

6°. Формулы, полученные выше для представления всех регулярных в односвязной области D ($D\subset\mathfrak{D}$) решений уравнения (E_0), имеют вид:

$$u(x, y)=\mathfrak{H}[\varphi(z)]+\mathfrak{H}^*[\varphi^*(\zeta)], \tag{10.37}$$

где $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}^*$ — *линейные операторы* от функций $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$, голоморфных в D и $\overline{D}$ соответственно. Например, в формуле

(10.22) эти операторы имеют вид:

$$\mathfrak{H}[\varphi(z)] = G(z, \zeta_0, z, \zeta)\,\varphi(z) - \int_{z_1}^{z} \varphi(t)\,H(t, \zeta_0, z, \zeta)\,dt, \tag{10.38}$$

$$\mathfrak{H}^*[\varphi^*(\zeta)] = G(z_0, \zeta, z, \zeta)\,\varphi^*(\zeta) - \int_{\zeta_1}^{\zeta} \varphi^*(\tau)\,H(z_0; \tau, z, \zeta)\,d\tau, \tag{10.39}$$

а в формуле (10.23) —

$$\mathfrak{H}[\varphi(z)] = G(z, \zeta_0, z, \zeta)\,\varphi(z) - \int_{z_1}^{z} \varphi(t)\,\frac{\partial}{\partial t}G(t, \zeta_0, z, \zeta)\,dt, \tag{10.40}$$

$$\mathfrak{H}^*[\varphi^*(\zeta)] = G(z_0, \zeta, z, \zeta)\,\varphi^*(\zeta) - \int_{\zeta_1}^{\zeta} \varphi^*(\tau)\,\frac{\partial}{\partial\tau}G(z_0, \tau, z, \zeta)\,d\tau. \tag{10.41}$$

Нетрудно проверить, что эти операторы ограничены на любом замкнутом подмножестве области D, т. е. если T — какое-нибудь замкнутое множество, принадлежащее D, то при $z \in T$, $\zeta \in \overline{T}$ имеют место неравенства:

$$|\mathfrak{H}[\varphi(z)]| \leqslant M_T \operatorname*{Max}_{z \in T} |\varphi(z)|, \quad |\mathfrak{H}^*[\varphi^*(\zeta)]| \leqslant M_T \operatorname*{Max}_{\zeta \in \overline{T}} |\varphi^*(\zeta)|, \tag{10.42}$$

где M_T — положительная постоянная, которая вообще зависит от T, но не зависит от выбора функций φ, φ^*.

7°. Все формулы общего представления решений уравнения (E_0), которые были нами выведены выше, выражаются при помощи функции Римана. Однако существуют и другие формы представления решений уравнения (E_0), которые выражаются посредством функций, подчинённых менее ограничительным условиям, чем функция Римана.

Пусть $\mathfrak{D}$ — основная область уравнения (E_0). Обозначим через $\mathfrak{D}_z$ односвязную область, которая получится из $\mathfrak{D}$, если точку $z \in \mathfrak{D}$ соединить с границей $\mathfrak{D}$ некоторой простой дугой.

Рассмотрим функцию $\gamma(z, \zeta, t)$, удовлетворяющую условиям: 1) *при всяком фиксированном* $t \in \mathfrak{D}$ *функция* $\gamma(z, \zeta, t)$ *является аналитической функцией двух комплексных переменных* z, ζ *в области* $(\mathfrak{D}_t, \overline{\mathfrak{D}}_t)$ *и удовлетворяет уравнению* (F_0) *для любой области* $\mathfrak{D}_t$, 2) *для всякой фиксированной точки* (z, ζ) $(z \in \mathfrak{D}, \zeta \in \overline{\mathfrak{D}})$ *функция* $\gamma(z, \zeta, t)$ *голоморфна относительно* t *в любой области* $\mathfrak{D}_z$ *и* 3) *для любых* z, ζ $(z \in \mathfrak{D}, \zeta \in \overline{\mathfrak{D}})$ *выполняется соотношение*:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\gamma(z, \zeta, z) + A(z, \zeta)\,\gamma(z, \zeta, z) = 0. \tag{10.43}$$

Такие функции существуют; тривиальным примером является функция Римана $G(t, \zeta_0, z, \zeta)$, где ζ_0 — любая фиксированная точка в $\overline{\mathfrak{D}}$. Такой же функцией является следующая, вообще говоря, многозначная функция:

$$(z-t)^{\alpha} \int_0^1 G[t+(z-t)\sigma, \zeta_0, z, \zeta]\, \sigma^{\alpha-1}\, d\sigma, \tag{10.44}$$

где α — постоянная, причём $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Очевидно, существует бесчисленное множество функций, удовлетворяющих вышеприведённым условиям. Поэтому иногда получить хотя бы одну такую функцию легче, чем построить функцию Римана.

Нетрудно проверить, что

$$u(x, y) = \int_{z_0}^{z} \gamma(z, \bar{z}, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{10.45}$$

где $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в $\mathfrak{D}$, является решением уравнения (E_0). В частности, если $\varphi(z)$ голоморфна в $\mathfrak{D}$, z_0 лежит на границе $\mathfrak{D}$, то этот интеграл будет представлять собой регулярное в $\mathfrak{D}$ решение уравнения (E_0).

Если коэффициенты уравнения (E_0) — действительные функции, то, очевидно, действительная и мнимая части выражения (10.45) в отдельности будут решениями этого уравнения.

Рассмотрим, например, уравнение (см. § 5, n° 3)

$$y\Delta u + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} + b_0 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (a_0,\ b_0 = \text{const.}). \tag{10.46}$$

В комплексной форме оно имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \zeta} - \frac{\beta'}{z-\zeta} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\beta}{z-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \tag{10.47}$$

где $\beta = \frac{1}{2}(b_0 + ia_0)$, $\beta' = \frac{1}{2}(b_0 - ia_0)$. Легко проверить, что функция

$$(z-t)^{-\beta} (\zeta - t)^{-\beta'} \tag{10.48}$$

удовлетворяет уравнению (10.47). Пусть T — односвязная область, лежащая в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда, полагая $\operatorname{Re}\beta < 0$, в качестве $\gamma(z, \zeta, t)$ можно взять функцию (10.48). Следовательно, интеграл

$$\int_{z_0}^{z} (z-t)^{-\beta} (\bar{z} - t)^{-\beta'}\, \varphi(t)\, dt, \tag{10.49}$$

где $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция, представляет собой решение уравнения (10.46). Если z_0 принадлежит границе T,

$\varphi(z)$ голоморфна в T и интеграл (10.49) равномерно сходится, то этот интеграл будет регулярным решением уравнения (10.47) в T.

Аналогично, при $\operatorname{Re}\beta' < 0$ интеграл

$$\int_{\zeta_0}^{\bar z}(z-\tau)^{-\beta}\,(\bar z-\tau)^{-\beta'}\,\psi(\tau)\,d\tau, \tag{10.50}$$

где $\psi(\zeta)$ — произвольная голоморфная в $\overline{T}$ функция, является решением уравнения (10.47).

Не останавливаясь на подробностях доказательства, укажем, что при помощи интегралов (10.49) и (10.50) можно выразить *все* регулярные в T решения уравнения (10.46). Заметим, что ограничения $\operatorname{Re}\beta < 0$, $\operatorname{Re}\beta' < 0$ не существенны, так как к этому случаю можно привести исследование при произвольных β, β' (см., например, Дарбу [1], гл. III).

Замечание. Ряд других видов представления решений уравнения (E_0) был дан также С. Бергманом (см. [1], [2], [3], [4]). Например, в случае уравнения с действительными коэффициентами, согласно Бергману, все регулярные в окрестности начала координат решения можно представить по формуле:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\int_{-1}^{+1} E(z, \bar z, t)\, f\left[\frac{z(1-t^2)}{2}\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{10.51}$$

где $f(z)$ — любая голоморфная функция, а $E(z, \bar z, t)$ — функция, которая определяется при помощи решения некоторого дифференциального уравнения второго порядка с тремя независимыми переменными, имеющего разрывные коэффициенты [1]. Вообще надо отметить, что формулы Бергмана имеют довольно сложную структуру и мало приспособлены для решения граничных задач.

§ 11. Общие представления всех решений уравнения (E_0) в многосвязных областях. В этом параграфе мы выведем формулы, дающие общие представления всех решений уравнения

$$E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\,u = 0 \tag{E_0}$$

в *многосвязной* области. Этот случай требует особого рассмотрения, так как формулы § 10 для многосвязной области дают, вообще говоря, многозначные решения (см. работу автора [6]).

Пусть D — многосвязная область, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, причём C_0 содержит бесконечную точку, а остальные — ограниченные множества. Пусть $D_0 = D + C_1 + \ldots + C_m$, $D_k = \mathfrak{D} - C_k$ $(k = 1, \ldots, m)$, где $\mathfrak{D}$ — основная область уравнения (E_0). Очевидно, D_0 — односвязная область, а $D_1, \ldots, D_m$ — двусвязные области. Мы будем предполагать, что $D_0 \subset \mathfrak{D}$.

Согласно формуле (8.5) любое регулярное в D решение $u(x; y)$ уравнения (E_0) можно представить в виде:

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y) + \ldots + u_m(x, y), \tag{11.1}$$

где u_0 — регулярное в D_0, а $u_1, \ldots, u_m$ — регулярные в $D_1, \ldots$ $\ldots, D_m$ решения уравнения (E_0). Так как D_0 — односвязная область, то u_0 мы можем выразить через голоморфные в D_0 функции при помощи одной из формул предыдущего параграфа. Поэтому нам остаётся изучить вопрос о возможности представления функций $u_1, \ldots, u_m$ через аналитические функции одной комплексной переменной. Но любая из этих функций является регулярным решением уравнения (E_0) в двусвязной области, имеющей вид $\mathfrak{D} - C$, где C — некоторый ограниченный континуум, а $\mathfrak{D}$ — некоторая основная область уравнения (E_0). Поэтому сначала мы выведем формулы, дающие общие представления всех решений уравнения (E_0) в двусвязных областях указанного вида. После этого на основании (11.1) мы легко получим также формулы для общего случая.

1°. Итак, сначала мы изучим случай, когда D — двусвязная область вида $\mathfrak{D} - C$, где C — ограниченный континуум, а $\mathfrak{D}$ — некоторая основная область уравнения (E_0). Пусть $u(x, y)$ — некоторое решение уравнения (E_0), регулярное в D. Соединяя границы C и $\mathfrak{D}$ какой-нибудь простой кривой, мы получим односвязную область D', внутри которой функция $u(x, y)$ будет также регулярным решением уравнения (E_0). Поэтому мы можем представить $u(x, y)$ в области D' при помощи любой из формул, выведенных в предыдущем параграфе. Удобнее всего, однако, воспользоваться в этом параграфе формулой (10.22).

В дальнейшем будем считать, что начало координат лежит в D и что $A(0, \zeta) = B(\zeta, 0) = 0$. Следовательно, будем иметь:

$$G(0, \tau, 0, \zeta) = 1, \qquad G(t, 0, z, 0) = 1.$$

Пусть, далее, z_0 и ζ_0 — некоторые фиксированные точки, лежащие в C и $\overline{C}$ соответственно. Тогда, в силу формулы (10.22), имеем:

$$u(x, y) = G(z, \zeta_0, z, \overline{z})\,\varphi(z) - \int_0^z \varphi(t)\,H(t, \zeta_0, z, \overline{z})\,dt +$$
$$+ G(z_0, \overline{z}, z, \overline{z})\,\varphi^*(\overline{z}) - \int_0^{\overline{z}} \varphi^*(\tau)\,H^*(z_0, \tau, z, \overline{z})\,d\tau, \tag{11.2}$$

где $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ — голоморфные функции в D' и $\overline{D}'$ соответственно.

В предыдущем параграфе мы выяснили, что функции φ и φ^* определяются однозначно через $u(x, y)$, если соблюдено условие (10.35):

$$\varphi(0) = \varphi^*(0). \tag{11.3}$$

Кроме того, в том же параграфе мы доказали, что $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ являются решениями интегральных уравнений (10.29), правые части которых задаются по формулам (10.33). В данном случае эти формулы принимают вид:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)}{G(z, \zeta_0, z, 0)} - \frac{1}{2}\frac{u(0, 0)}{G(z, \zeta_0, z, 0)}, \\ f^*(\zeta) &= \frac{u\left(\frac{\zeta}{2}, \frac{i\zeta}{2}\right)}{G(z_0, \zeta, 0, \zeta)} - \frac{1}{2}\frac{u(0, 0)}{G(z_0, \zeta, 0, \zeta)}. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Очевидно, $f(z)$ и $f^*(\zeta)$ — голоморфные функции в D' и $\overline{D}'$ соответственно.

Решая интегральные уравнения типа Вольтерра (10.29), получим:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= f(z) + \int_0^z \Gamma(z, t) f(t)\, dt, \\ \varphi^*(\zeta) &= f^*(\zeta) + \int_0^\zeta \Gamma^*(\zeta, \tau) f^*(\tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{11.5}$$

где Γ и Γ^* — резольвенты ядер K и K^* соответственно; очевидно, $\Gamma(z, t)$ и $\Gamma^*(\zeta, \tau)$ — аналитические функции своих аргументов в $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})$ и $(\overline{\mathfrak{D}}, \overline{\mathfrak{D}})$ соответственно.

Воспользуемся теперь формулой (9.13), дающей аналитическое продолжение в область комплексных значений переменных x, y решений уравнения (E_0), регулярных в двусвязной области. На основании этой формулы мы имеем:

$$\begin{aligned} u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) &= p_1(z) \lg(z - z_0) + p_0(z), \\ u\left(\frac{\zeta}{2}, \frac{i\zeta}{2}\right) &= p_1^*(\zeta) \lg(\zeta - \zeta_0) + p_0^*(\zeta), \end{aligned} \tag{11.6}$$

где $p_1(z)$ и $p_1^*(\zeta)$ — голоморфные функции в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$, которые однозначно определяются через $u(x, y)$ (см. формулу (9.10)), а $p_0(z)$ и $p_0^*(\zeta)$ — голоморфные функции в D и $\overline{D}$ соответственно. Подставляя выражения (11.6) в (11.4), получим:

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) \lg(z - z_0) + f_0(z), \\ f^*(\zeta) &= f_1^*(\zeta) \lg(\zeta - \zeta_0) + f^*(\zeta), \end{aligned} \tag{11.7}$$

где $f_1(z)$ и $f_1^*(\zeta)$ — голоморфные функции в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$, а $f_0(z)$ и $f_0^*(\zeta)$ — голоморфные функции в D и $\overline{D}$ соответственно. Подставляя выражения (11.7) в (11.5), после простых преобразований получим:

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\varphi_1(z)\lg(z-z_0)+\varphi_0(z),\\ \varphi^*(\zeta)&=\varphi_1^*(\zeta)\lg(\zeta-\zeta_0)+\varphi_0^*(\zeta),\end{aligned}\tag{11.8}$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_1^*(\zeta)$ — функции, голоморфные в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$, а $\varphi_0(z)$ и $\varphi_0^*(\zeta)$ — функции, голоморфные в D и $\overline{D}$ соответственно. Таким образом, мы пришли к следующему результату:

Для того чтобы формула (11.2) *давала регулярные в двусвязной области D решения уравнения* (E_0), *необходимо туда подставлять многозначные аналитические функции вида* (11.8).

Однако очевидно, что любые функции вида (11.8) не будут давать регулярные в D решения; легко видеть, что если функции φ_1, φ_0, φ_1^*, φ_0^* выбирать произвольно, то формула (11.2) сопоставит им вообще многозначные в области D решения уравнения (E_0). Поэтому, очевидно, между функциями φ_1, φ_0, φ_1^* и φ_0^* должны иметь место какие-то соотношения, при выполнении которых формула (11.2) будет давать регулярные в D решения уравнения (E_0). Переходим к выводу этих соотношений.

Подставляя функции (11.8) в (11.2), мы сможем после простых преобразований записать полученное выражение в виде:

$$\begin{aligned}u(x,y)&=u_0(x,y)+\\&+\Big[G(z,\zeta_0,z,\bar z)\varphi_1(z)-\int_{z_0}^{z}\varphi_1(t)H(t,\zeta_0,z,\bar z)\,dt-\\&-\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi_0(t)H(t,\zeta_0,z,\bar z)\,dt\Big]\lg(z-z_0)+\\&+\Big[G(z_0,\bar z,z,\bar z)\varphi_1^*(\bar z)-\int_{\zeta_0}^{\bar z}\varphi_1^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\bar z)\,d\tau-\\&-\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar L}\varphi_0^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\bar z)\,d\tau\Big]\lg(\bar z-\zeta_0),\end{aligned}\tag{11.9}$$

где L — любая простая замкнутая кусочно-гладкая кривая, лежащая в D и окружающая C, а $\bar L$ — зеркальное отображение кривой L относительно действительной оси; направления на L и $\bar L$ взяты такие, которые оставляют континуумы C и $\bar C$ слева; $u_0(x,y)$ — однозначная аналитическая функция в D, явное выражение которой не будем выписывать, так как оно нам не понадобится.

Мы должны теперь так подобрать функции φ_0, φ_1, φ_0^*, φ_1^*, чтобы выражение (11.9) представляло собой однозначную функцию в области D; это выражение при любом выборе указанных функций, очевидно, является вообще многозначным решением уравнения (E_0). Для выполнения нашего требования, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы при обходе континуума C точкой z вдоль произвольной замкнутой кривой, лежащей в D, правая часть (11.9) возвращалась к своему исходному значению; иначе говоря, приращение правой части (11.9) при указанном обходе точки z должно обращаться в нуль. Это значит, что всюду в D должно иметь место равенство:

$$G(z, \zeta_0, z, \bar{z})\varphi_1(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi_1(t) H(t, \zeta_0, z, \bar{z})\, dt -$$
$$- G(z_0, \bar{z}, z, \bar{z})\varphi_1^*(\bar{z}) + \int_{\zeta_0}^{\bar{z}} \varphi_1^*(\tau) H^*(z_0, \tau, z, \bar{z})\, d\tau -$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_0(t) H(t, \zeta_0, z, \bar{z})\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}} \varphi_0^*(\tau) H^*(z_0, \tau, z, \bar{z})\, d\tau = 0. \quad (11.10)$$

Напомним, что здесь $\varphi_1(z)$ и $\varphi_1^*(\zeta)$ — голоморфные функции в $\mathfrak{D}$ и $\bar{\mathfrak{D}}$, а $\varphi_0(z)$ и $\varphi_0^*(\zeta)$ — голоморфные функции в D и $\bar{D}$ соответственно. Очевидно, что при любом выборе этих функций левая часть (11.10) представляет собой регулярное в $\mathfrak{D}$ решение уравнения (E_0). Поэтому, продолжая её аналитически в область комплексных значений переменных x, y, согласно теореме § 9, получим равенство:

$$G(z, \zeta_0, z, \zeta)\varphi_1(z) - \int_{z_0}^{z} \varphi_1(t) H(t, \zeta_0, z, \zeta)\, dt -$$
$$- G(z_0, \zeta, z, \zeta)\varphi_1^*(\zeta) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_1^*(\tau) H^*(z_0, \tau, z, \zeta)\, d\tau -$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_0(t) H(t, \zeta_0, z, \zeta)\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}} \varphi_0^*(\tau) H^*(z_0, \tau, z, \zeta)\, d\tau = 0, \quad (11.11)$$

где z и ζ — произвольные точки в $\mathfrak{D}$ и $\bar{\mathfrak{D}}$ соответственно; очевидно, (11.10) и (11.11) — эквивалентные равенства.

Полагая теперь в (11.11) $z = z_0$, $\zeta = \zeta_0$ и принимая во внимание равенства (см. § 10)

$$H(t, \zeta_0, z, \zeta_0) = 0, \quad H(z_0, \tau, z_0, \zeta) = 0, \quad (11.12)$$

получим:

$$\varphi_1(z_0) = \varphi_1^*(\zeta_0). \quad (11.13)$$

Подставляя в (11.11) поочерёдно $z=z_0$, $\zeta=\zeta_0$ и принимая во внимание (11.12), (11.13), получим:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \alpha G(z_0, \zeta_0, z, \zeta_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{L}} \varphi_0^*(\tau) H^*(z_0, \tau, z, \zeta_0)\, d\tau, \\ \varphi_1^*(\zeta) &= \alpha G(z_0, \zeta_0, z_0, \zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L} \varphi_0(t) H(t, \zeta_0, z_0, \zeta)\, dt, \end{aligned} \tag{11.14}$$

где α — постоянная: $\alpha=\varphi_1(z_0)=\varphi_1^*(\zeta_0)$.

Подставляя теперь выражения (11.14) в (11.11), легко убедимся, что последнее равенство выполняется при любом выборе постоянной α и функций $\varphi_0(z)$ и $\varphi_0^*(\zeta)$, голоморфных в D, $\overline{D}$.

На основании вышеполученных результатов очевидно, что формулы (11.14) устанавливают те соотношения между функциями φ_0, φ_1, φ_0^*, φ_1^*, выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы функциям вида (11.8) формула (11.2) сопоставляла решения уравнения (E_0), регулярные в двусвязной области D.

Подставляя (11.14) в (11.8), получим:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_0(z) + \\ &+ \left[\alpha G(z_0, \zeta_0, z, \zeta_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{L}} \varphi_0^*(\tau) H^*(z_0, \tau, z, \zeta_0)\, d\tau\right] \lg(z-z_0), \\ \varphi^*(\zeta) &= \varphi_0^*(\zeta) + \\ &+ \left[\alpha G(z_0, \zeta_0, z_0, \zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L} \varphi_0(t) H(t, \zeta_0, z_0, \zeta)\, dt\right] \lg(\zeta-\zeta_0), \end{aligned} \tag{11.15}$$

где α — любая постоянная, $\varphi_0(z)$ и $\varphi_0^*(\zeta)$ — любые голоморфные функции в D и $\overline{D}$ соответственно. *Эти формулы дают нам самые общие выражения для тех аналитических функций $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$, которым формула* (11.2) *сопоставляет регулярные в D решения уравнения* (E_0).

Выясним теперь, какова степень определённости функций φ_0, φ_0^* и постоянной α. Проведём попрежнему в области D разрез и рассмотрим в полученной односвязной области D' какие-нибудь ветви логарифмов, входящих в (11.15). Пусть для данного регулярного в D решения $u(x, y)$ имеются две системы функций $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ и $\psi(z)$, $\psi^*(\zeta)$ вида (11.15), при помощи которых $u(x, y)$ выражается в виде (11.2). Тогда, очевидно, функции $\chi(z)=\varphi(z)-\psi(z)$,

$\chi^*(\zeta)=\varphi^*(\zeta)-\psi^*(\zeta)$ будут удовлетворять в области D' соотношению

$$0=G(z, \zeta_0, z, \bar{z})\,\chi(z)-\int_0^z \chi(t)\,H(t, \zeta_0, z, \bar{z})\,dt+$$
$$+G(z_0, \bar{z}, z, \bar{z})\,\chi^*(\bar{z})-\int_0^{\bar{z}} \chi^*(\tau)\,H^*(z_0, \tau, z, \bar{z})\,d\tau. \quad (11.16)$$

Отсюда, согласно результатам предыдущего параграфа, получим:

$$\chi(z)=K_0\psi_0(z), \quad \chi^*(\zeta)=K_0\psi_0^*(\zeta), \quad (11.17)$$

где K_0 — произвольная постоянная, а $\psi_0(z)$ и $\psi_0^*(\zeta)$ — вполне определённые функции, голоморфные в $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$. Таким образом, мы видим, что

$$\psi(z)=\varphi(z)+K_0\psi_0(z), \quad \psi^*(\zeta)=\varphi^*(\zeta)+K_0\psi_0^*(\zeta). \quad (11.18)$$

Следовательно, постоянная α определяется однозначно через $u(x, y)$, а $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ определяются с точностью до слагаемых $K_0\psi_0(z)$ и $K_0\psi_0^*(\zeta)$ соответственно; нетрудно видеть, что добавление этих слагаемых к функциям φ и φ^* не меняет логарифмических членов выражений (11.15).

Функции $\varphi_0(z)$ и $\varphi_0^*(\zeta)$ представим в следующем виде:

$$\varphi_0(z)=q_0(z)+q(z), \quad \varphi_0^*(\zeta)=q_0^*(\zeta)+q^*(\zeta), \quad (11.19)$$

где $q_0(z)$, $q_0^*(\zeta)$ — голоморфные функции в $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$, а $q(z)$, $q^*(\zeta)$ — голоморфные функции в S, $\bar{S}$ соответственно, причём S обозначает часть *полной* плоскости (бесконечную область), лежащую вне C; если мы потребуем, чтобы $q(z)$ и $q^*(\zeta)$ исчезали на бесконечности ($q(\infty)=0$, $q^*(\infty)=0$), то, как легко видеть, в формулах (11.19) слагаемые определятся однозначно. Заметим теперь, что слагаемые $K_0\psi_0(z)$, $K_0\psi_0^*(\zeta)$, содержащиеся в выражениях для $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$, не меняют значений функций $q(z)$ и $q^*(\zeta)$, ибо эти слагаемые — голоморфные функции в $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$, и, следовательно, они добавляются к функциям $q_0(z)$ и $q_0^*(\zeta)$. На основании сказанного мы заключаем, что $q(z)$ и $q^*(\zeta)$ однозначно определяются через $u(x, y)$.

Подставляя (11.19) в (11.15) и принимая во внимание, что

$$\int_L q_0(t)\,H(t, \zeta_0, z_0, \bar{z})\,dt=\int_L q_0^*(\tau)\,H^*(z_0, \tau, z, \zeta_0)\,d\tau=0,$$

получим:

$$\varphi(z)=q_0(z)+q(z)+$$
$$+\left[\alpha G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{L}} q^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\zeta_0)\,d\tau\right]\lg(z-z_0),$$
$$\varphi^*(\zeta)=q_0^*(\zeta)+q^*(\zeta)+ \tag{11.20}$$
$$+\left[\alpha G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)-\frac{1}{2\pi i}\int_L q(t)H(t,\zeta_0,z_0,\zeta)\,dt\right]\lg(\zeta-\zeta_0).$$

Эти формулы, где α — любая постоянная, $q_0(z)$ и $q_0^*(\zeta)$ — любые голоморфные в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ функции, $q(z)$ и $q^*(\zeta)$ — любые голоморфные в S и $\overline{S}$ функции, исчезающие на бесконечности, дают нам самые общие выражения для аналитических функций $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$, которым формула (11.2) *сопоставляет регулярные в D решения $u(x, y)$ уравнения* (E_0). Отметим ещё раз, что постоянная α, функции $q(z)$ и $q^*(\zeta)$ определяются однозначно через $u(x, y)$, а функции $q_0(z)$ и $q_0^*(\zeta)$ определяются с точностью до слагаемых вида $K_0\psi_0(z)$, $K_0\psi_0^*(\zeta)$, где K_0 — произвольная постоянная.

Итак, *все регулярные в двусвязной области $D\,(=\mathfrak{D}-C)$ решения уравнения* (E_0) *даются формулой* (11.2), *где функции $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ имеют вид* (11.20).

Введём теперь обозначения:

$$\mathfrak{H}[\zeta_0,\varphi(z)]=G(z,\zeta_0,z,\zeta)\,\varphi(z)-\int_0^z\varphi(t)H(t,\zeta_0,z,\zeta)\,dt,$$
$$\mathfrak{H}^*[z_0,\varphi^*(\zeta)]=G(z_0,\zeta,z,\zeta)\,\varphi^*(\zeta)-\int_0^\zeta\varphi^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\zeta)\,d\tau. \tag{11.21}$$

Тогда формула (11.2) примет вид:

$$u(x,y)=\mathfrak{H}[\zeta_0,\varphi(z)]+\mathfrak{H}^*[z_0,\varphi^*(\zeta)] \tag{11.22}$$
$$(z=x+iy,\quad \zeta=x-iy),$$

где $\varphi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ — функции вида (11.20). Поэтому формулу (11.22) мы можем записать ещё так:

$$u(x,y)=\mathfrak{H}[\zeta_0,q_0(z)]+\mathfrak{H}^*[z_0,q_0^*(\zeta)]+$$
$$+\alpha\,\mathfrak{H}[\zeta_0,G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)\lg(z-z_0)]+\alpha\,\mathfrak{H}^*[z_0,G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)\lg(\zeta-\zeta_0)]+$$
$$+\mathfrak{H}\left[\zeta_0,q(z)-\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{L}} q^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\zeta_0)\,d\tau\right)\lg(z-z_0)\right]+$$
$$+\mathfrak{H}^*\left[z_0,q^*(\zeta)-\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L q(t)H(t,\zeta_0,z_0,\zeta)\,d\tau\right)\lg(\zeta-\zeta_0)\right], \tag{11.23}$$

где $\zeta=\bar{z}$. Полагая $\zeta_0=\bar{z}_0$, будем иметь:

$$\mathfrak{H}[\bar{z}_0, G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}_0)\lg(z-z_0)] + \mathfrak{H}^*[z_0, G(z_0, \bar{z}_0, z_0, \bar{z})\lg(\bar{z}-\bar{z}_0)] = \\ = -2\pi\omega(x, y, x_0, y_0) + u^*(x, y), \qquad (11.24)$$

где $\omega(x, y, x_0, y_0)$—нормированное стандартное элементарное решение уравнения (E_0) (см. § 7) с полюсом в точке $z_0=x_0+iy_0$, а u^*—регулярное в области $\mathfrak{D}$ (вполне определённое) решение. Функция $u^*(x, y)+\mathfrak{H}[\bar{z}_0, q_0(z)]+\mathfrak{H}^*[z_0, q_0^*(\zeta)]$ есть регулярное в $\mathfrak{D}$ решение уравнения (E_0). Поэтому, в силу формулы (10,9), имеем:

$$u^*(x, y)+\mathfrak{H}[\bar{z}_0; q_0(z)]+\mathfrak{H}^*[z_0, q_0^*(\zeta)] = \\ = \mathfrak{H}[0, p_0(z)]+\mathfrak{H}^*[0, p_0^*(\zeta)], \qquad (11.25)$$

где $p_0(z)$, $p_0^*(\zeta)$—голоморфные функции в $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно. Подставляя теперь (11.24) в (11.23) и принимая во внимание (11.25), получим:

$$u(x, y) = \mathfrak{H}[0, p_0(z)] + \mathfrak{H}^*[0, p_0^*(\zeta)] + \beta\omega(x, y, x_0, y_0) + \\ + \mathfrak{H}\left[\bar{z}_0, q(z) - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}} q^*(\tau) H^*(z_0, \tau, z, \bar{z}_0)\, d\tau\right)\lg(z-z_0)\right] + \\ + \mathfrak{H}^*\left[z_0, q^*(\zeta) - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L} q(t) H(t, \bar{z}_0, z_0, \zeta)\, dt\right)\lg(\zeta-\bar{z}_0)\right] \qquad (11.26) \\ (z=x+iy, \quad \zeta=x-iy),$$

где β—произвольная постоянная ($\beta=-2\pi\alpha$), z_0—произвольная фиксированная точка континуума C, $\omega(x, y, x_0, y_0)$—стандартное (нормированное) элементарное решение уравнения (E_0) с полюсом в точке $z_0=x_0+iy_0$, $p_0(z)$, $p_0^*(\zeta)$—произвольные голоморфные функции в $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$; $q(z)$, $q^*(\zeta)$—произвольные голоморфные функции в S, $\bar{S}$, исчезающие на бесконечности, причём S—область, дополняющая C до полной плоскости.

Таким образом, доказано следующее предложение:

Все регулярные в двусвязной области $D(=\mathfrak{D}-C)$ решения уравнения (E_0) даются формулой (11.26), где $p_0(z)$ и $p_0^*(\zeta)$—любые голоморфные функции в $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$, β—любая постоянная, $q(z)$ и $q^*(\zeta)$—любые голоморфные в S и $\bar{S}$ функции, исчезающие на бесконечности, причём β, $q(z)$, $q^*(\zeta)$ однозначно определяются через $u(x, y)$, $p_0(z)$ и $p_0^*(\zeta)$ определяются с точностью до слагаемых вида K_0 и $-K_0$) соответственно, где K_0—произвольная постоянная.

2°. Перейдём теперь к рассмотрению общего случая, когда D—любая $(m+1)$-связная область. Сохравя обозначения, введённые в начале этого параграфа, любое решение $u(x, y)$ уравнения (E_0), регулярное в D, можно представить в виде (11.1), т. е.

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y) + \ldots + u_m(x, y), \tag{11.27}$$

где u_0 — регулярное в D_0, а $u_1, \ldots, u_m$ — регулярные соответственно в $D_1, \ldots, D_m$ решения уравнения (E_0). Так как $D_1, \ldots, D_m$ — двусвязные области, то согласно формуле (11.26) можно написать:

$$u_k(x, y) = \mathfrak{H}[0, p_k(z)] + \mathfrak{H}^*[0, p_k^*(\zeta)] + \beta_k\omega(x, y, x_k, y_k) +$$
$$+ \mathfrak{H}\left[\bar{z}_k, q_k(z) - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}_k} q_k^*(\tau) H^*(z_k, \tau, z, \bar{z}_k)\, d\tau\right) \lg(z - z_k)\right] +$$
$$+ \mathfrak{H}^*\left[z_k, q_k^*(\zeta) - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} q_k(t) H(t, \bar{z}_k, z_k, \zeta)\, dt\right) \lg(\zeta - \bar{z}_k)\right], \tag{11.28}$$
$$(z = x + iy, \quad \zeta = x - iy),$$

где $p_k(z)$, $p_k^*(\zeta)$ — голоморфные в $\mathfrak{D}$, $\bar{\mathfrak{D}}$ функции, β_k — постоянные, $q_k(z)$ и $q_k^*(\zeta)$ — голоморфные функции в S_k и $\bar{S}_k$, исчезающие на бесконечности, причём S_k — часть полной плоскости, лежащая вне C_k, $z_k = x_k + iy_k$ — фиксированная точка, лежащая на C_k $(k = 1, \ldots, m)$.

Подставляя (11.28) в (11.27), получим

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k\omega(x, y, x_k, y_k) + \mathfrak{H}[0, p(z)] + \mathfrak{H}^*[0, p^*(\zeta)] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{H}\left[\bar{z}_k, q_k(z) - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}_k} q_k^*(\tau) H^*(z_k, \tau, z, \bar{z}_k)\, d\tau\right) \lg(z - z_k)\right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{H}^*\left[z_k, q_k^*(\zeta) - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} q_k(t) H(t, \bar{z}_k, z_k, \zeta)\, dt\right) \lg(\zeta - \bar{z}_k)\right], \tag{11.29}$$
$$(z = x + iy, \quad \zeta = x - iy),$$

где $p(z)$, $p^*(\zeta)$ — голоморфные в $\mathfrak{D}$, $\bar{\mathfrak{D}}$ функции, которые удовлетворяют условию:

$$\mathfrak{H}[0, p(z)] + \mathfrak{H}^*[0, p^*(\zeta)] =$$
$$= u_0(x, y) + \sum_{k=1}^{m} \{\mathfrak{H}[0, p_k(z)] + \mathfrak{H}^*[0, p_k^*(\zeta)]\}; \tag{11.30}$$

такие функции, очевидно, существуют, ибо правая часть этого равенства есть регулярное в $\mathfrak{D}$ решение уравнения (E_0).

Нетрудно доказать, что постоянные $\beta_1, \ldots, \beta_m$ и функции $q_1, \ldots, q_m$; $q_1^*, \ldots, q_m^*$ однозначно выражаются через $u(x, y)$, а функции p, p^* выражаются с точностью до слагаемых $K_0, -K_0$

соответственно, где K_0 — любая комплексная постоянная (см. формулу (10.14)).

Таким образом, мы имеем следующую теорему:

Теорема. *Пусть D — многосвязная область, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, причём C_0 содержит бесконечную точку, а остальные — ограниченные множества. Пусть $z_k = x_k + iy_k$ — фиксированная точка, лежащая на C_k $(k=1, 2, \ldots, m)$. Пусть $D_0 = D + C_1 + \ldots + C_m$, $D_k = \mathfrak{D} - C_k$ $(k=1, \ldots, m)$, где $\mathfrak{D}$ — некоторая основная область уравнения*

$$E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0, \qquad (\mathrm{E}_0)$$

которая содержит D_0, и пусть S_k — бесконечная область, лежащая вне C_k $(k=1, \ldots, m)$. Пусть начало координат принадлежит D.

Тогда все регулярные в D решения уравнения (E_0) даются формулой (11.29), где p, p^* — любые голоморфные в $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ функции; $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — любые постоянные; $q_1(z), \ldots, q_m(z)$ и $q_1^*(\zeta), \ldots, q_m^*(\zeta)$ — любые голоморфные соответственно в $S_1, \ldots, S_m$ и $\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_m$ функции, исчезающие на бесконечности. Постоянные $\beta_1, \ldots, \beta_m$ и функции $q_1, \ldots, q_m$, $q_1^*, \ldots, q_m^*$ однозначно выражаются через $u(x, y)$, а функции p, p^* выражаются с точностью до слагаемых вида K_0, $-K_0$, где K_0 — произвольная постоянная. Если p, p^* подчинить условию $p(0) = p^*(0)$, то $K_0 = 0$ и, тогда p, p^* также определятся однозначно.

§ 12. Уравнения с действительными коэффициентами. До сих пор мы изучали общий случай, когда коэффициенты и решения уравнения (E_0) принимали вообще комплексные значения. В этом параграфе мы особо рассмотрим случаи, когда коэффициенты уравнения (E_0) — *действительные* функции, и выведем формулы, дающие все его *действительные* регулярные решения.

1°. Рассмотрим уравнение

$$E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0, \qquad (\mathrm{E}_0)$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — *действительные* аналитические функции действительных переменных x, y. В комплексной форме это уравнение можно записать так:

$$F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial\zeta} + A(z, \zeta)\frac{\partial u}{\partial z} + B(z, \zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta} + C(z, \zeta)u = 0, \qquad (\mathrm{F}_0)$$

где $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$,

$$A = \frac{1}{4}(a + ib), \qquad B = \frac{1}{4}(a - ib), \qquad C = \frac{1}{4}c. \qquad (12.1)$$

Отсюда видно, что A и B. при $\zeta=\bar{z}$ принимают взаимно сопряжённые комплексные значения, а C — действительные значения.

Приведём теперь без доказательства следующие две леммы:

Лемма 1. *Если аналитические функции* $f(x, y)$ *и* $g(x, y)$ *для действительных значений переменных* x, y *принимают сопряжённые значения, то производные* $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial z^m \partial \zeta^n}, \frac{\partial^{m+n} g}{\partial z^n \partial \zeta^m}$ $(m, n=0, 1, 2, \ldots)$ *принимают также сопряжённые комплексные значения для действительных значений* x, y.

Лемма 2. *Для того чтобы аналитическая в некоторой области* $\mathfrak{T}$ *функция* $f(x, y)$ *действительных переменных* x, y *принимала действительные значения в этой области, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для любых* m, n *производные* $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial z^m \partial \zeta^n}, \frac{\partial^{m+n} f}{\partial z^n \partial \zeta^m}$ *принимают сопряжённые комплексные значения в некоторой точке* (x_0, y_0) *области* $\mathfrak{T}$.

Доказательства этих лемм можно найти в работе автора [5] (стр. 191—193).

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 1. *Функция Римана* $G(t, \tau, z, \zeta)$ *уравнения* (E_0) *с действительными коэффициентами принимает действительные значения при* $\tau=\bar{t}, \zeta=\bar{z}$ $(t, z \in \mathfrak{D}$; $\mathfrak{D}$ — *основная область*).

Доказательство. Функция $G(t, \tau, z, \zeta)$ удовлетворяет следующим условиям (см. § 4):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \zeta}+A(z, \zeta) \frac{\partial G}{\partial z}+B(z, \zeta) \frac{\partial G}{\partial \zeta}+C(z, \zeta) G=0, \tag{12.2}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial G}{\partial \zeta}+A(t, \zeta) G=0 \quad \text{при} \quad z=t, \\
\frac{\partial G}{\partial z}+B(z, \tau) G=0 \quad \text{при} \quad \zeta=\tau, \\
G=1 \quad \text{при} \quad z=t, \zeta=\tau.
\end{gathered} \tag{12.3}$$

Пусть $t=\xi+i\eta$, $\tau=\xi-i\eta$, где (ξ, η) — некоторая фиксированная точка области $\mathfrak{D}$. Из (12.2) и (12.3) следует, что $\frac{\partial G}{\partial z}$ и $\frac{\partial G}{\partial \zeta}$ принимают сопряжённые значения, а ΔG — действительное значение в точке (ξ, η). Путём дифференцирования равенств (12.2) и (12.3) мы легко докажем, что в точке (ξ, η) выполняются все условия леммы 2; следовательно, наша теорема доказана.

Пусть D — некоторая односвязная область, лежащая в $\mathfrak{D}$. Пусть $u(x, y)$ — некоторое регулярное в D действительное решение уравнения (E_0). Тогда, согласно формуле (10.3), можно написать:

$$u(x, y) = \alpha_0 G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt + \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \Phi^*(\tau) G(z_0, \tau, z, \bar{z})\, d\tau, \tag{12.4}$$

где z_0 — некоторая фиксированная точка в D,

$$\alpha_0 = U(z_0, \bar{z}_0), \quad \Phi(z) = \frac{\partial U(z, \bar{z}_0)}{\partial z} + B(z, \bar{z}_0) U(z, \bar{z}_0),$$
$$\Phi^*(\zeta) = \frac{\partial U(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} + A(z_0, \zeta) U(z_0, \zeta), \tag{12.5}$$

причём

$$U(z, \zeta) = u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right). \tag{12.6}$$

Разлагая теперь $U(z, \bar{z}_0)$ и $U(z_0, \zeta)$ в ряды Тейлора в точках z_0 и $\bar{z}_0$ соответственно, в силу леммы 1, из (12.5) и (12.6), получим, что $\Phi(z)$ и $\overline{\Phi^*(\zeta)}$ принимают сопряжённые комплексные значения при $\zeta = \bar{z}$. Кроме того, очевидно, α_0 — действительная постоянная. Принимая теперь во внимание теорему 1, формулу (12.4) можно записать так:

$$u(x, y) = \alpha_0 G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt. \tag{12.7}$$

Эта формула, где α_0 — любая действительная постоянная, $\Phi(z)$ — любая голоморфная в D функция, даёт все регулярные в D действительные решения уравнения (E_0); *α_0 и $\Phi(z)$ однозначно определяются через $u(x, y)$.*

Не представляет никакой трудности, исходя из (10.9), получить формулу:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left[G(z, \bar{z}_0, z, \bar{z}) \Phi_0(z) - \int_{z_0}^{z} \Phi_0(t) H(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt \right], \tag{12.8}$$

где $\Phi_0(z)$ — любая голоморфная функция в D. Формула (12.8) даёт все действительные решения уравнения (E_0), регулярные в D; функция $\Phi_0(z)$ однозначно определяется при помощи $u(x, y)$, если соблюдено условие:

$$\Phi_0(z_0) = \overline{\Phi_0(z_0)} \qquad (z_0 \in D), \tag{12.9}$$

а именно, согласно (10.8)

$$\Phi_0(z) = 2U(z, \bar{z}_0) - U(z_0, \bar{z}_0) G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}_0). \tag{12.10}$$

В частности, при $z_0 = 0$ имеем:

$$\Phi_0(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0)\, G(0, 0, z, 0). \qquad (12.11)$$

Можно получить ещё ряд других общих представлений действительных решений уравнения (E_0), но мы ограничимся лишь приведёнными.

2°. Рассмотрим теперь случай многосвязной области. Пусть D — многосвязная область, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, из которых C_0 содержит бесконечную точку, а $C_1, \ldots, C_m$ — ограниченные множества. Пусть $z_k = x_k + iy_k$ — фиксированная точка на C_k $(k = 1, \ldots, m)$. Пусть $D_0 = D + C_1 + \ldots + C_m$ принадлежит некоторой основной области $\mathfrak{D}$ уравнения (E_0). Тогда на основании формулы (11.29) нетрудно доказать, что *все регулярные в D действительные решения уравнения* (E_0) *даются формулой*:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \omega(x, y, x_k, y_k) + \mathrm{Re}\left\{\mathfrak{H}[0, p(z)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{H}\left[\bar{z}_k, q_k(z) - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}_k} q_k^*(\tau)\, H^*(z_k, \tau, z, \bar{z}_k)\, d\tau\right) \lg(z - z_k)\right]\right\}$$

$$(q_k^*(\tau) = \overline{q_k(\bar{\tau})}, \quad \tau \in \bar{L}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m), \qquad (12.12)$$

где $p(z)$ — любая голоморфная функция в D_0; $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — любые действительные постоянные; $q_1(z), \ldots, q_m(z)$ — любые голоморфные функции в $S_1, \ldots, S_m$, исчезающие на бесконечности, причём S_k — бесконечная область, лежащая вне C_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$; β_k, q_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ однозначно определяются через $u(x, y)$; функция $p(z)$ также определяется однозначно, если мы её подчиним условию $p(0) = \overline{p(0)}$.

§ 12*. Общие представления решений уравнения $\Delta u + \lambda^2 u = 0$.

1°. В этом параграфе мы применим предыдущие результаты к изучению уравнения

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \quad (\lambda = \mathrm{const.}), \qquad (12^*.1)$$

с которым мы уже встречались в § 5. Для него функция Римана

$$G(t, \tau, z, \zeta) = J_0(\lambda \sqrt{(z - t)(\zeta - \tau)}). \qquad (12^*.2)$$

Поэтому, согласно формуле (10.3), все регулярные в некоторой односвязной области T решения уравнения (12*.1) можно представить формулой

$$u = \alpha_0 J_0(\lambda r) + \int_0^z \Phi(t) J_0(\lambda \sqrt{\zeta(z-t)})\, dt + \int_0^\zeta \Phi^*(\tau) J_0(\lambda \sqrt{z(\zeta-\tau)})\, d\tau$$

$$(z = x + iy,\ \zeta = x - iy;\ r = |z|), \tag{12*.3}$$

где α_0 — произвольная постоянная, $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ — произвольные голоморфные функции в T, $\overline{T}$ соответственно, которые однозначно выражаются через $u(x, y)$ при помощи формул:

$$\alpha_0 = u(0, 0), \quad \Phi(z) = \frac{d}{dz} u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right),$$

$$\Phi^*(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} u\left(\frac{\zeta}{2}, \frac{i\zeta}{2}\right); \tag{12*.4}$$

здесь мы считаем, что начало координат лежит в T; это, конечно, не уменьшает общности наших рассуждений.

Если λ — действительная постоянная, то все действительные регулярные в односвязной области T решения уравнения (12*.1) можно представить в виде:

$$u(x, y) = \alpha_0 J_0(\lambda r) + \mathrm{Re} \int_0^z \Phi(t) J_0(\lambda \sqrt{\bar{z}(z-t)})\, dt, \tag{12*.5}$$

где α_0 — произвольная действительная постоянная, $\Phi(z)$ — произвольная регулярная функция в T.

Введём в рассмотрение функции

$$\Phi_0(z) = \frac{\alpha_0}{2} + \int_0^z \Phi(t)\, dt \quad \text{и} \quad \Phi_0^*(\zeta) = \frac{\alpha_0}{2} + \int_0^\zeta \Phi^*(\tau)\, d\tau, \tag{12*.6}$$

которые, очевидно, голоморфны в T и $\overline{T}$ соответственно и удовлетворяют условию

$$\Phi_0(0) = \Phi^*(0). \tag{12*.7}$$

Тогда формулу (12*.3) мы можем привести к виду:

$$u(x, y) = \Phi_0(z) - \int_0^z \Phi_0(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0(\lambda \sqrt{\zeta(z-t)})\, dt +$$

$$+ \Phi_0^*(\zeta) - \int_0^\zeta \Phi_0^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} J_0(\lambda \sqrt{z(\zeta-\tau)})\, d\tau \tag{12*.8}$$

$$(z = x + iy, \quad \zeta = x - iy).$$

Если λ—действительная постоянная, то для получения из (12*.8) всех регулярных в T действительных решений надо положить $\Phi_0^*(\zeta) = \overline{\Phi_0(\bar{\zeta})}$ для $\zeta \in \bar{T}$.

2°. Последнюю формулу в случае звёздной области с центром в начале координат можно записать ещё так:

$$u(x, y) = u_0(x, y) - \int_0^1 u_0(xt, yt) \cdot \frac{\partial}{\partial t} J_0(\lambda r \sqrt{1-t})\, dt, \quad (12^*.9)$$

где $u_0(x, y) = \Phi_0(z) + \Phi_0^*(\bar{z})$. Очевидно, $u_0(x, y)$ — вообще, комплексная гармоническая функция в T, причём любой такой функции формула (12*.9) сопоставляет регулярное в T решение уравнения (12*.1). Нетрудно видеть, что u_0 однозначно определяется при помощи $u(x, y)$. В самом деле, если перейти к полярным координатам $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, то формулу (12*.9) мы можем записать ещё так:

$$u(r, \theta) = u_0(r, \theta) - \int_0^r u_0(\rho, \theta) \frac{\partial}{\partial \rho} J_0(\lambda \sqrt{r(r-\rho)})\, d\rho. \quad (12^*.10)$$

Но это есть интегральное уравнение типа Вольтерра. Следовательно, u_0 однозначно выражается через $u(x, y)$. Уравнение (12*.10) можно решить в явном виде; а именно, имеет место следующая формула обращения:

$$u_0(r, \theta) = u(r, \theta) + \int_0^r u(\rho, \theta) \frac{r}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} J_0(\lambda \sqrt{\rho(\rho - r)})\, d\rho, \quad (12^*.11)$$

которая была выведена в работе автора [18]. Следует отметить, что эта формула даёт решение уравнения (12*.10) для любой левой части.

Формулу (12*.11) мы можем записать ещё так:

$$u_0(r, \theta) = u(r, \theta) + \frac{\lambda r}{2} \int_0^1 \frac{u(rt, \theta)}{\sqrt{t(1-t)}} I_1(\lambda r \sqrt{t(1-t)})\, dt, \quad (12^*.12)$$

где I_1 — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента. Переходя к декартовым координатам, мы можем записать эту формулу в виде:

$$u_0(x, y) = u(x, y) + \frac{\lambda r}{2} \int_0^1 \frac{u(xt, yt)}{\sqrt{t(1-t)}} I_1(\lambda r \sqrt{t(1-t)})\, dt. \quad (12^*.13)$$

Любому регулярному решению $u(x, y)$ уравнения (12*.1) формула (12*.13), очевидно, сопоставляет некоторую гармоническую функцию $u_0(x, y)$.

3°. Заметим, что формула (12*.9) допускает обобщение на случай пространства произвольного числа измерений. А именно, формула

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u_0(x_1, \ldots, x_n) - \\ - \int_0^1 u_0(x_1 t, \ldots, x_n t)\, t^{\frac{n-2}{2}} \frac{\partial}{\partial t} J_0(\lambda r \sqrt{1-t})\, dt, \quad (12^*.14)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, любой функции $u_0(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\Delta u_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_k^2} = 0, \quad (12^*.15)$$

сопоставляет решение уравнения

$$\Delta u + \lambda^2 u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \lambda^2 u = 0. \quad (12^*.16)$$

Формула (12*.14) также допускает обращение; а именно,

$$u_0(x_1, \ldots, x_n) = u(x_1, \ldots, x_n) + \\ + \frac{\lambda r}{2} \int_0^1 u(x_1 t, \ldots, x_n t)\, t^{\frac{n-2}{2}} I_1(\lambda r \sqrt{t(1-t)}) \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}. \quad (12^*.17)$$

Эти формулы выведены в работах автора [12] и [18].

4°. Подставим в (12*.9) $u_0 = 1/2\pi \lg 1/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда после замены x, y через $x - x_0$, $y - y_0$ будем иметь:

$$\omega(x, y, x_0, y_0) = \\ = \frac{1}{2\pi} J_0(\lambda r) \lg \frac{1}{r} + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \lg t \frac{\partial}{\partial t} J_0(\lambda r \sqrt{1-t})\, dt, \quad (12^*.18)$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Это есть элементарное решение уравнения (12*.1) с полюсом в точке (x_0, y_0). При $\lambda \to 0$ мы получим $1/2\pi \lg 1/r$, т. е. элементарное решение уравнения Лапласа.

Нетрудно проверить, что

$$\omega = -\frac{1}{4} Y_0(\lambda r) + \frac{1}{2\pi} J_0(\lambda r) \lg \frac{\lambda e^{\gamma}}{2}, \qquad (12^*.18a)$$

где Y_0 — функция Бесселя второго рода нулевого порядка, γ — постоянная Эйлера; $\gamma = -\Gamma'(1) = 0{,}5772157\ldots$ Очевидно, $Y_0(\lambda r)$ — элементарное решение уравнения (12*.1), ибо второе слагаемое правой части формулы (12*.18a) есть регулярное решение.

5°. Рассмотрим теперь случай многосвязной области. Пусть D — многосвязная область, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, причём C_0 содержит бесконечную точку, а остальные — ограниченные множества. Тогда, согласно общей формуле (11.29), все регулярные в области D решения уравнения (12*.1) будут иметь вид:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \omega(x, y, x_k, y_k) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m} \left\{ \varphi_k(z) - \int_0^z \varphi_k(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0\left(\lambda \sqrt{(\bar{z} - \bar{z}_k)(z - t)}\right) dt + \right.$$

$$\left. + \varphi_k^*(\bar{z}) - \int_0^{\bar{z}} \varphi_k^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} J_0\left(\lambda \sqrt{(z - z_k)(\bar{z} - \tau)}\right) d\tau \right\}, \qquad (12^*.19)$$

где z_0 — фиксированная точка в области D, z_k — фиксированная точка в C_k ($z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, m$); $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — произвольные постоянные, $\omega(x, y, x_k, y_k)$ — элементарное решение с полюсом в точке (x_k, y_k); φ_0, φ_0^* — произвольные голоморфные функции в $D_0 = D + C_1 + \ldots + C_m$ и $\bar{D}_0$ соответственно; $\varphi_k(z)$, $\varphi_k^*(\zeta)$ — функции вида:

$$\varphi_k(z) = q_k(z) - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{L}_k} q_k^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} J_0\left(\lambda \sqrt{(z - z_k)(\bar{z}_k - \tau)}\right) d\tau\right) \lg(z - z_k),$$

$$\varphi_k^*(\zeta) = q_k^*(\zeta) - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} q_k(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0\left(\lambda \sqrt{(\zeta - \bar{z}_k)(z_k - t)}\right) dt\right) \lg(\zeta - \bar{z}_k)$$

$$(k = 1, \ldots, m). \qquad (12^*.20)$$

Здесь $q_k(z)$, $q_k^*(\zeta)$ — любые голоморфные функции в S_k, $\bar{S}_k$ соответственно, исчезающие на бесконечности, причём S_k — бесконечная область, лежащая вне C_k; L_k — любая, лежащая в области D замкнутая кусочно-гладкая кривая, отделяющая континуум C_k от остальных континуумов C_j ($j \neq k$).

Формулы (12*.20) мы можем ещё записать так:

$$\varphi_k(z) = q_k(z) + \left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{L}_k} q_k^{*\prime}(\tau)\, J_0\left(\lambda\sqrt{(z-z_k)(\overline{z}_k-\tau)}\right) d\tau\right) \lg(z-z_k),$$

$$\varphi_k^*(\zeta) = q_k^*(\zeta) + \left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k} q_k'(t)\, J_0\left(\lambda\sqrt{(\zeta-\overline{z}_k)(z_k-t)}\right) dt\right) \lg(\zeta-\overline{z}_k);$$

$$(12^*.21)$$

интегралы по L_k и $\overline{L}_k$ берутся в положительном направлении.

Если λ — действительное число, то для получения всех действительных регулярных в D решений уравнения (12*.1) в формуле (12*.19) надо, чтобы β_k были действительными числами и $\varphi_k^*(\overline{z}) = \overline{\varphi_k(z)}$ $(k=0, \ldots, m)$; последние условия равносильны предположению $q_k^*(\overline{z}) = \overline{q_k(z)}$ $(k=1, \ldots, m)$, $\varphi_0^*(\overline{z}) = \overline{\varphi_0(z)}$.

§ 12°. Общие представления решений уравнения $(1+x^2+y^2)^2\Delta u + 4n(n+1)u = 0$. **1°.** Рассмотрим теперь уравнение

$$\Delta u + \frac{4n(n+1)}{(1+x^2+y^2)^2} u = 0 \qquad (n = \text{const.}), \tag{12°.1}$$

которое мы уже имели в § 5. Оно получается из уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + n(n+1)u = 0 \tag{12°.2}$$

в результате преобразования

$$x = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \qquad y = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi. \tag{12°.3}$$

В комплексной форме уравнение (12°.1) запишется так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial\zeta} + \frac{n(n+1)}{(1+z\zeta)^2} u = 0, \tag{12°.4}$$

где $z = x+iy$, $\zeta = x-iy$. Функция Римана уравнения (12°.1) имеет вид (см. § 5):

$$G(t, \tau, z, \zeta) = P_n\left(\frac{(1-z\zeta)(1-t\tau)+2z\tau+2\zeta t}{(1+z\zeta)(1+t\tau)}\right), \tag{12°.5}$$

где P_n — функция Лежандра первого рода. В качестве основной области для уравнения (12°.1) можно взять любую односвязную область $\mathfrak{D}$ плоскости, которая обладает тем свойством, что $1+z\zeta \neq 0$ при $z \in \mathfrak{D}$, $\zeta \in \overline{\mathfrak{D}}$. Например, такой областью будет круг $|z| < 1$ или любая из полуплоскостей $\operatorname{Im}(z) \gtrless 0$.

Пусть D — некоторая односвязная область, принадлежащая $\mathfrak{D}$. Тогда все регулярные в D решения уравнения (12°.1) можно представить формулой (см. формулу (10.3)):

$$u(x, y)=a_0 P_n\left(\frac{1-z\zeta}{1+z\zeta}\right)+\int_0^z \Phi(t) P_n\left(\frac{1-z\zeta+2\zeta t}{1+z\zeta}\right) dt+$$

$$+\int_0^\zeta \Phi^*(\tau) P_n\left(\frac{1-z\zeta+2z\tau}{1+z\zeta}\right) d\tau, \quad (12°.6)$$

где $z=x+iy, \zeta=x-iy$, a_0 — произвольная постоянная, $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ — произвольные голоморфные функции в $D, \overline{D}$, которые выражаются через функцию $u(x, y)$ следующим образом:

$$a_0=u(0, 0),$$

$$\Phi(z)=\frac{d}{dz} u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right), \quad \Phi^*(\zeta)=\frac{d}{d\zeta} u\left(\frac{\zeta}{2}, \frac{i\zeta}{2}\right). \quad (12°.7)$$

Мы предполагаем, что начало координат лежит в D; это, конечно, не ограничивает общности рассуждений.

Если введём в рассмотрение функции

$$\Phi_0(z)=\frac{a_0}{2}+\int_0^z \Phi(t)\, dt, \quad \Phi_0^*(\zeta)=\frac{a_0}{2}+\int_0^\zeta \Phi^*(\tau)\, d\tau, \quad (12°.8)$$

то формулу (12°.6) можно переписать в виде:

$$u(x, y)=\Phi_0(z)-\int_0^z \Phi_0(t)\frac{\partial}{\partial t} P_n\left(\frac{1-z\zeta+2\zeta t}{1+z\zeta}\right) dt+$$

$$+\Phi_0^*(\zeta)-\int_0^\zeta \Phi_0^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau} P_n\left(\frac{1-z\zeta+2z\tau}{1+z\zeta}\right) d\tau; \quad (12°.9)$$

функции Φ_0, Φ_0^* можно подчинить условию

$$\Phi_0(0)=\Phi_0^*(0). \quad (12°.10)$$

Если u — действительное решение, то надо положить $\Phi_0^*(\zeta)=\overline{\Phi_0(\bar{\zeta})}$.

2°. Формулу (12°.9) мы можем записать ещё так:

$$u(x, y)=u_0(x, y)-\int_0^1 u_0(xt, yt)\frac{\partial}{\partial t} P_n[X+(1-X)t]\, dt, \quad (12°.11)$$

где $u_0(x, y)$ — произвольная гармоническая функция,

$$X = \frac{1 - z\zeta}{1 + z\zeta} = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} = \cos\theta. \qquad (12^\circ.12)$$

Как нетрудно видеть, эта формула справедлива для *любой звёздной области с центром в начале координат, т. е. любое регулярное в такой области решение уравнения* (12°.1) *можно представить в виде* (12°.11), *где* u_0 — *гармоническая в этой области функция, и наоборот, любой такой гармонической функции сопоставляется регулярное решение уравнения* (12°.1). Эта звёздная область может быть шире основной области уравнения (12°.1).

3°. Подставляя в (12°.11) $u_0 = 1/2\pi \lg 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, после замены x, y через $x - x_0$, $y - y_0$ получим:

$$\omega(x, y, x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} P_n(X) \lg\frac{1}{r} + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \lg t \,\frac{\partial}{\partial t} P_n[X + (1 - X)t]\,dt, \qquad (12^\circ.13)$$

где $X = (1 - r^2)(1 + r^2)^{-1}$, $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Это есть элементарное решение уравнения (12°.1) с полюсом в точке (x_0, y_0). Добавляя к нему любое регулярное решение, мы опять получим элементарное решение.

Принимая во внимание, что $r^2 = (1 - X)(1 + X)^{-1}$, формулу (12°.13) можно записать в виде:

$$\omega(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} Q_n^*(X), \qquad (12^\circ.14)$$

где

$$Q_n^*(X) = \frac{1}{2} P_n(X) \lg\frac{1 + X}{1 - X} + (1 - X)\int_0^1 \lg t\, P_n'[X + (1 - X)t]\,dt. \qquad (12^\circ.15)$$

Нетрудно видеть, что $Q_n^*(X)$ — линейно независимое от $P_n(X)$ решение уравнения Лежандра:

$$(1 - X^2)\frac{d^2Y}{dX^2} - 2X\frac{dY}{dX} + n(n + 1)Y = 0. \qquad (12^\circ.16)$$

Поэтому, очевидно, имеем:

$$Q_n^*(X) = Q_n(X) + \gamma_0 P_n(X), \qquad (12^\circ.17)$$

где $Q_n(X)$ — функция Лежандра второго рода (см., например, Уиттекер и Ватсон [1], стр. 109 и сл.). Ясно, что

$$\gamma_0=\left[\frac{1}{2}P_n(X)\lg\frac{1+X}{1-X}-Q_n(X)\right]_{X=1}. \qquad (12^\circ.18)$$

Так как $Q_n^*\left(\frac{1-z\zeta}{1+z\zeta}\right)=Q_n^*(\cos\theta)$ удовлетворяет уравнению (12°.4), то функция

$$Q_n^*\left(\frac{(1-z\zeta)(1-t\tau)+2z\tau+2\zeta t}{(1+z\zeta)(1+t\tau)}\right) \qquad (12^\circ.19)$$

будет также его решением (см. § 5, стр. 28).

Мы здесь не выписываем формул, представляющих решения уравнения (12°.1) в многосвязной области, так как в случае надобности получить их совсем нетрудно.

ГЛАВА ВТОРАЯ

РАЗЛОЖЕНИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (E_0)

Проблема аппроксимации произвольных голоморфных функций специального вида функциями является одной из основных проблем теории функций комплексной переменной.

Принимая во внимание тот факт, что любая гармоническая функция является суммой двух голоморфных функций переменных $z=x+iy$ и $\zeta=x-iy$, указанную проблему мы можем рассмотреть как проблему аппроксимации произвольных решений уравнения Лапласа $\Delta u=0$ при помощи специального вида частных решений того же уравнения. В такой постановке эта проблема естественным образом обобщается на любое уравнение вида:

$$E(u)\equiv\Delta u+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=0, \qquad (E_0)$$

где попрежнему a, b, c — аналитические функции своих аргументов. Для этого уравнения указанную проблему можно поставить так: *изучить возможность аппроксимации произвольных регулярных решений уравнения* (E_0) *при помощи специального вида частных решений того же уравнения.*

В этой главе мы докажем ряд предложений, которые обобщают известные теоремы о разложении в ряд и аппроксимации голоморфных функций. Для этой цели мы воспользуемся существенным образом результатами предыдущей главы.

§ 13. Некоторые определения и вспомогательные предложения. 1°. Пусть $\mathfrak{T}$ — некоторая область в плоскости $z=x+iy$. Назовём последовательность $u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, u_n(x, y), \ldots$ линейно независимых частных решений уравнения (E_0), регулярных в области $\mathfrak{T}$, *полной системой решений уравнения* (E_0) *относительно области* $\mathfrak{T}$, *если всякое регулярное в* $\mathfrak{T}$ *решение этого уравнения можно приблизить равномерно внутри* $\mathfrak{T}$ *при помощи линейных комбинаций вида:* $c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n$.

Иными словами, система $\{u_n\}$ частных решений уравнения (E_0) называется полной относительно области T, если для всякого регулярного в T решения $u(x, y)$ уравнения (E_0), для любого замкнутого множества D, принадлежащего T, и для любого положительного числа ε существует такая система постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что

$$\left|u(x, y)-\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x, y)\right|<\varepsilon \quad \text{на } D. \tag{13.1}$$

Две полные относительно области T системы $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ частных решений уравнения (E_0) мы будем называть *эквивалентными полными системами*.

Например, системы $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ частных решений уравнения (E_0) будут эквивалентными полными системами, если одна из них является полной и между ними существуют соотношения вида:

$$v_n = \gamma_{n1} u_1 + \gamma_{n2} u_2 + \ldots + \gamma_{nn} u_n \tag{13.2}$$

$$(\gamma_{ik} \text{ — постоянные}, \quad \gamma_{nn} \neq 0, \quad n = 1, 2, \ldots).$$

2°. Пусть дана какая-нибудь система $\{u_n\}$ линейно независимых решений уравнения (E_0). Тогда при помощи преобразований вида (13.2) мы можем получить новую систему $\{v_n\}$ линейно независимых частных решений уравнения (E_0), которая будет ортогональной и нормированной (ортонормированной) в некотором определённом смысле. Этого можно добиться известным способом ортогонализации Э. Шмидта.

А именно, если определено *скалярное произведение* (u_k, u_m) двух любых элементов u_k и u_m последовательности $\{u_n\}$, то можно положить

$$v_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} (u_1, u_1), & \ldots, & (u_1, u_{n-1}), & u_1(x, y) \\ (u_2, u_1), & \ldots, & (u_2, u_{n-1}), & u_2(x, y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (u_n, u_1), & \ldots, & (u_n, u_{n-1}), & u_n(x, y) \end{vmatrix}, \tag{13.3}$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

где Δ_n — так называемый *детерминант Грама*:

$$\Delta_0 = 1, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} (u_1, u_1), \ldots, (u_1, u_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ (u_n, u_1), \ldots, (u_n, u_n) \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{13.4}$$

Нетрудно доказать, что для всякой последовательности линейно независимых функций $u_1, u_2, \ldots$ имеет место неравенство

$\Delta_n > 0$ $(n=1, 2, \ldots)$. Если разложить детерминант (13.3) по элементам последнего столбца, то увидим, что

$$\gamma_{nn} = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}} \neq 0 \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{13.5}$$

3°. Докажем теперь следующее предложение:

Теорема 1. *Пусть $\{u_n\}$ — полная система решений уравнения (E_0) относительно области T. Тогда для всякого регулярного в T решения $u(x, y)$ уравнения (E_0) существует такая последовательность $\{v_n\}$, где*

$$v_n = c_1^{(n)} u_1 + c_2^{(n)} u_2 + \ldots + c_n^{(n)} u_n \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

что ряд

$$v_1(x, y) + v_2(x, y) + \ldots + v_n(x, y) + \ldots \tag{13.6}$$

сходится равномерно внутри T и его сумма совпадает с $u(x, y)$.

Доказательство. Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ — последовательность замкнутых множеств, принадлежащих T и удовлетворяющих условиям: 1) $D_k \subset D_{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots)$ и 2) для любой точки z области T существует такое целое число $n > 0$, что $z \subset D_n$. Тогда нетрудно видеть, что для любого замкнутого множества D, принадлежащего T, можно найти такое D_n, что $D \subset D_n$. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — убывающая последовательность положительных чисел, причём $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как система $\{u_n\}$ является полной системой частных решений уравнения (E_0) относительно T, то для каждого ε_n будет существовать такая последовательность постоянных $c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, \ldots, c_{k_n}^{(n)}$, что

$$\left| u(x, y) - \sum_{k=1}^{k_n} c_k^{(n)} u_k(x, y) \right| < \varepsilon_n \quad \text{в } D_n. \tag{13.7}$$

Положим теперь

$$\begin{gathered} v_1(x, y) = \sum_{k=1}^{k_1} c_k^{(1)} u_k(x, y), \\ v_n(x, y) = \sum_{k=1}^{k_n} c_k^{(n)} u_k(x, y) - \sum_{k=1}^{k_{n-1}} c_k^{(n-1)} u_k(x, y) \\ (n=2, 3, \ldots) \end{gathered} \tag{13.8}$$

и докажем, что ряд (13.6) сходится равномерно внутри T и что его сумма равна $u(x, y)$.

Пусть D — какое-нибудь замкнутое множество, принадлежащее T. Пусть ε — какое-нибудь положительное число. Тогда, очевидно, существует такое натуральное число n_0, что $D \subset D_n$ и $\varepsilon_n < \varepsilon$ для $n > n_0$. После этого, принимая во внимание, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} c_k^{(n)} u_k(x, y) = v_1(x, y) + \ldots + v_n(x, y), \tag{13.9}$$

из неравенства (13.7) получим:

$$\left| u(x, y) - \sum_{k=1}^{n} v_k(x, y) \right| < \varepsilon \quad \text{в } D \text{ при } n > n_0, \tag{13.10}$$

что доказывает наше утверждение.

4°. Введём теперь следующее определение.

Назовём последовательность $\{\chi_n(z)\}$ линейно независимых голоморфных в T функций *полной относительно области* T, если всякую голоморфную в T функцию можно приблизить равномерно внутри T при помощи линейных комбинаций вида

$$c_1 \chi_1(z) + c_2 \chi_2(z) + \ldots + c_n \chi_n(z).$$

Приведём теперь без доказательства следующую основную теорему:

Теорема 2. *Пусть T — область, дополнение которой есть континуум C_0, содержащий бесконечную точку. Тогда система голоморфных функций*

$$1, z, z^2, \ldots, z^n, \ldots \tag{13.11}$$

является полной относительно области T.

Если континуум C_0 содержит, кроме бесконечной точки, также конечную точку z_0, то система голоморфных функций

$$1, \frac{1}{z - z_0}, \frac{1}{(z - z_0)^2}, \ldots, \frac{1}{(z - z_0)^n}, \ldots \tag{13.12}$$

является полной относительно области T.

Эта теорема принадлежит Рунге (Рунге [1]; см. также Уолш [1], стр. 36).

При помощи предыдущей теоремы легко можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть T — бесконечная область, дополнение которой — ограниченный континуум C. Пусть z_0 — какая-нибудь фиксированная точка этого континуума: $z_0 \in C$. Тогда система голоморфных функций*

$$1, \frac{1}{z - z_0}, \frac{1}{(z - z_0)^2}, \ldots, \frac{1}{(z - z_0)^n}, \ldots \tag{13.13}$$

является полной относительно области T.

Следует заметить, что в этом случае бесконечная точка причисляется к области T и голоморфные в T функции ограничены на бесконечности. Следовательно, теорема утверждает, что всякая голоморфная в T функция может быть равномерно приближена при помощи полиномов от $(z-z_0)^{-1}$ на всяком замкнутом множестве, принадлежащем T, которое может содержать бесконечную точку.

Из теорем 2 и 3 легко вытекают следующие, более общие предложения (см. Уолш [1], гл. I):

Теорема 4. *Пусть T — область, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, причём C_0 содержит бесконечную точку, а $C_1, \ldots, C_m$ — ограниченные множества. Пусть $z_1, \ldots, z_m$ — фиксированные точки, принадлежащие $C_1, \ldots, C_m$ соответственно. Тогда система голоморфных функций*

$$1, \; z^k, \; \frac{1}{(z-z_j)^k} \qquad (k=1, 2, \ldots; \; j=1, \ldots, m) \tag{13.14}$$

является полной относительно области T.

Если C_0 содержит конечную точку z_0, то вместо (13.14) мы можем взять систему функций

$$1, \; \frac{1}{(z-z_j)^k} \qquad (k=1, 2, \ldots; \; j=0, 1, \ldots, m), \tag{13.15}$$

которая будет также полной относительно области T.

Теорема 5. *Пусть T — область, дополнение которой состоит из m ограниченных континуумов $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — фиксированные точки, принадлежащие $C_1, C_2, \ldots, C_m$ соответственно. Тогда система голоморфных в T функций*

$$1, \; \frac{1}{(z-z_j)^k} \qquad (k=1, 2, \ldots; \; j=1, \ldots, m) \tag{13.16}$$

является полной относительно области T.

Аналогично теореме 1 мы можем доказать следующую теорему:

Теорема 6. *Пусть $\{\chi_n(z)\}$ — полная система голоморфных функций относительно области T. Тогда для всякой голоморфной в T функции $\Phi(z)$ существует такая последовательность $\{\Phi_n(z)\}$, где $\Phi_n(z) = c_1^{(n)}\chi_1(z) + \ldots + c_{k_n}^{(n)}\chi_{k_n}$, что имеет место разложение*

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \ldots + \Phi_n(z) + \ldots,$$

сходящееся равномерно внутри T к функции $\Phi(z)$.

Особо отметим теперь следующие частные случаи этой теоремы:

1. Пусть дополнение области T есть континуум C_0, содержащий бесконечную точку. Тогда, в силу теоремы 2, в качестве $\chi_n(z)$ мы можем взять z^n $(n=0, 1, \ldots)$. Следовательно, в качестве $\Phi_n(z)$ в этом случае можно брать полиномы от z.

2. Пусть $\mathfrak{T}$ — область, дополнение которой есть ограниченный континуум C. Пусть z_0 — фиксированная точка, лежащая в C. Тогда на основании теоремы 3 мы можем в качестве $\chi_n(z)$ взять функцию $(z-z_0)^{-n}$ $(n=0, 1, \ldots)$. Следовательно, в этом случае $\Phi_n(z)$ — полиномы от $(z-z_0)^{-1}$.

3. Пусть $\mathfrak{T}$ — область, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, причём C_0 содержит бесконечную точку, а $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — ограниченные множества. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — фиксированные точки континуумов $C_1, C_2, \ldots, C_m$ соответственно. Тогда на основании теоремы 4 в качестве $\Phi_n(z)$ можно взять полиномы от z, $(z-z_1)^{-1}, \ldots, (z-z_m)^{-1}$.

§ 14. Разложение и аппроксимация решений уравнения (E_0) в односвязной области. 1°. Пусть $\mathfrak{T}$ — область, дополнение которой есть континуум C_0, содержащий бесконечную точку. Пусть $\mathfrak{T}$ принадлежит основной области $\mathfrak{D}$ уравнения (E_0).

Для получения полных систем решений уравнения (E_0) в области $\mathfrak{T}$ можно воспользоваться любой из формул, выведенных нами в § 10 и дающих все регулярные в $\mathfrak{T}$ решения уравнения (E_0). Каждая из этих формул имеет вид:

$$u(x, y) = \mathfrak{H}[\varphi(z)] + \mathfrak{H}^*[\varphi^*(\zeta)], \quad z = x+iy, \quad \zeta = x-iy, \tag{14.1}$$

где $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}^*$ — определённые линейные операторы от голоморфных функций $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ (см. § 10, п. 6°).

Подставляя теперь в (14.1) вместо $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ элементы последовательностей $\{\varphi_n(z)\}$, $\{\varphi_n^*(\zeta)\}$ голоморфных в $\mathfrak{T}$ и $\overline{\mathfrak{T}}$ функций $(z \in \mathfrak{T},\ \zeta \in \overline{\mathfrak{T}})$, получим последовательность $\{u_n(x, y)\}$ частных решений уравнения (E_0), регулярных в $\mathfrak{T}$. Используя неравенства (10.42), нетрудно доказать, что *если* $\{\varphi_n(z)\}$, $\{\varphi_n^*(\zeta)\}$ — *полные системы голоморфных функций относительно* $\mathfrak{T}$ *и* $\overline{\mathfrak{T}}$ *соответственно, то последовательность* $\{u_n(x, y)\}$ *будет полной системой решений уравнения* (E_0) *относительно области* $\mathfrak{T}$.

2°. Рассмотрим, например, формулу

$$u(x, y) = a_0 G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \zeta_0, z, \zeta)\, dt + \\ + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(\tau) G(z_0, \tau, z, \zeta)\, d\tau, \tag{14.2}$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$ — фиксированная точка в области $\mathfrak{T}$, $\zeta_0 = x_0 - iy_0 \in \overline{\mathfrak{T}}$, a_0 — любая постоянная, а $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$ — любые голоморфные функции в $\mathfrak{T}$ и $\overline{\mathfrak{T}}$. Эта формула даёт нам все регулярные в $\mathfrak{T}$ решения уравнения (E_0).

Из (14.2) мы получим следующую систему частных решений уравнения:

$$u_0(x, y) = G(z_0, \zeta_0, z, \zeta),$$

$$u_{2k-1}(x, y) = k\int_{z_0}^{z} G(t, \zeta_0, z, \zeta)(t - z_0)^{k-1}\,dt, \tag{14.3}$$

$$u_{2k}(x, y) = k\int_{\zeta_0}^{\zeta} G(z_0, \tau, z, \zeta)(\tau - \zeta_0)^{k-1}\,d\tau \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$(z_0 = x_0 + iy_0,\ \zeta_0 = x_0 - iy_0,\ z = x + iy,\ \zeta = x - iy).$$

Эта система, очевидно, является полной относительно любой основной области $\mathfrak{D}$ уравнения (E_0).

На основании теоремы 1 предыдущего параграфа любое регулярное в $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T} \subset \mathfrak{D}$) решение $u(x, y)$ уравнения (E_0) разлагается в ряд вида:

$$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y) + \ldots + v_n(x, y) + \ldots, \tag{14.4}$$

где

$$v_n = c_0^{(n)}u_0 + c_1^{(n)}u_1 + \ldots + c_{k_n}^{(n)}u_{k_n}.$$

Ряд (14.4) равномерно сходится внутри $\mathcal{T}$.

Разложение (14.4) мы можем получить непосредственно из (14.2), если туда вместо $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$ подставить следующие ряды:

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z), \quad \Phi^*(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^*(\zeta), \tag{14.5}$$

которые сходятся равномерно внутри $\mathcal{T}$ и $\overline{\mathcal{T}}$ соответственно; здесь Φ_n и Φ_n^* — полиномы. Такое разложение функций $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$, как известно, всегда возможно. Ряд (14.4) можно дифференцировать почленно любое число раз; это сразу вытекает из (14.2) и из того факта, что ряды (14.5), согласно теореме Вейерштрасса, можно дифференцировать почленно сколько угодно раз.

3°. Вышеприведённые рассуждения сохраняют силу и в области комплексных значений x, y, если только $z = x + iy \in \mathcal{T}$, $\zeta = x - iy \in \overline{\mathcal{T}}$. А именно, если D — некоторое замкнутое подмножество области $\mathcal{T}$, то для любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$ существует такая система постоянных $c_0, \ldots, c_n$, что

$$\left|U(z, \zeta) - \sum_{k=0}^{n} c_k U_k(z, \zeta)\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in D,\ \zeta \in \overline{D}; \tag{14.6}$$

где $U(z, \zeta)$ и $U_k(z, \zeta)$ суть аналитические продолжения $u(x, y)$ и $u_k(x, y)$ в область комплексных значений переменных x, y; это предложение сразу получается из формул:

$$U(z, \zeta) = \alpha_0 G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) G(t, \zeta_0, z, \zeta)\, dt + \\ + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(\tau) G(z_0, \tau, z, \zeta)\, d\tau, \qquad (14.7)$$

$$\begin{gathered} U_0(z, \zeta) = G(z_0, \zeta_0, z, \zeta), \\ U_{2k-1}(z, \zeta) = k \int_{z_0}^{z} (t - z_0)^{k-1} G(t, \zeta_0, z, \zeta)\, dt, \\ U_{2k}(z, \zeta) = k \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\tau - \zeta_0)^{k-1} G(z_0, \tau, z, \zeta)\, d\tau \\ (k = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \qquad (14.8)$$

При помощи неравенства (14.6) легко докажем, что разложение (14.4) сохраняет силу и для комплексных значений аргументов x, y в области: $z = x + iy \in T$, $\zeta = x - iy \in \overline{T}$, а именно:

$$U(z, \zeta) = V_1(z, \zeta) + V_2(z, \zeta) + \ldots + V_n(z, \zeta) + \ldots, \qquad (14.9)$$

где $V_n(z, \zeta) = c_0^{(n)} U_0 + c_1^{(n)} U_1 + \ldots + c_{kn}^{(n)} U_{kn}$; ряд (14.9) сходится равномерно внутри области $(T, \overline{T})$.

§ 15. Разложение решений уравнения (E_0) в круге. Разложения решений уравнения (E_0) в ряды вида (14.4) приобретают особенно простой вид, когда область есть круг. В этом случае получаются разложения, которые являются обобщениями разложений гармонических функций по однородным гармоническим полиномам.

1°. Пусть T — односвязная область, принадлежащая основной области $\mathfrak{D}$ уравнения (E_0). Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — фиксированная точка; $z_0 \in T$. Обозначим через r_0 расстояние от точки z_0 до границы области T.

Пусть $u(x, y)$ — регулярное в T решение уравнения (E_0), а $U(z, \zeta)$ — его аналитическое продолжение в область комплексных значений переменных x, y; как известно, $U(z, \zeta)$ — аналитическая функция переменных z, ζ в $(T, \overline{T})$ (см. § 9). Согласно формуле (10.7), имеем:

$$U(z,\zeta)=G(z,\zeta_0,z,\zeta)\varphi(z)-\int_{z_0}^{z}\varphi(t)H(t,\zeta_0,z,\zeta)\,dt+$$

$$+G(z_0,\zeta,z,\zeta)\varphi^*(\zeta)-\int_{\zeta_0}^{\zeta}\varphi^*(\tau)H^*(z_0,\tau,z,\zeta)\,d\tau, \quad (15.1)$$

где $\zeta_0=\overline{z}_0$, $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ — голоморфные функции в T и $\overline{T}$ соответственно, которые выражаются через $U(z,\zeta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=U(z,\zeta_0)-\frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0),\\ \varphi^*(\zeta)&=U(z_0,\zeta)-\frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta).\end{aligned} \quad (15.2)$$

Мы можем внутри кругов $|z-z_0|<r_0$ и $|\zeta-\zeta_0|<r_0$ разложить функции $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ в ряды Тейлора:

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k}(z-z_0)^k, \quad \varphi^*(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+1}(\zeta-\zeta_0)^k, \quad (15.3)$$

причём в силу (15.2) имеем:

$$\begin{aligned}\alpha_{2k}&=\frac{1}{k!}\left[\left(\frac{\partial^k U(z,\zeta_0)}{\partial z^k}\right)_{z=z_0}-\frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)\left(\frac{\partial^k G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)}{\partial z^k}\right)_{z=z_0}\right],\\ \alpha_{2k+1}&=\frac{1}{k!}\left[\left(\frac{\partial^k U(z_0,\zeta)}{\partial \zeta^k}\right)_{\zeta=\zeta_0}-\frac{1}{2}U(z_0,\zeta_0)\left(\frac{\partial^k G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)}{\partial \zeta^k}\right)_{\zeta=\zeta_0}\right].\end{aligned} \quad (15.4)$$

Принимая во внимание, что $U(z,\zeta)=u\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)$, формулы (15.4) можно переписать так:

$$\begin{aligned}\alpha_{2k}&=\frac{1}{k!\,2^k}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\left[u(x,y)-\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.-\frac{1}{2}u(x_0,y_0)G(z_0,\zeta_0,z,\zeta_0)\right]\right\}_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\\ \alpha_{2k+1}&=\frac{1}{k!\,2^k}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\left[u(x,y)-\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.-\frac{1}{2}u(x_0,y_0)G(z_0,\zeta_0,z_0,\zeta)\right]\right\}_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\end{aligned} \quad (15.5)$$

$$(z_0=x_0+iy_0, \quad z=x+iy, \quad \zeta_0=\overline{z}_0,\ \zeta=\overline{z}, \quad k=0,1,\ldots).$$

Таким образом, коэффициенты a_{2k}, a_{2k+1} разложений (15.3) выражаются через значения функции $u(x, y)$ и её частных производных порядка k в точке (x_0, y_0).

Подставляя (15.3) в (15.1), получим:

$$U(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_k(z, \zeta, z_0, \zeta_0), \tag{15.6}$$

где

$$\begin{gathered}
H_{2k}(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = \\
= G(z, \zeta_0, z, \zeta)(z - z_0)^k - \int_{z_0}^{z} (t - z_0)^k H(t, \zeta_0, z, \zeta)\, dt, \\
H_{2k+1}(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = \\
= G(z_0, \zeta, z, \zeta)(\zeta - \zeta_0)^k - \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\tau - \zeta_0)^k H^*(z_0, \tau, z, \zeta)\, d\tau \\
(k = 0, 1, 2, \ldots).
\end{gathered} \tag{15.7}$$

Ряд (15.6), очевидно, сходится равномерно внутри области ($|z - z_0| < r_0$, $|\zeta - \zeta_0| < r_0$). Докажем теперь также абсолютную сходимость этого ряда внутри указанной области.

При $|z - z_0| < \rho_0$, $|\zeta - \zeta_0| < \rho_0$, где ρ_0 — расстояние от точки z_0 до границы области $\mathfrak{D}$, формулы (15.7) мы можем переписать в виде:

$$\begin{gathered}
H_{2k}(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = (z - z_0)^k H_{2k}^{(0)}(z, \zeta, z_0, \zeta_0), \\
H_{2k+1}(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = (\zeta - \zeta_0)^k H_{2k+1}^{(0)}(z, \zeta, z_0, \zeta_0) \\
(k = 0, 1, 2, \ldots),
\end{gathered} \tag{15.8}$$

где

$$\begin{gathered}
H_{2k}^{(0)}(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = \\
= G(z, \zeta_0, z, \zeta) - (z - z_0) \int_0^1 \sigma^k H[z_0 + (z - z_0)\sigma, \zeta_0, z, \zeta]\, d\sigma, \\
H_{2k+1}^{(0)}(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = \\
= G(z_0, \zeta, z, \zeta) - (\zeta - \zeta_0) \int_0^1 \sigma^k H^*[z_0, \zeta_0 + (\zeta - \zeta_0)\sigma, z, \zeta]\, d\sigma \\
(k = 0, 1, 2, \ldots).
\end{gathered} \tag{15.9}$$

Из последних формул легко получаем оценки:

$$|H_k^{(0)}(z, \zeta, z_0, \zeta_0)| \leqslant H^{(0)}(z, \zeta, z_0, \zeta_0) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{15.10}$$

где $H^{(0)}(z, \zeta, z_0, \zeta_0)$ есть наибольшее из двух чисел:

$$|G(z, \zeta_0, z, \zeta)| + \rho_0 \int_0^1 |H[z_0 + (z - z_0)\sigma, \zeta_0, z, \zeta]|\, d\sigma,$$

$$|G(z_0, \zeta, z, \zeta)| + \rho_0 \int_0^1 |H[z_0, \zeta_0 + (\zeta - \zeta_0)\sigma, z, \zeta]|\, d\sigma. \quad (15.11)$$

Очевидно, $H^{(0)}(z, \zeta, z_0, \zeta_0)$ — неотрицательная непрерывная функция точки (z, ζ) в области $(|z - z_0| < \rho_0, |\zeta - \zeta_0| < \rho_0)$.

В силу (15.10), из (15.8) получим:

$$\begin{gathered} |H_{2k}(z, \zeta, z_0, \zeta_0)| \leqslant |z - z_0|^k H^{(0)}(z, \zeta, z_0, \zeta_0), \\ |H_{2k+1}(z, \zeta, z_0, \zeta_0)| \leqslant |\zeta - \zeta_0|^k H^{(0)}(z, \zeta, z_0, \zeta_0) \\ (k = 0, 1, 2, \ldots). \end{gathered} \quad (15.12)$$

Для коэффициентов α_k разложения (15.6), очевидно, имеем оценки:

$$|\alpha_{2k}| < \frac{M}{r_1^k}, \quad |\alpha_{2k+1}| < \frac{M}{r_1^k} \quad (k = 0, 1, \ldots), \quad (15.13)$$

где M — некоторая положительная постоянная, $0 < r_1 < r_0$.

На основании (15.12) и (15.13)

$$2MH^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{MH^{(0)} |z - z_0|^k}{r_1^k} + \frac{MH^{(0)} |\zeta - \zeta_0|^k}{r_1^k} \right) \quad (15.14)$$

является мажорантным рядом для (15.6); ряд (15.14) сходится при $|z - z_0| < r_1$, $|\zeta - \zeta_0| < r_1$, но так как r_1 можно взять сколь угодно близким к r_0, то, ясно, ряд (15.6) будет сходиться абсолютно при $|z - z_0| < r_0$, $|\zeta - \zeta_0| < r_0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, *всякое решение* $U(z, \zeta)$ *уравнения*

$$F(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial \zeta} + A(z, \zeta)\frac{\partial U}{\partial z} + B(z, \zeta)\frac{\partial U}{\partial \zeta} + C(z, \zeta)U = 0, \quad (F_0)$$

которое представляет собой аналитическую функцию переменных z, ζ *в области* $(|z - z_0| < r_0, |\zeta - \zeta_0| < r_0)$, *разлагается в ряд вида* (15.6), *сходящийся абсолютно и равномерно внутри указанной области.*

В случае уравнения Лапласа ряд (15.6) обращается в ряд однородных гармонических полиномов, так как тогда $H_{2k} = (z - z_0)^k$, $H_{2k+1} = (\zeta - \zeta_0)^k$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Следовательно, в классе решений уравнения (E_0) совокупность функций H_k $(k = 0, 1, \ldots)$ занимает такое же место, как в классе гармонических функций — однородные гармонические полиномы.

2°. Допустим $\zeta = \bar{z}$ и, считая попрежнему $\zeta_0 = \bar{z}_0$, введём обозначения

$$h_k(x, y, x_0, y_0) = H_k(z, \zeta, z_0, \zeta_0) \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{15.15}$$

Тогда ряд (15.6) примет вид:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k h_k(x, y, x_0, y_0). \tag{15.16}$$

Таким образом, *всякое регулярное внутри круга* $|z - z_0| < r_0$ *решение* $u(x, y)$ *уравнения* (E_0) *разлагается в ряд вида* (15.16), *который сходится абсолютно и равномерно внутри указанного круга; коэффициенты* α_{2k}, α_{2k+1} *выражаются при помощи формул* (15.5) *через значения* $u(x, y)$ *и её частных производных порядка* k *в точке* (x_0, y_0).

Очевидно, что система $\{h_k\}$ является полной системой решений уравнения (E_0) относительно основной области $\mathfrak{D}$; $(x_0, y_0) \in \mathfrak{D}$.

На основании общего предложения, доказанного в предыдущем параграфе, ряд (15.16) можно дифференцировать почленно любое число раз внутри круга $|z - z_0| < r_0$.

3°. Часто встречаются такие решения уравнения (E_0), которые, кроме основных переменных x, y, зависят также от некоторого числа параметров t, τ, ... Примерами таких решений могут служить функция Римана $G(t, \tau, z, \zeta)$ и элементарное решение $\omega(x, y, x_0, y_0)$.

Предположим теперь, что в (15.6) функция $U(z, \zeta)$, кроме переменных z, ζ, зависит также и от некоторого числа параметров t, τ, ... Пусть относительно этих параметров функция $U(z, \zeta)$ является аналитической в области $(D_t, D_\tau, \ldots)$. Тогда коэффициенты ряда (15.6) будут также аналитическими функциями t, τ, ... в области $(D_t, D_\tau, \ldots)$, и этот ряд будет иметь вид:

$$U(z, \zeta, t, \tau, \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t, \tau, \ldots) H_k(z, \zeta, z_0, \zeta_0). \tag{15.17}$$

Нетрудно доказать, что последний ряд сходится абсолютно и равномерно относительно переменных z, ζ, t, τ, ... внутри области $(|z - z_0| < r_0, |\zeta - \zeta_0| < r_0, D_t, D_\tau, \ldots)$. Это вытекает из оценок (15.12) и (15.13); здесь надо иметь в виду, что в (15.13) постоянная M будет вообще зависеть от параметров t, τ, ..., но, очевидно, на всяком замкнутом подмножестве области $(D_t, D_\tau, \ldots)$ она будет ограничена.

Наконец, нетрудно также доказать, что ряд (15.17) можно почленно дифференцировать относительно z, ζ, t, τ, ... любое число раз внутри области $(|z - z_0| < r_0, |\zeta - \zeta_0| < r_0, D_t, D_\tau, \ldots)$. Заметим, что если коэффициенты уравнения (E_0) не зависят от параметров $t, \tau, \ldots$, то возможность почленного дифференцирования ряда (15.17) по переменным $t, \tau, \ldots$ сразу вытекает из того факта, что производные от U по $t, \tau, \ldots$ также являются решениями уравнения (E_0), и, следовательно, они также разлагаются в ряды вида (15.17), причём, очевидно, коэффициентами этих разложений будут соответствующие производные от α_k по параметрам $t, \tau, \ldots$

§ 16. Формулы сложения для функции Римана и стандартного элементарного решения. Рассмотрим теперь разложения функции Римана $G(t, \tau, z, \zeta)$ и стандартного элементарного решения $\omega(x, y, x_0, y_0)$.

1°. Пусть $U(z, \zeta) = G(t, \tau, z, \zeta)$. Тогда ряд (15.17) примет вид:

$$G(t, \tau, z, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(z, \zeta, z_0, \zeta_0)\, G_k^*(z_0, \zeta_0, t, \tau), \tag{16.1}$$

где согласно (15.4)

$$\begin{gathered} G_{2k}^*(z_0, \zeta_0, t, \tau) = \\ = \frac{1}{k!}\left\{\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[G(t, \tau, z, \zeta_0) - \frac{1}{2}G(t, \tau, z_0, \zeta_0)\, G(z_0, \zeta_0, z, \zeta_0)\right]\right\}_{z=z_0}, \\ G_{2k+1}^*(z_0, \zeta_0, t, \tau) = \\ = \frac{1}{k!}\left\{\frac{\partial^k}{\partial \zeta^k}\left[G(t, \tau, z_0, \zeta) - \frac{1}{2}G(t, \tau, z_0, \zeta_0)\, G(z_0, \zeta_0, z_0, \zeta)\right]\right\}_{\zeta=\zeta_0}. \end{gathered} \tag{16.2}$$

Ряд (16.1) абсолютно и равномерно сходится относительно переменных z, ζ, t, τ внутри области ($|z - z_0| < \rho_0, |\zeta - \zeta_0| < \rho_0, \mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$), где ρ_0 — расстояние от точки z_0 до границы области $\mathfrak{D}$; этот ряд можно почленно дифференцировать по переменным z, ζ, t, τ в указанной области.

Очевидно, $G_k^*(z_0, \zeta_0, t, \tau)$ являются аналитическими функциями переменных t, τ в области ($\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$) и удовлетворяют сопряжённому с (F_0) уравнению

$$F^*(V) = \frac{\partial^2 V}{\partial t\, \partial \tau} - \frac{\partial A(t, \tau) V}{\partial t} - \frac{\partial B(t, \tau) V}{\partial \tau} + C(t, \tau) V = 0. \tag{F_0^*}$$

Если коэффициенты A, B, C — целые функции, то ряд (16.1) будет сходиться для всех (конечных) значений z, ζ, t, τ; в этом случае, очевидно, в качестве $\mathfrak{D}$ можно взять всю плоскость z; следовательно, $\rho_0 = \infty$.

Формулу (16.1) мы будем называть *формулой сложения для функции Римана*. Она имеет важные применения в теории специальных функций, связанных с дифференциальными уравнениями второго порядка. Например, известные формулы сложения функции Бесселя нулевого порядка и функции Лежандра являются частным случаем формулы (16.1) (см. ниже §§ 19, 20).

2°. Изучим теперь разложения стандартного элементарного решения $\omega(x, y, \xi, \eta)$. Эта функция является регулярным решением уравнения (E_0) всюду в области $\mathfrak{D}$ за исключением точки (ξ, η), где она имеет логарифмический полюс. Зафиксируем (ξ, η) и возьмём отличную от неё точку (x_0, y_0) в области $\mathfrak{D}$. Обозначим через r_0 какое-нибудь положительное число, удовлетворяющее условиям: 1) $r_0 \leqslant |t - z_0|$ $(t = \xi + i\eta,\ \ z_0 = x_0 + iy_0)$ и 2) круг $|z - z_0| < r_0$ принадлежит области $\mathfrak{D}$.

Тогда $\omega(x, y, \xi, \eta)$ можно разложить в ряд вида (15.16) внутри круга $|z - z_0| < r_0$. Это разложение, очевидно, имеет вид:

$$\omega(x, y, \xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x, y, x_0, y_0)\, \omega_k^*(x_0, y_0, \xi, \eta), \tag{16.3}$$

где согласно (15.5)

$$\omega_{2k}^*(x_0, y_0, \xi, \eta) = \frac{1}{k!\,2^k}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^k [\omega(x, y, \xi, \eta) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\omega(x_0, y_0, \xi, \eta)\, G(z_0, \zeta_0; z, \zeta_0)]\right\}_{\substack{x = x_0\\ y = y_0}},$$
$$\omega_{2k+1}^*(x_0, y_0, \xi, \eta) = \frac{1}{k!\,2^k}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^k [\omega(x, y, \xi, \eta) - \right. \tag{16.4}$$
$$\left. - \frac{1}{2}\omega(x_0, y_0, \xi, \eta)\, G(z_0, \zeta_0, z_0, \zeta)]\right\}_{\substack{x = x_0\\ y = y_0}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$
$$(z = x + iy,\quad \zeta = \bar{z},\quad z_0 = x_0 + iy_0,\quad \zeta_0 = \bar{z}_0).$$

Пусть $D_0 = \mathfrak{D} - \Sigma_0$, где Σ_0 — круг $|z - z_0| < r_0$; $\Sigma_0 \subset \mathfrak{D}$. Тогда, очевидно, ряд (16.3) абсолютно и равномерно сходится относительно переменных x, y, ξ, η внутри области: $(x, y) \in \Sigma_0$, $(\xi, \eta) \in D_0$; ряд можно почленно дифференцировать любое число раз внутри этой области.

Из (16.4) очевидно, что функции $\omega_k^*(x_0, y_0, \xi, \eta)$ относительно переменных ξ, η являются решениями уравнения

$$E^*(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{\partial a(\xi, \eta) v}{\partial \xi} - \frac{\partial b(\xi, \eta) v}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) v = 0, \tag{E_0^*}$$

регулярными всюду в $\mathfrak{D}$, за исключением точки (x_0, y_0), в которой они имеют полюс; функции ω_0^* и ω_1^* имеют логарифмический полюс, а ω_{2k}^*, ω_{2k+1}^* при $k \geqslant 1$ имеют полюс порядка k. Это сразу вытекает из (16.4), если принять во внимание, что

$$\omega(x, y, \xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} G(t, \bar{t}, z, \bar{z}) \lg[(z-t)(\bar{z}-\bar{t})] + g_0(x, y, \xi, \eta), \tag{16.5}$$

где $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$; g_0 — аналитическая функция.

3°. При получении разложения (16.3) мы воспользовались тем, что $\omega(x, y, \xi, \eta)$ является относительно переменных x, y решением уравнения (E_0), регулярным в круге $|z - z_0| < (r)$.

Воспользуемся теперь тем, что $\omega(x, y, \xi, \eta)$ относительно последней пары переменных является решением сопряжённого уравнения (E_0^*), регулярным внутри круга $|t - z_0| < |z - z_0|$ ($t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$); мы здесь считаем, что $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ и что указанный круг находится внутри $\mathfrak{D}$. Тогда мы можем написать разложение:

$$\omega(x, y, \xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k^*(\xi, \eta, x_0, y_0)\, \omega_k(x, y, x_0, y_0), \tag{16.6}$$

где

$$h_k^*(\xi, \eta, x_0, y_0) = H_k^*(t, \bar{t}, z_0, \bar{z}_0) \tag{16.7}$$

$$(k = 0, 1, \ldots)$$

причём $t = \xi + i\eta$, $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\begin{aligned} H_{2k}^*(t, \tau, z_0, \zeta_0) &= G(t, \tau, t, \zeta_0)(t - z_0)^k - \\ &- \int_{z_0}^{t} (\sigma - z_0)^k \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} G(t, \tau, \sigma, \zeta_0) + B(\sigma, \zeta_0) G(t, \tau, \sigma, \zeta_0)\right] d\sigma, \\ H_{2k+1}^*(t, \tau, z_0, \zeta_0) &= G(t, \tau, z_0, \tau)(\tau - \zeta_0)^k - \\ &- \int_{\zeta_0}^{\tau} (\sigma - \zeta_0)^k \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} G(t, \tau, z_0, \sigma) + A(z_0, \sigma) G(t, \tau, z_0, \sigma)\right] d\sigma \end{aligned} \tag{16.8}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Эти формулы получим сразу, если все регулярные решения сопряжённого уравнения (E_0^*) выразим формулой вида (10.7).

Далее, согласно формуле (15.5)

$$\omega_{2k}(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{k!2^k}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^k [\omega(x, y, \xi, \eta) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\omega(x, y, x_0, y_0) G(t, \bar{z}_0, z_0, \bar{z}_0)]\right\}_{\substack{\xi = x_0,\\ \eta = y_0}}$$
$$\omega_{2k+1}(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{k!2^k}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^k [\omega(x, y, \xi, \eta) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\omega(x, y, x_0, y_0) G(z_0, \bar{t}, z_0, \bar{z}_0)]\right\}_{\substack{\xi = x_0\\ \eta = y_0}} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{16.9}$$

Очевидно, $h_k^*(\xi, \eta, x_0, y_0)$ суть регулярные в $\mathfrak{D}$ решения уравнения (E_0^*), а $\omega_k(x, y, x_0, y_0)$ — решения уравнения (E_0), регулярные всюду в $\mathfrak{D}$, за исключением точки (x_0, y_0), где они имеют полюс; ω_0, ω_1 имеют логарифмический полюс, а ω_{2k}, ω_{2k+1} при $k \geqslant 1$ — полюс порядка k.

Пусть $D_0 = \mathfrak{D} - \Sigma_0$, где Σ_0 — круг $|z - z_0| < r_0$, который находится внутри $\mathfrak{D}$. Тогда ряд (16.6) абсолютно и равномерно сходится внутри области $(\xi, \eta) \in \Sigma_0$, $(x, y) \in D_0$. Этот ряд можно дифференцировать любое число раз внутри этой области.

Разложения (16.3) и (16.6) мы будем называть *формулами сложения для стандартного элементарного решения* $\omega(x, y, \xi, \eta)$ *уравнений* (E_0), (E_0^*).

Следует отметить, что известные формулы сложения функции Лежандра второго рода и функции Неймана нулевого порядка являются частными случаями этих формул (см. ниже §§ 19, 20).

§ 17. Разложение решений уравнения (E_0) в ряд в круговом кольце. 1°. Пусть T — круговое кольцо, ограниченное концентрическими окружностями γ_1 и γ_2 с центром в точке z_0 и радиуса r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$. Мы предполагаем, что круг $|z - z_0| < r_2$ принадлежит $\mathfrak{D}$.

Пусть $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (E_0) в области T. В силу формул (8.5) и (8.6), имеем:

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y), \tag{17.1}$$

где

$$u_0(x, y) = \int_{\gamma_2'} \left[u\frac{d}{d\nu}\omega(x, y, \xi, \eta) - \omega(x, y, \xi, \eta) Nu\right] ds, \tag{17.2}$$

$$u_1(x, y) = -\int_{\gamma_1'} \left[u\frac{d}{d\nu}\omega(x, y, \xi, \eta) - \omega(x, y, \xi, \eta) Nu\right] ds, \tag{17.3}$$

где γ_1' и γ_2' — концентрические окружности с центром в z_0, лежащие в T и сколь угодно близкие к γ_1 и γ_2 соответственно, причём точка (x, y) лежит между γ_1' и γ_2'. Когда точка $(\xi, \eta) \in \gamma_2'$, мы можем $\omega(x, y, \xi, \eta)$ разложить в ряд (16.3), который при фиксированной точке (x, y), очевидно, равномерно будет сходиться на γ_2'. Подставляя теперь в (17.2) вместо $\omega(x, y, \xi, \eta)$ ряд (16.3), будем иметь:

$$u_0(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k h_k(x, y, x_0, y_0), \tag{17.4}$$

где

$$\alpha_k = \int_{\gamma_2'} \left[u \frac{d}{d\nu} \omega_k^*(x_0, y_0, \xi, \eta) - \omega_k^*(x_0, y_0, \xi, \eta) Nu \right] ds \tag{17.5}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ряд (17.4), очевидно, сходится абсолютно и равномерно внутри круга $|z - z_0| < r_2$.

Когда точка $(\xi, \eta) \in \gamma_1'$, функцию $\omega(x, y, \xi, \eta)$ можно представить рядом (16.6), который, очевидно, равномерно сходится на γ_1'. Подставляя этот ряд в (17.3), получим:

$$u_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \omega_k(x, y, x_0, y_0), \tag{17.6}$$

где

$$\beta_k = -\int_{\gamma_1'} \left[u \frac{d}{d\nu} h_k^*(\xi, \eta, x_0, y_0) - h_k^*(\xi, \eta, x_0, y_0) Nu \right] ds. \tag{17.7}$$

Ряд (17.6) сходится абсолютно и равномерно внутри области $D_0 = \mathfrak{D} - \Sigma_0$, где Σ_0 есть круг $|z - z_0| < r_1$. Подставляя (17.4) и (17.6) в (17.1), получим:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha_k h_k(x, y, x_0, y_0) + \beta_k \omega_k(x, y, x_0, y_0)]. \tag{17.8}$$

Таким образом, *всякое регулярное в кольце $r_1 < |z - z_0| < r_2$ решение уравнения* (E_0) *можно разложить в ряд* (17.8), *который сходится абсолютно и равномерно внутри этого кольца.*

Ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} \alpha_k h_k(x, y, x_0, y_0)$ мы назовём *регулярной частью* разложения (17.8), а ряд $\sum \beta_k \omega_k(x, y, x_0, y_0)$ — его *главной частью.*

Ряд (17.8) представляет собой аналог ряда Лорана для семейства функций, удовлетворяющих уравнению (E_0).

2°. Введём теперь следующее определение. Если $u(x, y)$ — решение уравнения (E_0), регулярное в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), за исключением, быть может, самой этой точки, то (x_0, y_0) мы будем называть *изолированной особой точкой* функции $u(x, y)$. Мы можем теперь использовать ряд (17.8) для классификации изолированных особых точек.

Пусть (x_0, y_0) — изолированная особая точка решения $u(x, y)$ уравнения (E_0). Тогда в окрествости этой точки мы можем представить $u(x, y)$ в виде ряда (17.8). При этом могут иметь место три следующих случая:

1) В разложении (17.8) отсутствует главная часть, т. е. все $\beta_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Тогда точку (x_0, y_0) будем называть *устранимой особой точкой*. Нетрудно доказать, что в окрестности устранимой особой точки функция $u(x, y)$ ограничена и существует

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = \alpha_0.$$

Если мы теперь положим

$$u(x_0, y_0) = \alpha_0,$$

то легко докажем, что $u(x, y)$ будет регулярным решением уравнения (E_0) внутри некоторого круга с центром в точке (x_0, y_0).

2) В разложении (17.8) главная часть содержит лишь конечное число членов. Тогда точку (x_0, y_0) мы будем называть *полюсом*.

3) Наконец, если в разложении (17.8) главная часть содержит бесконечное число членов, то точку (x_0, y_0) мы будем называть *существенно особой точкой*.

Заметим, что при помощи разложения (17.8) можно доказать ряд предложений о поведении решений уравнения (E_0) вблизи изолированных особых точек; можно обобщить соответствующим образом теоремы Вейерштрасса, Пикара и др.

§ 18. Аппроксимация решений уравнения (E_0) в многосвязной области. В этом параграфе мы изучим вопросы аппроксимации решений уравнения (E_0) в многосвязной области.

Пусть D — многосвязная область, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, причём C_0 содержит бесконечную точку, а $C_1, \ldots, C_m$ — ограниченные множества.

Сохраняя принятые в § 11 обозначения, всякое регулярное в D решение уравнения (E_0), согласно формуле (11.29), можно представить в виде:

$$
\begin{aligned}
u(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \omega(x, y, x_k, y_k) + \mathfrak{H}[0, p(z)] + \mathfrak{H}^*[0, p^*(\zeta)] + \\
+ \sum_{k=1}^{m} \Big\{ \mathfrak{H}\Big[\zeta_k, q_k(z) - \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{L}_k} q_k^*(\tau) H^*(z_k, \tau, z, \zeta_k)\, d\tau\Big) \lg(z - z_k)\Big] + \\
+ \mathfrak{H}^*\Big[z_k, q_k^*(\zeta) - \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} q_k(t) H(t, \zeta_k, z_k, \zeta)\, dt\Big) \lg(\zeta - \zeta_k)\Big]\Big\}
\end{aligned} \tag{18.1}
$$

$$
(z = x + iy,\ z_k = x_k + iy_k \in C_k,\ \zeta_k = \bar{z}_k,\ \zeta = \bar{z}).
$$

Функция $\mathfrak{H}[0, p(z)] + \mathfrak{H}^*[0, p^*(\zeta)]$ является регулярным решением уравнения (E_0) в D_0. Поэтому её можно аппроксимировать равномерно внутри D_0 (следовательно, и внутри D) при помощи линейных комбинаций частных решений $h_k(x, y, x_0, y_0)$ ($k = 0, 1, \ldots$) уравнения (E_0), заданных формулами (15.15), где (x_0, y_0) — фиксированная точка в области D_0.

Далее, так как функции $q_k(z)$, $q_k^*(\zeta)$ голоморфны в S_k, $\bar{S}_k$ и исчезают на бесконечности, то на основании теоремы 3 § 13 их можно аппроксимировать при помощи полиномов от $(z - z_k')^{-1}$, $(\zeta - \bar{z}_k')^{-1}$ равномерно внутри S_k и $\bar{S}_k$ соответственно, где z_k' — фиксированная точка на C_k, которая может совпадать с z_k. Поэтому члены правой части (18.1), содержащие $q_k(z)$ и $q_k^*(\zeta)$, можно аппроксимировать внутри D при помощи линейных комбинаций следующих частных решений уравнения (E_0):

$$
\begin{aligned}
w_{k,2l-1}(x, y) = \mathfrak{H}[\zeta_k, (z - z_k')^{-l}] - \\
- \mathfrak{H}^*\Big[z_k, \frac{1}{(l-1)!} \frac{\partial^{l-1} H(z_k', \zeta_k, z_k, \zeta)}{\partial z_k'^{\,l-1}} \lg(\zeta - \zeta_k)\Big], \\
w_{k,2l}(x, y) = -\mathfrak{H}\Big[\zeta_k, \frac{1}{(l-1)!} \frac{\partial^{l-1} H^*(z_k, \zeta_k', z, \zeta_k)}{\partial \zeta_k'^{\,l-1}} \lg(z - z_k)\Big] + \\
+ \mathfrak{H}^*[z_k, (\zeta - \zeta_k')^{-l}]
\end{aligned} \tag{18.2}
$$

$$
(\zeta = \bar{z},\ \zeta_k = \bar{z}_k,\ \zeta_k' = \bar{z}_k';\ l = 1, 2, \ldots).
$$

На основании формулы (18.1) мы имеем предложение: *любое регулярное в D решение уравнения (E_0) можно равномерно аппроксимировать внутри D при помощи линейных комбинаций следующих частных решений:*

$$
\omega(x, y, x_k, y_k), \quad h_j(x, y, x_0, y_0), \quad w_{kl}(x, y) \tag{18.3}
$$

$$
(k = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 0, 1, 2, \ldots; \quad l = 1, 2, \ldots).
$$

Положим теперь в формулах (18.2) $z'_k = z_k$. Тогда функция $w_{kl}(x, y)$, как нетрудно видеть, является регулярным решением уравнения (E_0) всюду в $\mathfrak{D}$, за исключением точки (x_k, y_k), где она имеет полюс порядка $\left[\frac{l}{2}\right]$[1]. Согласно результатам предыдущего параграфа, мы можем в окрестности точки (x_k, y_k) разложить эту функцию в ряд вида (17.8), причём, очевидно, будем иметь:

$$w_{kl}(x, y) = \sum_{s=1}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \beta_{ks}\omega_s(x, y, x_k, y_k) + v_{kl}(x, y) \qquad (18.4)$$
$$(k = 1, \ldots, m; l = 1, 2, \ldots),$$

где v_{kl} — регулярное в $\mathfrak{D}$ решение уравнения (E_0). Следовательно, v_{kl} можно аппроксимировать равномерно внутри $\mathfrak{D}$ при помощи линейных комбинаций функций $h_j(x, y, x_0, y_0)$ $(j = 0, 1, \ldots)$. На основании формулы (18.4) мы теперь легко докажем, что всякую линейную комбинацию функций (18.3) можно равномерно аппроксимировать на любом замкнутом подмножестве области $\mathfrak{D}$, не содержащем точек $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$, при помощи линейных комбинаций следующих частных решений уравнения (E_0):

$$h_j(x, y, x_0, y_0), \quad \omega_j(x, y, x_k, y_k) \qquad (18.5)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, доказано следующее предложение: *любое регулярное в D решение $u(x, y)$ уравнения (E_0) можно равномерно аппроксимировать при помощи линейных комбинаций частных решений* (18.5).

Это предложение является обобщением теоремы 5 § 13 на класс функций, удовлетворяющих уравнению (E_0).

Предложения, которые мы доказали в этой главе, касались аппроксимации решений уравнения (E_0) при помощи линейных комбинаций его же частных решений *внутри* области. В § 27 мы ещё вернёмся к этой проблеме и докажем несколько более общих теорем об аппроксимации решений уравнения (E_0) *в замкнутых областях*.

§ 19. Применения в теории бесселевых функций. Результаты, полученные в предыдущих параграфах, находят важные применения в теории специальных функций. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые применения предыдущих

---

[1]) $\left[\frac{l}{2}\right]$ обозначает наибольшую целую часть числа $\frac{l}{2}$.

результатов в теории бесселевых функций; здесь воспроизводятся результаты, содержащиеся в работе автора [23].

1°. Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \qquad (\lambda = \text{const}). \tag{19.1}$$

Для него функция Римана (§ 5) $G = L_0[\nu(z-t)(\zeta-\tau)]$, где $\nu = \lambda^2/4$, $L_0(x) = J_0(2\sqrt{x})$, причём J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. В силу формулы (12*.3), общее представление всех решений уравнения (19.1), регулярных в некоторой односвязной области D, даётся формулой:

$$u(x, y) = \alpha_0 L_0[\nu(z-z_0)(\zeta-\zeta_0)] + \int_{z_0}^{z} \Phi(t) L_0[\nu(z-t)(\zeta-\zeta_0)]\,dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi^*(\tau) L_0[\nu(z-z_0)(\zeta-\tau)]\,d\tau, \tag{19.2}$$

где $\nu = \lambda^2/4$, $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$; z_0, ζ_0 — фиксированные точки в $D, \overline{D}$; $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ — любые голоморфные функции в $D, \overline{D}$ соответственно, α_0 — любая постоянная; α_0, Φ, Φ^* однозначно определяются через $u(x, y)$; а именно, из (19.2) получим, что

$$\alpha_0 = U(z_0, \zeta_0), \quad \Phi(z) = \frac{\partial U(z, \zeta_0)}{\partial z}, \quad \Phi^*(\zeta) = \frac{\partial U(z_0, \zeta)}{\partial \zeta}, \tag{19.3}$$

где $U(z, \zeta)$ — аналитическая функция переменных z, ζ в области $(D, \overline{D})$ и задаётся формулой:

$$U(z, \zeta) = u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right). \tag{19.4}$$

2°. Подставим теперь в (19.2) поочерёдно следующие выражения:

$$\alpha_0 = 1, \quad \Phi(z) = 0, \quad \Phi^*(\zeta) = 0; \tag{19.5}$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \Phi(z) = \frac{(z-z_0)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, \quad \Phi^*(\zeta) = 0, \tag{19.6}$$

и

$$\alpha_0 = 0, \quad \Phi(z) = 0, \quad \Phi^*(\zeta) = \frac{(\zeta-\zeta_0)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, \tag{19.7}$$

где μ — постоянная, причём будем считать пока $\operatorname{Re}\mu > 0$. Тогда, после очевидных вычислений, получим следующие решения уравнения (19.1):

$$(z-z_0)^{\mu} L_{\mu}[\nu(z-z_0)(\zeta-\zeta_0)], \quad (\zeta-\zeta_0)^{\mu} L_{\mu}[\nu(z-z_0)(\zeta-\zeta_0)], \tag{19.8}$$

где $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$,

$$L_{\mu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k!\,\Gamma(\mu+k+1)}. \tag{19.9}$$

Нетрудно видеть, что функции (19.8) удовлетворяют уравнению (19.1) для любого μ; следовательно, можно снять сделанное выше ограничение $\operatorname{Re}\mu>0$.

3°. Очевидно, $L_{\mu}(x)$ — целая функция для любого значения индекса μ. Из (19.9) легко получим следующие важные формулы:

$$L_{-n}(x)=(-1)^n x^n L_n(x), \tag{19.10}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} L_{\mu}(x)=(-1)^n L_{n+\mu}(x), \tag{19.11}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}[x^{\mu} L_{\mu}(x)]=x^{\mu-n} L_{\mu-n}(x), \tag{19.12}$$

справедливые для любого целого положительного n и для любого комплексного числа μ.

Нетрудно проверить, что функция $y=L_{\mu}(x)$ является решением уравнения

$$xy''+(\mu+1)y'+y=0. \tag{19.13}$$

Это непосредственно следует из того, что выражения (19.8) являются решениями уравнения (19.1). Нетрудно проверить, что уравнению (19.13) удовлетворяет также функция $y=x^{-\mu}L_{-\mu}(x)$.

Рассмотрим теперь следующее частное решение уравнения (19.13):

$$\Delta_{\mu}(x)=\frac{L_{\mu}(x)\cos\mu\pi-x^{-\mu}L_{-\mu}(x)}{\sin\mu\pi}, \tag{19.14}$$

где μ — любое комплексное число, причём под $\Delta_n(x)$ (n — целое число) мы будем понимать предел выражения (19.14) при $\mu\to n$. Очевидно, $L_{\mu}(x)$ и $\Delta_{\mu}(x)$ — линейно независимые функции. Поэтому общее решение уравнения (19.13) имеет вид:

$$V_{\mu}(x)=A_{\mu}L_{\mu}(x)+B_{\mu}\Delta_{\mu}(x), \tag{19.15}$$

где A_{μ}, B_{μ} — произвольные постоянные, которые вообще могут зависеть от μ. В дальнейшем мы будем предполагать, что эти постоянные удовлетворяют следующим условиям:

$$A_{\mu+1}=A_{\mu}, \quad B_{\mu+1}=B_{\mu}. \tag{19.16}$$

На основании (19.10), (19.11), (19.12), (19.14) и (19.16) легко получим следующие равенства:

$$\begin{gathered} V_{-n}(x) = (-1)^n x^n V_n(x), \\ \frac{d^n}{dx^n} V_\mu(x) = (-1)^n V_{\mu+n}(x), \\ \frac{d^n}{dx^n}[x^\mu V_\mu(x)] = x^{\mu-n} V_{\mu-n}(x), \end{gathered} \tag{19.17}$$

справедливые для любого μ и для всякого целого положительного числа n; эти формулы имеют место, в частности, при $V_\mu = \Delta_\mu$.

Нетрудно теперь проверить справедливость следующих формул:

$$J_\mu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\mu L_\mu\left(\frac{x^2}{4}\right), \quad Y_\mu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\mu \Delta_\mu\left(\frac{x^2}{4}\right), \tag{19.18}$$

где J_μ, Y_μ — функции Бесселя первого и второго родов. Функции Ганкеля имеют вид:

$$\begin{gathered} H_\mu^{(1)}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\mu \left[L_\mu\left(\frac{x^2}{4}\right) + i\Delta_\mu\left(\frac{x^2}{4}\right)\right], \\ H_\mu^{(2)}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\mu \left[L_\mu\left(\frac{x^2}{4}\right) - i\Delta_\mu\left(\frac{x^2}{4}\right)\right]. \end{gathered} \tag{19.19}$$

Для цилиндрических функций общего вида будем иметь выражение

$$Z_\mu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\mu V_\mu\left(\frac{x^2}{4}\right), \tag{19.20}$$

причём надо помнить, что выполняются условия (19.16).

4°. Нетрудно теперь проверить, что функции

$$(z-z_0)^\mu V_\mu[\nu(z-z_0)(\zeta-\zeta_0)], \quad (\zeta-\zeta_0)^\mu V_\mu[\nu(z-z_0)(\zeta-\zeta_0)] \tag{19.21}$$
$$(z = x+iy, \quad \zeta = x-iy, \nu = \lambda^2/_4)$$

являются решениями уравнения (19.1) для любого μ. В частности, на основании (19.18) имеем, что функции

$$J_0(\lambda r), \quad J_n(\lambda r)e^{in\theta}, \quad J_n \quad r)e^{-in\theta} \tag{19.22}$$
$$(n = 1, 2, \ldots);$$

где $r = |z-z_0|$, $\theta = \arg(z-z_0)$, являются регулярными во всей плоскости частными решениями уравнения (19.1).

На основании предложения, доказанного в § 14, *последовательность* (19.22) *является полной системой частных решений уравнения* (19.1) *относительно любой односвязной области.*

5°. Изучим теперь разложения решений уравнения (19.1) в круге $|z| < R$. Пусть $u(x, y)$ — регулярное в круге $|z| < R$

решение уравнения (19.1). Продолжая эту функцию в область комплексных значений аргументов x, y, получим аналитическую в области ($|z|<R$, $|\zeta|<R$) функцию $U(z, \zeta)$, которую можно представить в виде:

$$U(z, \zeta)=\alpha_0 L_0(\nu z\zeta)+\int_0^z \Phi(t) L_0[\nu\zeta(z-t)]\,dt+$$
$$+\int_0^\zeta \Phi^*(\tau) L_0[\nu z(\zeta-\tau)]\,d\tau, \qquad (19.23)$$

где, в силу (19.3),

$$\alpha_0=U(0, 0), \qquad \Phi(z)=\frac{\partial U(z, 0)}{\partial z}, \qquad \Phi^*(\zeta)=\frac{\partial U(0, \zeta)}{\partial\zeta}. \qquad (19.24)$$

Очевидно, $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ — голоморфные функции в круге $|z|<R$. Разлагая их в ряды Маклорена и подставляя последние в (19.23), после весьма простых выкладок получим:

$$U(z, \zeta)=\alpha_0 L_0(\nu z\zeta)+\sum_{k=1}^\infty (\alpha_k z^k+\beta_k\zeta^k) L_k(\nu z\zeta), \qquad (19.25)$$

где

$$\alpha_k=\left(\frac{\partial^k U}{\partial z^k}\right)_0, \quad \beta_k=\left(\frac{\partial^k U}{\partial\zeta^k}\right)_0 \quad (k=1, 2, \ldots), \qquad (19.26)$$

причём $(\ )_0$ обозначает значение выражения, находящегося внутри скобок при $z=\zeta=0$. Ряд (19.25), очевидно, сходится абсолютно и равномерно внутри области ($|z|<R$, $|\zeta|<R$).

В частности, при $\zeta=\bar z$ получим:

$$u(x, y)=a_0 J_0(\lambda r)+\sum_{k=1}^\infty (a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta) J_k(\lambda r), \qquad (19.27)$$

где $r=|z|$, $\theta=\arg z$,

$$a_0=\alpha_0, \quad a_k=\left(\frac{2}{\lambda}\right)^k(\alpha_k+\beta_k), \quad b_k=i\left(\frac{2}{\lambda}\right)^k(\alpha_k-\beta_k) \qquad (19.28)$$
$$(k=1, 2, \ldots).$$

Таким образом, *любое регулярное внутри круга* $|z|<R$ *решение* $u(x, y)$ *уравнения* (19.1) *разлагается в ряд* (19.27), *который абсолютно и равномерно сходится внутри этого круга; коэффициенты* a_k, b_k *разложения* (19.27) *выражаются через значения производных порядка* k *функции* $u(x, y)$ *в точке* $x=y=0$ (см. формулы (19.28) и (19.26)).

6°. Воспользуемся теперь разложением (19.25) для получения формул сложения бесселевых функций.

Подставим в (19.25) $U=(z-z_0)^{\mu}V_{\mu}[\nu(z-z_0)(\zeta-\zeta_0)]$ $(z_0\neq 0,\ \zeta_0\neq 0)$. Тогда, в силу (19.26), (19.17), легко получим:

$$\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\mu}V_{\mu}[\nu(z-z_0)(\zeta-\zeta_0)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\nu z_0\zeta)^k V_{\mu+k}(\nu z_0\zeta_0)\,L_k(\nu z\zeta). \tag{19.29}$$

Это есть формула сложения для функции V_{μ}. Так как

$$\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\mu}V_{\mu}[\nu(z-z_0)(\zeta-\zeta_0)]$$

является аналитической функцией переменных z, ζ в области $(|z|<|z_0|,\ |\zeta|<|\zeta_0|)$, то ряд (19.29) будет абсолютно и равномерно сходиться внутри этой области. В частности, если $V_{\mu}=L_{\mu}$, то формула (19.29) справедлива внутри области $(|z|<|z_0|,\ |\zeta|<\infty)$.

Положим теперь $\lambda z=re^{-i\varphi}$, $\lambda\zeta=re^{i\varphi}$, $\lambda z_0=\rho e^{-i\psi}$, $\lambda\zeta_0=\rho e^{i\psi}$, где r, ρ, φ, ψ — вообще комплексные числа. Тогда, принимая во внимание формулы (19.18), (19.20), из (19.29) получим:

$$\left(\frac{\rho-re^{-i\theta}}{\rho-re^{i\theta}}\right)^{\frac{\mu}{2}}Z_{\mu}\left(\sqrt{r^2-2r\rho\cos\theta+\rho^2}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}Z_{\mu+k}(\rho)\,J_k(r)\,e^{ik\theta}, \tag{19.30}$$

где $\theta=\varphi-\psi$. Это есть известная формула сложения для цилиндрических функций (см. Ватсон [1], стр. 36); она справедлива при соблюдении условий: $|r|<|\rho|e^{\pm i\theta}|$. Ряд (19.30) сходится абсолютно и равномерно внутри этой области, причём его можно любое число раз дифференцировать почленно. В частности, если $Z_{\mu}=L_{\mu}$, то формула (19.30) имеет место при условии $|\rho||e^{i\theta}|>|r|$.

Пусть теперь $\mu=0$, $Z_0=Y_0$. Тогда из (19.30) легко получим формулу

$$Y_0\left(\sqrt{r^2-2r\rho\cos\theta+\rho^2}\right)=Y_0(\rho)\,J_0(r)+2\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(\rho)\,J_k(r)\cos k\theta, \tag{19.31}$$

справедливую при $|r|<|\rho||e^{i\theta}|$. В частности, если r, ρ, θ — действительные числа, то формула (19.31) имеет место при $r<\rho$.

7°. Найдём теперь разложения решений уравнения (19.1), регулярных внутри кругового кольца $R_0<|z|<R$. Пусть P и Q — точки с полярными координатами r, φ и ρ, ψ. Тогда $Y_0(\lambda r_{PQ})$, где r_{PQ} — расстояние между точками P, Q, очевидно,

будет элементарным решением уравнения (19.1) с полюсом в точке P; мы считаем точку P фиксированной, а точку Q переменной. Рассмотрим теперь круговое кольцо $R_0' < |z| < R'$, где $R_0 < R_0' < R' < R$, содержащее точку P. Тогда для всякого решения $u(x, y)$ уравнения (19.1), регулярного внутри кругового кольца $R_0 < |z| < R$, имеем:

$$u(x, y) = -\frac{1}{4} \int\limits_{|z|=R_0'} \left(u \frac{dY_0(\lambda r_{PQ})}{dn} - Y_0(\lambda r_{PQ}) \frac{du}{dn}\right) ds + \\ + \frac{1}{4} \int\limits_{|z|=R'} \left(u \frac{dY_0(\lambda r_{PQ})}{dn} - Y_0(\lambda r_{PQ}) \frac{du}{dn}\right) ds, \quad (19.32)$$

где n — внешняя нормаль. Отсюда, на основании формулы (19.31), легко получим следующее разложение:

$$u(x, y) = a_0 J_0(\lambda r) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) J_k(\lambda r) + \\ + c_0 Y_0(\lambda r) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi) Y_k(\lambda r), \quad (19.33)$$

где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\rho\varepsilon_k}{4} [\lambda A_k(\rho) Y_k'(\lambda\rho) - A_k'(\rho) Y_k(\lambda\rho)], \\ b_k &= \frac{\rho\varepsilon_k}{4} [\lambda B_k(\rho) Y_k'(\lambda\rho) - B_k'(\rho) Y_k(\lambda\rho)], \\ c_k &= \frac{\rho\varepsilon_k}{4} [\lambda A_k(\rho) J_k'(\lambda\rho) - A_k'(\rho) J_k(\lambda\rho)], \\ d_k &= \frac{\rho\varepsilon_k}{4} [\lambda B_k(\rho) J_k'(\lambda\rho) - B_k'(\lambda\rho) J_k(\lambda\rho)], \end{aligned} \quad (19.34)$$

причём $\varepsilon_0 = 1$ и $\varepsilon_k = 2$ при $k \geqslant 1$, $R_0 < \rho < R$,

$$A_k(\rho) = \int_0^{2\pi} u(\rho, \vartheta) \cos k\vartheta \, d\vartheta, \quad B_k(\rho) = \int_0^{2\pi} u(\rho, \vartheta) \sin k\vartheta \, d\vartheta \quad (19.35)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Нетрудно видеть, что постоянные a_k, b_k, c_k, d_k не зависят от выбора ρ $(R_0 < \rho < R)$.

Ряд (19.33) сходится абсолютно и равномерно внутри кругового кольца $R_0 < |z| < R$; его можно любое число раз дифференцировать почленно.

8°. Рассмотрим теперь многосвязную область D, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, причём

C_0 содержит бесконечную точку, а $C_1, \ldots, C_m$ — ограниченные множества. Пусть z_k — фиксированная точка, принадлежащая C_k $(k=1, \ldots, m)$. Тогда, согласно общему предложению, доказанному в § 18, имеем, что последовательность функций

$$J_k(\lambda r),\ Y_k(\lambda r_j) \tag{19.36}$$

$$(r=|z|,\ r_j=|z-z_j|,\quad k=0, 1, 2, \ldots;\quad j=1, 2, \ldots, m)$$

является полной системой частных решений уравнения (19.1) относительно области D.

9°. Найдём теперь некоторые интегральные представления для функций L_μ, Δ_μ. Так как $z^\mu L_\mu[\nu z(\zeta-\zeta_0)]$ является регулярным решением уравнения (19.1) в плоскости, разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси, то при $\operatorname{Re}\mu>0$, согласно формулам (19.23), (19.24), имеем:

$$z^\mu L_\mu[\nu z(\zeta-\zeta_0)] = \int_0^z \frac{\partial}{\partial t}[t^\mu L_\mu(-\nu\zeta_0 t)]\, L_0[\nu\zeta(z-t)]\, dt. \tag{19.37}$$

Отсюда, в силу (19.12), легко получим формулу:

$$L_\mu(X+Y) = \int_0^1 \sigma^{\mu-1} L_{\mu-1}(X\sigma)\, L_0(Y(1-\sigma))\, d\sigma, \tag{19.38}$$

где $X=-\nu z_0\zeta$, $Y=\nu\zeta z$. Очевидно, эта формула имеет место для любых X, Y при $\operatorname{Re}\mu>0$. В частности, имеем следующие формулы:

$$L_\mu(X) = \int_0^1 \sigma^{\mu-1} L_{\mu-1}(X\sigma)\, d\sigma, \tag{19.39}$$

$$\Gamma(\mu)\, L_\mu(X) = \int_0^1 \sigma^{\mu-1} L_0[X(1-\sigma)]\, d\sigma. \tag{19.40}$$

Из (19.14) имеем:

$$\pi\Delta_0(X) = L_0(X)\lg X + 2\left(\frac{\partial L_\mu(X)}{\partial\mu}\right)_{\mu=0}. \tag{19.41}$$

В силу (19.11), из (19.40) легко найдём:

$$L_\mu(X) = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} - \frac{X}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^1 \sigma^\mu L_1(X(1-\sigma))\, d\sigma \quad (\operatorname{Re}\mu>0). \tag{19.42}$$

Отсюда сразу получим:

$$\left(\frac{\partial L_\mu(X)}{\partial\mu}\right)_{\mu=0} = -\Gamma'(1)\, L_0(X) - X\int_0^1 \lg\sigma\cdot L_1[X(1-\sigma)]\, d\sigma. \tag{19.43}$$

В силу этого (19.41) принимает вид:

$$\pi\Delta_0(X) = L_0(X)\lg\left(Xe^{-2\Gamma'(1)}\right) - 2X\int_0^1 \lg\sigma \cdot L_1[X(1-\sigma)]\,d\sigma. \quad (19.44)$$

Эта формула даёт интегральное представление для $\Delta_0(X)$. Принимая теперь во внимание формулу (19.18), для $Y_0(X)$ получим следующее интегральное представление:

$$\pi Y_0(X) = 2J_0(X)\lg\frac{Xe^{\gamma}}{2} - X\int_0^1 \lg\sigma\,\frac{J_1(X\sqrt{1-\sigma})}{\sqrt{1-\sigma}}\,d\sigma, \quad (19.45)$$

где $\gamma = -\Gamma'(1)$ — постоянная Эйлера; $\gamma = 0{,}5772157\ldots$

На основании формул (19.17) из (19.44) легко можно получить также интегральное представление для $\Delta_n(x)$ в случае любого целого значения n. Используя затем формулы (19.18), мы получим интегральные представления и для функции $Y_n(X)$ через функцию $J_n(X)$.

§ 20. Применения в теории лежандровых функций. В настоящем параграфе мы рассмотрим применения предыдущих результатов в теории функций Лежандра. Мы укажем новый способ получения этих функций, а также выведем формулы сложения для них. Здесь излагаются результаты, содержащиеся в работе автора [22] (см. также [21], [20]).

1°. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + n(n+1)u = 0$$
$$(0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad n = \mathrm{const}), \quad (20.1)$$

с которым мы уже встречались неоднократно (§§ 5, 12°).

Введём новые переменные

$$x = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \quad y = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi. \quad (20.2)$$

Тогда уравнение (20.1) примет вид:

$$\Delta u + \frac{4n(n+1)}{(1+x^2+y^2)^2}u = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \quad (20.3)$$

Для этого уравнения функция Римана (см. § 5, 4°)

$$G(t, \tau, z, \zeta) = P_n\left(\frac{(1-z\zeta)(1-t\tau) + 2z\tau + 2\zeta t}{(1+z\zeta)(1+t\tau)}\right), \quad (20.4)$$

где P_n — функция Лежандра первого рода.

Пусть D — некоторая односвязная область в плоскости z, содержащая начало координат и принадлежащая основной области $\mathfrak{D}$[1]; очевидно, D является стереографической проекцией некоторой области D_0 на поверхности единичной сферы, содержащей северный полюс $\theta=0$. Всякое регулярное в D_0 решение уравнения (20.1), очевидно, будет регулярным решением уравнения (20.3) в области D.

В § 12° мы доказали, что все регулярные в D решения уравнения (20.3) даются формулой:

$$U(z,\zeta)=\alpha_0 P_n\left(\frac{1-z\zeta}{1+z\zeta}\right)+\int_0^z \Phi(t)\,P_n\left(\frac{1-z\zeta+2\zeta t}{1+z\zeta}\right)dt+$$
$$+\int_0^\zeta \Phi^*(\tau)\,P_n\left(\frac{1-z\zeta+2z\tau}{1+z\zeta}\right)d\tau \qquad (20.5)$$
$$(z=x+iy,\ \zeta=x-iy),$$

где α_0 — произвольная постоянная, $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ — произвольные голоморфные функции в D, $\overline{D}$, причём

$$\alpha_0=U(0,0),\quad \Phi(z)=\frac{\partial U(z,0)}{\partial z},\quad \Phi^*(\zeta)=\frac{\partial U(0,\zeta)}{\partial \zeta}. \qquad (20.6)$$

Формулу (20.5) мы можем записать ещё так:

$$U(z,\zeta)=\alpha_0 P_n(X)+\int_0^1 [z\Phi(z\sigma)+\zeta\Phi^*(\zeta\sigma)]\,P_n[X+(1-X)\sigma]\,d\sigma, \qquad (20.7)$$

где $X=(1-z\zeta)(1+z\zeta)^{-1}$. При действительных значениях x, y эта формула годится для любой звёздной области с центром в точке $z=0$. А именно, если T — звёздная область, то любым голоморфным в T, $\overline{T}$ функциям $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ формула (20.7) сопоставляет регулярное в T решение уравнения (20.3).

При $\zeta=\bar z$ формулу (20.7) мы можем записать ещё так:

$$u=\alpha_0 P_n(\cos\theta)+\int_0^1 [z\Phi(z\sigma)+\zeta\Phi^*(\zeta\sigma)]\,P_n[\cos\theta+(1-\cos\theta)\sigma]\,d\sigma$$
$$\left(z=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{i\varphi},\quad \zeta=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\right). \qquad (20.8)$$

---

[1]) В качестве $\mathfrak{D}$ можно взять любую односвязную область, которая удовлетворяет условию: $1+z\zeta\neq 0$, если $z\in\mathfrak{D}$, $\zeta\in\overline{\mathfrak{D}}$. Например, в качестве $\mathfrak{D}$ можно взять или круг $|z|<1$ или полуплоскости $\operatorname{Im} z \gtrless 0$.

Так как

$$P_n(X) = F\left(n+1,\ -n,\ 1,\ \frac{1-X}{2}\right), \tag{20.9}$$

где $F(a, b, c, x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, то, очевидно, будем иметь:

$$P_n^{(m)}(X) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{2^m \cdot m!\,\Gamma(n-m+1)} F\left(n+m+1,\ -n+m,\ m+1,\ \frac{1-X}{2}\right)$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{20.10}$$

Отсюда, на основании известного свойства гипергеометрической функции: $F(\alpha, \beta, \gamma, X) = (1-X)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma, X)$ (см., например, Уиттекер и Ватсон [1], стр. 70), получим:

$$P_n^{(m)}(X) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{m!\,\Gamma(n-m+1)} (1+X)^{-m} F\left(n+1,\ -n,\ m+1, \frac{1-X}{2}\right)$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{20.11}$$

Положим теперь в (20.7)

$$a_0 = 0, \quad \Phi^* = 0, \quad \Phi(z) = \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)},$$

где μ — любое комплексное число, причём временно будем считать $\operatorname{Re}\mu > 0$. Тогда, принимая во внимание формулу

$$F\left(n+1,\ -n,\ \mu+1,\ \frac{1-X}{2}\right) = \mu \int_0^1 \sigma^{\mu-1} P_n[X+(1-X)\,\sigma]\,d\sigma, \tag{20.12}$$

которая легко доказывается при помощи (20.9), из (20.7) получим следующее частное решение уравнения (20.3):

$$\frac{z^\mu}{\Gamma(\mu+1)} F\left(n+1,\ -n,\ \mu+1,\ \frac{z\zeta}{1+z\zeta}\right) \tag{20.13}$$
$$(z = x+iy,\ \zeta = x-iy).$$

Теперь мы можем снять ограничение $\operatorname{Re}\mu > 0$, так как выражение (20.13) удовлетворяет уравнению (20.3) для любого μ.

Подставляя теперь в (20.13)

$$z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}, \quad \zeta = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi},$$

получим следующее частное решение уравнения (20.1):

$$e^{i\mu\varphi} P_{n\mu}(\cos\theta), \tag{20.14}$$

где

$$P_{n\mu}(X) = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \left(\frac{1-X}{1+X}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(n+1,\ -n,\ \mu+1,\ \frac{1-X}{2}\right), \tag{20.15}$$
$$-1 < X < 1.$$

Это есть так называемая *присоединённая функция Лежандра первого рода*. Если μ — целое число, $\mu = m > 0$, то формула (20.15), в силу (20.11), примет вид:

$$P_{nm}(X) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}(1-X^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(X). \tag{20.16}$$

Эта формула отличается лишь постоянным множителем от формулы Фере́рса (см., например, Уиттекер и Ватсон [1], стр. 119).

2°. Формула (20.15) определяет функцию $P_{n\mu}(X)$ лишь в промежутке $-1 < X < 1$. Дадим теперь определение $P_{n\mu}(X)$ для комплексных значений аргумента X. Обозначим через D_1 плоскость z, разрезанную вдоль действительной оси от $+1$ до $-\infty$. Для $X \in D_1$ примем

$$P_{n\mu}(X) = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{X-1}{X+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(n+1,\ -n,\ \mu+1,\ \frac{1-X}{2}\right), \tag{20.17}$$

причём под $[(X-1)/(X+1)]^{\frac{\mu}{2}}$ надо подразумевать главное значение этой функции. Как нетрудно видеть,

$$P_{n\mu}(X) = \frac{1}{2}e^{-\frac{\mu\pi i}{2}} P_{n\mu}(X+i0) + \frac{1}{2}e^{\frac{\mu\pi i}{2}} P_{n\mu}(X-i0) \tag{20.18}$$

$$(-1 < X < 1).$$

При $\mu = m$ (m — целое) формула (20.17) принимает вид:

$$P_{nm}(X) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}\left(\frac{X-1}{X+1}\right)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(X). \tag{20.19}$$

Так как $e^{i\mu\varphi}P_{n\mu}(\cos\theta)$ удовлетворяет уравнению (20.1), то, как нетрудно видеть, $P_{n\mu}(X)$ будет решением уравнения

$$(1-X^2)\frac{d^2Y}{dX^2} - 2X\frac{dY}{dX} + \left[n(n+1) - \frac{\mu^2}{1-X^2}\right]Y = 0. \tag{20.20}$$

Очевидно, этому уравнению удовлетворяет также функция $P_{n,-\mu}(X)$, причём нетрудно доказать, что $P_{n\mu}(X)$ и $P_{n,-\mu}(X)$ линейно независимы, если μ не есть целое число. Если же $\mu = m$ — целое число > 0, то из (20.17) на основании (20.10) и (20.19) легко получим:

$$P_{nm}(X) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} P_{n,-m}(X) \qquad (X \in D_1); \tag{20.21}$$

при $-1 < X < 1$ эта формула принимает вид:

$$P_{nm}(X) = (-1)^m \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} P_{n,\,-m}(X). \qquad (20.22)$$

Таким образом, в случае $\mu = m$ (m — целое число) функции $P_{nm}(X)$ и $P_{n,\,-m}(X)$ линейно зависимы. Следовательно, в этом случае мы должны искать другое решение уравнения (20.20), линейно независимое от $P_{nm}(X)$.

Рассмотрим сперва случай $\mu = 0$ и допустим, что $-1 < X < 1$. Тогда, как мы видели в § 12°, функция

$$Q_n^*(X) = \frac{1}{2} P_n(X) \lg \frac{1+X}{1-X} + (1-X) \int\limits_0^1 \lg t P_n'[X + (1-X)t]\, dt \qquad (20.23)$$

представляет собой линейно независимое от $P_n(X)$ решение уравнения (20.20) при $\mu = 0$. Далее, нетрудно проверить, что при $\mu = m$ уравнению (20.20) удовлетворяет функция

$$Q_{nm}^*(X) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} (1-X^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n^*(X)}{dX^m} \qquad (20.24)$$

$$(m = 1, 2, \ldots),$$

которая, очевидно, линейно не зависит от $P_{nm}(X)$.

Для комплексных значений X, $X \in D_1$, функции Q_n^*, Q_{nm}^* определяем при помощи следующих формул:

$$Q_n^*(X) = \frac{1}{2} P_n(X) \lg \frac{X+1}{X-1} + (1-X) \int\limits_0^1 \lg t P_n'[X + (1-X)t]\, dt, \qquad (20.25)$$

$$Q_{nm}^*(X) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} (X^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n^*(X)}{dX^m}. \qquad (20.26)$$

Очевидно, эти функции голоморфны в области D_1 и в точках $z = \pm 1$ имеют особенности.

3°. Изучим теперь разложения в ряд решений уравнения (20.3) в круге $|z| < R$.

Пусть $u(x, y)$ — регулярное в круге $|z| < R \leqslant 1$ решение уравнения (20.3). Продолжая функцию $u(x, y)$ аналитически в область комплексных значений аргументов x, y, получим аналитическую функцию $U(z, \zeta)$ переменных z, ζ в области ($|z| < R$, $|\zeta| < R$), которую мы можем представить в виде (20.5), где α_0 — постоянная, $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ — голоморфные функции внутри круга $|z| < R$, которые определяются формулами (20.6). Разлагая функции $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ в ряды Маклорена и подставляя последние в (20.5), в силу

(20.12), получим:

$$U(z, \zeta) = \alpha_0 P_n(X) + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k z^k + \beta_k \zeta^k) F\left(n+1, -n, k+1, \frac{1-X}{2}\right), \tag{20.27}$$

где $X = (1 - z\zeta)(1 + z\zeta)^{-1}$,

$$\alpha_0 = U(0, 0), \quad \alpha_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k U}{\partial z^k}\right)_0, \quad \beta_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k U}{\partial \zeta^k}\right)_0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{20.28}$$

причём $(\ )_0$ обозначает значение помещённого внутри скобок выражения при $z = \zeta = 0$. Ряд (20.27) сходится абсолютно и равномерно внутри области $(|z| < R, |\zeta| < R)$, и его можно дифференцировать почленно сколько угодно раз.

Пусть $z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$, $\zeta = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}$, где $0 \leqslant \theta < \theta_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, причём $\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2} = R$. Тогда, принимая во внимание формулу (20.15), ряд (20.27) можно переписать в следующем виде:

$$u(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) P_{nk}(\cos\theta), \tag{20.29}$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0, \\ a_k &= k!(\alpha_k + \beta_k) = \left(\frac{\partial^k U}{\partial z^k}\right)_0 + \left(\frac{\partial^k U}{\partial \zeta^k}\right)_0, \\ b_k &= ik!(\alpha_k - \beta_k) = i\left(\frac{\partial^k U}{\partial z^k}\right)_0 - i\left(\frac{\partial^k U}{\partial \zeta^k}\right)_0. \end{aligned} \tag{20.30}$$

Таким образом, *всякое решение* $u(\theta, \varphi)$ *уравнения* (20.1), *регулярное внутри сферического сегмента* $0 \leqslant \theta < \theta_0$, *можно разложить в ряд вида* (20.29), *который сходится абсолютно и равномерно.* Заметим, что при действительных θ, φ теорема верна для любого θ_0, $0 < \theta_0 \leqslant \pi$. Это легко вытекает из формулы (12°.11).

4°. Разложим теперь в ряд вида (20.27) функцию Римана (20.4). На основании (20.28) имеем:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = P_n\left(\frac{1-t\tau}{1+t\tau}\right), \quad \alpha_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{2\tau}{1+t\tau}\right)^k P_n^{(k)}\left(\frac{1-t\tau}{1+t\tau}\right), \\ &\beta_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{2t}{1+t\tau}\right)^k P_n^{(k)}\left(\frac{1-t\tau}{1+t\tau}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{20.31}$$

В силу (20.11) будем иметь:

$$\begin{gathered}\alpha_k=\frac{\Gamma(n+k+1)\,\tau^k}{k!\,k!\,\Gamma(n-k+1)}F\left(n+1,\ -n,\ k+1,\ \frac{t\tau}{1+t\tau}\right),\\ \beta_k=\frac{\Gamma(n+k+1)\,t^k}{k!\,k!\,\Gamma(n-k+1)}F\left(n+1,\ -n,\ k+1,\ \frac{t\tau}{1+t\tau}\right),\\ (k=1,\ 2,\ \ldots).\end{gathered}\tag{20.32}$$

Таким образом, ряд (20.27) для функции Римана имеет вид:

$$P_n\left(\frac{(1-z\zeta)(1-t\tau)+2z\tau+2\zeta t}{(1+z\zeta)(1+t\tau)}\right)=P_n\left(\frac{1-t\tau}{1+t\tau}\right)P_n\left(\frac{1-z\zeta}{1+z\zeta}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+k+1)}{k!\,k!\,\Gamma(n-k+1)}[(z\tau)^k+(\zeta t)^k]\,F\left(n+1,\ -n,\ k+1,\ \frac{t\tau}{1+t\tau}\right)\times$$
$$\times F\left(n+1,\ -n,\ k+1,\ \frac{z\zeta}{1+z\zeta}\right).\tag{20.33}$$

Эта формула представляет собой *формулу сложения* для функции Лежандра.

Так как $P_n(z)$ имеет единственную особую точку $z=-1$, то, очевидно, ряды Маклорена $\sum\alpha_k z^k$ и $\sum\beta_k\zeta^k$ будут сходиться при соблюдении условий

$$|z\tau|<1,\qquad |\zeta t|<1.\tag{20.34}$$

Следовательно, этими же неравенствами определяются область абсолютной и равномерной сходимости ряда (20.33), который в этой области можно дифференцировать почленно сколько угодно раз.

Нетрудно видеть, что неравенства (20.34) будут всегда соблюдены, если положим например

$$\begin{gathered}z=\sqrt{\frac{X-1}{X+1}}\,e^{i\psi},\qquad \zeta=\sqrt{\frac{X-1}{X+1}}\,e^{-i\psi},\\ t=\sqrt{\frac{X_0-1}{X_0+1}}\,e^{i\psi_0},\qquad \tau=\sqrt{\frac{X_0-1}{X_0+1}}\,e^{-i\psi_0},\end{gathered}\tag{20.35}$$

где X, X_0 — любые комплексные числа, удовлетворяющие условиям: $\operatorname{Re}X>0$, $\operatorname{Re}X_0>0$, а ψ, ψ_0 — любые действительные числа; тогда, принимая во внимание (20.17), приведём формулу (20.33) к виду:

$$P_n\left(XX_0+\sqrt{(X^2-1)(X_0^2-1)}\cos\omega\right)=P_n(X_0)\,P_n(X)+$$
$$+2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n-k+1)}P_{nk}(X_0)\,P_{nk}(X)\cos k\omega,\tag{20.36}$$

где $\omega=\psi-\psi_0$. Отмотим, что как здесь, так и в (20.35) радикалы принимают своё главное значение.

Это есть обычный вид (см., например, Уиттекер и Ватсон [1], стр. 125) формулы сложения для функций Лежандра первого рода; она справедлива для любого действительного числа ω и для любых комплексных чисел X, X_0, удовлетворяющих следующим условиям: $\operatorname{Re} X > 0$, $\operatorname{Re} X_0 > 0$.

Условия (20.34) будут соблюдены также, если положим

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{1-X}{1+X}}\, e^{i\psi}, & \zeta &= \sqrt{\frac{1-X}{1+X}}\, e^{-i\psi}, \\ t &= \sqrt{\frac{1-X_0}{1+X_0}}\, e^{i\psi_0}, & \tau &= \sqrt{\frac{1-X_0}{1+X_0}}\, e^{-i\psi_0}, \end{aligned} \tag{20.37}$$

где X, X_0, ψ, ψ_0 — произвольные действительные числа, причём $-1 < X < 1$, $-1 < X_0 < 1$. Тогда формула (20.33), очевидно, примет вид:

$$\begin{aligned} P_n\left(XX_0 + \sqrt{1-X^2}\sqrt{1-X_0^2}\cos\omega\right) &= P_n(X_0)\, P_n(X) + \\ &+ 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n-k+1)} P_{nk}(X_0)\, P_{nk}(X)\cos k\omega, \end{aligned} \tag{20.38}$$

где $\omega = \psi - \psi_0$. Полагая теперь $X = \cos\varphi$, $X_0 = \cos\varphi_0$, получим:

$$\begin{aligned} P_n(\cos\varphi\cos\varphi_0 + \sin\varphi\sin\varphi_0\cos\omega) &= P_n(\cos\varphi_0)\, P_n(\cos\varphi) + \\ &+ 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n-k+1)} P_{nk}(\cos\varphi)\, P_{nk}(\cos\varphi_0)\cos k\omega. \end{aligned} \tag{20.39}$$

Если n — целое число, то

$$\begin{aligned} P_n(\cos\varphi\cos\varphi_0 + \sin\varphi\sin\varphi_0\cos\omega) &= P_n(\cos\varphi_0)\, P_n(\cos\varphi) + \\ &+ 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} P_{nk}(\cos\varphi)\, P_{nk}(\cos\varphi_0)\cos k\omega. \end{aligned} \tag{20.40}$$

5°. Переходим теперь к выводу формулы сложения для функции $Q_n^*(X)$. Так как функция

$$U(z, \zeta) = Q_n^*\left(\frac{(1-z\zeta)(1-t\tau) + 2z\tau + 2\zeta t}{(1+z\zeta)(1+t\tau)}\right) \quad (z = x+iy,\ \zeta = x-iy) \tag{20.41}$$

при $|z| < 1$, $|\zeta| < 1$, $|t| < 1$, $|\tau| < 1$ является регулярным решением уравнения (20.3) (§ 12°), то её также можно разложить в ряд вида (20.27). Для коэффициентов разложения будем иметь формулы:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= Q_n^*\left(\frac{1-t\tau}{1+t\tau}\right), \quad \alpha_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{2\tau}{1+t\tau}\right)^k Q_n^{*(k)}\left(\frac{1-t\tau}{1+t\tau}\right), \\ \beta_k &= \frac{1}{k!}\left(\frac{2t}{1+t\tau}\right)^k Q_n^{*(k)}\left(\frac{1-t\tau}{1+t\tau}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{20.42}$$

Так как функция $Q_n^*(X)$ имеет особенности в точках $X = \pm 1$, то ряды $\sum \alpha_k z^k$ и $\sum \beta_k \zeta^k$ будут сходиться при соблюдении условий

$$|z| < |t|, \quad |\zeta| < |\tau|. \tag{20.43}$$

Ряд (20.27) в данном случае принимает вид:

$$Q_n^*\left(\frac{(1-z\zeta)(1-t\tau)+2z\tau+2\zeta t}{(1+z\zeta)(1+t\tau)}\right) = Q_n^*\left(\frac{1-t\tau}{1+t\tau}\right) P_n\left(\frac{1-z\zeta}{1+z\zeta}\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[(z\tau)^k + (\zeta t)^k\right]\left(\frac{2}{1+t\tau}\right)^k \times$$
$$\times Q_n^{*(k)}\left(\frac{1-t\tau}{1+t\tau}\right) F\left(n+1,\ -n,\ k+1,\ \frac{z\zeta}{1+z\zeta}\right). \tag{20.44}$$

Это есть формула сложения для функции $Q_n^*(X)$, область пригодности которой определяется неравенствами (20.43); внутри этой области ряд (20.43) сходится абсолютно и равномерно и его можно сколько угодно раз дифференцировать почленно.

Заменим теперь z, ζ, t, τ выражениями (20.35). Тогда получим:

$$Q_n^*(XX_0 + \sqrt{X^2-1}\sqrt{X_0^2-1}\cos\omega) = Q_n^*(X_0) P_n(X) +$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n-k+1)} Q_{nk}^*(X_0) P_{nm}(X) \cos k\omega. \tag{20.45}$$

Согласно условиям (20.43) область применения этой формулы определяется неравенствами:

$$|X-1|\,|X_0+1| < |X+1|\,|X_0-1|, \quad \operatorname{Re} X > 0, \quad \operatorname{Re} X_0 > 0, \tag{20.46}$$

а ω — любое действительное число.

Если подставим вместо z, ζ, t, τ выражения (20.37), то получим формулу:

$$Q_n^*(XX_0 + \sqrt{1-X^2}\sqrt{1-X_0^2}\cos\omega) = Q_n^*(X_0) P_n(X) +$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n-k+1)} Q_{nk}^*(X_0) P_{nk}(X) \cos k\omega. \tag{20.47}$$

Эта формула имеет место для любых действительных чисел ω, X, X_0, если соблюдены неравенства:

$$-1 < X,\ X_0 < 1, \quad (1-X)(1+X_0) < (1+X)(1-X_0). \tag{20.48}$$

Наконец, заметим, что формулы (20.44), (20.45), (20.47) сохраняют силу, если вместо $Q_n^*(X)$ подставить $Q_n(X)$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

В этой главе мы изучим граничные задачи весьма общего характера, связанные с уравнениями вида

$$E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\,u = 0, \qquad (\mathrm{E}_0)$$

причём во всём дальнейшем предполагается, что a, b, c — действительные аналитические функции и ищутся лишь действительные решения этого уравнения.

При помощи полученных в главе I общих представлений решений уравнения (E_0) эти задачи будут сведены к интегральным уравнениям, причём, наряду с уравнениями типа Фредгольма будем пользоваться и так называемыми сингулярными интегральными уравнениями, содержащими интегралы в смысле главного значения по Коши, однако такими, теория которых в настоящее время разработана с достаточной полнотой (см. Мусхелишвили [1]).

Следует отметить, что от сингулярных интегральных уравнений всегда можно перейти к эквивалентным уравнениям Фредгольма при помощи различных приёмов регуляризации, требующие применения лишь элементарных операций, выражающихся в явном виде через заданные функции, которые зависят исключительно от коэффициентов дифференциального уравнения и граничных условий. Однако надобность такого перехода от сингулярных интегральных уравнений к уравнениям Фредгольма возникает лишь в редких случаях, так как для доказательства общих предложений принципиального характера в большинстве случаев проще пользоваться непосредственно сингулярными интегральными уравнениями; переход к уравнениям Фредгольма может оказаться целесообразным лишь в тех случаях, когда требуется проведение численных расчётов.

Все нужные в дальнейшем свойства сингулярных интегральных уравнений доказаны в работах автора [29], [30]; они включены в книгу акад. Н. И. Мусхелишвили [1]. Поэтому для облегчения получения необходимых сведений ниже постоянно будем ссылаться на последнюю книгу.

§ 21. Общая формулировка граничных задач. В этом параграфе мы дадим общую формулировку тех граничных задач, решением которых будем заниматься в дальнейших параграфах настоящей главы.

Возьмём некоторую конечную область T и обозначим её границу через L. Пусть t — какая-нибудь точка кривой L. Если $F(z)$ — некоторая функция точки z, заданная в T, то через $F^+(t)$ мы будем обозначать предельное значение функции $F(z)$, когда z стремится к t из области T. Если же функция $F(z)$ задана также и вне $T+L$, то через $F^-(t)$ будем обозначать предел функции $F(z)$, когда z приближается к t, оставаясь всё время вне $T+L$.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что T — односвязная или многосвязная область класса Ah; это значит, что дополнение T состоит из $m+1$ непересекающихся континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, из которых C_0 содержит бесконечную точку, а $C_1, \ldots, C_m$ — ограниченные множества, причём их границы $L_0, L_1, \ldots, L_m$ — простые замкнутые кривые, гладкие в смысле Гельдера. Граница области T, очевидно, имеет вид: $L=L_0+L_1+\cdots+L_m$, причём в качестве положительного направления на L будем принимать, как обычно, то направление, которое оставляет область T слева. Кроме того, мы будем предполагать, что $T+C_1+\ldots+C_m$ лежит внутри некоторой основной области $\mathfrak{D}$ уравнения (E_0).

В дальнейшем будем пользоваться обозначением:

$$u_{ik}=\frac{\partial^{i+k}u}{\partial x^i \partial y^k} \qquad (i,\ k=0,\ 1,\ldots;\ u_{00}=u). \tag{21.1}$$

Рассмотрим теперь следующую граничную задачу общего вида:

Задача А. *Пусть n — некоторое натуральное число или нуль. Требуется найти регулярное в области T решение $u(x, y)$ уравнения (E_0), удовлетворяющее граничному условию*

$$\mathrm{S}(u)=\sum_{i,\,k=0,\,\ldots,\,n}^{i+k\leqslant n}\left[a^{ik}(t)\,u_{ik}^+(t)+\int_L b^{ik}(t,\,t_1)\,u_{ik}^+(t_1)\,ds_1\right]=f(t), \tag{21.2}$$

где ds_1 — элемент дуги в точке $t_1 \in L$, $a^{ik}(t)$, $f(t)$ — заданные действительные функции точки t, непрерывные на L, $b^{ik}(t, t_1)$ — заданные действительные функции двух точек t, t_1, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$b^{ik}(t,t_1)=\frac{b_0^{ik}(t,\,t_1)}{|t-t_1|^{\alpha}}, \qquad 0\leqslant\alpha<1, \tag{21.3}$$

причём $b_0^{ik}(t, t_1)$ — функции, непрерывные на L.

Мы предполагаем, что все $u_{ik}^{+}(t)$ $(i, k=0, 1, \ldots, n; i+k\leqslant n)$ *существуют и непрерывны всюду на* L. *Мы будем считать также, что условие* (21.2) *выполняется всюду на* L.

Если $f=0$ всюду на L, то условие (21.2) примет вид:

$$S(u)=\sum_{i,\,k=0,\,\ldots,\,n}^{i+k\leqslant n}\left[a^{ik}(t)\,u_{ik}^{+}(t)+\int_{L} b^{ik}(t, t_1)\,u_{ik}^{+}(t_1)\,ds_1\right]=0. \quad (21.4)$$

В этом случае мы имеем *однородную граничную задачу*, которую будем называть задачей A_0.

Задача A обнимает много различных граничных задач математической физики.

В случае $n=0$ условие (21.2) примет вид:

$$a_0(t)\,u^{+}(t)+\int_{L} b_0(t, t_1)\,u^{+}(t_1)\,ds_1=f(t). \quad (21.5)$$

Полагая $a_0(t)\neq 0$ и $b_0(t, t_1)=0$ всюду на L, это равенство можно привести к виду

$$u^{+}(t)=f(t) \qquad (t\in L). \quad (21.6)$$

Соответствующая этому условию граничная задача называется *задачей Дирихле*; её в дальнейшем мы будем обозначать через D.

Другим частным видом задачи A является так называемая *задача Пуанкаре*; её мы получим, если положим $n=1$, $b^{00}=b^{10}=b^{01}=0$. Тогда условие (21.2) примет вид

$$a_0(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{+}+b_0(t)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{+}+c_0(t)\,u^{+}(t)=f(t). \quad (21.7)$$

Впервые к этой задаче пришёл А. Пуанкаре [1] при изучении теории приливов. Он свёл её к сингулярному интегральному уравнению, содержащему интеграл в смысле главного значения по Коши, но решить задачу до конца ему всё же не удалось. Не получила эта задача удовлетворительного решения и в работах Г. Бертрана [1] и Погорцельского [1], которые после Пуанкаре занимались её решением. В настоящее время задача Пуанкаре решена с помощью теории сингулярных интегральных уравнений при весьма общих условиях в работах Б. В. Хведелидзе [2], [3], [4] и автора [13].

§ 22. Решение задачи D для односвязной области. Пусть T — односвязная область класса Ah. Это значит, что её граница L представляет собой простую замкнутую гладкую кривую, удовлетворяющую следующему условию: *угол* $\theta(t)$, *составленный касательной к* L *в точке* t *с осью* ox, *непрерывен по Гельдеру* *вдоль* L. Предположим также, что T принадлежит некоторой основной области $\mathfrak{D}$ уравнения (E_0).

В этом параграфе мы будем заниматься решением следующей задачи:

Задача D. *Требуется найти регулярное в* T *и непрерывное в* $T+L$ *решение* $u(x, y)$ *уравнения*

$$E(u)=\Delta u+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=0, \qquad (E_0)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u^+(t)=f(t) \qquad (t\in L), \qquad (22.1)$$

где f *— заданная действительная функция точки* t *кривой* L *непрерывная на* L.

1°. Так как T принадлежит $\mathfrak{D}$, то искомое решение, согласно формуле (12.8), мы можем представить в виде[1]):

$$u(x, y)=\operatorname{Re}\left[H_0(z)\varphi(z)+\int_0^z H(z, t)\varphi(t)\,dt\right], \qquad (22.2)$$

где $z=x+iy$,

$$H_0(z)=G(z, 0, z, \bar{z}), \qquad (22.3)$$

$$H(z, t)=-\frac{\partial}{\partial t}G(t, 0, z, \bar{z})+B(z, 0)\,G(t, 0, z, \bar{z}),$$

а $\varphi(z)$ — произвольная голоморфная функция в T, которую без ущерба для общности можно подчинить условию:

$$\varphi(0)=\overline{\varphi(0)}. \qquad (22.4)$$

Очевидно, $H_0(z)$ — аналитическая функция переменных x, y в области $\mathfrak{D}$, причём, в силу (4.5), $H_0(z)\neq 0$ всюду в $\mathfrak{D}$; $H(z, t)$ — голоморфная функция аргумента t в области $\mathfrak{D}$ и аналитическая функция переменных x, y в $\mathfrak{D}$.

Мы можем без ущерба для общности предположить, что $A(0, \zeta)=B(z, 0)=0$ (см. § 2, n° 5). Тогда будем иметь:

$$H(z, t)=-\frac{\partial}{\partial t}G(t, 0, z, \bar{z}), \qquad (22.4a)$$

$$\varphi(z)=2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)-u(0, 0). \qquad (22.4b)$$

Предположим, что $f(t)$ на L и $\varphi(z)$ в $T+L$[2]) удовлетворяют условию Гельдера. *Тогда существует единственная действитель-*

[1]) Мы предполагаем, что начало координат лежит в T; это, конечно, не ограничивает общности наших рассуждений.

[2]) Известно, что голоморфная в T и непрерывная в $T+L$ функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая на L условию Гельдера, удовлетворяет этому условию и в замкнутой области $T+L$ (см. Мусхелишвили [1], стр. 58).

ная функция $\mu(t)$ *точки* t *кривой* L, *непрерывная в смысле Гельдера, при помощи которой* $\varphi(z)$ *можно представить в виде*

$$\varphi(z)=\int_L \frac{t\mu(t)\,ds}{t-z} \qquad (z\in T), \tag{22.5}$$

где ds — *элемент дуги кривой* L *в точке* t.

Доказательство этого предложения дано в статье автора [13] (см. также Мусхелишвили [1], стр. 200).

Подставляя вместо $\varphi(z)$ в (22.2) выражение (22.5), получим:

$$u(x, y)=\int_L K(z, t)\mu(t)\,ds, \tag{22.6}$$

где

$$K(z, t)=\operatorname{Re}\left[\frac{tH_0(z)}{t-z}+\int_0^z \frac{tH(z, t_1)}{t-t_1}\,dt_1\right]. \tag{22.7}$$

Здесь $t\in L$, $z\in T$. Очевидно, $K(z, t)$ имеет вид:

$$K(z, t)=\operatorname{Re}\left[\frac{tH_0(z)}{t-z}-tH(z, t)\lg\left(1-\frac{z}{t}\right)+H^*(z, t)\right], \tag{22.8}$$

где

$$H^*(z, t)=\int_0^z \frac{t\,[H(z, t_1)-H(z, t)]}{t-t_1}\,dt_1. \tag{22.9}$$

Ясно, что $H^*(z, t)$ — аналитическая функция переменных x, y в области $\mathfrak{D}$ и голоморфна относительно t также в $\mathfrak{D}$. В дальнейшем под $\lg\left(1-\frac{z}{t}\right)$ будем понимать главное значение этой функции.

При всяком фиксированном $t\in L$, $K(z, t)$, очевидно, представляет собой регулярное решение уравнения (E_0) в области T; оно получается из (22.2) при $\varphi(z)=t/(t-z)$.

Перейдём теперь в формуле (22.6) к пределу, когда точка $z=x+iy$ из области T стремится к некоторой точке t_0 кривой L. Тогда, используя предельные свойства интегралов типа Коши (см., например, Мусхелишвили [1], стр. 47), условие (22.1) примет вид:

$$A(t_0)\mu(t_0)+\int_L K(t_0, t)\mu(t)\,ds=f(t_0), \tag{22.10}$$

где

$$A(t_0)=\operatorname{Re}[i\pi\, t_0\, \overline{t'}\, H_0(t_0)], \tag{22.11}$$

$$K(t_0, t)=\operatorname{Re}\left[\frac{t\,H_0(t_0)}{t-t_0}-tH(t_0, t)\lg\left(1-\frac{t_0}{t}\right)+H^*(t_0, t)\right]. \tag{22.12}$$

Заметим, что как здесь, так и во всём дальнейшем, t' обозначает производную точки t кривой L по соответствующей дуге, т. е. $t' = \frac{dt}{ds}$. Нетрудно видеть, что

$$t' = e^{i\theta(t)}, \tag{22.13}$$

где $\theta(t)$ — угол, составленный положительным направлением касательной к кривой L в точке t с осью ox. Так как по предположению $\theta(t)$ — непрерывная функция в смысле Гельдера на L, то, очевидно, $t'(s)$ также будет непрерывной функцией в смысле Гельдера на L.

Таким образом, для определения неизвестной функции $\mu(t)$ мы получили интегральное уравнение (22.10). Это уравнение — сингулярное, ибо оно содержит интеграл в смысле главного значения по Коши.

Уравнение (22.10) мы можем записать ещё в виде:

$$A(t_0)\mu(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0} + \int_L K_0(t_0, t)\mu(t)\,ds = f(t_0), \tag{22.14}$$

где

$$B(t_0) = i\pi \operatorname{Re}[t_0 \overline{t_0'} H_0(t_0)], \tag{22.15}$$

$$K_0(t_0, t) = K(t_0, t) - \frac{t' B(t_0)}{\pi i (t-t_0)}. \tag{22.16}$$

Нетрудно доказать, что $K_0(t_0, t)$ имеет вид:

$$K_0(t_0, t) = \frac{K^*(t_0, t)}{|t-t_0|^\alpha}, \tag{22.17}$$

где $0 \leqslant \alpha < 1$, а $K^*(t_0, t)$ — непрерывная в смысле Гельдера функция двух точек t_0, t кривой L.

Из (22.11) и (22.15) получим:

$$\begin{aligned} A(t_0) + B(t_0) &= i\pi t_0 \overline{t_0'} H_0(t_0), \\ A(t_0) - B(t_0) &= -i\pi \overline{t_0} t_0' \overline{H_0(t_0)}. \end{aligned} \tag{22.18}$$

Принимая теперь во внимание, что $H_0(t_0) \neq 0$ всюду на L, найдём: *$A+B$ и $A-B$ отличны от нуля всюду на L*; это значит, что уравнение (22.10) — *нормального типа* (см. Мусхелишвили [1], стр. 119). Поэтому к нему применима общая теория сингулярных интегральных уравнений.

На основании (22.18) легко теперь докажем, что индекс уравнения (22.10) (см. Мусхелишвили [1], стр. 123)

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\lg \frac{A(t_0) - B(t_0)}{A(t_0) + B(t_0)}\right]_L = 0. \tag{22.19}$$

Поэтому для уравнения (22.10) имеют место все три основные теоремы Фредгольма (см. Мусхелишвили [1], § 56, стр. 159).

Так как правая часть $f(t)$ уравнения (22.10), по предположению, непрерывна в смысле Гельдера на L, то его решения мы будем искать также в классе функций, удовлетворяющих этому условию.

Пусть $\mu(t)$ — решение уравнения (22.10). Подставляя его в (22.6), получим регулярное в T решение $u(x, y)$ уравнения (E_0), непрерывное по Гельдеру в $T+L$ и удовлетворяющее на L условию (22.1). Следовательно, мы доказали предложение:

Если уравнение (22.10) *имеет решение, то неоднородная граничная задача* D *разрешима и её решение даётся формулой* (22.6), *где* μ — *решение уравнения* (22.10).

Мы укажем теперь один критерий, при соблюдении которого уравнение (22.10) всегда имеет решение.

Как известно, *уравнение* (22.10) *имеет решение для любой правой части* $f(t)$ *тогда и только тогда, когда соответствующее однородное уравнение*

$$A(t_0)\mu(t_0)+\int_L K(t_0, t)\mu(t)\,ds=0 \tag{22.20}$$

не имеет решения. Докажем теперь, что *последнее уравнение не имеет решения, если однородная граничная задача* D_0 *не имеет решения*[1]).

В самом деле, пусть $\mu_0(t)$ — решение уравнения (22.20). Тогда функция

$$u_*(x, y)=\operatorname{Re}\left[H_0(z)\varphi_0(z)+\int_0^z H(z, t)\varphi_0(t)\,dt\right], \tag{22.21}$$

где

$$\varphi_0(z)=\int_L \frac{t\mu_0(t)\,ds}{t-z} \qquad (z\in T), \tag{22.22}$$

очевидно, является непрерывным в $T+L$ решением однородной граничной задачи D_0. Если последняя не имеет решения, то $u_0(x, y)=0$ всюду в T. Но тогда и $\varphi_0(z)=0$ всюду в T, а это имеет место тогда и только тогда, когда $\mu_0(t)=0$ всюду на L (см. Мусхелишвили [1], стр. 200), что и требовалось доказать.

Резюмируя полученный результат, мы можем высказать следующую теорему:

Теорема 1. *Если однородная граничная задача D_0 не имеет решения, то неоднородная задача D всегда разрешима, причём её решение можно представить в виде* (22.6), *где* μ — *решение интегрального уравнения* (22.10).

---

[1]) Тривиальное решение $u=0$ (всюду в T) мы не считаем решением.

2°. Приведём теперь несколько признаков, при соблюдении которых однородная граничная задача D_0 не имеет решения; эти признаки, очевидно, будут также достаточными признаками разрешимости задачи D.

Признак I. *Если $c(x, y) \leqslant 0$ всюду в T, то однородная граничная задача D_0 не имеет решения*[1]).

Признак II. *Если существует регулярное в T решение $v(x, y)$ уравнения* (E_0), *непрерывное и отличное от нуля всюду в $T+L$, то однородная задача D_0 не имеет решения.*

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи D_0. Тогда функция

$$w(x, y)=\frac{u(x, y)}{v(x, y)} \tag{22.23}$$

будет регулярным в T решением уравнения

$$\Delta w+\left(a+2\frac{\partial \lg v}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\left(b+2\frac{\partial \lg v}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial y}=0. \tag{22.24}$$

Но, в силу признака I, $w=0$ всюду в T, ибо на основании (22.23) $w^+=0$ на L. Поэтому $u(x, y)=0$ всюду в T, что и требовалось доказать.

Возьмём теперь в качестве v функцию Римана уравнения (E_0), т. е. положим $v=G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z})$, где $z_0=x_0+iy_0$ — некоторая точка основной области $\mathfrak{D}$.

Так как в точке z_0 функция v обращается в единицу, то найдётся такая окрестность этой точки, внутри которой v положительна; назовём её *окрестностью Римана* точки z_0. Очевидно, *признак* II *будет выполняться для всякой области T, которая вместе со своей границей лежит внутри некоторой окрестности Римана.*

В частности, *если диаметр области T достаточно мал, то T будет расположена вместе со своей границей внутри некоторой окрестности Римана; следовательно, для такой области однородная задача D_0 не имеет решения.*

3°. При выводе сингулярного интегрального уравнения (22.10) мы предположили, что $\varphi(z)$ непрерывна по Гельдеру в $T+L$. Это условие на самом деле имеет место, если однородная задача D_0 не имеет решения.

Действительно, тогда уравнение (22.10) имеет единственное решение $\mu(t)$, непрерывное в смысле Гельдера на L, и граничное значение $\varphi_+(t)$ функции $\varphi(z)$, выраженной интегралом типа Коши (22.5), будет также непрерывной в смысле Гельдера на L (см. Мусхелишвили [1], § 19, стр. 50).

---

[1]) См., например. Курант и Гильберт [1], стр. 309.

Таким образом, мы имеем следующее предложение:

Если однородная задача D_0 *не имеет решения и граничное значение* $u^+(t)$ *регулярного в* T *решения* $u(x, y)$ *уравнения* (E_0) *удовлетворяет на* L *условию Гельдера, то голоморфная в* T *функция* $\varphi(z)$, *выражающая* $u(x, y)$ *в виде* (22.2), *будет непрерывной в* $T+L$ *в смысле Гельдера.*

4°. Докажем теперь более общее предложение.

Теорема 2. *Пусть* $u(x, y)$ — *регулярное в* T *решение уравнения* (E_0). *Пусть* $\varphi(z)$ — *голоморфная в* T *функция, при помощи которой* $u(x, y)$ *выражается в виде* (22.2). *Пусть* γ — *гладкая в смысле Гельдера закрытая дуга кривой* L. *Если предельное значение* $u^+(t)$ *функции* $u(x, y)$ — *непрерывная функция в смысле Гельдера вдоль* γ, *то* $\varphi^+(t)$ *также будет непрерывной функцией в смысле Гельдера на* γ.

Доказательство. Предположим сначала, что дуга γ целиком расположена внутри некоторой окрестности Римана. Тогда мы можем дополнить эту дугу новой дугой γ' до замкнутой кривой L' так, чтобы $L'=\gamma+\gamma'$ была границей некоторой односвязной области T' класса Ah, удовлетворяющей следующим условиям: 1) T' лежит внутри T и 2) $T'+L'$ принадлежит некоторой окрестности Римана. Для этой области согласно признаку II однородная задача D_0 не имеет решения.

Но на L' функция $u(x, y)$, очевидно, непрерывна в смысле Гельдера. Поэтому согласно теореме 1 эту функцию мы можем представить внутри T' в виде:

$$u(x, y)=\int_{L'} \mu'(t) K(z, t)\, ds, \tag{22.25}$$

где $\mu'(t)$ — действительная функция точки t, непрерывная в смысле Гельдера на L'. Но, с другой стороны,

$$u(x, y)=\operatorname{Re}\left[H_0(z)\varphi(z)+\int_0^z H(z, t)\varphi(t)\,dt\right] \tag{22.26}$$

$$(z=x+iy\in T).$$

Сравнивая (22.25) с (22.26), сразу получим, что внутри T' для $\varphi(z)$ имеем представление:

$$\varphi(z)=\int_{L'} \frac{t\mu'(t)\,ds}{t-z} \qquad (z\in T'). \tag{22.27}$$

Отсюда, на основании свойств интегралов типа Коши, получим, что $\varphi^+(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на γ, и теорема доказана в том случае, когда γ лежит внутри некоторой окрестности Римана.

Допустим теперь, что это условие не выполняется. Тогда дугу γ мы можем представить как сумму закрытых дуг $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) общая часть двух соседних дуг γ_i, γ_{i+1} $(i = 1, \ldots, k-1)$ представляет собой также дугу и 2) каждая дуга γ_i $(i = 1, \ldots, k)$ принадлежит некоторой окрестности Римана. На основании доказанного выше предложения на каждой дуге γ_i $(i = 1, \ldots, k)$ функция $\varphi^+(t)$ будет удовлетворять условию Гельдера. Но так как на общей части дуг γ_i, γ_{i+1} функция $\varphi^+(t)$ принимает одинаковые значения, то нетрудно видеть, что $\varphi^+(t)$ будет удовлетворять условию Гельдера на всей дуге γ.

Из теоремы 2, как следствие, вытекает

Теорема 3. *Если $u(x, y)$ — регулярное в T решение уравнения* (E_0), *удовлетворяющее граничному условию*

$$u^+(t) = f(t) \quad (\text{на } L),$$

где $f(t)$ — действительная функция точки $t \in L$, непрерывная по Гельдеру на L, то голоморфная в T функция $\varphi(z)$, при помощи которой $u(x,y)$ выражается в виде:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left[H_0(z)\varphi(z) + \int_0^z H(z, t)\varphi(t)\,dt\right], \tag{22.2}$$

будет непрерывной в смысле Гельдера в $T + L$. Следовательно, $\varphi(z)$ можно представить в виде:

$$\varphi(z) = \int_L \frac{t\mu(t)\,ds}{t - z} \qquad (z \in T), \tag{22.3}$$

где $\mu(t)$ — действительная функция точки $t \in L$, непрерывная в смысле Гельдера на L.

Таким образом, мы доказали, что если граничная задача D имеет решение, то оно представимо в виде (22.6), где μ является решением уравнения (22.10).

Следовательно, *установлена эквивалентность интегрального уравнения* (22.10) *с граничной задачей* D. В частности, *однородная граничная задача* D_0 *эквивалентна однородному интегральному уравнению* (22.20).

Из этой эквивалентности сразу получаем следующую теорему:

Теорема 4. *Неоднородная граничная задача* D *разрешима для любой непрерывной в смысле Гельдера функции $f(t)$ тогда и только тогда, когда однородная граничная задача* D_0 *не имеет решения* (см. стр. 126).

Доказательство. В самом деле, как мы видели выше, задача D всегда разрешима лишь тогда, когда уравнение (22.10) имеет решение для любой правой части. Но это возможно лишь тогда, когда однородное уравнение (22.20) не имеет решения. Последнее же имеет место лишь тогда, когда однородная граничная задача D_0 не имеет решения, что и требовалось доказать.

Из теоремы 3 вытекает

Теорема 5. *Если граничное значение $u^+(t)$ регулярного в T решения $u(x, y)$ уравнения (E_0) удовлетворяет на L условию Гельдера, то $u(x, y)$ будет удовлетворять этому условию всюду в $T+L$.*

Доказательство. Это сразу вытекает из формулы (22.2), так как, согласно теореме 3, функция $\varphi(z)$ непрерывна в смысле Гельдера в $T+L$.

5°. Так как индекс интегрального уравнения (22.10) равен нулю, то, применяя к обеим частям его, например, оператор (см. Мусхелишвили [1])

$$A(t_0)(\ )-\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{(\ )\,dt}{t-t_0}, \tag{22.28}$$

получим эквивалентное ему уравнение Фредгольма

$$\mu(t_0)+\int_L K^*(t_0, t)\,\mu(t)\,ds=f^*(t_0), \tag{22.29}$$

где

$$K^*(t_0, t)=\frac{1}{\pi^2|t_0|^2|H_0(t_0)|^2}\Big[A(t_0)K(t_0, t)-$$

$$-\frac{A(t_0)B(t_0)t'}{\pi i(t-t_0)}-\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{K(t_1, t)\,dt_1}{t_1-t_0}\Big], \tag{22.30}$$

$$f^*(t_0)=\frac{1}{\pi^2|t_0|^2|H_0(t_0)|^2}\Big[A(t_0)f(t_0)-\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}\Big]. \tag{22.31}$$

Нетрудно видеть, что $f^*(t_0)$ непрерывна в смысле Гельдера на L, а $K^*(t_0, t)$ удовлетворяет следующему условию: для любого числа $\varepsilon>0$ функция $|t-t_0|^{\varepsilon}K^*(t_0, t)$ непрерывна в смысле Гельдера.

6°. Задачу D можно также непосредственно привести к уравнению Фредгольма, если вместо (22.5) для представления голоморфной функции $\varphi(z)$ воспользуемся следующей формулой:

$$\varphi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{H_0(t)(t-z)}, \tag{22.32}$$

где $\mu(t)$ — действительная функция, непрерывная в смысле Гельдера на L.

В самом деле, подставляя (22.32) в (22.2) и переходя затем к пределу, когда z из области T стремится к некоторой точке $t_0 \in L$, получим:

$$\mu(t_0) + \int_L M(t_0, t)\,\mu(t)\,ds = f(t_0), \tag{22.33}$$

где

$$M(t_0, t) = \operatorname{Re}\left[\frac{H_0(t_0)\,t'}{\pi i H_0(t)\,(t-t_0)} + \frac{t'}{\pi i H_0(t)} \int_0^{t_0} \frac{H(t_0, t_1)\,dt_1}{t-t_1}\right]. \tag{22.34}$$

Нетрудно видеть, что для любого числа $\varepsilon > 0$ функция $|t_0 - t|^{\varepsilon} M(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гельдера. Поэтому уравнение (22.33) представляет собой уравнение Фредгольма.

Остаётся доказать, что это уравнение эквивалентно задаче D. Для этого достаточно установить возможность *однозначного представления в виде* (22.32) *всякой голоморфной в T и непрерывной в смысле Гельдера в $T+L$ функции $\varphi(z)$, мнимую часть которой можно фиксировать произвольно в некоторой точке области T.* Но это предложение доказать нетрудно.

В самом деле, из (22.32) для $\mu(t)$ получим следующее интегральное уравнение Фредгольма:

$$\mu(t_0) + \int_L M_0(t_0, t)\,\mu(t)\,ds = \operatorname{Re}[H_0(t_0)\,\varphi^+(t_0)], \tag{22.35}$$

где

$$M_0(t_0, t) = \operatorname{Re}\frac{H_0(t_0)\,t'}{\pi i H_0(t)\,(t-t_0)}. \tag{22.36}$$

Докажем теперь, что уравнение (22.35) всегда имеет решение. Пусть $\mu_0(t)$ — решение соответствующего однородного уравнения. Очевидно, функция $\mu_0(t)$ непрерывна в смысле Гельдера на L.

Подставляя $\mu_0(t)$ в (22.32), мы получим голоморфную в T функцию $\varphi_0(z)$, непрерывную в смысле Гельдера в $T+L$, которая, очевидно, будет решением следующей *однородной задачи Гильберта*:

$$\operatorname{Re}[H_0(t_0)\,\varphi_0^+(t_0)] = 0. \tag{22.37}$$

Но $H_0(t_0)$ имеет вид:

$$H_0(t_0) = e^{\alpha(s_0) + i\beta(s_0)} \quad \left(\alpha + i\beta = -\int_0^{\bar{t}_0} A(t_0, \tau)\,d\tau\right). \tag{22.38}$$

Пусть $\omega(x, y)$ — гармоническая в T функция, принимающая на L значения $\beta(s)$. Тогда условие (22.37) можно записать в виде:

$$\operatorname{Re}[e^{ip(t_0)}\varphi_0^+(t_0)] = 0, \qquad (22.39)$$

где $p(z) = \omega(x, y) + i\omega^*(x, y)$, причём ω^* — гармоническая функция, сопряжённая с $\omega(x, y)$. Очевидно, функция $p(z)$ голоморфна в T и непрерывна в смысле Гельдера в $T+L$. Поэтому, как нетрудно видеть,

$$\varphi_0(z) = 2iCe^{-ip(z)}, \qquad (22.40)$$

где C — любая действительная постоянная. Последнее равенство мы можем записать ещё так:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \left[\frac{\mu_0(t)}{H_0(t)} - iCe^{-ip(t)}\right]\frac{dt}{t-z} = 0 \qquad (z \in T).$$

Это значит, что $\mu_0(t)$ имеет вид:

$$\mu_0(t) = iCH_0(t)e^{-ip(t)} + H_0(t)\,\Phi^-(t), \qquad (22.41)$$

где $\Phi^-(t)$ — граничное значение функции $\Phi(z)$, голоморфной в бесконечной области, ограниченной L, причём $\Phi(\infty) = 0$. Из (22.41), в силу (22.38), получим:

$$\operatorname{Im}[e^{i\beta(s)}\Phi^-(t)] = -Ce^{\omega^*(s)}. \qquad (22.42)$$

Пусть $\omega_1(x, y)$ — ограниченная гармоническая функция в бесконечной области, лежащей вне L, принимающая на L значения $\beta(s)$. Пусть $p_1(z) = \omega_1(x, y) + i\omega_1^*(x, y)$, где ω_1^* — гармоническая функция, сопряжённая с ω_1; $p_1(z)$ — ограниченная голоморфная функция в бесконечной области, лежащей вне L, непрерывная в смысле Гельдера вплоть до L. Тогда условие (22.42) можно записать так:

$$\operatorname{Im}[e^{ip_1(t)}\Phi^-(t)] = -Ce^{\gamma(s)}, \qquad (22.43)$$

где $\gamma(s) = \omega^*(s) - \omega_1^*(s)$. Таким образом, мы пришли к следующей задаче Дирихле: *требуется найти в бесконечной области, лежащей вне L, гармоническую функцию $v(x, y)$, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую на границе условию:*

$$v = Ce^{\gamma(s)}. \qquad (22.44)$$

Путём конформного отображения эта задача приведится к аналогичной задаче для внешности единичного круга. Решая эту задачу интегралом Пуассона и принимая во внимание, что v исчезает на бесконечности, будем иметь $C = 0$. Поэтому и (22.43) следует, что $\Phi_1(z) = C_0e^{-ip_1(z)}$, где C_0 — действительна постоянная. Но эта постоянная должна равняться нулю, так как $\Phi_1(z)$ исчезает на бесконечности. Следовательно, из (22.41) имеем, что $\mu_0(t)=0$ всюду на L. Это значит, что интегральное уравнение (22.35) всегда разрешимо и имеет единственное решение, которое, очевидно, удовлетворяет условию Гельдера на L.

Подставляя решение $\mu(t)$ уравнения (22.35) в (22.32), получим голоморфную в T функцию $\varphi_1(z)$, которая с заданной функцией $\varphi(z)$ связана условием

$$\operatorname{Re}\{H_0(t)[\varphi^+(t)-\varphi_1^+(t)]\}=0. \tag{22.45}$$

Отсюда, согласно (22.40), имеем:

$$\varphi(z)-\varphi_1(z)=iCe^{-ip(z)}, \tag{22.46}$$

где C — некоторая действительная постоянная. Мы можем без ущерба для общности считать, что

$$\cos\omega(0, 0)\neq 0. \tag{22.47}$$

В самом деле, в противном случае вместо функции $\varphi(z)$ можно рассмотреть функцию $\psi=i\varphi(z)$, и тогда вместо $H_0(z)$ мы будем иметь функцию $-iH_0(z)$, для которой уже будет реализовано условие (22.47).

Зафиксируем теперь мнимую часть $\varphi(z)$ в точке $z=0$ следующим образом: $\operatorname{Im}\varphi(0)=\operatorname{Im}\varphi_1(0)$. В силу этого, принимая во внимание условие (22.47), из (22.46) сразу получим, что $C=0$. Следовательно, $\varphi(z)=\varphi_1(z)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, окончательно *установлена эквивалентность задачи* D *и интегрального уравнения* (22.33).

7°. До сих пор мы требовали от функции $f(t)$ непрерывности в смысле Гельдера. Мы можем теперь ослабить это требование и ограничиться лишь одной непрерывностью.

Подставляя (22.32) в (22.2), мы получим:

$$u(x, y)=\int_L \mu(t)M(z, t)\,ds, \tag{22.48}$$

где

$$M(z, t)=\operatorname{Re}\left[\frac{H_0(z)t'}{\pi iH_0(t)(t-z)}+\frac{t'}{\pi iH_0(t)}\int_0^z\frac{H(z, t_1)\,dt_1}{t-t_1}\right]. \tag{22.49}$$

Нетрудно доказать, что *если $\mu(t)$ — непрерывная (действительная) функция на L, то $u(x, y)$ будет регулярным в T и непрерывным в $T+L$ решением уравнения* (E_0), *причём граничное значение $u(x, y)$ имеет вид*:

$$u^+=\mu(t_0)+\int_L M(t_0, t)\mu(t)\,ds. \tag{22.50}$$

Можно доказать и обратное предложение: *всякое регулярное в T и непрерывное в $T+L$ решение $u(x, y)$ уравнения* (E_0) *можно представить в виде* (22.48), *где* $\mu(t)$ — *действительная функция, непрерывная на* L.

В самом деле, если задача D_0 не имеет решения, то тогда это вытекает из уравнения (22.35), эквивалентного задаче D для любой непрерывной функции $f(t)$. В этом случае однородное уравнение, соответствующее (22.35), не имеет решения. Нетрудно доказать справедливость высказанного предложения и в общем случае.

Заметим, наконец, что *теорема 4 остаётся в силе, если из неё выкинем фразу «в смысле Гельдера»*.

§ 23. Критерий разрешимости задачи D. Из интегрального уравнения (22.10) мы можем получить один важный необходимый и достаточный критерий разрешимости задачи D.

1°. Выпишем уравнение (22.10):

$$A(t_0)\mu(t_0)+\int_L K(t_0, t)\mu(t)\,ds=f(t_0), \tag{23.1}$$

где

$$A(t_0)=\operatorname{Re}[\pi i t_0 \overline{t_0'} H_0(t_0)], \tag{23.2}$$

$$K(t_0, t)=\operatorname{Re}\left[\frac{tH_0(t_0)}{t-t_0}+\int_0^{t_0}\frac{tH(t_0, t_1)\,dt_1}{t-t_1}\right]. \tag{23.3}$$

Рассмотрим союзное однородное уравнение:

$$A(t_0)\nu(t_0)+\int_L K(t, t_0)\nu(t)\,ds=0, \tag{23.4}$$

где $\nu(t)$ — действительная функция точки $t \in L$, непрерывная в смысле Гельдера на L, и

$$K(t, t_0)=\operatorname{Re}\left[\frac{t_0 H_0(t)}{t_0-t}+\int_0^{t}\frac{t_0 H(t, t_1)\,dt_1}{t_0-t_1}\right]. \tag{23.5}$$

Введём теперь обозначение:

$$\Phi(z)=\int_L \nu(t)\,\Omega(t, z)\,ds, \tag{23.6}$$

где

$$\Omega(t, z)=\frac{zH_0(t)}{z-t}+\int_0^{t}\frac{zH(t, t_1)\,dt_1}{z-t_1}. \tag{23.7}$$

Очевидно, для любой интегрируемой функции $\nu(t)$ интеграл (23.6) представляет собой голоморфную функцию от z в бесконечной области T', лежащей вне L. Для достаточно больших z, очевидно, имеем разложение:

$$\Omega(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t) z^{-k}, \tag{23.8}$$

где

$$X_k(t) = H_0(t) t^k + \int_0^t H(t, t_1) t_1^k dt_1 \tag{23.9}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что функции $X_k(z)$ $(z = x + iy)$ являются решениями уравнения (E_0), регулярными в основной области $\mathfrak{D}$.

Подставляя (23.8) в (23.6), для достаточно больших z получим:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \int_L \nu(t) X_k(t) ds. \tag{23.10}$$

Отсюда имеем:

$$\Phi(\infty) = \int_L \nu(t) X_0(t) ds. \tag{23.11}$$

Но на основании (23.9) и (22.4a) имеем:

$$X_0(t) = G(0, 0, t, \bar{t}). \tag{23.12}$$

Следовательно, $X_0(t)$ — действительная функция точки t. Поэтому так как $\nu(t)$ — также действительная функция, то $\Phi(\infty)$ будет действительной постоянной.

Принимая теперь во внимание обозначения (23.6) и (23.7), можно записать интегральное уравнение (23.4) в виде:

$$\operatorname{Re} \Phi^-(t_0) = 0. \tag{23.13}$$

Так как $\Phi(z)$ голоморфна в области T' и принимает на бесконечности действительное значение, то из (23.13) получим, что $\Phi(z) = 0$ всюду в T'.

Таким образом, имеем: *всякое (действительное) решение уравнения (23.4) удовлетворяет условию*

$$\int_L \nu(t) \Omega(t, z) ds = 0, \tag{23.14}$$

где z — любая точка, лежащая вне $T + L$, и, наоборот, если действительная функция $\nu(t)$, непрерывная на L, удовлетворяет *условию* (23.14) *для любой точки* z, *лежащей вне* $T+L$, *то* $\nu(t)$ *будет решением уравнения* (23.4).

2°. Назовём функцию $\Omega(t, z)$ *ядром граничной задачи* D; оно зависит от двух точек t и z. Пусть z—фиксированная точка, лежащая вне $T+L$. Тогда, как видно из формулы (23.7), $\Omega(t, z)$ является относительно аргумента t регулярным решением уравнения (E_0) в области T.

Назовём ядро $\Omega(t, z)$ *замкнутым относительно* области T, если не существует действительной функции $\nu(t)$, непрерывной на L, которая не равна тождественно нулю и удовлетворяет условию (23.14) для любой точки z, лежащей вне $T+L$.

Ядро $\Omega(t, z)$ *будет замкнутым относительно* T, *очевидно, тогда и только тогда, когда однородное интегральное уравнение* (23.4) *не имеет решения.*

Ядро $\Omega(t, z)$ назовём *почти замкнутым* относительно области T, если существует лишь конечное число $n>0$ линейно независимых действительных функций точки t, непрерывных на L и удовлетворяющих условию (23.14) для любой точки z, лежащей вне $T+L$; число n назовём *дефектом ядра.*

Так как *условие* (23.14) *и уравнение* (23.4) *эквивалентны, то, очевидно,* $\Omega(t, z)$ — *либо замкнутое, либо почти замкнутое ядро относительно* T; почти замкнутым оно будет только тогда, когда однородное уравнение (23.4) имеет отличные от нуля решения; при этом *дефект ядра равен числу линейно независимых решений уравнения* (23.4).

В предыдущем параграфе мы доказали, что граничная задача D эквивалентна интегральному уравнению (23.1). Но последнее разрешимо лишь тогда, когда союзное однородное уравнение (23.4) не имеет решения. Это значит, что справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Граничная задача* D *разрешима для любой функции* $f(t)$, *непрерывной на* L, *тогда и только тогда, когда ядро* $\Omega(t, z)$ *является замкнутым относительно области* T.

3°. Приведём теперь несколько критериев замкнутости ядра $\Omega(t, z)$.

Условие (23.14), как нетрудно видеть, эквивалентно любому из следующих условий:

$$\int_L \nu(t)\,\Omega(t, z_k)\,ds=0 \qquad (k=1, 2, \ldots), \tag{23.15}$$

$$\int \nu(t)\left[\frac{\partial^k\Omega(t, z)}{\partial z^k}\right]_{z=z'} ds=0 \qquad (z'\in T',\ k=0, 1, \ldots), \tag{23.16}$$

$$\int \nu(t)\,X_k(t)\,ds=0 \qquad (k=0, 1, \ldots), \tag{23.17}$$

где $\{z_k\}$ — любая последовательность точек области T', которая имеет по крайней мере одну предельную точку в T'; z' — некоторая фиксированная точка в T'; $\{X_k(t)\}$ — система частных решений уравнения (E_0), заданная формулами (23.9).

Пусть имеется какая-нибудь последовательность функций $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, ..., непрерывных на L и принимающих вообще комплексные значения.

Если не существует непрерывной на L действительной функции $\nu(t)$, которая не равна тождественно нулю и удовлетворяет условиям

$$\int\limits_L \nu(t)\,\omega_k(t)\,ds = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{23.18}$$

то последовательность $\{\omega_k\}$ назовём *замкнутой относительно кривой* L.

Если же существует лишь конечное число n линейно независимых действительных непрерывных функций $\nu_1(t)$, ..., $\nu_n(t)$ точки t кривой L, удовлетворяющих условиям (23.18), то последовательность $\{\omega_k(t)\}$ мы назовём *почти замкнутой* относительно кривой L; число n будем называть *дефектом* последовательности $\{\omega_k\}$.

Очевидно, если последовательность $\{\omega_k\}$ почти замкнута относительно L, то к ней можно прибавить конечное число линейно независимых непрерывных на L функций так, чтобы полученная последовательность была замкнутой относительно L.

Мы можем теперь высказать следующее предложение:

Теорема 2. *Замкнутость ядра $\Omega(t, z)$ относительно области T либо замкнутость относительно L одной из следующих систем функций:*

$$\{\Omega(t, z_k)\}, \quad \left\{\frac{\partial^k \Omega(t, z')}{\partial z'^k}\right\}, \quad \{X_k(t)\}, \tag{23.19}$$

влечёт за собой замкнутость всех остальных.

На основании этого предложения теорему 1 мы можем изложить ещё так:

Разрешимость граничной задачи D *для любой функции $f(t)$, непрерывной в смысле Гельдера на L, влечёт за собой замкнутость ядра $\Omega(t, z)$ относительно области T и, следовательно, замкнутость любой из систем функций* (23.19) *относительно кривой L и, наоборот, замкнутость ядра Ω относительно области T или замкнутость любой из систем функций* (23.19) *относительно кривой L означает, что граничная задача* D *разрешима для любой функции $f(t)$, непрерывной на L.*

4°. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0, \tag{23.20}$$

где λ^2 — действительная постоянная. Для уравнения (23.20) ядро $\Omega(t, z)$ имеет вид:

$$\Omega(t, z) = \frac{z}{z-t} - \int_0^t \frac{z}{z-t_1} \frac{\partial}{\partial t_1} J_0\left(\lambda \sqrt{\bar{t}(t-t_1)}\right) dt_1. \tag{23.21}$$

Согласно (23.9) функции $X_k(t)$ с точностью до постоянных множителей будут иметь вид:

$$X_k(t) = J_k(\lambda r) e^{ik\theta} \tag{23.22}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots;\ r = |t|,\ \theta = \arg t).$$

Пусть для уравнения (23.20) задача D_0 относительно области T не имеет решения. Согласно вышеполученным результатам для этого необходимо и достаточно, чтобы система функций (23.22) была замкнутой относительно кривой L. В частности, если $\lambda = i\nu$, где ν — действительное число, то задача D_0 не имеет решения. Следовательно, *система функций*

$$I_k(\nu r) e^{ik\theta} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{23.23}$$

замкнута относительно любой простой замкнутой гладкой кривой L.

§ 24. Решение задачи D для многосвязной области. Функция Грина. Переходим теперь к изучению задачи D в случае многосвязной области T, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, причём C_0 содержит бесконечную точку, а $C_1, \ldots, C_m$ — ограниченные множества. Пусть $L_0, L_1, \ldots, L_m$ - границы $C_0, C_1, \ldots, C_m$ соответственно; мы предполагаем, что они — простые замкнутые кривые, гладкие в смысле Гельдера, т. е. T — область класса Ah. Пусть L — граница T; $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$; положительным направлением на L будем считать то, которое оставляет область T слева. Введём следующие обозначения: $T_0 = T + C_1 + \ldots + C_m$; $T_k = \mathfrak{D} - C_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$; S_k — бесконечная область, лежащая вне C_k $(k = 1, \ldots, m)$. Мы предполагаем, что $T_0 \subset \mathfrak{D}$.

В этом параграфе мы изучаем следующую задачу:

Задача D. *Требуется найти регулярное в области T решение $u(x, y)$ уравнения (E_0), непрерывное в $T + L$ и удовлетворяющее условию*

$$u^+(t) = f(t) \qquad (t \in L). \tag{24.1}$$

где $f(t)$ — заданная действительная функция точки $t \in L$, непрерывная в смысле Гельдера на L.

1°. Согласно формуле (12.12) любое регулярное в T действительное решение $u(x, y)$ уравнения (E_0) мы можем представить в виде:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \omega(x, y, x_k, y_k) + \\ + \operatorname{Re}\left\{\mathfrak{H}[0, p(z)] + \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{H}[\bar{z}_k, q_k(z) - \\ - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \overline{q_k(\tau)}\, \overline{H(\tau, \bar{z}_k, z_k, \bar{z})}\, d\tau\right) \lg(z - \bar{z}_k)]\right\}, \quad (24.2)$$

где $p(z)$ — голоморфная в T_0 функция, удовлетворяющая условию $p(0) = \overline{p(0)}$; $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — действительные постоянные; $q_1(z), \ldots$ $\ldots, q_m(z)$ — голоморфные функции в $S_1, \ldots, S_m$ соответственно, исчезающие на бесконечности; $z_1, \ldots, z_m$ — фиксированные точки на $C_1, \ldots, C_m$ соответственно; $\omega(x, y, x_k, y_k)$ — элементарное решение уравнения (E_0) с полюсом в точке $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$; наконец, мы пользуемся обозначениями:

$$\mathfrak{H}[z_0, \varphi(z)] = G(z, \bar{z}_0, z, \bar{z})\varphi(z) - \int_0^z \varphi(t) H(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, dt, \quad (24.3)$$

где

$$H(t, \tau, z, \zeta) = \frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau, z, \zeta) - B(t, \tau) G(t, \tau, z, \zeta); \quad (24.4)$$

мы предполагаем, что начало координат принадлежит области T; это, конечно, не ограничивает общности рассуждений.

Так как граничное значение $u^+(t)$ искомого решения $u(x, y)$, по условию, является непрерывной функцией в смысле Гельдера на L, то согласно теореме 2 предыдущего параграфа граничные значения функций $p(z)$, $q_1(z), \ldots, q_m(z)$ также должны быть непрерывными в смысле Гельдера на L; относительно функции $p(z)$ это уже доказано, а для функций $q_1, \ldots, q_m$ предложение доказывается совершенно аналогично.

2°. Докажем теперь следующую лемму:

Лемма. *Пусть L — простая замкнутая кривая, гладкая в смысле Гельдера. Пусть T и T' — конечная и бесконечная области, ограниченные кривой L. Если функция $F(z)$ голоморфна в T', исчезает на бесконечности, непрерывна в $T' + L$ и удовлетворяет условию Гельдера на L, то существует единственная действительная функция $\mu(t)$ точки $t \in L$, непрерывная в смысле Гель-*

дера на L, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$F(z)=\int_L \frac{t\mu(t)\,ds}{t-z} \qquad (z\in T') \tag{24.5}$$

и

$$\int_L \mu(t)\,ds=C, \tag{24.6}$$

где C — некоторая заданная действительная постоянная. Мы предполагаем, что начало координат лежит в области T.

Доказательство. Переходя к пределу в (24.5), когда z из области T' стремится к некоторой точке t_0 кривой L, получим:

$$-i\pi t_0\overline{t_0'}\mu(t_0)+\int_L \frac{t\mu(t)\,ds}{t-t_0}=F^-(t_0). \tag{24.7}$$

Отсюда имеем:

$$-\operatorname{Re}[i\pi t_0\overline{t_0'}]\,\mu(t_0)+\int_L \mu(t)\operatorname{Re}\left(\frac{t}{t-t_0}\right)ds=\operatorname{Re}F^-(t_0). \tag{24.8}$$

Это есть сингулярное интегральное уравнение нормального типа, индекс которого равен нулю (см. Мусхелишвили [1], стр. 123). Мы теперь докажем, что оно разрешимо. Для этого мы должны доказать, что выполняется условие

$$\operatorname{Re}\int_L \nu(t)\,F^-(t)\,ds=0, \tag{24.9}$$

где $\nu(t)$ — любое решение союзного однородного уравнения:

$$-\operatorname{Re}[i\pi t_0\overline{t_0'}]\,\nu(t_0)+\int_L \nu(t)\operatorname{Re}\left(\frac{t_0}{t_0-t}\right)ds=0. \tag{24.10}$$

Очевидно, $\nu(t)$ — действительная функция точки t, непрерывная в смысле Гельдера на L. Но последнее уравнение равносильно условию:

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t_0)=0, \tag{24.11}$$

где

$$\Phi(z)=z\int_L \frac{\nu(t)\,ds}{t-z} \qquad (z\in T). \tag{24.12}$$

Так как решение уравнения (24.10) удовлетворяет условию Гельдера, то $\Phi(z)$ — голоморфная функция в T, непрерывная в $T+L$. Поэтому согласно (24.11) имеем: $\Phi(z)=ic_0$ (c_0 — действительная постоянная). Но $\Phi(0)=0$ и, следовательно, $\Phi(z)=0$ всюду в T. Отсюда следует, что $\nu(t)=t'(s)\,\Psi^-(t)$, где $\Psi(z)$ — голоморфная функция в T', непрерывная в $T'+L$ и исчезающая на бесконечности. Подставляя теперь это выражение вместо $\nu(t)$ в (24.9), легко убедимся, что последнее условие действительно выполняется; а это значит, что уравнение (24.8) разрешимо.

Пусть $\mu(t)$ — решение уравнения (24.8); $\mu(t)$ — действительная функция $t \in L$, непрерывная в смысле Гельдера, так как правая часть $\operatorname{Re} F^-(t)$ уравнения (24.8) по условию непрерывна в смысле Гельдера. Рассмотрим функцию

$$F_1(z) = \int\limits_L \frac{t\,\mu(t)\,ds}{t-z} \qquad (z \in T'). \tag{24.13}$$

Тогда функция $F_0(z) = F(z) - F_1(z)$, очевидно, голоморфна в T', исчезает на бесконечности, непрерывна в $T'+L$ и, в силу уравнения (24.8), $\operatorname{Re} F_0^-(t) = 0$ на L. Следовательно, $F_0(z) = 0$ всюду в T', т. е. $F_1(z) = F(z)$. Итак, доказано существование действительной функции $\mu(t)$, непрерывной в смысле Гельдера на L, при помощи которой функция $F(z)$ выражается в виде (24.5).

Мы теперь докажем, что функцию $\mu(t)$ можно дополнительно подчинить условию (24.6); тогда она определится однозначно.

Допустим, что существуют две действительные функции $\mu(t)$ и $\mu_1(t)$, непрерывные в смысле Гельдера на L, которые удовлетворяют условию (24.5); очевидно, $\mu(t)$ и $\mu_1(t)$ — решения уравнения (24.8). Тогда их разность: $\mu_0(t) = \mu(t) - \mu_1(t)$, будет решением однородного уравнения, соответствующего (24.8), которое равносильно уравнению

$$\int\limits_L \frac{t\,\mu_0(t)\,ds}{t-z} = 0 \qquad (z \in T'). \tag{24.14}$$

Следовательно, $t\,\overline{t'}\,\mu_0(t)$ является граничным значением некоторой функции $\Phi_0(z)$, голоморфной внутри T; функция $\Phi_0(z)$, очевидно, будет непрерывной в смысле Гельдера в $T+L$ и на границе будет удовлетворять условию:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\Phi_0^+(t)}{t\,\overline{t'}}\right) = 0 \qquad (t \in L). \tag{24.15}$$

Но это есть частный вид так называемой *задачи Гильберта* (см., например, Мусхелишвили [1], стр. 104); найдём её решение. Пусть $t = re^{i\vartheta}$, $t'(s) = e^{i\theta}$. Тогда условие (24.15) примет вид:

$$\operatorname{Im}\left[e^{i(\theta-\vartheta)}\Phi_0^+(t)\right] = 0. \tag{24.16}$$

Пусть $\omega_0(x, y)$ — гармоническая функция внутри T, непрерывная в $T+L$ и удовлетворяющая на L условию: $\omega_0^+ = \theta - \vartheta$; очевидно, существует единственная такая гармоническая функция, и она удовлетворяет условию Гельдера в $T+L$. Пусть ω_0^* — сопряжённая с ω_0 гармоническая функция; мы её можем подчинить условию: $\omega_0^*(0, 0) = 0$. Обозначим через $p_0(z)$ голоморфную функцию $\omega_0 + i\omega_0^*$; как известно, $p_0(z)$ непрерывна в смысле Гельдера в $T + L$. Докажем теперь, что

$$\cos \omega_0 (0, 0) = 0. \tag{24.17}$$

В силу определения $p_0(z)$, имеем:

$$\operatorname{Im}\left[\frac{e^{-ip_0(t)}}{tt'}\right] = 0 \quad (t \in L).$$

Умножим обе части этого равенства на ds и проинтегрируем вдоль L. Тогда получим:

$$\operatorname{Im}\left[2\pi i e^{-ip_0(0)}\right] = 0.$$

Отсюда, так как $p_0(0) = \omega_0(0, 0)$, сразу вытекает (24.17), что и требовалось доказать.

Мы можем теперь записать равенство (24.16) в следующем виде:

$$\operatorname{Im}\left[e^{ip_0(t)}\Phi_0^+(t)\right] = 0 \quad (t \in L).$$

Отсюда имеем:

$$\Phi_0(z) = C' e^{-ip_0(z)} \quad (z \in T), \tag{24.18}$$

где C' — произвольная действительная постоянная. Но мы видели выше, что $t\overline{t'}\mu_0(t) = \Phi_0^+(t)$. Поэтому

$$\mu_0(t) = C' \frac{e^{-ip_0(t)}}{t\overline{t'}} \quad (t \in L). \tag{24.19}$$

Легко видеть, что это выражение представляет собой общее решение уравнения (24.14).

Таким образом, общее решение уравнения (24.8) имеет вид:

$$\mu(t) = \mu_1(t) + C' \frac{e^{-ip_0(t)}}{t\overline{t'}} \quad (t \in L), \tag{24.20}$$

где $\mu_1(t)$ — какое-нибудь частное решение этого уравнения, а C' — произвольная действительная постоянная. Подставляя теперь (24.20) в (24.6) и принимая во внимание (24.17), найдём:

$$C' = -\frac{1}{2\pi \sin \omega_0(0,0)} \int_L \mu_1(t)\, ds + \frac{C}{2\pi \sin \omega_0(0, 0)}, \tag{24.21}$$

причём, очевидно, $\sin \omega_0(0, 0) = \pm 1$. Подставляя это выражение в (24.20), мы получим вполне определённую действительную функцию $\mu(t)$, непрерывную в смысле Гельдера на L и удовлетворяющую условиям (24.5) и (24.6); этим лемма полностью доказана[1]).

3°. Вернёмся теперь к нашей задаче D. На основании доказанной леммы мы можем искомые постоянные $\beta_1, \ldots, \beta_m$ и функции $q_1(z), \ldots, q_m(z)$ представить в следующем виде:

$$q_k(z) = \int\limits_{L_k} \frac{(t-z_k)\,\mu_k(t)\,ds}{t-z} \qquad (z \in S_k,\ z_k \in C_k), \tag{24.22}$$

$$\beta_k = \int\limits_{L_k} \mu_k(t)\,ds \qquad (k=1, \ldots, m), \tag{24.23}$$

где $\mu_k(t)$ — действительная функция, непрерывная в смысле Гельдера на L_k, которая определяется единственным образом при помощи $q_k(z)$ и β_k $(k=1, \ldots, m)$.

Далее, функцию $p(z)$ при соблюдении условия $p(0)=\overline{p(0)}$ мы можем представить в виде:

$$p(z) = \int\limits_{L_0} \frac{t\,\mu_0(t)\,ds}{t-z} \qquad (z \in T_0), \tag{24.24}$$

где $\mu_0(t)$ — действительная функция точки $t \in L_0$, непрерывная в смысле Гельдера на L_0; эта функция определяется единственным образом при помощи $p(z)$.

Подставляя теперь выражения (24.22), (24.23) и (24.24) в (24.2), легко получим:

$$u(x, y) = \\ = \sum_{k=1}^{m} \omega(x, y, x_k, y_k) \int\limits_{L_k} \mu_k(t)\,ds + \sum_{k=0}^{m} \int\limits_{L_k} K_k(z, t)\,\mu_k(t)\,ds, \tag{24.25}$$

где

$$K_k(z, t) = G(z, z_k, z, \bar{z})\,\Omega_k(z, t) - \int\limits_0^z \Omega_k(t_1, t)\,H(t_1, \bar{z}_k, z, \bar{z})\,dt_1 \tag{24.26}$$
$$(k=0, 1, \ldots, m);$$

здесь
$$z_0 = 0, \quad z_k \in C_k \qquad (k=1, \ldots, m),$$

$$\Omega_0(z, t) = \frac{t}{t-z}, \tag{24.27}$$

$$\Omega_k(z, t) = \frac{t-z_k}{t-z} + \overline{(\bar{t}-\bar{z}_k) H(t, \bar{z}_k, z_k, \bar{z})}\,\lg(z-z_k) \tag{24.28}$$
$$(k=1, 2, \ldots, m).$$

---

[1]) Лемму мы доказали в предположении, что начало координат лежит внутри L; если это не так, то тогда в формуле (24.5) вместо $t\mu(t)$ надо писать $(t-z_0)\,\mu(t)$, где z_0 — некоторая фиксированная точка области T.

Введём теперь обозначения:

$$\mu(t)=\mu_k(t) \quad \text{при} \quad t\in L_k \quad (k=0,1,\ldots,m), \tag{24.29}$$

$$\begin{gathered} K(z,t)=K_0(z,t) \quad \text{при } t\in L_0,\ z\in T, \\ K(z,t)=K_k(z,t)+\omega(x,y,x_k,y_k) \quad \text{при } t\in L_k,\ z\in T \\ (k=1,\ldots,m). \end{gathered} \tag{24.30}$$

Очевидно, $\mu(t)$ определена на L и удовлетворяет условию Гельдера; $K(z,t)$ определена для любых $t\in L$, $z\in T$, причём относительно точки z она является регулярным в T решением уравнения (E_0). Мы можем теперь (24.25) записать короче так:

$$u(x,y)=\int_L K(z,t)\mu(t)\,ds. \tag{24.31}$$

Таким образом, *формула* (24.31), *где* $\mu(t)$ — *произвольная действительная функция точки* $t\in L$, *непрерывная в смысле Гельдера, даёт все регулярные в* T *решения уравнения* (E_0), *граничные значения которых на* L *непрерывны в смысле Гельдера, причём* $\mu(t)$ *определяется однозначно через* $u(x,y)$.

Если $u(x,y)$ удовлетворяет граничному условию (24.1), то $\mu(t)$, как нетрудно видеть, будет удовлетворять следующему интегральному уравнению:

$$A(t_0)\mu(t_0)+\int_L K(t_0,t)\,\bar{\mu}(t)\,ds=f(t_0) \quad (t_0\in L), \tag{24.32}$$

где при $t_0\in L_k$ $(k=0,1,\ldots,m)$

$$\begin{gathered} A(t_0)=\operatorname{Re}\left[i\pi(t_0-z_k)\,\overline{t_0'}\,G(t_0,\bar{z}_k,t_0,\bar{t}_0)\right] \\ (z_0=0,\ z_k\in C_k,\ k=1,\ldots,m). \end{gathered} \tag{24.33}$$

Нетрудно проверить, что сингулярное интегральное уравнение (24.32) — нормального типа и что его индекс $\varkappa=0$.

Очевидно, что интегральное уравнение (24.32) эквивалентно граничной задаче D; в частности, однородная граничная задача D_0 эквивалентна однородному интегральному уравнению, соответствующему (24.32) $(f=0)$. Поэтому и в случае многосвязной области имеет место следующее предложение:

Если однородная граничная задача D_0 *не имеет решения, то неоднородная задача* D *всегда разрешима; в этом случае всегда разрешимо уравнение* (24.32) *и, подставляя его решение в* (24.31), *получим решение граничной задачи* D.

Заметим, что последняя теорема сохраняет силу и для случая непрерывных граничных заданий. Вообще нетрудно видеть, что задачу D и в случае многосвязной области можно непосредственно свести к уравнению Фредгольма.

4°. Введём теперь в рассмотрение так называемую функцию Грина. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — некоторая фиксированная точка области T. Пусть

$$\Gamma(z_0, z) = \omega(x_0, y_0, x, y) - \Gamma_0(x_0, y_0, x, y), \tag{24.34}$$

где $\omega(x_0, y_0, x, y)$ — нормированное стандартное элементарное решение сопряжённого уравнения (E_0^*) с полюсом в точке (x_0, y_0), а $\Gamma_0(x_0, y_0, x, y)$ — регулярное в T и непрерывное в $T+L$ решение уравнения (E_0^*), удовлетворяющее граничному условию

$$\Gamma_0(x_0, y_0, x, y) = \omega(x_0, y_0, x, y) \text{ при } (x, y) \in L. \tag{24.35}$$

Функция $\Gamma(z_0, z)$ называется *функцией Грина* задачи D. Если эта функция существует, то решение задачи D можно представить в виде:

$$u(x_0, y_0) = \int_L u(z) \frac{d\Gamma(z_0, z)}{dn} ds. \tag{24.36}$$

Эта формула доказывается при помощи формул (8.2) и (8.3); здесь n — внутренняя нормаль (см. Добавление).

Функция Грина, очевидно, всегда существует, если однородная задача D_0 для области T не имеет решения. Это имеет место, например, если $c(x, y) \leqslant 0$ в T или если область T целиком расположена внутри некоторой окрестности Римана. В частности, функция Грина всегда существует для круга достаточно малого радиуса.

Можно доказать, что при фиксированном $(x, y) \in T$ функция $\Gamma(z_0, z)$ относительно переменных x_0, y_0 удовлетворяет уравнению (E_0) и обращается в нуль на границе области. Это значит, что относительно аргумента z_0 функция $\Gamma(z_0, z)$ является функцией Грина для сопряжённого уравнения (E_0^*) (см. Добавление).

5°. Докажем теперь следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть T — некоторая (вообще многосвязная) область. Пусть $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$, ... — некоторая последовательность регулярных в T частных решений уравнения* (E_0). *Если ряд*

$$w_1(x, y) + w_2(x, y) + \ldots + w_n(x, y) + \ldots \tag{24.37}$$

сходится равномерно внутри T, то его сумма $w(x, y)$ будет регулярным в T решением уравнения (E_0).

Доказательство. Пусть z_0 — некоторая точка области T. Возьмём малый круг K с центром в точке z_0, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $K+\gamma$ (γ — граница K) лежит в T и 2) для K существует функция Грина задачи D; конечно, такой круг существует. Так как, по условию, на γ ряд (24.37) сходится равномерно, то согласно формуле (24.36) будем иметь:

$$\int_{\gamma} w(z') \frac{d\Gamma(z, z')}{dn} ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} w_k(z') \frac{d\Gamma(z, z')}{dn} ds = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x,y) = w(x,y), \tag{24.38}$$

где n — внутренняя нормаль к γ в точке интеграции z', а z — любая точка, лежащая внутри K. Из (24.38) следует, что $w(x, y)$ — регулярное решение уравнения (E_0) в K. Отсюда сразу вытекает справедливость нашей теоремы.

Если для области T задача D всегда разрешима, то доказанную теорему можно усилить. А именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть T — область класса Ah, для которой задача D всегда разрешима. Пусть L — граница T. Если w_1, $w_2, \ldots$ есть последовательность регулярных в T и непрерывных в смысле Гельдера в $T+L$ решений уравнения (E_0) и если ряд*

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots \tag{24.39}$$

сходится равномерно на L, то этот ряд будет сходиться равномерно также внутри T, и сумма его будет представлять собой регулярное в T решение уравнения (E_0).

Доказательство. Пусть $\Gamma(z_0, z)$ — функция Грина, которая по условию теоремы существует. Пусть w — сумма ряда (24.39), которая, очевидно, будет непрерывной функцией на L. Тогда, очевидно, имеем:

$$\int_{L} w \frac{d\Gamma(z_0, z)}{dn} ds = \sum_{1}^{\infty} \int_{L} w_k \frac{d\Gamma(z_0, z)}{dn} ds = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z_0). \tag{24.40}$$

Нетрудно видеть, что правая часть последнего равенства сходится равномерно внутри T. Отсюда сразу вытекает справедливость нашей теоремы.

§ 25. Решение задачи А в случае односвязной области.

В этом параграфе мы займёмся решением общей задачи А для случая односвязной области T класса Ah. Попрежнему через L обозначаем границу T. По условию, угол $\theta(t)$, составленный касательной к кривой L в точке t с каким-нибудь постоянным направлением, удовлетворяет условию Гельдера на L. Кроме того, будем считать, что функции $a^{ik}(t)$, $b_0^{ik}(t, t_1)$ и $f(t)$, фигурирующие в равенствах (21.2) и (21.3), непрерывны в смысле Гельдера на L.

1°. Искомое решение задачи А мы можем представить в виде:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left[H_0(z)\varphi(z) + \int_0^z \varphi(t) H(z, t)\, dt\right], \tag{25.1}$$

где

$$H_0(z) = G(z, 0, z, \bar{z}), \quad H(z, t) = -\frac{\partial}{\partial t} G(t, 0, z, z), \qquad (25.2)$$

$\varphi(z)$ — голоморфная функция в T, которую можно подчинить условию $\varphi(0) = \overline{\varphi(0)}$. Мы предполагаем, что начало координат лежит в T и что $A(0, \zeta) = B(z, 0) = 0$. Эти предположения, как известно, не снижают общности наших рассуждений (см. § 2, n° 5). Тогда имеем:

$$\varphi(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0),$$

т. е. $\varphi(z)$ однозначно определяются через $u(x, y)$.

Мы должны функцию $\varphi(z)$ подобрать так, чтобы $u(x, y)$ удовлетворяла граничному условию (см. § 21):

$$S(u) = \sum_{i, k=0, \ldots, n}^{i+k \leqslant n} \left[a^{ik}(t) u_{ik}^{+}(t) + \int_L b^{ik}(t, t_1) u_{ik}^{+}(t_1) ds_1 \right] = f(t), \qquad (25.3)$$

где n — натуральное число $\geqslant 1$, $a^{ik}(t), f(t)$ — заданные действительные функции точки $t \in L$, непрерывные в смысле Гельдера на L, а $b^{ik}(t, t_1)$ — также заданные действительные функции двух точек t, t_1 кривой L, удовлетворяющие условиям

$$b^{ik}(t, t_1) = \frac{b_0^{ik}(t, t_1)}{|t - t_1|^{\alpha}} \qquad (0 \leqslant \alpha < 1), \qquad (25.4)$$

причём $b_0^{ik}(t, t_1)$ — функции, непрерывные в смысле Гельдера.

Мы предполагаем, что все функции $u_{ik}^{+}(t)$ $(i + k \leqslant n,$ $i, k = 0, 1, \ldots, n)$ непрерывны в смысле Гельдера на L.

2°. Прежде чем перейти к решению этой задачи, мы докажем следующую лемму:

Лемма. *Пусть γ — некоторая закрытая дуга, принадлежащая L (в частности, γ может совпадать с L). Пусть $u(x, y)$ — решение уравнения (E_0), регулярное в T, а $\varphi(z)$ — голоморфная в T функция, при помощи которой $u(x, y)$ выражается в виде* (25.1).

Тогда, если функция $u(x, y)$ и все её частные производные по x, y порядка $\leqslant n$ непрерывны в $T + \gamma$ и на γ удовлетворяют условию Гельдера, то производная n-го порядка от $\varphi(z)$ непрерывна в $T + \gamma$ и удовлетворяет на γ условию Гельдера.

Доказательство. Мы предполагаем, что $n \geqslant 1$, так как случай $n = 0$ мы уже рассмотрели выше. Тогда на основании теоремы 2 § 22 функция $\varphi(z)$ непрерывна в $T+\gamma$ и удовлетворяет на γ условию Гельдера. Далее, из (25.1) имеем:

$$2\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)u=H_0(z)\varphi'(z)+\left[\frac{\partial H_0(z)}{\partial z}+H(z,z)\right]\varphi(z)+$$
$$+\frac{\partial\overline{H_0(z)}}{\partial z}\overline{\varphi(z)}+\int_0^z\varphi(t)\frac{\partial}{\partial z}H(z,t)\,dt+$$
$$+\int_0^{\bar z}\overline{\varphi(t)}\frac{\partial}{\partial z}\overline{H(z,t)}\,d\bar t. \qquad (25.5)$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\varphi(z)$ непрерывны в $T+\gamma$ и удовлетворяют на γ условию Гельдера, то из (25.5) следует, что $\varphi'(z)$ также непрерывна в $T+\gamma$ и на γ удовлетворяет условию Гельдера. Таким образом, при $n=1$ лемма доказана. Если же $n>1$, то, применяя к обеим частям (25.5) операцию $\frac{\partial}{\partial z}$, мы сразу убедимся, что $\varphi''(z)$ непрерывна в $T+\gamma$ и на γ удовлетворяет условию Гельдера. Применяя аналогичные рассуждения, мы легко докажем, что все производные функции $\varphi(z)$ до порядка n включительно непрерывны в $T+\gamma$ и на γ удовлетворяют условию Гельдера, а это и требовалось доказать.

3°. Пусть задача A имеет решение; мы можем его представить в виде (25.1). На основании доказанной леммы функция $\varphi(z)$, входящая в (25.1), и все её производные до n-го порядка включительно будут непрерывны в $T+L$ в смысле Гельдера. Подставляя теперь выражение (25.1) в граничное условие (25.3), получим:

$$\operatorname{Re}\mathrm{L}(\varphi)=f(t), \qquad (25.6)$$

где L — интегро-дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$\mathrm{L}(\varphi)=\sum_{k=0}^{n}a_k(t)\varphi^{(k)}(t)+\int_L b_k(t,t_1)\varphi^{(k)}(t_1)\,ds_1; \qquad (25.7)$$

здесь $a_k(t)$ и $b_k(t,t_1)$ — вполне определённые функции, которые нетрудно выразить в явном виде через a^{ik}, b^{ik} и G.

Таким образом, мы пришли к следующей граничной задаче теории аналитических функций одной комплексной переменной:

Требуется найти голоморфную в T функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую условию (25.6), *причём предполагается, что искомая* *функция имеет производную n-го порядка, удовлетворяющую условию Гельдера в $T+L$.*

Решение этой задачи было дано в статье автора [13] (см. также [8], [9]); изложение этого метода решения имеется также в книге акад. Н. И. Мусхелишвили [1] (см. гл. III, §§ 69—76), в которой эта задача названа *задачей* V [1]).

На основании доказанной выше леммы очевидно, что *задачи* А и V *эквивалентны.*

Ниже мы изучим задачу А, не переходя к задаче V; это, конечно, не меняет существа дела, а лишь несколько упрощает изложение.

4°. Решение задачи А, если оно существует, можно представить в виде (25.1). Голоморфную функцию $\varphi(z)$, входящую в (25.1), мы можем подчинить условию $\varphi(0)=\overline{\varphi(0)}$.

Эту функцию, производная n-го порядка которой, согласно вышедоказанной лемме, непрерывна в смысле Гельдера в $T+L$, можно представить внутри T в виде:

$$\varphi(z)=\int_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{n-1}\lg\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_L \mu(t)\,ds, \tag{25.8}$$

где $\mu(t)$ — действительная функция точки $t\in L$, непрерывная в смысле Гельдера на L, которая определяется однозначно при помощи $\varphi(z)$; под $\lg\left(1-\frac{z}{t}\right)$ надо понимать главное значение этой функции.

Доказательство формулы (25.8) дано в работах автора [8], [13] (см. также Мусхелишвили [1], стр. 200).

Подставляя (25.8) в (25.1), получим:

$$u(x,y)=\int_L K_0(z,t)\,\mu(t)\,ds, \tag{25.9}$$

---

1) Задача V решена в работе автора [13], опубликованной в 1942 г. В этой работе решение задачи приведено к решению эквивалентного ей интегрального уравнения, ядро которого выражается в явном виде через коэффициенты граничного условия. Кроме того, в работе дано исследование разрешимости задачи и установлен необходимый и достаточный критерий существования решения. В 1946 г. опубликована работа Д. И. Шермана [2], посвящённая более частной задаче; в ней изучается задача А для случая уравнения Лапласа, причём её решение приводится к решению некоторого уравнения Фредгольма. Укажем также на работу Д. Ф. Гахова [1], в которой задача А в случае уравнения Лапласа приведена к более сложному уравнению Фредгольма, ядро которого выражено через функцию Грина.

где

$$K_0(z,t)=G(0,0,z,\bar z)+\operatorname{Re}\Big[H_0(z)\Big(1-\frac{z}{t}\Big)^{n-1}\lg\Big(1-\frac{z}{t}\Big)+$$
$$+\int_0^z\Big(1-\frac{\sigma}{t}\Big)^{n-1}\lg\Big(1-\frac{\sigma}{t}\Big)H(z,\sigma)\,d\sigma\Big] \quad (25.10)$$

$$\Big(H_0(z)=G(z,0,z,\bar z),\quad H(z,\sigma)=-\frac{\partial}{\partial\sigma}G(\sigma,0,z,\bar z)\Big).$$

Ясно, что при $t\in L$ функция $K_0(z,t)$ является относительно точки z регулярным решением уравнения (E_0) в области T. Кроме того, все частные производные по x и y от функции $K_0(z,t)$ до порядка $n-2$ включительно непрерывны в $T+L$, производные порядка $n-1$ имеют логарифмическую особенность при $z=t$, а производные порядка n имеют особенность вида $(z-t)^{-1}$.

Поэтому, принимая обозначение $t_0=\xi+i\eta$, при $j,k=0,1,\ldots,n-1$, $j+k\leqslant n-1$, имеем:

$$u_{jk}^+(t_0)=\int_L \mu(t)\frac{\partial^{j+k}K_0(t_0,t)}{\partial\xi^j\partial\eta^k}\,ds, \quad (25.11)$$

а при $j+k=n$

$$u_{jk}^+(t_0)=\operatorname{Re}\Big[\frac{\pi i^{k+1}(-1)^n(n-1)!\,H_0(t_0)}{t_0^{n-1}\,t_0'}\Big]\mu(t_0)+\int_L\mu(t)\frac{\partial^n K_0(t_0,t)}{\partial\xi^j\partial\eta^k}\,ds, \quad (25.12)$$

причём последний интеграл надо понимать в смысле главного значения по Коши, ибо

$$\frac{\partial^n K_0(t_0,t)}{\partial\xi^j\partial\eta^k}=\operatorname{Re}\Big[\frac{i^k(-1)^n(n-1)!\,H_0(t_0)}{t^{n-1}(t-t_0)}+K_{jk}^*(t_0,t)\Big]$$
$$(j+k=n), \quad (25.13)$$

где $K_{jk}^*(t_0,t)$ имеет особенность только логарифмического типа при $t=t_0$; поэтому $(t-t_0)K_{jk}^*(t_0,t)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Подставляя выражения (25.11) и (25.12) в граничное условие (25.3), получим:

$$A(t_0)\mu(t_0)+\int_L K(t_0,t)\mu(t)\,ds=f(t_0), \quad (25.14)$$

где

$$A(t_0)=\operatorname{Re}\left[\pi i(-1)^n(n-1)!\,t_0^{-n+1}\overline{t_0'}H_0(t_0)\sum_{k=0}^{n} i^k a^{n-k,k}(t_0)\right], \tag{25.15}$$

$$K(t_0,t)=\sum_{j,k=0,\ldots,n}^{j+k\leqslant n}\left[a^{jk}(t_0)\frac{\partial^{j+k}K_0(t_0,t)}{\partial\xi^j o\eta^k}+\right.$$

$$\left.+\int_L b^{jk}(t_0,t_1)\frac{\partial^{j+k}K_0(t_1,t)}{\partial\xi_1^j\,\partial\eta_1^k}ds_1\right], \tag{25.16}$$

причём $t_0=\xi+i\eta$, $t_1=\xi_1+i\eta_1$, а ds_1 — элемент дуги кривой L в точке t_1.

Итак, *для определения функции* $\mu(t)$ *мы имеем сингулярное интегральное уравнение* (25.14), *которое, очевидно, эквивалентно задаче* А.

Уравнение (25.14) мы можем записать ещё так:

$$A(t_0)\mu(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+\int_L K^*(t_0,t)\mu(t)\,ds=f(t_0), \tag{25.17}$$

где

$$B(t_0)=i\pi\operatorname{Re}\left[(-1)^n(n-1)!\,t_0^{-n+1}\,\overline{t_0'}H_0(t_0)\sum_{k=0}^{n}i^k a^{n-k,k}(t_0)\right], \tag{25.18}$$

$$K^*(t_0,t)=K(t_0,t)-\frac{t'B(t_0)}{i\pi(t-t_0)}. \tag{25.19}$$

Нетрудно проверить, что $K^*(t_0,t)$ имеет вид:

$$K^*(t_0,t)=\frac{K_0^*(t_0,t)}{|t_0-t|^{\alpha}},\qquad 0\leqslant\alpha<1, \tag{25.20}$$

где $K_0^*(t_0,t)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера.

Уравнение (25.14) будет нормального типа, если функции $A(t_0)+B(t_0)$ и $A(t_0)-B(t_0)$ отличны от нуля всюду на L. Это условие, как легко видеть, равносильно тому, что функция

$$a_0(t_0)=\pi i(-1)^n(n-1)!\,t_0^{-n+1}\,\overline{t_0'}H_0(t_0)\sum_{k=0}^{n}i^k a^{n-k,k}(t_0)\neq 0 \tag{25.21}$$

всюду на L. Но так как

$$H_0(t_0)=\exp\left(-\int_0^{t_0}A(t_0,\tau)\,d\tau\right)\neq 0, \tag{25.22}$$

то условие (25.22), очевидно, равносильно неравенству

$$a^*(t_0) = \sum_{k=0}^{n} i^k a^{n-k,k}(t_0) \neq 0 \quad \text{(всюду на } L). \tag{25.23}$$

Это условие, как видно, накладывает ограничение только на коэффициенты при производных порядка n от искомой функции $u(x, y)$, фигурирующих в граничных условиях (25.3) вне интеграла.

В дальнейшем всё время будем предполагать, что условие (25.23) выполнено. В этом случае задачу A будем называть *нормальной*, а условие (25.23) — *условием нормальности*.

Вычислим теперь индекс уравнения (25.14). По известной формуле (см., например, Мусхелишвили [1], стр. 123) имеем:

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{1}{2\pi}\left[\lg \frac{A(t)-B(t)}{A(t)+B(t)}\right]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \frac{\overline{a_0(t)}}{a_0(t)}\right]_L = \\ &= \frac{1}{\pi}\,[\arg (t_0^{n-1}\, t_0')]_L + \frac{1}{\pi}\,[\arg \overline{a^*(t_0)}]_L = 2(n+p), \end{aligned} \tag{25.24}$$

где

$$p = \frac{1}{2\pi}[\arg \overline{a^*(t_0)}]_L. \tag{25.25}$$

Число $\varkappa$ мы будем называть *индексом* задачи A.

5°. Перейдём к исследованию разрешимости задачи A. Условия её разрешимости, очевидно, совпадают с условиями разрешимости эквивалентного ей интегрального уравнения (25.14). Для разрешимости последнего, как известно (см. Мусхелишвили [1], стр. 149), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L \nu_j(t) f(t)\, ds = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k'), \tag{25.26}$$

где $\nu_1(t), \ldots, \nu_{k'}(t)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения

$$A(t_0)\,\nu(t_0) + \int_L K(t, t_0)\,\nu(t)\, ds = 0, \tag{25.27}$$

причём, очевидно, k' — число линейно независимых решений последнего; имеем также формулу (см. Мусхелишвили [1], стр. 149):

$$k - k' = \varkappa, \tag{25.28}$$

где через k обозначено число линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего (25.14).

Условия (25.26) представляют собой необходимые и достаточные условия разрешимости задачи A.

Следовательно, *задача* А *разрешима для любой функции* $f(t)$ *тогда и только тогда, когда* $k'=0$, *т. е. когда однородное уравнение* (25.27) *не имеет решения.* Но из формулы (25.28) видно, что в этом случае $k=\varkappa$. Так как $k\geqslant 0$, то имеем предложение:

Для того чтобы задача А *имела решение для всякой функции* $f(t)$, *необходимо, чтобы индекс* $\varkappa\geqslant 0$.

Таким образом, условие $\varkappa\geqslant 0$ является *необходимым* признаком для того, чтобы задача А была разрешима для любой функции $f(t)$, а условие $\varkappa<0$ представляет собой *достаточный признак несуществования решения задачи* А *для любой функции* $f(t)$.

Допустим теперь, что задача А разрешима для любой функции $f(t)$. Тогда, очевидно, $k'=0$, $k=\varkappa$. *Уравнение* (25.14) *в этом случае разрешимо для любой правой части*, и его решение имеет вид:

$$\mu(t_0)=\mu_0(t_0)+\sum_{j=1}^{\varkappa} c_j\mu_j(t_0), \tag{25.29}$$

где $\mu_0(t_0)$ — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (25.14), а $\mu_1,\ldots,\mu_\varkappa$ — полная система линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения, $c_1,\ldots,c_\varkappa$ — произвольные действительные постоянные; функции $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_\varkappa$, очевидно, удовлетворяют условию Гельдера на L. Подставляя (25.29) в (25.9), получим:

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\sum_{j=1}^{\varkappa} c_j u_j(x,y), \tag{25.30}$$

где

$$u_j(x,y)=\int_L K_0(z,t)\,\mu_j(t)\,ds \qquad (j=0,1,\ldots,\varkappa). \tag{25.31}$$

Очевидно, u_0 — решение неоднородной задачи А, а $u_1,\ldots,u_\varkappa$ — полная система линейно независимых решений однородной задачи A_0.

В частности, *при* $k'=\varkappa=0$ *неоднородная задача* А *всегда разрешима и имеет единственное решение* $u_0(x,y)$, *а однородная задача* A_0 *не имеет решения.*

6°. Изучим теперь подробнее однородное уравнение (25.27). Оно может быть записано ещё так:

$$\operatorname{Re}\Phi^-(t_0)=0, \tag{25.32}$$

где

$$\Phi(z)=\int_L \nu(t)\,\Omega_{\mathrm{A}}(t,z)\,dt \qquad (z\in T'), \tag{25.33}$$

причём T' обозначает бесконечную область, лежащую вне L, а $\Omega_A(t, z)$ определяется формулой:

$$\Omega_A(t, z) = \sum_{\substack{j+k\leq n\\ j,k=0,\dots,n}} \left[a^{jk}(t) \frac{\partial^{j+k} K_0(t, z)}{\partial\xi^j \partial\eta^k} + \int_L b^{jk}(t, t_1) \frac{\partial^{j+k} K_0(t_1, z)}{\partial\xi_1^j \partial\eta_1^k} ds_1 \right]; \quad (25.34)$$

здесь $t = \xi + i\eta$, $t_1 = \xi_1 + i\eta_1$, а $K_0(t, z)$ имеет вид:

$$K_0(t, z) = G(0, 0, t, \bar{t}) + H_0(t) \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{n-1} \lg\left(1 - \frac{t}{z}\right) + \int_0^t \left(1 - \frac{\sigma}{z}\right)^{n-1} \lg\left(1 - \frac{\sigma}{z}\right) H(t, \sigma)\, d\sigma. \quad (25.35)$$

Очевидно, для любой точки $z \in T'$ функция $K_0(t, z)$ относительно точки t является регулярным в области T решением уравнения (E_0), а при любом $t \in T + L$ она представляет собой голоморфную функцию z в T', ограниченную на бесконечности; а именно, $K_0(t, \infty) = G(0, 0, t, \bar{t})$, т. е. $K_0(t, z)$ на бесконечности принимает действительное значение.

Вблизи бесконечности, очевидно, имеем разложение:

$$K_0(t, z) = X_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(t) z^{-k}, \quad (25.36)$$

где

$$\left.\begin{aligned} X_0(t) &= G(0, 0, t, \bar{t}), \\ X_k(t) &= \int_0^t \sigma^{k-1} G(\sigma, 0, t, \bar{t})\, d\sigma \qquad (k = 1, 2, \dots); \end{aligned}\right\} \quad (25.37)$$

$$\left.\begin{aligned} &c_k = \frac{(-1)^k (n-1)\dots(n-k)}{(k-1)!} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{n-k}\right) \\ &\text{при } k = 1, \dots, n-1 \text{ и} \\ &c_k = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,(k-n)!}{(k-1)!} \quad \text{при } k = n, n+1, \dots \end{aligned}\right\} \quad (25.38)$$

Функции $X_k(t)$ $(k = 0, 1, \dots)$ являются регулярными решениями уравнения (E_0) в $\mathfrak{D}$.

Подставляя ряд (25.36) в (25.34), получим:

$$\Omega_A(t, z) = S[X_0(t)] + \sum_{k=1}^{\infty} c_k S[X_k(t)] z^{-k}, \quad (25.39)$$

где через $S[X(t)]$ обозначена следующая интегро-дифференциальная операция:

$$S[X(t)] = \sum_{j,k=0,\ldots,n}^{j+k\leq n} \left[a^{jk}(t) \frac{\partial^{j+k} X(t)}{\partial \xi^j \partial \eta^k} + \int_L b^{jk}(t, t_1) \frac{\partial^{j+k} X(t_1)}{\partial \xi_1^j \partial \eta_1^k} ds_1 \right]$$

$$(t = \xi + i\eta,\ t_1 = \xi_1 + i\eta_1). \tag{25.40}$$

Обратимся теперь к равенству (25.32). Так как $\Phi(z)$ голоморфна вне $T+L$, ограничена и на бесконечности принимает действительное значение, то ясно, что $\Phi(z) = 0$ всюду в T', т. е.

$$\int_L \nu(t)\, \Omega_A(t, z)\, ds = 0 \qquad (z \in T'). \tag{25.41}$$

Это уравнение, очевидно, равносильно интегральному уравнению (25.27). Назовём теперь $\Omega_A(t, z)$ *ядром граничной задачи* A. Придерживаясь понятий и определений, введённых в § 23, мы можем теперь высказать предложение:

Задача A *разрешима для любой функции* $f(t)$ *тогда и только тогда, когда ядро* $\Omega_A(t, z)$ *замкнуто относительно области* T.

Это предложение, очевидно, равносильно следующему предложению:

Задача A *разрешима для любой функции* $f(t)$ *тогда и только тогда, когда последовательность функций*

$$\{S[X_k(t)]\} \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{25.42}$$

является замкнутой относительно кривой L.

Далее, так как интегральное уравнение (25.27) может иметь лишь конечное число линейно независимых решений, то, очевидно, ядро $\Omega_A(t, z)$ *является либо замкнутым, либо почти замкнутым относительно области* T. В соответствии с этим и *последовательность функций* (25.42) *либо замкнута, либо почти замкнута относительно кривой* L.

Заметим, наконец, что вместо последовательности (25.42) мы можем рассмотреть также эквивалентные ей последовательности

$$\{S[K_0(t, z_k)]\}, \quad \left\{ S\left[\frac{\partial^k K_0(t, z_0)}{\partial z_0^k} \right] \right\}, \tag{25.43}$$

где $z_0 \in T'$, а $\{z_k\}$ — любая последовательность точек области T', которая имеет по крайней мере одну предельную точку в T'.

7°. Наконец, заметим, что если в формулу (25.8) вместо действительной функции μ подставим комплексную функцию ν/a_0, где ν — некоторая действительная функция точки $t \in L$, непрерывная в смысле Гельдера на L, а a_0—функция, заданная формулой (25.21), то, как нетрудно видеть, мы получим для решения задачи А уравнение Фредгольма, ядро которого выражается в явном виде через заданные функции.

§ 26. О решении задачи А для случая многосвязной области. Решение общей задачи А для случая многосвязной области можно также привести к сингулярному интегральному уравнению, эквивалентному задаче. Так как сущность нашего метода уже достаточно ясна, поэтому мы ограничимся здесь лишь указаниями общего характера.

Сохраняя обозначения § 21, задачу А для многосвязной области T ($T \subset \mathfrak{D}$) мы можем сформулировать так:

Требуется найти в области T регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (E_0), *удовлетворяющее граничному условию*

$$\mathrm{S}(u) = \sum_{i,\, k=0, \ldots, n}^{i+k \leq n} \left[a^{ik}(t)\, u_{ik}^{+}(t) + \int_L b^{ik}(t, t_1)\, u_{ik}^{+}(t_1)\, ds_1 \right] = f(t), \tag{26.1}$$

где a^{ik}, b^{ik} и f—заданные функции, которые удовлетворяют на L условиям, сформулированным в § 25.

Представим искомое решение $u(x, y)$ в виде (24.2), т. е.

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \omega(x, y, x_k, y_k) + \mathrm{Re}\Big\{ \mathfrak{H}[0, p(z)] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{H}\Big[\bar{z}_k,\ q_k(z) - \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \overline{q_k(\tau)}\, \overline{H(\bar{\tau}, \bar{z}_k, z_k, \bar{z})}\, d\tau \Big) \lg (z - z_k) \Big] \Big\}. \tag{26.2}$$

Нетрудно доказать, что производные порядка n от функции $p(z)$, $q_1(z), \ldots, q_m(z)$ удовлетворяют на L условию Гельдера.

Далее, следуя методу, изложенному в работах автора [8], [13] (см. также Мусхелишвили [1], стр. 200), легко можно доказать следующую лемму:

Лемма. *Пусть D—бесконечная область класса Ah, ограниченная простой замкнутой кривой L. Тогда всякую функцию $F(z)$, голоморфную в D и исчезающую на бесконечности, производная n-го порядка которой непрерывна в смысле Гельдера на L, можно представить внутри D в виде:*

$$F(z) = \int_L \mu(t) \Big(1 - \frac{t - z_0}{z - z_0} \Big)^{n-1} \lg \Big(1 - \frac{t - z_0}{z - z_0} \Big)\, ds \quad (z \in D), \tag{26.3}$$

где z_0—фиксированная точка, лежащая внутри L; $\mu(t)$—дей-

ствительная функция, непрерывная в смысле Гельдера на L, удовлетворяющая условию

$$\int_L \mu(t)\, ds = \beta, \tag{26.4}$$

причём β — некоторая заданная постоянная; функция $\mu(t)$ однозначно определяется через $F(z)$ и β.

На основании этой леммы и в силу формулы (25.8), функции $p(z)$, $q_1(z), \ldots, q_m(z)$ и постоянные $\beta_1, \ldots, \beta_m$ можно представить в виде:

$$p(z) = \int_{L_0} \mu_0(t) \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{n-1} \lg\left(1 - \frac{z}{t}\right) ds + \int_{L_0} \mu_0(t)\, ds, \tag{26.5}$$

$$q_k(z) = \int_{L_k} \mu_k(t) \left(1 - \frac{t - z_k}{z - z_k}\right)^{n-1} \lg\left(1 - \frac{t - z_k}{z - z_k}\right) ds, \tag{26.6}$$

$$\beta_k = \int_{L_k} \mu_k(t)\, ds \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{26.7}$$

где z_k — фиксированная точка, лежащая на C_k $(k = 1, \ldots, m)$; $\mu_0(t), \mu_1(t), \ldots, \mu_m(t)$ — действительные функции, определённые на $L_0, L_1, \ldots, L_m$ соответственно и удовлетворяющие условию Гельдера; эти функции однозначно определяются через $p(z)$, $q_1(z), \ldots, q_m(z)$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$, следовательно, и через $u(x, y)$.

Подставляя выражения (26.5), (26.6), (26.7) в (26.2) и переходя затем к пределу, когда точка z стремится к границе области T, для определения функций $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$ получим сингулярное интегральное уравнение, эквивалентное нашей задаче А. Следует отметить, что это уравнение будет *нормального типа*, если на L соблюдено условие вида (25.23).

§ 27. Об аппроксимации решений уравнения (E_0) в замкнутых областях. Разложение произвольных функций в ряд частных решений уравнения (E_0) на контуре. 1°. При помощи предыдущих результатов мы можем теперь доказать несколько предложений об аппроксимации и разложении в ряд в замкнутых областях решений уравнения

$$E(u) = \Delta u + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = 0. \tag{E_0}$$

Попрежнему мы будем предполагать, что a, b, c — действительные аналитические функции.

Пусть $\mathfrak{D}$ — некоторая основная область уравнения (E_0). Предположим, что начало координат ($z = 0$) лежит в $\mathfrak{D}$. Рассмотрим, систему $u_0, u_1, \ldots$ действительных частных решений уравнения:

$$X_0(z)=u_0(x, y)=G(0, 0, z, \bar{z}),$$

$$X_k(z)=u_{2k-1}(x, y)+iu_{2k}(x, y)=k\int_0^z t^{k-1}G(t, 0, z, \bar{z})\,dt \qquad (27.1)$$

$$(k=1, 2, 3, \ldots).$$

В § 14 мы доказали, что последовательность $\{u_k(x, y)\}$ является полной системой частных решений уравнения (E_0) относительно любой односвязной области, принадлежащей $\mathfrak{D}$. Докажем теперь следующее предложение (см. статью автора [24]):

Теорема 1. *Пусть T — односвязная область класса Ah, принадлежащая $\mathfrak{D}$. Пусть $u(x, y)$ — (действительное) регулярное в T решение уравнения (E_0), непрерывное в $T+L$ и удсвлетворяющее условию Гельдера на L (L — граница области T). Тогда для всякого положительного числа ε существуют такие постоянные $c_1, \ldots, c_n$, что в замкнутой области $T+L$ имеет место неравенство*

$$\left|u(x, y)-\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x, y)\right|<\varepsilon. \qquad (27.2)$$

Иными словами, *всякое регулярное в T решение $u(x, y)$ уравнения (E_0), непрерывное в $T+L$ и удовлетворяющее на L условию Гельдера, можно равномерно аппроксимировать в замкнутой области $T+L$ при помощи линейных комбинаций частных решений* (27.1).

Доказательство. Функцию $u(x, y)$ мы можем представить в виде:

$$u(x, y)=\mathrm{Re}\left[G(z, 0, z, \bar{z})\,\Phi(z)-\int_0^z \Phi(t)\,H(t, 0, z, \bar{z})\,dt\right], \qquad (27.3)$$

где $\Phi(z)$ — голоморфная в T функция. Согласно теореме 2 § 22 функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию Гельдера в $T+L$. Поэтому существует последовательность полиномов $P_n(z)$, которая сходится равномерно к $\Phi(z)$ в замкнутой области $T+L$ (см., например, Келдыш [2]). Рассмотрим теперь частное решение уравнения (E_0) вида

$$V_n(x, y)=\mathrm{Re}\left[G(z, 0, z, \bar{z})P_n(z)-\int_0^z P_n(t)\,H(t, 0, z, \bar{z})\,dt\right], \qquad (27.4)$$

которое, очевидно, представляет собой линейную комбинацию функций $u_k(x, y)$ $(k=0, 1, \ldots)$. Последовательность $\{V_n(x, y)\}$, очевидно, равномерно сходится к $u(x, y)$ в замкнутой области $T+L$, что и доказывает нашу теорему.

Можно доказать аналогичную теорему и в случае многосвязной области, только тогда в качестве частных решений уравнения (E_0) надо брать систему функций (18.5).

Используя теоремы акад. М. В. Келдыш [1] об аппроксимации голоморфных функций целыми функциями в бесконечных областях, можно доказать также ряд теорем об аппроксимации решений уравнения (E_0) в бесконечных областях определённого вида (см. статью автора [24]).

2°. Из доказанной теоремы, как следствие, вытекает

Теорема 2. *Пусть T — односвязная область класса Ah, а L — её граница. Пусть задача* D *для уравнения* (E_0) *относительно области T всегда разрешима. Тогда всякую функцию $f(t)$, непрерывную в смысле Гельдера на L, можно аппроксимировать равномерно на L линейными комбинациями частных решений* (27.1) *уравнения* (E_0).

Доказательство. Согласно условию теоремы существует регулярное в T и непрерывное в смысле Гельдера в $T+L$ решение $u(x,y)$ уравнения (E_0), которое удовлетворяет условию:

$$u^+ = f(t) \qquad (\text{на } L). \tag{27.5}$$

Отсюда согласно неравенству (27.2) имеем:

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} c_k u_k(x, y) \right| < \varepsilon \qquad (x, y) \in L, \tag{27.6}$$

что и доказывает нашу теорему.

Из этой теоремы сразу вытекает, что $f(t)$ можно разложить на L в равномерно сходящийся ряд вида:

$$f(t) = v_1(t) + v_2(t) + \ldots + v_n(t) + \ldots, \tag{27.7}$$

где

$$v_n = c_0^{(n)} u_0(x, y) + \ldots + c_{k_n}^{(n)} u_{k_n}(x, y) \qquad (t = x+iy \in L). \tag{27.8}$$

3°. В частности для круговой области имеет место

Теорема 3. *Пусть круг $|z| \leqslant R$ принадлежит основной области $\mathfrak{D}$ уравнения* (E_0). *Пусть задача* D *для уравнения* (E_0) *относительно круга $|z| \leqslant R$ всегда разрешима. Тогда всякая функция $f(t)$, непрерывная в смысле Гельдера на окружности $|z| = R$, разлагается в равномерно сходящийся ряд вида*

$$f(t) = c_0 u_0(x, y) + c_1 u_1(x,y) + \ldots, \tag{27.9}$$

где $t = x+iy$, $|t| = R$.

Доказательство. Согласно условию теоремы существует регулярное внутри круга $|z| < R$ и непрерывное в смысле Гельдера в замкнутом круге $|z| \leqslant R$ решение $u(x, y)$ уравнения (E_0), удовлетворяющее условию:

$$u^+(t) = f(t) \quad (|t| = R). \tag{27.10}$$

Функцию $u(x, y)$ мы можем представить в виде:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left[G(z, 0, z, \bar{z})\,\bar{\Phi}(z) - \int_0^z \Phi(t)\, H(t, 0, z, \bar{z})\, dt\right], \tag{27.11}$$

где $\Phi(z)$ — функция, голоморфная внутри круга $|z| < R$ и непрерывная в смысле Гельдера в замкнутой области $|z| \leqslant R$. Но функцию $\Phi(z)$ мы можем представить рядом Тейлора, сходящимся равномерно в замкнутой области $|z| \leqslant R$[1]). Подставляя этот ряд в (27.11), получим разложение:

$$u(x, y) = c_0 u_0(x, y) + c_1 u_1(x, y) + \ldots, \tag{27.12}$$

которое, очевидно, будет сходиться равномерно в замкнутой области $|z| \leqslant R$. В частности, при $t = x + iy$, $|t| = R$, в силу (27.10), получим ряд (27.9), что и доказывает нашу теорему.

В § 23 мы видели, что задача D относительно области T всегда разрешима, если последовательность $\{u_k(x, y)\}$ является замкнутой относительно кривой L (теорема 2 § 23).

Поэтому теоремы 2 и 3 настоящего параграфа, сохраняя принятые выше предположения относительно области T, мы можем изложить ещё так:

Теорема 2′. *Если система частных решений (27.1) уравнения (E_0) замкнута относительно кривой L, то всякую непрерывную в смысле Гельдера на L функцию $f(t)$ можно аппроксимировать равномерно на L линейными комбинациями этих решений.*

Теорема 3′. *Если система частных решений (27.1) уравнения (E_0) замкнута относительно окружности $|z| = R$, то всякую непрерывную в смысле Гельдера на этой окружности функцию $f(t)$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд*

$$f(t) = c_0 u_0(x, y) + c_1 u_1(x, y) + \ldots + c_n u_n(x, y) + \ldots, \tag{27.13}$$

где $t = x + iy$, $|t| = R$.

Наконец заметим, что систему частных решений (27.1) уравнения (E_0) можно заменить любой другой эквивалентной системой частных решений того же уравнения, в том числе ортонормированной.

---

[1]) В самом деле, этот ряд на окружности $|z| = R$ будет рядом Фурье непрерывной в смысле Гельдера функции $\Phi(t)$, и поэтому он будет сходиться равномерно. Отсюда сразу вытекает справедливость нашего утверждения.

ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ

ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

В этой главе мы обобщаем результаты продыдущих глав на систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\Delta u_i + \sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{ik}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial y} + c_{ik}(x, y)\, u_k \right) = 0 \qquad (\mathrm{S}_0)$$

$$(i = 1, \ldots, n),$$

где a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} — аналитические функции переменных x, y в некоторой области $\mathfrak{T}$ плоскости z. Обобщение наших результатов, изложенных в гл. I, на такую систему уравнений было сделано А. В. Бицадзе [3], который изучил также некоторые граничные задачи (Дирихле и Пуанкаре) для этой системы, следуя развитому выше в гл. III методу.

В дальнейшем изложении мы будем пользоваться некоторыми обозначениями и понятиями матричного исчисления. Это значительно упрощает изложение и приводит к формулам, по внешнему виду совпадающим с формулами предыдущих глав. Обозначения и понятия матричного исчисления, которыми ниже будем пользоваться, разъяснены в книге акад. Н. И. Мусхелишвили [1] (см. стр. 389 и сл.).

В дальнейшем векторы и матрицы будем обозначать жирным шрифтом. Здесь же отметим, что вектор мы понимаем как одноколонную матрицу.

§ 28. Матричная запись системы (S_0). Сопряжённая система. Матричная функция Римана. 1°. Систему уравнений (S_0) мы можем записать в следующем виде:

$$\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a}(x, y) \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{b}(x, y) \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \boldsymbol{c}(x, y)\, \boldsymbol{u} = 0, \qquad (\mathrm{S}_0)$$

где $\boldsymbol{u}$ — вектор с компонентами $u_1, \ldots, u_n$: $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$; $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — матрицы с элементами a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ соответственно.

В дальнейшем эту систему уравнений мы будем называть просто уравнением (S_0); это не может вызвать никаких недоразумений.

Вводя вместо x, y новые переменные: $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$, приведём это уравнение к виду:

$$S(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial\zeta} + A(z, \zeta)\frac{\partial U}{\partial z} + B(z, \zeta)\frac{\partial U}{\partial \zeta} + C(z, \zeta)\, U = 0, \qquad (S_0)$$

где

$$\begin{gathered} A(z, \zeta) = \frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) + ib\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)\right], \\ B(z, \zeta) = \frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) - ib\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)\right], \\ C(z, \zeta) = \frac{1}{4}c\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right), \; U = u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right). \end{gathered} \qquad (28.1)$$

Пусть $\mathfrak{D}$ — некоторая *односвязная область* на плоскости z, принадлежащая $\mathfrak{T}$ и удовлетворяющая следующему условию: *элементы матриц A, B, C являются аналитическими функциями переменных z, ζ в цилиндрической области* $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$. Такую область в дальнейшем мы будем называть *основной областью* уравнения (S_0). Очевидно, в качестве $\mathfrak{D}$ можно взять достаточно малую окрестность любой точки области $\mathfrak{T}$. Отметим также, что $\mathfrak{D}$ будет совпадать с плоскостью z, если коэффициенты системы уравнений (S_0) — целые функций переменных x, y.

Рассмотрим теперь уравнение

$$S^*(V) = \frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial\zeta} - \frac{\partial VA}{\partial z} - \frac{\partial VB}{\partial \zeta} + VC = 0, \qquad (S_0^*)$$

где V — вектор; отметим, что в этом уравнении порядок сомножителей в произведениях VA, VB, VC существенен, ибо вообще $VA \neq AV$ и т. д. Уравнение (S_0^*) мы назовём уравнением, *сопряжённым с уравнением* (S_0).

В уравнении (S_0) мы можем под U подразумевать также некоторую прямоугольную матричную функцию с числом строк, равным n. Это будет означать, что каждый столбец этой матрицы представляет собой решение уравнения (S_0), т. е. совокупность элементов любого столбца матрицы U будет представлять собой вектор, удовлетворяющий уравнению (S_0).

Если в уравнении (S_0^*) под V будем подразумевать также некоторую прямоугольную матрицу с числом столбцов, равным n, то, как нетрудно видеть, любая строка этой матрицы будет представлять собой решение уравнения (S_0^*).

2°. Рассмотрим теперь квадратную матрицу G с числом столбцов, равным n, удовлетворяющую следующим условиям: 1) элементы матрицы G представляют собой аналитические функции переменных z, ζ в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, 2) G является решением уравнения (S_0^*) в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ и 3) G удовлетворяет соотношениям

$$\left[\frac{\partial G}{\partial z} - GB\right]_{\zeta=\tau} = 0, \quad \left[\frac{\partial G}{\partial \zeta} - GA\right]_{z=t} = 0, \quad G\Big|_{\substack{z=t\\ \zeta=\tau}} = I_n, \tag{28.2}$$

где t, τ — произвольно зафиксированные точки в $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно, а I_n — единичная матрица порядка n. Назовём G *матричной функцией Римана* уравнения (S_0). Очевидно, G зависит от четырёх переменных z, ζ, t, τ: $G = G(z, \zeta, t, \tau)$. Мы докажем ниже существование и единственность матрицы G. Мы увидим, что элементы этой матрицы — аналитические функции четырёх переменных z, ζ, t, τ в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, причём относительно переменных t, τ она будет решением уравнения (S_0), удовлетворяющим условиям:

$$\left[\frac{\partial G}{\partial t} + B(t, \tau)\, G\right]_{\tau=\zeta} = 0, \quad \left[\frac{\partial G}{\partial \tau} + A(t, \tau)\, G\right]_{t=z} = 0, \quad G\Big|_{\substack{t=z\\ \tau=\zeta}} = I_n, \tag{28.3}$$

т. е. относительно последних двух аргументов $G(z, \zeta, t, \tau)$ является матричной функцией Римана уравнения (S_0^*).

3°. Докажем теперь существование матрицы G. Так как она по условию является решением уравнения (S_0^*), то будем иметь:

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \zeta}\Bigg[G(z, \zeta, t, \tau) - \int_\tau^\zeta G(z, \tau_1, t, \tau)\, A(z, \tau_1)\, d\tau_1 - \\ - \int_t^z G(t_1, \zeta, t, \tau)\, B(t_1, \zeta)\, dt_1 + \\ + \int_t^z dt_1 \int_\tau^\zeta G(t_1, \tau_1, t, \tau)\, C(t_1, \tau_1)\, d\tau_1\Bigg] = 0. \tag{28.4}$$

Отсюда, принимая во внимание условия (28.2), получим:

$$G(z, \zeta, t, \tau) - \int_t^z G(t_1, \zeta, t, \tau)\, B(t_1, \zeta)\, dt_1 - \\ - \int_\tau^\zeta G(z, \tau_1, t, \tau)\, A(z, \tau_1)\, d\tau_1 + \\ + \int_t^z dt_1 \int_\tau^\zeta G(t_1, \tau_1, t, \tau)\, C(t_1, \tau_1)\, d\tau_1 = I_n. \tag{28.5}$$

Но это есть матричное интегральное уравнение типа Вольтерра в комплексной области. Следовательно, согласно результатам § 3, матрица G существует и её элементы являются аналитическими функциями переменных z, ζ, t, τ в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$. Нетрудно также проверить, что она удовлетворяет условиям (28.2) и уравнению (S_0^*).

4°. Докажем теперь некоторые другие свойства матрицы G. Согласно (28.2), $G(t, \zeta, t, \tau)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{d\zeta} G(t, \zeta, t, \tau) - G(t, \zeta, t, \tau)\, A(t, \zeta) = 0 \tag{28.6}$$

и условиям:

$$G(t, \tau, t, \tau) = I_n. \tag{28.7}$$

Поэтому по известному свойству детерминанта фундаментальной системы решений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка будем иметь:

$$\det G(t, \zeta, t, \tau) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \int_{\tau}^{\zeta} A_{kk}(t, \tau_1)\, d\tau_1\right). \tag{28.8}$$

Аналогично получим, что

$$\det G(z, \tau, t, \tau) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \int_{t}^{z} B_{kk}(t_1, \tau)\, dt_1\right). \tag{28.9}$$

Пусть $U(z, \zeta)$ — какая-нибудь матричная функция, элементы которой суть аналитические функции переменных z, ζ в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$. Тогда, в силу (28.6), имеем тождество

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}[G(z, \tau_1, z, \zeta)\, U(z, \tau_1)] - \\ - G(z, \tau_1, z, \zeta)\left[\frac{\partial U(z, \tau_1)}{\partial\tau_1} + A(z, \tau_1)\, U(z, \tau_1)\right] = 0. \tag{28.10}$$

Отсюда, в силу (28.7), получим:

$$U(z, \zeta) = G(z, \tau, z, \zeta)\, U(z, \tau) + \\ + \int_{\tau}^{\zeta} G(z, \tau_1, z, \zeta)\left[\frac{\partial U(z, \tau_1)}{\partial\tau_1} + A(z, \tau_1)\, U(z, \tau_1)\right] d\tau_1. \tag{28.11}$$

Подставим теперь сюда вместо $U(z, \zeta)$ функцию $G(z, \tau, z, \zeta)$. Тогда, принимая во внимание (28.7), будем иметь:

$$\int_{\tau}^{\zeta} G(z, \tau_1, z, \zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\tau_1} G(z, \tau, z, \tau_1) + A(z, \tau_1)\, G(z, \tau, z, \tau_1)\right] d\tau_1 = 0. \tag{28.12}$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\det G(z, \tau, z, \zeta) \neq 0$, сразу получим:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} G(z, \zeta, z, \tau) + A(z, \tau)\, G(z, \zeta, z, \tau) = 0. \qquad (28.13)$$

Аналогично получим, что

$$\frac{\partial}{\partial t} G(z, \zeta, t, \zeta) + B(t, \zeta)\, G(z, \zeta, t, \zeta) = 0. \qquad (28.14)$$

Формулы (28.13) и (28.14) совпадают с формулами (28.3).

5°. Предположим теперь, что $U(z, \zeta)$ — некоторая прямоугольная матрица, элементы которой суть аналитические функции переменных z и ζ в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$, где $\mathfrak{D}$ — какая-нибудь основная область. Принимая во внимание, что G является решением уравнения (S_0^*), легко получим тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}(GU) - GS(U) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial\tau} - GA\right)U\right] + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial t} - GB\right)U\right], \qquad (28.15)$$

где $U = U(t, \tau)$, $G = G(t, \tau, z, \zeta)$. Из этого тождества, если принять во внимание (28.2), после простых выкладок получим:

$$\begin{aligned} U(z, \zeta) = {} & G(z_0, \zeta_0, z, \zeta)\, U(z_0, \zeta_0) + \\ & + \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(t, \tau, z, \zeta)\, S_{t\tau}[U(t, \tau)]\, d\tau + \\ & + \int_{z_0}^{z} G(t, \zeta_0, z, \zeta)\left[\frac{\partial U(t, \zeta_0)}{\partial t} + B(t, \zeta_0)\, U(t, \zeta_0)\right] dt + \\ & + \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(z_0, \tau, z, \zeta)\left[\frac{\partial U(z_0, \tau)}{\partial\tau} + A(z_0, \tau)\, U(z_0, \tau)\right] d\tau, \end{aligned} \qquad (28.16)$$

где z_0 и ζ_0 — произвольно зафиксированные точки областей $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно. Это есть тождество, годное для любой матричной функции U, элементы которой — аналитические функции переменных z, ζ в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$.

Подставим в (28.16) вместо $U(z, \zeta)$ функцию $G(z_0, \zeta_0, z, \zeta)$. Тогда, принимая во внимание (28.13), (28.14), (28.7), получим:

$$\int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(t, \tau, z, \zeta)\, S_{t\tau}[G(z_0, \zeta_0, t, \tau)]\, d\tau = 0. \qquad (28.17)$$

Отсюда сразу вытекает, что $S_{t\tau}[G(z_0, \zeta_0, t, \tau)] = 0$, т. е. матрица $G(z, \zeta, t, \tau)$ относительно последних двух аргументов является решением уравнения (S_0).

6°. Пусть теперь матрица $U(z,\zeta)$ — решение уравнения (S_0). Тогда (28.16) принимает вид:

$$U(z,\zeta)=G(z_0,\zeta_0,z,\zeta)\,\alpha_0+\int_{z_0}^{z}G(t,\zeta_0,z,\zeta)\,\Phi(t)\,dt+\\+\int_{\zeta_0}^{\zeta}G(z_0,\tau,z,\zeta)\,\Phi^*(\tau)\,d\tau,\qquad(28.18)$$

где

$$\alpha_0=U(z_0,\zeta_0),\quad \Phi(z)=\frac{\partial U(z,\zeta_0)}{\partial z}+B(z,\zeta_0)\,U(z,\zeta_0),\\ \Phi^*(\zeta)=\frac{\partial U(z_0,\zeta)}{\partial\zeta}+A(z_0,\zeta)\,U(z_0,\zeta).\qquad(28.19)$$

Очевидно, $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ — матрицы, элементы которых суть голоморфные функции в $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно. Нетрудно теперь видеть, что и, обратно, формула (28.18) даёт всегда матричную функцию, удовлетворяющую уравнению (S_0). Элементы матрицы, заданной формулой (28.18), очевидно, будут аналитическими функциями z, ζ в области $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$, если подставлять вместо α_0 любую постоянную матрицу, а вместо $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ — любые матрицы, элементы которых суть голоморфные функции переменных z, ζ в области $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно. В частности, если α_0 — постоянный вектор, а Φ, Φ^* — вектор-функции, то, очевидно, формула (28.18) даёт также вектор-функцию, удовлетворяющую уравнению (S_0), т. е. тогда эта формула даёт совокупность функций $u_1,\ldots,u_n$, удовлетворяющую системе уравнений (S_0).

Итак, мы установили, что *формула* (28.18) *даёт все аналитические в области* $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ *решения уравнения* (S_0). Мы ниже докажем, что эта формула даёт также все регулярные в $\mathfrak{D}$ решения этого уравнения.

7°. Заметим, что формула (28.18) даёт решение следующей задачи (Гурса):

Требуется найти аналитическое в области $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$ *матричное решение* $U(z,\zeta)$ *уравнения* (S_0), *удовлетворяющее условиям:*

$$U(z,\zeta_0)=\Phi_0(z),\qquad U(z_0,\zeta)=\Phi_0^*(\zeta),\qquad(28.20)$$

где z_0, ζ_0 — *фиксированные точки в* $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ *соответственно,* $\Phi_0(z)$, $\Phi_0^*(\zeta)$ — *произвольные матрицы, элементы которых суть голоморфные функции в* $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ *соответственно, причём имеет место равенство*

$$\Phi_0(z_0)=\Phi_0^*(\zeta_0).\qquad(28.21)$$

Эта задача имеет единственное решение, которое выразится формулой (28.18), если положить

$$\begin{gathered}\alpha_0=\Phi_0(z_0),\quad \Phi(z)=\Phi_0'(z)+B(z,\zeta_0)\Phi_0(z),\\ \Phi^*(\zeta)=\Phi_0^{*\prime}(\zeta)+A(z_0,\zeta)\Phi_0^*(\zeta).\end{gathered}\tag{28.22}$$

8°. Пусть теперь $\Psi(z,\zeta)$ — какая-нибудь матрица, элементы которой суть аналитические функции переменных z, ζ в области $(\mathfrak{D},\overline{\mathfrak{D}})$. Тогда из (28.16) получим, что матрица

$$U_0(z,\zeta)=\int\limits_{z_0}^{z}dt\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}G(t,\tau,z,\zeta)\Psi(t,\tau)\,d\tau\tag{28.23}$$

представляет собой частное (матричное) решение неоднородного уравнения $S(U)=\Psi(z,\zeta)$.

§ 29. Элементарные решения. Аналитический характер решений системы (S_0). **1°.** Пусть попрежнему α_0 — какая-нибудь постоянная прямоугольная матрица, а $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$ — какие-нибудь прямоугольные матрицы, элементы которых суть голоморфные функции в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно; $\mathfrak{D}$ — некоторая основная область. Введём теперь следующие обозначения:

$$\Phi_0(z)=\frac{\alpha_0}{2}+\int\limits_{z_0}^{z}\Phi(t)\,dt,\qquad \Phi_0^*(\zeta)=\frac{\alpha_0}{2}+\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi^*(\tau)\,d\tau,\tag{29.1}$$

где $z_0\in\mathfrak{D}$, $\zeta_0\in\overline{\mathfrak{D}}$ — фиксированные точки. Очевидно, $\Phi_0(z)$ и $\Phi_0^*(\zeta)$ — матрицы, элементы которых — голоморфные функции в $\mathfrak{D}$ и $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно. Тогда при помощи интегрирования по частям из (28.18) получим:

$$\begin{gathered}U(z,\zeta)=G(z,\zeta_0,z,\zeta)\Phi_0(z)-\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\partial}{\partial t}G(t,\zeta_0,z,\zeta)\Phi_0(t)\,dt+\\ +G(z_0,\zeta,z,\zeta)\Phi_0^*(\zeta)-\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{\partial}{\partial\tau}G(z_0,\tau,z,\zeta)\Phi_0^*(\tau)\,d\tau.\end{gathered}\tag{29.2}$$

Как видно из (29.1), мы можем $\Phi_0(z)$ и $\Phi_0^*(\zeta)$ подчинить условию:

$$\Phi_0(z_0)=\Phi_0^*(\zeta_0).\tag{29.3}$$

При соблюдении этого условия Φ_0 и Φ_0^* однозначно определяются через $U(z, \zeta)$. Мы можем теперь формулу (29.2) переписать ещё в виде:

$$U(z, \zeta) = G(z, \zeta_0, z, \zeta)\,\Phi_0(z) + G(z_0, \zeta, z, \zeta)\,\Phi_0^*(\zeta) -$$
$$-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\sigma} G(z_0 + (z - z_0)\sigma, \zeta_0, z, \zeta)\,\Phi_0(z_0 + (z - z_0)\sigma)\,d\sigma +$$
$$+\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\sigma} G(z_0, (\zeta - \zeta_0)\sigma + \zeta_0, z, \zeta)\,\Phi_0^*(\zeta_0 + (\zeta - \zeta_0)\sigma)\,d\sigma. \quad (29.4)$$

2°. Подставим теперь в (29.4) следующие матричные функции:

$$\Phi_0(z) = I_n C_0 \lg(z - z_0), \quad \Phi_0^*(\zeta) = I_n C_0 \lg(\zeta - \zeta_0), \quad (29.5)$$

где C_0 — пока неопределённая постоянная. Тогда получим следующее выражение:

$$\Omega_1(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = C_0\{G(z_0, \zeta_0, z, \zeta)\lg(z - z_0)(\zeta - \zeta_0) - \Omega_0(z, \zeta, z_0, \zeta_0)\}, \quad (29.6)$$

где

$$\Omega_0(z, \zeta, z_0, \zeta_0) =$$
$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\sigma}\{G(z_0 + (z - z_0)\sigma, \zeta_0, z, \zeta) + G(z_0, \zeta_0 + (\zeta - \zeta_0)\sigma, z, \zeta)\}\lg\sigma\cdot d\sigma. \quad (29.7)$$

Выражение (29.6) представляет собой (матричное) решение уравнения (S_0), имеющее в точках z_0, ζ_0 логарифмическую многозначность.

Предположим теперь, что $\zeta = \bar{z}$, $\zeta_0 = \bar{z}_0$. Тогда (29.6) примет вид:

$$\Omega_1(z, \bar{z}, z_0, \bar{z}_0) = C_0[G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z})\lg r^2 - \Omega_0(z, \bar{z}, z_0, \bar{z}_0)], \quad (29.8)$$

где $r = |z - z_0|$. Это выражение уже является матрицей, элементы которой — однозначные функции действительных переменных x, y, имеющие логарифмическую особенность в точке (x_0, y_0).

Выражение (29.8) мы будем называть *элементарным решением* уравнения (S_0), а точку (x_0, y_0) — *полюсом* этого решения. Добавляя к правой части (29.8) любое регулярное решение уравнения (S_0), мы получим опять элементарное решение того же уравнения.

Теперь возникает такой вопрос: можно ли за счёт добавления регулярного решения к правой части (29.8) получить такую матрицу, которая относительно переменных x_0, y_0 будет элементарным решением сопряжённого уравнения (S_0^*) с полюсом в точке (x, y)? Так же, как и в случае одного уравнения (см. § 7, гл. 1), такие элементарные решения существуют; их мы будем называть *стандартными элементарными* решениями уравнения (S_0). Мы теперь построим одно из стандартных элементарных решений уравнения (S_0).

Рассмотрим выражение

$$\Omega(z, \zeta, z_0, \zeta_0) = \Omega_1(z, \zeta, z_0, \zeta_0) - \\ - \int_{z_0'}^{z_0} d\xi \int_{\zeta_0'}^{\zeta_0} S_{\xi\eta}^{*}\left[\Omega_1(z, \zeta, \xi, \eta)\right] G(z_0, \zeta_0, \xi, \eta)\, d\eta, \quad (29.9)$$

где z_0' и ζ_0' — фиксированные точки в $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно. Если теперь мы допустим, что $\zeta = \bar{z} = x - iy$, $\zeta_0 = \bar{z}_0 = x_0 - iy_0$, $z_0' = \bar{\zeta}_0'$, $C_0 = -1/4\pi$, то получим:

$$\omega(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} g(x, y, x_0, y_0) \lg\frac{1}{r} + g_0(x, y, x_0, y_0), \quad (29.10)$$

которая является стандартным элементарным решением уравнения (S_0); здесь

$$g(x, y, x_0, y_0) = G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}),$$

$$g_0(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi}\Omega_0(z, \bar{z}, z_0\, \bar{z}_0) - \\ - \int_{z_0'}^{z_0} d\xi \int_{\bar{z}_0'}^{\bar{z}_0} S_{\xi\eta}^{*}\left[\Omega_1(z, \bar{z}, \xi, \eta)\right] G(z_0, \bar{z}_0, \xi, \eta)\, d\eta. \quad (29.11)$$

3°. Пусть T — некоторая область, а L — её граница. Будем предполагать, что L состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Тогда имеет место следующее легко доказуемое тождество:

$$\iint_T \left[v\, S(u) - S^{*}(v)\, u\right] d\xi\, d\eta = \\ = \int_L \left[\frac{dv}{d\nu} u - v\frac{du}{d\nu} - vau\cos(\nu, x) - vbu\cos(\nu, y)\right] ds, \quad (29.12)$$

где u и v — произвольные матрицы, элементы которых — функции переменных x, y, имеющие непрерывные частные производные первых двух порядков в T и частные производные первого порядка, непрерывные в $T+L$; ν — внутренняя нормаль кривой L.

Предположим теперь, что $T + L \subset \mathfrak{D}$ и $v = \omega(x, y, \xi, \eta)$, где ω — стандартное элементарное решение уравнения (S_0); здесь (x, y) — какая-нибудь фиксированная точка области T, а (ξ, η) — точка интеграции. Пусть, далее, u — (матричное) решение уравнения (S_0), регулярное в T. Тогда, применяя формулу (29.12) к области, которая получится из T путём удаления малого круга с центром в точке (x, y), после предельного перехода будем иметь:

$$u(x, y) = \int_L \left[\frac{d\omega}{d\nu} u - \omega \frac{du}{d\nu} - \omega\,(au\cos(\nu, x) + bu\cos(\nu, y))\right] ds. \quad (29.13)$$

Из этой формулы вытекает

Теорема 1. *Всякое регулярное решение уравнения* (S_0) *является аналитической функцией в области регулярности.*

Предположим теперь, что T — односвязная область, принадлежащая $\mathfrak{D}$. Рассмотрим матричную функцию, заданную при помощи следующего интеграла:

$$U(z, \zeta) = \int_L \left[\frac{d}{d\nu} \Omega(z, \zeta, t, \bar{t}) \cdot u - \Omega(z, \zeta, t, \bar{t}) \frac{du}{d\nu} - \right.$$

$$\left. - \Omega(z, \zeta, t, \bar{t})\,(au\cos(\nu, x) + bu\cos(\nu, y))\right] ds. \quad (29.14)$$

Ясно, что элементы этой матрицы являются аналитическими функциями переменных z, ζ в области $(T, \bar{T})$; далее, очевидно, $U(z, \zeta) = u(x, y)$ при $\zeta = \bar{z} = x - iy, (x, y) \in T$. Следовательно, $U(z, \zeta)$ представляет собой аналитическое продолжение $u(x, y)$ в область комплексных значений переменных x, y.

Таким образом, мы пришли к следующему расширению предыдущей теоремы:

Теорема 2. *Пусть T — односвязная область, принадлежащая $\mathfrak{D}$. Пусть $u(x, y)$ — некоторое (матричное) решение уравнения (S_0), регулярное в T. Тогда элементы матрицы $u(x, y)$ представляют собой аналитические функции действительных переменных x, y в области T и их аналитические продолжения в область комплексных значений аргументов являются аналитическими функциями комплексных переменных $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$ в области $(T, \bar{T})$. Это аналитическое продолжение матрицы $u(x, y)$ осуществляется формулой* (29.14).

§ 30. Общие представления регулярных решений системы уравнений (S_0).

На основании вышедоказанных свойств регулярных решений уравнения (S_0) мы можем теперь вывести общие формулы, дающие все решения этого уравнения, регулярные в произвольной односвязной области, принадлежащей некоторой основной области $\mathfrak{D}$.

1°. Пусть T — односвязная область, принадлежащая $\mathfrak{D}$. Пусть $u(x, y)$ — некоторое (матричное) решение уравнения (S_0), регулярное в T. Тогда на основании теоремы 2 предыдущего параграфа $u(x, y)$ можно продолжить аналитически в область комплексных значений переменных x, y; полученная функция $U(z, \zeta)$ будет аналитическим решением уравнения (S_0) в области $(T, \overline{T})$. Поэтому $U(z, \zeta)$ можно представить в виде (28.18). Но при $\zeta=\overline{z}$ последняя формула выглядит так:

$$u(x, y)=G(z_0, \zeta_0, z, \overline{z})\,\alpha_0+\int_{z_0}^{z} G(t, \zeta_0, z, \overline{z})\,\Phi(t)\,dt+$$
$$+\int_{\zeta_0}^{\overline{z}} G(z_0, \tau, z, \overline{z})\,\Phi^*(\tau)\,d\tau. \qquad (30.1)$$

Эта формула, где α_0 — любая постоянная матрица, $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ — любые матрицы, элементы которых суть произвольные голоморфные функции в T и $\overline{T}$ соответственно, даёт все решения уравнения (S_0), регулярные в T; α_0, Φ, Φ^* однозначно определяются через $u(x, y)$ при помощи формул (28.19).

Формула (30.1) внешне похожа на формулу (10.3). Однако не надо забывать, что в (30.1) в произведениях нельзя менять порядка сомножителей.

Из (30.1) мы можем получить ряд других формул, дающих также общие представления всех решений уравнения (S_0).

Так, например, путём интегрирования по частям из (30.1) получим следующую формулу:

$$u(x, y)=G(z, \zeta_0, z, \zeta)\,\varphi(z)-\int_{z_0}^{z} H(t, \zeta_0, z, \zeta)\,\varphi(t)\,dt+$$
$$+G(z_0, \zeta, z, \zeta)\,\varphi^*(\zeta)-\int_{\zeta_0}^{\zeta} H^*(z_0, \tau, z, \zeta)\,\varphi^*(\tau)\,d\tau, \qquad (30.2)$$

где $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$

$$\left.\begin{aligned} H(t, \zeta_0, z, \zeta)&=\frac{\partial}{\partial t}G(t, \zeta_0, z, \zeta)-G(t, \zeta_0, z, \zeta)\,B(t, \zeta_0),\\ H^*(z_0, \tau, z, \zeta)&=\frac{\partial}{\partial \tau}G(z_0, \tau, z, \zeta)-G(z_0, \tau, z, \zeta)\,A(z_0, \tau),\end{aligned}\right\} \qquad (30.3)$$

а $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ — матрицы, элементы которых суть произвольные голоморфные функции в T и $\overline{T}$ соответственно; эти матрицы можно подчинить условиям

$$\varphi(z_0)=\varphi^*(\zeta_0). \qquad (30.4)$$

Тогда они однозначно определяются через $u(x, y)$ по формулам:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= U(z, \zeta_0) - \frac{1}{2} G(z_0, \zeta_0, z, \zeta_0)\, U(z_0, \zeta_0), \\ \varphi^*(\zeta) &= U(z_0, \zeta) - \frac{1}{2} G(z_0, \zeta_0, z_0, \zeta)\, U(z_0, \zeta_0), \\ U(z, \zeta) &= u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right). \end{aligned} \tag{30.5}$$

Мы можем вместо (30.1) пользоваться для представления решений уравнения (S_0) также следующей более общей формулой:

$$u(x, y) = G(z_0, \zeta_0, z, \zeta)\, \alpha_0 + \int_{z_0}^{z} G(t, \zeta_1, z, \zeta)\, \Phi(t)\, dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(z_1, \tau, z, \zeta)\, \Phi^*(\tau)\, d\tau, \tag{30.6}$$

где $z_0 \in T$, $z_1 \in \mathfrak{D}$, $\zeta_0 \in \overline{T}$, $\zeta_1 \in \overline{\mathfrak{D}}$ — произвольно фиксированные точки, α_0 — произвольная постоянная матрица, $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ — произвольные матрицы, элементы которых суть голоморфные функции в T и $\overline{T}$ соответственно; здесь попрежнему предполагается, что T — односвязная область, принадлежащая $\mathfrak{D}$. Аналогично можно обобщить также формулу (30.2) и, вообще, можно получить формулы, аналогичные (10.19) и (10.22).

2°. Рассмотрим теперь особо тот случай, когда коэффициенты уравнения (S_0) суть действительные функции действительных переменных x, y. Нетрудно доказать, что все действительные (матричные) решения такого уравнения, регулярные в односвязной области T, принадлежащей $\mathfrak{D}$, даются формулой:

$$u(x, y) = G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, \alpha_0 + \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} G(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\, \Phi(t)\, dt, \tag{30.7}$$

где α_0 — произвольная постоянная матрица, $\Phi(z)$ — произвольная матрица, элементы которой суть голоморфные функции в T, причём α_0 и $\Phi(z)$ однозначно определяются через $u(x, y)$. В частности, если положить $z_0 = 0$, то будем иметь:

$$\alpha_0 = u(0,0), \quad \Phi(z) = \frac{d}{dz} u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + B(z, 0)\, u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right). \tag{30.8}$$

3°. Мы можем получить также формулы, дающие представления всех решений уравнения (S_0) в многосвязной области. Эти формулы внешне будут совершенно такого же вида, как и соответствующие формулы § 11 для случая одного уравнения. Поэтому мы считаем излишним останавливаться здесь на их выводе.

§ 31. Замечания о решении граничных задач для системы уравнений (S_0). Мы можем поставить для системы уравнений [1])

$$\Delta u_i + \sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial y} + c_{ik} u_k \right) = 0 \tag{S_0}$$

граничные задачи, аналогичные задачам, рассмотренным и решённым в предыдущей главе для одного уравнения вида

$$\Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 . \tag{E_0}$$

Если мы воспользуемся полученными в предыдущем параграфе общими представлениями решений системы (S_0), то упомянутые граничные задачи можно привести к эквивалентным системам сингулярных интегральных уравнений, теория которых в настоящее время разработана с той же полнотой, как и теория одного сингулярного интегрального уравнения (см. Мусхелишвили [1], гл. VI). Поэтому с принципиальной точки зрения граничные задачи для системы уравнений (S_0) можно решить с такой же полнотой, как и граничные задачи для одного уравнения (E_0). Если воспользуемся матричной записью, то граничные задачи, связанные с системой (S_0), по внешнему виду не будут отличаться от соответствующих задач для одного уравнения. Это обстоятельство позволит легко распространить развитые нами в гл. III методы на граничные задачи, связанные с системой (S_0).

Поэтому мы не будем здесь останавливаться подробно на изложении этих методов; мы дадим лишь формулировку граничных задач, запишем их граничные условия в матричной форме и ограничимся указаниями самого общего характера относительно методов их решения.

1°. Начнём с граничной задачи Дирихле и при этом для большей ясности изложения мы ограничимся рассмотрением случая односвязной области.

Пусть $\mathfrak{D}$ — основная область системы уравнений (S_0). Пусть T — некоторая односвязная область класса Ah, принадлежащая $\mathfrak{D}$. Задача Дирихле для системы (S_0) состоит в следующем:

Требуется найти решение $u = (u_1, \ldots, u_n)$ системы уравнений (S_0), регулярное в T, непрерывное в $T + L$ и удовлетворяющее на границе условию

$$u_i^+ = f_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (\text{на } L), \tag{31.1}$$

где L — граница области T, f_i — заданные действительные функции, непрерывные на L.

---

[1]) В этом параграфе коэффициенты системы (S_0) и её решения мы считаем действительными функциями действительных переменных x, y.

Обозначая через f вектор с компонентами $f_1, \ldots, f_n$, можно записать граничные условия (31.1) в виде

$$u^+ = f \qquad (\text{на } L). \tag{31.2}$$

Согласно формуле (30.2) искомое решение можно представить так:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left[G(z, \bar{z}_0, z, \bar{z})\,\varphi(z) - \int_{z_0}^{z} H(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\,\varphi(t)\,dt\right], \tag{31.3}$$

где z_0 — фиксированная точка в T, $\varphi(z)$ — вектор, компоненты которого суть голоморфные функции в T; G и H — матрицы; вектор $\varphi(z)$ мы можем подчинить условию

$$\varphi(z_0) = \overline{\varphi(z_0)}. \tag{31.4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $z_0 = 0$; это, конечно, не ограничивает общности рассуждений.

Предполагая, что компоненты $\varphi(z)$ непрерывны в смысле Гельдера в $T + L$, на основании нашей леммы, доказанной в [13], можем написать (см. формулу (22.5)):

$$\varphi(z) = \int_L \frac{t\mu(t)\,ds}{t - z} \qquad (z \in T), \tag{31.5}$$

где $\mu(t)$ — вектор, компоненты которого суть действительные функции, непрерывные в смысле Гельдера на L.

Подставляя (31.5) в (31.3), получим:

$$u(x, y) = \int_L K(z, t)\,\mu(t)\,ds, \tag{31.6}$$

где

$$K(z, t) = \operatorname{Re}\left[\frac{G(z, 0, z, \bar{z})\,t}{t - z} - \int_0^z \frac{H(t_1, 0, z, \bar{z})\,t}{t - t_1}\,dt_1\right]. \tag{31.7}$$

Очевидно, $K(z, t)$ — матрица, элементы которой при $t \in L$ суть аналитические функции x, y $(z = x + iy)$ в области T, причём каждый столбец её является решением системы уравнений (S_0).

Если мы теперь в (31.6) перейдём к пределу, когда z стремится из области T к некоторой точке t_0 границы L, то согласно (31.2) получим:

$$A(t_0)\,\mu(t_0) + \int_L K(t_0, t)\,\mu(t)\,ds = f(t_0), \tag{31.8}$$

где

$$A(t_0) = \operatorname{Re}\left[i\pi t_0\,\bar{t}_0'\,G(t_0, 0, t_0, \bar{t}_0)\right]. \tag{31.9}$$

Векторное уравнение (31.8) представляет собой систему сингулярных интегральных уравнений; если принять во внимание свойства (28.8), (28.9) матрицы G, то нетрудно доказать, что эта система *нормального типа* (см. Мусхелишвили [1], стр. 425).

Повторяя рассуждения § 22 и допустив, что f непрерывна по Гельдеру, можем доказать эквивалентность уравнения (31.8) с граничной задачей (31.1).

2°. Рассмотрим теперь общую линейную граничную задачу, причём опять ограничимся рассмотрением односвязной области. Попрежнему будем предполагать, что T — односвязная область класса Ah, принадлежащая $\mathfrak{D}$.

Требуется найти решение $u = (u_1, \ldots, u_n)$ системы уравнений (S_0), удовлетворяющее следующим условиям: функции $u_1, \ldots, u_n$ имеют непрерывные в $T+L$ частные производные порядка $\leqslant m$ и удовлетворяют граничным условиям

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{p,q=0}^{p+q\leqslant m} \left[a_{ik}^{pq}(t) \left(\frac{\partial^{p+q} u_k}{\partial x^p \partial y^q}\right)^+ + \int_L \beta_{ik}^{pq}(t, t_1) \left(\frac{\partial^{p+q} u_k}{\partial x_1^p \partial y_1^q}\right)^+ ds_1 \right] = f_i(t)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n), \tag{31.10}$$

где m — целое число >0; a_{ik}^{pq}, f_i — заданные функции, непрерывные на L; β_{ik}^{pq} — также заданные функции пары точек t, t_1 кривой L, которые удовлетворяют условиям следующего вида:

$$\beta_{ik}^{pq}(t, t_1) = \frac{\tilde{\beta}_{ik}^{pq}(t, t_1)}{|t - t_1|^\alpha}, \qquad 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{31.11}$$

причём $\tilde{\beta}_{ik}^{pq}(t, t_1)$ — непрерывные функции.

Пусть a^{pq}, b^{pq} — матрицы с элементами a_{ik}^{pq}, β_{ik}^{pq} $(i, k = 1, \ldots, n)$ соответственно. Тогда условие (31.10) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{p,q=0}^{p+q\leqslant m} \left[a^{pq}(t) u_{pq}^+(t) + \int_L b^{pq}(t, t_1) u_{pq}^+(t_1) ds_1 \right] = f(t) \tag{31.12}$$
$$\left(u_{pq} = \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}\right),$$

где u, f — векторы с компонентами $u_1, \ldots, u_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ соответственно. Это условие по внешнему виду совпадает с граничным условием (21.2) задачи A для одного уравнения вида (E_0).

Представим теперь искомый вектор u в виде (31.3), причём подставим в эту формулу вместо $\varphi(z)$ выражение

$$\varphi(z) = \int_L \mu(t) \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{z}{t}\right) ds + \int_L \mu(t)\, ds, \tag{31.13}$$

где $\mu(t)$ — вектор, компоненты которого суть действительные функции, непрерывные в смысле Гельдера на L. Тогда получим:

$$u(x, y) = \int_L \boldsymbol{K}_0(z, t)\,\mu(t)\,ds, \tag{31.14}$$

где

$$\boldsymbol{K}_0(z, t) = \boldsymbol{G}(0, 0, z, \bar{z}) + \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \boldsymbol{G}(t, 0, z, \bar{z})\,\boldsymbol{B}(t, 0)\,dt + \right.$$
$$+ \boldsymbol{G}(z, 0, z, \bar{z})\left(1 - \frac{z}{t}\right)^{n-1} \lg\left(1 - \frac{z}{t}\right) -$$
$$\left. - \int_0^z \boldsymbol{H}(\sigma, 0, z, \bar{z})\left(1 - \frac{\sigma}{t}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{\sigma}{t}\right) d\sigma\right\}. \tag{31.15}$$

Очевидно, $\boldsymbol{K}_0$ — матрица, элементы которой при $t \in L$ суть аналитические функции переменных x, y $(z = x + iy)$ в области T, причём каждый столбец её является решением системы уравнений (S_0).

Подставляя (31.14) в граничное условие (31.12), получим систему сингулярных интегральных уравнений, которую здесь не будем выписывать; она аналогична уравнению (25.14).

Нетрудно доказать, что при выполнении определённого условия вида (25.23) полученная система сингулярных интегральных уравнений — нормального типа и что она эквивалентна исходной граничной задаче, если допустить, что α_{ik}^{pq}, $\tilde{\beta}_{ik}^{pq}$, f_i непрерывны в смысле Гельдера.

Примечание. Здесь, как и в случае одного уравнения, путём соответствующего подбора интегральных представлений вектор-функций $\varphi(z)$ можно получить уравнения Фредгольма для решения граничных задач. Например, нетрудно проверить, что если вместо формулы (31.5) воспользуемся представлением

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\boldsymbol{H}_0^{-1}(t)\,\mu(t)\,dt}{t - z}, \tag{*}$$

где $\boldsymbol{H}_0^{-1}$ — обратная матрица по отношению к матрице $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{G}(t, 0, t, \bar{t})$, μ — действительный вектор, то для решения задачи Дирихле получим систему уравнений Фредгольма.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСШЕГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Эта глава посвящается дифференциальным уравнениям вида

$$\Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} L_k\,(\Delta^{n-k} u) = f(x, y), \tag{M}$$

где $n \geqslant 1$

$$\Delta^0 = 1, \quad \Delta^m = \Delta\,(\Delta^{m-1}), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_k = \sum_{p,\, q=0}^{p+q\leqslant k} a_k^{pq}(x, y)\,\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\,\partial y^q}.$$

Мы предполагаем, что $a_k^{pq}(x, y)$, $f(x, y)$ — аналитические функции переменных x, y в некоторой области $\mathfrak{T}$ плоскости $z = x + iy$.

При $n = 1$ мы будем иметь дифференциальное уравнение второго порядка, которому были посвящены главы I, II, III. При $n = 2$ получим уравнение четвёртого порядка вида

$$\Delta\Delta u + a\frac{\partial\Delta u}{\partial x} + b\frac{\partial\Delta u}{\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + e\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\,\frac{\partial u}{\partial x} + h\,\frac{\partial u}{\partial y} + ku = f.$$

Уравнения этого вида встречаются при изучении изгиба пластинок, а также в теории пологих упругих оболочек (см. Тимошенко [1], стр. 275; В. З. Власов [1]; работы автора [25], [26]). Частным видом уравнения (M) является также уравнение

$$\Delta^n u + a_1\Delta^{n-1}u + \ldots + a_n u = f,$$

где $a_1, \ldots, a_n$, f — аналитические функции переменных x, y.

Наиболее частным, но вместе с тем весьма типичным случаем являются уравнение

$$\Delta^n u = 0,$$

которое иногда называют *n-гармоническим уравнением*[1]).

I. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (M)

В этом разделе выводятся формулы, выражающие все решения уравнения (M) через голоморфные функции одной комплексной переменной и с их помощью изучаются некоторые свойства его решений. Мы воспроизводим здесь в дополненном и в ряде случаев существенно видоизменённом виде результаты главы I работы автора [5].

§ 32. Общие представления решений уравнения $\Delta^n u = 0$. В этом параграфе мы выводим формулы, дающие общее выражение решений уравнения

$$\Delta^n u = 0. \tag{32.1}$$

Это уравнение мы можем записать ещё в виде

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial z^n \partial \zeta^n} = 0, \tag{32.2}$$

где $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$.

1°. Пусть T — некоторая односвязная область в плоскости $z = x + iy$. Решения уравнения $\Delta^n u = 0$, которые в области T имеют непрерывные производные порядка $\leqslant 2n$, будем называть в дальнейшем *регулярными решениями* или ещё *n-гармоническими функциями* в области T.

Пусть u — регулярное в T (вообще комплексное) решение уравнения $\Delta^n u = 0$. Тогда, очевидно,

$$\Delta^{n-1} u = u_0(x, y), \tag{32.3}$$

где u_0 — комплексная гармоническая функция в T, которую мы можем представить в виде:

$$u_0 = 4^{n-1}(\varphi_0(z) + \varphi_0^*(\zeta)) \qquad (z = x + iy,\ \zeta = x - iy). \tag{32.4}$$

Здесь $\varphi_0(z)$, $\varphi_0^*(\zeta)$ — голоморфные функции в T, $\overline{T}$ соответственно, которые можно подчинить условию

$$\varphi_0(0) = \varphi_0^*(0); \tag{32.5}$$

мы считаем, что начало координат принадлежит области T; это, конечно, не ограничивает общности наших рассуждений.

---

[1]) Некоторые авторы называют его также *полигармоническим* уравнением.

При соблюдении условия (32.5) функции φ_0, φ_0^* определяются однозначно через u.

Уравнение (32.3), в силу (32.4), можно записать так:

$$\frac{\partial^{2n-2} u}{\partial z^{n-1}\,\partial\zeta^{n-1}}=\varphi_0(z)+\varphi_0(\zeta).$$

Отсюда имеем:

$$u=v+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{\zeta}\frac{(\zeta-\tau)^{n-2}}{(n-2)!}\varphi_0^*(\tau)\,d\tau+\frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{z}\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}\varphi_0(t)\,dt,$$

где v — регулярное в T решение уравнения $\Delta^{n-1}v=0$; очевидно, v однозначно определяется через u. Применяя теперь аналогичные рассуждения к уравнению $\Delta^{n-1}v=0$, получим:

$$v=w+\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}\int_0^{\zeta}\frac{(\zeta-\tau)^{n-3}}{(n-3)!}\varphi_1^*(\tau)\,d\tau+\frac{\zeta^{n-2}}{(n-2)!}\int_0^{z}\frac{(z-t)^{n-3}}{(n-3)!}\varphi_1(t)\,dt,$$

где w—регулярное в T решение уравнения $\Delta^{n-2}w=0$, а $\varphi_1(z)$, $\varphi_1^*(\zeta)$— голоморфные функции в T, $\overline{T}$ соответственно, которые можно подчинить условию

$$\varphi_1(0)=\varphi_1^*(0);$$

при соблюдении этого условия функции w, φ_1, φ_1^* однозначно выражаются через u.

Продолжая аналогично далее, приходим к следующему результату:

$$u=\varphi_{n-1}(z)+\varphi_{n-1}^*(\zeta)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{z^k}{k!}\int_0^{\zeta}\frac{(\zeta-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi_{n-k-1}^*(\tau)\,d\tau+\frac{\zeta^k}{k!}\int_0^{z}\frac{(z-t)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi_{n-k-1}(t)\,dt\right]$$
$$(z=x+iy,\ \zeta=x-iy),\tag{32.6}$$

где $\varphi_k(z)$, $\varphi_k^*(\zeta)$ $(k=0,\ldots,n-1)$ — голоморфные функции в T, $\overline{T}$ соответственно, которые можно подчинить условиям

$$\varphi_k(0)=\varphi_k^*(0)\qquad(k=0,1,\ldots,n-1).\tag{32.7}$$

При соблюдении этих условий, как легко видеть, функции φ_k, φ_k^* $(k=0,1,\ldots,n-1)$ однозначно выражаются через u.

Нетрудно теперь проверить, что формула (32.6) любой совокупности функций $\varphi_k(z)$, $\varphi_k^*(\zeta)$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$, голоморфных в T, $\overline{T}$ соответственно, сопоставляет регулярное в T решение уравнения $\Delta^n u=0$.

Таким образом, *формула* (32.6) *даёт общее выражение всех регулярных в T решений уравнения $\Delta^n u=0$ через $2n$ голоморфных функций одной комплексной переменной.*

В силу (32.7) можно написать:

$$\varphi_{n-k-1}(z)=\frac{1}{2}a_k+\int_0^z \chi_k(t)\,dt,\quad \varphi^*_{n-k-1}(\zeta)=\frac{1}{2}a_k+\int_0^\zeta \chi^*_k(\tau)\,d\tau \qquad (32.8)$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

где $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}$ — постоянные, $\chi_k(z)$, $\chi^*_k(\zeta)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots$ $\ldots,\ n-1)$ — голоморфные функции в T, $\overline{T}$. В силу (32.8) формулу (32.6) можно переписать так:

$$u=\sum_{k=0}^{n-1} a_k\frac{z^k\zeta^k}{k!\,k!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{z^k}{k!}\int_0^\zeta\frac{(\zeta-\tau)^k}{k!}\chi^*_k(\tau)\,d\tau+\frac{\zeta^k}{k!}\int_0^z\frac{(z-t)^k}{k!}\chi_k(t)\,dt\right]. \qquad (32.9)$$

Из этой формулы сразу вытекает, что

$$a_k=\left(\frac{\partial^{2k}u}{\partial z^k\,\partial\zeta^k}\right)_{\substack{z=0\\ \zeta=0}},\quad \chi_k(z)=\left(\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial z^{k+1}\,\partial\zeta^k}\right)_{\zeta=0},$$

$$\chi^*_k(\zeta)=\left(\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial z^k\,\partial\zeta^{k+1}}\right)_{z=0}. \qquad (32.10)$$

Следовательно, a_k, χ_k, χ^*_k $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ однозначно определяются при помощи u, причём важно заметить, что они выражаются исключительно через значения, принимаемые функцией u и её производными

$$\frac{\partial^k u}{\partial\zeta^k},\quad \frac{\partial^k u}{\partial z^k}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

на характеристиках: $(z\in T,\ \zeta=0)$, $(z=0,\ \zeta\in\overline{T})$ соответственно.

Таким образом, формула (32.9) позволяет решить следующую задачу (Гурса):

Требуется найти аналитическое в $(T,\overline{T})$ решение уравнения (32.2), удовлетворяющее условиям

$$\left(\frac{\partial^k u}{\partial\zeta^k}\right)_{\zeta=0}=f_k(z),\quad \left(\frac{\partial^k u}{\partial z^k}\right)^*_{z=0}=f^*_k(\zeta) \qquad (32.11)$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

где $f_k(z)$, $f^*_k(\zeta)$ — голоморфные функции в T, $\overline{T}$ соответственно, удовлетворяющие следующим условиям:

$$f_k^{(m)}(0)=f_m^{*(k)}(0)\qquad (m,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \qquad (32.12)$$

Решение этой задачи даётся формулой (32.9), если туда подставим

$$a_0=f_k^{(k)}(0),\quad \chi_k(z)=f_k^{(k+1)}(z),\quad \chi_k^*(\zeta)=f_k^{*(k+1)}(\zeta) \tag{32.13}$$
$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Таким образом, решение задачи Гурса существует. Нетрудно видеть, что оно единственно.

Из формулы (32.9) вытекает следующая

Теорема. *Всякое регулярное в односвязной области T решение $u(x,\ y)$ уравнения $\Delta^n u=0$ есть аналитическая функция переменных $x,\ y$ в T, причём её аналитическое продолжение является аналитической функцией переменных z, ζ в области $(T, \overline{T})$; $z=x+iy,\ \zeta=x-iy$*[1].

Если u - действительное решение уравнения $\Delta^n u=0$, то формула (32.9) принимает вид:

$$u(x,\ y)=\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k r^{2k}+\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\bar{z}^k}{k!}\int_0^z \frac{(z-t)^k}{k!}\chi_k(t)\,dt, \tag{32.14}$$

где $r=|z|$, $\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$ — любые действительные постоянные, а $\chi_0(z),\ \ldots,\ \chi_{n-1}(z)$ — произвольные голоморфные функции в T.

Формулу (32.9) мы можем записать ещё так:

$$u=\sum_{k=0}^{n-1}(z\zeta)^k\left[\Phi_k(z)+\Phi_k^*(\zeta)\right], \tag{32.15}$$

где

$$\Phi_k(z)=\frac{1}{2}\frac{a_k}{k!\,k!}+\frac{z^{-k}}{k!}\int_0^z \frac{(z-t)^k}{k!}\chi_k(t)\,dt,$$

$$\Phi_k^*(\zeta)=\frac{1}{2}\frac{a_k}{k!\,k!}+\frac{\zeta^{-k}}{k!}\int_0^\zeta \frac{(\zeta-\tau)^k}{k!}\chi_k^*(\tau)\,d\tau \tag{32.16}$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Очевидно, что $\Phi_k(z)$, $\Phi_k^*(\zeta)$ суть голоморфные функции в T, $\overline{T}$ соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_k(0)=\Phi_k^*(0)\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{32.17}$$

---

[1]) Первая часть этой теоремы (об аналитичности регулярных решений уравнения $\Delta^n u=0$), очевидно, сохраняет силу для любой области; вторая часть (об аналитическом продолжении) в случае многосвязной области не имеет места, так как для такой области мы получим, вообще говоря, многозначную функцию.

Если $\zeta=\bar{z}=x-iy$, $(x, y)\in T$, то формула (32.15) принимает вид:

$$u=\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(x, y) r^{2k} \qquad (r=|z|), \tag{32.18}$$

где $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$—гармонические функции в области T, которые однозначно выражаются через u.

Формулу (32.15) мы можем записать также в виде:

$$u=\sum_{k=0}^{n-1} [z^k\Psi_k^*(\zeta)+\zeta^k\Psi_k(z)], \tag{32.19}$$

где $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$,

$$\Psi_k(z)=z^k\Phi_k(z),\ \Psi_k^*(\zeta)=\zeta^k\Phi_k^*(\zeta) \quad (k=0,\ 1, \ldots, n-1). \tag{32.20}$$

Ясно, что функции Ψ_k, Ψ_k^* удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_k^{(m)}(0)=\Psi_k^{*(m)}(0)=0 \qquad (m=1, \ldots, k-1;\ k\geqslant 1),\\ &\Psi_k^{(k)}(0)=\Psi_k^{*\,(k)}(0) \qquad (k=0, 1, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{32.21}$$

Формула (32.19) любой совокупности голоморфных в T, $\bar{T}$ функций $\Psi_k(z)$, $\Psi_k^*(\zeta)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ сопоставляет регулярное решение уравнения $\Delta^n u=0$, но эти функции определяются однозначно через u лишь в том случае, когда соблюдены условия (32.21) или же другие эквивалентные им условия.

Если u—действительное решение, то формулу (32.19) можно записать так:

$$u=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1} z^k\,\overline{\Psi_k(\bar{z})}, \tag{32.22}$$

причём в этом случае условия (32.21) будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_k^{(m)}(0)=0 \qquad (m=1, \ldots, k-1;\ k\geqslant 1),\\ &\Psi_k^{(k)}(0)=\overline{\Psi_k^{(k)}(0)} \quad (k=0,\ 1, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{32.23}$$

2°. Рассмотрим теперь случай многосвязной области. Пусть T—$(m+1)$-связная область плоскости z, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов $C_0, C_1, \ldots, C_m$, причём C_0 содержит бесконечно удалённую точку. Пусть $z_1, \ldots, z_m$—фиксированные точки континуумов $C_1, \ldots, C_m$ соответственно. Мы можем без ущерба для общности допустить, что начало координат принадлежит T.

Проведя в T разрезы, мы можем получить односвязную область T'. Если $u(x, y)$—регулярное в T решение уравнения $\Delta^n u=0$, то оно будет обладать тем же свойством и в T'. Поэтому в T'

мы можем $u(x, y)$ представить в виде (32.19), где $\Psi_k(z)$, $\Psi_k^*(\zeta)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ — голоморфные функции в T', $\overline{T'}$ соответственно. Но из формулы (32.19) получим:

$$\frac{\partial^n u}{\partial z^n}=\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k \Psi_k^{(n)}(z) \qquad (\zeta=\bar{z}). \tag{32.24}$$

Отсюда, так как по условию u — регулярное в T решение уравнения $\Delta^n u=0$, вытекает, что $\Psi_k^{(n)}(z)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ — голоморфные функции в T[1]. Аналогично докажем, что функции $\Psi_k^{*(n)}(\zeta)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ голоморфны в $\bar{T}$. На основании этого легко видеть, что $\Psi_k(z)$ и $\Psi_k^*(\zeta)$ имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\Psi_k(z)=\psi_k(z)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1} A_{kl}^j z^l \lg(z-z_j),\\ \Psi_k^*(\zeta)=\psi_k^*(\zeta)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1} A_{kl}^{*j} \zeta^l \lg(\zeta-\bar{z}_j)\\ (k=0, \quad 1, \ldots, n-1),\end{gathered} \tag{32.25}$$

где ψ_k, ψ_k^* $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ — голоморфные функции в T, $\bar{T}$ соответственно; A_{kl}^j, A_{kl}^{*j} — постоянные.

Подставляя выражения (32.25) в (32.19), получим:

$$\begin{gathered}u=\sum_{k=0}^{n-1}[z^k\psi_k^*(\zeta)+\zeta^k\psi_k(z)]+\\ +\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} z^k\zeta^l[A_{kl}^j\lg(\zeta-\bar{z}_j)+A_{lk}^j\lg(z-z_j)]\\ (z=x+iy, \ \zeta=x-iy).\end{gathered} \tag{32.26}$$

Но так как u — однозначная функция, то необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$A_{kl}^j=A_{lk}^{*j} \qquad (j=1, \ldots, m; \ k, l=0, 1, \ldots, n-1). \tag{32.27}$$

---

[1]) Из (32.24) имеем: $(n-1)!\,\Psi_{n-1}^{(n)}(z)=\dfrac{\partial^{2n-1}u}{\partial z^n\,\partial\zeta^{n-1}}$. Это значит, что $\Psi_{n-1}^{(n)}(z)$ — голоморфная функция в T. Далее, из формулы $k!\,\Psi_k^{(n)}(z)=$
$$=\frac{\partial^{n+k}u}{\partial z^n\,\partial\zeta^k}-\sum_{j=k+1}^{n-1} j(j-1)\ldots(j-k+1)\,\zeta^{j-k}\Psi_j^{(n)}(z) \quad (k=n-2, \ n-3, \ldots, 0)$$
сразу вытекает, что $\Psi_{n-2}^{(n)}(z), \ldots, \Psi_0^{(n)}(z)$ — также голоморфные функции в T.

Тогда формула (32.26) принимает вид:

$$u=\sum_{k=0}^{n-1}[z^k\psi_k^*(\zeta)+\zeta^k\psi_k(z)]+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}B_{kl}^j z^k\zeta^l \lg r_j, \qquad (32.28)$$

где $r_j=|z-z_j|$, $B_{kl}^j=2A_{kl}^j$; $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$.

Таким образом, *формула* (32.28), *где* $\psi_k(z)$, $\psi_k^*(\zeta)$ $(k=0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1)$ — *произвольные голоморфные функции в* T, $\mathring{T}$ *соответственно, а* B_{kl}^j — *произвольные постоянные, даёт все регулярные* (*комплексные*) *решения уравнения* $\Delta^n u=0$ *в* $(m+1)$-*связной области* T.

Нетрудно теперь видеть, что в (32.28) при соблюдении условий (32.21) функции ψ_k, ψ_k^* и постоянные B_{kl}^j однозначно определяются через u. Для этого достаточно обнаружить, что если $u=0$, то все функции ψ_k, ψ_k^* и постоянные B_{kl}^j обращаются в нуль тождественно, но это доказать совсем нетрудно.

Если u — действительное решение, то формула (32.28) будет иметь вид:

$$u=\operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^k\psi_k(z)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l,k=0}^{n-1}B_{kl}^j z^k\zeta^l \lg r_j\right], \qquad (32.29)$$

где $\psi_k(z)$ $(k=0,\ldots,n-1)$ — произвольные голоморфные функции в T, а B_{kl}^j — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям:

$$B_{kl}^j=\overline{B_{lk}^j} \qquad (j=1, \ldots, m;\ k, l=0, 1, \ldots, n-1). \qquad (32.30)$$

Так как функции $\psi_k(z)$ можно подчинить условиям:

$$\begin{aligned}&\psi_k^{(l)}(0)=0 \qquad (l=0, \ldots, k-1,\ k\geqslant 1),\\ &\psi_k^{(k)}(0)=\overline{\psi_k^{(k)}(0)} \qquad (k=0, \ldots, n-1),\end{aligned} \qquad (32.31)$$

то формулу (32.29) мы можем записать ещё в виде:

$$\begin{aligned}u(x, y)=&\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(x, y)r^{2k}+\\ &+\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(P_{jk}(r)\cos k\theta+Q_{jk}(r)\sin k\theta)\right]\lg r_j,\end{aligned} \qquad (32.32)$$

где ω_k $(k=0, \ldots, n-1)$ — гармонические функции в T, которые являются действительными частями голоморфных в T функций; $P_{jk}(r)$, $Q_{jk}(r)$ — произвольные полиномы вида $a_0r^k+a_1r^{k+2}+$ $+\ldots+a_{n-k-1}r^{2n-2-k}$ $(k=0, \ldots, n-1)$.

§ 33. Элементарные решения и функция Грина уравнения $\Delta^n u=0$. **1°.** Подставляя в (32.18) $\omega_0=0, \ldots, \omega_{n-2}=0$, $\omega_{n-1}= = C \lg \frac{1}{r}$, где $r=|z-z_0|$, C — произвольная действительная постоянная $\neq 0$, получим следующее частное решение уравнения $\Delta^n u=0$:

$$\omega(x, y, x_0, y_0)=Cr^{2n-2}\lg\frac{1}{r} \qquad (r=|z-z_0|). \tag{33.1}$$

Очевидно, ω — аналитическая функция своих аргументов всюду на плоскости, за исключением точки $x=x_0$, $y=y_0$; в этой точке ω и все её производные порядка $\leqslant 2n-3$ непрерывны и обращаются в нуль, производные порядка $2n-2$ имеют логарифмическую особенность, а производные порядка $2n-1$ имеют особенность вида $1/r$.

Функция $\omega(x, y, x_0, y_0)$ называется *элементарным решением уравнения* $\Delta^n u=0$, а точка (x_0, y_0) — его *полюсом*.

Добавляя к правой части (33.1) любое решение уравнения $\Delta^n u=0$, регулярное внутри некоторой окрестности точки (x_0, y_0), мы получим опять элементарное решение того же уравнения. Постоянную C можно брать совершенно произвольно ($C\neq 0$); в дальнейшем мы будем считать

$$C=\frac{1}{2\pi 4^{n-1}[(n-1)!]^2}, \tag{33.2}$$

и тогда будем говорить, что элементарное решение *нормировано*.

2°. Пусть T — область, границу которой обозначим через L. Предположим, что L состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Пусть u, v — функции, которые имеют непрерывные частные производные порядка $\leqslant 2n$ в T; будем также считать, что все производные от u и v порядка $\leqslant 2n-1$ непрерывны в $T+L$. Тогда, на основании формулы Грина, будем иметь равенства:

$$\begin{aligned}
&\iint_T (v\Delta^n u-\Delta v\Delta^{n-1}u)\,dT=-\int_L\left(v\frac{d\Delta^{n-1}u}{d\nu}-\frac{dv}{d\nu}\Delta^{n-1}u\right)ds,\\
&\iint_T (\Delta v\Delta^{n-1}u-\Delta^2 v\Delta^{n-2}u)\,dT=-\int_L\left(\Delta v\frac{d\Delta^{n-2}u}{d\nu}-\frac{d\Delta v}{d\nu}\Delta^{n-2}u\right)ds,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\iint_T (\Delta^{n-1}v\Delta u-u\Delta^n v)\,dT=-\int_L\left(\Delta^{n-1}v\frac{du}{d\nu}-\frac{d\Delta^{n-1}v}{d\nu}u\right)ds,
\end{aligned} \tag{33.3}$$

где ν — внутренняя нормаль к L. Если сложим все эти равенства, то получим:

$$\iint_T (v\Delta^n u - u\Delta^n v)\, dT = -\sum_{k=0}^{n-1} \int_L \left(\Delta^k v \frac{d\Delta^{n-k-1} u}{d\nu} - \frac{d\Delta^k v}{d\nu} \Delta^{n-k-1} u \right) ds. \tag{33.4}$$

Эта формула принадлежит Гутцмеру [1]; приведённое здесь доказательство её дано в работе автора [5].

Если u, v удовлетворяют уравнению $\Delta^n u = 0$, то будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_L \left(\Delta^k v \frac{d\Delta^{n-k-1} u}{d\nu} - \frac{d\Delta^k v}{d\nu} \Delta^{n-k-1} u \right) ds = 0. \tag{33.5}$$

3°. Пусть u — решение уравнения $\Delta^n u = 0$, а v — некоторое нормированное элементарное решение последнего с полюсом в точке (x_0, y_0); а именно,

$$v = \omega(x, y, x_0, y_0) + v_0 = \frac{r^{2n-2}}{2\pi 4^{n-1} (n-1)!^2} \lg \frac{1}{r} + v_0, \tag{33.6}$$

где v_0 — регулярное в T решение уравнения $\Delta^n u = 0$. Мы предполагаем, что все производные от v_0 порядка $\leqslant 2n-1$ непрерывны в $T + L$.

Пусть $(x_0, y_0) \in T$. Удалим из T малый круг с центром в точке (x_0, y_0) и применим формулу (33.4) к оставшейся области. Тогда, устремляя радиус малого круга к нулю, получим:

$$u(x_0, y_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_L \left(\Delta^k u \frac{d\Delta^{n-k-1} v}{d\nu} - \frac{d\Delta^k u}{d\nu} \Delta^{n-k-1} v \right) ds. \tag{33.7}$$

Здесь v — функция вида (33.6); нетрудно показать, что

$$\Delta^k v = \Delta^k v_0 - \frac{4^{k-n+1} r^{2(n-k-1)}}{2\pi (n-k-1)!^2} \left(\lg r + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-k} \right) \tag{33.8}$$
$$(k = 1, \ldots, n-1).$$

4°. Допустим теперь, что существует регулярное в области T решение v_0 уравнения $\Delta^n u = 0$, которое удовлетворяет граничным условиям:

$$v_0 = -\omega, \quad \frac{dv_0}{d\nu} = -\frac{d\omega}{d\nu}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1} v_0}{d\nu^{n-1}} = -\frac{d^{n-1}\omega}{d\nu^{n-1}} \quad (\text{на } L); \tag{33.9}$$

кроме того, мы предполагаем, что все производные порядка $\leqslant 2n-1$ функции v_0 непрерывны в $T + L$.

При таком подборе v_0 элементарное решение $v = \omega + v_0$ называется *функцией Грина уравнения* $\Delta^n u = 0$. Обозначим эту функцию через $Z(x, y, x_0, y_0)$; очевидно, все производные порядка $\leqslant n-1$ от функции Z обращаются в нуль на L.

Подставляя теперь в (33.7) вместо v функцию Грина Z, получим:

$$u(x_0, y_0) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \int_L \left(\Delta^k u \frac{d\Delta^{n-k-1}Z}{d\nu} - \frac{d\Delta^k u}{d\nu} \Delta^{n-k-1}Z \right) ds, \quad (33.10)$$

где $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ — наибольшая целая часть числа $\frac{n-1}{2}$.

Эта формула выражает значение решения $u(x, y)$ уравнения $\Delta^n u = 0$ в любой точке области T через значения на L самой функции $u(x, y)$ и её производных порядка $\leqslant n-1$. Поэтому, если известна функция Грина уравнения $\Delta^n u = 0$ для данной области T, то формула (33.10) даёт решение следующей граничной задачи:

Требуется найти регулярное в области T решение $u(x, y)$ уравнения $\Delta^n u = 0$, удовлетворяющее условиям

$$u = f_0, \quad \frac{du}{d\nu} = f_1, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}u}{d\nu^{n-1}} = f_{n-1} \quad (\textit{на } L), \quad (33.11)$$

где $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ — заданные на L функции.

Более подробное исследование этой задачи и доказательство существования функции Грина будут даны ниже в §§ 41, 42, 44.

§ 34. Общие представления решений уравнения (M_0). В этом параграфе мы выведем формулы, выражающие решения уравнения

$$M(u) = \Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} L_k(\Delta^{n-k}u) = 0 \quad (M_0)$$

через голоморфные функции одной комплексной переменной. Мы предполагаем, что коэффициенты этого уравнения — аналитические функции в некоторой области $\mathfrak{T}$ плоскости $z = x + iy$.

Решение $u(x, y)$ уравнения (M_0), имеющее в области T непрерывные производные порядка $\leqslant 2n$, назовём *регулярным решением* в T. Если же решение $u(x, y)$ является аналитической функцией в области T, то мы будем называть его *аналитическим решением*.

Ниже мы докажем, что *всякое регулярное решение уравнения* (M_0) *будет аналитической функцией* (теорема Пикара).

Уравнение (M_0) мы можем записать ещё в виде:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n} A_{km}(z, \zeta)\frac{\partial^{k+m}u}{\partial z^k \partial\zeta^m}=0, \tag{34.1}$$

где $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$; ясно, что A_{km} выражаются линейно через коэффициенты уравнения (M_0), причём мы можем считать $A_{nn}=1$.

Пусть $\mathfrak{D}$ — такая односвязная область, что все коэффициенты $A_{km}(z, \zeta)$ уравнения (34.1) являются аналитическими функциями переменных z, ζ в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$. Такую область мы назовём *основной областью* уравнения (M_0). Очевидно, любая односвязная подобласть основной области также будет основной областью. Если коэффициенты уравнения (M_0) — целые функции переменных x, y, то в качестве $\mathfrak{D}$ можно взять всю плоскость $z=x+iy$.

Уравнение (34.1) мы можем записать ещё в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}\frac{\partial^{k+m}B_{km}u}{\partial z^k\partial\zeta^m}=0 \tag{34.2}$$

$$(B_{km}=B_{km}(z, \zeta)),$$

где B_{km}, очевидно, выражаются через A_{km}, причём $B_{nn}=A_{nn}=1$.

1°. Пусть T — некоторая односвязная область, принадлежащая $\mathfrak{D}$. Пусть $U(z, \zeta)$ — аналитическая функция переменных z, ζ в $(T, \overline{T})$, удовлетворяющая уравнению (34.2). Тогда это уравнение мы можем записать ещё так:

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial z^n\partial\zeta^n}\Bigg[U(z, \zeta)+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{z_0}^{z}\frac{(z-t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}B_{kn}(t, \zeta)U(t, \zeta)\,dt+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{(\zeta-\tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}B_{nk}(z, \tau)U(z, \tau)\,d\tau+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\int_{z_0}^{z}dt\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{(z-t)^{n-k-1}(\zeta-\tau)^{n-m-1}}{(n-k-1)!\,(n-m-1)!}B_{km}(t, \tau)U(t, \tau)\,d\tau\Bigg]=0,$$

где z_0, ζ_0 — фиксированные точки в T, $\overline{T}$ соответственно. Отсюда имеем:

$$U(z, \zeta) - \int_{z_0}^{z} K_1(z, \zeta, t)\, U(t, \zeta)\, dt - \int_{\zeta_0}^{\zeta} K_2(\zeta, z, \tau)\, U(z, \tau)\, d\tau - \\ - \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} K(z, \zeta, t, \tau)\, U(t, \tau)\, d\tau = U_0(z, \zeta), \tag{34.3}$$

где $U_0(z, \zeta)$ — аналитическая функция переменных z, ζ в $(T, \overline{T})$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^{2n} U_0}{\partial z^n\, \partial \zeta^n} = 0; \tag{34.4}$$

$$K_1(z, \zeta, t) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z-t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} B_{kn}(t, \zeta),$$

$$K_2(\zeta, z, \tau) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\zeta-\tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} B_{nk}(z, \tau), \tag{34.5}$$

$$K(z, \zeta, t, \tau) = -\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(z-t)^{n-k-1}(\zeta-\tau)^{n-m-1}}{(n-k-1)!\,(n-m-1)!} B_{km}(t, \tau).$$

Решая теперь интегральное уравнение (34.3), получим:

$$U(z, \zeta) = U_0(z, \zeta) + \int_{z_0}^{z} \Gamma_1(z, \zeta, t)\, U_0(t, \zeta)\, dt + \\ + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Gamma_2(\zeta, z, \tau)\, U_0(z, \tau)\, d\tau + \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Gamma(z, \zeta, t, \tau)\, U_0(t, \tau)\, d\tau, \tag{34.6}$$

где Γ_1 Γ_2, Γ — аналитические функции своих аргументов при $z, t \in \mathfrak{D}$, $\zeta, \tau \in \overline{\mathfrak{D}}$ (см. § 3); эти функции зависят исключительно от коэффициентов уравнения (M_0).

Легко проверить, что *всякой аналитической функции* $U_0(z, \zeta)$, *удовлетворяющей в области* $(T, \overline{T})$ *уравнению* (34.4), *формула* (34.6) *сопоставляет аналитическую в области* $(T, \overline{T})$ *функцию* $U(z, \zeta)$, *удовлетворяющую уравнению* (M_0).

Если подставить в (34.6) $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$, $(x, y) \in T$, то получим аналитическое в области T решение уравнения (M_0).

2°. Подставляя в (34.6) вместо U_0 выражение

$$U_0(z, \zeta) = \frac{1}{4^n} \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{(z-t)^{n-1}(\zeta-\tau)^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!} f\left(\frac{t+\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2i}\right) d\tau,$$

являющееся решением уравнения $\Delta^n U = f(x, y)$, получим функцию

$$U^*(z, \zeta) = \frac{1}{4^n} \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} \mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta) f\left(\frac{t+\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2i}\right) d\tau, \quad (34.7)$$

где

$$\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta) = \frac{(z-t)^{n-1}(\zeta-\tau)^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!} + \int_{t}^{z} \frac{(t_1-t)^{n-1}(\zeta-\tau)^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!} \Gamma_1(z, \zeta, t_1)\, dt_1 +$$
$$+ \int_{\tau}^{\zeta} \frac{(z-t)^{n-1}(\tau_1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!} \Gamma_2(\zeta, z, \tau_1)\, d\tau_1 +$$
$$+ \int_{t}^{z} dt_1 \int_{\tau}^{\zeta} \frac{(t_1-t)^{n-1}(\tau_1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!} \Gamma(z, \zeta, t_1, \tau_1)\, d\tau_1, \quad (34.8)$$

удовлетворяющую неоднородному уравнению

$$M(u) = \Delta^n u + \sum_{k=0}^{n} L_k(\Delta^{n-k} u) = f(x, y). \quad (\mathrm{M})$$

Функция $\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)$ относительно последней пары аргументов является решением уравнения (34.1), так как она получается из (34.6) подстановкой туда вместо U_0 функции

$$\frac{(z-t)^{n-1}(\zeta-\tau)^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!},$$

удовлетворяющей уравнению $\Delta^n u = 0$, и заменой z_0, ζ_0 через t, τ соответственно. Кроме того, подставляя (34.8) в (34.1), легко увидим, что имеют место уравнения

$$\frac{d^n g}{d\zeta^n} + \sum_{m=0}^{n-1} A_{nm}(z, \zeta) \frac{d^m g}{d\zeta^m} = 0, \quad \frac{d^n g^*}{dz^n} + \sum_{m=0}^{n-1} A_{mn}(z, \zeta) \frac{d^m g^*}{dz^m} = 0, \quad (34.9)$$

где

$$g = \left(\frac{\partial^{n-1}\mathfrak{G}}{\partial z^{n-1}}\right)_{t=z}, \quad g^* = \left(\frac{\partial^{n-1}\mathfrak{G}}{\partial \zeta^{n-1}}\right)_{\tau=\zeta}. \quad (34.10)$$

Функции g и g^*, как нетрудно видеть, удовлетворяют ещё условиям:

$$\begin{aligned} g = \frac{dg}{d\zeta} = \ldots = \frac{d^{n-2}g}{d\zeta^{n-2}} = 0, \quad \frac{d^{n-1}g}{d\zeta^{n-1}} = 1 \quad \text{при} \quad \zeta = \tau, \\ g^* = \frac{dg^*}{dz} = \ldots = \frac{d^{n-2}g^*}{dz^{n-2}} = 0, \quad \frac{d^{n-1}g^*}{dz^{n-1}} = 1 \quad \text{при} \quad z = t. \end{aligned} \quad (34.11)$$

На основании этих условий из уравнений (34.9) функции g и g^* определяются однозначно. Таким образом, мы можем считать эти функции заранее известными, так как они определяются путём решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (34.9).

Вернёмся теперь к функции $\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)$. Она, во-первых, как уже было отмечено выше, относительно последней пары аргументов является решением уравнения (34.1) и, во-вторых, удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^k \mathfrak{G}}{\partial z^k} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-2), \quad \frac{\partial^{n-1} \mathfrak{G}}{\partial z^{n-1}} = g \quad \text{при } z = t, \\ &\frac{\partial^k \mathfrak{G}}{\partial \zeta^k} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-2), \quad \frac{\partial^{n-1} \mathfrak{G}}{\partial \zeta^{n-1}} = g^* \quad \text{при } \zeta = \tau. \end{aligned} \tag{34.12}$$

Ниже мы увидим, что перечисленными здесь условиями функция $\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)$ определяется вполне однозначно. Эту функцию мы назовём *функцией Римана для уравнения* (M). Как видно из формулы (34.8), функция Римана выражается через резольвенты Γ_1, Γ_2, Γ ядер K_1, K_2, K. Но можно, наоборот, эти резольвенты выразить через $\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)$.

В самом деле, из (34.8) нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \Gamma_1(z, \zeta, t) &= -\left.\frac{\partial^{2n-1}\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)}{\partial t^n \partial \tau^{n-1}}\right|_{\tau=\zeta}, \\ \Gamma_2(\zeta, z, \tau) &= -\left.\frac{\partial^{2n-1}\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)}{\partial t^{n-1} \partial \tau^n}\right|_{t=z} \\ \Gamma(z, \zeta, t, \tau) &= \frac{\partial^{2n}\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)}{\partial t^n \partial \tau^n}. \end{aligned} \tag{34.13}$$

Таким образом, для построения общего представления решений уравнения (M) достаточно найти его функцию Римана $\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)$ (см. также Бицадзе [1]).

3°. Решение $U_0(z, \zeta)$ уравнения (34.4), в силу формулы (32.9), мы можем представить в виде:

$$\begin{aligned} U_0(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \Bigg\{ a_k \frac{(z-z_0)^k (\zeta-\zeta_0)^k}{k!\,k!} + \\ + \frac{(z-z_0)^k}{k!} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{(\zeta-\tau)^k}{k!} \chi_k^*(\tau)\, d\tau + \frac{(\zeta-\zeta_0)^k}{k!} \int_{z_0}^{z} \frac{(z-t)^k}{k!} \chi_k(t)\, dt \Bigg\}, \end{aligned} \tag{34.13a}$$

где $a_0, \ldots, a_{n-1}$ — произвольные постоянные, а $\chi_k(z)$, $\chi_k^*(z)$ $k = 0, \ldots, n-1)$ — произвольные функции, голоморфные в T, $\overline{T}$

соответственно. Подставляя последнее выражение в (34.6), получим следующую формулу:

$$U(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k G_k(z_0, \zeta_0, z, \zeta) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_{z_0}^{z} G_k(t, \zeta_0, z, \zeta)\, \chi_k(t)\, dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta} G_k(z_0, \tau, z, \zeta)\, \chi_k^*(\tau)\, d\tau \right\}, \quad (34.14)$$

где

$$G_k(t, \tau, z, \zeta) = \frac{(z-t)^k (\zeta-\tau)^k}{k!k!} + \frac{(\zeta-\tau)^k}{k!} \int_t^z \frac{(\xi-t)^k}{k!} \Gamma_1(z, \zeta, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{(z-t)^k}{k!} \int_\tau^\zeta \frac{(\eta-\tau)^k}{k!} \Gamma_2(\zeta, z, \eta)\, d\eta +$$

$$+ \int_t^z d\xi \int_\tau^\zeta \frac{(\xi-t)^k (\eta-\tau)^k}{k!k!} \Gamma(z, \zeta, \xi, \eta)\, d\eta \quad (34.15)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Очевидно, *всякой совокупности постоянных* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ *и функций* $\chi_k(z)$, $\chi_k^*(\zeta)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, *голоморфных в* $\mathfrak{T}$, $\overline{\mathfrak{T}}$ *соответственно, формула* (34.14) *сопоставляет аналитическое в* $(\mathfrak{T}, \overline{\mathfrak{T}})$ *решение уравнения* (M_0).

Нетрудно видеть, что функция $G_k(t, \tau, z, \zeta)$ является решением следующего интегрального уравнения:

$$G_k(t, \tau, z, \zeta) - \int_t^z K_1(\zeta, z, \xi)\, G_k(t, \tau, \xi, \zeta)\, d\xi -$$

$$- \int_\tau^\zeta K_2(z, \zeta, \eta)\, G_k(t, \tau, z, \eta)\, d\eta -$$

$$- \int_t^z d\xi \int_\tau^\zeta K(z, \zeta, \xi, \eta)\, G_k(t, \tau, \xi, \eta)\, d\eta = \frac{(z-t)^k (\zeta-\tau)^k}{k!k!} \quad (34.16)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Из (34.8), в силу (34.15), имеем также:

$$G_k(t, \tau, z, \zeta) = \frac{\partial^{2(n-k-1)} \mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)}{\partial t^{n-k-1}\, \partial \tau^{n-k-1}} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \quad (34.17)$$

4°. Нетрудно теперь доказать, что постоянные a_k и функции χ_k, χ_k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, входящие в (34.14), однозначно определяются при помощи $U(z, \zeta)$, а именно, они выражаются через

$$\left(\frac{\partial^k U}{\partial z^k}\right)_{z=z_0}, \quad \left(\frac{\partial^k U}{\partial \zeta^k}\right)_{\zeta=\zeta_0} \quad (k=0, 1, \ldots, n-1). \qquad (34.18)$$

В самом деле, из (34.3) видно, что

$$\left(\frac{\partial^k U_0}{\partial z^k}\right)_{z=z_0}, \quad \left(\frac{\partial^k U_0}{\partial \zeta^k}\right)_{\zeta=\zeta_0} \quad (k=0, 1, \ldots, n-1) \qquad (34.19)$$

выражаются однозначно через функции (34.18). Но, в силу (34.13a), a_k, $\chi_k(z)$, $\chi_k^*(\zeta)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ однозначно выражаются через функции (34.19), что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим теперь следующую задачу (Гурса):

Требуется найти в области $(T, \overline{T})$ аналитическое решение $U(z, \zeta)$ уравнения (M_0), *которое удовлетворяет условиям*

$$\left(\frac{\partial^k U}{\partial \zeta^k}\right)_{\zeta=\zeta_0} = f_k(z), \quad \left(\frac{\partial^k U}{\partial z^k}\right)_{z=z_0} = g_k(\zeta) \qquad (34.20)$$
$$(k=0, 1, \ldots, n-1),$$

где $f_k(z)$, $g_k(\zeta)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ — голоморфные функции в T, $\overline{T}$ соответственно, удовлетворяющие условиям

$$f_k^{(m)}(z_0) = g_m^{(k)}(\zeta_0) \quad (m, k=0, 1, \ldots, n-1). \qquad (34.21)$$

Формула (34.14) позволяет решить эту задачу для произвольных заданий (34.20), причём задача имеет единственное решение.

Теперь нетрудно видеть, что *функция Римана* $\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)$ *является решением задачи Гурса частного вида.* Этим доказано, что *условиями* (34.12) *функция Римана действительно определяется однозначно.*

5°. Если в (34.14) подставить $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$, $(x, y)\in T$, то получим формулу, дающую аналитические в области T решения уравнения (M_0). Мы ниже докажем, что все регулярные в области T решения уравнения (M_0) исчерпываются этой формулой.

Пусть коэффициенты уравнения (M_0) — действительные функции. Тогда нетрудно доказать (см. работу автора [5], стр. 190), что $G_k(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z})$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ — действительные, а $G_k(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})$, $G_k(z_0, \bar{t}, z, \bar{z})$ — взаимно сопряжённые функции. Пусть $\overline{\chi_k(z)} = \chi_k^*(\bar{z})$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ — действительные постоянные. Тогда формула (34.14) при $\zeta=\bar{z}$ примет вид:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[a_k G_k(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} G_k(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\,\chi_k(t)\,dt\right]. \qquad (34.22)$$

Всякой совокупности действительных постоянных $a_0, \ldots, a_{n-1}$ и голоморфных в области $\mathfrak{T}$ функций $\chi_0(z), \ldots, \chi_{n-1}(z)$ эта формула сопоставляет действительное аналитическое решение уравнения (M_0) *в области* $\mathfrak{T}$.

Ниже мы увидим, что все действительные регулярные решения уравнения (M_0) с действительными коэффициентами даются формулой (34.22).

6°. Введём теперь в рассмотрение следующие функции:

$$\varphi_k(z) = \frac{a_k}{2} + \int_{z_0}^{z} \chi_k(t)\,dt, \quad \varphi_k^*(\zeta) = \frac{a_k}{2} + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \chi_k^*(\tau)\,d\tau \tag{34.23}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Тогда формула (34.14) примет следующий вид:

$$u(x, y) = G_0(z, \zeta_0, z, \zeta)\,\varphi_0(z) + G_0(z_0, \zeta, z, \zeta)\,\varphi_0^*(\zeta) - \\ -\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_{z_0}^{z}\varphi_k(t)\frac{\partial}{\partial t}G_k(t, \zeta_0, z, \zeta)\,dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta}\varphi_k^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}G_k(z_0, \tau, z, \zeta)\,d\tau\right\}. \tag{34.24}$$

Очевидно, всякой совокупности функций $\varphi_k(z)$, $\varphi_k^*(\zeta)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, голоморфных в $\mathfrak{T}$, $\overline{\mathfrak{T}}$ соответственно, эта формула сопоставляет аналитическое решение уравнения (M_0) в области $\mathfrak{T}$; функции φ_k, φ_k^* $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ однозначно определяются при помощи $u(x, y)$, если они подчинены условиям

$$\varphi_k(z_0) = \varphi_k^*(\zeta_0) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{34.25}$$

В случае уравнения с действительными коэффициентами формула (34.24) примет вид:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left\{G_0(z, \bar z_0, z, \bar z)\,\varphi_0(z) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{z_0}^{z}\varphi_k(t)\frac{\partial}{\partial t}G_k(t, \bar z_0, z, \bar z)\,dt\right\}, \tag{34.26}$$

где $\varphi_k(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ — произвольные голоморфные функции в $\mathfrak{T}$, которые определяются однозначно с помощью $u(x, y)$ при соблюдении условий

$$\varphi_k(z_0) = \overline{\varphi_k(z_0)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{34.27}$$

7°. Докажем теперь, что $\mathfrak{G}(z,\zeta,t,\tau)$ является функцией Римана уравнения

$$M^*(U)=\sum_{k,m=0}^{n}(-1)^{k+m}\frac{\partial^{k+m}A_k(z,\zeta)U}{\partial z^k\,\partial\zeta^m}=0, \qquad (\mathrm{M}_0^*)$$

сопряжённого с (M_0). Для этого мы должны доказать, что имеют место следующие равенства:

$$M^*[\mathfrak{G}(z,\zeta,t,\tau)]=$$
$$=\sum_{k,m=0}^{n}(-1)^{k+m}\frac{\partial^{k+m}A_{km}(z,\zeta)\,\mathfrak{G}(z,\zeta,t,\tau)}{\partial z^k\partial\zeta^m}=0, \qquad (34.28)$$

$$\left.\frac{\partial^k\mathfrak{G}(z,\zeta,t,\tau)}{\partial z^k}\right|_{z=t}=0,\qquad \left.\frac{\partial^k\mathfrak{G}(z,\zeta,t,\tau)}{\partial\zeta^k}\right|_{\zeta=\tau}=0 \qquad (34.29)$$

$$(k=0,1,\ldots,n-2),$$

$$\left.\frac{\partial^{n-1}\mathfrak{G}(z,\zeta,t,\tau)}{\partial z^{n-1}}\right|_{z=t}=X(\zeta,\tau,t),$$
$$\left.\frac{\partial^{n-1}\mathfrak{G}(z,\zeta,t,\tau)}{\partial\zeta^{n-1}}\right|_{\zeta=\tau}=X^*(z,t,\tau), \qquad (34.30)$$

где X, X^* суть решения уравнений

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\partial^kA_{nk}(t,\zeta)X}{\partial\zeta^k}=0,\qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\partial^kA_{kn}(z,\tau)X^*}{\partial z^k}=0, \quad (34.31)$$

удовлетворяющие условиям

$$\left.\frac{\partial^kX(\zeta,\tau,t)}{\partial\zeta^k}\right|_{\zeta=\tau}=0,\qquad \left.\frac{\partial^kX^*(z,t,\tau)}{\partial z^k}\right|_{z=t}=0$$

$$(k=0,1,\ldots,n-2), \qquad (34.32)$$

$$\left.\frac{\partial^{n-1}X(\zeta,\tau,t)}{\partial\zeta^{n-1}}\right|_{\zeta=\tau}=1,\qquad \left.\frac{\partial^{n-1}X^*(z,t,\tau)}{\partial z^{n-1}}\right|_{z=t}=1.$$

Прежде всего заметим, что имеет место следующая легко доказуемая лемма:

Если $y=y(x,t)$ есть решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$L(y)=\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n(x)\,y=0, \qquad (34.33)$$

удовлетворяющее условиям:

$$\left.\frac{d^k y}{dx^k}\right|_{x=t} = 0, \quad (k=0, 1, \ldots, n-2), \qquad \left.\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right|_{x=t} = 1, \tag{34.34}$$

где $a_k(x)$ есть $n-k$ *раз непрерывно дифференцируемая функция на сегменте* $[a, b]$ $(k=1, \ldots, n)$, t — *параметр, изменяющийся на сегменте* $[a, b]$, *то функция* $y^*(x) = y(t, x)$ *будет решением уравнения*

$$L^*(y^*) = \frac{d^n y^*}{dx^n} - \frac{d^{n-1} a_1(x) y^*}{dx^{n-1}} + \ldots + (-1)^n a_n(x) y^* = 0, \tag{34.35}$$

сопряжённого с уравнением $L(y) = 0$, *удовлетворяющим условиям:*

$$\left.\frac{d^k y^*}{dx^k}\right|_{x=t} = 0 \quad (k=0, 1, \ldots, n-2), \qquad \left.\frac{d^{n-1} y^*}{dx^{n-1}}\right|_{x=t} = 1. \tag{34.36}$$

Справедливость этой леммы вытекает из следующего легко проверяемого тождества:

$$\int_{t_0}^{t} y(x, t)\, L^*[y(t_0, x)]\, dx = \int_{t_0}^{t} y(t_0, x)\, L[y(x, t)]\, dx, \tag{34.37}$$

при выводе которого надо иметь в виду условия (34.34) и (34.36).

Далее, из (34.8) легко получим равенства (34.29) и

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^{n-1}\mathfrak{G}(z, \zeta, t, \tau)}{\partial z^{n-1}}\right|_{z=t} &= (-1)^{n-1} \left.\frac{\partial^{n-1}\mathfrak{G}(z, \zeta, t, \tau)}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=z}, \\ \left.\frac{\partial^{n-1}\mathfrak{G}(z, \zeta, t, \tau)}{\partial \zeta^{n-1}}\right|_{\zeta=\tau} &= (-1)^{n-1} \left.\frac{\partial^{n-1}\mathfrak{G}(z, \zeta, t, \tau)}{\partial \tau^{n-1}}\right|_{\tau=\zeta}, \end{aligned} \tag{34.38}$$

и, в силу (34.30) и (34.38), имеем:

$$\begin{aligned} X(\tau, \zeta, t) &= (-1)^{n-1} \left.\frac{\partial^{n-1}\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)}{\partial z^{n-1}}\right|_{z=t}, \\ X^*(t, z, \tau) &= (-1)^{n-1} \left.\frac{\partial^{n-1}\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)}{\partial \zeta^{n-1}}\right|_{\zeta=\tau}. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (34.9) и (34.10) имеют место уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} A_{nk}(t, \zeta) \frac{\partial^k X(\tau, \zeta, t)}{\partial \zeta^k} = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} A_{kn}(z, \tau) \frac{\partial^k X^*(t, z, \tau)}{\partial z^k} = 0$$

и условия (34.11). Поэтому на основании вышеприведённой леммы и равенств (34.38) легко получим, что функции $X(\zeta, \tau, t)$, $X^*(z, t, \tau)$ удовлетворяют уравнениям (34.31) и условиям (34.32) соответственно.

Теперь нетрудно доказать, что $\mathfrak{G}(z, \zeta, t, \tau)$ удовлетворяет уравнению (34.28). Это сразу вытекает из равенства:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\tau_0}^{\tau} \mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta) M^*[\mathfrak{G}(z, \zeta, t_0, \tau_0)]\, dz\, d\zeta =$$
$$= \int_{t_0}^{t}\int_{\tau_0}^{\tau} \mathfrak{G}(z, \zeta, t_0, \tau_0) M[\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)]\, dz\, d\zeta, \qquad (34.39)$$

при выводе которого надо иметь в виду условия (34.29), (34.30), (34.31), (34.32).

Таким образом, $\mathfrak{G}(t, \tau, z, \zeta)$ относительно последних двух аргументов является функцией Римана уравнения (M_0), а относительно первых двух — функцией Римана уравнения (M_0^*), сопряжённого с (M_0).

§ 35. Элементарные решения. 1°. Решение уравнения (M_0), имеющее вид

$$\omega = g(x, y)\, r^{2n-2} \lg \frac{1}{r} + g_0(x, y) \qquad (r = |z - z_0|), \qquad (35.1)$$

где $g(x, y)$, $g_0(x, y)$ — функции, которые внутри некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеют непрерывные производные порядка $\leqslant 2n$, причём $g(x_0, y_0) \neq 0$, называется *элементарным решением*. Точка (x_0, y_0) называется *полюсом* элементарного решения. Очевидно, если ω — элементарное решение уравнения (M_0), то его же элементарным решением будет $C\omega + u_0$, где C — постоянная, отличная от нуля, а u_0 — решение уравнения (M_0), регулярное внутри некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Положим теперь $\zeta_0 = \bar{z}_0$ и подставим в (34.24)

$$\begin{aligned} &\varphi_k(z) = 0, \quad \varphi_k^*(\zeta) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-2), \\ &\varphi_{n-1}(z) = C \lg(z - z_0), \qquad \varphi_{n-1}^*(\zeta) = C \lg(\zeta - \zeta_0), \end{aligned} \qquad (35.2)$$

где C — постоянная ($C \neq 0$). Тогда после очевидных выкладок получим следующее частное решение уравнения (M_0):

$$\omega_1(x, y, x_0, y_0) = -C\left[2\mathfrak{G}(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) \lg \frac{1}{r} + G^*(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z})\right], \quad (35.3)$$

где $r = |z - z_0|$,

$$G^*(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) = \int_0^1 \lg \sigma \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma}[\mathfrak{G}(z_0 + (z - z_0)\sigma, \bar{z}_0, z, \bar{z}) +$$
$$+ \mathfrak{G}(z_0, \bar{z}_0 + (\bar{z} - \bar{z}_0)\sigma, z, \bar{z})]\, d\sigma. \qquad (35.4)$$

Из (34.8) следует, что

$$\mathfrak{G}(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) = r^{2n-2} g(x, y, x_0, y_0), \tag{35.5}$$

где $g(x, y, x_0, y_0)$ — аналитическая функция переменных x, y в области $\mathfrak{D}$, удовлетворяющая условию

$$g(x_0, y_0, x_0, y_0) = \frac{1}{(n-1)!^2}. \tag{35.6}$$

Очевидно, G^* — также аналитическая функция в $\mathfrak{D}$. Следовательно, ω_1 — элементарное решение уравнения (M_0) с полюсом в точке (x_0, y_0).

В дальнейшем мы будем считать

$$C = -\frac{1}{4^n \pi}, \tag{35.7}$$

и тогда элементарное решение (35.3) будем называть *нормированным*.

2°. Рассмотрим теперь функцию

$$\omega(x, y, x_0, y_0) = \omega_1(x, y, x_0, y_0) - \\ - \int_{a_0}^{z_0} d\xi \int_{a_0}^{\bar{z}_0} \mathfrak{G}(z_0, \bar{z}_0, \xi, \eta) M^*_{\xi\eta}\left[\omega_1\left(x, y, \frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2i}\right)\right] d\eta, \tag{35.8}$$

где a_0 — фиксированная точка в $\mathfrak{D}$, M^* — оператор, сопряжённый с M, а именно,

$$M^*(v) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{k+m} \frac{\partial^{k+m} A_{km} v}{\partial z^k \partial \zeta^m}. \tag{35.9}$$

Можно доказать, *что* $\omega(x, y, x_0, y_0)$, *как функция переменных* x, y, *является элементарным решением уравнения* (M_0) *с полюсом в точке* (x_0, y_0), *а как функция переменных* x_0, y_0 — *элементарным решением сопряжённого уравнения* (M_0^*) *с полюсом в точке* (x, y).

Доказательство этого предложения аналогично доказательству, приведённому в § 7.

Элементарное решение $\omega(x, y, x_0, y_0)$, обладающее этим свойством, будем называть *стандартным элементарным решением* уравнения (M_0); формула (35.8) даёт одно такое элементарное решение.

3°. Пусть $u(x, y)$ — решение уравнения (M_0), регулярное в области T и имеющее непрерывные производные порядка $\leqslant 2n-1$ в $T+L$, где L — граница области T ($T \subset \mathfrak{D}$); мы предполагаем, что L состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых.

Введём обозначение:

$$(u)_{ik} = \frac{\partial^{i+k} u}{\partial z^i \partial \zeta^k} \qquad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{35.10}$$

Имеет место тождество вида

$$vM(u) - uM^*(v) = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P^*}{\partial \zeta}, \tag{35.11}$$

где

$$M(u) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} A_{km}(z, \zeta)(u)_{km}, \tag{35.12}$$

$$M^*(v) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{k+m} (A_{km} v)_{km}, \tag{35.13}$$

а P и P^* — билинейные формы от $(u)_{km}$ и $(v)_{km}$ $(m, k = 0, 1, \ldots, n;$ $m + k \leqslant 2n - 1)$ (см. Дарбу [1], стр. 73).

Из (35.11) имеем:

$$\iint_T [vM(u) - uM^*(v)]\, dT = \int_L N_0(u, v)\, ds, \tag{35.14}$$

где

$$N_0(u, v) = \frac{i}{2}\left(P \frac{d\bar{z}}{ds} - P^* \frac{dz}{ds}\right). \tag{35.15}$$

Очевидно, $N_0(u, v)$ — билинейная форма от $(u)_{km}$, $(v)_{km}$ $(k, m = 0,$ $1, \ldots, n;$ $m + k \leqslant 2n - 1)$.

Если теперь в качестве v возьмём стандартное нормированное элементарное решение $\omega(x, y, x_0, y_0)$, то при помощи (35.14) получим:

$$u(x, y) = \int_L N_0[u(\xi, \eta), \omega(x, y, \xi, \eta)]\, ds, \tag{35.16}$$

где $(x, y) \in T$, а (ξ, η) — точка интеграции.

Из формулы (35.16) вытекает

Теорема 1. *Всякое регулярное в области T решение уравнения (M_0) является аналитической функцией в этой области.*

4°. Пусть T — односвязная область $(T \subset \mathfrak{D})$. Подставляя в (35.16) $x = (z + \zeta)/2$, $y = (z - \zeta)/2i$, получим функцию

$$U(z, \zeta) = \int_L N_0\left[u(\xi, \eta), \omega\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}, \xi, \eta\right)\right] ds, \tag{35.17}$$

аналитическую относительно переменных z, ζ в $(T, \overline{T})$, которая представляет собой аналитическое продолжение функции $u(x, y)$ в область комплексных значений переменных x, y.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Всякое регулярное в некоторой основной области $\mathfrak{D}$ решение $u(x, y)$ уравнения (M_0) аналитически продолжимо в область комплексных значений переменных x, y, причём полученная функция $U(z, \zeta)$ является аналитическим решением уравнения (M_0) в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ $(z=x+iy,\ \zeta=x-iy)$.*

Из этой теоремы сразу вытекает, что *любая из формул* (34.14) *и* (34.24) *предыдущего параграфа даёт нам все регулярные решения уравнения* (M_0) *в основной области. В случае уравнения с действительными коэффициентами все регулярные действительные решения в основной области даются формулами* (34.22) *и* (34.26).

5°. Формула (35.16), очевидно, остаётся в силе, если в правой части её вместо ω подставить $\omega+v_0$, где v_0 — произвольное решение уравнения (M_0), регулярное в T и имеющее непрерывные частные производные порядка $\leqslant 2n-1$ в $T+L$. Допустим, что v_0 удовлетворяет на L условиям:

$$v_0=-\omega,\quad \frac{dv_0}{d\nu}=-\frac{d\omega}{d\nu},\quad \ldots,\quad \frac{d^{n-1}v_0}{d\nu^{n-1}}=-\frac{d^{n-1}\omega}{d\nu^{n-1}}, \tag{35.18}$$

где ν — внутренняя нормаль.

Тогда, если обозначить $\omega+v_0$ через $Z(x, y, x_0, y_0)$, формула (35.16) примет вид:

$$u(x, y)=\int\limits_L N_1[u(\xi, \eta), Z(x, y, \xi, \eta)]\,ds \qquad (x, y)\in T, \tag{35.19}$$

где $N_1(u, Z)$ — билинейная форма от $(u)_{km}$, $(Z)_{km}$, которая не содержит производных от u порядка $\geqslant n$. Таким образом, если существует функция Z, то формула (35.19) решает следующую граничную задачу:

Требуется найти регулярное в области T решение уравнения (M_0), если на границе заданы значения искомого решения и его производных порядка $\leqslant n-1$.

Функция $Z(x, y, x_0, y_0)$ называется *функцией Грина* уравнения (M_0). Доказательству существования этой функции и решения поставленной задачи мы посвятим ниже специальный отдел.

§ 36. Уравнение с постоянными коэффициентами. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\Delta^n u+a_1\Delta^{n-1}u+\ldots+a_n u=0, \tag{36.1}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — постоянные. Функции $G_k(t, \tau, z, \zeta)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ для этого уравнения можно найти в явном виде; они выражаются через бесселевы функции (см. работы автора [3], [5]).

1°. Уравнение (36.1) можно записать ещё так:

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial z^n \partial \zeta^n} + b_1 \frac{\partial^{2n-2} u}{\partial z^{n-1} \partial \zeta^{n-1}} + \cdots + b_n u = 0, \tag{36.2}$$

где $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$, $b_k = 4^{-k} a_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Пусть T — некоторая односвязная область. Продолжая аналитически регулярное в T решение $u(x, y)$ уравнения (36.1) в область комплексных значений x, y, получим аналитическое в $(T, \overline{T})$ решение $U(z, \zeta)$ уравнения (36.2), удовлетворяющее интегральному уравнению

$$U(z, \zeta) + \int_0^z dt \int_0^\zeta p[(z-t)(\zeta-\tau)]\, U(t, \tau)\, d\tau = U_0(z, \zeta), \tag{36.3}$$

где

$$p(x) = b_1 + b_2 \frac{x}{1!^2} + \ldots + b_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!^2}, \tag{36.4}$$

$$U_0(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} [z^k \Phi_k^*(\zeta) + \zeta^k \Phi_k(z)], \tag{36.5}$$

причём $\Phi_k(z)$, $\Phi_k^*(\zeta)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ — произвольные голоморфные функции в T, $\overline{T}$ соответственно. Решение уравнения (36.3), очевидно, имеет вид:

$$U(z, \zeta) = U_0(z, \zeta) - \int_0^z dt \int_0^\zeta P[(z-t)(\zeta-\tau)]\, U_0(t, \tau)\, d\tau, \tag{36.6}$$

где $P[(z-t)(\zeta-\tau)]$ является резольвентой ядра $p[(z-t)(\zeta-\tau)]$; следовательно, $P[(z-t)(\zeta-\tau)]$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} P[(z-t)(\zeta-\tau)] &= \\ &= p[(z-t)(\zeta-\tau)] - \int_t^z d\xi \int_\tau^\zeta p[(z-\xi)(\zeta-\eta)]\, P[(\xi-t)(\eta-\tau)]\, d\eta = \\ &= p[(z-t)(\zeta-\tau)] - \int_t^z d\xi \int_\tau^\zeta P[(z-\xi)(\zeta-\eta)]\, p[(\xi-t)(\eta-\tau)]\, d\eta. \end{aligned} \tag{36.7}$$

Так как $P(X)$ — целая функция, то её можно представить в виде ряда

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k, \tag{36.8}$$

сходящегося для любого X. Коэффициенты этого ряда выражаются через $b_0, b_1, \ldots, b_n$; эти выражения легко можно найти при помощи формул (36.7).

Из (36.7) легко вытекает также, что функция $Y = P(X)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta^n Y + b_1 \Delta^{n-1} Y + \ldots + b_n Y = 0, \tag{36.9}$$

где

$$\Delta = \frac{d}{dX} X \frac{d}{dX}. \tag{36.10}$$

Уравнение (36.9) мы можем записать ещё так:

$$(\Delta + \varkappa_1)^{k_1} (\Delta + \varkappa_2)^{k_2} \ldots (\Delta + \varkappa_m)^{k_m} Y = 0, \tag{36.11}$$

где $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ — различные корни уравнения

$$\varkappa^n - b_1 \varkappa^{n-1} + \ldots + (-1)^n b_n = 0, \tag{36.12}$$

а $k_1, \ldots, k_m$ — их кратности соответственно.

Найдём теперь все решения уравнения (36.9), непрерывные в точке $X = 0$; нас только такие решения интересуют, ибо $P(X)$ принадлежит такому классу решений. В § 19 мы видели, что все непрерывные в точке $X = 0$ решения уравнения

$$(\Delta + \varkappa) Y = X \frac{d^2 Y}{dX^2} + \frac{dY}{dX} + \varkappa Y = 0$$

имеют вид

$$Y = A L_0 (\varkappa X),$$

где A — любая постоянная. Напомним, что (§ 19)

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^k}{k!\, \Gamma(k+n+1)}, \tag{36.13}$$

где n — любая комплексная постоянная.

Рассмотрим теперь уравнение

$$(\Delta + \varkappa)^2 Y = 0. \tag{36.14}$$

Всякое решение этого уравнения, непрерывное в точке $X = 0$, очевидно, удовлетворяет также уравнению вида

$$(\Delta + \varkappa) Y = A_1 L_0 (\varkappa X) \qquad (A_1 = \mathrm{const.}). \tag{36.15}$$

На основании свойств функций L_n (§ 19) легко видеть, что функция $A_1 X L_1 (\varkappa X)$ удовлетворяет уравнению (36.15). Следовательно, всякое решение уравнения (36.14), непрерывное в точке $X = 0$, имеет вид:

$$Y = A_0 L_0 (\varkappa X) + A_1 X L_1 (\varkappa X),$$

где A_0, A_1 — постоянные. Легко теперь убедиться, что всякое непрерывное в точке $X=0$ решение уравнения

$$(\Delta+\varkappa)^k Y=0 \qquad (k\geqslant 1) \tag{36.16}$$

имеет вид:

$$Y=A_0L_0(\varkappa X)+A_1XL_1(\varkappa X)+\ldots+A_{k-1}X^{k-1}L_{k-1}(\varkappa X), \tag{36.17}$$

где $A_0, \ldots, A_{k-1}$ — любые постоянные.

Нетрудно теперь доказать, что всякое непрерывное в точке $X=0$ решение уравнения (36.9) или, что то же самое, уравнения (36.11) имеет вид:

$$Y=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{k_j-1} A_{jk}X^kL_k\,(\varkappa_jX), \tag{36.18}$$

где A_{jk} — произвольные постоянные. В этом легко убедиться, если принять во внимание, что функции $X^kL_k(\varkappa_jX)$ ($j=1,\ldots,m$; $k=0, 1, \ldots, k_j-1$), число которых равно n, суть линейно независимые частные решения уравнения (36.9), непрерывные в точке $X=0$.

Полагая теперь $Y(0)=P(0)$, $Y'(0)=P'(0)$, $\ldots$, $Y^{(n-1)}(0)=P^{(n-1)}(0)$, мы получим следующую систему уравнений для определения постоянных A_{jk}:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{k_j-1}\frac{(-1)^{l-k}\varkappa_j^{l-k}A_{jk}}{\Gamma(l-k+1)}=P^{(l)}(0) \qquad (l=0, 1, \ldots, n-1). \tag{36.19}$$

Эта система, очевидно, разрешима и имеет единственное решение. Напомним, что значения $P^{(k)}(0)$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$) определяются при помощи формулы (36.7) и выражаются в явном виде через $a_1, \ldots, a_n$. Подставляя теперь значения A_{jk}, найденные из (36.19), в (36.18), получим искомую функцию $P(X)$.

2°. Подставляя в (36.6) вместо U_0 выражение (36.5), получим:

$$\begin{aligned}U(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{n-1}\Big\{\zeta^k\Big[\Phi_k(z)-\zeta\int_0^z\Phi_k(t)\,P_k[\zeta(z-t)]\,dt\Big]+\\+z^k\Big[\Phi_k^*(\zeta)-z\int_0^\zeta\Phi_k^*(\tau)\,P_k[z(\zeta-\tau)]\,d\tau\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{36.20}$$

где

$$P_k(X)=\int_0^1\sigma^kP[X(1-\sigma)]\,d\sigma \qquad (k=0, \ldots, n-1). \tag{36.21}$$

Подставляя сюда вместо $P(X)$ выражение

$$P(X)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k_j-1} A_{jl}X^l L_l(\varkappa_j X), \tag{36.22}$$

где A_{jl} определяются из уравнений (36.19), получим:

$$P_k(X)=k!\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k_j-1} A_{jl}X^l L_{l+k+1}(\varkappa_j X). \tag{36.23}$$

Формулу (36.20) можно записать ещё так:

$$U(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{n-1}\Big\{z^k\Phi_k^*(\zeta)+\zeta^k\Phi_k(z)-$$
$$-\int_0^1 [z^{k+1}\zeta\Phi_k^*(\zeta t)+\zeta^{k+1}z\Phi_k(zt)]\,P_k[z\zeta(1-t)]\,dt\Big\}. \tag{36.24}$$

Не нарушая общности, функции $\Phi_k(z)$, $\Phi_k^*(\zeta)$ мы можем подчинить условиям:

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_k(0)=0, \quad \Phi_k'(0)=0, \ \ldots, \ \Phi_k^{(k-1)}(0)=0,\\ &\Phi_k^*(0)=0, \quad \Phi_k^{*\prime}(0)=0, \ \ldots, \ \Phi_k^{*(k-1)}(0)=0,\end{aligned}\right\}\ (k\geqslant 1),$$
$$\Phi_k^{(k)}(0)=\Phi_k^{*(k)}(0) \qquad (k=0,1,\ldots,n-1). \tag{36.24a}$$

Следовательно,

$$\Phi_k(z)=z^k\varphi_k(z), \quad \Phi_k^*(\zeta)=\zeta^k\varphi_k^*(\zeta) \quad (k=0,1,\ldots,n-1), \tag{36.25}$$

где $\varphi_k(z)$, $\varphi_k^*(\zeta)$ — голоморфные функции в T, $\overline{T}$ соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_k(0)=\varphi_k^*(0) \qquad (k=0,1,\ldots,n-1). \tag{36.25a}$$

Подставляя (36.25) в (36.24), получим:

$$U(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{n-1}(z\zeta)^k\Big\{\varphi_k(z)+\varphi_k^*(\zeta)-$$
$$-z\zeta\int_0^1[\varphi_k(zt)+\varphi_k^*(\zeta t)]\,t^kP_k[z\zeta(1-t)]\,dt\Big\}. \tag{36.26}$$

Если заменить здесь ζ через $\bar z$, то получим все решения уравнения (36.1), регулярные в T.

3°. Предположим теперь, что коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ уравнения (36.1) — действительные числа. Тогда все действительные, регулярные в T решения этого уравнения можно получить из формулы:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \left\{ \Phi_k(z) - \bar{z} \int_0^z \Phi_k(t) P_k[\bar{z}(z-t)]\, dt \right\}, \tag{36.27}$$

где $\Phi^k(z)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ — произвольные голоморфные в T функции. Эти функции без ущерба для общности можно подчинить условиям:

$$\Phi_k(0) = \Phi_k'(0) = \ldots = \Phi_k^{(k-1)}(0) = 0,$$

$$\operatorname{Im} \Phi_k^{(k)}(0) = 0 \tag{36.28}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Тогда, полагая $\Phi_k(z) = z^k \varphi_k(z)$, получим:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} (z\bar{z})^k \left\{ \varphi_k(z) - z\bar{z} \int_0^1 \varphi_k(zt)\, t^k P_k[z\bar{z}(1-t)]\, dt \right\} \tag{36.29}$$

$$(\varphi_k(0) = \overline{\varphi_k(0)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Эту формулу в случае звёздной области T с центром в точке $z=0$ можем записать также в виде:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} r^{2k} \left\{ \omega_k(x, y) - r^2 \int_0^1 \omega_k(xt, yt)\, t^k P_k[r^2(1-t)]\, dt \right\}, \tag{36.30}$$

где $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ — произвольные гармонические функции в области T.

4°. Приведём теперь общее представление решений уравнения (36.1) в другом виде. Это уравнение в самом общем случае можно записать так:

$$\Delta^k (\Delta + \varkappa_1)^{k_1} \ldots (\Delta + \varkappa_m)^{k_m} u = 0, \tag{36.31}$$

где $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ — отличные от нуля различные корни уравнения

$$\varkappa^n - a_1 \varkappa^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n = 0, \tag{36.32}$$

а $k_1, \ldots, k_m$ — их кратности; k — кратность корня $\varkappa = 0$; очевидно, $k + k_1 + \cdots + k_m = n$.

Имеет место следующая теорема:

Все решения уравнения (36.1) *получаются из формулы*

$$u=v+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k_j-1} r^l \frac{\partial^l u_{jl}}{\partial r^l} \quad (r=|z|), \tag{36.33}$$

где v — любое решение уравнения $\Delta^k v=0$, а u_{jl} — любое решение уравнения $\Delta u+\varkappa_j u=0$ ($j=1, 2, \ldots, m$; $l=0, 1, \ldots, k_j-1$), причём функции v, u_{jl} однозначно определяются при помощи u.

Доказательство этой теоремы можно найти в работе автора [15].

Формула (36.33) сохраняет силу для пространства любого числа измерений. В этом случае

$$\Delta=\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad (p\geqslant 2).$$

5°. При помощи предыдущих формул можно получить различные разложения решений уравнения (36.1) (см., например, работу автора [19]). Мы здесь дадим разложение решений внутри круга.

Пусть $u(x, y)$ — решение уравнения (36.1), регулярное внутри круга $|z|<R$. Мы можем $u(x, y)$ представить в виде (36.30), где $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ — гармонические внутри этого круга функции. Поэтому для них имеем разложения:

$$\omega_k(x, y)=a_{k0}+\sum_{m=0}^{\infty} r^m(a_{km}\cos m\theta+b_{km}\sin m\theta) \tag{36.34}$$

$$(k=0, 1, \ldots, n-1;\ r=|z|,\ \theta=\arg z),$$

которые абсолютно и равномерно сходятся внутри круга $|z|<R$. Подставляя (36.34) в (36.30), получим:

$$u(x, y)=h_0(r)+\sum_{m=0}^{\infty}[h_m(r)\cos m\theta+g_m(r)\sin m\theta], \tag{36.35}$$

где

$$h_m(r)=\sum_{k=0}^{n-1} a_{km}H_{km}(r), \quad g_m(r)=\sum_{k=0}^{n-1} b_{km}H_{km}(r), \tag{36.36}$$

причём

$$H_{km}(r)=r^{m+2k}\left\{1+r^2\int_0^1 \sigma^{k+m}P_k[r^2(1-\sigma)]\,d\sigma\right\}. \tag{36.37}$$

Ясно, что $H_{km}(r)$ — целые функции от r, которые в силу (36.23) можно выразить через бесселевы функции.

Очевидно, ряд (36.35) сходится абсолютно и равномерно внутри круга $|z| < R$.

Из (36.35) и (36.36) мы видим, что система функций

$$H_{k0}(r),\quad H_{km}(r)\cos m\theta,\quad H_{km}(r)\sin m\theta \tag{36.38}$$

$$(k = 0, \ldots, n-1, \quad m = 1, 2, \ldots)$$

представляет собой полную систему частных решений уравнения (36.1) относительно любого круга; нетрудно также доказать, что она обладает этим свойством относительно любой односвязной области.

6°. Можно получить разложение решений уравнения (36.1) внутри круга также при помощи формулы (36.33).

В самом деле, если $u(x, y)$ — регулярное внутри круга $|z| < R$ решение уравнения (36.1), то функции v и u_{jl} можно разложить внутри этого круга в ряды вида:

$$\begin{gathered} v = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} r^{2l+m} (a_{lm}\cos m\theta + b_{lm}\sin m\theta), \\ u_{jl} = a_0^{jl} J_0(\lambda_j r) + \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\lambda_j r)(a_m^{jl}\cos m\theta + b_m^{jl}\sin m\theta) \end{gathered} \tag{36.39}$$

$$(j = 1, \ldots, m;\quad l = 0, 1, \ldots, k_j - 1;\quad \lambda_j^2 = \varkappa_j).$$

Подставляя эти ряды в (36.33), получим:

$$\begin{gathered} u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k-1} a_{lm} r^{2l+m} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k_j-1} a_m^{jl} r^l \frac{\partial^l J_m(\lambda_j r)}{\partial r^l}\right]\cos m\theta + \\ + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k-1} b_{lm} r^{2l+m} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k_j-1} b_m^{jl} r^l \frac{\partial^l J_m(\lambda_j r)}{\partial r^l}\right]\sin m\theta. \end{gathered} \tag{36.40}$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно внутри круга $|z| < R$. Отсюда мы видим, что совокупность функций

$$\begin{gathered} r^{2s+m}\cos m\theta, \quad r^l \frac{\partial^l J_m(\lambda_j r)}{\partial r^l}\cos m\theta, \\ r^{2s+m}\sin m\theta, \quad r^l \frac{\partial^l J_m(\lambda_j r)}{\partial r^l}\sin m\theta \end{gathered} \tag{36.41}$$

$$(j = 1, \ldots, m;\quad l = 0, 1, \ldots, k_j - 1;\quad s = 0, 1, \ldots, k-1;$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots)$$

представляет собой систему частных решений уравнения (36.1), полную относительно любого круга. Очевидно, что она является также полной относительно любой односвязной области.

§ 37. Частный пример. Рассмотрим теперь уравнение

$$\Delta\Delta u + a_1\Delta u + a_2 u = 0, \tag{37.1}$$

где a_1, a_2 — постоянные. Это уравнение встречается в теории изгиба тонких пластинок (см. § 52). Применяя формулы предыдущего параграфа, мы легко найдём в явном виде общее представление всех решений этого уравнения.

1°. В данном случае

$$p(X) = \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{16} X. \tag{37.2}$$

Тогда из уравнения (36.7) получим:

$$P(0) = \frac{a_1}{4}, \quad P'(0) = \frac{1}{16}(a_2 - a_1^2). \tag{37.3}$$

Пусть $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — корни уравнения

$$\varkappa^2 - \frac{a_1}{4}\varkappa + \frac{a_2}{16} = 0.$$

Будем различать два случая: 1) $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ и 2) $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$.

Если $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$, то согласно формуле (36.22) имеем:

$$P(X) = A_1 L_0(\varkappa_1 X) + A_2 L_0(\varkappa_2 X), \tag{37.4}$$

где A_1, A_2, в силу (36.19), (37.3), удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \varkappa_1 + \varkappa_2, \\ \varkappa_1 A_1 + \varkappa_2 A_2 &= \varkappa_1^2 + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2. \end{aligned} \tag{37.5}$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_1 - \varkappa_2}, \quad A_2 = \frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_2 - \varkappa_1}. \tag{37.6}$$

Подставляя это в (37.4), получим:

$$P(X) = \frac{\varkappa_1^2 L_0(\varkappa_1 X) - \varkappa_2^2 L_0(\varkappa_2 X)}{\varkappa_1 - \varkappa_2}. \tag{37.7}$$

В случае $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$, в силу (36.22), (36.19), получим:

$$P(X) = 2\varkappa L_0(\varkappa X) - \varkappa^2 X L_1(\varkappa X). \tag{37.8}$$

Эту формулу можно получить непосредственно из формулы (37.7) предельным переходом при $\varkappa_2 \to \varkappa_1 = \varkappa$.

Предположим, что a_1, a_2 — действительные числа. Пусть T — односвязная область. Тогда все регулярные в T действительные решения уравнения (37.1) согласно (36.6) имеют вид:

$$u = \operatorname{Re}\{\bar z\Phi_1(z) + \Phi_0(z) - \\ - \int_0^z dt \int_0^{\bar z} P[(z-t)(\bar z-\tau)][\tau\Phi_1(t) + \Phi_0(t)]\,d\tau\}, \tag{37.9}$$

где $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$ — произвольные функции, голоморфные в T. Эту формулу мы можем записать ещё так:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left\{\Phi_0(z) - z\bar z\int_0^1 \Phi_0(zt)P_0[z\bar z(1-t)]\,dt + \right. \\ \left. + \bar z\Phi_1(z) - z\bar z^2\int_0^1 \Phi_1(zt)P_1[z\bar z(1-t)]\,dt\right\}, \tag{37.10}$$

где $P_0(X)$, $P_1(X)$ на основании (36.23) и (37.6) определяются следующими формулами:

1) при $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$

$$P_0(X) = \frac{\varkappa_1^2 L_1(\varkappa_1 X) - \varkappa_2^2 L_1(\varkappa_2 X)}{\varkappa_1 - \varkappa_2}, \\ P_1(X) = \frac{\varkappa_1^2 L_2(\varkappa_1 X) - \varkappa_2^2 L_2(\varkappa_2 X)}{\varkappa_1 - \varkappa_2}; \tag{37.11}$$

2) при $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$

$$P_0(X) = 2\varkappa L_1(\varkappa X) - \varkappa^2 X L_2(\varkappa X), \\ P_1(X) = 2\varkappa L_2(\varkappa X) - \varkappa^2 X L_2(\varkappa X). \tag{37.12}$$

Если подчинить теперь Φ_0, Φ_1 условиям:

$$\Phi_1(0) = 0, \quad \Phi_1'(0) = \overline{\Phi_1'(0)}, \quad \Phi_0(0) = \overline{\Phi_0(0)}, \tag{37.13}$$

и ввести обозначения: $\Phi_1(z) = z\varphi_1(z)$, $\Phi_0(z) = \varphi_0(z)$, то получим:

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\left\{\varphi_0(z) - r^2\int_0^1 \varphi_0(zt)P_0[r^2(1-t)]\,dt + \right. \\ \left. + r^2\varphi_1(z) - r^4\int_0^1 \varphi_1(zt)\,tP_1[r^2(1-t)]\,dt\right\}. \tag{37.14}$$

Здесь $r = |z|$, φ_0, φ_1 — произвольные функции, голоморфные в T, на которые можно наложить, без ущерба для общности, условия:

$$\varphi_0(0) = \overline{\varphi_0(0)}, \quad \varphi_1(0) = \overline{\varphi_1(0)}. \tag{37.15}$$

Формулу (37.14) в случае звёздной области можно записать ещё так:

$$u(x, y) = \omega_0(x, y) - r^2 \int_0^1 \omega_0(xt, yt) P_0[r^2(1-t)]\,dt +$$

$$+ r^2 \omega_1(x, y) - r^4 \int_0^1 \omega_1(xt, yt)\, tP_1[r^2(1-t)]\,dt, \qquad (37.16)$$

где ω_0, ω_1 — любые гармонические в T функции, которые однозначно определяются через u.

2°. Рассмотрим теперь следующие два частных случая уравнения (37.1):

$$1)\ a_1 = 0,\ a_2 \neq 0, \quad 2)\ a_1 \neq 0,\ a_2 = 0.$$

В первом случае уравнение можно записать в виде:

$$\Delta\Delta u + \lambda^2 u = 0 \qquad (a_2 = \lambda^2). \qquad (37.17)$$

Тогда, очевидно, $\varkappa_1 = i\lambda$, $\varkappa_2 = -i\lambda$. Следовательно, $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$; и в силу (37.7) имеем:

$$P(X) = \lambda \frac{L_0(-i\lambda X) - L_0(i\lambda X)}{2i}. \qquad (37.18)$$

Введём теперь в рассмотрение функции, определённые следующими рядами:

$$S_\mu(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!\,\Gamma(\mu+2k+2)}, \qquad (37.19)$$

$$C\ \ (X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k}}{(2k)!\,\Gamma(\mu+2k+1)}. \qquad (37.20)$$

Легко видеть, что

$$\left.\begin{aligned} S_\mu(X) &= \frac{i}{2}[L_\mu(iX) - L_\mu(-iX)], \\ C_\mu(X) &= \frac{1}{2}[L_\mu(iX) + L_\mu(-iX)]. \end{aligned}\right\} \qquad (37.21)$$

Ясно, что

$$P(X) = \lambda S_0(\lambda X). \qquad (37.22)$$

Полагая $\varkappa_1 = i\lambda$, $\varkappa_2 = -i\lambda$, из (37.11) в силу (37.21) получим:

$$P_0(X) = \lambda S_1(\lambda X), \qquad P_1(X) = \lambda S_2(\lambda X). \qquad (37.23)$$

В случае $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$ имеем: $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = \frac{a_1}{4}$. Следовательно, в этом случае

$$P(X) = \frac{a_1}{4} L_0\left(\frac{a_1}{4} X\right),$$
$$P_0(X) = \frac{a_1}{4} L_1\left(\frac{a_1}{4} X\right), \tag{37.24}$$
$$P_1(X) = \frac{a_1}{4} L_2\left(\frac{a_1}{4} X\right).$$

3°. На основании формулы (36.33) общее решение уравнения (37.1) мы можем записать также в следующем виде: 1) если $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$, то

$$u = u_1 + u_2, \tag{37.25}$$

где u_1, u_2 — любые решения уравнений

$$\Delta u_1 + \varkappa_1 u_1 = 0, \qquad \Delta u_2 + \varkappa_2 u_2 = 0, \tag{37.26}$$

2) если $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$, то

$$u = u_0 + r\frac{\partial u_1}{\partial r} \qquad (r = |z|), \tag{37.27}$$

где u_0, u_1 — любые решения уравнения

$$\Delta u + \varkappa u = 0. \tag{37.28}$$

4°. Из формул (37.25), (37.27) легко получим разложения решений уравнения (37.1) внутри круга $|z| < R$.

В самом деле, если $u(x, y)$ — решение уравнения (37.1), регулярное внутри круга $|z| < R$, то при $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ из формулы (37.25) имеем:

$$u(x, y) = a_0 J_0(\lambda_1 r) + \alpha_0 J_0(\lambda_2 r) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m J_m(\lambda_1 r) + \alpha_m J_m(\lambda_2 r)) \cos m\theta + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (b_m J_m(\lambda_1 r) + \beta_m J_m(\lambda_2 r)) \sin m\theta \tag{37.29}$$
$$(\lambda_1^2 = \varkappa_1, \ \lambda_2^2 = \varkappa_2);$$

этот ряд сходится абсолютно и равномерно внутри круга $|z| < R$. Таким образом, в случае $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ совокупность функций

$$J_0(\lambda_j r), \quad J_m(\lambda_j r)\begin{matrix}\cos m\theta \\ \sin m\theta\end{matrix} \qquad (j = 1, 2; \ m = 1, 2, \ldots) \tag{37.30}$$

представляет собой полную систему частных решений уравнения (37.1) относительно любого круга; то же самое утверждение верно и для любой односвязной области.

Рассмотрим теперь случай $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$. В этом случае из (37.27) легко вытекает, что всякое в круге $|z| < R$ регулярное решение уравнения (37.1) разлагается в ряд:

$$u(x, y) = a_0 J_0(\lambda r) + \alpha_0 r J_0'(\lambda r) + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m J_m(\lambda r) + \alpha_m r J_m'(\lambda r)] \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} [b_m J_m(\lambda r) + \beta_m r J_m'(\lambda r)] \sin m\theta \qquad (37.31)$$

$$(\lambda^2 = \varkappa),$$

который абсолютно и равномерно сходится в круге $|z| < R$.

Очевидно, совокупность функций

$$J_0(\lambda r), \quad r J_0'(\lambda r), \quad J_m(\lambda r) \begin{matrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{matrix}, \ r J_m'(\lambda r) \begin{matrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{matrix} \qquad (37.32)$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

в случае $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa = \lambda^2$ представляет собой полную систему частных решений уравнения (37.1) относительно любой односвязной области.

5°. Введём ещё в рассмотрение функции

$$\mathcal{T}_\mu(X) = \left(\frac{X}{2}\right)^\mu S_\mu\left(\frac{X^2}{4}\right), \quad D_\mu(X) = \left(\frac{X}{2}\right)^\mu C_\mu\left(\frac{X^2}{4}\right). \qquad (37.33)$$

Тогда ряд (37.29) в случае уравнения (37.17) ($\varkappa_1 = i\lambda$, $\varkappa_2 = -i\lambda$) примет вид:

$$u(x, y) = a_0 \mathcal{T}_0(\nu r) + \alpha_0 D_0(\nu r) + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \mathcal{T}_m(\nu r) + \alpha_m D_m(\nu r)] \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} [b_m \mathcal{T}_m(\nu r) + \beta_m D_m(\nu r)] \sin m\theta, \qquad (37.34)$$

где $\nu^2 = \lambda$. Очевидно, совокупность функций

$$\mathcal{T}_0(\nu r), \quad D_0(\nu r), \quad \mathcal{T}_m(\nu r) \begin{matrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{matrix}, \quad D_m(\nu r) \begin{matrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{matrix} \qquad (37.35)$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

представляет собой полную систему решений уравнения (37.17) относительно любой односвязной области.

6°. Приведём, наконец, некоторые формулы, выражающие основные свойства функций S_μ, C_μ. Принимая во внимание свойства функций L_μ (см. формулы (19.9), (19.10), (19.11)), легко получим следующие формулы:

$$
\begin{gathered}
C_{-2m}(X)=(-1)^m X^{2m} C_{2m}(X),\\
C_{-2m-1}(X)=(-1)^{m+1} X^{2m+1} S_{2m+1}(X),\\
S_{-2m}(X)=(-1)^m X^{2m} S_{2m}(X),\\
S_{-2m-1}(X)=(-1)^m X^{2m+1} C_{2m+1}(X),\\
\frac{d^{2m} C_\mu(X)}{dX^{2m}}=(-1)^m C_{\mu+2m}(X),\\
\frac{d^{2m+1} C_\mu(X)}{dX^{2m+1}}=(-1)^{m+1} S_{\mu+2m+1}(X),\\
\frac{d^{2m} S_\mu(X)}{dX^{2m}}=(-1)^m S_{\mu+2m}(X),\\
\frac{d^{2m+1} S_\mu(X)}{dX^{2m+1}}=(-1)^m C_{\mu+2m+1}(X),\\
\frac{d^m}{dX^m}(X^\mu C_\mu(X))=X^{\mu-m} C_{\mu-m}(X),\\
\frac{d^m}{dX^m}(X^\mu S_\mu(X))=X^{\mu-m} S_{\mu-m}(X),
\end{gathered}
\tag{37.36}
$$

справедливые для любого числа μ и для любого целого $m \geqslant 0$.

Наконец, отметим, что функции T_μ и S_μ связаны с томсоновскими функциями следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\operatorname{ber}_\mu(X)=D_\mu(X)\cos\frac{3\mu\pi}{4}-T_\mu(X)\sin\frac{3\mu\pi}{4},\\
\operatorname{bei}_\mu(X)=D_\mu(X)\sin\frac{3\mu\pi}{4}+T_\mu(X)\cos\frac{3\mu\pi}{4}
\end{gathered}
\tag{37.37}
$$

(см., например, Ватсон [1], стр. 81).

§ 38. О разложении и аппроксимации решений уравнения (M_0). Результаты §§ 34 и 35 позволяют доказать и в общем случае ряд теорем о разложении и аппроксимации решений уравнения (M_0) по функциям, которые являются частными решениями того же уравнения. Нетрудно видеть, что все предложения, доказанные нами в гл. II для уравнения второго порядка, можно распространить и на уравнения высшего порядка вида

$$M(u) = \Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} L_k(\Delta^{n-k} u) = 0. \tag{M$_0$}$$

1°. Из формулы (34.14) мы можем получить следующую систему частных решений:

$$\begin{gathered}
U_{m0}(z, \zeta) = G_m(z_0, \zeta_0, z, \zeta), \\
U_{m,2k}(z, \zeta) = \int_{z_0}^{z} G_m(t, \zeta_0, z, \zeta)(t - z_0)^{k-1}\, dt, \\
U_{m,2k-1}(z, \zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} G_m(z_0, \tau, z, \zeta)(\tau - \zeta_0)^{k-1}\, d\tau \\
(m = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad k = 1, 2, \ldots).
\end{gathered} \tag{38.1}$$

Очевидно, $U_{mk}(z, \zeta)$ — аналитические в области $(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}})$ решения уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} A_{ik}(z, \zeta) \frac{\partial^{i+k} U}{\partial z^i \partial \zeta^k} = 0 \qquad (A_{nn} = 1). \tag{38.2}$$

В дальнейшем систему функций (38.1) будем обозначать через $\{U_{mk}(z, \zeta)\}$ или просто через $\{U_{mk}\}$, причём первый индекс m принимает значения $0, 1, \ldots, n-1$, а второй индекс k — значения $0, 1, 2, \ldots$; точки z_0, ζ_0 принадлежат $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ соответственно, где $\mathfrak{D}$ — основная область уравнения (M_0).

Полагая $\zeta = \bar{z}$, из (38.1) получим систему аналитических в $\mathfrak{D}$ решений $u_{mk}(x, y)$ уравнения (M_0). Очевидно,

$$u_{mk}(x, y) = U_{mk}(x + iy, x - iy) \tag{38.3}$$
$$(m = 0, \ldots, n-1;\ k = 0, 1, \ldots).$$

В случае уравнения $\Delta^n u = 0$ из (38.1) получим следующие простейшие решения этого уравнения:

$$r^{2m+k} e^{ik\theta}, \quad r^{2m+k} e^{-ik\theta} \tag{38.4}$$
$$(m = 0, 1, \ldots, n-1;\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ r = |z - z_0|,\ \theta = \arg(z - z_0)).$$

Следовательно, система $\{u_{mk}(x, y)\}$ частных решений уравнения (M_0) представляет собой аналог этих простейших

n-гармонических функций; поэтому в структурном отношении её можно рассматривать как одну из наиболее простых систем решений уравнения (M_0). Свойства этой системы, которые мы теперь докажем, ещё более убедят нас в последнем.

2°. Из (34.15) имеем:

$$G_m(t, \tau, z, \zeta) = (z-t)^m (\zeta-\tau)^m G_m^{(1)}(t, \tau, z, \zeta) \tag{38.5}$$

$$(m = 0, 1, \ldots, n-1),$$

где $G_m^{(1)}$ — функции, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$G_m^{(1)}(t, \tau, t, \tau) = \frac{1}{m!m!}, \tag{38.6}$$

$$|G_m^{(1)}(t, \tau, z, \zeta)| \leqslant K_0(t, \tau, z, \zeta) \tag{38.7}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots),$$

причём $K_0(t, \tau, z, \zeta)$ — положительная непрерывная функция внутри области $z, t \in \mathfrak{D}$, $\zeta, \tau \in \overline{\mathfrak{D}}$. Например, если $\tau = \bar{t}$ и область $\mathfrak{D}$ — звёздная относительно точки t, то в качестве K_0 можем взять функцию

$$K_0(t, \bar{t}, z, \zeta) = 1 + |z-t| \int_0^1 |\Gamma_1(z, \zeta, t + (z-t)\sigma)|\, d\sigma +$$
$$+ |\zeta - \bar{t}| \int_0^1 |\Gamma_2(\zeta, z, \bar{t} + (\zeta - \bar{t})\sigma)|\, d\sigma +$$
$$+ |z-t|\,|\zeta-\bar{t}| \int_0^1 d\sigma \int_0^1 |\Gamma(z, \zeta, t + (z-t)\sigma, \bar{t} + (\zeta-\bar{t})\tau)|\, d\tau. \tag{38.8}$$

Полагая в дальнейшем $z_0 = \zeta_0 = 0$, в силу (38.5), из (38.1) получим

$$U_{m0} = z^m \zeta^m G_m^{(1)}(0, 0, z, \zeta),$$

$$U_{m,2k} = z^{m+k} \zeta^m \int_0^1 t^{k-1}(1-t)^m G_m^{(1)}(zt, 0, z, \zeta)\, dt, \tag{38.9}$$

$$U_{m,2k-1} = z^m \zeta^{m+k} \int_0^1 t^{k-1}(1-t)^m G_m^{(1)}(0, \zeta t, z, \zeta)\, dt$$

$$(m = 0, \ldots, n-1; \quad k = 1, 2, \ldots).$$

Из этих формул в силу (38.6) получим:

$$
\begin{gathered}
[(z\zeta)^{-m} U_{m0}(z, \zeta)]_{\substack{z=0\\ \zeta=0}} = \frac{1}{(m+k)!},\\
[z^{-m-k}\zeta^{-m} U_{m,2k}(z, \zeta)]_{\substack{z=0\\ \zeta=0}} = \frac{(k-1)!}{(m+k)!},\\
[z^{-k}\zeta^{-m-k} U_{m,2k-1}(z, \zeta)]_{\substack{z=0\\ \zeta=0}} = \frac{(k-1)!}{m!m!}.\\
(m=0, 1, \ldots, n-1;\ k=1, 2, \ldots).
\end{gathered}
\tag{38.10}
$$

Кроме того, на основании неравенств (38.7) будем иметь:

$$
\begin{gathered}
|U_{m0}(z, \zeta)| < |z|^m |\zeta|^m K_0(0, 0, z, \zeta),\\
|U_{m,2k}(z, \zeta)| < |z|^{m+k} |\zeta|^k K_0(0, 0, z, \zeta),\\
|U_{m,2k-1}(z, \zeta)| < |z|^m |\zeta|^{m+k} K_0(0, 0, z, \zeta)\\
(m=0, 1, \ldots, n-1;\quad k=1, 2, \ldots).
\end{gathered}
\tag{38.11}
$$

3°. Нетрудно теперь доказать, что *система решений* (38.1) *уравнения* (M_0) *является полной относительно области* ($\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$), *где* $\mathfrak{D}$ — *любая основная область уравнения* (M_0).

Это значит, что *всякое аналитическое в* ($\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$) *решение уравнения* ($M_0$) *можно аппроксимировать равномерно внутри* ($\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$) *при помощи линейных комбинаций функций* (38.1).

Это сразу вытекает из формулы (34.14), так как входящие туда голоморфные функции $\chi_k(z)$, $\chi_k^*(\zeta)$ можно аппроксимировать равномерно внутри $\mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ полиномами от z и ζ соответственно.

Из этого предложения вытекает, что *всякое аналитическое в* ($\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$) *решение* $U(z, \zeta)$ *уравнения* (M_0) *можно разложить в равномерно сходящийся внутри* ($\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}$) *ряд с членами вида*:

$$
V_l(z, \zeta) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{l} c_{mk}^l U_{mk}(z, \zeta) \quad (l=0, 1, \ldots). \tag{38.12}
$$

Для случая действительной области (когда x, y — действительные переменные) имеют место следующие предложения:

А. *Всякое регулярное в области* $\mathfrak{D}$ *решение уравнения* (M_0) *можно аппроксимировать равномерно внутри* $\mathfrak{D}$ *при помощи* *линейных комбинаций частных решений* $u_{mk}(x, y)$ (*см. формулу* (38.3)).

B. *Всякое регулярное в области* $\mathfrak{D}$ *решение уравнения* (M_0) *можно разложить в равномерно сходящийся внутри* $\mathfrak{D}$ *ряд с членами вида*:

$$v_l(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{l} c_{mk}^l u_{mk}(x, y). \tag{38.13}$$

4°. Разложение в ряд решений уравнения (M_0) при помощи функций $u_{mk}(x, y)$ принимает особенно простой вид в случае круговой области.

Пусть $u(x, y)$ — регулярное в круге $|z - z_0| < R$ решение уравнения (M_0). Тогда, представляя его в виде (34.14) и разлагая функции $\chi_k(z)$, $\chi_k^*(\zeta)$, голоморфные в кругах $|z - z_0| < R$, $|\zeta - \bar{z}_0| < R$, в ряды Тейлора:

$$\chi_k(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{k,2m}(z - z_0)^{k-1}, \quad \chi_k^*(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{k,2m-1}(\zeta - \bar{z}_0)^{k-1} \tag{38.14}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

получим:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} c_{km} u_{km}(x, y). \tag{38.15}$$

Этот ряд, очевидно, сходится равномерно внутри круга $|z - z_0| < R$. Используя неравенства (38.11), можно доказать также абсолютную сходимость его в том же круге.

Если мы теперь используем свойства (38.9) и (38.10) функций u_{km}, то легко докажем, что коэффициенты c_{km} ряда (38.15) выражаются через значения функции $u(x, y)$ и её производных в точке z_0.

II. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

В этом разделе мы изучим основную граничную задачу, связанную с уравнением (M_0). Во всём дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициенты и решения этого уравнения — действительные функции.

§ 39. Граничная задача B. 1°. Пусть T — односвязная область, принадлежащая некоторой основной области $\mathfrak{D}$ уравнения

$$M(u) = \Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} L_k(\Delta^{n-k} u) = 0. \tag{M_0}$$

Пусть L — граница области T — простая замкнутая гладкая кривая, заданная уравнениями

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

где s — дуга кривой L; очевидно, $x(s+l) = x(s)$, $y(s+l) = y(s)$ и $x(s_1) + iy(s_1) \neq x(s_2) + iy(s_2)$, если $0 < s_1 < s_2 \leqslant l$, где l — длина кривой L. Во всём дальнейшем мы будем предполагать, что *функции $x(s)$ и $y(s)$ имеют непрерывные производные порядка $2n$ по дуге s.*

Рассмотрим теперь следующую граничную задачу:

Требуется найти регулярное в T (действительное) решение $u(x, y)$ уравнения (M_0) по граничным условиям:

$$u^+ = f_0, \quad \left(\frac{du}{d\nu}\right)^+ = f_1, \quad \ldots, \left(\frac{d^{n-1}u}{d\nu^{n-1}}\right)^+ = f_{n-1}, \tag{39.1}$$

где ν — внешняя нормаль кривой L; $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ — заданные действительные функции, которые удовлетворяют следующим условиям: $f_k(s)$ имеет непрерывные производные по дуге s порядка $\leqslant 2n - k$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$); кроме того, от искомого решения $u(x, y)$ мы будем требовать, чтобы все его частные производные вида $\frac{\partial^{m+k}u}{\partial z^m \partial \zeta^k}$ ($k \leqslant n$, $m \leqslant n$) были непрерывны в $T + L$.

Сформулированную граничную задачу для краткости будем называть в дальнейшем *задачей* B, а соответствующую ей однородную задачу ($f_0 = 0, \ldots, f_{n-1} = 0$) — *задачей* B_0.

При помощи общего представления решений уравнения (M_0) через голоморфные функции задача B решена автором в работе [5]. Развивая изложенный в последней метод, автор получил более простые интегральные уравнения типа Фредгольма, решающие задачу B для уравнения $\Delta^m u = 0$ в другой своей работе [11]. Ниже, несколько видоизменяя и расширяя упомянутые методы, мы сведём решение задачи B к эквивалентной системе интегральных уравнений. Желая изложить только суть метода, мы будем в дальнейшем пропускать отдельные детали доказательства; эти пробелы легко можно восполнить, используя источники, которые будут указаны в соответствующих местах.

2°. Напишем следующие очевидные соотношения:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial^{k+m}u}{\partial z^k \partial \zeta^m}\right)^+ = \left(\frac{\partial^{k+m+1}u}{\partial z^{k+1} \partial \zeta^m}\right)^+ \frac{dz}{ds} + \left(\frac{\partial^{k+m+1}u}{\partial z^k \partial \zeta^{m+1}}\right)^+ \frac{d\zeta}{ds} \tag{39.2}$$

$$(\zeta = \bar{z} = x - iy; \quad m, k = 0, 1, 2, \ldots; \quad m + k < 2n).$$

$$\left(\frac{d^k u}{d\nu^k}\right)^+ = i^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \frac{k!}{l!\,(k-l)!} \left(\frac{\partial^k u}{\partial z^{k-l} \partial \zeta^l}\right)^+ \left(\frac{dz}{ds}\right)^{k-2l} \tag{39.3}$$

$$(\zeta = \bar{z} = x - iy; \ k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Пусть $u(x, y)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям (39.1). Введём обозначения:

$$\left(\frac{\partial^{k+m}u}{\partial z^k \partial \zeta^m}\right)^{\pm} = g_{km}(s). \tag{39.4}$$

На основании (39.2) и (39.3) очевидно, что функции g_{km} $(k+m \leqslant n-1)$ однозначно выражаются через $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ и их производные; точнее, g_{km} $(k+m=l \leqslant n-1)$ выражаются через функции $f_0, \ldots, f_l$ и их производные, причём производные от f_k $(k \leqslant l)$ будут порядка не выше $l-k$. Поэтому согласно условиям задачи В функция $g_{km}(s)$ $(k+m=l \leqslant n-1)$ имеет непрерывную производную порядка $2n-l$ $(l=0, 1, \ldots, n-1)$.

Из (39.2) и (39.3) вытекают следующие формулы:

$$\left(\frac{\partial^{m+1}u}{\partial z^{m+1}}\right)^{+}\left(\frac{dz}{ds}\right)^{m+1} + (-1)^m\left(\frac{\partial^{m+1}u}{\partial \zeta^{m+1}}\right)^{+}\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^{m+1} = \\ = \sum_{l=0}^{m}(-1)^l\left(\frac{dz}{ds}\right)^{2m-2l}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial^m u}{\partial z^{m-l}\partial \zeta^l}\right)^{+} \tag{39.5}$$

$$(m=0, 1, \ldots; \ \zeta=\bar{z}).$$

В частности, этим соотношениям удовлетворяют функции $g_{km}(s)$ $(k+m \leqslant n-1)$.

Нетрудно теперь доказать, что (39.1) эквивалентно условиям:

$$u^{+}=g_{00}, \ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{+}=g_{10}, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial z^{n-1}}\right)^{+}=g_{n-1,0} \quad (\text{на } L). \tag{39.6}$$

§ 40. Интегральная запись граничных условий. 1°. Пусть начало координат лежит в T. Докажем, что тогда *условия* (39.6) *эквивалентны следующим интегральным соотношениям*:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{u-g_{00}}{t-z}\,dt - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{u-g_{00}}{t}\,dt\right]=0,$$
$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\int_L t^l\left(\frac{\partial^l u}{\partial t^l}-g_{l0}\right)\frac{dt}{t-z} - \frac{1}{\pi i}\int_L t^l\left(\frac{\partial^l u}{\partial t^l}-g_{l0}\right)\frac{dt}{t}\right]=0 \tag{40.1}$$

$$(l=1, \ldots, n-1),$$

где z — любая точка, лежащая вне $T+L$.

Если имеет место условие (39.6), то соотношения (40.1), очевидно, выполняются. Мы сейчас докажем справедливость обратного утверждения; а именно, если u есть функция, заданная в $T+L$ и имеющая непрерывные в смысле Гельдера частные производные порядка $\leqslant n-1$, то из (40.1) вытекают условия (39.6).

Из первого уравнения (40.1), очевидно, имеем:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{u-g_{00}}{t-z}\,dt=0, \quad \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{u-g_{00}}{t}\,dt=iC, \tag{40.2}$$

где C — действительная постоянная, а z — любая точка, лежащая вне $T+L$.

Из первого уравнения (40.2), в силу того, что $u-g_{00}$ — действительная функция, получим $u-g_{00}=C_0$, где C_0 — действительная постоянная; подставляя это во второе уравнение (40.2), будем иметь: $C_0=C=0$, т. е. $u=g_{00}$ на L.

Из второго уравнения (40.1), очевидно, следует, что

$$t^l\left(\frac{\partial^l u}{\partial t^l}-g_{l0}\right)=\chi_l^+(t) \quad (\text{на } L), \quad \chi_l(0)=iC_l \tag{40.3}$$

$$(l=1, 2, \ldots, n-1;\ C_l \text{ — действительная постоянная}),$$

где $\chi_l^+(t)$ — граничное значение функции $\chi_l(z)$, голоморфной внутри T $(l=1, \ldots, n-1)$. Если принять во внимание формулу (39.5), то из (40.3) при $l=1$ будем иметь:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\chi_1^+(t)}{t}\frac{dt}{ds}\right]=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(u^+-g_{00})=0. \tag{40.4}$$

Но это есть однородная граничная задача, которую мы уже изучили в § 24, n° 2. Поэтому имеем:

$$\chi_1(z)=iA_1e^{-ip(z)}, \tag{40.5}$$

где A_1 — любая действительная постоянная, $p(z)$ — голоморфная в T функция, определённая условием: $\operatorname{Re}p^+(t)=\theta-\varphi$, причём $\theta=\arg\frac{dt}{ds}$, $\varphi=\arg t$, $p(0)=\overline{p(0)}$.

Умножим теперь обе части (40.4) на ds и возьмём интеграл вдоль L. Тогда, очевидно, получим:

$$\operatorname{Re}[2\pi i\,\chi_1(0)]=0.$$

Подставляя сюда выражение (40.5), получим: $\cos p(0)=0$. Учитывая это и подставляя выражение (40.5) в последнее условие (40.3) (при $l=1$), получим: $A_1=C_1=0$, т. е. $\chi_1(z)=0$ всюду в T.

Таким образом, из первых двух уравнений (40.1) вытекают первые два равенства (39.6). Принимая теперь во внимание эти равенства, а также первое равенство (40.3), в силу (39.5) при $l=2$ получим:

$$\operatorname{Im}\left[\frac{\chi_2^+(t)}{t^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right]=0,$$

где $\chi_2(z)$ — функция, голоморфная в области T.

Эта задача имеет единственное решение

$$\chi_2(z) = A_2 e^{-2ip(z)}, \tag{40.6}$$

где A_2 — любая действительная постоянная, а $p(z)$ — рассмотренная выше голоморфная функция.

Подставляя теперь выражение (40.6) во второе уравнение (40.3) ($l=2$), легко увидим, что $A_2 = C_2 = 0$, т. е. $\chi_2(z) = 0$ всюду в T.

Таким образом, из первых трёх уравнений (40.1) вытекают три первых равенства (39.6).

Продолжая аналогичные рассуждения, мы увидим, что из (40.1) вытекают все равенства (39.6), а это и требовалось доказать.

2°. Условия (40.1), очевидно, эквивалентны равенствам

$$\operatorname{Re}\left[-t_0^l \frac{\partial^l u}{\partial t^l} + \frac{1}{\pi i}\int_L t^l \frac{\partial^l u}{\partial t^l}\frac{dt}{t-t_0} - \frac{1}{\pi i}\int_L t^{l-1}\frac{\partial^l u}{\partial t^l}\,dt\right] = F_l(t_0) \tag{40.7}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, n-1; \quad t_0 \in L),$$

где

$$F_l(t_0) = \operatorname{Re}\left[-t_0^l g_{l0}(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t^l g_{l0}(t)\,dt}{t-t_0} - \frac{1}{\pi i}\int_L t^{l-1} g_{l0}(t)\,dt\right] \tag{40.8}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Используя теперь векторные обозначения, мы можем записать условия (40.7) в виде:

$$\operatorname{Re}\left[-\boldsymbol{V}(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\boldsymbol{V}(t)\,dt}{t-t_0} - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\boldsymbol{V}(t)\,dt}{t}\right] = \boldsymbol{F}(t_0), \tag{40.9}$$

где $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{F}$ — векторы с компонентами

$$t^l \frac{\partial^l u}{\partial t^l}, \quad F_l \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{40.10}$$

соответственно.

Так как функция g_{l0} и её производные порядка $\leqslant 2n-l$ непрерывны, то нетрудно доказать, что функция $F_l(t_0)$ имеет вдоль L производные порядка $\leqslant 2n-l-1$, удовлетворяющие условию Гельдера ($l = 0, 1, \ldots, n-1$).

§ 41. Приведение граничной задачи B к интегральным уравнениям. 1°. Приступим теперь к решению задачи B. Её решение, согласно (34.22), мы можем искать в виде:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1}\left[a_k G_k(0, 0, z, \bar z) + \int_0^z G_k(t, 0, z, \bar z)\chi_k(t)\,dt\right], \tag{41.1}$$

где $a_0, \ldots, a_{n-1}$ — действительные постоянные, $\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}$ — голоморфные в T функции; мы предполагаем, что начало координат ($z=0$) принадлежит T. Постоянные $a_0, \ldots, a_{n-1}$ и функции $\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}$ однозначно выражаются через u.

Вводя в рассмотрение функции

$$\varphi_k(z) = a_k \frac{z^k}{k!} + \int_0^z \frac{(z-t)^k}{k!} \chi_k(t)\, dt \qquad (k=0, \ldots, n-1) \tag{41.2}$$

и принимая во внимание вытекающие из (34.15) равенства:

$$\left[\frac{\partial^l}{\partial t^l} G_k(t, \tau, z, \bar{z}) \right]_{t=z} = 0 \tag{41.3}$$
$$(l=0, 1, \ldots, k-1;\ k=1, \ldots, n-1),$$

после интегрирования по частям мы можем придать формуле (41.1) вид:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} \left[A_k(z) \varphi_k(z) - \int_0^z B_k(z, t) \varphi_k(t)\, dt \right], \tag{41.4}$$

где

$$A_k(z) = (-1)^k \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_k(t, 0, z, \bar{z}) \right]_{t=z},$$
$$B_k(z, t) = (-1)^k \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} G_k(t, 0, z, \bar{z}) \tag{41.5}$$
$$(k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Из (41.2) видно, что

$$\varphi_k(z) = z^k \psi_k(z) \qquad (k=0, 1, \ldots, n-1), \tag{41.6}$$

где $\psi_k(z)$ — голоморфные в T функции, удовлетворяющие условиям

$$\psi_k(0) = \overline{\psi_k(0)} \qquad (k=0, 1, \ldots, n-1). \tag{41.7}$$

Подставляя в (41.4) вместо функций φ_k их выражения (41.6) и обозначая через $\boldsymbol{A}(z)$, $\boldsymbol{B}(z, t)$, $\psi(z)$ векторы с компонентами $A_k(z) z^k$, $B_k(z, t)\, t^k$, $\psi_k(z)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ соответственно, можно записать формулу (41.4) в виде:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left[\boldsymbol{A}(z) \psi(z) - \int_0^z \boldsymbol{B}(z, t) \psi(t)\, dt \right]. \tag{41.8}$$

Из этой формулы вытекает, что если производные порядка n от функций $\psi_k(z)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ непрерывны в $T+L$, то $\frac{\partial^{k+m}u}{\partial z^k\, \partial\zeta^m}$ $(k\leqslant n, m\leqslant n)$ также будут непрерывны в $T+L$. При помощи формулы (35.17) мы можем доказать также справедливость следующего предложения:

Если регулярное в T решение $u(x, y)$ уравнения (M_0) обладает тем свойством, что все $\frac{\partial^{k+m}u}{\partial z^k\partial\zeta^m}$ $(k\leqslant n, m\leqslant n)$ непрерывны в $T+L$, то производные порядка $n-1$ от $\psi_k(z)$ непрерывны в $T+L$ в смысле Гельдера.

На основании этого в дальнейшем мы будем предполагать, что производные порядка $\leqslant n-1$ от функций $\psi_k(z)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ непрерывны в $T+L$.

2°. Из (41.8) имеем:

$$z^l\frac{\partial^l u}{\partial z^l}=\sum_{k=0}^{l} \boldsymbol{A}_{lk}(z)\,\psi^{(k)}(z)+\boldsymbol{A}_l^*(z)\,\overline{\psi(z)}+ \\ +\int_0^z \boldsymbol{B}_l(z, t)\,\psi(t)\,dt+\int_0^{\bar z}\boldsymbol{B}_l^*(z, \bar t)\,\overline{\psi(t)}\,d\bar t, \qquad (41.9)$$

где

$$\boldsymbol{A}_{lk}(z)=\frac{1}{2}\frac{l!\,z^l}{k!\,(l-k)!}\frac{\partial^{l-k}\boldsymbol{A}(z)}{\partial z^{l-k}}+\boldsymbol{A}_{lk}^0,\quad \boldsymbol{A}_l^*(z)=\frac{1}{2}z^l\frac{\partial^l\overline{\boldsymbol{A}(z)}}{\partial z^l},$$
$$\boldsymbol{B}_l(z, t)=-\frac{1}{2}z^l\frac{\partial^l\boldsymbol{B}(z, t)}{\partial z^l},\quad \boldsymbol{B}_l^*(z, \bar t)=-\frac{1}{2}z^l\frac{\partial^l\overline{\boldsymbol{B}(z, t)}}{\partial z^l} \qquad (41.10)$$
$$(k=0, 1, \ldots, l;\ l=0, 1, \ldots, n-1).$$

Очевидно, $\boldsymbol{A}_{lk}$, $\boldsymbol{A}_l^*$, $\boldsymbol{B}_l$, $\boldsymbol{B}_l^*$ — векторы. Заметим, что $\boldsymbol{A}_{lk}^0$ есть вектор, компоненты которого выражаются через компоненты вектора $\boldsymbol{B}(z, t)$.

Формулы (41.9) мы можем записать также в виде одного векторного равенства:

$$\boldsymbol{V}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(z)\,\psi^{(k)}(z)+\alpha^*(z)\,\overline{\psi(z)}+ \\ +\int_0^z\gamma(z, t)\,\psi(t)\,dt+\int_0^{\bar z}\gamma^*(z, \bar t)\,\overline{\psi(t)}\,d\bar t, \qquad (41.11)$$

где V — вектор с компонентами u, $z\frac{\partial u}{\partial z}, \ldots, z^{n-1}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial z^{n-1}}$; α_k, α^*, γ, γ^* — матрицы, строками которых являются компоненты векторов A_{lk}, A_l^*, B_l, B_l^* $(l=0, \ldots, n-1)$ соответственно; надо иметь в виду, что $A_{lk}=0$ при $k>l$.

Если подставить (41.11) в (40.9), то среди других выражений нам встретятся выражения вида:

$$p_k(t_0) = -\alpha_k(t_0)\,\psi^{(k)}(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\alpha_k(t)\,\psi^{(k)}(t)}{t-t_0}\,dt, \tag{41.12}$$

$$q_k = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\alpha_k(t)\,\psi^{(k)}(t)\,dt}{t} \tag{41.13}$$

$$(k=0, 1, \ldots, n-1;\ t_0 \in L).$$

Так как по предположению компоненты вектора $\psi^{(k)}(z)$ $(k=0, 1, \ldots \ldots, n-1)$ — голоморфные функции в T, непрерывные в $T+L$, то будем иметь:

$$-\psi^{(k)}(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi^{(k)}(t)\,dt}{t-t_0} = 0 \tag{41.14}$$

$$(k=0, 1, \ldots, n-1;\ t_0 \in L).$$

Поэтому (41.12) можно представить в виде:

$$p_k(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\alpha_k(t)-\alpha_k(t_0)}{t-t_0}\,\psi^{(k)}(t)\,dt \tag{41.15}$$

$$(k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Интегрируя по частям, получим для (41.13) и (41.15) следующие выражения:

$$p_k(t_0) = \int_L P_k(t_0, t)\,\psi(t)\,dt, \tag{41.16}$$

$$q_k = \int_L Q_k(t)\,\psi(t)\,dt \tag{41.17}$$

$$(k=0, 1, \ldots, n-1),$$

где

$$P_k(t_0, t) = \frac{(-1)^k}{\pi i}\frac{d^k}{dt^k}\frac{\alpha_k(t)-\alpha_k(t_0)}{t-t_0}, \tag{41.18}$$

$$Q_k(t) = \frac{(-1)^k}{\pi i}\frac{d^k}{dt^k}\frac{\alpha_k(t)}{t} \tag{41.19}$$

$$(k=0, 1, \ldots, n-1);$$

надо помнить, что $\frac{d}{dt} = \frac{d\bar{t}}{ds}\cdot\frac{d}{ds}$.

Подставляя (41.11) в (40.9) и принимая во внимание (41.16) и (41.17), будем иметь:

$$\operatorname{Re}\left\{-\alpha^*(t_0)\overline{\psi(t_0)}+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\alpha^*(t)t_0\overline{\psi(t)}}{t(t-t_0)}\,dt+\int_L Q(t_0, t)\,\psi(t)\,dt-\right.$$

$$-\int_0^{t_0}\gamma(t_0, t)\,\psi(t)\,dt+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t_0\,dt}{t(t-t_0)}\int_0^t \gamma(t, t_1)\,\psi(t_1)\,dt_1-$$

$$\left.-\int_0^{\bar t_0}\gamma^*(t_0, \bar t)\,\overline{\psi(t)}\,d\bar t+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t_0\,dt}{t(t-t_0)}\int_0^{\bar t}\gamma^*(t, \bar t_1)\,\overline{\psi(t_1)}\,d\bar t_1\right\}=F(t_0), \tag{41.20}$$

где Q — матрица, определённая формулой:

$$Q(t_0, t)=\sum_{k=0}^{n-1}[P_k(t_0, t)+Q_k(t)]. \tag{41.21}$$

3°. Так как искомый вектор $\psi(z)$, в силу (41.7), удовлетворяет условию

$$\psi(0)=\overline{\psi(0)}, \tag{41.22}$$

то мы можем его представить в виде (см., например, Мусхелишвили [1], стр. 180):

$$\psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} \qquad (z\in T), \tag{41.23}$$

где $\mu(t)$ — вектор, компоненты которого—действительные функции, непрерывные в смысле Гельдера на L. Так как по условию все производные от $\psi(z)$ порядка $\leqslant n-1$ непрерывны в $T+L$ в смысле Гельдера, то нетрудно видеть, что $\mu(t)$ имеет производные порядка $\leqslant n-1$, непрерывные в смысле Гельдера на L[1]).

---

[1]) В самом деле, μ удовлетворяет уравнению

$$\mu(s_0)+\int_L \mu(s)\,K(s_0, s)\,ds=f(s_0), \tag{*}$$

где $f(s_0)=\operatorname{Re}\psi^+(t_0)$,

$$K(s_0, s)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\frac{y(s)-y(s_0)}{x(s)-x(s_0)}.$$

Но согласно нашему предположению $x(s)$ и $y(s)$ имеют непрерывные производные порядка $2n$. Поэтому нетрудно доказать, что функция $K(s_0, s)$ имеет непрерывные производные порядка $2n-2$ относительно перемен-

Из (41.23), переходя к пределу, получим:

$$\begin{aligned}\psi(t_0) &= \mu(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0},\\ \overline{\psi(t_0)} &= \mu(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,d\bar t}{\bar t-\bar t_0}\quad (t_0\in L).\end{aligned} \tag{41.24}$$

В силу (41.23) имеем:

$$\int_0^{t_0}\gamma(t_0, t)\,\psi(t)\,dt=\lim_{T\ni z\to t_0}\int_0^z \gamma(z, t)\frac{dt}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t_1)\,dt_1}{t_1-t}=$$

$$=\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int_L\left(\int_0^z \frac{\gamma(z, t)\,dt}{t_1-t}\right)\mu(t_1)\,dt_1=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\int_0^{t_0}\frac{\gamma(t_0, t)-\gamma(t_0, t_1)}{t_1-t}\,dt-\gamma(t_0, t_1)\lg\left(1-\frac{t_0}{t_1}\right)\right]\mu(t_1)\,dt_1. \tag{41.25}$$

Аналогично получим:

$$\int_0^{\bar t_0}\gamma^*(t_0, \bar t)\,\overline{\psi(t)}\,d\bar t=$$

$$=-\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\int_0^{\bar t_0}\frac{\gamma^*(t_0, \bar t)-\gamma^*(t_0, \bar t_1)}{\bar t_1-\bar t}\,d\bar t-\gamma^*(t_0, \bar t_1)\lg\left(1-\frac{\bar t_0}{\bar t_1}\right)\right]\mu(t_1)\,d\bar t_1. \tag{41.26}$$

Подставляя (41.24), (41.25) и (41.26) в (41.20), после перестановки интегралов и некоторых очевидных преобразований получим:

$$a(t_0)\,\mu(t_0)+\int_L \boldsymbol{K}(t_0, t)\,\mu(t)\,ds=\boldsymbol{F}(t_0), \tag{41.27}$$

ных s_0, s (см. Мусхелишвили [1], § 8). Следовательно, из (*) получим (так как $n\leqslant 2n-2$ при $n>1$):

$$\frac{d^{n-1}\mu(s_0)}{ds_0^{n-1}}+\int_L \mu(s)\frac{d^{n-1}K(s_0, s)}{ds_0^{n-1}}\,ds=\frac{d^{n-1}f(s_0)}{ds_0^{n-1}}. \tag{**}$$

Отсюда сразу следует, что производные порядка $n-1$ от компонент вектора $\mu(s)$ непрерывны в смысле Гельдера.

где

$$a(t_0) = -\frac{1}{2}\left[\alpha^*(t_0) + \overline{\alpha^*(t_0)}\right], \tag{41.28}$$

$$\begin{aligned}
K(t_0, t) = \operatorname{Re}\Bigg\{ & \frac{\alpha^*(t_0)\bar{t}'}{\pi i(\bar{t} - \bar{t}_0)} + \frac{\alpha^*(t)\, t'\, t_0}{\pi i t(t - t_0)} + \frac{\bar{t}'}{\pi^2}\int_L \frac{t_0\alpha^*(t_1) - t_1\alpha^*(t_0)}{(t_1 - t_0)(\bar{t} - \bar{t}_1)t_1}\, dt_1 + \\
& + \frac{\alpha^*(t)}{\pi^2}\int_L \left(\frac{d}{ds}\lg\frac{\bar{t} - \bar{t}_1}{t - t_1}\right)\frac{dt_1}{t_1 - t_0} + t' Q(t_0, t) + \frac{t'}{\pi i}\int_L \frac{Q(t_0, t_1)\, dt_1}{t - t_1} - \\
& - \frac{t'}{\pi i}\int_0^{t_0} \frac{\gamma(t_0, t_1) - \gamma(t_0, t)}{t - t_1}\, dt_1 + \frac{t'\gamma(t_0, t)}{\pi i}\lg\left(1 - \frac{t_0}{t}\right) - \\
& - \frac{t'}{\pi^2}\int_L \frac{t_0\, dt_1}{t_1(t_1 - t_0)}\left[\int_0^{t_1} \frac{\gamma(t_1, t_2) - \gamma(t_1, t)}{t - t_2}\, dt_2 - \gamma(t_1, t)\lg\left(1 - \frac{t_1}{t}\right)\right] + \\
& + \frac{\bar{t}'}{\pi i}\int_0^{\bar{t}_0} \frac{\gamma^*(t_0, \bar{t}_1) - \gamma^*(t_0, \bar{t})}{\bar{t} - \bar{t}_1}\, d\bar{t}_1 - \frac{\bar{t}'\gamma^*(t_0, \bar{t})}{\pi i}\lg\left(1 - \frac{\bar{t}_0}{\bar{t}}\right) + \\
& + \frac{\bar{t}'}{\pi^2}\int_L \frac{t_0\, dt_1}{t_1(t_1 - t_0)}\left[\int_0^{\bar{t}_1} \frac{\gamma^*(t_1, \bar{t}_2) - \gamma^*(t, \bar{t})}{\bar{t} - \bar{t}_2}\, d\bar{t}_2 - \gamma^*(t_1, \bar{t})\lg\left(1 - \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}}\right)\right]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{41.29}$$

Здесь t', $\bar{t}'$ обозначают производные от t, $\bar{t}$ по соответствующей дуге; $\lg\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)$ есть предел главного значения $\lg\left(1 - \frac{z}{t}\right)$ $(t \in L)$, когда z стремится из области T к точке $t_0 \in L$ $(t_0 \neq t)$.

Очевидно, (41.27) представляет собой матричную запись системы интегральных уравнений; мы можем (41.27) записать ещё так:

$$a(t_0)\mu(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\, dt}{t - t_0} + \int_L K_0(t_0, t)\mu(t)\, ds = F(t_0), \tag{41.30}$$

где

$$b(t_0) = \frac{1}{2}\left[\alpha^*(t_0) - \overline{\alpha^*(t_0)}\right], \tag{41.31}$$

$$K_0(t_0, t) = K(t_0, t) - \frac{t' b(t_0)}{\pi i(t - t_0)}. \tag{41.32}$$

4°. Докажем, что уравнение (41.27) нормального типа (см. Мусхелишвили [1], стр. 425). Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\det \alpha^*(t_0) \neq 0 \quad \text{(всюду на } L). \tag{41.33}$$

В силу (41.10) нетрудно видеть, что

$$\det \alpha^*(t_0)=\frac{r^{n(n-1)}}{2^n}\begin{vmatrix} \overline{A_0(t_0)}, & \overline{A_1(t_0)}, & \ldots, & \overline{A_{n-1}(t_0)} \\ \frac{\partial \overline{A_0(t_0)}}{\partial t_0}, & \frac{\partial \overline{A_1(t_0)}}{\partial t_0}, & \ldots, & \frac{\partial \overline{A_{n-1}(t_0)}}{\partial t_0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^{n-1}\overline{A_0(t_0)}}{\partial t_0^{n-1}}, & \frac{\partial^{n-1}\overline{A_1(t_0)}}{\partial t_0^{n-1}}, & \ldots, & \frac{\partial^{n-1}\overline{A_{n-1}(t_0)}}{\partial t_0^{n-1}} \end{vmatrix}, \quad (41.34)$$

где $r=|t_0|$, $A_k(t_0)=g_k(t_0, \overline{t_0})$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ (см. формулу (41.5)), причём

$$g_k(z, \zeta)=(-1)^k\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_k(t, 0, z, \zeta)\right]_{t=z}.$$

На основании (34.16) и (34.5) легко получим, что $g_k(z, \zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$g_k(z, \zeta)+\sum_{m=0}^{n-1}\int_0^{\zeta}\frac{(\zeta-\tau)^{n-m-1}}{(n-m-1)!}B_{nm}(z, \tau)\, g_k(z, \tau)\, d\tau=\frac{\zeta^k}{k!}$$

$$(k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Отсюда сразу получим, что $g_0, \ldots, g_{n-1}$ — фундаментальная система решений уравнения

$$\frac{\partial^n g}{\partial \zeta^n}+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\partial^{n-m-1}}{\partial \zeta^{n-m-1}}\left[B_{n, n-m-1}(z, \zeta)\, g\right]=0,$$

где z надо рассматривать как параметр. По известному свойству вронскиана имеем:

$$W(z, \zeta)=\begin{vmatrix} g_0(z, \zeta), & g_1(z, \zeta), & \ldots, & g_{n-1}(z, \zeta) \\ \frac{\partial g_0(z, \zeta)}{\partial \zeta}, & \frac{\partial g_1(z, \zeta)}{\partial \zeta}, & \ldots, & \frac{\partial g_{n-1}(z, \zeta)}{\partial \zeta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^{n-1} g_0(z, \zeta)}{\partial \zeta^{n-1}}, & \frac{\partial^{n-1} g_1(z, \zeta)}{\partial \zeta^{n-1}}, & \ldots, & \frac{\partial^{n-1} g_{n-1}(z, \zeta)}{\partial \zeta^{n-1}} \end{vmatrix}=$$

$$=e^{-\int_0^{\zeta} B_{n, n-1}(z, \tau)\, d\tau}\neq 0. \quad (41.35)$$

Так как $A_k(t_0)=g_k(t_0, \overline{t_0})$, то, в силу (41.34) и (41.35), имеем:

$$\det \alpha^*(t_0)=2^{-n} r^{n(n-1)}\, \overline{W(t_0, \overline{t_0})}\neq 0 \quad \text{(всюду на } L\text{)}, \quad (41.36)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, система уравнений (41.27)—нормального типа. Поэтому мы можем применить к ней существующую теорию системы сингулярных интегральных уравнений (см. Мусхелишвили [1], гл. VI).

Вычисляя по формуле Н. И. Мусхелишвили [1] (стр. 427, формула (130.22)) индекс системы (41.27), получим:

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}\left[\arg\frac{\det\overline{\alpha^*(t_0)}}{\det\alpha^*(t_0)}\right]_L=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{W(t_0,\overline{t}_0)}{\overline{W(t_0,\overline{t}_0)}}\right]_L=0. \quad (41.37)$$

Поэтому *на систему уравнений* (41.27) *распространяются основные три теоремы Фредгольма* (см. Мусхелишвили [1], стр. 428, 429).

Путём регуляризации систему уравнений (41.27) мы можем привести к эквивалентной системе уравнений Фредгольма. Как известно, регуляризирующий оператор строится в явном виде и зависит лишь от матрицы $\alpha^*(t_0)$ (см. Мусхелишвили [1], § 130; Н. П. Векуа [1]).

5°. Рассмотрим теперь случай, когда

$$\alpha^*(t_0)=\overline{\alpha^*(t_0)}. \quad (41.38)$$

Это значит, что элементы матрицы α^* — действительные функции. Тогда система (41.31), очевидно, будет представлять собой систему уравнений Фредгольма, ибо $b(t_0)=0$. Докажем, что этот случай реализуется для уравнения вида:

$$\Delta^n u+a_1(x, y)\Delta^{n-1}u+\ldots+a_n(x, y)u=0, \quad (41.39)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — аналитические функции переменных x, y.

В этом случае, в силу (34.5), имеем:

$$K_1(z, \zeta, t)=K_2(\zeta, z, \tau)=0.$$

Поэтому из (34.16) сразу получим:

$$A_k(z)=(-1)^k\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}G_k(t, 0, z, \overline{z})\right]_{t=z}=\frac{\overline{z}^k}{k!}$$

$$(k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Следовательно, компонентами вектора $A(z)$, введённого на стр. 214, будут

$$1, \frac{r^2}{1!}, \frac{r^4}{2!}, \ldots, \frac{r^{2n-2}}{(n-1)!} \quad (r=|z|).$$

Поэтому из (41.10) следует, что компонентами вектора $2A_l^*(z)$ будут

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{l}, \quad \frac{r^{2l}}{0!}, \frac{r^{2l+2}}{1!}, \ldots, \frac{r^{2n-2}}{(n-l-1)!}$$

$$(r=|z|, \quad l=0, 1, \ldots, n-1).$$

Следовательно, элементы матрицы $\alpha^*(t_0)$ — действительные функции, т. е. $\alpha^*(t_0)=\overline{\alpha^*(t_0)}$.

Таким образом, система уравнений (41.27) в случае уравнения (41.39) будет системой уравнений Фредгольма [1]).

6°. Обсудим теперь полученные результаты. Если задача B разрешима, то, очевидно, система уравнений (41.27) также разрешима. Допустим теперь, что система уравнений (41.27) разрешима. Так как вектор $F(t_0)$ имеет производную порядка n, непрерывную в смысле Гельдера на L, то нетрудно доказать, что решение $\mu(t)$ системы (41.27) также имеет непрерывную в смысле Гельдера производную порядка n. Подставляя теперь $\mu(t)$ в (41.23), получим вектор $\psi(z)$, компоненты которого — голоморфные функции в T, имеющие производные порядка n, непрерывные в $T+L$. Подставляя затем $\psi(z)$ в (41.8), получим искомое решение нашей задачи B.

Таким образом, *имеется эквивалентность между задачей* B *и системой интегральных уравнений* (41.27). В частности, *однородная задача* B_0 *эквивалентна соответствующей однородной системе интегральных уравнений.*

Докажем теперь следующее предложение:

Теорема. *Если однородная задача* B_0 *не имеет решения, то неоднородная задача* B *всегда разрешима.*

В самом деле, так как индекс системы (41.27) $\varkappa=0$, то $k=k'$ (см. Мусхелишвили [1], стр. 429), где k и k' — числа линейно независимых решений однородной системы уравнений, соответствующей (41.27), и её союзной системы. Но $k=k'=0$, ибо однородная задача B_0 не имеет решения. Это означает, что система уравнений (41.27) разрешима для любой правой части, поэтому задача B всегда разрешима, что и требовалось доказать.

Таким образом, из *единственности решения задачи* B *вытекает существование решения.*

---

[1]) Нетрудно проверить, что и в общем случае мы получим систему интегральных уравнений Фредгольма, если для представления $\psi(z)$ вместо (41.23) воспользуемся формулой:

$$\psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\alpha^{*-1}(t)\,\mu(t)\,dt}{t-z}, \qquad (*)$$

где α^{*-1} — матрица, обратная матрице α^*, а μ — действительный вектор.

§ 42. Задача В для уравнения $\Delta^n u = 0$. Теорема единственности. Докажем теперь, что задача В разрешима в случае уравнения $\Delta^n u = 0$. Для этого, в силу теоремы предыдущего параграфа, достаточно доказать, что для уравнения $\Delta^n u = 0$ однородная задача B_0 не имеет решения.

Из формулы (35.16) сразу вытекает следующее предложение: *Регулярное в T решение $u(x, y)$ уравнения $\Delta^n u = 0$ тождественно обращается в нуль в T, если все его производные порядка $\leqslant 2n-1$ равны нулю на L.*

Допустим теперь, что u — решение однородной задачи B_0 для уравнения $\Delta^n u = 0$. Тогда нетрудно доказать, что (см. работу автора [5], стр. 237)

$$\iint_T (\Delta^m u)^2\, dx\, dy = 0 \quad \text{при} \quad n = 2m$$

и

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial \Delta^m u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta^m u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = 0 \quad \text{при} \quad n = 2m+1.$$

Из этих равенств в силу вышеприведённого предложения сразу вытекает: $u = 0$ в T, что и требовалось доказать.

Таким образом, *задача* В *для уравнения* $\Delta^n u = 0$ *всегда разрешима*. В частности, *доказано существование функции Грина* $Z(x, y, x_0, y_0)$ *для этого уравнения* (см. § 34, n° 4).

§ 43. Новое интегральное уравнение для задачи В в общем случае. Рассмотрим теперь задачу В для уравнения вида

$$\Delta^n u + \sum_{i,k=0}^{i+k\leqslant 2n-1} a_{ik}(x, y) \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} = 0, \tag{43.1}$$

где a_{ik} — заданные аналитические функции в некоторой области $\mathfrak{T}$. Очевидно, уравнение (M_0) является частным случаем этого уравнения.

Решение задачи В для уравнения (43.1) можно свести к решению однородной задачи для неоднородного уравнения вида (см., например, работу автора [5], стр. 248)

$$\Delta^n u + \sum_{i,k=0}^{i+k\leqslant 2n-1} a_{ik}(x, y) \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} = F(x, y), \tag{43.2}$$

где $F(x, y)$ — некоторая аналитическая функция в T, непрерывная в $T + L$. Мы предполагаем, что односвязная область T удовлетворяет требованиям § 41.

Пусть $u(x, y)$ — решение задачи B_0 для уравнения (43.2). Ищем это решение в виде:

$$u(x, y) = \iint_T Z(x, y, \xi, \eta)\, \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{43.3}$$

где $\rho(\xi, \eta)$ — непрерывная функция в T, а Z — функция Грина уравнения $\Delta^n u = 0$, соответствующая области $\mathscr{T}$. Очевидно, функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям задачи B_0, ибо все её производные порядка $\leqslant n-1$ обращаются в нуль на L.

Подставляя (43.3) в (43.2) и принимая во внимание, что

$$\Delta^n u = \rho(x, y)\ ^{1)},$$

получим интегральное уравнение Фредгольма:

$$\rho(x, y) + \iint_T K(x, y, \xi, \eta)\,\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = F(x, y), \tag{43.4}$$

где

$$K(x, y, \xi, \eta) = \sum_{i,k=0}^{i+k\leqslant 2n-1} a_{ik}(x, y)\,\frac{\partial^{i+k} Z(x, y, \xi, \eta)}{\partial x^i\,\partial y^k}. \tag{43.5}$$

Таким образом, для задачи B мы получили новое интегральное уравнение (43.4).

Если это интегральное уравнение разрешимо, то формула (43.3) даст решение задачи B.

§ 44. Решение задачи B для уравнения $\Delta^n u = 0$ в случае круга. Функция Грина для круговой области. Мы можем решить задачу B для уравнения $\Delta^n u = 0$ в случае круга $|z| < R$ без помощи интегральных уравнений, а также найти в явном виде функцию Грина Z для этого случая.

1°. Искомое решение мы можем представить в виде:

$$u = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}, \tag{44.1}$$

где u_k удовлетворяет в области $|z| < R$ уравнению $\Delta^{k+1} u_k = 0$, а на окружности $|z| = R$ условиям:

$$u_k = 0,\quad \frac{du_k}{dr} = 0,\quad \dots,\quad \frac{d^{k-1}u_k}{dr^{k-1}} = 0,\quad \frac{d^k u_k}{dr^k} = f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{d^k u_j}{dr^k} \tag{44.2}$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1),$$

где $r = |z|$. Очевидно, u_0 — гармоническая функция в области $|z| < R$, принимающая на окружности $|z| = R$ значения функции f_0; следовательно,

$$u_0(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2}\, f_0(\varphi)\,d\varphi, \tag{44.3}$$

---

1) Для справедливости этой формулы достаточно допустить, что $\rho(x, y)$ имеет непрерывные производные первого порядка в $T + L$; легко можно доказать, что это в действительности имеет место (см. уравнение (43.4)).

где $\theta=\arg z$. Допустим теперь, что функции $u_0, \ldots, u_{k-1}$, $k\geqslant 1$, уже определены. Тогда функция

$$u_k(x, y)=(r^2-R^2)^k \omega_k(x, y) \tag{44.4}$$

будет удовлетворять всем условиям (44.2), если ω_k — гармоническая функция в области $|z|<R$, принимающая на окружности $|z|=R$ значения

$$\omega_k\Big|_{r=R}=\frac{1}{2^k\cdot R^k\cdot k!}\left[f_k(\theta)-\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{d^k u_j}{dr^k}\right)_{r=R}\right]. \tag{44.5}$$

Представляя теперь ω_k интегралом Пуассона, получим рекуррентные формулы для определения функций $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$.

2°. Можно теперь найти в явном виде функцию Грина уравнения $\Delta^n u=0$ для круговой области $|z|<R$. Она имеет вид:

$$Z(x,y,x_0,y_0)=2\rho^{2(n-1)}\lg\frac{l\rho_1}{R\rho}+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{m}\rho^{2(n-m-1)}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^m(R^2-l^2)^m,$$

где $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$,

$$r=|z|,\quad l=|z_0|,\quad \rho=|z-z_0|,\quad \rho_1=\left|z-\frac{R^2}{\bar z_0}\right|.$$

Вывод этой формулы дан в работе автора [5] (гл. III). (См. также Николеско [1], стр. 37.)

Отметим ещё, что, применяя метод акад. Н. И. Мусхелишвили [3], задачу В для уравнения $\Delta^n u=0$ можно решить эффективно в случае областей, которые конформно отображаются на круг рациональными функциями (см. П. Зерагия [1]).

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ПРЕДЫДУЩИМ ГЛАВАМ

Соответствующим образом обобщая предыдущие результаты, можно получить общие представления решений уравнения (М) в случае многосвязной области и изучить с их помощью ряд граничных задач общего вида. Укажем на работу Д. Ф. Харазова [1], обобщившего в этом направлении некоторые результаты автора [5], [6]. Укажем также на работы Б. В. Хведелидзе [1] и З. И. Халилова (докторская диссертация), изучивших, развивая результаты автора [5], [13], граничные задачи общего вида для уравнения (М) (см. также работу Халилова [1]).

Результаты и методы гл. III и разд. II гл. V можно обобщить на случай граничных задач с разрывными коэффициентами и областей с кусочно-гладкими контурами (в связи с этим см. работу Н. П. Векуа [2]).

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Методы теории функций комплексной переменной находят важные применения в двумерных задачах теории упругости. Широко известны исследования Г. В. Колосова [1], [2], Н. И. Мусхелишвили [2], В. И. Смирнова и С. Л. Соболева [1] и ряда других советских учёных, где систематически применяются эти методы к статическим и динамическим задачам теории упругости.

В настоящей главе мы покажем, что этот метод может быть применён и к некоторым другим важным задачам теории упругости.

I. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

§ 45. Общее представление решений уравнений плоской задачи. Рассмотрим синусоидальные колебания упругого цилиндрического тела, ось которого перпендикулярна плоскости xy, причём будем предполагать, что смещения, параллельные оси цилиндра, отсутствуют. Тогда компоненты вектора смещения будут иметь вид:

$$u = u(x, y) \begin{matrix} \cos \nu t \\ \sin \nu t \end{matrix}, \quad v = v(x, y) \begin{matrix} \cos \nu t \\ \sin \nu t \end{matrix}, \quad w = 0, \tag{45.1}$$

где ν — частота колебания. Подставляя эти выражения в уравнения теории упругости, получим [1]):

$$\begin{aligned} \mu\Delta u + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \rho\nu^2 u = 0, \\ \mu\Delta v + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \rho\nu^2 v = 0, \end{aligned} \tag{45.2}$$

где ρ — плотность, λ, μ — постоянные Ламе,

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{45.3}$$

[1]) Предполагаем, что объёмные силы отсутствуют; это не является существенным ограничением общности рассуждений.

Из (45.2) для θ получим уравнение:

$$\Delta\theta + a^2\nu^2\theta = 0, \quad a^2 = \frac{\rho}{\lambda+2\mu}. \tag{45.4}$$

Систему уравнений (45.2) мы можем записать в виде одного комплексного уравнения:

$$\mu\Delta\,(u+iv) + \rho\nu^2\,(u+iv) = -2\,(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial\zeta} \tag{45.5}$$

$$(z = x+iy,\ \zeta = x-iy).$$

Нетрудно проверить, что этому уравнению удовлетворяет функция

$$u+iv = -\frac{2}{a^2\nu^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial\zeta},$$

где θ — решение уравнения (45.4). Следовательно, всякое решение уравнения (45.5) можно представить так:

$$u+iv = \chi - \frac{2}{a^2\nu^2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}, \tag{45.6}$$

где χ — общее (комплексное) решение уравнения

$$\Delta\chi + b^2\nu^2\chi = 0, \quad b^2 = \frac{\rho}{\mu}. \tag{45.7}$$

Но в силу (45.3), (45.4) и (45.6) имеем:

$$\frac{\partial\chi}{\partial z} + \frac{\partial\bar{\chi}}{\partial\zeta} = 0 \quad (\zeta = \bar{z} = x - iy). \tag{45.8}$$

Следовательно,

$$\chi = i\,\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}, \tag{45.9}$$

где ψ — действительная функция, определённая с точностью до постоянной слагаемой; мы предполагаем, что область односвязна.

Подставляя (45.9) в (45.7), получим:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\,[\Delta\psi + b^2\nu^2\psi] = 0.$$

Так как $\Delta\psi + b^2\nu^2\psi$ — действительная функция, то $\Delta\psi + b^2\nu^2\psi = \text{const}$. Но ψ определена с точностью до постоянной слагаемой, поэтому можно положить

$$\Delta\psi + b^2\nu^2\psi = 0, \quad b^2 = \frac{\rho}{\mu}. \tag{45.10}$$

В силу (45.9) формула (45.6) примет вид:

$$u+iv=\frac{\partial}{\partial\zeta}(\varphi+i\psi), \tag{45.11}$$

где

$$\varphi=-\frac{2}{a^2\nu^2}\theta. \tag{45.12}$$

Таким образом, *формула* (45.11), *где* φ, ψ — *произвольные решения уравнений* (45.4) *и* (45.10), *даёт общее решение системы уравнений* (45.2).

Функции φ и ψ однозначно выражаются через $u+iv$. В самом деле, из (45.12), (45.3), (45.11), (45.10) и (45.4), легко получим, что

$$\varphi=-\frac{2}{a^2\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \psi=\frac{2}{b^2\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{45.13}$$

Выразим теперь компоненты тензора напряжения через φ, ψ. В силу (45.1) имеем:

$$\begin{gathered}X_x=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad Z_z=\lambda\theta, \\ X_y=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad Y_z=0, \ Z_x=0.\end{gathered} \tag{45.14}$$

Подставляя сюда вместо u, v, θ их выражения (45.11) и (45.12), получим:

$$\begin{gathered}X_x+Y_y=-a^2(\lambda+\mu)\nu^2\varphi, \quad Z_z=-\frac{a^2\nu^2\lambda}{2}\varphi, \\ X_x-Y_y+2iX_y=4\mu\frac{\partial^2(\varphi+i\psi)}{\partial\zeta^2}.\end{gathered} \tag{45.15}$$

§ 46. Общее выражение компонент смещения через голоморфные функции. Пусть $\mathcal{T}$ — поперечное сечение тела плоскостью xy. Предположим, что $\mathcal{T}$ — односвязная область. Тогда функции φ и ψ мы можем представить в виде (см. § 12*):

$$\varphi=\operatorname{Re}\left\{\Phi_0(z)-\alpha\zeta\int_0^z\Phi_0(t)L_1[\alpha\zeta(z-t)]\,dt\right\}, \tag{46.1}$$

$$\psi=\operatorname{Re}\left\{\Psi_0(z)-\beta\zeta\int_0^z\Psi_0(t)L_1[\beta\zeta(z-t)]\,dt\right\} \tag{46.2}$$

$$(\alpha=a^2\nu^2/4, \ \beta=b^2\nu^2/4, \quad z=x+iy, \zeta=x-iy),$$

где $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ — произвольные голоморфные функции в $\mathcal{T}$; не ограничивая общности, мы можем мнимые части $\Phi_0(0)$ и $\Psi_0(0)$ за-фиксировать произвольно; от этого не изменяются правые части формул (46.1) и (46.2).

Подставляя (46.1), (46.2) в (45.11) и принимая во внимание, что функция $L_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$xL_n''(x)+(n+1)L_n'(x)+L_n(x)=0, \tag{46.3}$$

легко получим:

$$2(u+iv)=\overline{\Phi_0'(z)}+i\overline{\Psi_0'(z)}-z[\alpha\overline{\Phi_0(z)}+i\beta\overline{\Psi_0(z)}]-$$
$$-\alpha\int_0^z \Phi_0(t)L_0[\alpha\zeta(z-t)]\,dt-i\beta\int_0^z \Psi_0(t)L_0[\beta\zeta(z-t)]\,dt+$$
$$+\alpha^2z^2\int_0^\zeta \overline{\Phi_0(\overline{\tau})}L_2[\alpha z(\zeta-\tau)]\,d\tau+i\beta^2z^2\int_0^\zeta \overline{\Psi_0(\overline{\tau})}L_2[\beta z(\zeta-\tau)]\,d\tau. \tag{46.4}$$

Введём теперь обозначения:

$$\Phi_0(z)-i\Psi_0(z)=2\int_0^z \Psi(t)\,dt,\quad \alpha\Phi_0(z)-i\beta\Psi_0(z)=2\Phi'(z). \tag{46.5}$$

Тогда имеем:

$$\begin{gathered}\Phi_0(z)=\frac{2}{\alpha-\beta}\Phi'(z)-\frac{2\beta}{\alpha-\beta}\int_0^z \Psi(t)\,dt,\\ \Psi_0(z)=\frac{2i}{\beta-\alpha}\Phi'(z)-\frac{2i\alpha}{\beta-\alpha}\int_0^z \Psi(t)\,dt.\end{gathered} \tag{46.6}$$

Первым соотношением (46.5) вполне однозначно фиксируются значения мнимых частей $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$. Поэтому функции $\Phi'(z)$ и $\Psi(z)$ определяются однозначно через u, v. Следовательно, значение $\Phi(0)$ мы можем фиксировать совершенно произвольно. В дальнейшем мы всё время будем считать, что

$$\Phi(0)=0. \tag{46.7}$$

Подставляя (46.6) в (46.4), получим:

$$u+iv=k\Phi(z)-z\overline{\Phi'(z)}+l\nu^2z^2\,\overline{\Phi(z)}+\overline{\Psi(z)}+$$
$$+\int_0^z \Phi(t)H_1(\zeta,z-t)\,dt+\int_0^z \Psi(t)H_2(\zeta,z-t)\,dt+$$
$$+\int_0^\zeta \overline{\Phi(\overline{\tau})}H_1^*(z,\zeta-\tau)\,d\tau+\int_0^\zeta \overline{\Psi(\overline{\tau})}H_2^*(z,\zeta-\tau)\,d\tau, \tag{46.8}$$

где

$$H_1(\zeta, z-t)=\frac{\zeta}{\alpha-\beta}\{\alpha^2 L_1[\alpha\zeta(z-t)]+\beta^2 L_1[\beta\zeta(z-t)]\}, \quad (46.9)$$

$$H_2(\zeta, z-t)=\frac{\alpha\beta(z-t)}{\alpha-\beta}\{L_1[\alpha\zeta(z-t)]+L_1[\beta\zeta(z-t)]\}, \quad (46.10)$$

$$H_1^*(z, \zeta-\tau)=\frac{z^3}{\beta-\alpha}\{\alpha^2 L_2[\alpha z(\zeta-\tau)]-\beta^2 L_2[\beta z(\zeta-\tau)]\}, \quad (46.11)$$

$$H_2^*(z, \zeta-\tau)=\frac{\alpha\beta z}{\alpha-\beta}\{L_1[\alpha z(\zeta-\tau)]-L_1[\beta z(\zeta-\tau)]\} \quad (46.12)$$

$$\left(\alpha=\frac{a^2\nu^2}{4}, \quad \beta=\frac{b^2\nu^2}{4}, \quad k=\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}, \quad l=\frac{a^2+b^2}{8}\right).$$

Таким образом, формула (46.8), где $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ — произвольные голоморфные функции в T, представляет собой общее решение уравнений (45.2) ($\Phi(0)=0$). Эта формула была получена мною в работе [1].

При $\nu=0$ мы получим известную формулу:

$$u+iv=k\Phi(z)-z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}, \quad (46.8a)$$

выражающую компоненты смещения при плоском деформированном состоянии упругого тела (см. Мусхелишвили [2], стр. 106).

Подставляя теперь в (45.15) формулу (46.8), мы получим выражения компонент тензора напряжения через голоморфные функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$. Эти формулы мы не будем здесь выписывать.

Формулу (46.8) можно обобщить на тот случай, когда поперечное сечение цилиндра T — многосвязная область. Для этой цели функции φ и ψ вместо (46.1) и (46.2) надо выразить формулами, соответствующими многосвязной области (см. формулу (12*.19)). Тогда мы получим опять формулу вида (46.8), но с той разницей, что функции Φ, Ψ будут обладать (логарифмическими) многозначностями определённого вида.

Подставляя в (46.8) вместо Φ и Ψ функции частного вида, мы получим различные частные решения уравнений (45.2), которые могут оказаться полезными для решения конкретных задач. Например, если вместо Φ и Ψ подставить степенные функции, то получим частные решения, при помощи которых можно решать граничные задачи для круговой области и кругового кольца; решению этих задач посвящаются ниже §§ 47,48.

При помощи формулы (46.8) решение основных граничных задач для области произвольного вида (см. ниже §§ 49,50) можно привести к интегральным уравнениям, эквивалентным соответствующей граничной задаче для любого значения частоты колебания ν. Этот момент заслуживает быть отмеченным, так как другие известные в литературе (Шерман [6]; Купрадзе [1], стр. 98) методы приведения этих задач к интегральным уравнениям оставляют вопрос эквивалентности (для произвольного значения частоты ν) открытым. Если же эквивалентность не установлена, то, конечно, нельзя считать задачу полностью решённой.

§ 47. Решение граничных задач для круговой области. В этом параграфе мы рассмотрим две граничные задачи для случая кругового цилиндра. (См. также Купрадзе [1], стр. 19.)

Задача I (первая основная граничная задача). *Требуется определить деформированное состояние тела, если на его границе заданы компоненты смещения.*

Задача II (вторая основная граничная задача). *Требуется определить деформированное состояние тела, если на его границе заданы силы.*

1°. Задача I. Пусть на окружности $|z|=R$ заданы значения компонент смещения:

$$u=f_1, \quad v=f_2 \quad (\text{при } |z|=R). \tag{47.1}$$

Мы предполагаем, что f_1, f_2 — периодические непрерывные функции, которые разлагаются в равномерно сходящиеся ряды Фурье на сегменте $(0, 2\pi)$. Разлагая функции Φ_0, Ψ_0 внутри круга $|z|<R$ в ряды Маклорена, согласно (46.1) и (46.2) для φ и ψ получим следующие разложения:

$$\varphi=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k J_k(a\nu r)\, e^{ik\theta}, \qquad \psi=\sum_{-\infty}^{\infty} b_k J_k(b\nu r)\, e^{ik\theta}, \tag{47.2}$$

где $r=|z|$, $\theta=\arg z$,

$$a_k=(-1)^k \bar{a}_{-k}, \qquad b_k=(-1)^k \bar{b}_{-k} \qquad (k=0, 1, \ldots). \tag{47.3}$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial r}{\partial \zeta}=\frac{e^{i\theta}}{2}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}=\frac{i}{2}\frac{e^{i\theta}}{r} \qquad (\zeta=\bar{z}=x-iy). \tag{47.4}$$

Подставляя (47.2) в (45.11), в силу (47.4) получим:

$$u+iv=-\frac{\nu}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[a a_k J_{k+1}(a\nu r)+ib b_k J_{k+1}(b\nu r)\right] e^{i(k+1)\theta}. \tag{47.5}$$

Пусть

$$f_1+if_2=\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\, e^{i(k+1)\theta}, \tag{47.6}$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f_1 + if_2)\, e^{-i(k+1)\theta}\, d\theta. \tag{47.7}$$

Тогда, в силу (47.5), (47.6) и условий (47.1), получим:

$$aJ_{n+1}(a\nu R)\, a_n + ibJ_{n+1}(b\nu R)\, b_n = -\frac{2}{\nu} A_n. \tag{47.8}$$

Заменяя в этом равенстве n через $-n$ и переходя к сопряжённому равенству, в силу (47.3), получим:

$$aJ_{n-1}(a\nu R)\, a_n - ibJ_{n-1}(b\nu R)\, b_n = \frac{2}{\nu}\overline{A}_{-n}. \tag{47.9}$$

Из (47.8) и (47.9) будем иметь:

$$a_n = -\frac{2}{a\nu}\,\frac{A_n J_{n-1}(b\nu R) - \overline{A}_{-n} J_{n+1}(b\nu R)}{J_{n+1}(a\nu R)\, J_{n-1}(b\nu R) + J_{n-1}(a\nu R)\, J_{n+1}(b\nu R)}, \tag{47.10}$$

$$b_n = \frac{2i}{b\nu}\,\frac{A_n J_{n-1}(a\nu R) + \overline{A}_{-n} J_{n+1}(a\nu R)}{J_{n+1}(a\nu R)\, J_{n-1}(b\nu R) + J_{n-1}(a\nu R)\, J_{n+1}(b\nu R)}. \tag{47.11}$$

Введём обозначение:

$$\Delta_n(x) = J_{n+1}(ax)\, J_{n-1}(bx) + J_{n-1}(ax)\, J_{n+1}(bx). \tag{47.12}$$

Используя асимптотические фурмулы для бесселевых функций, нетрудно доказать, что уравнение $\Delta_n(x) = 0$ имеет бесконечное множество действительных корней. Обозначая эти корни через $j_{n,m}$ $(m = 0, 1, \ldots)$, имеем: $|j_{n,m}| \to \infty$ при $m \to \infty$.

Характеристическими значениями частоты ν, очевидно, будут числа

$$\nu_{nm} = \frac{j_{nm}}{R} \qquad (n, m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{47.13}$$

Для этих значений ν неоднородная задача, вообще говоря, неразрешима, но имеет решения однородная граничная задача. Эти решения, очевидно, дают нам собственные колебания кругового цилиндра при закреплённой боковой поверхности, а числа (47.13) суть частоты этих колебаний.

2°. Задача II. Рассмотрим теперь граничную задачу, когда на окружности $|z| = R$ заданы компоненты внешней силы:

$$\begin{aligned} X_r &= X_x \cos\theta + X_y \sin\theta = f_1, \\ Y_r &= Y_x \cos\theta + Y_y \sin\theta = f_2. \end{aligned} \tag{47.14}$$

Попрежнему мы предполагаем, что f_1, f_2 — непрерывные периодические функции с периодом 2π, которые разлагаются в равномерно сходящиеся ряды Фурье на сегменте $[0, 2\pi]$. Эти условия мы можем записать ещё так:

$$(X_x - Y_y + 2iX_y)\, e^{-2i\theta} + X_x + Y_y = 2e^{-i\theta}(f_1 + if_2). \quad (47.15)$$

Но в силу (45.15), (47.2), (47.5)

$$X_x + Y_y = -a^2\nu^2(\lambda+\mu)\varphi = -a^2\nu^2(\lambda+\mu)\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_n(a\nu r)\, e^{in\theta}, \quad (47.16)$$

$$X_x - Y_y + 2iX_y = 4\mu\frac{\partial(u+iv)}{\partial\zeta} =$$

$$= \mu\nu^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a^2 a_n J_{n+2}(a\nu r) + ib^2 b_n J_{n+2}(b\nu r)\right] e^{i(n+2)\theta}. \quad (47.17)$$

Подставляя (47.16), (47.17) в (47.15), получим:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{[\mu a^2 J_{n+2}(a\nu R) - a^2(\lambda+\mu) J_n(a\nu R)]\, a_n +$$

$$+ i\mu b^2 J_{n+2}(b\nu R)\, b_n\}\, e^{in\theta} = \frac{2}{\nu^2}(f_1 + if_2)\, e^{-i\theta}. \quad (47.18)$$

Разлагая правую часть в ряд Фурье и приравнивая соответствующие коэффициенты друг другу, получим:

$$[\mu a^2 J_{n+2}(a\nu R) - a^2(\lambda+\mu) J_n(a\nu R)]\, a_n + i\mu b^2 J_{n+2}(b\nu R)\, b_n = B_n, \quad (47.19)$$

где B_n — известные числа. Заменяя теперь n на $-n$ и переходя к сопряжённому равенству, в силу (47.3), получим:

$$[\mu a^2 J_{n-2}(a\nu R) - a^2(\lambda+\mu) J_n(a\nu R)]\, a_n - i\mu b^2 J_{n-2}(b\nu R)\, b_n = \overline{B}_{-n}. \quad (47.20)$$

Решая систему уравнений (47.19) и (47.20), получим искомые значения для a_n, b_n. Характеристическими значениями частоты ν будут корни детерминанта системы (47.19), (47.20).

Нетрудно доказать, что этот детерминант имеет бесконечное множество действительных корней, которые составляют на действительной оси дискретный ряд точек.

3°. Граничные условия, рассмотренные выше в пп. 1°, 2°, относились только к боковой поверхности цилиндра. Мы видели, что этими условиями однозначно определяются компоненты смещения и тензора напряжений; в частности, эти величины получают определённые значения на торцевых поверхностях цилиндра.

Пусть d — высота цилиндра; тогда имеем:

$$\begin{aligned} Z_z &= \frac{a^2\nu^2\lambda}{2}\varphi \quad \text{при} \quad z=0, \\ Z_z &= -\frac{a^2\nu^2\lambda}{2}\varphi \quad \text{при} \quad z=d. \end{aligned} \tag{47.21}$$

Таким образом, для того чтобы в цилиндрическом теле существовали деформации вида (45.1), надо приложить к его торцевым поверхностям нормальные усилия вида (47.21), которые однозначно определяются при помощи граничных заданий по боковой поверхности.

Согласно принципу Сен-Венана, распределение напряжений на торцевых поверхностях можно заменить силой и парой, компоненты которых, очевидно, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &X=Y=0, Z=D_0, \quad M_x=D_1, \quad M_y=-D_2, \quad M_z=0 \quad \text{при} \quad z=0, \\ &X=Y=0, Z=-D_0, \quad M_x=-D_1, \quad M_y=D_2, \quad M_z=0 \quad \text{при} \quad z=d, \end{aligned} \tag{47.22}$$

где

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{a^2\nu^2\lambda}{2}\iint_T \varphi(x, y)\,dx\,dy, \quad D_1=\frac{a^2\nu^2\lambda}{2}\iint_T y\varphi(x, y)\,dx\,dy, \\ D_2 &= \frac{a^2\nu^2\lambda}{2}\iint_T x\varphi(x, y)\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{47.23}$$

Подставляя в (47.23) вместо φ выражение (47.2), получим:

$$\begin{aligned} &D_0=\lambda\pi(a\nu R)J_1(a\nu R)a_0, \\ &D_1=\lambda\pi R(a\nu R)J_2(a\nu R)\alpha_1, \quad D_2=\lambda\pi R(a\nu R)J_2(a\nu R)\beta_1, \\ &2\beta_1=(a_1+\overline{a}_1), \quad 2\alpha_1=i(a_1-\overline{a}). \end{aligned} \tag{47.24}$$

§ 48. Решение граничных задач для кругового кольца. Пусть поперечное сечение упругого цилиндра есть круговое кольцо $R_0 \leqslant |z| \leqslant R$. Рассмотрим для этой области те же задачи, которые мы решили в предыдущем параграфе. Внутри области $R_0<|z|<R$ функции φ и ψ разлагаются в ряды вида (см. § 19):

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}[a_nJ_n(a\nu r)+b_nY_n(a\nu r)]\,e^{in\theta}, \\ \psi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}[c_nJ_n(b\nu r)+d_nY_n(b\nu r)]\,e^{in\theta}, \end{aligned} \tag{48.1}$$

причём коэффициенты этих разложений удовлетворяют условиям:

$$a_n = (-1)^n \bar{a}_{-n}, \quad b_n = (-1)^n \bar{b}_{-n}, \quad c_n = (-1)^n \bar{c}_{-n},$$
$$d_n = (-1)^n \bar{d}_{-n}. \tag{48.2}$$

На основании формул

$$J_n(x) = \frac{H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)}{2}, \quad Y_n(x) = \frac{H_n^{(1)}(x) - H_n^{(2)}(x)}{2i}, \tag{48.3}$$

ряды (48.1) можно записать также в виде:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\alpha_n H_n^{(1)}(a\nu r) + \beta_n H_n^{(2)}(a\nu r)] e^{in\theta}, \\ \psi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\gamma_n H_n^{(1)}(b\nu r) + \delta_n H_n^{(2)}(b\nu r)] e^{in\theta}, \end{aligned} \tag{48.4}$$

причём в силу (48.2), очевидно,

$$\bar{\alpha}_{-n} = (-1)^n \beta_n, \quad \bar{\gamma}_{-n} = (-1)^n \delta_n. \tag{48.5}$$

Подставляя (48.4) в (45.11), получим:

$$\begin{aligned} u + iv = -\frac{\nu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ a [\alpha_n H_{n+1}^{(1)}(a\nu r) + \beta_n H_{n+1}^{(2)}(a\nu r)] + \\ + ib [\gamma_n H_{n+1}^{(1)}(b\nu r) + \delta_n H_{n+1}^{(2)}(b\nu r)] \} e^{i(n+1)\theta}. \end{aligned} \tag{48.6}$$

1°. **Решение задачи I.** Пусть теперь на окружностях $|z| = R_0$, $|z| = R$ заданы значения $u + iv$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} aH_{n+1}^{(1)}(a\nu R)\alpha_n + aH_{n+1}^{(2)}(a\nu R)\beta_n + ibH_{n+1}^{(1)}(b\nu R)\gamma_n + \\ + ibH_{n+1}^{(2)}(b\nu R)\delta_n = A_n, \\ aH_{n+1}^{(1)}(a\nu R_0)\alpha_n + aH_{n+1}^{(2)}(a\nu R_0)\beta_n + ibH_{n+1}^{(1)}(b\nu R_0)\gamma_n + \\ + ibH_{n+1}^{(2)}(b\nu R_0)\delta_n = A_n^0, \end{aligned} \tag{48.7}$$

где A_n, A_n^0 — заданные постоянные.

Заменяя в этих уравнениях n через $-n$ и переходя к сопряжённым равенствам, в силу (48.5) получим:

$$\begin{aligned} aH_{n-1}^{(2)}(a\nu R)\alpha_n + aH_{n-1}^{(1)}(a\nu R)\beta_n - ibH_{n-1}^{(2)}(b\nu R)\gamma_n - \\ - ibH_{n-1}^{(1)}(b\nu R)\delta_n = -\bar{A}_{-n}, \\ aH_{n-1}^{(2)}(a\nu R_0)\alpha_n + aH_{n-1}^{(1)}(a\nu R_0)\beta_n - ibH_{n-1}^{(2)}(b\nu R_0)\gamma_n - \\ - ibH_{n-1}^{(1)}(b\nu R_0)\delta_n = -\bar{A}_{-n}^0. \end{aligned} \tag{48.8}$$

Из системы (48.7) и (48.8) однозначно определяются α_n, β_n, γ_n, δ_n за исключением тех случаев, когда ν является корнем детерминанта системы. Можно доказать, что этот детерминант имеет бесконечное множество действительных корней, которые составляют дискретный ряд точек на действительной оси.

2°. Решение задачи II. В силу (45.15), (48.4), (48.6), имеем:

$$\begin{aligned} X_x+Y_y &= -a^2\nu^2(\lambda+\mu)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\alpha_n H_n^{(1)}(a\nu r)+\beta_n H_n^{(2)}(a\nu r)\right]e^{in\theta},\\ X_x-Y_y+2iX_y &= \mu\nu^2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{a^2\left[\alpha_n H_{n+2}^{(1)}(a\nu r)+\beta_n H_{n+2}^{(2)}(a\nu r)\right]+\right.\\ &\quad\left.+ib^2\left[\gamma_n H_{n+2}^{(1)}(b\nu r)+\delta_n H_{n+2}^{(1)}(b\nu r)\right]\right\}e^{i(n+2)\theta}. \end{aligned} \tag{48.9}$$

Пусть на окружностях $|z|=R_0$, $|z|=R$ заданы компоненты внешней силы. Тогда граничные условия на каждой окружности имеют вид (47.15). Поэтому в силу (48.9) для определения неизвестных коэффициентов α_n, β_n, γ_n, δ_n в данном случае получим уравнения:

$$\begin{aligned} &a^2\left[\mu H_{n+2}^{(1)}(a\nu R)-(\lambda+\mu)H_n^{(1)}(a\nu R)\right]\alpha_n+\\ &\quad+a^2\left[\mu H_{n+2}^{(2)}(a\nu R)-(\lambda+\mu)H_n^{(2)}(a\nu R)\right]\beta_n+\\ &\quad+i\mu b^2H_{n+2}^{(1)}(b\nu R)\gamma_n+i\mu b^2H_{n+2}^{(2)}(b\nu R)\delta_n=B_n,\\ &a^2\left[\mu H_{n+2}^{(1)}(a\nu R_0)-(\lambda+\mu)H_n^{(1)}(a\nu R_0)\right]\alpha_n+\\ &\quad+a^2\left[\mu H_{n+2}^{(2)}(a\nu R_0)-(\lambda+\mu)H_n^{(2)}(a\nu R_0)\right]\beta_n+\\ &\quad+i\mu b^2H_{n+2}^{(1)}(b\nu R_0)\gamma_n+i\mu b^2H_{n+2}^{(2)}(b\nu R_0)\delta_n=B_n^0. \end{aligned} \tag{48.10}$$

Заменяя здесь n через $-n$ и переходя к сопряжённым равенствам, получим:

$$\begin{aligned} &a^2\left[\mu H_{n-2}^{(1)}(a\nu R)-(\lambda+\mu)H_n^{(1)}(a\nu R)\right]\alpha_n+\\ &\quad+a^2\left[\mu H_{n-2}^{(2)}(a\nu R)-(\lambda+\mu)H_n^{(2)}(a\nu R)\right]\beta_n-\\ &\quad-i\mu b^2H_{n-2}^{(1)}(b\nu R)\gamma_n-i\mu b^2H_{n-2}^{(2)}(b\nu R)\delta_n=\overline{B}_{-n}\\ &a^2\left[\mu H_{n-2}^{(1)}(a\nu R_0)-(\lambda+\mu)H_n^{(1)}(a\nu R_0)\right]\alpha_n+\\ &\quad+a^2\left[\mu H_{n-2}^{(2)}(a\nu R_0)-(\lambda+\mu)H_n^{(2)}(a\nu R_0)\right]\beta_n-\\ &\quad-i\mu b^2H_{n-2}^{(1)}(b\nu R_0)\gamma_n-i\mu b^2H_{n-2}^{(2)}(b\nu R_0)\delta_n=\overline{B}_{-n}^0. \end{aligned} \tag{48.11}$$

Можно доказать, что детерминант системы уравнений (48.10), (48.11) имеет бесконечное множество действительных корней, которые составляют дискретный ряд точек.

§ 49. Решение первой основной граничной задачи методом интегральных уравнений. При помощи формулы (46.8) можно свести основные граничные задачи к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма. В этом параграфе мы рассмотрим первую основную граничную задачу для произвольной односвязной области (см. работу автора [28]), а следующий параграф будет посвящён решению второй основной задачи.

1°. Пусть T — односвязная область, границу которой обозначим через L. Будем предполагать, что декартовы координаты точек L имеют непрерывные производные по дуге вплоть до пятого порядка. Пусть на L заданы компоненты смещения u, v, т. е.

$$u+iv=f \qquad (\text{на } L), \tag{49.1}$$

где f — заданная функция. Мы будем предполагать, что эта функция непрерывно дифференцируема по дуге вплоть до третьего порядка. Представляя $u+iv$ в виде (46.8), мы придём к следующей граничной задаче:

Требуется найти две голоморфные в T функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, удовлетворяющие условию

$$k\Phi(z)-z\overline{\Phi'(z)}+l\nu^2z^2\overline{\Phi(z)}+\overline{\Psi(z)}+L(\Phi,\Psi)=f \tag{49.2}$$

$$\left(k=\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2},\quad l=\frac{a^2+b^2}{8},\quad z\in L\right),$$

где через $L(\Phi, \Psi)$ мы обозначаем оператор

$$L(\Phi,\Psi)=\int_0^z \Phi(t)H_1(\zeta, z-t)\,dt+\int_0^z \Psi(t)H_2(\zeta, z-t)\,dt+$$

$$+\int_0^\zeta \overline{\Phi(\overline{\tau})}H_1^*(z,\zeta-\tau)\,d\tau+\int_0^\zeta \overline{\Psi(\overline{\tau})}H^*(z,\zeta-\tau)\,d\tau. \tag{49.3}$$

Мы будем требовать также, *чтобы $\Phi''(z)$ и $\Psi'(z)$ удовлетворяли условию Гельдера* в $T+L$. Это обеспечивает непрерывность компонент напряжения в $T+L$. Кроме того, мы будем считать

$$\Phi(0)=0. \tag{49.4}$$

Эту задачу мы будем называть *задачей* I.

2°. Докажем предварительно следующую лемму:

Если голоморфные в T функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ удовлетворяют условиям: 1) $\Phi(0)=0$ и 2) $\Phi''(z)$ и $\Psi'(z)$ — непрерывны в смысле Гельдера в $T+L$, то существует единственная функция $\omega(t)$, *непрерывная в смысле Гельдера на* L *такая, что в области* T[1])

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t},\\ \Psi(z)&=\frac{k}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar t\,\omega(t)\,dt}{(t-z)^2}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,d\bar t}{t-z}.\end{aligned}\tag{49.5}$$

Доказательство. Если такая функция $\omega(t)$ существует, то она должна удовлетворять следующему интегральному уравнению Фредгольма:

$$k\omega(t_0)+\frac{k}{2\pi i}\int_L\omega(t)\,d\lg\frac{t-t_0}{\bar t(\bar t-\bar t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}=$$
$$=k\Phi(t_0)-t_0\overline{\Phi'(t_0)}+\overline{\Psi(t_0)}.\tag{49.6}$$

Докажем, что это уравнение всегда разрешимо и имеет единственное решение. Пусть $\omega_0(t)$ — решение соответствующего однородного уравнения; в силу тех ограничений, которые мы наложили на контур L, легко докажем, что $\omega_0(t)$ имеет непрерывную в смысле Гельдера производную по дуге вплоть до третьего порядка. Подставляя $\omega_0(t)$ в (49.5), получим две голоморфные функции $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, которые, очевидно, удовлетворяют условиям: 1) $\Phi_0(0)=0$, 2) $\Phi_0''(z)$ и $\Psi_0'(z)$ непрерывны в смысле Гельдера в $T+L$ и 3) $k\Phi_0(t_0)-t_0\overline{\Phi_0(t_0)}+\overline{\Psi_0(t_0)}=0$ (на L). Отсюда на основании единственности решения основных граничных задач теории упругости (см. Мусхелишвили [2], [4]) сразу заключим, что $\Phi_0(z)=\Psi_0(z)=0$ всюду в T. Это означает, что

$$\omega_0(t)=\Phi_1(t),\qquad k\overline{\omega_0(t)}+\bar t\frac{d\omega_0(t)}{dt}=\Psi_1(t),\tag{49.7}$$

где $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ — ограниченные голоморфные функции в бесконечной области, лежащей вне L, причём $\Psi_1(z)$ исчезает на бесконечности. Кроме того, очевидно, $\Phi_1''(z)$, $\Psi_1'(z)$ непрерывны в смысле Гельдера на L. Из (49.7) имеем, что

$$k\overline{\Phi_1(t)}+\bar t\,\Phi_1'(t)-\Psi_1(t)=0\qquad(t\in L).$$

Отсюда на основании теоремы единственности (см. Мусхелишвили [2], § 40) получим, что $\Phi_1(z)=\Psi_1(z)=0$; это значит $\omega_0(t)=0$ всюду на L, что и требовалось доказать.

Следовательно, у уравнения (49.6) существует единственное решение, которое, очевидно, имеет непрерывную производную по дуге. Таким образом, если существует функция $\omega(t)$, выражающая

---

[1]) Эти формулы принадлежат Д. И. Шерману [4];

функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в виде (49.5), то она определяется единственным образом. Из того факта, что выражение

$$k\Phi(t)-t\overline{\Phi'(t)}+\overline{\Psi(t)},$$

заданное на контуре L, однозначно определяет, при дополнительном условии $\Phi(0)=0$, функции Φ и Ψ внутри области T, следует, что решение уравнения (49.6) действительно даёт искомую функцию $\omega(t)$ (см. Мусхелишвили [2], [5], [6]; Шерман [4]).

3°. Подставляя в (49.2) вместо $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ их выражения (49.5), после несложных выкладок получим:

$$k\omega(t_0)+\frac{1}{2}l\nu^2t_0^2\overline{\omega(t_0)}-\frac{l\nu^2t_0^2}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{\omega(t)}\,d\bar t}{\bar t-\bar t_0}+$$
$$+\int\limits_L K_0(t_0,t)\,\omega(t)\,dt+\int\limits_L K_0^*(t_0,t)\,\overline{\omega(t)}\,d\bar t=f(t_0), \qquad (49.8)$$

где

$$K_0(t_0,t)=\frac{k}{2\pi i}\left[\frac{d}{dt}\lg\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{t}-\frac{d\bar t}{dt}\int\limits_0^{\bar t_0}\frac{H_2^*(t_0,\bar t_0-\bar t_1)\,d\bar t_1}{\bar t-\bar t_1}\right]-\frac{\bar t H_2(\bar t_0,t_0)}{2\pi i t}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{t_0}\left[\frac{t_1H_1(\bar t_0,t_0-t_1)}{t}-\bar t\frac{\partial}{\partial t_1}H_2(\bar t_0,t_0-t_1)-\right.$$
$$\left.-\frac{d\bar t}{dt}H_2(\bar t_0,t_0-t_1)\right]\frac{dt_1}{t-t_1}, \qquad (49.9)$$

$$K_0^*(t_0,t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\bar t}\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+\frac{l\nu^2t_0^2}{2\pi i\bar t}+\frac{k}{2\pi i}\frac{dt}{d\bar t}\int\limits_0^{t_0}\frac{H_2(\bar t_0,t_0-t_1)}{t-t_1}\,dt_1+\frac{tH_2^*(t_0,\bar t_0)}{2\pi i\bar t}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\bar t_0}\left[-\frac{\bar t_1H_1^*(t_0,\bar t_0-\bar t_1)}{\bar t}+t\frac{\partial}{\partial\bar t_1}H_2^*(t_0,\bar t_0-\bar t_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{dt}{d\bar t}H_2^*(t_0,\bar t_0-\bar t_1)\right]\frac{d\bar t_1}{\bar t-\bar t_1}. \qquad (49.10)$$

Переходя к сопряжённому равенству, получим:

$$\frac{1}{2}l\nu^2\bar t_0^2\omega(t_0)+k\overline{\omega(t_0)}+\frac{l\bar\nu^2t_0^2}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}+$$
$$+\int\limits_L\overline{K_0^*(t_0,t)}\,\omega(t)\,dt+\int\limits_L\overline{K_0(t_0,t)}\,\overline{\omega(t)}\,d\bar t=\overline{f(t_0)}. \qquad (49.11)$$

Система сингулярных интегральных уравнений (49.8) и (49.11) эквивалентна граничной задаче I для любого значения частоты ν.

Нетрудно проверить, что она—нормального типа и что её индекс $\varkappa=0$ (см. Мусхелишвили [1], стр. 425, 427). Применяя известные приёмы регуляризации (см. Мусхелишвили [1], гл. VI; Н. П. Векуа [1]), систему уравнений (49.8), (49.11) можно привести к системе уравнений Фредгольма. Как известно, это приведение требует применения операций, явно выражающихся через заданные функции.

При $\nu=0$ уравнение (49.8) переходит в интегральное уравнение Фредгольма:

$$k\omega(t_0)+\frac{k}{2\pi i}\int_L \omega(t)\,d\lg\frac{t-t_0}{t(\bar t-\bar t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}=f(t_0), \tag{49.12}$$

которое даёт решение задачи I в статическом случае (см. Шерман [4]); это, между прочим, и доказано в вышеприведённой лемме.

Замечание. Если в граничное условие (49.2) мы подставим вместо $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ выражения

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t},$$

$$\Psi(z)=\frac{k}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z}+\frac{l\nu^2}{2\pi i}\int_L\frac{\bar t^2\omega(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar t\omega(t)\,dt}{(t-z)^2}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,d\bar t}{t-z}, \tag{49.13}$$

то, как нетрудно видеть, получим интегральные уравнения Фредгольма для $\omega(t)$. Но недостаток этого пути состоит в том, что не доказана эквивалентность. Для доказательства эквивалентности нужно установить, что две голоморфные в $\mathcal{T}$ функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ можно представить в виде (49.13) для любого значения частоты ν.

Можно легко доказать, что такое представление возможно для всех ν за исключением, быть может, дискретного ряда значений; в частности, это возможно для всех достаточно малых ν.

§ 50. Решение второй основной граничной задачи методом интегральных уравнений. Относительно области $\mathcal{T}$ и её границы L сохраним те предположения, которые были нами приняты в предыдущем параграфе. Рассмотрим вторую основную граничную задачу. Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} X_x \cos\theta + X_y \sin\theta &= f_1, \\ X_y \cos\theta + Y_y \sin\theta &= f_2, \end{aligned} \quad (\text{на } L) \tag{50.1}$$

где f_1, f_2 — заданные функции, непрерывные в смысле Гельдера на L, θ — угол, составленный внешней нормалью с осью ox. Это условие мы можем записать ещё в виде:

$$(X_x + Y_y)\frac{dz}{ds} - (X_x - Y_y + 2iX_y)\frac{d\bar{z}}{ds} = 2i(f_1 + if_2) \quad (\text{на } L). \tag{50.3}$$

Это, очевидно, так как

$$\frac{dz}{ds} = ie^{i\theta}, \quad \frac{d\bar{z}}{ds} = -ie^{-i\theta}. \tag{50.3}$$

Мы будем в дальнейшем предполагать, что X_x, X_y, Y_y непрерывны в $\mathfrak{T} + L$ в смысле Гельдера.

Принимая во внимание формулы

$$\begin{aligned} X_x + Y_y &= 2(\lambda + \mu)\left[\frac{\partial(u + iv)}{\partial z} + \frac{\partial(u - iv)}{\partial \zeta}\right], \\ X_x - Y_y + 2iX_y &= 4\mu\frac{\partial(u + iv)}{\partial \zeta}, \end{aligned} \tag{50.4}$$

в силу (46.8) получим:

$$\begin{aligned} X_x + Y_y = 4\mu[\overline{\Phi'(z)} + \Phi'(z)] - \mu a^2\nu^2[z\overline{\Phi(z)} + \bar{z}\Phi(z)] + \\ + 2(\lambda + \mu)L_1(\Phi, \Psi), \end{aligned} \tag{50.5}$$

$$\begin{aligned} X_x - Y_y + 2iX_y = 4\mu[-z\overline{\Phi''(z)} + l\nu^2 z^2\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi'(z)} - \\ - \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{6} z^3\overline{\Phi(z)} + L_2(\Phi, \Psi)], \end{aligned} \tag{50.6}$$

где

$$\begin{aligned} L_1(\Phi, \Psi) = \int_0^z \Phi(t)\left[\frac{\partial}{\partial z}H_1(\zeta, z - t) + \frac{\partial}{\partial \zeta}H_1^*(\zeta, z - t)\right]dt + \\ + \int_0^z \Psi(t)\left[\frac{\partial}{\partial z}H_2(\zeta, z - t) + \frac{\partial}{\partial \zeta}H_2^*(\zeta, z - t)\right]dt + \\ + \int_0^\zeta \overline{\Phi(\bar{\tau})}\left[\frac{\partial}{\partial \zeta}H_1(z, \zeta - \tau) + \frac{\partial}{\partial z}H_1^*(z, \zeta - \tau)\right]d\tau + \\ + \int_0^\zeta \overline{\Psi(\bar{\tau})}\left[\frac{\partial}{\partial \zeta}H_2(z, \zeta - \tau) + \frac{\partial}{\partial z}H_2^*(z, \zeta - \tau)\right]d\tau, \end{aligned} \tag{50.7}$$

$$L_2(\Phi, \Psi) = \int_0^z \Phi(t) \frac{\partial}{\partial\zeta} H_1(\zeta, z-t)\, dt + \int_0^z \Psi(t) \frac{\partial}{\partial\zeta} H_2(\zeta, z-t)\, dt +$$
$$+ \int_0^\zeta \overline{\Phi(\tau)} \frac{\partial}{\partial\zeta} H_1^*(z, \zeta-\tau)\, d\tau + \int_0^\zeta \overline{\Psi(\tau)} \frac{\partial}{\partial\zeta} H_2^*(z, \zeta-\tau)\, d\tau. \quad (50.8)$$
$$(z = x + iy, \quad \zeta = x - iy).$$

Подставляя выражения (50.5), (50.6) в (50.2), получим:

$$4\mu \frac{d}{ds}[\Phi(z) + z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}] - 4\mu l \nu^2 z^2 \overline{\Phi'(z)} \frac{d\bar{z}}{ds} +$$
$$+ \left[2\mu \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3} z^2 \frac{d\bar{z}}{ds} - \mu a^2 \nu^2 z \frac{dz}{ds}\right] \overline{\Psi(z)} -$$
$$- \mu a^2 \nu^2 \bar{z} \Phi(z) \frac{dz}{ds} + L^*(\Phi, \Psi) = f, \qquad (\text{на } L) \quad (50.9)$$

где $f = 2i(f_1 + if_2)$

$$L^*(\Phi, \Psi) = 2(\lambda + \mu) L_1(\Phi, \Psi) \frac{dz}{ds} - 4\mu L_2(\Phi, \Psi) \frac{d\bar{z}}{ds} =$$
$$= \int_0^z \Phi(t) G_1(\zeta, z, t)\, dt + \int_0^z \Psi(t) G_2(\zeta, z, t)\, dt +$$
$$+ \int_0^\zeta \overline{\Phi(\tau)} G_1^*(z, \zeta, \tau)\, d\tau + \int_0^\zeta \overline{\Psi(\tau)} G_2^*(z, \zeta, \tau)\, d\tau, \quad (50.10)$$

причём

$$G_1(\zeta, z, t) = 2(\lambda + \mu)\left[\frac{\partial}{\partial z} H_1(\zeta, z-t) + \frac{\partial}{\partial\zeta} H_1^*(\zeta, z-t)\right] \frac{dz}{ds} - 4\mu \frac{\partial}{\partial\zeta} H_1(\zeta, z-t) \frac{d\bar{z}}{ds},$$
$$G_2(\zeta, z, t) = 2(\lambda + \mu)\left[\frac{\partial}{\partial z} H_2(\zeta, z-t) + \frac{\partial}{\partial\zeta} H_2^*(\zeta, z-t)\right] \frac{dz}{ds} - 4\mu \frac{\partial}{\partial\zeta} H_2(\zeta, z-t) \frac{d\bar{z}}{ds},$$
$$G_1^*(z, \zeta, \tau) = 2(\lambda + \mu)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta} H_1(z, \zeta-\tau) + \frac{\partial}{\partial z} H_1^*(z, \zeta-\tau)\right] \frac{dz}{ds} - 4\mu \frac{\partial}{\partial\zeta} H_1^*(z, \zeta-\tau) \frac{d\bar{z}}{ds}, \quad (50.11)$$
$$G_2^*(z, \zeta, \tau) = 2(\lambda + \mu)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta} H_2(z, \zeta-\tau) + \frac{\partial}{\partial\zeta} H_2^*(z, \zeta-\tau)\right] \frac{dz}{ds} - 4\mu \frac{\partial}{\partial\zeta} H_2^*(z, \zeta-\tau) \frac{d\bar{z}}{ds}.$$

Итак, мы пришли к следующей граничной задаче теории функций комплексной переменной:

Требуется найти голоморфные в области T функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, удовлетворяющие граничному условию (50.9) *в предположении, что $\Phi''(z)$ и $\Psi'(z)$ непрерывны в смысле Гельдера в $T+L$. Кроме того, считаем, что $\Phi(0)=0$.*

Эту граничную задачу мы будем в дальнейшем называть *задачей* II.

Мы можем условие (50.9) записать ещё так:

$$d\left[\Phi(z)+z\overline{\Phi'(z)}-\overline{\Psi(z)}-l\nu^2z^2\overline{\Phi(z)}\right]+L_0(\Phi, \Psi)\,ds=\frac{1}{4\mu}f\,ds, \tag{50.12}$$

где $z\in L$,

$$L_0(\Phi, \Psi)=\left[\frac{b^2\nu^2}{4}z\frac{dz}{ds}+\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{6}z^3\frac{d\bar z}{ds}\right]\overline{\Phi(z)}-\\-\frac{a^2\nu^2\bar z}{4}\frac{dz}{ds}\Phi(z)+\frac{1}{4\mu}L^*(\Phi, \Psi). \tag{50.13}$$

Из (50.12) вытекает, что для разрешимости задачи необходимо выполнение следующего условия:

$$\int_L L_0(\Phi, \Psi)\,ds=\frac{1}{4\mu}\int_L f\,ds. \tag{50.14}$$

При выполнении последнего равенства условие (50.12) эквивалентно равенству:

$$\Phi(z)+z\overline{\Phi'(z)}-\overline{\Psi(z)}-l\nu^2z^2\overline{\Phi(z)}+L_0^*(\Phi, \Psi)=F(s)+C, \tag{50.15}$$

где $z\in L$, C — любая комплексная постоянная,

$$F(s)=\frac{1}{4\mu}\int_0^s f\,ds, \tag{50.16}$$

$$L_0^*(\Phi, \Psi)=\int_0^s L_0(\Phi, \Psi)\,ds. \tag{50.17}$$

Таким образом, задача II свелась к отысканию голоморфных в T функций $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, которые на L удовлетворяют условиям (50.14), (50.15).

Искомые функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ можно представить в виде:

$$\begin{gathered}\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t},\\ \Psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar t\,\omega(t)\,dt}{(t-z)^2}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,d\bar t}{t-z},\end{gathered} \tag{50.18}$$

где $\omega(t)$ — функция, определённая на L и имеющая производную первого порядка по дуге, непрерывную в смысле Гельдера; $\omega(t)$ однозначно определяется через $\Phi(z)$, $\Psi(z)$.

Эти формулы принадлежат Д. И. Шерману [5]. Доказательство их аналогично доказательству формул (49.5) предыдущего параграфа.

Подставляя (50.18) в (50.15), (50.14) и используя граничные свойства интеграла типа Коши, после простых и очевидных выкладок получим:

$$\omega(t_0)-\frac{l\nu^2 t_0^2}{2}\overline{\omega(t_0)}+\frac{l\nu^2 t_0^2}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(t)}d\bar t}{\bar t-\bar t_0}+$$
$$+\int_L M_1(t_0, t)\,\omega(t)\,dt+\int_L M_1^*(t_0, t)\overline{\omega(t)}\,d\bar t=F(t_0)+C, \quad (50.19)$$
$$\int_L M_2(t)\,\omega(t)\,dt+\int_L M_2^*(t)\overline{\omega(t)}\,d\bar t=\frac{1}{4\mu}\int_L f(t)\,dt, \quad (50.20)$$

где $M_1(t_0, t)$, $M_1^*(t_0, t)$ — функции, имеющие вид

$$\frac{M(t_0, t)}{|t_0-t|^{\varepsilon}},$$

причём $0\leqslant\varepsilon<1$, $M(t_0, t)$ — функция, непрерывная в смысле Гельдера; $M_2(t)$ и $M_2^*(t)$ — интегрируемые функции. Явный вид этих функций нетрудно написать.

Таким образом, $\omega(t)$ удовлетворяет двум уравнениям: сингулярному интегральному уравнению (50.19) и уравнению первого рода (50.20).

Переходя к сопряжённым равенствам, из (50.19) и (50.20) получим:

$$-\frac{l\nu^2\bar t_0^2}{2}\omega(t)+\overline{\omega(t)}-\frac{l\nu^2\bar t_0^2}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}+$$
$$+\int_L \overline{M_1^*(t_0, t)}\,\omega(t)\,dt+\int_L \overline{M_1(t_0, t)}\,\overline{\omega(t)}\,d\bar t=\overline{F(t_0)}+\bar C, \quad (50.21)$$
$$\int_L \overline{M_2^*(t)}\,\omega(t)\,dt+\int_L \overline{M_2(t)}\,\overline{\omega(t)}\,d\bar t=\frac{1}{4\mu}\int_L \bar f\,ds. \quad (50.22)$$

Системы уравнений (50.19), (50.21) и (50.20), (50.22) решают задачу II. Нетрудно проверить, что совокупность уравнений (50.19), (50.21) составляет систему сингулярных уравнений нормального типа с индексом $\varkappa=0$.

Замечание. Нетрудно проверить, что если в (50.15) вместо $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ подставим выражения:

$$
\begin{aligned}
\Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{t},\\
\Psi(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega(t)\,dt}}{t-z} + \frac{l\nu^2}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar t^2\omega(t)\,dt}{t-z} + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar t\,\omega(t)\,dt}{(t-z)^2} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,d\bar t}{t-z},
\end{aligned}
\qquad (50.23)
$$

то для определения $\omega(t)$ получим уравнения Фредгольма. Недостатком этого пути является то, что отсутствует доказательство эквивалентности для любого значения ν.

II. ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

В этом разделе мы рассмотрим несколько вопросов теории изгиба тонких пластинок.

§ 51. Основные дифференциальные уравнения изгиба пластинок. 1°. Рассмотрим тонкую пластинку, срединная поверхность которой до деформации совпадает с плоскостью oxy. Ось oz направим перпендикулярно этой плоскости. Пусть X, Y, Z—компоненты объёмной силы, действующей в срединной плоскости и рассчитанной на единицу площади. Кроме того, пусть к краю пластинки приложены силы, действующие в срединной плоскости. Действие этих сил вызовет деформацию пластинки, которая с достаточным приближением характеризуется при помощи компонент вектора смещения u, v, w точек срединной поверхности. Можно предположить, что эта деформация представляет собой сумму изгиба и плоской деформации срединной поверхности, обусловленной силами, приложенными к её контуру. Определение плоской деформации сводится к так называемой плоской задаче теории упругости, которая в настоящее время изучена с исчерпывающей полнотой (Мусхелишвили [2], [3], [4], [5]; Шерман [4], [5]). Поэтому в дальнейшем компоненты смещения u, v и тензора напряжений X_x, X_y, Y_y будем считать известными. Следовательно, задача сводится к отысканию нормального перемещения w, которая удовлетворяет уравнению (см., например, Тимошенко [1], стр. 275)

$$D\Delta\Delta w = Z + X_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Y_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2X_y\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - X\frac{\partial w}{\partial x} - Y\frac{\partial w}{\partial y}, \quad (51.1)$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа, D — цилиндрическая жёсткость,

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

причём h — толщина пластинки, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона.

Если X, $Y=0$ и плоская деформация срединной поверхности незначительна, то можно отбросить все члены правой части уравнения (51.1), кроме первого; тогда будем иметь более простое уравнение

$$D\Delta\Delta w=Z, \tag{51.2}$$

которое носит название *уравнения чистого изгиба*.

Если пластинка лежит на упругом основании, то в уравнении (51.1) мы должны заменить Z через $Z-kw$, где k — некоторая положительная постоянная. Следовательно, изгиб пластинки, лежащей на упругом основании, определяется уравнением

$$D\Delta\Delta w+kw=$$
$$=Z+X_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+Y_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2X_y\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}-X\frac{\partial w}{\partial x}-Y\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{51.3}$$

При $X_x=Y_y=X_y=X=Y=0$ будем иметь:

$$D\Delta\Delta w+kw=Z. \tag{51.4}$$

Уравнения вида (51.3) получаются также при изучении устойчивости пластинок (см., например, Тимошенко [1]).

2°. Пусть T — срединная поверхность пластинки. Предположим, что T — многосвязная область, дополнение которой состоит из $m+1$ континуумов C_0, $C_1, \ldots, C_m$, причём C_0 содержит бесконечную точку, а $C_1, \ldots, C_m$ — ограниченные множества. Пусть $L_0, \ldots, L_m$ — границы $C_0, \ldots, C_m$ соответственно. Тогда граница T будет $L=L_0+L_1+\ldots+L_m$. Положительным направлением на L будем считать то направление, которое оставляет область T слева.

Как известно (см. Мусхелишвили [2], стр. 106—123),

$$\begin{aligned}X_x+Y_y&=4\operatorname{Re}\Phi(z),\\ Y_y-X_x+2iX_y&=2[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)],\end{aligned} \tag{51.5}$$

где $\Psi(z)$ — произвольная функция, голоморфная в T, а $\Phi(z)$ — аналитическая функция, имеющая вид:

$$\Phi(z)=\sum_{k=1}^{m}A_k\lg(z-z_k)+\Phi^*(z),$$

причём A_k — произвольные действительные постоянные, а $\Phi^*(z)$ —

произвольная функция, голоморфная в T; $z_1, \ldots, z_m$ — фиксированные точки, принадлежащие $C_1, \ldots, C_m$ соответственно. В частности, если область T односвязна, то, очевидно, функция $\Phi(z)$ будет голоморфной в T.

§ 52. Общее решение основных дифференциальных уравнений. **1°**. Уравнение (51.4), частным случаем которого являются все остальные уравнения предыдущего параграфа, принадлежит к классу дифференциальных уравнений, изученному нами в главе V. Это уравнение в комплексной форме будет иметь вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \zeta^2} + A(z, \zeta)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2B(z, \zeta)\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \zeta} + A^*(z, \zeta)\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \\ + C(z, \zeta)\frac{\partial w}{\partial z} + C^*(z, \zeta)\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \lambda w = F(z, \zeta), \qquad (52.1)$$

где

$$\begin{aligned} A(z, \zeta) &= \frac{1}{16D}(-X_x + Y_y - 2iX_y), \\ A^*(z, \zeta) &= \frac{1}{16D}(-X_x + Y_y + 2iX_y), \\ B(z, \zeta) &= -\frac{1}{16D}(X_x + Y_y), \quad C(z, \zeta) = \frac{1}{16D}(X + iY), \\ C^*(z, \zeta) &= \frac{1}{16D}(X - iY), \quad \lambda = \frac{k}{16D}, \end{aligned} \qquad (52.2)$$

причём $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$; при действительных x, y, очевидно, имеем:

$$A^* = \overline{A}, \quad C^* = \overline{C}, \quad B = \overline{B}.$$

Уравнение (52.1) мы можем записать ещё в виде:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 A w}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 B w}{\partial z\,\partial \zeta} + \frac{\partial^2 A^* w}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial C_0 w}{\partial z} + \frac{\partial C_0^* w}{\partial \zeta} + Ew = F, \qquad (52.3)$$

где

$$C_0 = -2\frac{\partial A}{\partial z} - 2\frac{\partial B}{\partial \zeta} + C, \quad C_0^* = -2\frac{\partial B}{\partial z} - 2\frac{\partial A^*}{\partial \zeta} + C^*,$$

$$E = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 B}{\partial z\,\partial \zeta} + \frac{\partial^2 A^*}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial C^*}{\partial \zeta} + \lambda.$$

Предположим, что T — основная область для уравнения (52.3). Тогда это уравнение приводится к интегральному уравнению:

$$w(z, \zeta) + \int_0^z (z - t) A^*(t, \zeta) w(t, \zeta)\,dt + \int_0^\zeta (\zeta - \tau) A(z, \tau) w(z, \tau)\,d\tau + \\ + \int_0^z dt \int_0^\zeta K_0(z, \zeta, t, \tau) w(t, \tau)\,d\tau = F_0(z, \zeta) + U_0(z, \zeta), \qquad (52.4)$$

где

$$K_0(z, \zeta, t, \tau) = 2B(t, \tau) + (\zeta - \tau) C_0(t, \tau) + (z - t) C_0^*(t, \tau) + \\ + (z - t)(\zeta - \tau) E(t, \tau), \quad (52.5)$$

$$F_0(z, \zeta) = \int_0^z dt \int_0^\zeta (z - t)(\zeta - \tau) F(t, \tau)\, d\tau, \quad (52.6)$$

$$U_0(z, \zeta) = z\Psi_0(\zeta) + \zeta\Phi_0(z) + \Psi_1(\zeta) + \Phi_1(z), \quad (52.7)$$

причём Φ_0, Φ_1, Ψ_0, Ψ_1 — произвольные голоморфные функции своих аргументов в T, $\overline{T}$ ($z \in T$, $\zeta \in \overline{T}$) соответственно. Так как при действительных значениях x, y, т. е. при $\zeta = \overline{z}$, функция w должна принимать действительные значения, то, очевидно, мы должны предположить, что $\Phi_0(z) = \overline{\Psi_0(\overline{z})}$, $\Phi_1(z) = \overline{\Psi_1(\overline{z})}$. Следовательно, U_0 имеет вид:

$$U_0(z, \overline{z}) = \overline{z}\Phi_0(z) + z\overline{\Phi_0(z)} + \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)}; \quad (52.8)$$

функции Φ_0, Φ_1 мы можем подчинить условиям:

$$\Phi_0(0) = 0, \quad \Phi_0'(0) = \overline{\Phi_0'(0)}, \quad \Phi_1(0) = \overline{\Phi_1(0)}. \quad (52.9)$$

Решение уравнения (52.4), очевидно, имеет вид:

$$w(z, \zeta) = w_0(z, \zeta) + W(z, \zeta), \quad (52.10)$$

где w_0 — решение, соответствующее случаю $U_0 = 0$, а W — решение, соответствующее $F_0 = 0$. Так как F_0 — заданная функция, то мы можем считать w_0 известной функцией. Что же касается W, то она будет иметь вид (см. формулу (34.6)):

$$W(z, \zeta) = U_0(z, \zeta) + \int_0^z \Gamma_1(z, \zeta, t) U_0(t, \zeta)\, dt + \\ + \int_0^\zeta \Gamma_2(\zeta, z, \tau) U_0(z, \tau)\, d\tau + \int_0^z dt \int_0^\zeta \Gamma(z, \zeta, t, \tau) U_0(t, \tau)\, d\tau. \quad (52.11)$$

Подставляя сюда вместо U_0 её выражение (52.8), в случае действительных x, y будем иметь:

$$W = \operatorname{Re}\left\{ g_0(z, \overline{z}) \Phi_0(z) + \int_0^z G_0(z, \overline{z}, t) \Phi_0(t)\, dt + \right. \\ \left. + g_1(z, \overline{z}) \Phi_1(z) + \int_0^z G_1(z, \overline{z}, t) \Phi_1(t)\, dt \right\}, \quad (52.12)$$

где

$$\begin{gathered}
G_0(z, \zeta, t) = \zeta\Gamma_1(z, \zeta, t) + \int_0^\zeta \tau\Gamma(z, \zeta, t, \tau)\, d\tau, \\
G_1(z, \zeta, t) = \Gamma_1(z, \zeta, t) + \int_0^\zeta \Gamma(z, \zeta, t, \tau)\, d\tau, \qquad (52.13) \\
g_0(z, \zeta) = \zeta + \int_0^\zeta \tau\Gamma_2(z, \zeta, \tau)\, d\tau, \quad g_1(z, \zeta) = 1 + \int_0^\zeta \Gamma_2(z, \zeta, \tau)\, d\tau.
\end{gathered}$$

Подставляя (52.12) в (52.10), получим общее выражение решений уравнения (51.3) через две произвольные голоморфные функции Φ_0, Φ_1.

2°. Функции $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ однозначно выражаются через функцию Римана и, следовательно, через коэффициенты уравнения (52.1) (см. формулу (34.13); их можно всегда найти методом последовательных приближений. Но практически важно указать случаи, когда эти функции выражаются в явном виде через коэффициенты заданного уравнения. К сожалению, число таких уравнений весьма ограничено, но всё же можно указать важные для практики случаи, когда функции $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ выражаются в явном виде через хорошо изученные специальные функции. Мы приведём здесь пример одного такого случая.

Пусть вдоль края пластинки действует постоянная нормальная сила Q, лежащая в срединной плоскости; мы будем считать Q положительной величиной, когда сила направлена вовнутрь области T, а в противном случае — отрицательной.

Тогда, очевидно, имеем:

$$X_x = Y_y = -Q, \quad X_y = 0. \qquad (52.14)$$

Кроме того, мы примем, что $X = Y = 0$. Тогда уравнение (51.3) будет иметь вид:

$$\Delta\Delta w + a_1\Delta w + a_2 w = \frac{1}{D} Z, \qquad (52.15)$$

где

$$a_1 = \frac{Q}{D}, \quad a_2 = \frac{k}{D}. \qquad (52.16)$$

Уравнение вида (52.15) мы изучили в § 37; там мы нашли, что $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, $\Gamma = P[(z-t)(\zeta-\tau)]$, где

$$P(X) = \frac{\varkappa_1^2 L_0(\varkappa_1 X) - \varkappa_2^2 L_0(\varkappa_2 X)}{\varkappa_1 - \varkappa_2}, \quad \varkappa_1 \neq \varkappa_2 \qquad (52.17)$$

причём $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — корни уравнения $16\varkappa^2 - 4a_1\varkappa + a_2 = 0$; в случае $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$ имеем:

$$P(X) = 2\varkappa L_0(\varkappa X) - \varkappa^2 X L_1(\varkappa X). \tag{52.18}$$

3°. Укажем теперь ещё один случай, когда для Γ_1, Γ_2, Γ можно ограничиться приближёнными значениями, в явном виде выражающимися через коэффициенты заданного уравнения.

Пусть объёмные силы и приложенные к границе пластинки силы, действующие в срединной поверхности, имеют вид νX, νY, νX_n, νY_n, где ν — постоянная. Тогда компоненты тензора напряжений будут вида νX_x, νX_y, νY_y и уравнение (51.4) можно записать так:

$$D\Delta\Delta w + kw = \\ = Z + \nu\left(X_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2X_y \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + Y_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - X\frac{\partial w}{\partial x} - Y\frac{\partial w}{\partial y}\right). \tag{52.19}$$

Интегральное уравнение (52.4) в данном случае будет иметь вид:

$$W(z, \zeta) + \lambda \int_0^z dt \int_0^\zeta (z-t)(\zeta-\tau) W(t, \tau)\, d\tau = \\ = \frac{1}{16D} \int_0^z (z-t)\, dt \int_0^\zeta (\zeta-\tau) Z(t, \tau)\, d\tau + U_0(z, \zeta) + \\ + \nu\left[\int_0^z (z-t) A^*(t, \zeta) W(t, \zeta)\, dt + \int_0^\zeta (\zeta-\tau) A(z, \tau) W(z, \tau)\, d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^z dt \int_0^\zeta K_0(z, \zeta, t, \tau) W(t, \tau)\, d\tau\right]. \tag{52.20}$$

Решение этого уравнения можно представить в виде ряда:

$$W(z, \zeta) = W^{(0)}(z, \zeta) + \nu W^{(1)}(z, \zeta) + \nu^2 W^{(2)}(z, \zeta) + \ldots, \tag{52.21}$$

где $W^{(0)}, W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots$ суть решения уравнений

$$W^{(0)}(z, \zeta) + \lambda \int_0^z dt \int_0^\zeta (z-t)(\zeta-\tau) W^{(0)}(t, \tau)\, d\tau = \\ = U_0(z, \zeta) + \frac{1}{16Д} \int_0^z dt \int_0^\zeta (z-t)(\zeta-\tau) Z(t, \tau)\, d\tau, \tag{52.22}$$

$$W^{(n)}(z,\zeta)+\lambda\int_0^z dt\int_0^\zeta (z-t)(\zeta-\tau)W^{(n)}(t,\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^z (z-t)A^*(t,\zeta)W^{(n-1)}(t,\zeta)\,dt+\int_0^\zeta (\zeta-\tau)A(z,\tau)W^{(n-1)}(z,\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^z dt\int_0^\zeta K_0(z,\zeta,t,\tau)W^{(n-1)}(t,\tau)\,d\tau \quad (n=1,2,3,\ldots). \tag{52.23}$$

Таким образом, для определения функций $W^{(0)}, W^{(1)}, \ldots$ мы имеем интегральные уравнения вида:

$$W^*(z,\zeta)+\lambda\int_0^z dt\int_0^\zeta (z-t)(\zeta-\tau)W^*(t,\tau)\,d\tau=F^*(z,\zeta), \tag{52.24}$$

решение которого даётся формулой:

$$W^*(z,\zeta)=$$

$$=F^*(z,\zeta)-\sqrt{\lambda}\int_0^z dt\int_0^\zeta S_0(\sqrt{\lambda}(z-t)(\zeta-\tau))F^*(t,\tau)\,d\tau, \tag{52.25}$$

где (см. формулу (37.6))

$$S_0(X)=\frac{i}{2}[L_0(iX)-L_0(-iX)]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!^2}. \tag{52.26}$$

При помощи формулы (52.25) мы можем выразить последовательно все функции $W^{(0)}, W^{(1)}, \ldots$ через коэффициенты заданного уравнения.

Предположим, что ν — достаточно малое число. Пренебрегая его степенями выше первой, будем иметь:

$$W(z,\zeta)=W^{(0)}(z,\zeta)+\nu W^{(1)}(z,\zeta). \tag{52.27}$$

Найдя теперь при помощи формулы (52.25) выражения для $W^{(0)}, W^{(1)}$ и подставляя их в (52.27), получим окончательно в явном виде общее представление приближённого решения.

§ 53. Замечания о граничных задачах. При изучении изгиба пластинки мы имеем следующие три основные граничные задачи:

Задача I. Край пластинки заделан. Это значит, что на границе области T, занятой срединной плоскостью пластинки, должны иметь место соотношения:

$$w=0, \quad \frac{dw}{dn}=0 \quad (\text{на } L), \tag{53.1}$$

где L — граница области T, а n — внешняя нормаль.

Задача II. Край пластинки свободен. В этом случае граничные условия имеют вид:

$$\begin{gathered}\sigma\Delta w+(1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\theta+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\sin 2\theta\right]=0,\\ \frac{\partial\Delta w}{\partial n}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\sin 2\theta+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos 2\theta\right]=0,\end{gathered}\tag{53.2}$$

где θ — угол, составленный внешней нормалью с осью ox.

Задача III. Край пластинки опёрт. Тогда имеем граничные условия:

$$\begin{gathered}w=0,\\ \sigma\Delta w+(1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\theta+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\sin 2\theta\right]=0.\end{gathered}\tag{53.3}$$

Кроме этих основных видов граничных условий, на практике часто встречаются так называемые смешанные условия, соответствующие тому случаю, когда, например, одна часть границы заделана, другая опёрта и остальная — свободна.

Из этих задач достаточно хорошо изучены в настоящее время лишь задачи I, II в случае чистого изгиба, т. е. в том случае, когда пластинка изгибается только силами, перпендикулярными её срединной плоскости. В этом случае мы имеем дело с уравнением вида (51.2), и указанные задачи приводятся к основным граничным задачам для бигармонического уравнения $\Delta\Delta w=0$ (см. Мусхелишвили [2], [3]; статью автора [27]). Что же касается задачи III, то она мало изучена даже для уравнения (51.2); решены лишь отдельные конкретные задачи для различных областей частного вида.

В случае уравнения общего вида (51.3) имеются лишь решения отдельных конкретных задач (см., например, Тимошенко [1], гл VI, VII).

Нам кажется, что общее представление решений уравнения (51.3) открывает новый путь для исследования вышеприведённых задач. Например, применяя метод, изложенный в §§ 39, 40, 41, мы можем привести задачу I к эквивалентным уравнениям Фредгольма, причём ядра этих уравнений строятся в явном виде. Этот метод можно применить также к решению задач II и III.

Интегральные уравнения § 41, соответствующие задаче I, сильно упрощаются в случае уравнения (52.15), т. е. в случае пластинки, всесторонне сжатой под действием равномерно распределённой продольной нормальной нагрузки. Эти уравнения нетрудно выписать в явном виде.

Ещё более упрощаются задачи для круговой области в случае уравнения (52.15). Тогда, используя разложения решений, полученные в § 37, можно решить все три задачи и найти критические значения продольной нагрузки (см. А. В. Бицадзе [2], [4]).

III. ПРИМЕНЕНИЯ К ТЕОРИИ ТОНКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В этом разделе рассматриваются вопросы интегрирования системы уравнений равновесия тонкой сферической оболочки. Полученные формулы выражают в явном виде усилия, моменты и смещения через четыре произвольные голоморфные функции. В качестве примера решается одна граничная задача для оболочки, имеющей форму сферического сегмента.

Особо рассматривается так называемая пологая сферическая оболочка, для которой отношение l/d (где l — высота, а d — диаметр основания наименьшего сферического сегмента, заключающего внутри себя данную оболочку) достаточно мало по сравнению с единицей.

Изложенные результаты содержатся в работах автора [20], [25].

§ 54. Система дифференциальных уравнений тонкой сферической оболочки. 1°. Рассмотрим на поверхности сферы радиуса R какую-нибудь изотермическую сеть координатных линий; тогда линейный элемент выразится так:

$$ds^2 = R^2 A^2 (d\alpha^2 + d\beta^2), \tag{54.1}$$

где $A^2 = A^2(\alpha, \beta)$ — определённая, заданная функция α и β.

Одну из изотермических сетей на поверхности сферы даёт преобразование

$$\alpha = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \qquad \beta = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi, \tag{54.2}$$

где θ, φ — географические координаты точки; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. В этом случае

$$A = \frac{2}{1+\alpha^2+\beta^2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2}. \tag{54.3}$$

Преобразование (54.2) представляет собой стереографическую проекцию поверхности единичной сферы с южного полюса $\theta = \pi$ на экваториальную плоскость $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

Если рассматривать изотермические координаты α, β как прямоугольные координаты точки на плоскости, то получим конформное преобразование сферической поверхности на плоскость $z = \alpha + i\beta$. Преобразование

$$z = f(z') \qquad (z' = \alpha' + i\beta'), \tag{54.4}$$

где f — произвольная голоморфная функция, переводит изотермическую сеть (α, β) в новую изотермическую сеть (α', β'), так как относительно последней линейный элемент, очевидно, имеет вид:

$$ds^2 = R^2 A'^2 (d\alpha'^2 + d\beta'^2), \quad A'^2 = A^2 f'(z') \overline{f'(z')}. \qquad (54.5)$$

2°. Уравнения равновесия тонкой сферической оболочки относительно изотермической сети координатных линий будет иметь вид (см., например, А. Ляв [1], стр. 562, 563):

$$\begin{gathered}
\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial A T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A S}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S - \frac{\partial A}{\partial \alpha} T_2\right) + N_1 + RX = 0, \\
\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial A S}{\partial \alpha} + \frac{\partial A T_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{\partial A}{\partial \alpha} S\right) + N_2 + RY = 0, \\
\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial A N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A N_2}{\partial \beta}\right) - (T_1 + T_2) + RZ = 0, \qquad (54.6) \\
\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial A M_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A H}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} H - \frac{\partial A}{\partial \alpha} M_2\right) - RN_1 = 0, \\
\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial A H}{\partial \beta} + \frac{\partial A M_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 + \frac{\partial A}{\partial \alpha} H\right) - RN_2 = 0,
\end{gathered}$$

где $T_1, T_2, S, N_1, N_2, M_1, M_2$ и H — компоненты усилий и моментов, а X, Y, Z — компоненты внешней силы, причём Z — радиальная, а X, Y — касательные составляющие этой силы.

К приведённой системе уравнений мы должны добавить уравнения, которые выражают компоненты усилий и моментов через компоненты вектора смещения u, v, w. Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}
T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \quad S = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\omega, \\
M_1 = D(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2), \qquad M_2 = D(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1), \qquad H = D(1-\mu)\tau, \qquad (54.7) \\
\left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\right).
\end{gathered}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
R\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \beta} v + w, \qquad R\varepsilon_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha} u + w, \\
R\omega = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{A}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right),
\end{gathered} \qquad (54.8)$$

$$\begin{gathered}
R\varkappa_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \beta}\psi, \qquad R\varkappa_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha}\vartheta, \\
2R\tau = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\psi}{A}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\vartheta}{A}\right),
\end{gathered} \qquad (54.9)$$

причём

$$R\vartheta = -\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + u, \qquad R\psi = -\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\beta} + v. \tag{54.10}$$

В формулах (54.7) E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки, D — цилиндрическая жёсткость.

Если (54.10) подставить в (54.9) и затем полученные выражения и (54.8) внести в (54.7), то T_1, T_2, S, M_1, M_2 и H выразятся через u, v, w. Если же теперь эти выражения подставить в последние два уравнения (54.6), то N_1 и N_2 также выразятся через u, v, w. Таким образом, все компоненты усилий и моментов мы можем выразить через u, v, w. Подставляя эти выражения в первые три уравнения (54.6), получим три дифференциальных уравнения с тремя неизвестными функциями u, v, w; т. е. мы будем иметь систему уравнений в компонентах вектора смещения.

3°. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &\mathcal{T} = T_1 + T_2, \quad P = \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 + 2iS, \quad N = A(N_1 + iN_2),\\ &M = M_1 + M_2, \quad Q = M_1 - M_2 + 2iH,\\ &U = A(u + iv), \quad F = A(X + iY). \end{aligned} \tag{54.11}$$

Тогда, очевидно, будем иметь:

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}_1 = \frac{1}{2}\mathcal{T} + \frac{1}{4}P + \frac{1}{4}\overline{P}, && S = \frac{1}{4i}P - \frac{1}{4i}\overline{P}, && N_1 = \frac{1}{2A}(N + \overline{N}),\\ &\mathcal{T}_2 = \frac{1}{2}\mathcal{T} - \frac{1}{4}P - \frac{1}{4}\overline{P}, && H = \frac{1}{4i}Q - \frac{1}{4i}\overline{Q}, && N_2 = \frac{1}{2iA}(N - \overline{N}),\\ &M_1 = \frac{1}{2}M + \frac{1}{4}Q + \frac{1}{4}\overline{Q}, && X = \frac{1}{2A}(F + \overline{F}), && Y = \frac{1}{2iA}(F - \overline{F}),\\ &M_2 = \frac{1}{2}M - \frac{1}{4}Q - \frac{1}{4}\overline{Q}, && u = \frac{1}{2A}(U + \overline{U}), && v = \frac{1}{2iA}(U - \overline{U}). \end{aligned} \tag{54.12}$$

Отметим, что как здесь, так и в дальнейшем всюду черта над комплексным выражением обозначает переход к сопряжённому комплексному значению.

Рассмотрим теперь комплексные переменные

$$z = \alpha + i\beta, \qquad \zeta = \alpha - i\beta \tag{54.13}$$

и связанные с ними дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} - i\frac{\partial}{\partial\beta}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + i\frac{\partial}{\partial\beta}\right). \tag{54.14}$$

Тогда, принимая во внимание (54.8), (54.9), (54.10), (54.11), (54.12), (54.14), систему уравнений (54.6) и (54.7) можно представить в виде:

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial A^2 P}{\partial z}+\frac{\partial T}{\partial \zeta}+N+RF=0, \tag{54.15}$$

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial N}{\partial z}+\frac{\partial \overline{N}}{\partial \zeta}\right)-\mathcal{T}+RZ=0, \tag{54.16}$$

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial A^2 Q}{\partial z}+\frac{\partial M}{\partial \zeta}-RN=0 \tag{54.17}$$

$$\mathcal{T}=\frac{2Eh}{(1-\mu)R}w+\frac{Eh}{(1-\mu)R}\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial \overline{U}}{\partial \zeta}\right), \tag{54.18}$$

$$P=\frac{2Eh}{(1+\mu)R}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{U}{A^2}\right), \tag{54.19}$$

$$M=-\frac{D(1+\mu)}{R^2}\nabla^2 w+\frac{D(1+\mu)}{R^2}\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial \overline{U}}{\partial \zeta}\right), \tag{54.20}$$

$$Q=-\frac{4D(1-\mu)}{R^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial w}{\partial \zeta}+\frac{2D(1-\mu)}{R^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{U}{A^2}\right). \tag{54.21}$$

Здесь ∇^2 — оператор Лапласа поверхности единичной сферы:

$$\nabla^2=\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right)=\frac{4}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \zeta}. \tag{54.22}$$

Система уравнений (54.15) — (54.21), очевидно, эквивалентна системе (54.6), (54.7).

§ 55. Общее решение системы уравнений (54.15) — (54.21).

1°. В силу уравнений (54.18), (54.20), (54.19), (54.21) легко получим формулы:

$$\begin{aligned} M&=-\frac{D(1+\mu)}{R^2}(\nabla^2+2)w+\frac{D(1-\mu^2)}{EhR}\mathcal{T},\\ Q&=-\frac{4D(1-\mu)}{R^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial w}{\partial \zeta}+\frac{D(1-\mu^2)}{EhR}P. \end{aligned} \tag{55.1}$$

Подставляя эти выражения в (54.17), получим:

$$\begin{aligned} RN=\frac{D(1-\mu^2)}{EhR}&\left(\frac{1}{A^2}\frac{DA^2P}{\partial z}+\frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)-\\ &-\frac{4D(1-\mu)}{R^2}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}A^2\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial w}{\partial \zeta}-\frac{D(1+\mu)}{R^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}(\nabla^2+2)w. \end{aligned} \tag{55.2}$$

Отсюда на основании (54.15) имеем:

$$N=-\frac{h^2}{12\delta R}F-\frac{D(1+\mu)}{\delta R^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}(\nabla^2+2)w-\frac{4D(1-\mu)}{\delta R^3}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}A^2\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial w}{\partial \zeta},$$

$$\left(\delta=1+\frac{h^2}{12R^2}\right), \tag{55.3}$$

Нетрудно теперь проверить справедливость равенства

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}A^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial(\;)}{\partial\zeta}=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\nabla^2+2)(\;). \tag{55.4}$$

Для этого надо воспользоваться известной формулой Гаусса (см., например, В. Бляшке [1], стр. 130), из которой для нашего случая получаем:

$$\nabla^2 \lg A=-1. \tag{55.5}$$

Если воспользуемся теперь формулой (55.4), то из (55.3) следует:

$$N=-\frac{2D}{\delta R^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\nabla^2+2)w-\frac{h^2}{12\delta R}F. \tag{55.6}$$

Подставляя это выражение в уравнение (54.16), получим:

$$T=-\frac{D}{\delta R^3}\nabla^2(\nabla^2+2)w+RZ-\frac{h^2}{12\,\delta R}\Phi, \tag{55.7}$$

$$\left[\Phi=\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial\bar F}{\partial\zeta}\right)\right].$$

Если теперь (55.7) подставим в первую формулу (55.1), то получим:

$$M=-\frac{Dh^2}{12\delta R^4}(\nabla^2+2)\left(\nabla^2+\frac{12\delta(1+\mu)R^2}{h^2}\right)w+\frac{h^2}{12}Z-\frac{h^4}{144\,\delta R^2}\Phi. \tag{55.8}$$

2°. На основании (55.5) нетрудно доказать справедливость следующих тождеств:

$$\frac{1}{4}(\nabla^2+2)\frac{1}{A^2}\frac{\partial(\;)}{\partial z}=\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}A^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{(\;)}{A^2}, \tag{55.9}$$

$$\frac{1}{4}(\nabla^2+2)\frac{1}{A^2}\frac{\partial(\;)}{\partial\zeta}=\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}A^2\frac{\partial}{\partial z}\frac{(\;)}{A^2}. \tag{55.10}$$

В силу этих формул из (54.18) и (54.19) получим:

$$(\nabla^2+2)\left(\frac{1-\mu}{Eh}T-\frac{2}{R}w\right)=$$
$$=\frac{2(1+\mu)}{Eh}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{A^2}\frac{\partial A^2P}{\partial z}+\frac{2(1+\mu)}{Eh}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial A^2\bar P}{\partial\zeta}.$$

Отсюда на основании уравнений (54.15) и (54.16) имеем:

$$(\nabla^2+2)\left(\frac{T}{Eh}-\frac{w}{R}\right)=\frac{(1+\mu)R}{Eh}Z-\frac{(1+\mu)R}{Eh}\Phi.$$

Подставляя сюда выражение (55.7), получим:

$$(\nabla^2+2)\left(\nabla^2\nabla^2+2\nabla^2+\frac{\delta EhR^2}{D}\right)w=Z', \tag{55.11}$$

где

$$Z'=\frac{R^4}{D}\left\{\delta\nabla^2 Z+(1-\mu)\,\delta Z-\frac{h^2}{12R^2}\nabla^2\Phi+ \right.$$
$$\left. +((1+\mu)+(1-\delta)(1-\mu))\Phi\right\}. \tag{55.12}$$

Таким образом, w удовлетворяет дифференциальному уравнению (55.11) шестого порядка; назовём его *основным дифференциальным уравнением изгиба тонкой сферической оболочки.*

3°. Предположим, что касательная составляющая внешней силы имеет потенциал, т. е.

$$F=A(X+iY)=2\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}=\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}+i\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, \tag{55.13}$$

где Ω — действительная функция точки (α, β). Тогда согласно (55.7) имеем:

$$\Phi=\nabla^2\Omega. \tag{55.14}$$

Рассмотрим теперь уравнение (54.18), которое представим в виде:

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial\overline{U}}{\partial\zeta}\right)=\frac{(1-\mu)R}{Eh}\mathcal{T}-2w. \tag{55.15}$$

Из уравнения (55.11) имеем:

$$w=-\frac{D}{2\delta EhR^3}\nabla^2\left(\nabla^2\nabla^2+4\nabla^2+4+\frac{\delta EhR^2}{D}\right)w+\frac{D}{2\delta EhR^2}Z. \tag{55.16}$$

Подставляя теперь в (55.15) выражения (55.16), (55.7) и принимая во внимание (55.12), (54.14), получим:

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial\overline{U}}{\partial\zeta}\right)=\nabla^2\left\{\frac{D}{\delta EhR^3}\left[(\nabla^2+2)(\nabla^2+1+\mu)+\frac{\delta EhR^2}{D}\right]w-\right.$$
$$\left.-\frac{R^2}{Eh}Z+\frac{h}{12\delta E}\nabla^2\Omega-\frac{(1+\mu)R^2}{\delta Eh}\Omega\right\}.$$

Отсюда мы имеем, что

$$U=U_0+U^*, \tag{55.17}$$

где

$$U^*=2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{D}{\delta EhR^2}\left[(\nabla^2+2)(\nabla^2+1+\mu)+\frac{\delta EhR^2}{D}\right]w-\right.$$
$$\left.-\frac{R^2}{Eh}Z+\frac{h}{12\delta E}\nabla^2\Omega-\frac{(1+\mu)R^2}{\delta Eh}\Omega\right\}, \tag{55.18}$$

а U_0 является решением уравнения

$$\frac{\partial U_0}{\partial z}+\frac{\partial \overline{U}_0}{\partial \zeta}=0. \tag{55.19}$$

Отсюда

$$U_0=2i\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}, \tag{55.20}$$

где ω — действительная функция точки поверхности сферы, которая, очевидно, определяется с точностью до постоянной слагаемой.

Найдём теперь ω; для этой цели воспользуемся уравнениями (54.15) и (54.19). Подставим (55.17) в (54.19) и полученное выражение внесём в (54.15); если в (54.15) подставим также (55.6) и (55.7), то, принимая во внимание (55.20), получим:

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}A^2\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}=0.$$

На основании (55.4) последнее уравнение примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(\nabla^2+2)\,\omega=0.$$

Так как ω — действительная функция, то будем иметь:

$$(\nabla^2+2)\,\omega=C, \qquad C=\text{const}.$$

Можно положить $C=0$, ибо ω определена лишь с точностью до постоянной слагаемой. Поэтому имеем:

$$\nabla^2\omega+2\omega=0. \tag{55.21}$$

Этим условием ω определяется однозначно через u и v. На основании (55.18) и (55.20) из (55.17) получим:

$$U=2\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{i\omega+\frac{D}{\delta EhR^2}\left[(\nabla^2+2)(\nabla^2+1+\mu)+\frac{\delta EhR^2}{D}\right]w-\right.$$
$$\left.-\frac{R^2}{Eh}Z+\frac{h}{12\delta E}\nabla^2\Omega-\frac{(1+\mu)R^2}{\delta Eh}\Omega\right\}. \tag{55.22}$$

Подставляя теперь (55.22) в (54.19) и (54.21), получим:

$$P=\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\frac{4iEh}{(1+\mu)R}\omega+\right.$$
$$+\frac{4D}{(1+\mu)\delta R^3}\left[(\nabla^2+2)(\nabla^2+1+\mu)+\frac{\delta EhR^2}{D}\right]w-$$
$$\left.-\frac{4R}{1+\mu}Z+\frac{h^2}{3(1+\mu)\delta R}\nabla^2\Omega-\frac{4R}{\delta}\Omega\right\}, \tag{55.23}$$

$$Q=\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{iEh^3}{3(1+\mu)R}\omega+\frac{Dh^2}{3(1+\mu)\delta R^4}(\nabla^2+2)(\nabla^2+1+\mu)w-\right.$$
$$\left.-\frac{h^2}{3(1+\mu)}Z+\frac{h^4}{36(1+\mu)\delta R^2}\nabla^2\Omega-\frac{h^2}{3\delta}\Omega\right\}. \quad (55.24)$$

Таким образом, искомые функции T, M, N, P, Q, U выражены через две функции w и ω, причём последние являются произвольными решениями уравнений (55.11) и (55.21) соответственно.

Нетрудно проверить, что выражения (55.6), (55.7), (55.8), (55.22), (55.23) и (55.24) действительно удовлетворяют системе уравнений (54.15) — (55.21); очевидно, указанные формулы дают нам общий интеграл этой системы[1]).

§ 56. Другие выражения для усилий, моментов и компонент смещения.

1°. Решение уравнения (55.11) имеет вид:

$$w=w_0+w^*, \quad (56.1)$$

где w_0 — частное решение его, а w^* — общее решение уравнения

$$(\nabla^2+2)\left(\nabla^2\nabla^2+2\nabla^2+\frac{\delta EhR^2}{D}\right)w^*=0. \quad (56.2)$$

Но решение последнего уравнения можно представить в виде:

$$w^*=\chi+\psi^*, \quad (56.3)$$

где χ и ψ^* — произвольные решения следующих уравнений:

$$\nabla^2\chi+2\chi=0, \quad (56.4)$$

$$\nabla^2\nabla^2\psi^*+2\nabla^2\psi^*+\frac{\delta EhR^2}{D}\psi^*=0, \quad (56.5)$$

причём нетрудно видеть, что χ и ψ^* однозначно определяются через w^*:

$$\begin{aligned}\chi&=\frac{D}{\delta EhR^2}\left(\nabla^2\nabla^2+2\nabla^2+\frac{\delta EhR^2}{D}\right)w^*,\\ \psi^*&=-\frac{D}{\delta EhR^2}(\nabla^2+2)\nabla^2 w^*.\end{aligned} \quad (56.6)$$

Уравнение (56.5) можно представить в виде:

$$(\nabla^2+1-i\nu)(\nabla^2+1+i\nu)\psi^*=0 \quad \left(\nu=\frac{R}{h}\sqrt{12(1-\delta\mu^2)}\right). \quad (56.7)$$

---

[1]) Построению общего интеграла системы уравнений сферической оболочки посвящены также работы А. Л. Гольденвейзера [1] и В. В. Новожилова [2].

Поэтому общее решение уравнения (56.5) имеет вид:

$$\psi^* = \psi + \overline{\psi}, \tag{56.8}$$

где ψ — произвольное решение уравнения

$$\nabla^2\psi + (1 - i\nu)\psi = 0. \tag{56.9}$$

Так как $1 - i\nu$ есть комплексное число, то ψ будет комплексной функцией, а $\psi^* = 2\,\mathrm{Re}\,\psi$. Легко видеть, что ψ однозначно определяется через ψ^*:

$$\psi = \frac{1}{2i\nu}(\nabla^2 + 1 + i\nu)\psi^*. \tag{56.10}$$

В силу (56.8), (56.3), (56.1) имеем:

$$w = w_0 + \chi + \psi + \overline{\psi}, \tag{56.11}$$

где w_0 — частное решение уравнения (55.11), а χ и ψ — произвольные решения уравнений (56.4) и (56.9) соответственно, причём, как показывают формулы (56.6) и (56.10), функции χ и ψ однозначно определяются через $w - w_0$. Это значит, что всякому заданному напряжённому состоянию равновесия оболочки и заданному частному решению w_0 уравнения (55.11) соответствуют вполне определённые χ и ψ.

Подставим (56.11) в (55.6), (55.7), (55.8), (55.22), (55.23) и (55.24). Тогда в силу уравнений (56.4), (56.5) и (56.10) получим формулы:

$$\begin{aligned}
&T = T_0 + \frac{Eh}{R}(\psi + \overline{\psi}),\\
&M = M_0 - \frac{D(1+\mu)}{R^2}\left[(\mu + i\nu)\psi + (\mu - i\nu)\overline{\psi}\right],\\
&N = N_0 - \frac{2D}{\delta R^3}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1+i\nu)\psi + (1-i\nu)\overline{\psi}\right],
\end{aligned} \tag{56.12}$$

$$\begin{aligned}
&P = P_0 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{4Eh}{(1+\mu)R}(\chi + i\omega) + \frac{4Eh}{R}\left(\frac{\psi}{1-i\nu} + \frac{\overline{\psi}}{1+i\nu}\right)\right],\\
&Q = Q_0 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{4iD(1-\mu)}{R^2}\omega + \frac{4D(1-\mu)}{R^2}\left(\frac{\mu+i\nu}{1-i\nu}\psi + \frac{\mu-i\nu}{1+i\nu}\overline{\psi}\right)\right],\\
&U = U_0 + 2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\chi + i\omega + (1+\mu)\left(\frac{\psi}{1-i\nu} + \frac{\overline{\psi}}{1+i\nu}\right)\right],\\
&w = w_0 + \chi + \psi + \overline{\psi},
\end{aligned} \tag{56.13}$$

где T_0, M_0, N_0, P_0, Q_0, U_0 — значения T, M, N, P, Q, U, которые получаются из формул (55.7), (55.8), (55.6), (55.23), (55.24) и (55.22) соответственно, если туда подставить $\omega=0$, $w=w_0$. Таким образом, T_0, M_0, N_0, P_0, Q_0, U_0 — известные функции, которые, очевидно, зависят от компонент внешней силы, причём когда последние равны нулю, мы будем считать, что они также равны нулю.

Формулы (56.12) и (56.13), где χ — произвольное решение уравнения (56.4), а ψ — произвольное решение уравнения (56.9), дают нам общий интеграл системы уравнений тонкой сферической оболочки.

Как было уже выяснено выше, функции χ, ω, ψ однозначно определяются при помощи заданного напряжённого состояния равновесия оболочки и частного решения w_0 уравнения (55.11). Уравнения (56.4) и (56.9) будем называть *основными уравнениями сферической оболочки*.

2°. Учитывая теперь, что отношение h/R очень мало по сравнению с единицей, мы можем внести некоторые упрощения в уравнения и формулы, полученные выше.

Формулы (56.12) и (56.13) мы можем записать ещё так:

$$
\begin{gathered}
T=T_0+\frac{Eh}{R}\psi_1, \quad M=M_0-\frac{D\mu(1+\mu)}{R^2}\psi_1-\frac{D\nu(1+\mu)}{R^2}\psi_2, \\
N=N_0-\frac{2D}{\delta R^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\psi_1+\nu\psi_2), \\
P=P_0+\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{4Eh}{(1+\mu)R}(\chi+i\omega)+\right. \\
\left.+\frac{4Eh}{(1+\nu^2)R}\psi_1+\frac{4Eh\nu}{(1+\nu^2)R}\psi_2\right], \\
Q=Q_0+\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{4iD(1-\mu)}{R^2}\omega+\right. \\
\left.+\frac{4D(1-\mu)(\mu-\nu^2)}{(1+\nu^2)R^2}\psi_1+\frac{8D(1-\mu^2)\nu}{(1+\nu^2)R^2}\psi_2\right],
\end{gathered}
\tag{56.14}
$$

$$
\begin{gathered}
U=U_0+2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\chi+i\omega+\frac{1+\mu}{1+\nu^2}\psi_1+\frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu^2}\psi_2\right], \\
w=w_0+\chi+\psi_1 \qquad (\psi_1=\psi+\bar{\psi}, \quad \psi_2=i(\bar{\psi}-\psi)).
\end{gathered}
\tag{56.15}
$$

Принимая во внимание малость отношения h/R, мы можем положить

$$
\delta=1+\frac{h^2}{12R^2}\cong 1, \quad \nu\cong\frac{\rho R}{h}, \quad 1+\nu^2\cong\frac{\rho^2R^2}{h^2}, \tag{56.16}
$$

где $\rho = \sqrt{12(1-\mu^2)}$. Тогда формулы (56.14) и (56.15) примут вид:

$$
\begin{gathered}
T = T_0 + \frac{Eh}{R}\psi_1, \quad M = M_0 - \frac{E\mu h^3}{12(1-\mu)R^2}\psi_1 - \frac{(1+\mu)Eh^3}{\rho R}\psi_2, \\
N = N_0 - \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{2Eh^3}{\rho^2 R^3}\psi_1 + \frac{2Eh^2}{\rho R^2}\psi_2\right], \\
P = P_0 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{4Eh}{(1+\mu)R}(\chi + i\omega) + \frac{4Eh^3}{\rho^2 R^3}\psi_1 + \frac{4Eh^2}{\rho R^2}\psi_2\right], \\
Q = Q_0 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{iEh^3}{3(1+\mu)R^2}\omega - \frac{Eh^3}{3(1+\mu)R^2}\psi_1 + \frac{2Eh^4}{3\rho R^3}\psi_2\right],
\end{gathered} \tag{56.17}
$$

$$
\begin{gathered}
U = U_0 + 2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\chi + i\omega + \frac{(1+\mu)h^2}{\rho^2 R^2}\psi_1 + \frac{(1+\mu)h}{\rho R}\psi_2\right], \\
w = w_0 + \chi + \psi_1.
\end{gathered} \tag{56.18}
$$

Если мы теперь учтём, что

$$
1 - i\nu \cong -\frac{i\rho R}{h} \qquad (\rho = \sqrt{12(1-\mu^2)}), \tag{56.19}
$$

то для ψ вместо уравнения (56.9) можно взять уравнение

$$
\nabla^2\psi - \frac{i\rho R}{h}\psi = 0. \tag{56.20}
$$

Тогда, в силу (56.8), (56.3) и (56.1), вместо уравнения (55.11) для w получим уравнение:

$$
(\nabla^2 + 2)\left(\nabla^2\nabla^2 + \frac{12(1-\mu^2)R^2}{h^2}\right)w = Z', \tag{56.21}
$$

где, в силу (56.16),

$$
Z_0' = \frac{R^4}{D}\left[\nabla^2 Z + (1-\mu)Z - \frac{h^2}{12R^2}\nabla^2\Phi + (1-\mu)\Phi\right]. \tag{56.22}
$$

В качестве w_0 можно брать любое частное решение уравнения (56.21) и соответственно с этим вычислять T_0, M_0, N_0, P_0, Q_0, U_0 из формул (55.7), (55.8), (55.6), (55.23), (55.24) и (55.22) при $w = w_0$.

§ 57. Общее представление компонент смещения u, v, w через аналитические функции комплексной переменной. 1°. Предположим теперь, что

$$
\alpha = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \qquad \beta = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi. \tag{57.1}
$$

Тогда на основании (54.3) и (54.22) найдём:

$$
\nabla^2 = \frac{(1+\alpha^2+\beta^2)^2}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) = (1+z\zeta)^2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\zeta}, \tag{57.2}
$$

где $z=\alpha+i\beta$, $\zeta=\alpha-i\beta$. В силу (57.2) основные уравнения (56.4) и (56.9) соответственно примут вид:

$$(1+z\zeta)^2\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial\zeta}+2V=0,\quad (1+z\zeta)^2\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial\zeta}+(1-i\nu)V=0. \tag{57.3}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$(1+z\zeta)^2\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial\zeta}+n(n+1)V=0, \tag{57.4}$$

где n — некоторая комплексная постоянная; при $n=1$ мы получим первое уравнение (57.3), а при $n=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5-4i\nu})$ — второе.

В §§ 12°, 20 нами даны формулы, выражающие все решения уравнения (57.4) через аналитические функции одной комплексной переменной.

Пусть G_0 — область на поверхности сферы радиуса R, занимаемая срединной поверхностью оболочки. Пусть G — соответствующая ей область на плоскости $z=\alpha+i\beta$; очевидно, G есть стереографическая проекция области G_0 с южного полюса $\theta=\pi$ на экваториальную плоскость $\theta=\pi/2$. Мы можем без ущерба для общности считать, когда это окажется целесообразным, что начало координат ($z=0$) принадлежит области G; это равносильно предположению, что на сфере северный полюс принадлежит G_0.

Допустим, что G — односвязная область. Будем предполагать, что начало координат принадлежит G.

Так как χ и ω являются произвольными действительными решениями первого из уравнений (57.3), а ψ — произвольным (комплексным) решением второго из уравнений (57.3), то будем иметь (см. § 12°):

$$\chi=a_0P_1(\cos\theta)+\int_0^1[z\Phi_1(zt)+\zeta\overline{\Phi_1(zt)}]\,P_1[\cos\theta+(1-\cos\theta)t]\,dt, \tag{57.5}$$

$$\omega=b_0P_1(\cos\theta)+\int_0^1[z\Phi_2(zt)+\zeta\overline{\Phi_2(zt)}]\,P_1[\cos\theta+(1-\cos\theta)t]\,dt, \tag{57.6}$$

$$\psi=c_0P_n(\cos\theta)+\int_0^1[z\Phi_3(zt)+\zeta\overline{\Phi_4(zt)}]\,P_n[\cos\theta+(1-\cos\theta)t]\,dt \tag{57.7}$$

$$\left(n=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5-4i\nu})\right),$$

где $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\Phi_3(z)$, $\Phi_4(z)$ — произвольные голоморфные функции в G; далее a_0, b_0 — произвольные действительные постоянные, а c_0 — произвольная комплексная постоянная. Напомним, что здесь $\zeta = \bar{z} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}$.

Если принять во внимание, что $P_1(x) = x$, то для представления χ и ψ получим также следующие формулы:

$$\chi = [\Psi_1(z) + \overline{\Psi_1(z)}]\cos\theta + z\Psi_1'(z) + \bar{z}\,\overline{\Psi_1'(z)}, \tag{57.8}$$

$$\omega = [\Psi_2(z) + \overline{\Psi_2(z)}]\cos\theta + z\Psi_2'(z) + \bar{z}\,\overline{\Psi_2'(z)}, \tag{57.9}$$

где $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ — произвольные голоморфные функции в G_ν, которые можно подчинить условиям

$$\Psi_1(0) = \overline{\Psi_1(0)}, \quad \Psi_2(0) = \overline{\Psi_2(0)}. \tag{57.10}$$

Подставляя (57.5), (57,6), (57.7) в (56.12) и (56.13), получим выражения для компонент усилий, моментов и смещения через четыре голоморфные функции. Окончательные формулы мы здесь не выписываем; они имеются в работах автора [20], [25].

§ 58. Решение граничной задачи в случае оболочки с закреплённым краем, имеющей форму сферического сегмента.

Пусть срединная поверхность оболочки представляет собой сферический сегмент $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, где $\theta_0 < \pi$. Если компоненты внешней силы, приложенной к оболочке, — достаточно регулярные функции, то функции χ, ω, ψ можно разложить внутри этого сегмента в ряды вида (см. § 20):

$$\chi = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \Theta_{1k}(\cos\theta) e^{ik\varphi}, \quad \omega = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k \Theta_{1k}(\cos\theta) e^{ik\varphi},$$
$$\psi = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \Theta_{nk}(\cos\theta) e^{ik\varphi}. \tag{58.1}$$

Так как χ и ω — действительные функции, то должны иметь:

$$a_k = \bar{a}_{-k}, \quad b_k = \bar{b}_{-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots); \tag{58.2}$$

мы пользуемся обозначением

$$\Theta_{nk} = \Theta_{n,-k} = P_{nk}. \tag{58.3}$$

Подставляя выражения (58.1) в формулы (56.13) и принимая во внимание, что

$$(1 + z\zeta)\frac{\partial\cos\theta}{\partial\zeta} = -\sin\theta e^{i\varphi}, \quad (1 + z\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{ie^{i\varphi}}{\sin\theta},$$

получим:

$$w - w_0 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [a_k \Theta_{1k}(\cos\theta) + c_k \Theta_{nk}(\cos\theta) + \bar{c}_{-k} \Theta_{\bar{n}k}(\cos\theta)]\, e^{ik\varphi}, \qquad (58.4)$$

$$u + iv - (u_0 + iv_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [(a_k + ib_k) H_{1k} + a c_k H_{nk} + \bar{a}\bar{c}_{-k} H_{\bar{n}k}]\, e^{i(k+1)\varphi}, \qquad (58.5)$$

где приняты следующие обозначения:

$$H_{nk} = H_{nk}(\cos\theta) = -\sin\theta\, \Theta'_{nk}(\cos\theta) - \frac{k}{\sin\theta} \Theta_{nk}(\cos\theta), \quad a = \frac{1+\mu}{1-i\nu} = \frac{1+\mu}{n(n+1)}. \qquad (58.6)$$

Используем формулы (58.4) и (58.5) для решения следующей граничной задачи: *найти деформированное состояние оболочки с закреплённым краем, срединная поверхность которой совпадает со сферическим сегментом* $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $\theta_0 < \pi$.

Эта задача сводится к граничной задаче: *требуется определить компоненты вектора смещения точек оболочки при соблюдении условий*

$$u = v = w = \frac{dw}{d\theta} = 0, \quad \textit{когда} \quad \theta = \theta_0. \qquad (58.7)$$

Подставляя в эти граничные условия выражения (58.4) и (58.5), получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [(a_k + ib_k) H_{1k} + a c_k H_{nk} + \bar{a}\bar{c}_{-k} H_{\bar{n}k}]\, e^{i(k+1)\varphi} = -(u_0 + iv)_{\theta=\theta_0},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_k \Theta_{1k} + c_k \Theta_{nk} + \bar{c}_{-k} \Theta_{\bar{n}k}]\, e^{ik\varphi} = -(w_0)_{\theta=\theta_0}, \qquad (58.8)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [a_k \Theta'_{1k} + c_k \Theta'_{nk} + \bar{c}_{-k} \Theta'_{\bar{n}k}]\, e^{ik\varphi} = \frac{1}{\sin\theta_0} \left(\frac{dw_0}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0}.$$

Здесь и в дальнейшем с целью сокращения письма вместо $\Theta_{nk}(\cos\theta_0)$, $H_{nk}(\cos\theta_0)$ мы пишем просто Θ_{nk} и H_{nk}.

Разложим правые части равенств (58.8), которые являются известными функциями, в ряды Фурье; эти ряды мы можем записать в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
-(u_0+iv_0)_{\theta=\theta_0}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i(k+1)\varphi}, \qquad -(w_0)_{\theta=\theta_0}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k e^{ik\varphi}, \\
\frac{1}{\sin\theta_0}\left(\frac{dw}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} B'_k e^{ik\varphi},
\end{gathered}
\tag{58.9}
$$

причём, очевидно, $B_k=\overline{B}_{-k}$, $B'_k=\overline{B'_{-k}}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Тогда из (58.8) получим для определения a_k, b_k, c_k уравнения:

$$
\begin{gathered}
(a_k+ib_k)H_{1k}+ac_kH_{nk}+\bar{a}\bar{c}_{-k}H_{\bar{n}k}=A_k, \\
a_k\Theta_{1k}+c_k\Theta_{nk}+\bar{c}_{-k}\Theta_{\bar{n}k}=B_k \qquad (k=0, \pm 1, \ldots), \\
a_k\Theta'_{1k}+c_k\Theta'_{nk}+\bar{c}_{-k}\Theta'_{\bar{n}k}=B'_k.
\end{gathered}
\tag{58.10}
$$

В силу (58.6) и (58.2) эти уравнения при $k=0$ принимают вид:

$$
\begin{gathered}
a_0+ib_0+ac_0P'_n+\bar{a}\bar{c}_0P'_{\bar{n}}=-\frac{A_0}{\sin\theta_0}, \\
a_0\cos\theta_0+c_0P_n+\bar{c}_0P_{\bar{n}}=B_0, \qquad a_0+c_0P'_n+\bar{c}_0P'_{\bar{n}}=B'_0.
\end{gathered}
\tag{58.11}
$$

Отсюда, как нетрудно видеть, однозначно определяются a_0, b_0, c_0.

Из системы (58.10) при $k\neq 0$ получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
(a_k+ib_k)H_{1k}+ac_kH_{nk}+\bar{a}\bar{c}_{-k}H_{\bar{n}k}=A_k, \\
a_kH_{1k}+c_kH_{nk}+\bar{c}_{-k}H_{\bar{n}k}=C_k,
\end{gathered}
\tag{58.12}
$$

где

$$
C_k=-\sin\theta_0 B'_k-\frac{k}{\sin\theta_0}B_k. \tag{58.13}
$$

Из (58.12) имеем:

$$
\begin{gathered}
c_k=\frac{A_k-\bar{a}C_k}{(a-\bar{a})H_{nk}}-\frac{[(1-\bar{a})a_k+ib_k]H_{1k}}{(a-\bar{a})H_{nk}}, \\
\bar{c}_{-k}=\frac{A_k-aC_k}{(\bar{a}-a)H_{\bar{n}k}}-\frac{[(1-a)a_k+ib_k]H_{1k}}{(\bar{a}-a)H_{\bar{n}k}}.
\end{gathered}
\tag{58.14}
$$

Заменяя в последнем уравнении k через $-k$ и переходя к сопряжённому равенству, в силу (58.2) получим:

$$c_k = \frac{\overline{A}_{-k} - \overline{a}\,\overline{C}_{-k}}{(a-\overline{a})\,H_{n,-k}} - \frac{[(1-\overline{a})\,a_k - ib_k]\,H_{1,-k}}{(a-\overline{a})\,H_{n,-k}}. \qquad (58.15)$$

Приравнивая правые части (58.14_1) и (58.15), получим:

$$h_k a_k + g_k b_k = F_k, \qquad (58.16)$$

где

$$\begin{aligned} h_k &= (1-\overline{a})\,H_{1k}H_{n,-k} - (1-a)\,H_{1,-k}H_{nk}, \\ g_k &= iH_{1k}H_{n,-k} + iH_{1,-k}H_{nk}, \\ F_k &= (A_k - \overline{a}C_k)\,H_{n,-k} - (\overline{A}_{-k} - \overline{a}\overline{C}_{-k})\,H_{nk}. \end{aligned} \qquad (58.17)$$

Из (58.16) в силу (58.2) получим:

$$\overline{h}_{-k}\,a_k + \overline{g}_{-k}\,b_k = \overline{F}_{-k}. \qquad (58.18)$$

Из (58.16) и (58.18) получим:

$$a_k = \frac{F_k\overline{g}_{-k} - \overline{F}_{-k}g_k}{h_k\overline{g}_{-k} - \overline{h}_{-k}g_k}, \quad b_k = \frac{\overline{F}_{-k}h_k - F_k\overline{h}_{-k}}{h_k\overline{g}_{-k} - \overline{h}_{-k}g_k}. \qquad (58.19)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} h_k\overline{g}_{-k} - \overline{h}_{-k}g_k &= i\,(a+\overline{a}-2)\,(H_{1k}H_{1,-k}\overline{H}_{n,-k}H_{nk} - H_{nk}\overline{H}_{n,-k}) = \\ &= 2ik\,(2-a-\overline{a})\,H_{1k}H_{1,-k}\,(\Theta_{nk}\overline{\Theta}'_{nk} - \Theta'_{nk}\overline{\Theta}_{nk}) = \\ &= 4\nu k(2-a-\overline{a})H_{1k}H_{1,-k}\frac{1}{\sin\theta_0}\int_0^{\theta_0}\sin\vartheta\,\Theta_{nk}(\cos\vartheta)\,\overline{\Theta}_{nk}(\cos\vartheta)\,d\vartheta. \end{aligned} \qquad (58.20)$$

При выводе последней части этой формулы надо воспользоваться тем фактом, что $\Theta_{nk}(\cos\theta)$ является решением уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Theta_{nk}}{d\theta}\right) - \frac{k^2}{\sin^2\theta}\,\Theta_{nk} + (1-i\nu)\,\Theta_{nk} = 0. \qquad (58.21)$$

Нетрудно доказать, что

$$H_{1k}(\cos\theta) \neq 0, \quad H_{nk}(\cos\theta) \neq 0 \quad \text{при} \quad 0 < \theta < \pi$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots; \quad n(n+1) = 1 - i\nu).$$

Поэтому в силу (58.20) знаменатели формул (58.14) и (58.19) отличны от нуля при $k \neq 0$. Подставляя теперь (58.19) в первую формулу (58.14), найдём значение c_k.

Таким образом, окончательно определены коэффициенты a_k, b_k, c_k разложений (58.4) и (58.5); на доказательстве сходимости мы здесь не останавливаемся.

Рассмотрим частный случай $A_k = B_k = B'_k = 0$ при $k \neq 0$. В силу (58.18), (58.19) имеем: $a_k = b_k = c_k = 0$ при $k \neq 0$. Поэтому из (58.4), (58.5) получим:

$$w = w_0 + a_0 P_1(\cos\theta) + c_0 P_n(\cos\theta) + \bar{c}_0 P_{\bar{n}}(\cos\theta), \tag{58.22}$$

$$u + iv = u_0 + iv_0 - [a_0 + ib_0 + ac_0 P'_n(\cos\theta) + \bar{a}\bar{c}_0 P'_{\bar{n}}(\cos\theta)] \sin\theta e^{i\varphi}, \tag{58.23}$$

где a_0, b_0, c_0 являются решением уравнений (58.11).

Решение задачи будет иметь именно такой вид, если радиальная сила Z и потенциал касательных сил Ω не зависят от угла φ.

Допустим теперь, что $\Omega = 0$, $Z = \text{const}$. Тогда, очевидно, можно принять

$$w_0 = \frac{(1-\mu) R^2}{2Eh} Z, \quad u_0 = v_0 = 0. \tag{58.24}$$

Следовательно, в силу (58.9) будем иметь:

$$A_0 = B'_0 = 0, \quad B_0 = -w_0. \tag{58.25}$$

Подставляя эти значения в (58.11) и решая полученную систему, будем иметь:

$$c_0 = \frac{1-\bar{a}}{(a-\bar{a}) P'(\cos\theta_0) \Delta(\theta_0)} w_0, \quad a_0 = -\frac{w_0}{\Delta(\theta_0)}, \quad b_0 = 0, \tag{58.26}$$

где

$$\Delta(\theta) = \cos\theta + \frac{1-\bar{a}P_n(\cos\theta)}{(\bar{a}-a)P'_n(\cos\theta_0)} + \frac{1-aP_{\bar{n}}(\cos\theta)}{(a-\bar{a})P'_{\bar{n}}(\cos\theta_0)}. \tag{58.27}$$

Подставляя (58.26) в (58.22) и (58.23), получим:

$$w = \frac{w_0}{\Delta(\theta_0)} [\Delta(\theta_0) - \Delta(\theta)], \tag{58.28}$$

$$u + iv = \\ = \frac{w_0}{\Delta(\theta_0)} \left[1 + \frac{a(1-a) P'_n(\cos\theta)}{(\bar{a}-a) P'_n(\cos\theta_0)} + \frac{\bar{a}(1-a) P'_{\bar{n}}(\cos\theta)}{(a-a) P'_{\bar{n}}(\cos\theta_0)} \right] \sin\theta e^{i\varphi}. \tag{58.29}$$

§ 59. Пологая сферическая оболочка. Пусть S_0 — минимальный сферический сегмент, внутри которого лежит срединная поверхность G_0 данной сферической оболочки. Пусть d — диаметр основания S_0, а l — его высота.

Если отношение l/d достаточно мало по сравнению с единицей, то оболочку будем называть *пологой*. Например, Е. Рейснер [1] считает оболочку пологой, если $l/d < {}^1/_8$, что равносильно условию: $\theta_0 < 28^\circ$, где θ_0 — угловое расстояние от центра сегмента S_0 до его края. При выполнении этого условия мы можем с достаточной точностью считать, что $A = 2$. Тогда

$$\nabla^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\zeta}, \tag{59.1}$$

и основные уравнения (56.4) и (56.9) примут соответственно вид:

$$\Delta v + 8v = 0, \quad \Delta v + 4(1 - i\nu)\,v = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right). \tag{59.2}$$

Кроме того, мы можем положить $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \cong \frac{\theta}{2}$. Следовательно, в дальнейшем мы будем считать

$$\alpha = \frac{\theta}{2}\cos\varphi, \quad \beta = \frac{\theta}{2}\sin\varphi, \quad z = \frac{\theta}{2}e^{i\varphi}.$$

При $A = 2$ формулы (56.12) и (56.13) примут вид:

$$\begin{gathered}
\mathcal{T} = T_0 + \frac{Eh}{R}(\psi + \overline{\psi}),\\
M = M_0 - \frac{D(1+\mu)}{R^2}\left[(\mu + i\nu)\psi + (\mu - i\nu)\overline{\psi}\right],\\
N_1 + iN_2 = N_1^0 + iN_2^0 - \frac{D}{\delta R^3}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1 + i\nu)\psi + (1 - i\nu)\overline{\psi}\right],\\
P = P_0 + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{Eh}{(1+\mu)R}(\chi + i\omega) + \frac{Eh}{R}\left(\frac{\psi}{1 - i\nu} + \frac{\overline{\psi}}{1 + i\nu}\right)\right],\\
Q = Q_0 + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{iD(1-\mu)}{R^2}\omega + \frac{D(1-\mu)}{R^2}\left(\frac{\mu + i\nu}{1 - i\nu}\psi + \frac{\mu - i\nu}{1 + i\nu}\overline{\psi}\right)\right],\\
u + iv = u_0 + iv_0 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\chi + i\omega + \frac{1+\mu}{1 - i\nu}\psi + \frac{1+\mu}{1 + i\nu}\overline{\psi}\right),\\
w = w_0 + \chi + \psi + \overline{\psi},
\end{gathered} \tag{59.3}$$

где χ, ω — произвольные действительные решения первого уравнения (59.2), а ψ — произвольное решение второго уравнения (59.2).

Уравнения (59.2) имеют вид:

$$\Delta v + (2\lambda)^2 v = 0 \qquad (\lambda = \text{const.}); \tag{59.4}$$

общее решение этого уравнения даётся формулой (см. §§ 12*, 19):

$$v = a_0 J_0(\lambda\theta) + \int_0^1 [z\Phi(zt) + \bar{z}\Phi^*(\bar{z}t)]\, J_0\left(\lambda\theta\sqrt{1-t}\right) dt, \tag{59.5}$$

где $z = \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$, $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$ — произвольные голоморфные функции в G и $\overline{G}$ соответственно, причём G — стереографическая проекция G_0 на экваториальную плоскость; ради простоты мы считаем, что G — односвязная область, содержащая начало координат. Учитывая пологость оболочки, можно положить $J_0(\sqrt{2}\,\theta) \cong 1$. Поэтому на основании (59.5) общее решение уравнения (59.4) в случае $\lambda^2 = 2$ будет иметь вид:

$$v = a_0 + \int_0^1 [z\Phi(zt) + \bar{z}\Phi^*(\bar{z}t)]\, dt. \tag{59.6}$$

Но это выражение есть гармоническая функция. Следовательно, в случае пологой оболочки первое уравнение (59.2) можно заменить уравнением Лапласа $\Delta v = 0$, а функции χ, ω, входящие в формулы (59.3), можно считать гармоническими функциями переменных α, β.

Ввиду малости числа h/R, можно положить

$$4(1 - i\nu) \cong -\frac{i4\rho R}{h} \qquad \left(\rho = \sqrt{12(1-\mu^2)}\right). \tag{59.7}$$

Поэтому уравнение для ψ примет вид:

$$\Delta\psi - \frac{4i\rho R}{h}\psi = 0. \tag{59.8}$$

В силу последней формулы (59.3) для w имеем уравнение:

$$\Delta\left(\Delta\Delta + \frac{192(1-\mu^2)R^2}{h^2}\right) w = Z_0, \tag{59.9}$$

где

$$Z_0 = \frac{16R^4}{D}\left[\Delta Z + 4(1-\mu)Z - \frac{h^2}{12R^2}\Delta\Phi + 4(1-\mu)\Phi\right]. \tag{59.10}$$

Уравнение (59.9) было получено иным путём ещё В. З. Власовым [1], [2]; оно встречается также у Е. Рейснера [1].

В случае пологой оболочки формулы (56.17) и (56.18) принимают вид:

$$
\begin{gathered}
T=T_0+\frac{Eh}{R}\psi_1,\\
M=M_0-\frac{E\mu h^3}{12(1-\mu)R^2}\psi_1-\sqrt{\frac{1+\mu}{12(1-\mu)}}\frac{Eh^2}{R}\psi_2,\\
N_1+iN_2=\\
=N_1^0+iN_2^0-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)R^3}\psi_1+\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}R^2}\psi_2\right],\\
P=P_0+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{Eh}{(1+\mu)R}(\chi+i\omega)+\right.\\
\left.+\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)R^3}\psi_1+\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}R^2}\psi_2\right], \qquad (59.11)\\
Q=Q_0+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{iEh^3}{12(1+\mu)R^2}\omega-\right.\\
\left.-\frac{Eh^3}{12(1+\mu)R^2}\psi_1+\frac{Eh^4}{12\sqrt{3(1-\mu^2)}R^3}\psi_2\right],\\
u+iv=u_0+iv_0+\\
+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\chi+i\omega+\frac{h^2}{12(1-\mu^2)R^2}\psi_1+\sqrt{\frac{1+\mu}{12(1-\mu)}}\frac{h}{R}\psi_2\right),\\
w=w_0+\chi+\psi_1,
\end{gathered}
$$

где w_0 — частное решение уравнения (59.9), χ и ω — произвольные гармонические функции, $\psi_1=\psi+\overline{\psi}$, $\psi_2=i(\psi-\overline{\psi})$, причём ψ — произвольное решение второго уравнения (59.2). Функции χ, ω, ψ можно теперь представить в виде (см. §§ 12*, 19) [1]):

$$
\chi=\Phi_1(z)+\overline{\Phi_1(z)},\qquad \omega=\Phi_2(z)+\overline{\Phi_2(z)}, \qquad (59.12)
$$

$$
\psi=a_0J_0(\lambda\theta)+\int_0^1[z\Phi_3(zt)+\overline{z\Phi_4(zt)}]\,J_0\left(\lambda\theta\sqrt{1-t}\right)dt, \qquad (59.13)
$$

$$
\left(\lambda=i\sqrt{i}\sqrt{\frac{\rho R}{h}},\ \rho=\sqrt{12(1-\mu^2)}\right),
$$

где a_0 — произвольная постоянная, Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 — произвольные голоморфные функции, причём мы можем без ущерба для общности подчинить Φ_1 и Φ_2 условиям:

$$
\Phi_1(0)=\overline{\Phi_1(0)},\qquad \Phi_2(0)=\overline{\Phi_2(0)}. \qquad (59.14)
$$

---

[1]) В зависимости от формы оболочки мы можем представить общее решение уравнения (59.8) также другими формулами, которые в некоторых случаях могут оказаться более удобными для решения граничных задач (см. работы автора [16], [17]).

Подставляя (59.12), (59.13) в формулы (59.3), получим выражение усилий, моментов и смещений через четыре произвольные голоморфные функции $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$.

§ 60. Решение граничной задачи в случае пологой оболочки с закреплённым краем, имеющей форму сферического сегмента. Пусть имеется сегмент $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, где θ_0 — достаточно малый угол. Внутри этого сегмента функции χ, ω, ψ, в силу (59.12) и (59.13), можно представить рядами:

$$\chi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f_n(\theta) e^{in\varphi}, \qquad \omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n f_n(\theta) e^{in\varphi},$$
$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(\lambda\theta) e^{in\varphi}, \qquad \left(\lambda = i\sqrt{i}\sqrt{\frac{\rho R}{h}}\right), \tag{60.1}$$

где $f_n(\theta) = f_{-n}(\theta) = \theta^n$, a_n и b_n удовлетворяют условиям:

$$a_n = \bar{a}_{-n}, \qquad b_n = \bar{b}_{-n}. \tag{60.2}$$

Принимая теперь во внимание, что

$$e^{-i\varphi}\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{60.3}$$

при помощи последних двух формул (59.3) легко получим разложения:

$$e^{-i\varphi}(u+iv) = e^{-i\varphi}(u_0+iv_0) +$$
$$+\sum_{-\infty}^{\infty}\left[(a_n+ib_n)f_n^*(\theta) - a\lambda c_n J_{n+1}(\lambda\theta) - (-1)^n \bar{a}\bar{\lambda}\bar{c}_n J_{n+1}(\bar{\lambda}\theta)\right]e^{in\varphi},$$

$$w = w_0 + \sum_{-\infty}^{\infty}\left[a_n f_n(\theta) + c_n J_n(\lambda\theta) + (-1)^n \bar{c}_{-n} J_n(\bar{\lambda}\theta)\right]e^{in\varphi}, \tag{60.4}$$

где

$$f_n^* = f_n'(\theta) - \frac{n}{\theta} f_n(\theta), \qquad a = (1+\mu)(1-i\nu).$$

Из граничных условий

$$u = v = w = \frac{dw}{d\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0 \tag{60.5}$$

получим системы уравнений:

$$
\begin{gathered}
(a_n+ib_n)f_n^*(\theta_0)-a\lambda c_nJ_{n+1}(\lambda\theta_0)-(-1)^n\bar{a}\bar{\lambda}\bar{c}_{-n}J_{n+1}(\bar{\lambda}\theta_0)=A_n,\\
a_nf_n(\theta_0)+c_nJ_n(\lambda\theta_0)+(-1)^n\bar{c}_{-n}J_n(\bar{\lambda}\theta_0)=B_n,\\
a_nf_n'(\theta_0)+\lambda c_nJ_n'(\lambda\theta_0)+(-1)^n\bar{\lambda}\bar{c}_{-n}J_n'(\bar{\lambda}\theta_0)=B_n'.
\end{gathered}
\tag{60.6}
$$

Нетрудно видеть, что из этой системы определяются все коэффициенты a_n, b_n, c_n, за исключением b_0. Но это ясно, так как добавление постоянной к функции ω не меняет компонент смещения u, v. Поэтому можно положить $b_0=0$.

Рассмотрим случай, когда $A_n=B_n=B_n'=0$ при $n\neq 0$. Тогда, очевидно, все a_n, b_n, c_n также равны нулю при $n\neq 0$. Следовательно, разложения (60.4) примут вид:

$$
\begin{gathered}
u+iv=u_0+iv_0-e^{i\varphi}[a\lambda c_0J_1(\lambda\theta)+\bar{a}\bar{\lambda}\bar{c}_0J_n(\bar{\lambda}\theta)],\\
w=w_0+a_0+c_0J_0(\lambda\theta)+\bar{c}_0J_0(\bar{\lambda}\theta).
\end{gathered}
\tag{60.7}
$$

Такой вид будут иметь u, v, w, если объёмные касательные силы отсутствуют и радиальная сила Z не зависит от угла φ. Положим, в частности, $Z=\text{const}$. Тогда уравнение (59.9) будет иметь вид:

$$
\left(\Delta\Delta+\frac{192(1-\mu^2)R^2}{h^2}\right)\Delta w=\frac{64R^4Z(1-\mu)}{D}. \tag{60.8}
$$

Поэтому в качестве w_0 можно взять функцию

$$
w_0=\frac{(1-\mu)R^2Z}{4Eh}\theta^2. \tag{60.9}
$$

Кроме того, можно считать, что $u_0=v_0=0$. Поэтому имеем:

$$
A_0=0, \quad B_0=-\frac{(1-\mu)R^2Z\theta_0^2}{4Eh}, \quad B_0'=\frac{2B_0}{\theta_0}. \tag{60.10}
$$

При этих значениях A_0, B_0, B_0' из системы (60.6) при $n=0$ получим (надо учесть, что $f_0^*=0$):

$$
\begin{gathered}
c_0=\frac{2\bar{a}B_0}{(a-\bar{a})\lambda\theta_0J_1(\lambda\theta_0)},\\
a_0=B_0\left[1-\frac{2\bar{a}J_0(\lambda\theta_0)}{(a-\bar{a})\lambda\theta_0J_1(\lambda\theta_0)}-\frac{2aJ_0(\bar{\lambda}\theta_0)}{(a-\bar{a})\bar{\lambda}\theta_0J_1(\bar{\lambda}\theta_0)}\right].
\end{gathered}
\tag{60.11}
$$

Прогиб в точке $\theta = 0$ (максимальный прогиб), очевидно, будет равен

$$(w)_{\theta=0} = B_0\left[1 + \frac{1 - J_0(\lambda\theta_0)}{\lambda\theta_0 J_1(\lambda\theta_0)}\,\frac{2\bar{a}}{a - \bar{a}} + \frac{1 - J_0(\bar{\lambda}\theta_0)}{\bar{\lambda}\theta_0 J_1(\bar{\lambda}\theta_0)}\,\frac{2a}{\bar{a} - a}\right]. \quad (60.12)$$

Пусть $\lambda\theta_0 = i\sqrt{i}\,\theta_0\sqrt{\frac{\rho R}{h}}$ — по модулю большое число. Тогда можно воспользоваться асимптотическими формулами:

$$J_0(\lambda\theta_0) \cong \frac{e^{-i\left(\lambda\theta_0 - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi\lambda\theta_0}}, \quad J_1(\lambda\theta_0) \cong \frac{e^{-i\left(\lambda\theta_0 - \frac{3\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi\lambda\theta_0}}; \quad (60.13)$$

мы можем также положить

$$\frac{2\bar{a}}{a - \bar{a}} \cong \frac{2a}{\bar{a} - a} \cong -1.$$

Следовательно, мы будем иметь следующие приближённые равенства:

$$\left.\begin{aligned} c_0 &\cong B_0\sqrt{\frac{\pi\sqrt{2}}{\alpha}}\,e^{-\alpha}e^{-i\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right)}, \\ a_0 &\cong B_0\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), \\ (w)_{\theta=0} &= B_0\left[1 - \frac{1}{\alpha} + 2\sqrt{\frac{\pi\sqrt{2}}{\alpha}}\,e^{-\alpha}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right)\right], \end{aligned}\right\} \quad (60.14)$$

где

$$\alpha = \theta_0\sqrt{\frac{R\sqrt{3(1-\mu^2)}}{h}}. \quad (60.15)$$

Очевидно, α — безразмерная величина.

IV. ПРИМЕНЕНИЯ К ТЕОРИИ ПОЛОГИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

В этом разделе мы изучим вопросы интегрирования уравнений так называемых пологих упругих оболочек.

§ 61. Основная система уравнений. Теория тонких достаточно пологих упругих оболочек приводит к следующей системе дифференциальных уравнений (см. Власов [1], [2]):

$$\nabla^2\nabla^2\varphi - Eh\Delta w = 0, \quad \nabla^2\nabla^2 w + \frac{1}{D}\Delta\varphi = \frac{1}{D}Z. \quad (61.1)$$

Здесь E — модуль Юнга, h — толщина оболочки, D — цилиндрическая жёсткость ($D = Eh^3/12(1-\mu^2)$), μ — коэффициент Пуассона).

Z — объёмная сила, действующая перпендикулярно к срединной поверхности оболочки (предполагается, что касательные компоненты объёмных сил равны нулю), φ — функция напряжений, при помощи которой выражаются компоненты усилий и моментов, а w — нормальное перемещение точек срединной поверхности; операторы ∇^2, Δ имеют следующий вид:

$$\nabla^2 = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right], \tag{61.2}$$

$$\Delta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}k_2\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}k_1\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right], \tag{61.3}$$

где $A=A(\alpha,\beta)$, $B=B(\alpha,\beta)$ обозначают коэффициенты квадрата линейного элемента срединной поверхности, причём α, β — криволинейные координаты на этой поверхности, совпадающие с линиями кривизны: $k_1=k_1(\alpha,\beta)$, $k_2=k_2(\alpha,\beta)$ — главные кривизны, соответствующие линиям $\beta=\text{const.}$ и $\alpha=\text{const.}$

Введём теперь в рассмотрение следующую комплексную функцию:

$$V = \quad + \frac{i\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2}\varphi. \tag{61.4}$$

Тогда, как нетрудно проверить, система двух действительных уравнений (61.1) приводится к одному комплексному уравнению:

$$\nabla^2\nabla^2 V - \frac{i\sqrt{12(1-\mu^2)}}{h}\Delta V = \frac{1}{D}Z, \tag{61.5}$$

причём первоначальные функции w, φ будут выражаться через V так:

$$w = \frac{V+\overline{V}}{2}, \qquad \varphi = \frac{Eh^2(V-\overline{V})}{2i\sqrt{12(1-\mu^2)}}. \tag{61.6}$$

§ 62. Приведение уравнения (61.5) к интегральному уравнению типа Вольтерра в комплексной области. Введём на срединной поверхности оболочки вместо криволинейных координат α, β некоторую изотермическую систему координат ξ, η. Тогда оператор ∇^2, как известно (см., например, Бляшке [1], стр. 196), выразится так:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\lambda(\xi,\eta)}\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right], \tag{62.1}$$

где $\lambda(\xi,\eta)$ — положительная функция точки срединной поверхности, которая является решением уравнения (Гаусса)

$$\frac{\partial^2 \lg \lambda}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \lg \lambda}{\partial \eta^2}=-2K\lambda, \tag{62.2}$$

причём K — гауссова кривизна.

Оператор ∇^2 мы можем также записать в виде:

$$\nabla^2=\frac{4}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \zeta}, \tag{62.3}$$

где $z=\xi+i\eta$, $\zeta=\xi-i\eta$.

В силу этой формулы уравнение (61.5) запишется так:

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \zeta}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial \zeta}-i\varepsilon\lambda\Delta V=\frac{\lambda}{16D}Z \tag{62.4}$$

$$\left(\varepsilon=\frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{8h}\right).$$

Что же касается оператора $\lambda\Lambda$, то его мы можем записать в виде:

$$\lambda\Delta V=\frac{\partial^2 aV}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 bV}{\partial z\,\partial \zeta}+\frac{\partial^2 cV}{\partial \zeta^2}+\frac{\partial dV}{\partial z}+\frac{\partial eV}{\partial \zeta}+fu, \tag{62.5}$$

где a, b, c, d, e, f — заданные функции точки поверхности; их нетрудно выразить в явном виде через λ, A, B, k_1, k_2.

Пусть T — область на плоскости $z=\xi+i\eta$, которая соответствует срединной поверхности оболочки. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением того случая, когда область T односвязна.

Во всём дальнейшем мы будем предполагать, что λ, a, b, c, d, e, f, а также Z — аналитические функции двух комплексных переменных z, ζ в области ($z\in T$, $\zeta\in\overline{T}$). Конечно, это предположение ограничивает класс рассматриваемых поверхностей, но всё же большинство тех поверхностей, которые представляют интерес для практики, принадлежит к рассматриваемому нами классу; таковыми являются, в частности, алгебраические поверхности второго порядка.

Пусть V — некоторое регулярное в области T решение уравнения (61.5), т. е. решение, непрерывное вместе со своими частными производными порядка $\leqslant 4$ в области T. Согласно теореме § 9 это решение будет аналитической функцией переменных ξ, η в области T; продолжая его аналитически в область комплексных значений переменных ξ, η, получим аналитическую функцию двух комплексных переменных z, ζ в области ($z\in T$, $\zeta\in\overline{T}$).

Переходим теперь к выводу общей формулы, дающей все регулярные в T решения уравнения (61.5).

В силу (62.5) уравнение (62.4) мы можем записать так:

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\zeta}\left\{\frac{1}{\lambda(z,\zeta)}\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial\zeta} - i\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\zeta a(z,\tau)V(z,\tau)\,d\tau + \right.\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_0^z c(t,\zeta)V(t,\zeta)\,dt + b(z,\zeta)V(z,\zeta) + \int_0^\zeta d(z,\tau)V(z,\tau)\,d\tau +$$

$$\left. + \int_0^z e(t,\zeta)V(t,\zeta)\,dt + \int_0^z dt\int_0^\zeta f(t,\tau)V(t,\tau)\,d\tau\right] -$$

$$\left. - \frac{1}{16D}\int_0^z dt\int_0^\zeta \lambda(t,\tau)Z(t,\tau)\,d\tau\right\} = 0. \qquad (62.6)$$

Отсюда имеем:

$$\frac{1}{\lambda(z,\zeta)}\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial\zeta} - i\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\zeta a(z,\tau)V(z,\tau)\,d\tau + \frac{\partial}{\partial\zeta}\int_0^z c(t,\zeta)V(t,\zeta)\,dt + \right.$$

$$+ b(z,\zeta)V(z,\zeta) + \int_0^\zeta d(z,\tau)V(z,\tau)\,d\tau + \int_0^z e(t,\zeta)V(t,\zeta)\,dt +$$

$$\left. + \int_0^z dt\int_0^\zeta f(t,\tau)V(t,\tau)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{16D}\int_0^z dt\int_0^\zeta \lambda(t,\tau)Z(t,\tau)\,d\tau + \varphi_0(z) + \varphi_0^*(\zeta), \qquad (62.7)$$

где $\varphi_0(z)$, $\varphi_0^*(\zeta)$ — голоморфные функции в $\mathcal{T}$, $\overline{\mathcal{T}}$ соответственно; эти функции определяются однозначно при помощи функции V, если их подчинить условию

$$\varphi_0(0) = \overline{\varphi_0^*(0)}; \qquad (62.8)$$

мы предполагаем, что начало координат принадлежит $\mathcal{T}$; это, конечно, не ограничивает общности рассуждений.

Умножая обе части уравнения (62.7) на $\lambda(z,\zeta)$ и принимая во внимание тождества

$$\lambda(z,\zeta)\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\zeta a(z,\tau)V(z,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\int_0^\zeta \lambda(z,\zeta)a(z,\tau)V(z,\tau)\,d\tau - \int_0^\zeta \frac{\partial\lambda(z,\zeta)}{\partial z}a(z,\tau)V(z,\tau)\,d\tau,$$

$$\lambda(z, \zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_0^z c(t, \zeta)V(t, \zeta)\,dt =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\zeta}\int_0^z \lambda(z, \zeta)c(t, \zeta)V(t, \zeta)\,dt - \int_0^z \frac{\partial\lambda(z, \zeta)}{\partial\zeta}c(t, \zeta)V(t, \zeta)\,dt,$$

уравнение (62.7) можно записать так:

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\zeta}\Big\{V(z, \zeta) - i\varepsilon\Big[\int_0^z K_1(z, \zeta, t)V(t, \zeta)\,dt +$$

$$+ \int_0^\zeta K_2(\zeta, z, \tau)V(z, \tau)\,d\tau + \int_0^z dt\int_0^\zeta K(z, \zeta, t, \tau)V(t, \tau)\,d\tau - Z_0(z, \zeta) -$$

$$- \int_0^z dt\int_0^\zeta \lambda(t, \tau)[\varphi_0(t) + \varphi_0^*(\tau)]\,d\tau\Big\} = 0, \qquad (62.9)$$

где

$$K_1(z, \zeta, t) = c(t, \zeta)\int_t^z \lambda(t_1, \zeta)\,dt_1, \quad K_2(\zeta, z, \tau) = a(z, \tau)\int_\tau^\zeta \lambda(z, \tau_1)\,d\tau_1,$$

$$K(z, \zeta, t, \tau) = \lambda(t, \tau)b(t, \tau) +$$

$$+ \int_\tau^\zeta\Big[d(t, \tau)\lambda(t, \tau_1) - a(t, \tau)\frac{\partial\lambda(t, \tau_1)}{\partial t}\Big]d\tau_1 +$$

$$+ \int_t^z\Big[e(t, \tau)\lambda(t_1, \tau) - c(t, \tau)\frac{\partial\lambda(t_1, \tau)}{\partial\tau}\Big]dt_1 +$$

$$+ f(t, \tau)\int_t^z dt_1\int_\tau^\zeta \lambda(t_1, \tau_1)\,d\tau_1, \qquad (62.10)$$

$$Z_0(z, \zeta) = \frac{1}{16D}\int_0^z dt\int_0^\zeta \lambda(t, \tau)Z(t, \tau)\,d\tau\int_t^z dt_1\int_\tau^\zeta \lambda(t_1, \tau_1)\,dt_1. \qquad (62.11)$$

Как видно, функции K_1, K_2, K зависят лишь от формы срединной поверхности и не зависят ни от толщины, ни от физических свойств оболочки.

Из (62.9) получим:

$$V(z, \zeta) - i\varepsilon\Big[\int_0^z K_1(z, \zeta, t)V(t, \zeta)\,dt + \int_0^\zeta K_2(\zeta, z, \tau)V(z, \tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^z dt\int_0^\zeta K(z, \zeta, t, \tau)V(t, \tau)\,d\tau\Big] = Z_0(z, \zeta) + U_0(z, \zeta), \qquad (62.12)$$

где

$$U_0(z, \zeta) =$$

$$= \varphi_1(z) + \varphi_1^*(\zeta) + \int\limits_0^z \lambda_1(\zeta, t)\,\varphi_0(t)\,dt + \int\limits_0^\zeta \lambda_1^*(z, \tau)\,\varphi_0^*(\tau)\,d\tau, \tag{62.13}$$

причём

$$\lambda_1(z, \zeta) = \int\limits_0^\zeta \lambda(z, \tau)\,d\tau, \qquad \lambda_1^*(z, \zeta) = \int\limits_0^z \lambda(t, \zeta)\,dt; \tag{62.14}$$

функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_1^*(\zeta)$ голоморфны в T, $\overline{T}$ соответственно; их можно подчинить условию

$$\varphi_1(0) = \varphi_1^*(0). \tag{62.15}$$

Уравнение (62.12), которое представляет собой интегральное уравнение типа Вольтерра в комплексной области, можно решить методом последовательных приближений, причём решение $V(z, \zeta)$, которое всегда существует, является аналитической функцией двух комплексных переменных z, ζ в области $(T, \overline{T})$; это решение, очевидно, содержит четыре произвольные голоморфные функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_0^*(\zeta)$, $\varphi_1(z)$, $\varphi_1^*(\zeta)$, которые, как уже было сказано выше, можно подчинить условиям (62.8), (62.15). Если в найденном решении $V(z, \zeta)$ аргументы z, ζ заменить через $\xi + i\eta$, $\xi - i\eta$ соответственно, то получим функцию двух действительных переменных ξ, η, при помощи которой по формулам (61.6) мы сразу выразим искомые функции w, φ.

При решении интегрального уравнения (62.12) надо учесть степень пологости оболочки и следует отбросить несущественные малые члены в выражениях (62.10), (62.11) и (62.13). Этим путём часто можно достигнуть заметных упрощений, не отступая существенным образом от истинного значения искомой функции. Такие упрощения систематически надо делать в процессе решения уравнения (61.5) с целью получить возможность найти искомое решение в явном виде при помощи элементарных или специальных функций, помня, что с самого начала мы оперируем с приближёнными уравнениями, и не имеет большого смысла искать точные их решения. Вообще надо заметить, что при выводе уравнений (61.1), повидимому, не до конца учтена «пологость» оболочки в выражениях операторов ∇ и Δ; это видно хотя бы из рассмотрения уравнений сферической оболочки (см. следующий параграф). В случае весьма пологой оболочки, повидимому, можно считать λ, a, b, c, d, e, f постоянными. Тогда, как нетрудно видеть, уравнение (62.4) можно проинтегрировать в явном виде, т. е. его общий интеграл выразится при помощи элементарных специальных функций.

В следующем параграфе мы рассмотрим в качестве примера случаи сферической и цилиндрической оболочек. Тогда решения можно выразить в явном виде через голоморфные функции.

§ 63. Сферическая и цилиндрическая оболочки. 1°. В случае сферической оболочки $k_1=k_2=\frac{1}{R}=\text{const.}$, где R—радиус сферы. Тогда уравнение (61.5), как видно из (61.3), примет вид:

$$\nabla^2\left(\nabla^2 V-\frac{i\sqrt{12(1-\mu^2)}}{hR}V\right)=\frac{Z}{D}. \tag{63.1}$$

На сфере в качестве координат α, β мы можем взять

$$\alpha=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \qquad \beta=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi, \tag{63.2}$$

где θ, φ — географические координаты точки: $0\leqslant\varphi<2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Тогда оператор ∇^2 принимает вид:

$$\nabla^2=\frac{(1+\alpha^2+\beta^2)^2}{4R^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)=\frac{(1+z\zeta)^2}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\zeta} \tag{63.3}$$

$$\left(z=\alpha+i\beta=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{i\varphi},\quad \zeta=\bar z\right).$$

Но так как оболочка предполагается пологой, то мы можем считать $\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\cong 0, \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cong\frac{\theta}{2}$. Поэтому будем иметь:

$$\nabla^2=\frac{1}{4R^2}\Delta, \qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$$
$$\left(\alpha=\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \quad \beta=\frac{\theta}{2}\sin\varphi\right). \tag{63.4}$$

Следовательно, уравнение (63.1) примет вид

$$\Delta\left(\Delta-\frac{4i\sqrt{12(1-\mu^2)}\,R}{h}\right)V=\frac{16R^4Z}{D}. \tag{63.5}$$

Это уравнение мы получили иным путём в § 59. Общее решение его имеет вид:

$$V=V_0+V_1+V_2, \tag{63.6}$$

где V_0 — частное решение, а V_1 и V_2 — произвольные решения уравнений

$$\Delta V_1=0, \qquad \Delta V_2-\frac{4i\sqrt{12(1-\mu^2)}R}{h}V_2=0. \tag{63.7}$$

Следовательно, V_1 и V_2 мы можем представить так:

$$V_1=\Phi_1(z)+\overline{\Phi_2(z)}, \tag{63.8}$$

$$V_2=a_0J_0(\lambda\theta)+\int_0^1[z\Phi_3(zt)+\bar{z}\,\overline{\Phi_4(zt)}]\,J_0(\lambda\theta\sqrt{1-t})\,dt, \tag{63.9}$$

где a_0 — произвольная постоянная, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\Phi_3(z)$, $\Phi_4(z)$ — произвольные голоморфные функции:

$$z=\frac{\theta}{2}e^{i\varphi},\quad \lambda=i\sqrt{i}\sqrt{\frac{\rho R}{h}},\quad \rho=\sqrt{12(1-\mu^2)}.$$

Частное решение V_0 уравнения (63.5) можно построить при помощи формулы

$$V_0=\frac{16R^4}{D}\int_0^z dt\int_0^{\zeta} Z(t,\ \tau)\,[1-J_0(\lambda\sqrt{(z-t)(\bar{z}-\tau)}]\,d\tau. \tag{63.10}$$

2°. В случае круговой цилиндрической оболочки имеем: $k_1=0$, $k_2=\frac{1}{R}=\mathrm{const}$. Тогда, полагая $Z=0$, приведём уравнение (61.5) к виду:

$$\Delta\Delta V-\frac{i\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Rh}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0 \tag{63.11}$$

$$\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right).$$

Это уравнение можно записать ещё так:

$$\left(\Delta-2k\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left(\Delta+2k\frac{\partial}{\partial x}\right)V=0 \tag{63.12}$$

$$\left(k=\sqrt{i}\,\frac{\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}{2\sqrt{Rh}}\right).$$

Докажем теперь, что общее решение последнего уравнения имеет вид

$$V=V_1+V_2, \tag{63.13}$$

где V_1 и V_2 удовлетворяют уравнениям

$$\Delta V_1-2k\frac{\partial V_1}{\partial\alpha}=0,\quad \Delta V_2+2k\frac{\partial V_2}{\partial x}=0. \tag{63.14}$$

Из (63.12) имеем:

$$\left(\Delta+2k\frac{\partial}{\partial x}\right)V=V_0, \tag{63.15}$$

где V_0 — решение первого уравнения (63.14). Легко можно проверить, что частным решением уравнения (63.15) будет

$$V_1^* = \frac{1}{4k}\int_0^\alpha V_0(\sigma, \beta)\,d\sigma + \\ + \frac{1}{4k}\int_0^\beta (\beta-\tau)\left[2kV_0(0, \tau) - \left(\frac{\partial V_0(\alpha, \tau)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}\right]d\tau, \tag{63.16}$$

причём V_1 удовлетворяет также первому уравнению (63.14). Следовательно, имеем: $V = V_1 + V_2$, где V_2 — решение второго уравнения (63.14), что и требовалось доказать. Пусть

$$V_1 = e^{k\alpha}\psi_1, \quad V_2 = e^{-k\alpha}\psi_2. \tag{63.17}$$

Тогда легко видеть, что ψ_1, ψ_2 удовлетворяют уравнению

$$\Delta\psi - k^2\psi = 0 \quad \left(k^2 = \frac{i\sqrt{12(1-\mu^2)}}{4Rh}\right). \tag{63.18}$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде (см. §§ 12°, 19):

$$\psi = a_0 I_0(kr) + \int_0^1 [z\,\Phi(zt) + \bar{z}\,\overline{\Phi^*(zt)}]\, I_0(kr\sqrt{1-t})\,dt, \tag{63.19}$$

где $z = \alpha + i\beta$, $r = |z|$, a_0 — любая постоянная, Φ, Φ^* — любые голоморфные функции, I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента.

В силу формул (63.19), (63.17) и (63.13) мы можем выразить V через четыре произвольные голоморфные функции.

Из (63.19), в силу (63.17) и (63.13), получим следующую (полную) систему решений уравнения (63.11):

$$e^{k_0\alpha}(D_n(k_0 r) + iT_n(k_0 r))\, e^{i(k_0\alpha \pm n\varphi)}, \tag{63.20}$$

$$e^{-k_0\alpha}[D_n(k_0 r) + iT_n(k_0 r)]\, e^{-i(k_0\alpha \pm n\varphi)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $k_0 = \sqrt[4]{12(1-\mu^2)}\,/\,2\sqrt{Rh}$, $\varphi = \arg z$, D_n и T_n — функции, заданные формулами (37.33).

ДОБАВЛЕНИЕ

О представлении решений уравнения (E_0) при помощи функции Грина и их поведении в замкнутых областях

В § 24 главы III мы ввели понятие функции Грина и без доказательства написали формулу (24.36), которой воспользовались для вывода теорем 1, 2 того же параграфа. В настоящем добавлении будет дан вывод формулы (24.36) и в связи с этим будет доказано несколько предложений о поведении решений уравнения (E_0) в замкнутых областях. Простоты ради, мы ограничимся рассмотрением односвязных областей, так как без особого труда можно распространить нижеприведённые предложения на случай многосвязной области.

1°. Теорема 1. *Пусть T — односвязная область класса Ah* (см. § 1, n° 4), *принадлежащая некоторой основной области $\mathfrak{D}$ уравнения*

$$E(u) = \Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\, u = 0. \qquad (E_0)$$

Пусть L — граница области T. Если граничное значение $u^+(t)$ ($t \in L$) регулярного в T решения $u(x, y)$ уравнения (E_0) имеет вдоль L непрерывную в смысле Гельдера производную по дуге, то голоморфная в T функция $\varphi(z)$, при помощи которой $u(x, y)$ выражается в области T в виде:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left\{H_0(z)\,\varphi(z) + \int_{z_0}^{z} H(z, t)\,\varphi(t)\,dt\right\}, \qquad (1)$$

где z_0 — фиксированная точка в T,

$$H_0(z) = G(z, \bar{z}_0, z, \bar{z}),$$

$$H(z, t) = -\frac{\partial}{\partial t} G(t, \bar{z}_0, z, \bar{z}) + B(t, \bar{z}_0)\, G(t, \bar{z}_0, z, \bar{z}), \qquad (2)$$

имеет производную $\varphi'(z)$, непрерывную в смысле Гельдера в $T + L$.

Доказательство. Согласно теореме 3 § 22 функция $\varphi(z)$ непрерывна в смысле Гельдера в $T+L$. Поэтому функция

$$\int_{z_0}^{z} \varphi(t) H(z, t) dt \tag{3}$$

будет иметь непрерывные в смысле Гельдера частные производные первого порядка в $T+L$. На основании (1) $\varphi(z)$ является решением следующей граничной задачи:

$$\operatorname{Re}\{H_0(t)\varphi^+(t)\} = c(t), \tag{4}$$

где

$$c(t) = u^+(t) - \operatorname{Re}\int_{z_0}^{t} H(t, t_1)\varphi(t_1)\,dt_1\,. \tag{5}$$

Очевидно, $c(t)$ имеет вдоль L непрерывную в смысле Гельдера производную по дуге. Пусть $z=\omega(\zeta)$ отображает конформно круг $|\zeta|<1$ на область T. Как известно, $\omega(\zeta)$ будет иметь непрерывную в смысле Гельдера производную в замкнутом круге $|\zeta|\leqslant 1$ (см., например, Мусхелишвили [1], стр. 113, где имеются ссылки на соответствующую литературу). Тогда условие (4) принимает вид:

$$\operatorname{Re}\{h_0(\sigma)\varphi_0^+(\sigma)\} = c_0(\sigma), \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} h_0(\sigma) = H_0(\omega(\sigma)), \\ \varphi_0^+(\sigma) = \varphi^+(\omega(\sigma)), \\ c_0(\sigma) = c(\omega(\sigma)), \\ (\sigma = e^{i\theta}, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi). \end{gathered} \tag{7}$$

Очевидно, $\varphi_0^+(\sigma)$ — граничное значение голоморфной в круге $|\zeta|<1$ функции $\varphi_0(\zeta)=\varphi(\omega(\zeta))$, непрерывной в смысле Гельдера в замкнутом круге $|\zeta|\leqslant 1$. Кроме того, очевидно, $h_0(\sigma)$ и $c_0(\sigma)$ имеют непрерывные в смысле Гельдера производные вдоль окружности $|\zeta|=1$. Так как $h_0(\sigma)=G(\omega(\sigma), \bar{z}_0, \omega(\sigma), \overline{\omega(\sigma)})$, то в силу (4.5)

$$h_0(\sigma) = e^{\alpha(\sigma)+i\beta(\sigma)}, \quad \sigma = e^{i\theta}, \tag{8}$$

где $\alpha(\sigma)$, $\beta(\sigma)$ — действительные однозначные функции, которые имеют непрерывные в смысле Гельдера производные вдоль окружности $|\zeta|=1$. Пусть $p(\zeta)$ — голоморфная в круге $|\zeta|<1$ функция, вещественная часть которой на окружности $|\zeta|=1$

совпадает с $\beta(\sigma)$. Эта функция задаётся интегралом Шварца:

$$p(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\beta(e^{i\theta})\,\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta+iK_0, \tag{9}$$

где K_0 — произвольная действительная постоянная. Легко найдём, что

$$p'(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\beta\,d\theta}{e^{i\theta}}+\frac{\zeta}{\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\beta}{e^{i\theta}(e^{i\theta}-\zeta)}, \tag{10}$$

откуда, так как $d\beta/d\theta$ — непрерывна в смысле Гельдера, сразу получаем, что $p'(\zeta)$ — непрерывная в смысле Гельдера функция в замкнутом круге $|\zeta|\leqslant 1$ (см., например, Мусхелишвили [1], стр. 58). Обозначая через $\chi(\zeta)$ и $\chi^*(\zeta)$ действительную и мнимую части функции $p(\zeta)$, в силу (8), условие (6) можно записать так:

$$\mathrm{Re}\,\{e^{ip(\sigma)}\varphi_0^+(\sigma)\}=c^*(\sigma), \tag{11}$$

где

$$c^*(\sigma)=c_0(\sigma)\,e^{-\alpha(\sigma)-\chi^*(\sigma)}, \qquad \sigma=e^{i\theta}. \tag{12}$$

Очевидно, $c^*(\sigma)$ — однозначная функция на окружности $|\zeta|=1$, имеющая непрерывную в смысле Гельдера производную.

Из (11) по формуле Шварца получим:

$$\varphi_0(\zeta)=\frac{e^{-ip(\zeta)}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}c^*(e^{i\theta})\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta+iKe^{-ip(\zeta)}, \tag{13}$$

где K — действительная постоянная. Отсюда сразу получим, что производная функции $\varphi_0(\zeta)$ непрерывна в смысле Гельдера в замкнутом круге $|\zeta|\leqslant 1$. Но, так как $\varphi_0(\zeta)=\varphi(\omega(\zeta))$, имеем:

$$\varphi'(z)=\frac{\varphi_0(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \tag{14}$$

Это значит, что $\varphi'(z)$ непрерывна в смысле Гельдера в $T+L$, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы как следствие вытекает

Теорема 2. *Если граничное значение $u^+(t)$ $(t\in L)$ регулярного в T решения $u(x,y)$ уравнения (E_0) имеет непрерывную в смысле Гельдера производную вдоль L, то $u(x,y)$ будет иметь непрерывные частные производные первого порядка в $T+L$.*

Доказательство. Правая часть формулы (1), очевидно, имеет непрерывные частные производные первого порядка в $T+L$, так как входящая туда голоморфная в T функция $\varphi(z)$, согласно предыдущей теореме, имеет непрерывную в смысле Гельдера производную в $T+L$, что и доказывает нашу теорему (предполагается, конечно, что область T удовлетворяет приведённым в теореме 1 условиям).

2°. Сохраняя относительно области T предположения теоремы 1, докажем следующую теорему:

Теорема 3. *Если для области T существует функция Грина $\Gamma(z_0, z)$ задачи D, то она будет иметь непрерывные в смысле Гельдера частные производные первого порядка всюду в $T+L$, за исключением точки $z_0 \in T$.*

Доказательство. Функция Грина имеет вид (см. § 24, n° 4):

$$\Gamma(z_0, z) = \omega(x_0, y_0, x, y) - \Gamma_0(z_0, z), \tag{15}$$

где z_0 — некоторая фиксированная точка области T, $z = x + iy$ — переменная точка, $\Gamma_0(z_0, z)$ — регулярное в T решение уравнения (E_0^*), принимающее на L значения функции $\omega(x_0, y_0, x, y)$, которая, очевидно, имеет вдоль L непрерывную в смысле Гельдера производную первого порядка. Поэтому согласно теореме 2, функция $\Gamma_0(z_0, z)$ будет иметь непрерывные в смысле Гельдера производные первого порядка в $T+L$, что и доказывает нашу теорему, так как $\omega(x_0, y_0, x, y)$ — аналитическая функция всюду в $T+L$, за исключением точки z_0.

3°. Сделаем теперь относительно области T дополнительное предположение: угол $\theta(t)$, составленный касательной в точке t кривой L, ограничивающей область T, имеет непрерывную производную вдоль L; это значит, что L имеет непрерывную кривизну всюду. Назовём область такого вида *областью класса B*.

Теорема 4. *Пусть T — область класса B, принадлежащая основной области $\mathfrak{D}$ уравнения (E_0), для которой существует функция Грина $\Gamma(z_0, z)$ задачи D. Если граничное значение $u^+(t)$ ($t \in L$, L — граница области T) регулярного в T решения $u(x, y)$ уравнения (E_0) непрерывно в смысле Гельдера на L, то имеет место формула:*

$$u(x, y) = \int_L u^+(t) \frac{d\Gamma(z, t)}{dn} ds, \tag{16}$$

где n — внутренняя нормаль в точке $t \in L$, (x, y) — любая точка области T.

Доказательство. На внутренней нормали, проходящей через точку $t(s)$ ($t \in L$, s — соответствующая дуга), отложим отрезок длины δ. Тогда будем иметь точку

$$\tau(s) = t(s) + i\delta e^{i\theta(s)}, \quad \left(e^{i\theta(s)} = \frac{dt}{ds} = t'(s)\right). \tag{17}$$

Геометрическое место таких точек обозначим через Λ. Очевидно, Λ — гладкая кривая. Мы можем число δ взять настолько малым, чтобы выполнялись условия: 1) Кривая Λ лежит целиком в области T и 2) $|1-\delta\theta'(s)| > 0$ всюду на L. Если $\delta_0 > 0$ — такое число, то для всех δ, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, очевидно, будут соблюдены те же условия. Имеем:

$$\cos(n, x) = \cos(\nu, x) = -\sin\theta, \quad \cos(n, y) = \cos(\nu, y) = \cos\theta, \tag{18}$$

$$d\sigma = (1-\delta\theta'(s))\,ds \quad (0 < \delta \leqslant \delta_0), \tag{19}$$

где n и ν — внутренние нормали, а ds и $d\sigma$ — элементы дуг кривых L и Λ соответственно.

Используя теперь формулы (8.2) и (8.3), получим:

$$u(x_0, y_0) = \int\limits_{\Lambda} \left[u\frac{d\Gamma(z_0, \tau)}{d\nu} - \Gamma(z_0, \tau)\,Nu\right] d\sigma, \tag{20}$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$ — фиксированная точка, лежащая внутри Λ,

$$Nu = \frac{du}{d\nu} + (a\cos(\nu, x) + b\cos(\nu, y))\,u. \tag{21}$$

Представим теперь $u(x, y)$ в виде (1). Тогда входящая в (1) голоморфная в T функция $\varphi(z)$, согласно теореме 3 § 22, будет непрерывной в смысле Гельдера в $T+L$. Поэтому, принимая во внимание очевидное равенство

$$\frac{dz}{d\nu} = i\,\frac{dz}{d\sigma}, \tag{22}$$

легко убедимся, что

$$(Nu)_\Lambda = \frac{d}{d\sigma}\operatorname{Re}\left[iH_0(\tau)\,\varphi(\tau)\right] + u_0(s, \delta), \tag{23}$$

где

$$u_0(s, \delta) = \Biggl\{(-a\sin\theta + b\cos\theta)\,u +$$

$$+\operatorname{Re}\left[i\varphi(\tau)\frac{dH_0(\tau)}{d\sigma} + \varphi(\tau)\frac{dH_0(\tau)}{d\nu} + \frac{d}{d\nu}\int\limits_{z_0}^{\tau} H(\tau, t)\,\varphi(t)\,dt\right]\Biggr\}_\Lambda. \tag{24}$$

Очевидно, $u_0(s, \delta)$ представляет собой непрерывную в области $0 \leqslant s \leqslant l$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$ функцию. В силу (17), (18), (19), (23), формулу (20) мы можем записать так:

$$u(x_0, y_0) = \int_0^l u(\tau) \frac{d\Gamma(z_0, \tau)}{d\nu} (1 - \delta\theta'(s))\, ds -$$

$$- \int_0^l \Gamma(z_0, \tau)\, d\, \mathrm{Re}\,[iH_0(\tau)\varphi(\tau)] - \int_0^l \Gamma(z_0, \tau)\, u_0(s, \delta)(1 - \delta\theta'(s))\, ds, \quad (25)$$

где под знаком интеграла всюду надо вместо τ подставить $t(s) + i\delta t'(s)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0)$. Последнюю формулу можем переписать ещё так:

$$u(x_0, y_0) = \int_0^l u(\tau) \frac{d\Gamma(z_0, \tau)}{d\nu} (1 - \delta\theta'(s))\, ds +$$

$$+ \int_0^l \mathrm{Re}\,[iH_0(\tau)\varphi(\tau)] \frac{d\Gamma(z_0, \tau)}{ds}\, ds - \int_0^l \Gamma(z_0, \tau)\, u_0(s, \delta)(1 - \delta\theta'(s))\, ds. \quad (26)$$

Но, в силу теоремы 3, под знаком интегралов мы имеем непрерывные в области $0 \leqslant s \leqslant l$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$ функции. Поэтому, переходя к пределу при $\delta \to 0$ и принимая во внимание, что функции

$$\frac{d\Gamma(z_0, \tau)}{ds}, \quad \Gamma(z_0, \tau) \qquad (\tau = t(s) + i\delta t'(s))$$

стремятся к нулю равномерно относительно $s\,(0 \leqslant s \leqslant l)$, будем иметь формулу (16), что и требовалось доказать.

Из теоремы 4 вытекает следующая

Теорема 5. *Если для области T однородная задача* D_0 *в случае уравнения* (E_0) *имеет нетривиальное решение, то функция Грина задачи* D *для этой области не существует.*

Доказательство. Пусть $u_0(x, y)$ — нетривиальное решение задачи D_0. Очевидно, u_0 — непрерывна в смысле Гельдера в $T + L$ (теорема 2), причём $u_0^+(t) = 0$ всюду на L. Допустим теперь, что функция Грина $\Gamma(z_0, z)$ для области T существует. Тогда в силу формулы (16) будем иметь:

$$u_0(x, y) = \int_L u_0^+(t) \frac{d\Gamma(z, t)}{dn}\, ds = 0,$$

т. е. $u_0(x, y) = 0$ всюду в T, что противоречит нашему предположению, и, следовательно, теорема доказана.

4°. Сохраняя сделанные выше в n°3 предположения относительно области T, докажем следующую теорему:

Теорема 6. *Если существует функция Грина $\Gamma(z_0, z)$ задачи D для уравнения (E_0), соответствующая области T, то существует также функция Грина $\Gamma^*(z_0, z)$ задачи D для сопряжённого уравнения (E_0^*) и*

$$\Gamma^*(z_0, z) = \Gamma(z, z_0). \tag{27}$$

Доказательство. Функция Грина $\Gamma^*(z_0, z)$ для сопряжённого уравнения (E_0^*) имеет вид:

$$\Gamma^*(z_0, z) = \omega(x, y, x_0, y_0) - \Gamma_0^*(z_0, z), \tag{28}$$

где $\Gamma_0^*(z_0, z)$ — регулярное в T решение уравнения (E_0), принимающее на L значения элементарного решения $\omega(x, y, x_0, y_0)$, причём здесь $z_0 = x_0 + iy_0$ — фиксированная точка области T, $z = x + iy$ — переменная точка. Пусть функция Грина $\Gamma(z_0, z)$ задачи D в случае уравнения (E_0) существует. Тогда, согласно теореме 5, задача D_0 не имеет решения и, следовательно, в силу теоремы § 22, функция $\Gamma_0^*(z_0, z)$ существует, т. е. существует функция Грина $\Gamma^*(z_0, z)$ задачи D и для сопряжённого уравнения (E_0^*). Так как $\Gamma^*(z_0, z)$ — регулярное всюду в T, за исключением точки z_0, решение уравнения (E_0), обращающееся на L в нуль, то из формул (8.2), (8.3) легко получим:

$$\Gamma^*(z_0, z) = \int_\gamma \left[\Gamma^*(z_0, t)\frac{d\Gamma(z, t)}{dn} - \Gamma(z, t)N\Gamma^*(z_0, t)\right] ds, \tag{29}$$

где γ — окружность круга $|z - z_0| < \rho$, лежащего в T, n — внешняя нормаль в точке интеграции $t \in \gamma$, z — точка, лежащая вне γ, и, наконец,

$$N\Gamma^*(z_0, t) = \frac{d\Gamma^*(z_0, t)}{dn} + (a\cos(n, x) + b\cos(n, y))\Gamma^*(z_0, t). \tag{30}$$

Так как вблизи точки z_0 функция $\Gamma^*(z_0, z)$ имеет вид:

$$\Gamma^*(z_0, z) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z - z_0|} + \text{регулярная функция}, \tag{31}$$

а функция $\Gamma(z, t)$ регулярна, то из (29) после предельного перехода ($\rho \to 0$) получим равенство (27). Следовательно, теорема полностью доказана.

Теорема 7. *Задача D_0 для уравнения (E_0) имеет (нетривиальное) решение тогда и только тогда, когда она имеет решение для сопряжённого уравнения (E_0^*), и наоборот.*

Доказательство. Пусть задача D_0 для уравнения (E_0) не имеет решения. Тогда, очевидно, существует функция Грина для уравнения (E_0^*), и, следовательно, согласно теореме 5, задача D_0 и для этого уравнения не имеет решения. Если же задача D_0 для уравнения (E_0) имеет решение, то это значит, что функция Грина $\Gamma(z_0, z)$ задачи D для этого уравнения не существует, и, следовательно, задача D_0 для уравнения (E_0^*) имеет нетривиальное решение. Таким образом теорема доказана.

Наконец сформулируем ещё одно предложение, которое легко вытекает из предыдущих теорем.

Теорема 8. *Функция Грина задачи* D *для уравнения* (E_0) *существует тогда и только тогда, когда однородная задача для этого уравнения либо для ему сопряжённого не имеет решения.*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Bergman St.

[1] Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichungen befriedigen, Матем. сборник, 2 (44) (1937), стр. 1170—1197;

[2] Lineare operator in the theory of partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 53, 1 (1943), стр. 131—155;

[3] Certain classes of analytic functions of two real variables and their properties, Trans. Amer. Math. Soc., 57, 3 (1945), стр. 299—331;

[4] Functions satisfying certain partial differential equations of elliptic type and their representation, Duke Math. Journ., 14, 2 (1947), стр. 349—366.

Bertrand G.

[1] La théorie des marées et les équations intégrales, Ann. École Norm. Sup., 3 sér., XI (1923), стр. 151—258.

Бицадзе А. В.

[1] Об общем представлении решений линейных эллиптических диференциальных уравнений (на груз. языке, резюме на русском), Сообщения Академии Наук Груз. ССР, IV, № 7 (1943), стр. 613—622;

[2] О некоторых применениях общего комплексного представления решений дифференциальных уравнений эллиптического типа, Сообщения Академии Наук Груз. ССР, VII, № 6(1946), стр. 313—320;

[3] Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа (на груз. языке, резюме на русском), Сообщения Академии Наук Груз. ССР, V, № 8 (1944), стр. 761—770;

[4] Задачи колебания равномерно сжатой тонкой упругой пластинки (на груз. языке, резюме на русском), Труды Тбилисского университета им. И. В. Сталина, XXXa (1947), стр. 23—30.

Векуа И. Н.

[1] О комплексном представлении общего решения уравнений плоской задачи стационарного колебания теории упругости, Доклады АН СССР, XVI, № 3 (1937), стр. 155—160;

[2] Об общем представлении решений уравнения с частными производными второго порядка, Доклады АН СССР, XVII, № 6 (1937), стр. 295—299;

[3] Общее представление решений дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа линейных относительно оператора Лапласа, Труды Тбилисского математического института, II (1937), стр. 227—240;

[4] Граничные задачи теории линейных эллиптических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными, Сообщения Грузинского филиала АН СССР, I, №№ 1, 3, 7 (1940), стр. 22—34; 181—186; 497—500;

[5] Комплексное представление решений эллиптических дифференциальных уравнений и его применения к граничным задачам, Труды Тбилисского математического института, VII (1939), стр. 161—253;

[6] Allgemeine Darstellung der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet, Сообщения Груз. филиала АН СССР, I, № 5 (1940), стр. 329—335;

[7] Замечания по поводу метода Фурье (совместно с Д. Ф. Харазовым), Сообщения Груз. филиала АН СССР, I, № 9 (1940), стр. 647—650;

[8] Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложении, Сообщения Академии Наук Груз. ССР, II, № 6 (1941), стр. 477—484;

[9] Дополнения к работе: «Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложений», Сообщения Академии Наук Груз. ССР, II, № 8 (1941), стр. 701—706;

[10] Об аппроксимации решений эллиптических дифференциальных уравнений, Сообщения Академии Наук Груз. ССР, III, № 2 (1942), стр. 97—102;

[11] Решение основной краевой задачи для уравнения $\Delta^{n+1}u=0$, Сообщения Академии Наук Груз. ССР, III, № 3 (1942), стр. 213—220;

[12] О решениях уравнения $\Delta u+\lambda^2 u=0$ (на груз. языке, резюме на русском), Сообщения Академии Наук Груз. ССР, III, № 4 (1942), стр. 307—314;

[13] Об одной линейной граничной задаче Римана, Труды Тбилисского математического института, XI (1942), стр. 109—139;

[14] Замечания об общем представлении решений дифференциальных уравнений эллиптического типа (на груз. языке, резюме на русском), Сообщения Академии Наук Груз. ССР, IV, № 5 (1943), стр. 385—392;

[15] О метагармонических функциях, Труды Тбилисского математического института, XII (1943), стр. 105—174;

[16] Об одном интегральном представлении решений дифференциальных уравнений, Сообщения Академии Наук Груз. ССР, IV, № 9 (1943), стр. 843—852;

[17] Об одном новом представлении решений дифференциальных уравнений (на груз. языке, резюме на русском), Сообщения Академии Наук Груз. ССР, IV, № 10 (1943), стр. 941—950;

[18] Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения, Сообщения Академии Наук Груз. ССР, VI, № 3 (1945), стр. 177—183;

[19] Об одном разложении метагармонических функций, Доклады АН СССР, XLVIII, № 1 (1945), стр. 3—6;

[20] Интегрирование уравнений сферической оболочки, Прикладная математика и механика, IX (1945), стр. 368—388;

[21] Общее представление решений дифференциального уравнения сферических функций, Доклады АН СССР, XLIX, № 5 (1945), стр. 319—322;

[22] К теории функций Лежандра, Сообщения Академии Наук Груз. ССР, VII, № 1—2 (1946), стр. 3—10;

[23] К теории цилиндрических функций, Сообщения Академии Наук Груз. ССР, VII, № 3 (1946), стр. 91—97;

[24] Аппроксимация решений дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа (на груз. языке, резюме на русском), Труды Тбилисского государственного университета им. И. В. Сталина, XXXа (1947), стр. 1—21;

[25] Некоторые основные вопросы теории тонкой сферической оболочки, Прикладная математика и механика, XI, № 5 (1947), стр. 499—616;

[26] К теории тонких пологих упругих оболочек, Прикладная математика и механика, XII, № 1 (1948), стр. 69—74;

[27] Об изгибе пластинки со свободным краем, Сообщения Академии Наук Груз. ССР, III, № 7 (1942), стр. 641—648;

[28] Об одном методе решения граничных задач синусоидальных колебаний упругого цилиндра, Доклады АН СССР, **LX**, № 5 (1948), стр. 779—782;

[29] Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши, Труды Тбилисского математического института, **X** (1941), стр. 46—72;

[30] К теории сингулярных интегральных уравнений. Сообщения Академии Наук Груз. ССР, **III**, № 9 (1942), стр. 869—876.

Векуа И. Н.

[1] К теории систем сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, Сообщения Академии Наук Груз. ССР, **IV**, № 3 (1943), стр. 207—214;

[2] Об одной линейной граничной задаче Римана с разрывными коэффициентами..., Сообщения Академии Наук Груз. ССР, **V**, № 5 (1944), стр. 473—482.

Власов В. З.

[1] Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек, Прикладная математика и механика, **VIII** (1944), стр. 109—140;

[2] Некоторые новые задачи строительной механики оболочек и тонкостенных конструкций, Известия Отд. техн. наук АН СССР, № 1 (1947), стр. 27—51.

Гахов Ф. Д.

[1] Линейные краевые задачи теории функций комплексной переменной, Известия Казанского физ.-мат. общества, **X**, сер. 3 (1938), стр. 39—79.

Гольденвейзер А. Л.

[1] Исследование напряжённого состояния сферической оболочки, Прикладная математика и механика, **VIII**, № 6 (1944).

Gutzmer A.

[1] Remarques sur certaines équations aux différentielles partielles d'ordre supérieur, Journ. de Math., sér. **VI**, **VI** (1890), стр. 405—422.

Горн М. В.

[1] Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными, ГОНТИ (1936).

Darboux G.

[1] Leçons sur la théorie générale des surfaces, **II**, Paris, 1915.

Зерагия П.

[1] Об интегрировании полигармонических уравнений, Труды Тбилисского математического института, **VIII** (1940), стр. 135—156.

Келдыш М. В.

[1] О приближении голоморфных функций целыми функциями, Доклады АН СССР **XLVII**, № 4 (1945), стр. 243—245;

[2] О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов в замкнутых областях, Математ. сборник, **16 (58)** (1945), стр. 249—258.

Колосов Г. В.

[1] Приложение теории комплексного переменного к плоской задаче теории упругости, Юрьев, 1909;

[2] Применение комплексной переменной к теории упругости, ОНТИ, 1935.

Купрадзе В. Д.

[1]. Основные задачи математической теории дифракции, ОНТИ (1935).

Курант Р. и Гильберт Д.

[1] Методы математической физики, II, Гостехиздат (1945).

Мусхелишвили Н. И.

[1] Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат (1946);

[2] Некоторые задачи теории упругости, изд. АН СССР (1935);

[3] Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique, Tiflis (1922);

[4] Recherches sur les problèmes aux limites relatifs à l'équation biharmonique et aux équations de l'élasticité à deux dimensions, Mathem. Ann., **107**, 2, стр. 282–312;

[5] Новый общий способ решения основных контурных задач плоской теории упругости, Доклады АН СССР, **III**, № 1 (1934), стр. 7;

[6] Исследование новых интегральных уравнений плоской теории упругости, Доклады АН СССР, **III**, № 2 (1934), стр. 73.

Мюнтц Г.

[1] Интегральные уравнения, ГТТИ (1934).

Nicolesco M.

[1] Les fonctions polyharmoniques, Paris (1936).

Новожилов В. В.

[1] Расчёт напряжений в тонкой сферической оболочке при произвольной нагрузке, Доклады АН СССР, **XXVII**, № 6 (1940), стр. 537—540.

Pogorzelski W.

[1] Über die Transformationen einiger iterierten uneigentlichen Integrale und ihre Anwendung zur Poincaréschen Randwertaufgabe, Math. Zeitschr., **44** (1939), стр. 427—444.

Привалов И. И.

[1] Граничные свойства однозначных аналитических функций, изд. МГУ, Москва (1941).

Reissner E.

[1] Stress and small displacements of shallow spherical shells, Journ. Math. and Physics, **XXV**, № 1 (1946), стр. 80–85.

Runge M.

[1] Zur theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, Acta Math., **6**.

Смирнов В. И. и Соболев С. Л.

[1] Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastiques, Труды Сейсм. института Академии Наук СССР, № 20, Ленинград, 1935.

Тимошенко С. П.

[1] Устойчивость упругих систем, Гостехиздат (1946).

Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н.

[1] Курс современного анализа, II т., Л.—М. (1934).

Walsh J. L.

[1] Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, New York (1935).

Watson G. N.

[1] Theorie of Bessel functions, 1945.

Халилов З. И.

[1] Краевые задачи для эллиптических уравнений, Изв. АН СССР, серия матем. **11** (1947), стр. 345—369.

Харазов Д. Ф.

[1] Общее представление решений эллиптических дифференциальных уравнений выше второго порядка в многосвязных областях, Сообщения Академии Наук Груз. СССР, **II**, № 9 (1941).

Хведелидзе Б. В.

[1] Об одной линейной граничной задаче Римана для систем аналитических функций, Сообщения Академии Наук Груз. ССР, **IV**, № 4 (1943), стр. 289—296;

[2] О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области, Сообщения Академии Наук Груз. ССР, **II**, №№ 7, 10 (1941), стр. 571—572, 865—872;

[3] О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала, Доклады АН СССР, **XXX**, № 3 (1941);

[4] Задача Пуанкаре для линейного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа, Труды Тбилисского математического института, **XII** (1943), стр. 47—77.

Шерман Д. И.

[1] О некоторых задачах теории потенциала, Прикладная математика и механика, **IX** (1945), стр. 479—488;

[2] К общей задаче потенциала, Известия АН СССР, серия математ. **10**, № 2 (1946), стр. 121—134;

[3] К задаче Дирихле и Неймана в теории установившихся колебаний, Прикладная математика и механика, **XI**, № 2 (1947), стр. 259—266;

[4] К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях, Доклады АН СССР, **XXVII**, № 9 (1940), стр. 911—913;

[5] К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах, Доклады АН СССР, **XXVIII**, № 1 (1940), стр. 25—28;

[6] К вопросу о диффракции упругих волн, Доклады АН СССР, **XLVIII**, № 9 (1945), стр. 655—658.