

Л. Вентцель

ВВЕДЕНИЕ
В КВАНТОВУЮ
ТЕОРИЮ
ВОЛНОВЫХ
ПОЛЕЙ

ОГИЗ-ГОСТЕХИЗДАТ-1947

Т. Вентцель

ВВЕДЕНИЕ
В КВАНТОВУЮ
ТЕОРИЮ
ВОЛНОВЫХ
ПОЛЕЙ

—

ПЕРЕВОД
А.С.КОМПАНЕЙЦА

АННОТАЦИЯ

Книга Вентцеля содержит систематическое и строгое изложение квантовой теории волновых полей: электромагнитного, электронного и мезонного в её современном состоянии.

Книга рассчитана на физиков-теоретиков, но может быть полезна и экспериментаторам, желающим расширить свой теоретический кругозор.

Редактор *К. П. Гуров.*

Техн. редактор *Н. А. Тумаркина.*

Подписано к печати 24/VII 1947 г. 18,25 печ. л. 18,62 уч.-изд. л. 40 800 тип. зн. в печ. л. А06394 Тираж 6 000 экз. Цена книги 11 р. Переплет 2 р. Заказ № 7157.

1-я Образцовая тип., треста «Полиграфкнига» Огиза при Совете Министров СССР, Москва, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава I. Формальные основы	7
§ 1. Канонический формализм	7
§ 2. Сохранение энергии, импульса и момента количества движения	16
§ 3. Комплексные функции поля. Сохранение заряда	20
§ 4. Инвариантность по отношению к преобразованиям Лорентца. Зависящие от времени операторы поля и их перестановочные соотношения	25
§ 5. Переход к пространству импульсов	33
Глава II. Скалярные поля	41
§ 6. Действительные поля в пустоте	41
§ 7. Действительное поле с источниками	50
§ 8. Комплексное поле в вакууме	63
§ 9. Комплексное поле во взаимодействии с протонами и нейтронами	69
§ 10. Комбинированное нейтральное и заряженное поле	80
§ 11. Заряженные частицы в электромагнитном поле	83
Глава III. Векторное мезонное поле	92
§ 12. Комплексное поле в вакууме	92
§ 13. Векторные мезоны в электромагнитном поле	109
§ 14. Ядерные взаимодействия	118
§ 15. Мезонная теория и ядерные силы	126
Глава IV. Квантовая электродинамика	137
§ 16. Электромагнитное поле в вакууме	137
§ 17. Взаимодействие с электронами	152
§ 18. Теория со многими временами	168
§ 19. К вопросу о собственной энергии	184
Глава V. Квантование волнового поля электронов по принципу Паули	200
§ 20. Свободные электроны	200
§ 21. Электроны в электромагнитном поле	224
Глава VI Заключительные замечания	239
§ 22. Частицы с более высоким спином. Спин и статистика	239
§ 23. Перспективы	249
Новейшие исследования в теории мезонов	253
Именной и предметный указатель	291

ПРЕДИСЛОВИЕ

В исследованиях по теоретической физике за последние годы значительное место заняли работы по квантовой теории поля. Кто попытается вникнуть в эту область по журнальной литературе, часто натолкнётся на затруднения, даже если он хорошо владеет элементами квантовой механики. Многие из моих коллег по специальности, знакомившие своих учеников с оригинальной литературой, подтвердили мне это впечатление. Настоящая книга должна облегчить ознакомление с этой областью.

Конечно, я спрашивал себя, достаточно ли созрела теория для изложения в виде учебника, но всё же я полагаю, что эти сомнения можно оставить в стороне. Несомненно, теория имеет свои проблематические стороны (см., например, термин «собственная энергия»), и если в этом направлении в ближайшем будущем будет существенный успех, то следует ожидать, что многие части книги быстро устареют, хотя вряд ли приходится надеяться на столь благоприятное развитие теории в настоящее время. Но, пока отсутствуют новые пролагающие путь идеи, надо пытаться развивать существующую теорию на нынешней основе, и поэтому не излишне сделать её более доступной большому кругу интересующихся. К тому же только тот понимает проблемы, кто знает теорию.

Как говорит заглавие, эта книга мыслилась только как введение, а не всеохватывающее изложение. Этот характер книги заставил поместить на второй план вопросы систематики. Так, мне показалось целесообразным исходить из «канонического рецепта квантования» элементарной квантовой

механики (гейзенберговские перестановочные соотношения), хотя дальнейшее изложение теории показывает, что этот способ не имеет общности и должен быть расширен, например, при квантовании по принципу Паули.

С другой стороны, я отказался от отдельного и подробного изложения классической теории волновых полей. Правда, было бы поучительно предпослать некоторым квантово-теоретическим выводам соответствующие классические соображения, но, так как квантовые операторные вычисления часто оказываются проще, я предпочёл в ряде случаев обратиться непосредственно к ним.

В первой главе рассматриваются в общем виде основы теории, т. е. без специализации функции Лагранжа или уравнений поля. Остальные главы посвящены специальным типам полей, которым потом при квантовании ставят в соответствие частицы с различными спинами, зарядами и массами. При этом, я не стремился ни к какой полноте; рассмотренные поля — это типичные примеры. Конечно, при этом не должны отсутствовать электромагнитное поле и волновое поле электрона. Некоторые вопросы, которые можно было бы рассматривать уже в общей части, я относил к специальным главам, чтобы уберечь читателя от лишних трудностей, хотя при этом неизбежно вкрадываются повторения. Но, с другой стороны, я считал, что совсем отказаться от общей части нельзя, так как следовало, по крайней мере отчасти, показать внутреннее единство и последовательность теории. В частности, в § 4 доказательство релятивистской инвариантности квантованной теории поля проведено так далеко, что его без больших вычислений можно дополнить для специальных видов полей; я хотел показать, почему при установлении инвариантных перестановочных соотношений автоматически возникает «инвариантная D -функция».

Читателю, которому I глава местами покажется трудной, рекомендуется выяснить положение вещей на примере скалярного поля (§ 6 и 8). Разделы, напечатанные петитом, посвящены отдельным актуальным вопросам; их можно и пропустить, смотря по интересам читателя.

То из основ теории, что уже подробно излагалось в учебниках, предполагается известным, по крайней мере,

в основном. Кроме элементарной квантовой механики (в волновой и матричной форме), это относится к дираковской волновой механике электрона со спином (§ 17). Всё необходимое можно найти, например, в статье Паули в Geiger-Scheelschen Handbuch der Physik, т. 24, ч. 1¹).

Цюрих,
август 1942.

Г. Вентцель

¹) По-русски см. Д и р а к, Основы квантовой механики, 2-е изд., ОНТИ, 1937.

ГЛАВА I

ФОРМАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ

§ 1. Канонический формализм

«Поле» в классической физике описывается одной или несколькими (действительными) функциями пространственных координат и времени $\psi_\sigma(x, t)$, которые подчиняются известным уравнениям в частных производных, так называемым «уравнениям поля». Вместо этого можно также исходить и из вариационной задачи, эйлеровы дифференциальные уравнения которой как раз и являются уравнениями поля. Пусть L представляет функцию от $\psi_\sigma(x, t)$ и их первых производных по координатам и по времени¹⁾:

$$L = L(\psi_1, \text{grad } \psi_1, \dot{\psi}_1; \psi_2, \text{grad } \psi_2, \dot{\psi}_2; \dots). \quad (1.1)$$

Интегрируя L по объёму V и по промежутку времени от t' до t'' , образуем величину

$$I = \int_{t'}^{t''} dt \int_V dx L(\psi_1, \dots).$$

Если варьировать функции ψ_σ при неизменной области интегрирования

$$\psi_\sigma(x, t) \rightarrow \psi_\sigma(x, t) + \delta\psi_\sigma(x, t)$$

и притом так, чтобы исчезали вариации $\delta\psi_\sigma$ на границах интегрирования (т. е. на поверхности, замыкающей объём V

1) Частная производная по времени обозначается точкой:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \dot{\psi}.$$

и при $t=t'$, $t=t''$, то вариация интеграла I получится по известному способу:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t'}^{t''} dt \int_V dx \delta L = \\ &= \int_{t'}^{t''} dt \int_V dx \sum_{\sigma} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{\sigma}} \delta \psi_{\sigma} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta \psi_{\sigma} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}} \frac{\partial}{\partial t} \delta \psi_{\sigma} \right\} = \\ &= \int_{t'}^{t''} dt \int_V dx \sum_{\sigma} \delta \psi_{\sigma} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{\sigma}} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x_k}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}} \right\}. \end{aligned}$$

Классическое поле определяется требованием, чтобы интеграл I был экстремален ($\delta I = 0$) относительно произвольных вариаций $\delta \psi_{\sigma}$, отвечающих поставленным выше условиям, причём при любом выборе области интегрирования. Для этого необходимо, чтобы во всех точках пространства и во все моменты времени выполнялись уравнения.

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_{\sigma}} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x_k}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}} = 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots). \quad (1.2)$$

Согласно (1.1), эти уравнения являются уравнениями в частных производных, порядок которых относительно волновой функции не выше второго; (1.2) и есть уравнение поля¹⁾.

¹⁾ Выражение

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_{\sigma}} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x_k}} \equiv \frac{\delta L}{\delta \psi_{\sigma}}$$

называется «функциональной производной» $L = \int dx L$ по ψ_{σ} . В этом обозначении (1.2) выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}} = \frac{\delta L}{\delta \psi_{\sigma}}.$$

Подстановка $L \rightarrow L + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \Lambda_k(\psi_1, \psi_2, \dots) + \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_0(\psi_1, \dots)$,

Этот вариационный принцип можно поставить в параллель с гамильтоновским принципом экстремального действия классической механики. Функции поля ψ , отличаются от координат механической системы, состоящей из материальных точек q_j , которые зависят только от времени, тем, что ψ , являются функциями точки x ; но в теории поля можно подражать описанию системы точек с помощью координат q_j , где индекс j нумерует конечное число степеней свободы, сопоставляя с j не только индекс σ функции поля, но и непрерывно изменяющийся радиус-вектор x . В этом смысле поле интерпретируется как механическая система с бесконечным числом степеней свободы.

Для пояснения этой аналогии представим временно пространство разделённым не на бесконечно малые элементы dx , а на конечные ячейки $\delta x^{(s)}$, нумеруемые верхним индексом s ; значение функции поля ψ_σ в ячейке s пусть будет $\psi_\sigma^{(s)}(t)$, а пространственные производные $\psi_{,\sigma}$ будем заменять соответствующими отношениями разностей. Таким способом можно представить функцию L (1.1), точнее говоря, её значение $L^{(s)}$ в какой-либо ячейке (s), как функцию обобщённых координат $q_j = \psi_\sigma^{(s)}$ и принадлежащих им скоростей $\dot{q}_j = \dot{\psi}_\sigma^{(s)}$. Также представляется и сумма

$$L = \sum_s \delta x^{(s)} L^{(s)}.$$

Тогда формулированный выше вариационный принцип гласит, что интеграл по времени

$$I = \int_{t'}^{t''} dt L(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots)$$

где $\Lambda_0, \dots, \Lambda_3$ — произвольные функции ψ_σ , оставляет уравнения поля инвариантными, так как интеграл

$$\int_{t'}^{t''} dt \int_V dx \left\{ \sum_k \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} + \frac{\partial \Lambda_0}{\partial t} \right\}$$

может быть преобразован в поверхностный по границам области, где его вариация исчезает тождественно. При этом также допустимо, чтобы $\Lambda_0, \dots, \Lambda_3$ зависели от производных $\psi_{,\sigma}$, поскольку L остаётся независимым от вторых производных.

должен быть экстремален по отношению к вариациям $q_j(t) \rightarrow q_j(t) + \delta q_j(t)$, если только δq_j исчезает при $t = t'$ и $t = t''$ во всех ячейках (s) , внешних по отношению к V . Но так как V выбирается произвольно, то это вполне соответствует гамильтоновскому вариационному принципу механики. Уравнения поля (1.2) как эйлеровы дифференциальные уравнения соответствуют механическим уравнениям движения Лагранжа, в которых L — функция Лагранжа.

Если вернуться к пространственному континууму, делая все клетки снова бесконечно малыми, функция Лагранжа перейдет в интеграл по всему пространству:

$$L = \int dx \mathbf{L}(\psi_1 \text{grad } \psi_1, \dot{\psi}_1; \psi_2, \text{grad } \psi_2, \dot{\psi}_2; \dots). \quad (1.3)$$

Подинтегральное выражение L мы назовём «дифференциальной функцией Лагранжа».

Для того чтобы перейти к формализму Гамильтона, всё ещё оставаясь в рамках классической теории, введём прежде всего импульс $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, канонически сопряжённый координате q_j . Считая, что $L = \sum_{s'} \delta x^{(s')} \mathbf{L}^{(s')}$, канонически сопряжённой $q_j = \psi_{\sigma}^{(s)}$ величиной надо положить¹⁾:

$$p_j = \delta x^{(s)} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}^{(s)}}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}^{(s)}}.$$

В теории поля принято называть полем, канонически сопряжённым с ψ_{σ} , частную производную L (1.1) по $\dot{\psi}_{\sigma}$ (при постоянных ψ_{σ} и $\text{grad } \psi_{\sigma}$):

$$\pi_{\sigma} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}}. \quad (1.4)$$

Его значение в (s) -й ячейке связано с p_j соотношением:

$$p_j = \delta x^{(s)} \cdot \pi_{\sigma}^{(s)}.$$

1) $\dot{\psi}_{\sigma}^{(s)}$ входит только в $L^{(s)}$, но не в другие $L^{(s')}$ ($s' \neq s$), так как по определению (1.1) значение L в точке x задаётся только $\dot{\psi}_{\sigma}$ в той же точке (а не, например, $\text{grad } \dot{\psi}_{\sigma}$).

Образуем далее гамильтонову функцию

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = \sum_s \delta x^{(s)} \left\{ \sum_\sigma \pi_\sigma^{(s)} \dot{\phi}_\sigma^{(s)} - L^{(s)} \right\},$$

которую следует понимать как функцию q_j и p_j или $\phi_\sigma^{(s)}$ и $\pi_\sigma^{(s)}$. В пределе континуума

$$H = \int dx H, \quad H = \sum_\sigma \pi_\sigma \dot{\phi}_\sigma - L. \quad (1.5)$$

Путём исключения $\dot{\phi}$, из (1.4) «дифференциальная гамильтонова функция» может быть представлена как функция от ϕ_σ , $\text{grad } \phi_\sigma$ и π_σ :

$$H = H(\phi_1, \text{grad } \phi_1, \pi_1; \phi_2, \text{grad } \phi_2, \pi_2, \dots). \quad (1.6)$$

С помощью гамильтоновой функции H мы могли бы теперь также заменить уравнение поля (1.2) «каноническими уравнениями поля», соответствующими каноническим уравнениям движения (Гамильтона) механики точек¹⁾:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j},$$

но мы не будем использовать такое представление, так как для квантовой теории оно не нужно.

Ввиду того, что, как мы видели, классическое ϕ -поле эквивалентно системе точек, хотя и с бесконечным числом степеней свободы, то естественно произвести и квантование поля по правилам, оправдавшим себя в квантовой механике материальной точки.

Как известно, переход от классической теории к квантовой достигается тем, что канонические переменные q_j , p_j заменяют эрмитовскими операторами, которые удовлетворяют перестановочным соотношениям²⁾:

$$[q_j, q_{j'}] = 0, \quad [p_j, p_{j'}] = 0, \quad [p_j, q_{j'}] = \frac{\hbar}{i} \delta_{jj'}.$$

¹⁾ Подробнее об этом см. Гейзенберг и Паули (Heisenberg и Pauli), Zs. f. Phys. 56, 1, § 1, 1929.

²⁾ Наши обозначения обычны: $[a, b] = ab - ba$; \hbar — планковский квант действия, делённый на 2π ; i — мнимая единица, $\delta_{jj'} = 1$, $\delta_{jj'} = 0$ при $j' \neq j$.

Механические свойства системы определяются гамильтоновской функцией, которая формально берётся из классической теории, но перетолковывается как эрмитовский оператор. Соответственно и в квантовой теории поля мы будем предполагать, что свойства поля определены его функцией Гамильтона $H = \int dx H$ или функцией Лагранжа $L = \int dx L$, из которой H может быть вычислено по формулам (1.4) и (1.5), но в которых отныне $\psi_\sigma(x)$ и $\pi_\sigma(x)$ — эрмитовские операторы с перестановочными соотношениями, вытекающими путём предельного перехода к континууму из перестановок $q_j = \psi_\sigma^{(s)}$, $p_j = \delta x^{(s)} \pi_\sigma^{(s)}$. Это характеризует «каноническое квантование поля», впервые сформулированное для полей общего вида Гейзенбергом и Паули¹⁾.

Составляем, таким образом, следующие соотношения:

$$[\psi_\sigma^{(s)}, \psi_{\sigma'}^{(s')}] = [\pi_\sigma^{(s)}, \pi_{\sigma'}^{(s')}] = 0; \quad [\psi_\sigma^{(s)}, \pi_{\sigma'}^{(s')}] = \frac{\hbar}{i} \delta_{\sigma\sigma'} \frac{\delta_{ss'}}{\delta x^{(s)}}.$$

Если теперь вернуться от $\psi_\sigma^{(s)}$, $\pi_\sigma^{(s)}$ к $\psi_\sigma(x)$, $\pi_\sigma(x)$, то перестановочные соотношения будут гласить:

$$\begin{aligned} [\psi_\sigma(x), \psi_{\sigma'}(x')] &= [\pi_\sigma(x), \pi_{\sigma'}(x')] = 0; \\ [\pi_\sigma(x), \psi_{\sigma'}(x')] &= \frac{\hbar}{i} \delta_{\sigma\sigma'} \delta(x, x'); \end{aligned} \quad (1.7)$$

здесь $\delta(x, x')$ означает функцию, значение которой равно либо $(\delta x^{(s)})^{-1}$, либо нулю, смотря по тому, находятся ли точки x и x' в одной и той же или в различных ячейках. Считая x' постоянным и интегрируя по x -пространству, получим $\int dx \delta(x, x') = 1$; далее $\int dx f(x) \delta(x, x')$ представляет среднее значение $f(x)$ по ячейке (s') , заключающей x' .

В пределе континуума объём ячейки $\delta x^{(s)} \rightarrow 0$, $\delta(x, x')$ переходит в δ -функцию Дирака (трёхмерную):

$$\delta(x, x') \rightarrow \delta(x - x') = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq x', \\ \infty & \text{при } x = x', \end{cases}$$

так, что

$$\int dx \delta(x - x') = 1. \quad (1.8)$$

¹⁾ В работе, цитированной выше.

Этот предельный переход имеет смысл всегда, если $\delta(x, x')$ стоит под знаком пространственного интеграла

$$\int dx f(x) \delta(x, x') \rightarrow \int dx f(x) \delta(x - x') \equiv f(x'). \quad (1.9)$$

В перестановочных соотношениях (1.7) пишут прямо $\delta(x - x')$ вместо $\delta(x, x')$, и мы в дальнейшем будем писать так, потому что этот способ записи не может вызвать неясностей.

Итак, в квантовой теории поля ϕ_σ , π_σ — операторы, которые зависят от координат x начала отсчёта, как от параметра¹⁾, и подчиняются перестановочным соотношениям (1.7, 8).

Представления этих операторов будут даны позже при рассмотрении специальных видов поля. Надо подчеркнуть, что мы рассматриваем $\phi_\sigma(x)$, $\pi_\sigma(x)$ пока что как операторы, не зависящие от времени; построение операторов, зависящих от времени, выполняется в § 4 в связи с вопросом о релятивистской инвариантности. Вместе с ϕ_σ и π_σ H тоже является оператором, зависящим от координат; интегральная гамильтонова функция $H = \int dx H$ — тоже оператор. Иногда приходится переставить некоммутирующие операторы или произвести такую симметризацию, чтобы H стало эрмитовским оператором.

Дополнительно следует рассмотреть особый случай, играющий известную роль в квантовой теории поля. При функциях Лагранжа определённого вида бывает, что некоторые из уравнений поля (1.2) не содержат второй производной по времени $\ddot{\phi}_\sigma$; тогда эти уравнения представляют «дополнительные условия», связывающие ϕ_σ и $\dot{\phi}_\sigma$ ²⁾. В этом случае перемен-

1) x — не оператор, а « c -число».

2) Пусть, например, функция Лагранжа имеет вид: $L = \dot{\phi}_1 F + G$, где F не зависит ни от каких $\dot{\phi}_\sigma$, а G не зависит от $\dot{\phi}_1$. Уравнение (1.2) при $\sigma = 1$ имеет при этом вид дополнительного условия. Тогда $\pi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = F$, т. е. π_1 зависит только от ϕ_σ и их пространственных производных. Если все операторы ϕ_σ перестановочны, то и π_1 перестановочно со всеми ϕ_σ , в противоречии с (1.7).

ные ϕ_s , π_s не являются независимыми друг от друга, благодаря чему и перестановочные соотношения (1.7) не могут быть установлены для всех переменных непротиворечиво. В § 12 и 16 мы встретим случаи, когда $\dot{\phi}_s$ совсем не входит в L , так что соответствующая $\pi_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_s}$ тождественно обращается в нуль; при этом, конечно, не может выполняться перестановочное соотношение $[\pi_s(x), \phi_s(x)] = -i\hbar \delta(x - x')$. Позже мы увидим, как в таких случаях производить квантование. Одна из возможностей состоит в том, чтобы исключить излишние компоненты поля и применять перестановочные соотношения (1.7) к остающимся независимым компонентам (ср. § 12). Тогда гамильтонова функция может стать зависимой и от пространственных производных π_s , так что вместо (1.6) будет

$$H = H(\phi_1, \text{grad } \phi_1, \pi_1, \text{grad } \pi_1; \dots). \quad (1.10)$$

Дальнейшее рассмотрение будет справедливо и для этого, более общего вида гамильтоновых функций.

Известно, что канонические уравнения в квантовой механике, благодаря перестановочным соотношениям между q_j и p_j , имеют операторный смысл:

$$\dot{q}_j \equiv \frac{i}{\hbar} [H, q_j] = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j \equiv \frac{i}{\hbar} [H, p_j] = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Вообще, если φ — какая-либо функция q_j , p_j , не содержащая времени явно, то её производной по времени отвечает оператор¹⁾

$$\dot{\varphi} \equiv \frac{i}{\hbar} [H, \varphi]. \quad (1.11)$$

Так как мы заимствовали перестановочные соотношения из механики точки, здесь будет иметь место соответствие:

1) Чтобы ясно представить это, надо вспомнить, что оператор $\dot{\varphi}$ не должен зависеть от времени. Поэтому $\dot{\varphi}$ не является временной производной оператора φ . Однако известно, что среднее значение $\dot{\varphi}$ определяется производной от среднего значения величины φ

$$\overline{\dot{\varphi}} \equiv \frac{i}{\hbar} [\overline{H}, \varphi] = \frac{d\overline{\varphi}}{dt}.$$

каждой величине φ , т. е. каждой функции $\psi_0(x)$ и $\pi_0(x)$ и их пространственных производных, не содержащей времени явно, можно сопоставить производную по времени в виде оператора (1.11). В частности, операторы $\dot{\psi}_0$ и $\dot{\pi}_0$ определяются как

$$\dot{\psi}_0 \equiv \frac{i}{\hbar} [H, \psi_0(x)],$$

$$\dot{\pi}_0 \equiv \frac{i}{\hbar} [H, \pi_0(x)],$$

и определение значения скобок с помощью перестановочных соотношений (1.7, 8) приводит к операторным уравнениям, которые должны быть формально эквивалентны уравнениям поля (1.2) так же, как канонические уравнения движения точки $\left(\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)$ эквивалентны уравнениям движения в форме Лагранжа. Мы откажемся здесь от общего доказательства¹⁾, но в последующих применениях к специальным типам поля эквивалентность будет доказана в каждом отдельном случае.

Ввиду аналогии этих уравнений с каноническими мы будем называть систему (1.12) «каноническими уравнениями поля».

Из последующих примеров будет видно, как с помощью известных методов квантовой механики определить из этих уравнений стационарные состояния и собственные значения для H или других величин поля, несмотря на то обстоятельство, что здесь система имеет бесконечное число степеней свободы. Но сперва надо рассмотреть некоторые вопросы общего характера, ответ на которые не предугадан механикой точки.

¹⁾ См. цитированную работу Гейзенберга и Паули. Перестановки (1.12) оказываются равными функциональным производным H по π_0 и $-\psi_0$:

$$\frac{i}{\hbar} [H, \psi_0] = \frac{\delta H}{\delta \pi_0}, \quad \frac{i}{\hbar} [H, \pi_0] = -\frac{\delta H}{\delta \psi_0}$$

[ср. примечание 1, стр. 8; отсюда следует эквивалентность (1.12) и (1.2)].

§ 2. Сохранение энергии, импульса и момента количества движения

Вернёмся сначала к классической (неквантованной) теории. Закон сохранения энергии $\frac{dH}{dt} = 0$ предполагает, что функция Лагранжа явно не зависит от времени. В применении к интегральной гамильтоновой функции (1.5), представляющей полную энергию поля, закон сохранения даёт возможность ожидать, что для дифференциальной функции Гамильтона, имеющей смысл плотности энергии, имеет место уравнение непрерывности

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (2.1)$$

В самом деле, имеем, согласно (1.4) и (1.5),

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{\sigma} \left\{ \dot{\psi}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}} + \ddot{\psi}_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \ddot{\psi}_{\sigma}} - \right. \\ \left. - \left(\dot{\psi}_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \psi_{\sigma}} + \ddot{\psi}_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \ddot{\psi}_{\sigma}} + \sum_k \frac{\partial \dot{\psi}_{\sigma}}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \dot{\psi}_{\sigma}}{\partial x_k}} \right) \right\} \end{aligned}$$

и, пользуясь уравнениями поля (1.2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = - \sum_{\sigma} \sum_k \left\{ \dot{\psi}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \dot{\psi}_{\sigma}}{\partial x_k}} + \frac{\partial \dot{\psi}_{\sigma}}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \dot{\psi}_{\sigma}}{\partial x_k}} \right\} = \\ = - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{\sigma} \dot{\psi}_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \dot{\psi}_{\sigma}}{\partial x_k}}; \end{aligned}$$

следовательно, уравнение непрерывности (2.1) выполняется, если

$$\mathbf{S}_k = \sum_{\sigma} \dot{\psi}_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \dot{\psi}_{\sigma}}{\partial x_k}}. \quad (2.2)$$

Правда, это определение плотности потока энергии неоднозначно, так как к \mathbf{S} можно прибавить произвольное поле, свободное от источников.

Попробуем далее определить импульс поля как

$$G = \int dx \mathbf{G} \quad (2.3)$$

так, чтобы выполнялся закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{T} = 0, \quad (2.4)$$

где \mathbf{T} означает тензор натяжений, а $\text{Div } \mathbf{T}$ — его векторную дивергенцию.

Обозначая

$$x_4 = ict, \quad (2.5)$$

$$T_{44} = -H, \quad T_{k4} = \frac{i}{c} S_k, \quad T_{4k} = icG_k \quad (k=1, 2, 3), \quad (2.6)$$

можно объединить оба закона сохранения (2.1 и 4) в такой записи:

$$\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\nu=1, 2, 3, 4). \quad (2.7)$$

Выражение для тензора энергии-импульса \mathbf{T} , совпадающее с (1.5) и (2.2) в отношении компонент 4,4 и 4, k следующее:

$$T_{\mu\nu} = - \sum_{\sigma} \frac{\partial \phi_{\sigma}}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi_{\sigma}}{\partial x_\mu}} + L \cdot \delta_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Это выражение удовлетворяет законам сохранения (2.7), если только L явно не зависит от x_ν ($\nu=1, 2, 3, 4$), так как после короткого вычисления имеем:

$$\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = - \sum_{\sigma} \frac{\partial \phi_{\sigma}}{\partial x_\nu} \left\{ \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi_{\sigma}}{\partial x_\mu}} - \frac{\partial L}{\partial \phi_{\sigma}} \right\},$$

а это равно нулю вследствие уравнений поля (1.2), которые в обозначениях (2.5) гласят.

$$\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi_{\sigma}}{\partial x_\mu}} = \frac{\partial L}{\partial \phi_{\sigma}}. \quad (2.9)$$

Поэтому импульс сохраняется, если его плотность определена следующим образом:

$$G = \frac{1}{ic} T_{4k} = - \sum_{\sigma} \frac{\partial \phi_{\sigma}}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_{\sigma}} = - \sum_{\sigma} \frac{\partial \phi_{\sigma}}{\partial x_k} \pi_{\sigma}. \quad (2.10)$$

Это, конечно, не означает, что выражение (2.8) единственное, удовлетворяющее законам сохранения (2.7). Тензор (2.8) называется «каноническим тензором энергии-импульса».

Дальнейшее требование, которое нужно предъявить к тензору энергии-импульса, — это свойство симметрии: $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, которое, как известно, представляет условие, необходимое для сохранения момента количества движения наряду с сохранением импульса и энергии¹⁾.

Удовлетворяет ли канонический тензор этому требованию, — зависит от строения функции Лагранжа L . В простейших полях, которые мы в дальнейшем будем рассматривать как примеры (§ 5 до 10), условия симметрии выполнены. В других случаях есть возможность дополнить T до симметричного тензора, прибавляя к T другой тензор T' , дивергенция которого равна нулю ($\sum \frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0$); примеры этому встретятся дальше (§ 11 и дальн.)²⁾.

¹⁾ Если определить плотность момента

$$M_{\mu\nu\nu'} = T_{\mu\nu} x_{\nu'} - T_{\mu\nu'} x_{\nu},$$

то дивергенция будет, согласно (2.7),

$$\sum \frac{\partial M_{\mu\nu\nu'}}{\partial x_{\mu}} = T_{\nu'\nu} - T_{\nu\nu'},$$

т. е. равна нулю, если T симметрично. Отсюда вытекает, что антисимметричный тензор $\int dx M_{4\nu\nu'}$ постоянен во времени, в частности, постоянны компоненты момента количества движения:

$$\frac{1}{ic} \int dx M_{4kk'} = \int dx (G_k x_{k'} - G_{k'} x_k).$$

²⁾ Общий способ построения T' дают Белинфанте (Belinfante, *Physica* 6, 887, 1939) и Розенфельд (Rosenfeld, *Mem. de l'Acad. Roy. de Belgique*, XVIII, № 6, 1940). При этом Розенфельд исходит из общей теории относительности, которая, как известно, ставит тензор энергии и импульса в связь с гравитационным полем, а Белинфанте пользуется только постулатом инвариантности специальной теории относительности.

При выводе уравнений непрерывности (2.1 и 4, соотв. 7) мы подчеркнули, что функция Лагранжа L зависит от x и t только через ϕ_σ и их производные. Если же имеется и явная зависимость от x , t (вспомним, например, шредингеровскую волновую функцию частицы в заданном силовом поле), то для канонического тензора (2.8) получится при учёте (2.9) вместо (2.7):

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = \frac{\partial L}{\partial (x_{\nu})}, \quad (2.11)$$

где производная L по x_{ν} в правой части берётся при постоянных аргументах ϕ_σ , $\dot{\phi}_\sigma$, $\text{grad } \phi_\sigma$. Уравнение (2.11) выражает собой то, что в тех пространственно-временных областях, где $\frac{\partial L}{\partial (x_{\nu})}$ не обращается в нуль, происходит обмен энергией и импульсом между полем ϕ и воздействующими на него внешними системами.

Чтобы произвести переход к квантовой теории, надо компоненты тензора $T_{\mu\nu}$ (где точно так же, как и раньше, $H = -T_{44}$) с помощью (1.4) представить как функции переменных ϕ_σ , $\text{grad } \phi_\sigma$ и π_σ , которые потом интерпретируются как операторы с перестановочными отношениями (1.7); перестановочные сомножители при этом надо расположить так, чтобы операторы, отвечающие действительным величинам (S_k , G_k , T_{kl}), были эрмитовскими. Тогда сохранение общего импульса G (мы снова допустили, что $\frac{\partial L}{\partial (x_{\nu})} = 0$) выразится в том, что оператор $G = \int dx G$ коммутирует с оператором Гамильтона H : $[H, G] = 0$ ¹⁾.

Чтобы доказать также справедливость дифференциальных законов сохранения (2.1 и 2.4) в квантованной теории, надо

¹⁾ Известно, что законы сохранения (как в классической механике) связаны с известными свойствами инвариантности гамильтоновой функции; так, например, сохранение импульса требует инвариантности H относительно параллельного переноса координатной системы. Это имеет место как раз, если $\partial L / \partial (x_{\nu}) = 0$, и ею можно воспользоваться, чтобы доказать перестановочность оператора импульса G (2.3, 10) с H в общем виде: ср. Гейзенберг и Паули (Heisenberg и Pauli), Zs. f. Phys. 59, 168, § 1, 1929.

образовать операторы, соответствующие классическим величинам $\frac{\partial H}{\partial t}$ и $\frac{\partial G}{\partial t}$:

$$\dot{H}(x) = \frac{i}{\hbar} [H, H], \quad \dot{G} = \frac{i}{\hbar} [H, G], \quad (2.12)$$

но их наверняка можно представить как пространственные дивергенции

$$\dot{H} = -\operatorname{div} S, \quad \dot{G} = -\operatorname{Div} T, \quad (2.13)$$

так как пространственные интегралы

$$\dot{H} = \int dx \dot{H}(x), \quad \dot{G} = \int dx \dot{G}(x)$$

исчезают благодаря тому, что $[H, H] = 0$, $[H, G] = 0$.

При специальном выборе функции Лагранжа эти операторные уравнения (2.13), конечно, оказываются вполне аналогичными классическим уравнениям (2.1, 4). Поэтому величины $T_{\mu\nu}$, взятые из классической теории и перетолкованные как операторы [ср. (2.6)], удовлетворяют уравнениям (2.13), если только надлежащим образом выбран порядок сомножителей, и т. п.

§ 3. Комплексные функции поля. Сохранение заряда

Предыдущее рассмотрение относилось к действительным полям ψ . Но в природе важную роль играют также и комплексные поля, примером чему является волновая функция де Бройля-Шредингера для электрона. Конечно, каждое комплексное поле можно разложить на действительную и мнимую части, представить L как функцию действительных полей ψ_σ и применить вышеразвитый формализм. Но проще вести вычисления непосредственно с комплексными волновыми функциями. Мы вкратце поясним, в чём надо изменить аппарат, причём для простоты на примере поля, состоящего из единственной (комплексной) компоненты ψ .

Пусть

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + i\psi_2), \quad \psi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 - i\psi_2), \quad (3.1)$$

где ψ_1 и ψ_2 — действительные функции ($\psi_\sigma = \psi_\sigma^*$).

Вместо того чтобы представлять L как функцию ψ_1 и ψ_2 и их производных, мы представим L в зависимости от ψ и ψ^* и их производных:

$$L = L(\psi, \text{grad } \psi, \dot{\psi}; \psi^*, \text{grad } \psi^*, \dot{\psi}^*). \quad (3.2)$$

Чтобы получить уравнения поля из вариационного принципа ($\delta I = 0$), вместо ψ_1 и ψ_2 можно независимо варьировать $\psi(x, t)$ и $\psi^*(x, t)$, так как этим учитывается такое же множество варьлируемых полей:

$$\psi(x, t) \rightarrow \psi(x, t) + \delta\psi(x, t), \quad \psi^*(x, t) \rightarrow \psi^*(x, t) + \delta\psi^*(x, t).$$

Тогда получаются уравнения поля, подобные выведенным выше ($x_4 = ict$, $\mu = 1, \dots, 4$):

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \psi}, \quad \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} = \frac{\partial L}{\partial \psi^*}. \quad (3.3)$$

Смысл стоящих здесь частных производных от L заключается в том, что L считают, согласно (3.2), представленной как функцию ψ , ψ^* и их производных, например: $\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}$ означает производную по $\dot{\psi}$ при постоянных $\text{grad } \psi$, $\dot{\psi}$, ψ^* , $\text{grad } \psi^*$, $\dot{\psi}^*$.

Разумеется, уравнения (3.3) эквивалентны (1.2) при $\sigma = 1, 2$.

Естественно поэтому определить поля π , π^* , канонически сопряжённые с ψ , ψ^* следующим способом:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}, \quad \pi^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*}. \quad (3.4)$$

Выразим π , π^* через действительные поля ψ_1 , ψ_2 , канонически сопряжённые с ψ_1 , ψ_2 :

$$\pi_{\sigma} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \frac{\partial \dot{\psi}^*}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}} \quad (\sigma = 1, 2).$$

Пользуясь (3.4) и (3.1), получим

$$\pi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi + \pi^*), \quad \pi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} (\pi - \pi^*)$$

или

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - i\pi_2), \quad \pi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 + i\pi_2). \quad (3.5)$$

Так как $\pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* = \pi_1\dot{\phi}_1 + \pi_2\dot{\phi}_2$, найдём плотность энергии, согласно (1.5),

$$H = \pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* - L, \quad (3.6)$$

и аналогично для плотности импульса (2.10)

$$G = -(\pi \text{grad } \phi + \pi^* \text{grad } \phi^*). \quad (3.7)$$

Вообще легко проверить, что для всех компонент тензора энергии-импульса (2.8) справедливо равенство:

$$T_{\mu\nu} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu}} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\nu}\right) + L \cdot \delta_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

В квантовой теории ϕ , ϕ^* , π , π^* , так же как и ϕ_σ , π_σ , являются операторами, зависящими от координат, но, в то время как операторы ϕ_σ , π_σ , отвечающие действительным компонентам поля, эрмитовские ($\phi_\sigma = \phi_\sigma^*$, $\pi_\sigma = \pi_\sigma^*$), это никоим образом не относится к операторам (3.1 и 5) ввиду присутствия в них мнимой единицы i ; но ϕ^* эрмитовски сопряжено с ϕ и π^* с π . Перестановочные соотношения для них непосредственно следуют из перестановок ϕ_σ , π_σ ; согласно (3.1, 5) и (1.7), находим:

$$\left. \begin{aligned} [\pi(x), \phi(x')] &= [\pi^*(x), \phi^*(x')] = \frac{\hbar}{i} \delta(x - x'), \\ [\phi(x), \phi(x')] &= [\phi(x), \phi^*(x')] = [\phi^*(x), \phi^*(x')] = \\ &= [\pi(x), \pi(x')] = [\pi(x), \pi^*(x')] = [\pi^*(x), \pi^*(x')] = \\ &= [\pi(x), \phi^*(x')] = [\pi^*(x), \phi(x')] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Две пары неперестановочных переменных составляют ϕ , π и ϕ^* , π^* , что оправдывает их название как канонически сопряжённых; формулы (3.1, 5) дают «каноническое преобразование».

В случае волновой функции Шредингера-де-Бройля, которую мы упоминали при введении комплексной волновой функции, известно, что функции ψ и $\psi e^{i\alpha}$ (α — действительная

постоянная) описывают физически одинаковые состояния: все наблюдаемые величины (как, например, $\psi^*\psi$) не зависят от значения постоянной фазы. Предположим, что наше поле именно такого рода. Для этого постулируем, что дифференциальная функция Лагранжа (3.2) инвариантна относительно подстановки

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}, \psi^* \rightarrow \psi^* e^{-i\alpha} \quad (\alpha \text{ — действительная постоянная}). \quad (3.10)$$

Тогда величины, относящиеся к импульсу и энергии, согласно (3.8) обладают тем же свойством инвариантности¹⁾. Мы утверждаем, что такое поле может быть интерпретировано как несущее заряд, причём этому полю можно сопоставить плотность заряда ρ и тока s , удовлетворяющие уравнению непрерывности. А именно: пусть

$$\left. \begin{aligned} \rho &= -i\varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \psi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \psi^* \right) = -i\varepsilon (\pi\psi - \pi^*\psi^*), \\ s_k &= -i\varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_k}} \psi - \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k}} \psi^* \right) \end{aligned} \right\} (3.11)$$

(ε — действительная постоянная). Тогда, пользуясь классическими уравнениями поля (3.3), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} s &= -i\varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} \psi + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_k}} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial L}{\partial \psi^*} \psi^* + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k}} \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi^*}{\partial \dot{\psi}^*} \dot{\psi}^* \right) \right\}. \end{aligned}$$

Но с точностью до множителя $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ правая часть уравнения тождественна с тем изменением, которое получит L (3.2) от преобразования калибровки (3.10), если фазовое изменение бесконечно мало: $\psi \rightarrow \psi(1 + i\alpha)$, $\psi^* \rightarrow \psi^*(1 - i\alpha)$, т. е. $\delta\psi = i\alpha\psi$; $\delta\psi^* = -i\alpha\psi^*$. Эта вариация L исчезает ввиду постулированного выше свойства инвариантности, и отсюда полу-

¹⁾ Паули называет её «калибровочной инвариантностью (Eichinvarianz) первого рода». Pauli, Phys. Rev. 58, 716, 1940.

чается уравнение непрерывности для плотностей электрического заряда и тока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} s = 0. \quad (3.12)$$

Вводя $x_4 = ict$, $s_4 = ic\rho$, можно написать вместо (3.11, 12) и так ($\nu = 1, \dots, 4$):

$$s_\nu = -i\varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu}} \phi - \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\nu}} \phi^* \right), \quad \sum_\nu \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \quad (3.13)$$

В квантовой теории, где ρ и s превращаются в эрмитовские операторы, вместо (3.12) имеет место операторное уравнение

$$\dot{\rho}(x) \equiv \frac{i}{\hbar} [H, \rho(x)] = -\operatorname{div} s(x). \quad (3.14)$$

Если есть несколько комплексных ψ -функций ψ , ψ' , то возможно, что L инвариантно только при одновременном преобразовании калибровки

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}, \quad \psi' \rightarrow \psi' e^{-i\alpha}.$$

Тогда, как легко видеть, уравнение непрерывности (3.12) справедливо только для суммы электрических плотностей, относящихся к отдельным полям (см. § 12).

Действительные компоненты поля ψ_σ , которые нельзя объединить попарно в комплексные поля, не обладают группой преобразования типа (3.10); поэтому из таких действительных полей и их производных нельзя сконструировать «плотностных» функций, которые можно было бы интерпретировать как плотность заряда и как плотность потока заряда; по крайней мере, нельзя сделать это по общему рецепту [операция (3.11), применённая к действительным ψ -функциям, даёт $\rho = 0$, $s_k = 0$]. Поэтому действительные функции применяются к описанию электрически нейтральных полей, таких, как электромагнитное (световые кванты не заряжены). Напротив, заряженные поля естественно описывать комплексными функциями (ср. § 8 и дальше).

§ 4. Инвариантность по отношению к преобразованиям Лорентца. Зависящие от времени операторы поля и их перестановочные соотношения

Чтобы обеспечить инвариантность классического формализма относительно преобразований Лорентца, достаточно выбрать инвариантную дифференциальную функцию Лагранжа. Тогда уравнения поля инвариантным способом определяются из вариационного принципа: варьируемый интеграл $I = \int dt \int dx \mathbf{L}$ инвариантен благодаря тому, что инвариантен четырёхмерный элемент объёма $dt dx$. (Пространственно-временная область интегрирования может быть выбрана произвольно, без какого-либо выделения временной оси.) В каждой системе отсчёта гамильтонова функция вычисляется из лагранжевой формально одинаково; при изменении системы отсчёта $H = -T_{44}$ преобразуется как плотность энергии. В самом деле, легко видеть, что $T_{\mu\nu}$ [(2.8) соответственно (3.8)] обладает трансформационными свойствами тензора второго ранга, а s_ν (3.13) — свойствами четырёхмерного вектора.

Способ построения инвариантной функции \mathbf{L} , конечно, зависит от трансформационных свойств компонент поля ψ_σ . Надо заметить, что (1.1) представляет самое общее допустимое предположение относительно \mathbf{L} : вторая и более высокие пространственные производные ψ_σ , по соображениям инвариантности, могли бы встречаться только в комбинации с временными производными того же порядка, а это запрещено каноническим формализмом.

Труднее доказать релятивистскую инвариантность квантованной теории. Прежде всего надо устранить выделение временной координаты, заключающееся в том, что вводились операторы $\psi_\sigma(x)$, $\pi_\sigma(x)$, зависящие только от пространственных координат. Мы введём поэтому более общие операторы $\psi_\sigma(x, t)$, $\pi_\sigma(x, t)$, при построении которых нам снова послужит образцом механика точки.

В квантовой механике точки зависящие от времени операторы $q_j(t)$, $p_j(t)$ обыкновенно определяются из требования, чтобы они удовлетворяли каноническим уравнениям движения

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

и переходили при $t=0$ в не зависящие от времени операторы q_j, p_j . Так как начало отсчёта времени ничем не должно выделяться, перестановочные соотношения (1.7) должны иметь место для любого значения t ; действительно, благодаря уравнениям движения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[p_j, q_{j'}] &= - \left[\frac{\partial H}{\partial q_j}, q_{j'} \right] + \left[p_{j'}, \frac{\partial H}{\partial p_j} \right] = \\ &= - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j} + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} = 0^1) \end{aligned}$$

и также

$$\frac{d}{dt}[q_j, q_{j'}] = \frac{d}{dt}[p_j, p_{j'}] = 0.$$

Если оператор Гамильтона не зависит от времени явно, можно построить зависящие от времени операторы из независящих с помощью операторов:

$$\begin{aligned} S &= e^{\frac{it}{\hbar} H} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{it}{\hbar} H \right)^k, \\ S^* &= e^{-\frac{it}{\hbar} H} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{it}{\hbar} H \right)^k, \end{aligned} \quad (4.1)$$

унитарных благодаря тому, что

$$SS^* = S^*S = 1^2).$$

Если определить

$$q_j(t) = Sq_jS^*, \quad p_j(t) = Sp_jS^*,$$

то ясно, что

$$q_j(0) = q_j; \quad p_j(0) = p_j, \quad (4.2)$$

а для производных по времени (благодаря тому, что

$$\frac{dS}{dt} = S \cdot \frac{i}{\hbar} H, \quad \frac{dS^*}{dt} = -\frac{i}{\hbar} HS^*)$$

1) Известно, что $[F, q_j] = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial F}{\partial p_j}$, $[F, p_j] = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial F}{\partial q_j}$.

2) Время t надо понимать не как оператор, а как параметр (c -число); поэтому оно перестановочно с H .

получится:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_j(t)}{dt} &= S \frac{i}{\hbar} [H, q_j] S^* = S \frac{\partial H}{\partial p_j} S^* = \frac{\partial H}{\partial p_j}(t), \\ \frac{dp_j(t)}{dt} &= S \frac{i}{\hbar} [H, p_j] S^* = -S \frac{\partial H}{\partial q_j} S^* = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(t), \end{aligned} \right\} (4.3)$$

так что операторы $q_j(t)$, $p_j(t)$ удовлетворяют поставленным требованиям. Инвариантность перестановочных соотношений относительно S -преобразования (4.2) гарантирует их справедливость для любых моментов времени:

$$\begin{aligned} [q_j(t), q_{j'}(t)] &= [p_j(t), p_{j'}(t)] = 0; \\ [p_j(t), q_{j'}(t)] &= \frac{\hbar}{i} \delta_{jj'}. \end{aligned}$$

С помощью (4.1, 2) можно отсюда вычислить и перестановки неодновременных величин, как например $[q_j(t), q_{j'}(t')]$.

Аналогичным образом, в теории поля можно построить из операторов $\psi_\sigma(x)$, $\pi_\sigma(x)$, зависящих от радиуса-вектора x как параметра, зависящие от времени операторы $\psi_\sigma(x, t)$, $\pi_\sigma(x, t)$, которые подчиняются каноническим уравнениям поля как функции пространства и времени и переходят при $t=0$ в не зависящие от времени операторы

$$\psi_\sigma(x, 0) = \psi_\sigma(x), \quad \pi_\sigma(x, 0) = \pi_\sigma(x).$$

Чтобы доказать релятивистскую инвариантность перестановочных соотношений, надо, вообще говоря, поступать следующим образом: производя преобразование Лорентца $\bar{x}_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu$, приписать операторам $\psi_\sigma(x, t)$, $\pi_\sigma(x, t)$ тот же характер преобразований, что и классическим величинам ψ_σ, π_σ . Если, например, классическое поле образует четырёхмерный вектор ψ_σ , то оператор $\psi_\sigma(x, t)$ преобразуется ковариантно к координатам x_ν . Когда вычислены перестановки $[\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')]$, то тем самым определены и перестановки в новой системе отсчёта $[\bar{\psi}_\sigma(\bar{x}, t), \bar{\psi}_{\sigma'}(\bar{x}', t')]$ так, что можно непосредственно проверить инвариантность. В частности, надо потребовать, чтобы перестановка одновременных величин ($\bar{t} = \bar{t}'$) соответствовала в новой системе отсчёта каноническим перестановочным соотношениям (1.7).

Гейзенберг и Паули¹⁾ доказали инвариантность в весьма общем виде: они использовали групповое свойство преобразований Лорентца, на основе которого достаточно доказать инвариантность относительно бесконечно малого преобразования. Это приводит к упрощению по следующей причине для двух событий, одновременных в новой и старой системе, имеет место

$$t - t' = \sum_{k=1}^3 a_k (x_k - x'_k),$$

где a_k можно считать бесконечно малыми и учитывать только в первом порядке. В этом приближении достаточно вычислить только, например,

$$\begin{aligned} [\psi_{\sigma}(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')] &= \\ &= \left[\left\{ \psi_{\sigma}(x, t) + (t - t') \left(\frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial t} \right)_{t=t'} \right\}, \psi_{\sigma'}(x', t') \right] = \\ &= (t - t') [\dot{\psi}_{\sigma}(x), \psi_{\sigma'}(x')], \end{aligned}$$

что можно сделать с помощью канонических уравнений поля и перестановочных соотношений (1.7). Мы не будем доказывать инвариантность в общем виде: вместо этого мы выведем для перестановок, зависящих от времени операторов поля, некоторые общие формулы, которые позволят нам найти в релятивистски инвариантном виде перестановочные соотношения для определённых, специальных типов поля, рассматриваемых в дальнейшем. Мы определим:

$$\psi_{\sigma}(x, t) = e^{-\frac{itE}{\hbar}} \psi_{\sigma}(x) e^{-\frac{itE}{\hbar}}, \quad \pi_{\sigma}(x, t) = e^{\frac{itE}{\hbar}} \pi_{\sigma} e^{-\frac{itE}{\hbar}}. \quad (4.4)$$

Если здесь отождествить E с интегральной гамильтоновой функцией $H = \int dx \mathbf{H}$, то (4.4) представит точное подражание выражению (2.1, 2). Однако мы предпочтём выбрать для E оператор энергии, отличный от H , например гамильтонову функцию «невозмущённой системы»²⁾. Здесь существенно

¹⁾ Zs. f. Phys. **56**, 1, 1929. Ср. Розенфельд (Rosenfeld), Zs. f. Phys. **63**, 574, 1930.

²⁾ Это важно для теории поля со «многими временами», ср. § 18 (квантовая электродинамика со многими временами).

допущение, что оператор E не зависит от времени явно:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0. \quad (4.5)$$

Аналогично (4.3) из (4.4) следует путём дифференцирования по времени (при постоянном x , что выражается в записи $\partial/\partial t$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_\sigma(x, t)}{\partial t} &= e^{\frac{it}{\hbar} E} \frac{i}{\hbar} [E, \psi_\sigma(x)] e^{-\frac{it}{\hbar} E} = \frac{i}{\hbar} [E, \psi_\sigma(x, t)], \\ \frac{\partial \pi_\sigma(x, t)}{\partial t} &= e^{\frac{it}{\hbar} E} \frac{i}{\hbar} [E, \pi_\sigma(x)] e^{-\frac{it}{\hbar} E} = \frac{i}{\hbar} [E, \pi_\sigma(x, t)]. \end{aligned} \right\} (4.6)$$

Теперь рассмотрим перестановку $[\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')]$. Применяя тождество

$$\psi_\sigma(x, t) = e^{\frac{it'}{\hbar} E} \psi_\sigma(x, t - t'), e^{-\frac{it'}{\hbar} E},$$

мы можем записать:

$$[\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')] = e^{\frac{it'}{\hbar} E} [\psi_\sigma(x, t - t'), \psi_{\sigma'}(x')] e^{-\frac{it'}{\hbar} E}.$$

Если разложим $\psi_\sigma(x, t - t')$ по степеням $t - t'$:

$$\psi_\sigma(x, t - t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t - t')^n \psi_\sigma^{(n)}(x),$$

где

$$\psi_\sigma^{(n)}(x) \equiv \left(\frac{\partial^n \psi_\sigma(x, t)}{\partial t^n} \right)_{t=0}, \quad (4.7)$$

то получится:

$$\begin{aligned} &[\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')] = \\ &= e^{\frac{it'}{\hbar} E} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t - t')^n [\psi_\sigma^{(n)}(x), \psi_{\sigma'}(x')] e^{-\frac{it'}{\hbar} E}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Сделаем теперь допущение, относящееся ко всем дальнейшим приложениям, что оператор энергии E и соответствующая

1) Если $E = H$, то по (4.6) $\dot{\psi} = \dot{\psi}$, $\dot{\psi} = \ddot{\psi} \dots$

плотность энергии E ($E = \int dx E$) выражаются в виде квадратичной формы от $\psi_\sigma(x)$, $\pi_\sigma(x)$ и их пространственных производных. Тогда, на основе перестановочных соотношений (1.7) легко видеть, что перестановки $[E, \psi_\sigma(x)]$ и $[E, \pi_\sigma(x)]$ суть линейно однородные функции $\psi_\sigma(x)$, $\pi_\sigma(x)$ и их пространственных производных; следовательно, по (4.6) и (4.4) операторы $\frac{\partial \psi_\sigma(x, t)}{\partial t}$ и $\frac{\partial \pi_\sigma(x, t)}{\partial t}$ — линейно однородные функции $\psi_\sigma(x, t)$, $\pi_\sigma(x, t)$ и их пространственных производных и то же самое относится и к более высоким производным по времени $\frac{\partial^n \psi_\sigma(x, t)}{\partial t^n}$ и $\frac{\partial^n \pi_\sigma(x, t)}{\partial t^n}$. Поэтому можно написать:

$$\frac{\partial^n \psi_\sigma(x, t)}{\partial t^n} = \sum_{\sigma'} \{ c_{\sigma\sigma'}^{(n)} \cdot \psi_{\sigma'}(x, t) + d_{\sigma\sigma'}^{(n)} \pi_{\sigma'}(x, t) \}, \quad (4.9)$$

где $c_{\sigma\sigma'}^{(n)}$ и $d_{\sigma\sigma'}^{(n)}$ некоторые дифференциальные операторы относительно пространственных координат x . В частности, при $t=0$ отсюда получается для оператора $\psi_\sigma^{(n)}(x)$, определённого из (4.7):

$$\psi_\sigma^{(n)}(x) = \sum_{\sigma'} \{ c_{\sigma\sigma'}^{(n)} \cdot \psi_{\sigma'}(x) + d_{\sigma\sigma'}^{(n)} \cdot \pi_{\sigma'}(x) \}. \quad (4.10)$$

Перестановка $[\psi_\sigma^{(n)}(x), \psi_{\sigma'}(x')]$, входящая в (4.8), выводится отсюда по правилу (1.7):

$$[\psi_\sigma^{(n)}(x), \psi_{\sigma'}(x')] = \frac{\hbar}{i} d_{\sigma\sigma'}^{(n)} \cdot \delta(x - x'); \quad (4.11)$$

здесь дифференциальный оператор $d_{\sigma\sigma'}^{(n)}$ действует на аргумент x δ -функции; [сингулярную δ -функцию надо сначала представить себе аппроксимированной с помощью регулярной функции от $x - x'$; в пространственном интеграле $\int dx f(x) d_{\sigma\sigma'}^{(n)} \delta(x - x')$ заменить дифференцирование δ -дифференцированием $f(x)$ с помощью интегрирования по частям и потом совершить предельный переход к сингулярной δ -функции по (1.9)]. В формуле (4.11) существенно, что её правая часть не зависит от переменных поля и поэтому перестановочна с E ; если под-

ставить (4.11) в (4.8), то сомножители $e^{\pm \frac{iEt}{\hbar}}$ могут быть перенесены оба направо или налево и сократятся. Результат гласит:

$$\begin{aligned} [\psi_{\sigma}(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')] &= \frac{\hbar}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t-t')^n d_{\sigma\sigma'}^{(n)} \delta(x-x') \equiv \\ &\equiv \frac{\hbar}{i} D_{\sigma\sigma'}(x-x', t-t'). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Итак, искомая перестановка зависящих от времени операторов ψ_{σ} получается в виде (сингулярной) функции от $x-x'$ и $t-t'$, которую можно вычислить, если известны дифференциальные операторы $d_{\sigma\sigma'}^n$, определяемые (4.9) или (4.10).

Таким же образом принципиально вычисляются и перестановки $[\pi_{\sigma}(x, t), \pi_{\sigma'}(x', t')]$, $[\pi_{\sigma}(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')]$, но это излишне, так как все канонические правила перестановки полностью заключаются в (4.12) и этим равенством достаточно ограничиться при рассмотрении релятивистской инвариантности перестановочных соотношений. Чтобы доказать это, продифференцируем обе стороны (4.12) n раз по t и n' раз по t' и подставим $t=t'=0$; тогда из (4.7) получается:

$$[\overset{(n)}{\psi}_{\sigma}(x), \overset{(n')}{\psi}_{\sigma'}(x')] = \frac{\hbar}{i} (-1)^{n'} d_{\sigma\sigma'}^{(n+n')} \delta(x-x'). \quad (4.13)$$

Если $n=n'=0$ ($\overset{(0)}{\psi}_{\sigma} = \psi_{\sigma}$), то

$$[\psi_{\sigma}(x), \psi_{\sigma'}(x')] = \frac{\hbar}{i} d_{\sigma\sigma'}^{(0)} \delta(x-x') = 0 \quad (4.14)$$

и из (4.9)

$$d_{\sigma\sigma'}^{(0)} = 0 \quad (c_{\sigma\sigma'}^{(0)} = \delta_{\sigma\sigma'}). \quad (4.15)$$

Полагая в (4.13) $n=1, n'=0$ или $n=n'=1$ и выражая $\overset{(1)}{\psi}_{\sigma}$ по (4.10) через ψ_{σ} и π_{σ} , будем иметь для перестановок $[\pi_{\sigma}(x), \psi_{\sigma'}(x')]$ и $[\pi_{\sigma}(x), \pi_{\sigma'}(x')]$ линейные уравнения, вполне достаточные вместе с (4.14) для их определения. Таким образом мы снова получим канонические перестановочные соотношения (1.7), следовательно, они вполне эквивалентны новым соотношениям (4.12).

Чтобы доказать релятивистскую инвариантность канонического метода квантования, надо проверить, что соотношения

(4.12) выглядят одинаково во всех лорентцевых системах отсчёта, т. е., что функции $D_{\sigma\sigma'}(x - x', t - t')$ в (4.12) преобразуются как произведения $\psi_{\sigma}(x, t) \cdot \psi_{\sigma'}(x', t')$ (например, как тензор второго ранга, если $\psi_{\sigma}(\sigma = 1, \dots, 4)$ образуют четырёхмерный вектор). Впоследствии мы вычислим функции $D_{\sigma\sigma'}$ для различных специальных типов поля, и тогда инвариантность выразится непосредственно в строении формул (4.12).

Чтобы продвинуться в вычислении перестановок ещё на один шаг, воспользуемся тем, что гамильтонова функция E во всех интересующих нас вопросах приводит к волновому уравнению Шредингера-Гордона для функций ψ_{σ} ¹⁾:

$$(\square - \mu^2) \psi_{\sigma}(x, t) = 0,$$

где

$$\square \equiv \sum_{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_{\nu}^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (4.16)$$

Известно, что частными решениями этого волнового уравнения являются, например, де-бройлевские волновые функции (комплексные) $e^{i(kx \mp \sqrt{\mu^2 + k^2} ct)}$, скалярная постоянная $\frac{\mu \hbar}{c}$ представляет массу соответствующей частицы в покое. В самом деле, в дальнейшем выяснится, что стационарные состояния квантованных полей с уравнениями (4.16) представляют системы частиц с массой покоя.

Предположим, что (4.16) справедливо для операторов

$$\frac{\partial^2 \psi_{\sigma}}{\partial t^2}(x, t) = c^2 (\Delta - \mu^2) \psi_{\sigma}(x, t). \quad (4.17)$$

Отсюда путём двукратного дифференцирования (4.9) по t следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+2} \psi_{\sigma}}{\partial t^{n+2}}(x, t) &\equiv \sum_{\sigma'} \{ c_{\sigma\sigma'}^{(n+2)} \psi_{\sigma'}(x, t) + d_{\sigma\sigma'}^{(n+2)} \pi_{\sigma'}(x, t) \} = \\ &= c^2 (\Delta - \mu^2) \sum_{\sigma'} \{ c_{\sigma\sigma'}^{(n)} \psi_{\sigma'}(x, t) + d_{\sigma\sigma'}^{(n)} \pi_{\sigma'}(x, t) \}, \quad (4.18) \end{aligned}$$

¹⁾ Речь идёт только о частном волновом уравнении для случая «свободного поля», относительно общего уравнения Шредингера-Гордона ср. § 11.

так что

$$d_{\sigma\sigma'}^{(n+2)} = d_{\sigma\sigma'}^{(n)} (\Delta - \mu^2)$$

(и соответственно для двух неинтересных здесь операторов $c_{\sigma\sigma'}^{(n)}$). Так как $d_{\sigma\sigma'}^0$, по определению — нуль, все $d_{\sigma\sigma'}^{(n)}$ с чётным n по (4.18) исчезают:

$$d_{\sigma\sigma'}^{(2m)} = 0, \quad (4.19)$$

а для нечётного n

$$d_{\sigma\sigma'}^{(2m+1)} = d_{\sigma\sigma'}^{(1)} [c^2 (\Delta - \mu^2)]^m. \quad (4.20)$$

Оператор $d_{\sigma\sigma'}^{(1)}$ может быть по (4.9 или 10) либо по (4.6) определён уравнением

$$\psi_{\sigma}^{(1)}(x) \equiv \frac{i}{\hbar} [E, \psi_{\sigma}(x)] = \sum_{\sigma'} \{ c_{\sigma\sigma'}^{(1)} \psi_{\sigma'}(x) + d_{\sigma\sigma'}^{(1)} \pi_{\sigma'}(x) \}. \quad (4.21)$$

С помощью (4.19, 20) вычисляются функции $D_{\sigma\sigma'}$

$$D_{\sigma\sigma'}(x, t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n d_{\sigma\sigma'}^{(n)} \delta(x) = d_{\sigma\sigma'}^{(1)} \cdot D(x, t), \quad (4.22)$$

где

$$D(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} t^{2m+1} [c^2 (\Delta - \mu^2)]^m \delta(x). \quad (4.23)$$

Чтобы произвести суммирование по m , представим дираковскую δ -функцию как интеграл Фурье

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk e^{ikx} \quad (4.24)$$

(kx — скалярное произведение волнового вектора k на радиус-вектор x ; dk — элемент объёма k -пространства). Что свойства δ -функции правильно передаются интегральным представлением (4.24), легко видеть из интегральной теоремы Фурье

$$\int dx f(x) \delta(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \int dx f(x) e^{ik(x-x')} = f(x');$$

это уравнение совпадает с (1.9) и эквивалентно (1.8). Строго говоря, в подынтегральную функцию (4.24) надо было бы

ввести множитель, обеспечивающий сходимость (например, $\text{const. } e^{-\alpha k^2}$), что соответствует замене δ -функции регулярной функцией, и произвести предельный переход ($\alpha \rightarrow 0$) сперва в пространственном интеграле $\int dx f(x) \delta(x - x')$. Сомножители, которые подавляют значение областей интегрирования с большим $|k|$ («обрезают»), всегда предполагаются присутствующими в дальнейшем, если в них есть необходимость.

Вместе с (4.24) (4.23) даёт

$$D(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dke^{ikx} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} t^{2m+1} [-c^2(k^2 + \mu^2)]^m$$

или, так как

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} (-1)^m \tau^{2m+1} = \sin \tau,$$

$$D(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dke^{ikx} \frac{\sin(tc \sqrt{\mu^2 + k^2})}{c \sqrt{\mu^2 + k^2}}. \quad (4.25)$$

Мы утверждаем, что функция $D(x - x'; t - t')$ инвариантна относительно преобразований Лорентца. Для доказательства рассмотрим пространственно-временной интеграл Фурье

$$\int dk \int dk_0 g(k_0^2 - k^2) e^{i(kx - k_0 t)}, \quad (4.26)$$

где мы опять написали x вместо $x - x'$ и t вместо $t - t'$. Трёхмерный вектор k образует вместе с k_0 четырёхмерный вектор, так что фаза волны ($kx - k_0 ct$) релятивистски инвариантна; то же относится и к четырёхмерному элементу объёма $dk \cdot dk_0$. Поэтому инвариантен и интеграл Фурье (4.26), если амплитудная функция g зависит только от инварианта $k_0^2 - k^2$. То же самое верно, если интегрирование распространяется и не по всему k, k_0 пространству, а по инвариантной области, такой, как конус $k_0 > k$, или по противоположному конусу $k_0 < -|k|^1$. В обоих случаях мы преобразуем интеграл (4.26), вводя $\mu = \sqrt{k_0^2 - k^2}$ как переменную интегрирования вместо k_0 (при неизменном k):

¹ Преобразований с обращением знака времени мы не рассматриваем.

$k_0 = \pm \sqrt{\mu^2 + k^2}$, $dk_0 = \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 + k^2}}$; если ещё поменять порядок интегрирования по μ - и по k -пространству, получим из (4.26):

$$\int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot g(\mu^2) \int dk \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + k^2}} e^{i(kx \mp \sqrt{\mu^2 + k^2} ct)}.$$

Так как переменная интегрирования μ ($= \sqrt{k_0^2 - k^2}$) релятивистски инвариантна и g — произвольная функция (можно выбрать одномерную δ -функцию, отличную от нуля только при одном значении μ), из инвариантности этих интегралов следует, что обе функции координат и времени

$$\int dk \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + k^2}} e^{i(kx \mp \sqrt{\mu^2 + k^2} ct)} \quad (4.27)$$

инвариантны для каждого действительного значения параметра, но разность этих функций совпадает с функцией $D(x, t)$ с точностью до числового множителя, что и доказывает релятивистскую инвариантность (4.45)¹⁾.

Так как, если справедливо волновое уравнение (4.12), перестановочные соотношения могут быть написаны по (4.4) в виде

$$[\psi_{\sigma}(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')] = \frac{\hbar}{i} d_{\sigma\sigma'}^{(1)} D(x - x', t - t'); \quad (4.28)$$

для их релятивистской инвариантности необходимо только, чтобы операторы $d_{\sigma\sigma'}^{(1)}$, определённые в (4.21), преобразовались как (классические) функции $\psi_{\sigma}, \psi_{\sigma'}$. Это легко будет подтвердить в отдельности для каждого поля, которое мы будем рассматривать. Надо указать на то, что все эти формулы непосредственно переносятся на комплексные поля и неэрмитовские операторы. Если рассматривать ψ и ψ^* как незави-

¹⁾ Йордан и Паули (Jordan и Pauli, Zs. f. Phys 47, 151, 1928) впервые ввели инвариантную D -функцию для частного значения $\mu = 0$ и применили к установлению инвариантных перестановочных соотношений для электромагнитного поля. Ср. § 16 и 18.

симые переменные в смысле § 3, то в (4.28, 21) можно отождествить одну половину ψ_0 с ψ , а другую с ψ^* (ср. § 8 и 12).

Интегрированием по k -пространству в (4.25) D -функция сводится к функции Бесселя от аргумента $\mu\sqrt{c^2t^2 - x^2}$. Кроме того, на световом конусе $c^2t^2 - x^2$ имеется δ -образная особенность¹⁾.

Мы не будем входить в это подробно, а установим только некоторые характерные черты D -функции, которые понадобятся позже. Согласно (4.25) $D(x, t)$ — действительная функция со свойствами симметрии (4.29)

$$\begin{aligned} D(x, t) &= D(-x, t) = -D(x, -t) = \\ &= -D(-x, -t). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ввиду того что интеграл Фурье (4.25) представляет суперпозицию де Бройлевских волн $e^{i(kx \mp \sqrt{\mu^2 + k^2}ct)}$, удовлетворяющих уравнению Шредингера-Гордона (4.16), D -функция тоже является решением дифференциального уравнения

$$(\square - \mu^2) D(x, t) = 0. \quad (4.30)$$

При $t=0$ из (4.25) или (4.30) получается:

$$D(x, 0) = 0. \quad (4.31)$$

Благодаря инвариантности D это должно означать, что D исчезает во всей области, внешней по отношению к световому конусу $x^2 - c^2t^2$, так как каждая мировая точка, принадлежащая к этой области, путём преобразования Лорентца может быть сведена к точке $t=0$:

$$D(x, t) = 0 \text{ при } c|t| < |x|. \quad (4.32)$$

Если продифференцировать (4.23) или (4.25) по t и затем положить $t=0$, получится другое важное уравнение [ср. (4.24)]:

$$\left(\frac{\partial D(x, t)}{\partial t}\right)_{t=0} = \delta(x). \quad (4.33)$$

¹⁾ Ср. Дирак (Dirac, Proc. Camb. Phil. Soc. 30, 150, 1934); Паули (Pauli, Phys. Rev. 58, 716, 1940). Относительно особого случая $\mu=0$ ср. § 18.

Известно, что квантовая теория утверждает существование связи между перестановочностью двух операторов и основанной на кванте действия предельной точностью измерения двух соответствующих физических величин. Эта точность не ограничена только тогда, когда операторы коммутативны, т. е. могут быть вместе приведены к диагональному виду. Перестановочные соотношения (4.12 и соответственно 28) утверждают в этом смысле, что функции ψ , в мировой точке x, t и $\psi_{\sigma'}$, в точке x', t' совместно определяются не точнее, чем это позволяет соотношение неопределённости:

$$\delta\psi_{\sigma}(x, t) \delta\psi_{\sigma'}(x', t') \geq h D_{\sigma\sigma'}(x - x', t - t').$$

Так как функции $D_{\sigma\sigma'}$ обладают δ -образной особенностью на световом конусе $|x - x'|^2 = c^2 |t - t'|^2$, а δ -функция имеет непосредственный смысл только после интегрирования по области, заключающей особенность, последовательнее рассматривать значения поля не в дискретных мировых точках, а усреднённые по пространственно-временным областям Γ, Γ' . Если обозначить усреднение символом M_{Γ} и $M_{\Gamma'}$, то соотношения неопределённости в строгой формулировке будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} \delta \{M_{\Gamma} \psi_{\sigma}(x, t)\} \delta \{M_{\Gamma'} \psi_{\sigma'}(x', t')\} &\geq \\ &\geq h M_{\Gamma} M_{\Gamma'} D(x - x', t - t'). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Бор и Розенфельд¹⁾ указали мысленные эксперименты, которые позволили бы достичь оптимальной по (4.34) точности измерения для случая электромагнитного поля. Принципиально неустранимая ошибка измерения обусловлена тем, что электрически заряженное пробное тело, изменение импульса которого служит для измерения действия поля, в свою очередь излучает в процессе измерения поле, которое не может быть точно компенсировано или определено. Чтобы получить оптимальную точность, важно, между прочим, употреблять как пробные не точечные заряды, а тела твёрдые и протяжённые, атомным строением которых можно пренебрегать.

¹⁾ Kgl. Danske, Vidensk. Selsk. Math. fys. Medd., XII, 8, 1933. Ср. также Г а й т л е р, Квантовая теория излучения, 1940, § 8.

Если все пары точек из областей Γ , Γ' разделены пространственными интервалами $|x - x'| > c|t - t'|$, то, согласно (4.28) и (4.32), будет

$$\delta \{M_{\Gamma} \psi, (x, t)\} \delta \{M_{\Gamma'} \psi, (x', t')\} = 0,$$

и оба измерения поля друг другу не мешают. Так и должно быть, потому что возмущение поля, вызванное измерением в одной области, не может распространяться быстрее света и стать заметным в другой.

§ 5. Переход к пространству импульсов

В дальнейших вычислениях нам часто понадобятся разложения Фурье поля ψ_0 и соответствующих операторов. При этом окажется полезным применять вместо более общих интегралов Фурье ряды Фурье, так, чтобы волновые векторы образовывали исчислимое множество. Чтобы достичь этого, на рассматриваемые функции координат потребуем периодичности, причём основной областью периодичности выберем куб с объёмом $V = l^3$. Плоские волны e^{ikx} (kx снова означает скалярное произведение трёхмерных векторов k и x), обладающие этой периодичностью, характеризуются тем, что декартовы компоненты волнового вектора k суть целые кратные $\frac{2\pi}{l}$; требование периодичности превращает непрерывное k -пространство в кубическую точечную решётку с постоянной $\frac{2\pi}{l}$ и объёмом элементарной ячейки $\left(\frac{2\pi}{l}\right)^3$.

Разложения полей ψ_0 и π_0 в ряды Фурье мы запишем так:

$$\psi_0(x) = V^{-1/2} \sum_k q_{\sigma, k} e^{ikx}, \quad \pi_0(x) = V^{-1/2} \sum_k p_{\sigma, k} e^{-ikx}; \quad (5.1)$$

суммирование распространяется здесь по всем точкам решётки. Компоненты Фурье $q_{\sigma, k}$, $p_{\sigma, k}$ в классической теории — функции времени, а в квантовой — операторы, причём не зависящие от времени, если то же относится к $\psi_0(x)$, $\pi_0(x)$. Если $\psi_0(x)$ и $\pi_0(x)$ — действительные или эрмитовские поля, то надо потребовать, чтобы

$$q_{\sigma, -k} = q_{\sigma, k}^*, \quad p_{\sigma, -k} = p_{\sigma, k}^* \quad (5.2)$$

(это значит, что $q_{\sigma, -k}$, $p_{\sigma, -k}$ комплексно или эрмитовски сопряжены с $q_{\sigma, k}$, $p_{\sigma, k}$), ибо это необходимо и достаточно для выполнения равенств

$$\begin{aligned}\psi_{\sigma}^*(x) &= V^{-1/2} \sum_k q_{\sigma, k}^* e^{-ikx} = \psi_{\sigma}(x), \\ \pi_{\sigma}^*(x) &= V^{-1/2} \sum_k p_{\sigma, k}^* e^{+ikx} = \pi_{\sigma}(x).\end{aligned}$$

Формулы, обратные (5.1), получаются путём умножения на $V^{-1/2} e^{\mp ik'x} dx$ и интегрирования по кубу V :

$$q_{\sigma, k} = V^{-1/2} \int_V dx \psi_{\sigma}(x) e^{-ikx}, \quad p_{\sigma, k} = V^{-1/2} \int_V dx \pi_{\sigma}(x) e^{ikx}. \quad (5.3)$$

Можно сохранить канонические перестановочные соотношения (1.7), ограничиваясь парами точек x, x' в одном кубе V ; благодаря периодичности то же будет иметь место и для других пар точек. Применение этого к (5.3) показывает, что $q_{\sigma, k}$ между собой и $p_{\sigma, k}$ между собой коммутируют; далее:

$$\begin{aligned}[p_{\sigma, k}, q_{\sigma', k'}] &= V^{-1} \int_V dx \int_V dx' [\pi_{\sigma}(x), \psi_{\sigma'}(x')] e^{i(kx - k'x')} = \\ &= \frac{\hbar}{i} \delta_{\sigma\sigma'} V^{-1} \int_V dx e^{i(k - k')x} = \frac{\hbar}{i} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{kk'}.\end{aligned}$$

Перестановочным соотношениям между q_j и p_j отвечают такие соотношения между канонически сопряжёнными переменными:

$$\left. \begin{aligned}[q_{\sigma, k}, q_{\sigma', k'}] &= [p_{\sigma, k}, p_{\sigma', k'}] = 0, \\ [p_{\sigma, k}, q_{\sigma', k'}] &= \frac{\hbar}{i} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{kk'}.\end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Поэтому формулы (5.1) описывают каноническое преобразование от старых переменных $\psi_{\sigma}(x)$, $\delta x \cdot \pi_{\sigma}(x)$ (ср. § 1) к новым переменным $q_{\sigma, k}$, $p_{\sigma, k}$.

Разложение Фурье комплексных (неэрмитовых) функций поля ψ (ср. § 3) тоже может быть выполнено по формулам (5.1, 3), но при этом отпадают условия действительности

или эрмитовости (5.2). В обозначениях § 3 мы запишем:

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= V^{-1/2} \sum_k q_k e^{ikx}, \quad \pi(x) = V^{-1/2} \sum_k p_k e^{-ikx}, \\ \psi^*(x) &= V^{-1/2} \sum_k q_k^* e^{-ikx}, \quad \pi^*(x) = V^{-1/2} \sum_k p_k^* e^{ikx}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Из перестановочных соотношений (3.9) тогда следует, как и выше:

$$[p_k, q_{k'}] = [p_k^*, q_{k'}^*] = \frac{\hbar}{i} \delta_{kk'}, \quad (5.6)$$

тогда как все другие пары переменных перестановочны.

Чтобы избавиться от ограничения, связанного с периодичностью функций, надо произвести предельный переход $l \rightarrow \infty$. Тогда точечная решётка (k) перейдёт в континуум, а ряды — в интегралы Фурье, в перестановочных соотношениях появится δ -функция $\delta(k - k')$ вместо $\delta_{kk'}$. Но рассматривать это излишне.

ГЛАВА II

СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ

§ 6. Действительные поля в пустоте

Как простейший пример рассмотрим сначала действительное скалярное поле, т. е. действительное, релятивистски инвариантное поле с одной компонентой $\psi_1 = \psi$. В качестве классического уравнения поля возьмём волновое уравнение Шредингера-Гордона (4.16)

$$(\square - \mu^2)\psi \equiv -\frac{1}{c^2}\ddot{\psi} + \Delta\psi - \mu^2\psi = 0. \quad (6.1)$$

Оно получается путём выбора следующей, явно лорентц-инвариантной функции Лагранжа

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2}c^2 \left\{ \sum_{\nu} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_{\nu}} \right)^2 + \mu^2\psi^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \{ \dot{\psi}^2 - c^2 |\text{grad } \psi|^2 - c^2\mu^2\psi^2 \}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

В самом деле, отсюда получается:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial\psi}{\partial x_k}} = -c^2 \frac{\partial\psi}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = -c^2\mu^2\psi,$$

так что уравнение поля (1.2) принимает вид (6.1). Канонически сопряжённое с ψ поле π по (1.4) будет:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi}, \quad (6.3)$$

а дифференциальная гамильтонова функция по (1.5):

$$H = \frac{1}{2} \{ \pi^2 + c^2 |\text{grad } \psi|^2 + c^2\mu^2\psi^2 \}. \quad (6.4)$$

Надо заметить, что H положительно-определённо, как это и должно быть для плотности энергии.

В квантованной теории ψ и π — зависящие от координат эрмитовские операторы ($\psi^* = \psi$, $\pi^* = \pi$) с перестановками [ср. (1.7, 8)]:

$$\begin{aligned} [\psi(x), \psi(x')] &= [\pi(x), \pi(x')] = 0. \\ [\pi(x), \psi(x')] &= \frac{\hbar}{i} \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Если подставить эти операторы в H и образовать $H = \int dx H$, то H будет эрмитовским оператором Гамильтона. Мы получим, согласно (1.12), канонические уравнения поля и с этой целью образуем перестановки H (6.4) с ψ и π :

$$\begin{aligned} [H(x), \psi(x')] &= \frac{1}{2} [(\pi(x))^2, \psi(x')] = \\ &= \frac{1}{2} \{ \pi(x) \cdot [\pi(x), \psi(x')] + [\pi(x), \psi(x')] \cdot \pi(x) \} = \\ &= \pi(x) \cdot \frac{\hbar}{i} \delta(x - x'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [H(x), \pi(x')] &= \frac{c^2}{2} [\{ |\text{grad } \psi(x)|^2 + \mu^2 (\psi(x))^2 \}, \pi(x')] = \\ &= -c^2 \frac{\hbar}{i} \{ (\text{grad } \psi(x) \cdot \text{grad } \delta(x - x')) + \mu^2 \psi(x) \cdot \delta(x - x') \}. \end{aligned}$$

Отсюда получаются путём интегрирования по x -пространству перестановки $[H, \psi(x')]$ и $[H, \pi(x')]$; преобразуя, кроме того, по частям

$$\int dx (\text{grad } \psi(x) \cdot \text{grad } \delta(x - x')) = - \int dx \Delta \psi(x) \cdot \delta(x - x'),$$

придём, пользуясь (1.9), к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}(x) &\equiv \frac{i}{\hbar} [H, \psi(x)] = \pi(x) \quad [\text{ср. (6.3)}], \\ \dot{\pi}(x) &\equiv \frac{i}{\hbar} [H, \pi(x)] = c^2 \{ \Delta \psi(x) - \mu^2 \psi(x) \}. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Из них можно исключить π , образуя $\ddot{\psi} \equiv i/\hbar \cdot [H, \dot{\psi}]$:

$$\ddot{\psi}(x) = \dot{\pi}(x) = c^2 \{ \Delta \psi(x) - \mu^2 \psi(x) \}. \quad (6.7)$$

Это операторное уравнение формально соответствует классическому уравнению поля (6.1), в частности, среднее значение ψ как функция пространства и времени подчиняется (6.1) (ср. примечание на стр. 14).

Для того чтобы доказать релятивистскую инвариантность канонического метода квантования в настоящем случае, образуем по (4.4) зависящий от времени оператор $\psi(x, t)$, где $E = H = \int dx H$:

$$\psi(x, t) = e^{i \frac{t}{\hbar} H} \psi(x) e^{-i \frac{t}{\hbar} H}.$$

Согласно (4.6) и (6.7), будет:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = e^{i \frac{t}{\hbar} H} \ddot{\psi}(x) e^{-i \frac{t}{\hbar} H} = c^2 (\Delta - \mu^2) \psi(x, t),$$

так что $\psi(x, t)$ удовлетворяет волновому уравнению Шредингера-Гордона. Как было доказано в § 4, канонические перестановочные соотношения (6.5) эквивалентны (4.48), так что по

$$[\psi(x, t), \psi(x', t')] = \frac{\hbar}{i} d^{(1)} D(x - x', t - t'),$$

где $d^{(1)}$ определяется (4.21), получим:

$$\overset{(1)}{\psi}(x) \equiv \dot{\psi}(x) = c^{(1)} \cdot \psi(x) + d^{(1)} \cdot \pi(x).$$

Сравнение с (6.6) даёт: $d^{(1)} = 1$ (и $c^{(1)} = 0$), следовательно,

$$[\psi(x, t), \psi(x', t')] = \frac{\hbar}{i} D(x - x', t - t'). \quad (6.8)$$

Здесь и правая и левая стороны инвариантны относительно преобразований Лорентца, что и требовалось доказать.

Проверим ещё в этом простом случае, что канонические перестановочные соотношения следуют из инвариантных перестановок (6.8): так как (6.8) эквивалентно (4.12), из первого следует и (4.13):

$$[\overset{(n)}{\psi}(x), \overset{(n')}{\psi}(x')] = \frac{\hbar}{i} (-1)^{n'} d^{(n+n')} \delta(x - x'),$$

где $d^{(n+n')}$ определяется (4.17, 20) и тем, что $d^{(1)} = 1$,

В частности, при $n = n'$, так как $d^{(2m)} = 0$:

$$[\overset{(n)}{\psi}(x), \overset{(n)}{\psi}(x')] = 0,$$

или потому, что $\overset{(0)}{\psi} = \psi$, $\overset{(1)}{\psi} = \dot{\psi} = \pi$:

$$[\psi(x), \psi(x')] = 0; \quad [\pi(x), \pi(x')] = 0;$$

с другой стороны, при $n = 1$; $n' = 0$:

$$[\pi(x), \psi(x')] = \frac{\hbar}{i} \delta(x - x').$$

Итак, снова получились все канонические перестановки (6.5). Зависящий от времени оператор $\psi(x, t)$ нам больше не понадобится.

Физические результаты квантованной теории можно получить, вычисляя тензор энергии-импульса. Канонический тензор (2.8) определяется из функции Лагранжа (6.2):

$$T_{\mu\nu} = c^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} + L \delta_{\mu\nu}.$$

Для его эрмитизации достаточно так переставить сомножители:

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \right) + L \delta_{\mu\nu}, \quad (6.9)$$

тогда он станет эрмитовским. Например, оператор плотности импульса

$$\begin{aligned} G_k &= \frac{1}{ic} T_{4k} = -\frac{1}{2} \left(\dot{\psi} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \dot{\psi} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\pi \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \pi \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

эрмитовский, потому что

$$\left(\pi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right)^* = \frac{\partial \phi^*}{\partial x_k} \pi^* = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \pi.$$

Плотность энергии — T_{44} совпадает с H (6.4). Условие симметрии $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ в (6.9) выполнено. Чтобы доказать спра-

ведливость уравнения непрерывности (2.13), образуем, например¹⁾,

$$\dot{G}_k = -\frac{1}{2} \left\{ \pi \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \dot{\pi} + \pi \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x_k} \pi \right\},$$

откуда на основе (6.5 и 6) получится:

$$G_k = - \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_k} c^2 (\Delta - \mu^2) \phi + \dot{\phi} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x_k} \right\},$$

и небольшое вычисление показывает, что это совпадает с выражением $-\sum_{l=1}^2 \frac{\partial T_{lk}}{\partial x_l}$. Так же получается и $\dot{H} = -\text{div } S$ так, что тензор энергии-импульса удовлетворяет всем поставленным требованиям.

Теперь надо найти стационарные состояния системы, определённой по (6.4, 5), пользуясь известными вычислительными методами квантовой механики.

Хотя интегральная гамильтонова функция $H = \int dx H$ формально и складывается из частей, принадлежащих отдельным элементам объёма dx , нельзя сказать, что в H разделены переменные ($q_j = \psi_j^{(s)}$, $p_j = \delta x^{(s)} \cdot \pi_j^{(s)}$, ср. § 1), так как $dx |\text{grad } \phi|$ зависит не только от значений ϕ в x , но и в соседних элементах объёма. Но можно произвести разделение переменных путём перехода к новым каноническим переменным с помощью пространственного разложения Фурье $\psi(x)$ и $\pi(x)$ по (5.1):

$$\psi(x) = V^{-1/2} \sum_k q_k e^{ikx}, \quad \pi(x) = V^{-1/2} \sum_k p_k e^{-ikx}, \quad (6.11)$$

где операторы q_k , p_k подчиняются условию эрмитовости (5.2) и перестановочным соотношениям (5.4):

$$q_{-k} = q_k^*, \quad p_{-k} = p_k^*; \quad (6.12)$$

$$[q_k, q_{k'}] = [p_k, p_{k'}] = 0; \quad [p_k, q_{k'}] = \frac{\hbar}{i} \delta_{kk'}. \quad (6.13)$$

¹⁾ Надо учесть, что $[H, ab] = [H, a]b + a[H, b]$.

В самом деле, если подставить ряды Фурье (6.11) в (6.4):

$$H(x) = \frac{1}{2V} \sum_k \sum_{k'} \{ p_k p_{k'} e^{-i(k+k')x} + c^2(-kk' + \mu^2) q_k q_{k'} e^{i(k+k')x} \}$$

и проинтегрировать по кубу периодов V , то в двойной сумме останутся только слагаемые с $k = -k'$, откуда с учётом (6.12) получится интегральная гамильтонова функция

$$H = \int_V dx H = \frac{1}{2} \sum_k \{ p_k^* p_k + \omega_k^2 q_k^* q_k \}, \quad (6.14)$$

где

$$\omega_k = c \sqrt{\mu^2 + k^2} (> 0). \quad (6.15)$$

H аддитивно состоит из слагаемых, относящихся к отдельным точкам решётки, чем и достигнуто разделение переменных.

Представление операторов q_k , p_k матрицами, удовлетворяющими условиям (6.12 и 13) и приводящими функцию Гамильтона (6.14) к диагональному виду, достигается следующим путём: каждой степени свободы сопоставляется целое неотрицательное квантовое число $N_k = 0, 1, 2, \dots$ и строятся две эрмитовски сопряжённые друг с другом матрицы:

$$a_k = \begin{bmatrix} 0, \sqrt{1}, 0, 0 \dots \\ 0, 0, \sqrt{2}, 0 \dots \\ 0, 0, 0, \sqrt{3} \dots \\ 0, 0, 0, 0 \dots \\ \dots \dots \dots \end{bmatrix}, \quad a_k^* = \begin{bmatrix} 0, 0, 0, 0 \dots \\ \sqrt{1}, 0, 0, 0 \dots \\ 0, \sqrt{2}, 0, 0 \dots \\ 0, 0, \sqrt{3}, 0 \dots \\ \dots \dots \dots \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Их элементы можно записать так:

$$(a_k)_{N'_k N''_k} = (a_k^*)_{N''_k N'_k} = \sqrt{N''_k} \cdot \delta_{N''_k, N'_k - 1}.$$

В отношении других квантовых чисел $N_l (l \neq k)$ матрица a_k действует как единичная матрица; выписанные полнее матричные элементы гласят:

$$\begin{aligned} & (a_k)_{N'_1, N'_2, \dots, N'_k, \dots, N''_1, N''_2, \dots, N''_k, \dots} = \\ & = (a_k^*)_{N''_1, N''_2, \dots, N''_k, \dots, N'_1, N'_2, \dots, N'_k, \dots} = \\ & = \sqrt{N''_k} \delta_{N'_k N''_{k-1}} \prod_{l \neq k} \delta_{N'_l N''_l}. \quad (6.17) \end{aligned}$$

По известным правилам умножения матриц легко найти:

$$\left. \begin{aligned} (a_k a_k^*)_{N'_1, N'_2, \dots, N''_1, N''_2, \dots} &= (N'_k + 1) \cdot \prod_l \delta_{N'_l N''_l}, \\ (a_k^* a_k)_{N'_1, N'_2, \dots, N''_1, N''_2, \dots} &= N'_k \cdot \prod_l \delta_{N'_l N''_l}, \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

так что $(a_k a_k^*)$ и $(a_k^* a_k)$ — диагональные матрицы с целочисленными элементами; разность их — единичная матрица $[a_k, a_k^*] = 1$. С добавлением очевидных перестановочных соотношений мы получаем:

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^*, a_{k'}^*] = 0, \quad [a_k, a_{k'}^*] = \delta_{kk'}. \quad (6.19)$$

Выберем вместо q_k, p_k следующие матрицы:

$$q_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_k + a_{-k}^*), \quad p_k = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} i (a_k^* - a_{-k}); \quad (6.20)$$

тогда будут выполнены условия (6.12), а перестановочные соотношения (6.13) будут следовать из (6.19), что легко проверить вычислением (в частности для $k' = -k$). Подстановка (6.20) в (6.14) даёт (с учётом $\omega_{-k} = \omega_k$):

$$H = \frac{\hbar}{2} \sum_k \omega_k (a_k^* a_k + a_k a_k^*). \quad (6.21)$$

По (6.18) матрица энергии диагональна, и её элементы, т. е. собственные значения энергии, суть

$$H_{N_1, N_2, \dots} = \frac{\hbar}{2} \sum_k \omega_k (2N_k + 1). \quad (6.22)$$

Наименьшее значение энергии получится, если положить, что все $N_k = 0$:

$$H_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_k \omega_k. \quad (6.23)$$

H_0 называется нулевой энергией поля; оно бесконечно, так как сумма (6.23) расходится. Но как аддитивная постоянная H_0 не имеет физического значения.

После вычитания нулевой энергии значения энергии поля равны:

$$H_{N_1, N_2, \dots} - H_0 = \sum_k N_k \cdot \hbar \omega_k. \quad (6.24)$$

Стационарное состояние поля, характеризуемое числами N_1, N_2, \dots , имеет ту же энергию (в объёме V), что и N_1 частиц с энергией $\hbar \omega_1$, N_2 частиц с энергией $\hbar \omega_2$ и т. д. в том же объёме. Но $\hbar \omega_k$ по (6.15) равно той энергии, которую по релятивистской механике имеет частица с массой покоя $m = \frac{\hbar \mu}{c}$, когда её импульс $p = \hbar k$:

$$\hbar \omega_k = \hbar c \sqrt{\mu^2 + k^2} = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}. \quad (6.25)$$

Здесь мы в первый раз видим, что квантование выражает корпускулярные свойства системы, описываемой полем ψ : целое число N_k указывает, сколько имеется частиц с импульсом $\hbar k$.

Это толкование можно подтвердить вычислением импульса поля $G = \int_V dx G$. Оператор плотности импульса по (6.10) такой:

$$G = -\frac{1}{2} (\pi \operatorname{grad} \psi + \operatorname{grad} \psi \cdot \pi).$$

Подставляя сюда ряды Фурье (6.11) и интегрируя по кубу периодичности V , получим общий импульс области V :

$$G = -\frac{i}{2} \sum_k k (q_k p_k + p_k q_k). \quad (6.26)$$

p_k и q_k снова представим через матрицы (6.17) по (6.20); учитывая, что по соображениям симметрии

$$\sum_k k (a_{-k}^* a_{-k} + a_{-k} a_{-k}^*) = -\sum_k k (a_k^* a_k + a_k a_k^*),$$

$$\sum_k k (a_{-k} a_k + a_k a_{-k}) = 0, \quad \sum_k k (a_{-k}^* a_k^* + a_k^* a_{-k}^*) = 0,$$

будем иметь

$$G = \frac{\hbar}{2} \sum_k k (a_k^* a_k + a_k a_k^*). \quad (6.27)$$

По (6.18) G представляет диагональную матрицу; её перестановочность с диагональной матрицей H отвечает закону сохранения импульса. Собственные значения импульса по (6.18) будут:

$$G_{N_1, N_2, \dots} = \frac{\hbar}{2} \sum_k k (2N_k + 1),$$

и так как импульс нулевого состояния $\frac{\hbar}{2} \sum_k k$ исчезает из соображений симметрии (каждые два вектора k и $-k$ сокращаются), можно записать G как

$$G_{N_1, N_2, \dots} = \sum_k N_k \cdot \hbar k. \quad (6.28)$$

Это опять отвечает корпускулярному истолкованию: в стационарном состоянии имеется N частиц с импульсом $\hbar k$.

Каждому стационарному состоянию системы при статистическом рассмотрении надо приписать вес 1, так как собственные значения энергии считаются по одному разу. Так устанавливается вес в статистике Бозе-Эйнштейна¹⁾.

Таким образом наше скалярное поле, благодаря квантованию с помощью канонических перестановочных соотноше-

¹⁾ В противоположность статистике Больцмана, в которой при N_k раз занятой k -й ячейке соответствующему состоянию приписывается

вес, равный $\frac{(\sum_k N_k)!}{\prod_k N_k!}$.

ний (1.7), описывает систему материальных точек, счёт состояний которых выполняется по правилам статистики Бозе-Эйнштейна. Дальше мы увидим, что этот результат в отношении счёта состояний не ограничен только скалярным полем или специальным выбором уравнения (6.1); корни его лежат в перестановочных соотношениях (1.4), и поэтому говорят о «квантовании поля по статистике Бозе-Эйнштейна»¹⁾.

Параметр μ , входящий в вышенаписанные формулы, может принимать любое (действительное) значение; в частности, он может быть равен нулю, так что масса покоя соответствующих частиц исчезает ($\hbar\omega_k = \hbar c |k|$). Частицы с неисчезающей массой покоя и целочисленным спином называются «мезонами» ввиду их предполагаемой связи с «мезотронами» космического излучения. Отвечающие «мезонам» поля ϕ называются в этом же смысле «мезонными» полями. Здесь специально рассматривалось действительное скалярное мезонное поле.

§ 7. Действительное поле с источниками

Предыдущие формулы описывают только «свободное движение» «мезонов» (в отсутствии внешних сил), число частиц в каждом состоянии N_k остаётся постоянным во времени, каждая частица сохраняет свой импульс, новые частицы не могут возникнуть, а старые — исчезнуть. Теперь мы постараемся так изменить, точнее развить теорию, чтобы отпало это ограничение. В качестве образца возьмём для этого теорию света: известно, что в последней распространение света в вакууме описывается однородными волновыми уравнениями; если же ввести взаимодействие с материей, ответственной за испускание и поглощение света, то от однородных волновых уравнений надо перейти к неоднородным. Желая описать аналогичным образом испускание и поглощение скалярных мезонов, мы перейдём от однородного уравнения Шредингера-Гордона (6.1) к неоднородному волновому уравнению

$$(\square - \mu^2)\phi = \frac{1}{c}\eta(x, t). \quad (7.1)$$

¹⁾ В противоположность квантованию по статистике Ферми-Дирака, применимой к полю электронных волн (ср. § 20 и дальше).

Ему отвечает изменённая функция Лагранжа

$$L = L^0 - c\eta\psi, \text{ где } L^0 = -\frac{c^2}{2} \left\{ \sum \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} \right)^2 + \mu^2\psi^2 \right\}. \quad (7.2)$$

Так же как и ψ , функция η должна быть лорентцовски инвариантной. Мы принимаем в смысле оптической аналогии, что η связана с плотностью материи, влияние которой на ψ -функцию должно быть изучено; если и эти частицы желательнее описывать квантованным полем Ψ , то η должно быть инвариантной функцией компонент Ψ и их производных (например, для действительного скалярного Ψ -поля $\eta = \text{const. } \Psi^2$). Конечно также и Ψ -поле будет испытывать известную реакцию со стороны поля ψ ; чтобы учесть и это обратное действие, надо было бы ввести в (7.2) функцию Лагранжа поля Ψ «в вакууме». Эту сторону вопроса мы пока оставим вне рассмотрения. Мы хотим, таким образом, считать поведение чужого Ψ -поля заданным и η будем рассматривать как известную функцию пространства и времени. Это разумно в особенности тогда, когда частицы, соответствующие Ψ -полю, с которым взаимодействует ψ -поле (мезонов), очень тяжелы; точнее говоря, когда их масса покоя очень велика по сравнению с массой мезона $m = \frac{h\mu}{c}$; в этом случае отдача тяжёлых частиц при испускании и поглощении мезонов так мала, что ею в первом приближении можно пренебречь. Мы подразумеваем здесь взаимодействие с протонами или нейтронами, массы которых очень велики, по сравнению с массами мезотронов космического излучения; если приближённо считать протоны и нейтроны бесконечно тяжёлыми, то они совсем не испытывают действия со стороны мезонов, но сами влияют на них, соответственно формулам (7.1, 2). В частном случае протоны (нейтроны) могут считаться покоящимися; если известны их радиусы-векторы $x_n (n = 1, 2, \dots)$, то можно представить плотность с помощью δ -функции [ср. (1.8)]:

$$\eta = \sum_n g_n \delta(x - x_n), \quad g_n = \text{const. (действительная)}. \quad (7.3)$$

При этом предположено, что взаимодействие мезона с протоном является «близодействием» (η отлично от нуля только при $x = x_n$); все дальнодействия рассматриваются как не-

прямые, передаваемые через поле, для того чтобы твёрдо быть уверенным, что скорость их распространения не становится больше скорости света c . Если все тяжёлые частицы взаимодействуют с мезонами одинаково, то g_n в (7.3) не зависит от n , и мы имеем в частности:

$$\eta = g \sum_n \delta(x - x_n). \quad (7.4)$$

Легко видеть, что размерность параметра g совпадает с размерностью электрического заряда.

Будем теперь опять по каноническим правилам квантовать систему, характеризуемую функцией Лагранжа (7.2). Дополнительный член $-c\eta\psi$ в L ничего не изменяет в определении канонически сопряжённого импульса π [ср. (6.3)], следовательно, взамен (6.4) получим следующую гамильтонову функцию.

$$\left. \begin{aligned} H &= H^0 + H', \\ H^0 &= \frac{1}{2} \{ \pi^2 + c^2 |\text{grad } \psi|^2 + c^2 \mu^2 \psi^2 \}, \\ H' &= c\eta\psi. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Вместо (6.6) на основе перестановочных соотношений (6.5) получатся канонические уравнения поля вида

$$\dot{\psi} = \pi, \quad \dot{\pi} = c^2 (\Delta - \mu^2) \psi - c\eta, \quad (7.6)$$

исключение π из этих уравнений снова приведёт к неоднородному волновому уравнению. Проверим теперь инвариантность способа квантования в предположении, что η — заданная инвариантная функция пространства и времени. Так как H может явно содержать время, формулы (4.4 и дальше) с E , равными H , не являются безоговорочно применимыми [ср. (4.5)]¹⁾. Мы возвратимся поэтому к исходному опреде-

¹⁾ Но есть возможность подставить в (4.4) $E = H^0 = \int dx H^0$, так что $\psi(x, t)$ подчиняется однородному волновому уравнению и инвариантным перестановочным соотношениям (6.8). Эта возможность интересна с точки зрения «многовременной» теории взаимодействия мезона с протоном. Мы не коснемся этого вопроса, но сошлёмся на § 18, где формализм многих времен рассмотрен на примере взаимодействия света с электроном [ср. также Штукельберг (Stueckelberg), *Helv. Phys. Acta* **11**, 225, 1938].

лению зависящих от времени операторов

$$\psi(x, t), \pi(x, t),$$

которые как функции координат и времени должны удовлетворять каноническим уравнениям классического поля, аналогичным (7.6):

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \pi(x, t), \quad \frac{\partial \pi(x, t)}{\partial t} = c^2(\Delta - \mu^2)\psi(x, t) - c\eta(x, t),$$

с дополнительным требованием $\psi(x, 0) = \psi(x)$; $\pi(x, 0) = \pi(x)$. Пусть η разложена по степеням t :

$$\eta(x, t) = \sum_n \frac{1}{n!} t^n \eta^{(n)}(x),$$

тогда и операторы $\psi(x, t)$, $\pi(x, t)$ могут быть определены как степенные ряды

$$\psi(x, t) = \sum_n \frac{1}{n!} t^n \psi^{(n)}(x), \quad \pi(x, t) = \sum_n \frac{1}{n!} t^n \psi^{(n+1)}(x),$$

причём операторные коэффициенты вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\psi^{(n+2)}(x) = c^2(\Delta - \mu^2)\psi^{(n)}(x) - c\eta^{(n)}(x), \quad \text{где } \psi^{(0)} = \psi(x), \\ \psi^{(1)}(x) = \pi(x).$$

Результат может быть представлен в таком виде:

$$\psi^{(2m)}(x) = [c^2(\Delta - \mu^2)]^m \psi(x) = \sum_k d_{mk}^{(k)} \eta^{(k)}(x), \\ \psi^{(2m+1)}(x) = [c^2(\Delta - \mu^2)]^m \pi(x) + \sum_k d'_{mk} \eta^{(k)}(x),$$

где d_{mk} , d'_{mk} — известные дифференциальные операторы. Если образовать отсюда перестановку

$$[\psi(x, t), \psi(x', t')] = \sum_{n, n'} \frac{1}{n!} \frac{1}{n'!} t^n t'^{n'} [\psi^{(n)}(x), \psi^{(n')}(x')],$$

то очевидно, что члены η ничего к ней не прибавляют, потому что они коммутируют с $\psi(x)$, $\pi(x)$, т. е. получается то же инвариантное перестановочное соотношение (6.8), что и в случае поля в вакууме ($\eta = 0$).

Если образовать тензор энергии-импульса по каноническому правилу (2.8), то это сведётся к выражению (6.9), где L имеет значение $L^0 - c\eta\psi$. Вместо уравнений сохранения (2.13) теперь получится после короткого вычисления¹⁾.

$$\dot{H} + \operatorname{div} S = c\psi \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \dot{G} + \operatorname{Div} T = -c\psi \operatorname{grad} \eta,$$

в формальном соответствии с классическими уравнениями (2.11). Правые части этих уравнений представляют источники энергии-импульса, иначе говоря, описывают перенос энергии-импульса с протонов на мезоны. При выборе специального выражения (7.3) имеется только перенос импульса, но не энергии, соответственно с тем обстоятельством, что энергия покоящегося протона постоянна.

Переход к пространству импульсов производится, как и в § 6, с помощью рядов Фурье (6.11), коэффициенты которых связаны условиями (6.12 и 13). Оператор Гамильтона H^0 поля в вакууме [ср. (7.5)], конечно, снова получается в виде (6.14):

$$H^0 = \int dx H^0 = \frac{1}{2} \sum_k \{p_k^* p_k + \omega_k^2 q_k^* q_k\}.$$

При вычислении оператора взаимодействия H' мы снова применяем специальное представление η (7.4):

$$\begin{aligned} H' &= \int dx H' = gc \sum_n \int dx \delta(x - x_n) \psi(x) = gc \sum_n \psi(x_n) = \\ &= gc V^{-1/2} \sum_k q_k \sum_n e^{ikx_n}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Если выбрать для q_k и p_k матричное представление (6.20, 17),

¹⁾ Если $\frac{\partial \eta}{\partial t} \neq 0$, то, конечно, $\dot{H} = \frac{i}{\hbar} [H, H] + \frac{\partial H}{\partial t}$.

то H^0 тождественно с диагональной матрицей (6.22)

$$H^0_{N_1 N_2, \dots} = h \sum_k \omega_k \left(N_k + \frac{1}{2} \right), \quad (7.8)$$

тогда как матрица H' здесь не приводится к диагональному виду

$$\left. \begin{aligned} H' &= gc \sqrt{\frac{\hbar}{2V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} (a_k + a_{-k}^*) \sum_n e^{ikx_n} = \\ &= gc \sqrt{\frac{\hbar}{2V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \left(a_k \sum_n e^{ikx_n} + a_k^* \sum_n e^{-ikx_n} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Если входящий в H' параметр связи g считать малой величиной, то, в смысле теории возмущения, поле в вакууме можно рассматривать как «невозмущённую систему», а H' — как возмущающую функцию. Если характеризовать стационарные состояния поля в вакууме, как и в § 6, квантовыми числами N_k , которые показывают, сколько имеется мезонов с импульсом $\hbar k$, то «включение» возмущения H' вызовет переходы между этими состояниями невозмущённой системы, причём, как показывают правила отбора в применении к возмущающей матрице, это будут только переходы с испусканием или поглощением мезона [по (7.9) и (6.17) отличны от нуля только матричные элементы, у которых $N'_k - N_k = \pm 1$ и все прочие $N'_l - N_l = 0$].

Для того чтобы эти переходы в действительности могли происходить, должен, как известно, выполняться закон сохранения энергии, т. е. нужно, чтобы испускающие протоны и нейтроны могли отдавать или поглощать энергию $\hbar\omega_k = hc\sqrt{\mu^2 + k^2}$ ($> \hbar c\mu$); это возможно только тогда, когда они подвержены действию внешних сил, так, например, когда они связаны в атомное ядро. Но эти процессы здесь не будут рассматриваться полнее, потому что для этого требуется ввести волновые функции тяжёлых частиц, простого выражения (7.3 или 4) уже недостаточно. Известно, однако, что для эффектов, описываемых вторым и более высоким приближением теории возмущения, переходы, представляемые H' , могут играть роль «виртуальных» переходов, т. е. переходов в «виртуальные промежуточные состояния», энергия которых не должна совпадать с энергией начального состояния.

В качестве примеров рассмотрим два таких эффекта. Для этого воспользуемся возмущающей матрицей второго приближения

$$H''_{ea} = \sum_z \frac{H'_{ez} H'_{za}}{H_a^0 - H_z^0}; \quad (7.10)$$

здесь индексы a , z и e относятся к начальному, промежуточному и конечному состояниям, так что H_a^0 , H_z^0 — соответствующие собственные значения энергии невозмущённой системы, тогда как H'_{za} и H'_{ez} — матричные элементы возмущения для виртуальных переходов $a \rightarrow z$ и $z \rightarrow e$. Если ни один из знаменателей не исчезает или не становится малым, достаточно учесть матрицу H'' в первом приближении теории возмущений, чтобы сохранить квадратичные в H' члены соответственно второму приближению.

Пусть в начальном состоянии, кроме протона, есть ещё мезон с импульсом $\hbar k$ ($N_k = 1$, $N_l = 0$ для $l \neq k$). Если протон поглощает мезон и потом испускает другой мезон с импульсом $\hbar k'$, то это соответствует двухступенному процессу рассеяния мезона на протоне, причём рассеяние упругое, если протон бесконечно тяжёлый и не испытывает отдачи; тогда сохранение энергии требует, чтобы $\omega_{k'} = \omega_k$ и $|k'| = |k|$. В промежуточном состоянии z , в котором нет мезона, энергия на $\hbar\omega$ меньше, чем в начальном состоянии:

$$H_a^0 - H_z^0 = \hbar\omega_k.$$

Так как по (6.17) a_k отвечает поглощению, а a_k^* — испусканию, из (7.9) получаются матричные элементы для переходов $a \rightarrow z$ и $z \rightarrow e$:

$$H'_{za} = gc \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1}, \quad H'_{ez} = gc \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_{k'}}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}_1}.$$

Но есть и другой путь для процесса рассеяния: протон может сначала испустить мезон k' , а потом поглотить мезон k , так что оба частичных процесса меняются порядком:

$$H'_{z'a} = gc \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_{k'}}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}_1} = H'_{ez'}, \quad H'_{e'z'} = gc \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1} = H'_{z'a}.$$

Так как в этом случае промежуточное состояние имеет два мезона одинаковой энергии $\hbar\omega_k$, то знаменатель равен $H_a^0 - H_{z'}^0 = -\hbar\omega_k$. Складывая (7.10) по обоим промежуточным состояниям, получим:

$$H_{ea}'' = \frac{H'_{ez}H'_{za}}{H_a^0 - H_z^0} + \frac{H'_{ez'}H'_{z'a}}{H_a^0 - H_{z'}^0} = \frac{H'_{ez}H'_{za}}{\hbar\omega_k} + \frac{H'_{za}H'_{ez}}{-\hbar\omega_k} = 0.$$

Таким образом, слагаемые от обоих путей взаимно уничтожаются, что означает, что в первом приближении рассеяние отсутствует. Только при учёте обратной реакции поля протона (отдачи протона) при виртуальных процессах поглощения и испускания получилась бы исчезающая вероятность рассеяния.

Другой эффект, который можно описать с помощью второго приближения теории возмущения, — это взаимодействие между двумя тяжёлыми частицами (протонами) посредством мезонного поля. Собственные значения энергии возмущённой системы, как известно, определяются во втором приближении диагональными элементами матрицы H'' (7.10):

$$H_a = H_a^0 + H''_{aa}.$$

Мы вычислим возмущение энергии основного состояния поля в вакууме (все $N_k = 0$):

$$H''_{00} = - \sum_z \frac{H'_{0z}H'_{z0}}{H_z^0 - H_0^0}. \quad (7.11)$$

Виртуальные переходы $0 \rightarrow z \rightarrow 0$, входящие в (7.11), состоят в том, что протон n испускает мезон k , а другой протон n' (или тот же протон $n' = n$) поглощает его. Для знаменателей и матричных элементов H' получим по (7.7 и 9):

$$H_z^0 - H_0^0 = \hbar\omega_k, \\ H'_{z0} = gc \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_k}} \sum_n e^{-ikx_n}, \quad H'_{0z} = gc \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_k}} \sum_{n'} e^{ikx_{n'}}.$$

1) Диагональные элементы H'' , по (7.9), равны нулю.

Следовательно, по (7.11),

$$\begin{aligned} H_{00}'' &= -\frac{1}{2} g^2 c^2 \sum_n \sum_{n'} \frac{1}{V} \sum_k \frac{e^{ik(x_{n'} - x_n)}}{\omega_k^2} = \\ &= -\frac{1}{2} g^2 \sum_n \sum_{n'} U(x_{n'} - x_n), \end{aligned} \quad (7.12)$$

где функция координат $U(x)$ определяется по

$$U(x) = c^2 \frac{1}{V} \sum_k \frac{e^{ikx}}{\omega_k^2} = \frac{1}{V} \sum_k \frac{e^{ikx}}{\mu^2 + k^2} = U(-x) \quad (7.13)$$

[ср. (6.15)]. Энергия системы в основном состоянии является функцией относительных координат протонов: потенциальная энергия двух протонов (n, n') равна $-g^2 U(x_{n'} - x_n)$.

Чтобы в (7.13) превратить суммирование по точкам k -решётки (ср. § 5) в интегрирование по непрерывному k -пространству, заметим, что элемент объёма dk (в пределе $V \rightarrow \infty$) содержит $V \cdot (2\pi)^{-3} \cdot dk$ точек решётки, т. е. надо заменить $V^{-1} \sum_k \dots$ на $(2\pi)^{-3} \int dk$:

$$U(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \frac{e^{ikx}}{\mu^2 + k^2}. \quad (7.14)$$

Введём теперь полярные координаты в k -пространстве, так, чтобы полярная ось была параллельна вектору x ; тогда

$$dk = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \cdot x^2 \cdot dx \quad (x = k):$$

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{\mu^2 + x^2} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{i|x|x \cos \vartheta} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 i|x|} \int_0^\infty dx \frac{x}{\mu^2 + x^2} (e^{i|x|x} - e^{-i|x|x}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 i|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x}{\mu^2 + x^2} e^{i|x|x} = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 i|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{1}{x - i\mu} + \frac{1}{x + i\mu} \right) e^{i|x|x}. \end{aligned}$$

Контур интегрирования можно деформировать в положительно-мнимой полуплоскости x , так что останется только вычет в полосе $x = i\mu$:

$$U(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\mu|x|}}{|x|}. \quad (7.15)$$

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta U = \mu^2 U$. Точнее говоря, $(\Delta - \mu^2)U$ исчезает только при $x \neq 0$; полнее получается из (7.14) [ср. также (4.24)]:

$$(-\Delta + \mu^2)U(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk e^{ikx} = \delta(x). \quad (7.16)$$

Вместо того чтобы выполнять k -интегрирование в (7.14), мы могли бы найти формулу (7.15) для U , интегрируя уравнение (7.16).

Функция (7.15) называется потенциалом «Юкава» по имени японского физика Юкава (Yukawa), впервые предложившего рассматривать ядерные силы, как произведённые скалярным полем, и отсюда получившего потенциал (7.15) (ср. § 9, 14, 15). Для малых расстояний ($x \ll 1/\mu$) U меняется пропорционально $|x|^{-1}$, т. е. как кулоновский потенциал; на больших расстояниях ($x \gg 1/\mu$) U падает экспоненциально, т. е. стремится к нулю быстрее, чем кулоновский потенциал. Так как соответствующие силы практически не действуют на расстояниях $> \frac{1}{\mu}$, длина $\frac{1}{\mu}$ называется «радиусом действия сил»; она совпадает (с точностью до множителя 2π) с комптоновской длиной волны «передаточных» мезонов ($\frac{1}{\mu} = \frac{1}{ct}$, где m — масса мезонов, ср. § 6).

Формулы справедливы и для $\mu = 0$, $m = 0$; тогда потенциал Юкава переходит в кулоновский потенциал, и радиус действия становится бесконечным. Поэтому, чтобы представить силы с конечным радиусом действия, нужны мезоны с неисчезающей массой покоя.

Итак, поле нейтральных мезонов сообщает каждой паре протонов силы статического взаимодействия с потенциальной

энергией

$$-g^2 U(x_{n'} - x_n) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu|x_{n'} - x_n|}}{|x_{n'} - x_n|}; \quad (7.17)$$

отрицательный знак указывает на притяжение. Вывод (7.17), строго говоря, годится только для того случая, когда протоны покоятся в точках x_n ; но надо ожидать, что при медленном движении протонов потенциальная энергия мало отличается от (7.17), так как мезонное поле в смысле адиабатического изменения всё время приближается к мгновенному стационарному состоянию. Это можно проверить, совершенствуя теорию учётом движения протонов. Тогда нужно принимать во внимание сохранение импульса при виртуальном испускании и поглощении мезонов: испускающий протон получает импульс отдачи $-hk$, а поглощающий $+hk$; так что, если сталкиваются два протона с начальными импульсами P_1, P_2 , то имеется известная вероятность того, что они в конечном состоянии имеют импульсы $P_1 - hk, P_2 + hk$. Вероятность легко выразить с помощью матричных элементов $H'_{0z} H'_{z0} / (H_z^0 - H_0^0)$, и она получится такой же, как при волново-механическом рассмотрении соударения (в «приближении Борна») с потенциалом взаимодействия (7.17) между сталкивающимися частицами, предполагая, что изменения импульса $h|k|$ достаточно малы. Но при изменениях импульса $h|k| \geq Mc$ (M — масса протона) потенциал Юкава (7.17) уже не описывает правильно процесса столкновения, так как тогда нужно учитывать изменения знаменателей $H_z^0 - H_0^0$. Это изменит коэффициенты Фурье (7.13) при $|k| \gtrsim Mc/\hbar$ и может быть интерпретировано в том смысле, что зависимость U от координат при самых маленьких расстояниях ($|x| \lesssim \hbar/Mc =$ комптоновской длине волны протона) неправильно отображается формулой (7.15).

В двойной сумме (7.12) наряду с потенциалами взаимодействия (члены $n \neq n'$) встречаются и «собственные энергии», обусловленные тем, что каждый протон может испустить и опять поглотить мезон; собственная энергия, которой протон обладает благодаря взаимодействию с мезонным полем, по (7.12), имеет значение $-\frac{1}{2}g^2 U(0)$. Но функция $U(x)$ при

$x=0$ становится, по (7.15), бесконечной, как $|x|^{-1}$ (и при этом ничего не меняет учёт отдачи протона), так что собственная энергия протона бесконечна, подобно бесконечной собственной энергии точечного заряда [которая бесконечна, как $\frac{1}{2} e^2 U(0)$]. Можно сделать собственную энергию конечной, вводя в разложение Фурье H' (7.7, 9) обеспечивающий сходимость множитель (например, $e^{-\alpha k^2}$), «обрезающий» большие импульсы мезонов; тогда ряд Фурье для $U(x)$ (7.13) сходится и при $x=0$, следовательно, $U(0)$ конечно. Для представления H' в координатном пространстве [ср. (7.5, 4)] это означает, что δ -функция $\delta(x-x_n)$ заменяются в η регулярными функциями координат, отличными от нуля в конечной области пространства (например, $e^{-\rho|x-x_n|^2}$), т. е. протонам приписывают известные размеры и распределение плотности; множитель, обеспечивающий сходимость в рядах Фурье, имеет смысл «обрывающего» множителя для этого распределения плотности. Но такое изменение гамильтоновой функции с необходимостью нарушает лорентцовскую инвариантность теории. собственная энергия и собственный импульс движущегося протона не преобразуются как четырёхмерный вектор. Такую теорию можно считать разумной в лучшем случае в нерелятивистском приближении, когда скорости протонов малы. С этой трудностью мы в дальнейшем будем часто встречаться; она представляет принципиальный недостаток современной квантовой теории полей. К поставленной здесь проблеме мы вернёмся позднее (§ 23).

Наше вычисление энергии основного состояния основывалось на втором приближении теории возмущений, в котором пренебрегались члены третьего и более высокого порядка. Но в действительности формула (7.12) для возмущения собственных значений в случае покоящихся протонов точна также и в смысле более высоких приближений относительно g . Мы докажем это, приводя к диагональному виду гамильтонову функцию $H=H^0+H'$ путём преобразования унитарной матрицей S . Пусть

$$S = \exp \left\{ \frac{igc}{\hbar} v^{-1/2} \sum_k \frac{p_k}{\omega_k} \sum_n e^{-ikx_n} \right\}. \quad (7.18)$$

Эрмитовски сопряжённая с S матрица получится, если заменить в S i на $-i$ и p_k на p_k^* [ср. (6.12)]; записывая k вместо $-k$, получим:

$$S^* = \exp \left\{ -\frac{igcV}{h}^{-1/2} \sum_k \frac{p_k}{\omega_k^2} \sum_n e^{-ikx_n} \right\},$$

следовательно,

$$SS^* = S^*S = 1, \quad S^* = S^{-1},$$

так что S — унитарный оператор, как и требовалось.

Правила перестановки (6.13) дают:

$$[q_k, S] = -gcV^{-1/2} \frac{1}{\omega_k^2} \sum_n e^{-ikx_n} \cdot S; \quad [p_k, S] = 0;$$

следовательно, перестановка H^0 с S будет равна

$$\begin{aligned} [H^0, S] &= \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^2 [q_{-k} q_k, S] = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^2 \{ q_{-k} [q_k, S] + [q_{-k}, S] q_k \} = \\ &= -\frac{1}{2} gcV^{-1/2} \left\{ \sum_k q_{-k} \sum_n e^{-ik} x_n \cdot S + S \cdot \sum_k q_k \sum_n e^{ikx_n} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} gcV^{-1/2} \sum_k (q_k S + S q_k) \sum_n e^{ikx_n}. \end{aligned}$$

Подставляя теперь

$$q_k S + S q_k = 2q_k S - [q_k, S]$$

и полученное выражение для $[q_k, S]$, находим путём сравнения с (7.7 и 12):

$$[H^0, S] = -H' \cdot S + S \cdot H''_{00},$$

так что

$$\begin{aligned} S^{-1} H S &= S^{-1} (H^0 + H') S = H^0 + S^{-1} \{ [H^0, S] + H' S \} = \\ &= H^0 + H''_{00}. \end{aligned}$$

H''_{00} — рассмотренная выше потенциальная энергия статического взаимодействия двух протонов, и так как она не содержит q_k и p_k , то играет роль аддитивной постоянной. Преобразуя через S , мы привели, таким образом, H к виду $(H_0 + \text{const})$, где H^0 сделано диагональным путём матричного представления (6.20). По (7.8) соб-

ственные значения H таковы:

$$H_{N_1, N_2, \dots} = \sum_k h\omega_k \left(N_k + \frac{1}{2} \right) + H_{00}'' \quad (7.19)$$

так что энергия мезонов точно аддитивно составлена из потенциальных энергий Юкава между покоящимися протонами. Аддитивность выражается в том, что мезоны, числа которых в состояниях с различными импульсами равны N_k , не находятся ни в каком взаимодействии с протонами. В частности, они не могут и рассеиваться протонами; этот результат, выведенный раньше во втором приближении, теперь получен вполне строго, если только протоны считаются бесконечно тяжёлыми.

§ 8. Комплексное поле в вакууме ¹⁾

Поля, описанные в § 6 и 7, должны рассматриваться как нейтральные (что было обосновано в § 3), точно так же и соответствующие корпускулы нейтральны. Пусть теперь имеется другое действительное поле того же рода, которое можно объединить с первым в одно комплексное, согласно (3.1). Итак, чтобы иметь возможность описывать заряженные мезоны, мы введём теперь два действительных поля ψ_1 и ψ_2 или образованные из них по (3.1) комплексные поля ψ , ψ^* . Это будут снова скалярные (релятивистские инвариантные) поля, которые в вакууме, т. е. при отсутствии частиц или других полей, находящихся с ними во взаимодействии, подчиняются однородному уравнению Шредингера-Гордона:

$$(\square - \mu^2)\psi = 0, \quad (\square - \mu^2)\psi^* = 0. \quad (8.1)$$

Для функции Лагранжа в вакууме возьмём инвариантное выражение

$$\begin{aligned} L &= -c^2 \left\{ \sum_v \frac{\partial \psi^*}{\partial x_v} \frac{\partial \psi}{\partial x_v} + \mu^2 \psi^* \psi \right\} = \\ &= \dot{\psi}^* \dot{\psi} - c^2 (\text{grad } \psi^* \cdot \text{grad } \psi) - c^2 \mu^2 \psi^* \psi. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Если L считается, согласно (3.2), функцией ψ , ψ^* и их производных, то уравнения поля (3.3) совпадают с (8.1). (Вместо

¹⁾ Паули и Вайскопф (Pauli и Weisskopf), *Helv. Phys. Acta* 7, 709, 1934.

этого можно было представить L с помощью (3.1) и как функцию ψ_1, ψ_2 и их производных, тогда L аддитивно сложится из частей, зависящих от ψ_1 и ψ_2 , имеющих в отдельности вид (6.2). Из уравнения (1.2) будет следовать, что ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют уравнению Шредингера-Гордона в отдельности.)

Согласно (8.2), L инвариантно относительно преобразования калибровки (3.10); следовательно, мы можем сопоставить классическому полю по (3.11) плотность заряда и тока, для которых получается (8.3):

$$\begin{aligned} \rho &= -i\epsilon(\dot{\psi}^*\psi - \dot{\psi}\psi^*); \\ s &= i\epsilon c^2(\psi \operatorname{grad} \psi^* - \psi^* \operatorname{grad} \psi). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Легко проверить, что уравнение непрерывности (сохранение заряда) (3.12) будет выполнено благодаря волновым уравнениям (8.1).

В обозначениях

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi}^*, \quad \pi^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} = \dot{\psi} \quad (8.4)$$

получим, по (3.6), функцию Гамильтона

$$H = \pi^* \pi + c^2(\operatorname{grad} \psi^* \cdot \operatorname{grad} \psi) + c^2 \mu^2 \psi^* \psi. \quad (8.5)$$

Будучи положительно определённой функцией, H может быть интерпретировано как плотность энергии. Для квантования теории мы воспользуемся непосредственно перестановочными соотношениями (3.9). Тогда получится:

$$[H(x), \psi(x')] = \pi^*(x)[\pi(x), \psi(x')] = \pi^*(x) \cdot \frac{\hbar}{i} \delta(x - x'),$$

$$[H(x), \pi(x')] = -c^2 \frac{\hbar}{i} \{ \operatorname{grad} \psi^*(x) \cdot \operatorname{grad} \delta(x - x') + \mu^2 \psi^*(x) \delta(x - x') \},$$

и путём интегрирования по x -пространству аналогично § 6:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}(x) &\equiv \frac{i}{\hbar} [H, \psi(x)] = \pi^*(x), \\ \dot{\pi}(x) &\equiv \frac{i}{\hbar} [H, \pi(x)] = c^2 \{ \Delta \psi^*(x) - \mu^2 \psi^*(x) \}. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Соответствующие уравнения для $\dot{\psi}^*$ имеют место после перестановки величин со звёздочкой и без неё. После исключения π и π^* будет:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi}(x) &= \dot{\pi}^*(x) = c^2 \{ \Delta\psi(x) - \mu^2\psi(x) \}, \\ \ddot{\psi}^*(x) &= \dot{\pi}(x) = c^2 \{ \Delta\psi^*(x) - \mu^2\psi^*(x) \}, \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

в формальном соответствии с (8.1).

Чтобы установить релятивистски инвариантные перестановочные соотношения, определим по (4.4) с помощью $E = H = \int dx H$:

$$\psi(x, t) = e^{\frac{it}{\hbar} H} \psi(x) e^{-\frac{it}{\hbar} H}, \quad \psi^*(x, t) = e^{\frac{it}{\hbar} H} \psi^*(x) e^{-\frac{it}{\hbar} H}.$$

Так как эти операторы как функции пространства и времени снова удовлетворяют уравнению Шредингера-Гордона, то для них, в силу § 4, справедливы эквивалентные с (3.9) правила перестановки (4.28), где ψ_1 можно отождествить с ψ и ψ_2 с ψ^* . Сравнивая (4.21) с (8.6), находим:

$$d_{11}^{(1)} = d_{22}^{(1)} = 0, \quad d_{12}^{(1)} = d_{21}^{(1)} = 1.$$

Тогда перестановочные соотношения (4.28) гласят:

$$\begin{aligned} [\psi(x, t), \psi(x', t')] &= [\psi^*(x, t), \psi^*(x', t')] = 0, \\ [\psi^*(x, t), \psi(x', t')] &= [\psi(x, t), \psi^*(x', t')] = \\ &= \frac{\hbar}{i} D(x - x', t - t'); \end{aligned} \quad (8.8)$$

инвариантность их очевидна. Отметим, что благодаря соотношению $D(x, t) = -D(-x, -t)$ [ср. (4.29)], оба последние уравнения непротиворечивы.

Если разложить H (8.5), согласно (3.1, 5), на два аддитивных члена, зависящих отдельно от ψ_1 , π_1 и ψ_2 , π_2 , то каждый из этих членов в отдельности имеет вид (6.4) и по способу § 6 в отдельности приводится к диагональному виду. Но недостаток этого представления в том, что оно не делает диагональным общий электрический заряд $e = \int dx \rho$, так как для ρ и e не имеет места соответствующая аддитивность. Но так как общий заряд e по уравнению (3.12)

постоянен во времени, т. е. перестановочен с H , то должно быть возможным одновременное приведение H и e к диагональному виду. Это и удаётся нижеописанным способом.

Прежде всего неэрмитовские поля раскладываются в ряд Фурье по (5.5) с перестановочными соотношениями для амплитуд (5.6). Дифференциальная функция Гамильтона (8.5) будет:

$$H = \frac{1}{V} \sum_k \sum_{k'} e^{i(k-k')x} \{ p_k^* p_{k'} + c^2 (\mu^2 + kk') q_{k'}^* q_k \}.$$

Интегрирование по V оставляет только члены суммы $k = k'$:

$$H = \int dx H = \sum_k \{ p_k^* p_k + \omega_k^2 q_k^* q_k \}, \quad (8.9)$$

где ω_k снова определено по (6.15) (но гамильтонова функция (8.9) не тождественна с (6.14), так как здесь не имеют силы условия (6.12): q_k независимо от q_{-k}). Мы вычислим далее интегральный импульс поля: плотность импульса классической теории определяется (3.7), перестановкой сомножителей мы получим эрмитовский оператор

$$G = -(\pi \cdot \text{grad} \psi + \text{grad} \psi^* \cdot \pi^*),$$

а отсюда подстановкой рядов Фурье (5.5) и интегрированием по V :

$$G = \int_V dx G = -i \sum_k k \{ p_k q_k - q_k^* p_k^* \}. \quad (8.10)$$

(Для тензора энергии-импульса (3.8) получится после надлежащей симметризации:

$$T_{\mu\nu} = c^2 \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right) L \delta_{\mu\nu},$$

который удовлетворяет условию эрмитовости и уравнениям непрерывности (2.13), в чём легко убедиться.) Плотность электрического заряда, по (3.11) или (8.3, 4), равна

$$\rho = -i\epsilon(\pi\psi - \pi^*\psi^*) = -i\epsilon(\psi\pi - \psi^*\pi^*);$$

оба эти представления, согласно перестановочным соотношениям, эквивалентны, откуда видна и эрмитовость оператора ρ ¹⁾. Итак, получается полный заряд:

$$e = \int_V dx \rho = -i\varepsilon \sum_k \{p_k q_k - p_k^* q_k^*\}. \quad (8.11)$$

Чтобы сделать энергию, импульс и заряд диагональными одновременно, мы положим:

$$\left. \begin{aligned} q_k &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_k + b_k^*), & q_k^* &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_k^* + b_k), \\ p_k &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} i(a_k^* - b_k), & p_k^* &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} i(-a_k + b_k^*). \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

Здесь a_k, a_k^* — матрицы типа (6.16) и b_k, b_k^* — такие же матрицы относительно других квантовых чисел, так что a_k, a_k^* коммутируют с b_k, b_k^* . Если обозначить квантовые числа через $\overset{+}{N}_k$ и \bar{N}_k (они могут иметь все целые неотрицательные значения), то должно быть:

$$\left. \begin{aligned} (a_k)_{\overset{+}{N}_k, \overset{+}{N}_k} &= (a_k^*)_{\overset{+}{N}_k, \overset{+}{N}_k} = \sqrt{\overset{+}{N}_k} \cdot \delta_{\overset{+}{N}_k, \overset{+}{N}_k-1}, \\ (b_k)_{\bar{N}_k, \bar{N}_k} &= (b_k^*)_{\bar{N}_k, \bar{N}_k} = \sqrt{\bar{N}_k} \cdot \delta_{\bar{N}_k, \bar{N}_k-1}; \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

в отношении всех невыписанных квантовых чисел a_k, a_k^*, b_k, b_k^* действуют как единичные матрицы. Согласно (6.18), $a_k a_k^*, a_k^* a_k, b_k b_k^*, b_k^* b_k$ — диагональные матрицы, диагональные элементы которых $\overset{+}{N}_k + 1, \overset{+}{N}_k, \bar{N}_k + 1, \bar{N}_k$; мы запишем такие собственные значения

$$(a_k^* a_k)_{\overset{+}{N}_1 \overset{+}{N}_2 \dots \bar{N}_1 \bar{N}_2 \dots} = \overset{+}{N}_k, \quad (b_k^* b_k)_{\bar{N}_1 \bar{N}_2 \dots \bar{N}_1 \bar{N}_2 \dots} = \bar{N}_k. \quad (8.14)$$

1) Это представление имеет то преимущество перед другими [например $\rho = -i\varepsilon (\pi\psi - \psi^* \pi^*)$], что не даёт «нулевого заряда» [ср. (8.17)].

Согласно (6.19), имеют место следующие правила перестановки:

$$[a_k, a_{k'}^*] = [b_k, b_k^*] = \delta_{kk'}, \quad (8.15)$$

тогда как остальные матрицы попарно коммутируют. Легко проверить вычислением, что матричные представления (8.12) b_k, q_k, p_k, p_k^* удовлетворяют (5.6).

Подстановка (8.12) в (8.9, 10, 11) даёт:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{\hbar}{2} \sum_k \omega_k \{a_k^* a_k + a_k a_k^* + b_k^* b_k + b_k b_k^*\}, \\ G' &= \hbar \sum_k k \{a_k^* a_k - b_k b_k^*\}, \\ e &= \frac{\hbar \epsilon}{2} \sum_k \{a_k^* a_k + a_k a_k^* - b_k^* b_k - b_k b_k^*\}. \end{aligned} \right\} (8.16)$$

Следовательно, энергия, импульс и заряд диагональны, и их значения, по (8.14, 15), таковы:

$$\left. \begin{aligned} H_{\substack{+, + \\ N_1, N_2, \dots, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots}} &= \frac{\hbar}{2} \sum_k \omega_k \{(2\overset{+}{N}_k + 1) + (2\bar{N}_k + 1)\} = \\ &= \sum_k \hbar \omega_k (\overset{+}{N}_k + \bar{N}_k) + 2H_0, \\ G_{\substack{+, + \\ N_1, N_2, \dots, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots}} &= \hbar \sum_k k (\overset{+}{N}_k - \bar{N}_k - 1) = \\ &= \sum_k \hbar k (\overset{+}{N}_k - \bar{N}_k), \\ e_{\substack{+, + \\ N_1, N_2, \dots, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots}} &= \frac{\hbar \epsilon}{2} \sum_k \{(2\overset{+}{N}_k + 1) - (2\bar{N}_k + 1)\} = \\ &= \hbar \epsilon \sum_k (\overset{+}{N}_k - \bar{N}_k). \end{aligned} \right\} (8.17)$$

Отвлекаясь от бесконечной нулевой энергии $2H_0$, которая при комплексном поле в два раза больше, чем при нейтральном [ср. (6.23)], выражения (8.17) снова можно истолковать корпускулярно: если частицы имеют массу $m = \hbar \mu / c$, электрические заряды $\pm \hbar \epsilon$ и $\overset{+}{N}_k$ из имеющих заряд $+\hbar \epsilon$ получили импульс $+\hbar k$, а \bar{N}_k из имеющих заряд $-\hbar \epsilon$ получили импульс $-\hbar k$,

то энергия, импульс и заряд этих частиц даются как раз (8.17). Поэтому можно сказать, что в стационарном состоянии, характеризуемом квантовыми числами $\overset{+}{N}_1, \overset{+}{N}_2, \dots, \bar{N}_1, \bar{N}_2$, присутствуют по $\overset{+}{N}_k$ частиц с импульсом $+hk$ и зарядом $+h\epsilon$ и \bar{N}_k частиц с импульсом $-hk$ и зарядом $-h\epsilon$. В противоположность действительному полю квантованное комплексное поле представляет заряженные «мезоны», у которых оба знака заряда равноправны. То, что заряд является целым числом элементарных зарядов $h\epsilon$, в этой теории оказывается следствием квантования поля. Так как каждое собственное значение (8.17) — простое, то каждому состоянию $(\overset{+}{N}_1, \overset{+}{N}_2, \dots, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots)$ всей системы отвечает вес 1, в согласии со статистикой Бозе-Эйнштейна.

§ 9. Комплексное поле во взаимодействии с протонами и нейтронами¹⁾

Так же, как в § 7, нейтральное поле, так и здесь поле заряженных мезонов рассматривается во взаимодействии с покоящимися (бесконечно тяжёлыми) протонами и нейтронами²⁾. Формально это можно достичь тем, что перенимаются выражения (7.1 до 5) для действительных компонент поля ψ_1, ψ_2 и линейно комбинируются; тогда для гамильтоновой функции после перехода к комплексной записи получается [с $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 - i\eta_2)$]:

$$\left. \begin{aligned} H &= H^0 + H', \\ H^0 &= \pi^* \pi + c^2 \{ (\text{grad } \psi^* \cdot \text{grad } \psi) + \mu^2 \psi^* \psi \}, \\ H &= c (\eta \dot{\psi} + \dot{\eta}^* \psi^*). \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Относительно лорентцовской инвариантности квантованной теории, как и относительно тензора энергии-импульса, не получается ничего существенно нового по сравнению с § 7 и 8, так что эти пункты мы обойдём.

¹⁾ Ю к а в а (Y u k a w a), Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17, 48, 1935.

²⁾ Силы, которые испытывают мезоны благодаря своему заряду со стороны кулоновского поля протона, здесь рассматриваться не будут.

Характерное отличие от нейтральных мезонов состоит в следующем. Так как матрицы ϕ и ϕ^* , по (5.5) и (8.12), представляют переходы, в которых числа мезонов N_k^+ и N_k^- меняются на ± 1 , то возмущающая энергия $H' = \int dx H'$ снова описывает процессы, при которых мезоны поглощаются или испускаются протонами и нейтронами. Но теперь мезоны несут электрический заряд, и поэтому такие процессы только тогда совместимы с сохранением заряда, когда тяжёлые частицы испытывают соответствующие изменения заряда, превращаясь из протона в нейтрон, или наоборот. Для формального представления этих превращений (как известно, имеющих место и при β -распаде) удобно, по Гейзенбергу¹⁾, трактовать протон и нейтрон как два состояния одной и той же частицы, которую называют «протон-нейтрон» (или также «нуклон»). Оба состояния характеризуют «зарядным числом» λ , причём $\lambda = 0$ отвечает нейтронному состоянию, а $\lambda = 1$ — протонному. При переходе $\lambda = 1 \rightarrow 0$ может испуститься положительный мезон или поглотиться отрицательный; обратные процессы связаны с переходом $\lambda = 0 \rightarrow 1$. Разумеется, при этом нужно отождествить заряд положительного мезона с зарядом протона (элементарным зарядом). Для всех дальнейших выводов удобно измерять электрические заряды в единицах элементарного заряда, и мы положим поэтому (в этом § 9)

$$h\varepsilon = 1.$$

Поскольку, таким образом, введённая в § 8 функция плотности представляет электрическую плотность в обычном смысле, подчинённую совместно с зарядами протонов уравнению непрерывности, то H' должно описывать, кроме процессов испускания и поглощения мезонов, также и одновременные с ними процессы превращения протонов в нейтроны и наоборот, т. е. функции η и η^* в (9.1) должны быть ещё матрицами в отношении зарядных чисел λ_n протон-нейтронов ($n = 1, 2, \dots$).

Поэтому в теории взаимодействия заряженных мезонов с ядерными частицами нельзя совсем оставлять в стороне изменения состояния последних даже если считать их, как в § 6, неподвижными и тем самым пренебрегать их трансляционными

1) Zs. f. Phys. 77, 1, 1932.

степенями свободы, всё же, по меньшей мере, нужно учитывать «зарядные степени свободы», так как «правила отбора», обусловленные сохранением заряда, важны для переходов.

Чтобы формулировать приведённую таким образом проблему взаимодействия, мы можем снова применить для η представление (7.3):

$$\eta = \sum_n g_n \delta(x - x_n), \quad \eta^* = \sum_n g_n^* \delta(x - x_n), \quad (9.2)$$

но теперь g_n , g_n^* должны рассматриваться как матрицы относительно зарядных чисел λ_n , которые надо определить так, чтобы сохранялся заряд. Пусть

$$e^P = \sum_n e_n \quad (9.3)$$

— заряд всех протон-нейтронов, представленный, как матрица, относительно λ_n (см. ниже). Заряд мезонного поля мы назовём e^0 :

$$e^0 = \int dx \rho = -\frac{i}{\hbar} \int dx (\pi \dot{\psi} - \pi^* \dot{\psi}^*). \quad (9.4)$$

Общий заряд

$$e = e^0 + e^P \quad (9.5)$$

должен быть перестановочен с $H = \int dx H$,

$$[H, e] = [H^0 + H', e] = 0. \quad (9.6)$$

H^0 перестановочно с e , так как H^0 , e^0 и e^P — диагональные относительно \bar{N}_k , \bar{N}_k и λ_n матрицы, так что остаётся только выполнить условие

$$[H', e] = [H', e^0] + [H', e^P] = 0. \quad (9.7)$$

Из (9.1, 4) получается

$$\begin{aligned} [H', e^0] &= -\frac{i}{\hbar} \int dx ([H', \pi] \dot{\psi} - [H', \pi^*] \dot{\psi}^*); \\ [H', \pi(x)] &= \int dx' [H'(x'), \pi(x)] = \\ &= -\frac{\hbar}{i} c \int dx' \eta(x') \delta(x - x') = -\frac{\hbar}{i} c \eta(x), \\ [H', \pi^*(x)] &= -\frac{\hbar}{i} c \eta^*(x); \end{aligned}$$

так что

$$[H', e^0] = c \int dx (\eta \dot{\psi} - \eta^* \dot{\psi}^*).$$

С другой стороны,

$$[H', e^P] = c \int dx ([\eta, e^P] \psi + [\eta^*, e^P] \psi^*).$$

Чтобы выполнить (9.7), мы потребуем:

$$[\eta, e^P] = -\eta, \quad [\eta^*, e^P] = +\eta^*, \quad (9.8)$$

или, по (9.2, 3) (конечно, $[g_n, e_n] = 0$ для $n \neq n'$),

$$[g_n, e_n] = -g_n, \quad [g_n^*, e_n] = +g_n^*. \quad (9.9)$$

Заряд протон-нейтрона e_n представляется как диагональная матрица относительно зарядного числа $\lambda_n (= 0, 1)$, элементы которой равны 0 (нейтрон) и 1 (протон)

$$e_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

Беря выражения

$$g_n = g \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_n^* = g^* \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.11)$$

где g — числовой множитель, найдём:

$$g_n e_n = 0, \quad e_n g_n = g_n, \quad g_n^* e_n = g_n^*, \quad e_n g_n^* = 0,$$

так что условия (9.9) выполняются благодаря (9.11). Единственные неисчезающие элементы матриц (9.11) суть $(g_n)_{1,0}$ и $(g_n^*)_{0,1}$, так что g_n описывает переходы из нейтронного состояния в протонное, а g_n^* описывает обратные переходы. Этому соответствует множитель $\psi(x_n)$ при g_n в H' , так как ψ , по (5.5) и (8.12), относится к поглощению положительных мезонов и испусканию отрицательных.

Для формального представления g_n часто применяются спиновые матрицы Паули:

$$\tau^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (9.12)$$

но их, разумеется, надо понимать как матрицы относительно не спинового квантового числа, а зарядного λ («изотопного

спина»). Матрицы Паули — эрмитовские со свойствами:

$$\left. \begin{aligned} (\tau^{(1)})^2 = (\tau^{(2)})^2 = (\tau^{(3)})^2 = 1, \quad \tau^{(2)}\tau^{(3)} = -\tau^{(3)}\tau^{(2)} = i\tau^{(1)}, \\ \tau^{(3)}\tau^{(1)} = -\tau^{(1)}\tau^{(3)} = i\tau^{(2)}, \quad \tau^{(1)}\tau^{(2)} = -\tau^{(2)}\tau^{(1)} = i\tau^{(3)}. \end{aligned} \right\} (9.13)$$

С учётом (9.12), мы запишем вместо (9.10, 11):

$$e_n = \frac{1}{2} (1 - \tau_n^{(3)}), \quad (9.14)$$

$$g_n = g \cdot \frac{1}{2} (\tau_n^{(1)} - i\tau_n^{(2)}), \quad g_n^* = g^* \cdot \frac{1}{2} (\tau_n^{(1)} + i\tau_n^{(2)}); \quad (9.15)$$

индекс n означает, что матрицы относятся только к λ_n , а в отношении всех остальных зарядных чисел единичны. Легко проверить справедливость (9.9), пользуясь (9.13). Подытоживая, мы можем с помощью (9.1, 2, 15) написать для H' :

$$\begin{aligned} H' &= \int dx H' = c \sum_n \{ g_n \psi(x_n) + g_n^* \psi^*(x_n) \} = \\ &= c \sum_n \left\{ g \cdot \frac{1}{2} (\tau_n^{(1)} - i\tau_n^{(2)}) \psi(x_n) + g^* \cdot \frac{1}{2} (\tau_n^{(1)} + i\tau_n^{(2)}) \psi^*(x_n) \right\}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Если ещё ввести сюда ряды Фурье (5.5) и матричное представление (8.12), то выйдет:

$$\begin{aligned} H' &= c \sqrt{\frac{\hbar}{2V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \{ (a_k + b_k^*) \sum_n g_n e^{ikx_n} + \\ &\quad + (a_k^* + b_k) \sum_n g_n^* e^{-ikx_n} \}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

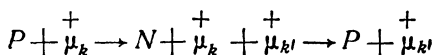
Желая учесть, что массы протона и нейтрона различны, надо добавить к H энергию покоя протон-нейтрона, которая является диагональной матрицей относительно зарядных чисел λ_n :

$$\left(\begin{array}{cc} M_N c^2 & 0 \\ 0 & M_P c^2 \end{array} \right) = \frac{c^2}{2} \{ M_N (1 + \tau_n^{(3)}) + M_P (1 - \tau_n^{(3)}) \}.$$

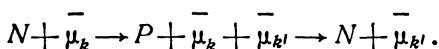
Но разностью масс $M_N - M_P$ мы в дальнейшем будем пренебрегать, как малой по сравнению с массой мезона.

Считая H' возмущением, можно снова рассматривать вопросы о рассеянии мезонов или о ядерных силах во втором приближении. В § 7 было показано, что рассеяние нейтральных мезонов на покоящемся протоне или нейтроне исчезает,

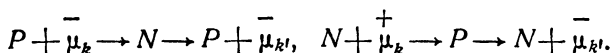
потому что процесс рассеяния может идти двумя путями, отличающимися последовательностью виртуальных процессов (поглощение первичного и испускание вторичного мезона); причём оба процесса взаимно компенсируются. Совсем иначе обстоит дело при рассеянии заряженных мезонов. Пусть, например, имеются первичный положительный мезон и протон; последний, таким образом, не может поглотить этот мезон; тогда процесс рассеяния не может идти так, чтобы сначала поглощался первичный мезон, а потом испускался вторичный; остаётся пригодным только второй путь, характеризующийся такой схемой:



(P — протон, N — нейтрон, $\overset{+}{\mu}_k, \overset{-}{\mu}_k$ — положительный и отрицательный мезоны с импульсом $\hbar k$). Аналогично при рассеянии отрицательного мезона на протоне имеется только такой путь:



С другой стороны, при рассеянии отрицательного мезона на протоне и положительного мезона на нейтроне надо рассматривать только первый частичный процесс:



В каждом случае вследствие сохранения заряда процесс рассеяния идёт только по одному пути. Соответствующий матричный элемент, который не может быть компенсирован никаким другим, получается по (7.10) и (9.17) и с $\omega_{k'} = \omega_k$:

$$H_{ea}^n = \pm \frac{c^2 |g|^2}{2V\omega_k^2}$$

Отсюда по известному способу может быть вычислена вероятность рассеяния. Распределение рассеянных мезонов по направлениям, очевидно, изотропно, а полное поперечное сечение рассеяния равно

$$Q = \frac{|g|^4}{4\pi (\hbar\omega_k)^2} \quad (9.18)$$

Чтобы определить производимые посредством заряженных мезонов ядерные силы, как и в § 7, мы вычислим во втором приближении произведённое за счёт H' возмущение собственных значений энергии основного состояния поля (все $\bar{N}_k = 0$ и $\bar{N}_k = 0$).

Учтённые в (7.11) виртуальные переходы $0 \rightarrow z \rightarrow 0$ снова состоят в том, что один протон-нейтрон « n » испускает мезон, а другой « n' » поглощает его. Смотри по тому, испускается ли положительный или отрицательный мезон, промежуточное состояние будет обозначаться z^+ или z^- . Тогда, по (9.17) и (8.13), матричные элементы виртуальных частичных процессов $0 \rightarrow z$ (испускание) и $z \rightarrow 0$ (поглощение) будут:

$$H'_{z^+} = c \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_k}} \sum_n g_n^* e^{-ikx_n}, \quad H'_{0z^+} = c \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_k}} \sum_{n'} g_{n'} e^{ikx_{n'}},$$

$$H'_{z^-} = c \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_k}} \sum_n g_n e^{ikx_n}, \quad H'_{0z^-} = c \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_k}} \sum_{n'} g_{n'}^* e^{-ikx_{n'}}.$$

Здесь мы считаем, что g_n являются матрицами относительно зарядных чисел λ_n также и после подстановки в H''_{00} (7.11), что дозволено, если порядок сомножителей выбран по (7.11). Помня, что

$$H''_{z^+} - H''_0 = H''_{z^-} - H''_0 = \hbar\omega_k,$$

получим для H''_{00} :

$$H''_{00} = -\frac{1}{2} c^2 \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{\omega_k^2} \sum_n \sum_{n'} \left\{ g_{n'} g_n^* e^{ik(x_{n'} - x_n)} + g_{n'}^* g_n e^{ik(x_n - x_{n'})} \right\}.$$

Как и в (7.13), здесь можно ввести потенциальную функцию Юкава (7.12).

$$H''_{00} = -\frac{1}{2} \sum_n \sum_{n'} \{ g_{n'} g_n^* + g_{n'}^* g_n \} U(x_{n'} - x_n). \quad (9.19)$$

Каждый член двойной суммы по n , n' относительно зарядных квантовых чисел λ_n , $\lambda_{n'}$ протон-нейтрона является матрицей, собственные значения которой легко определить.

Что касается членов $n = n'$, то, по (9.11),

$$g_n g_n^* + g_n^* g_n = |g|^2, \quad (9.20)$$

т. е. они равны единичной матрице, помноженной на $|g|^2$; каждый из этих членов диагонален и имеет значение $-\frac{1}{2}|g|^2 U(0)$. Следовательно, каждый протон-нейтрон благодаря взаимодействию с полем заряженных мезонов обладает бесконечной отрицательной собственной энергией. Всё то, что было сказано об этом в § 7, сохраняет силу и здесь.

Члены с $n \neq n'$ в (9.19) представляют силы между двумя тяжёлыми частицами. Мы выберем частицы, у которых $n = 1$, $n' = 2$ и $n = 2$, $n' = 1$:

$$V_{12} = -\{g_1 g_2^* + g_1^* g_2\} U(x_1 - x_2). \quad (9.21)$$

Зависимость этого потенциала от координат точно такая же, как и у потенциала Юкава (7.15). Матричный множитель $\{g_1 g_2^* + g_1^* g_2\}$ указывает, что мы имеем дело с «обменными силами»: единственные неисчезающие матричные элементы у g_n и соответственно у g_n^* отвечают, по (9.11), переходам n -й частицы из нейтронного состояния в протонное и соответственно из протонного состояния в нейтронное; следовательно, матрица $g_1 g_2^*$ имеет только один неисчезающий элемент, соответствующий начальному состоянию.

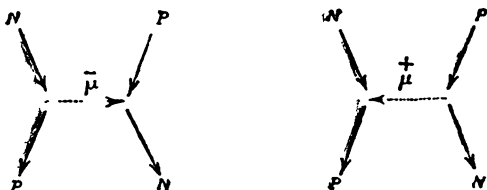
частица 1 = нейтрон, частица 2 = протон,

и конечному состоянию:

частица 1 = протон, частица 2 = нейтрон;

у матрицы $g_1 g_2^*$, эрмитовски сопряжённой с $g_1^* g_2$, конечное и начальное состояния переставлены. Так что, если обе частицы вначале находились в одинаковом состоянии (два нейтрона или два протона), то, по (9.21), вообще не остаётся возможностей для перехода; это основано на том, что вследствие закона сохранения заряда пара частиц не способна обмениваться заряженными мезонами. Если, напротив, одна из частиц вначале была нейтроном, а другая — протоном, то V_{12} представляет переход в конечное состояние, в котором частицы

поменялись зарядами; перенос заряда, конечно, осуществил перешедший мезон. Когда тяжёлые частицы рассматриваются как подвижные (ср. § 7), то мезоны, кроме обмена зарядом, способствуют и обмену импульсом, по одной из следующих схем:



Для обменной силы, произведённой заряженными мезонами, характерно, что частицы при столкновении меняются зарядами, тогда как нейтральное мезонное поле (§ 7), конечно, не меняет зарядов. То обстоятельство, что действительные ядерные силы, вероятно, хотя бы частично, имеют обменный характер, и навело Юкава¹⁾ на мысль о возможной связи настоящей теории с ядерными силами; к этой гипотетической связи мы вернёмся позже (§ 15).

Вычислим собственные значения H''_{00} (9.19) для того случая, когда присутствуют только два протон-нейтрона. Тогда, после вычитания собственных энергий, H''_{00} тождественно с V_{12} (9.21). Обозначим четыре зарядные состояния пары частиц буквами a, b, c, d в такой последовательности: нейтрон-нейтрон = a , протон-нейтрон = b , нейтрон-протон = c , протон-протон = d , так что V_{12} представится такой матричной схемой:

	a	b	c	d
a	0	0	0	0
b	0	0	$- g ^2 U(x_1 - x_2)$	0
c	0	$- g ^2 U(x_1 - x_2)$	0	0
d	0	0	0	0

Собственные значения этой матрицы, очевидно, равны:

$$0, -|g|^2 U(x_1 - x_2), +|g|^2 U(x_1 - x_2), 0.$$

¹⁾ Ср. примечание 1, стр. 69.

Двойное собственное значение 0 принадлежит стационарным состояниям a и d , два других собственных значения отвечают смеси состояний b и c , причём, как легко видеть, собственная функция системы симметрична относительно зарядных чисел λ_1, λ_2 при энергии $-|g|^2 U$ и антисимметрична при энергии $+|g|^2 U$. В первом случае протон и нейтрон притягиваются, а во втором отталкиваются.

В литературе обменные операторы $\{g_{n'} g_n^* + g_{n'}^* g_n\}$ обычно выражаются через матрицы изотопного спина; (9.15) даёт:

$$g_{n'} g_n^* + g_{n'}^* g_n = \frac{1}{2} |g|^2 \{ \tau_{n'}^{(1)} \tau_n^{(1)} + \tau_{n'}^{(2)} \tau_n^{(2)} \}; \quad (9.22)$$

вместо (9.21) можно написать и так:

$$V_{12} = -\frac{1}{2} |g|^2 \{ \tau_1^{(1)} \tau_2^{(1)} + \tau_1^{(2)} \tau_2^{(2)} \} U(x_1 - x_2). \quad (9.23)$$

Надо иметь в виду, что к этим обменным силам, выведенным во втором приближении теории возмущения в более высоких приближениях, прибавляются силы необменного характера, связывающие также и протоны между собой и нейтроны между собой. Например, нейтрон может испустить сначала отрицательный, а потом положительный мезон, которые потом будут поглощены другим нейтроном в обратном порядке; этот четырёхстепенный переход и другие, ему подобные, приводят в четвёртом приближении к обычному статическому взаимодействию между нейтронами. К сожалению, связь с проблемой собственной энергии делает невозможным свободное от произвола вычисление высших приближений такого взаимодействия; эти члены взаимодействия становятся конечными только тогда, когда, при отказе от релятивистской инвариантности, протоны и нейтроны описываются пространственно протяжёнными, так что их собственная энергия становится конечной; добавка к силам от высших приближений зависит не только от параметра связи $|g|$, но и от выбора радиуса протона и обрывающего множителя. Только если этими величинами можно распорядиться так, чтобы обменные силы Юкава, имеющие на расстояниях удалённости частиц друг от друга $|x_1 - x_2|$ порядок величины μ^{-1} (= радиусу действия сил между частицами), обладали на этих расстояниях, то теория становится однозначнее.

В случае взаимодействия нейтрального мезонного поля с покоящимися протонами и нейтронами мы могли точно определить собственные значения H , точно по отношению к любой степени $|g|$ путём преобразования H с помощью унитарной матрицы S (7.18). Для заряженного мезонного поля, т. е. для проблемы (9.1), не удалось найти соответствующее решение; хотя и можно разлагать S по степеням $|g|$, что отвечает применённому выше методу возмущений, но всё же ряд нельзя просуммировать в замкнутом виде. То, что обстоятельства здесь настолько сложнее, чем при нейтральном поле, формально связано с непрерывностью входящих в H' матриц g_n и g_n^* .

В более высоких приближениях теории возмущения надо учитывать виртуальные переходы, в которых два или больше мезонов испускаются различными протонами или нейтронами, а поглощаются другими, так что в процессе принимают участие больше двух протон-нейтронов. Отсюда у потенциала получаются члены, зависящие от координат трёх и более частиц («силы взаимодействия многих тел сразу»).

Если безразмерный параметр связи $\frac{|g|^2}{hc} \gtrsim 1$, разложения теории возмущений неприменимы из-за плохой сходимости¹⁾. В случае сильной связи ($|g|^2/hc \gg 1$) можно, напротив, пользоваться приближёнными решениями в виде разложений по обратным степеням $|g|^2$. Мы не можем входить в эти несколько сложные вычисления; упомянем только один результат. По этой теории протон-нейтроны способны связывать положительные или отрицательные мезоны, так что получаются «изобары протона» с произвольным зарядным числом; энергия или масса изобаров квадратично зависит от зарядного числа

$$M_\lambda = A + B \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Для статических сил, в наинизшем приближении (т. е., пренебрегая членами высшего порядка в $|g|^{-2}$) и в предельном случае, когда радиус протона $\rightarrow 0$, получаются силы между двумя телами с потенциалом

$$V_{12} = -\frac{1}{4} |g|^2 \cdot \mathfrak{P} \cdot U(x_1 - x_2),$$

где \mathfrak{P} — обменный оператор, который вследствие появления высших протонных изобар имеет несколько более общее значение, чем

¹⁾ Если определить $|g|$ из сравнения (9.23) с действительной величиной ядерных сил (ср. § 15), то $|g|^2/hc$ оказывается по порядку величины не существенно меньше единицы.

²⁾ Вентцель (Wentzel, *Helv. Phys. Acta* 13, 269, 1940 и 14, 633, 1941), Оппенгеймер и Швингер (Oppenheimer и Schwinger, *Phys. Rev.* 60, 150, 1941).

оператор в (9.21 или 23): он превращает зарядные числа обеих частиц λ_1, λ_2 в $\lambda_1 + 1, \lambda_2 - 1$ и в $\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1$. Отвлекаясь от этого и от числового множителя, мы видим, что при сильной и при слабой связи силы совпадают.

§ 10. Комбинированное нейтральное и заряженное поле

Мы вкратце рассмотрим ещё обобщение теории Юкавы, состоящее в том, что ядерные частицы связываются не только с заряженным, но и с нейтральным мезонным полем, причём особенным симметричным образом, такого рода, что силы становятся независимыми от зарядного состояния частиц («симметричная теория» Кеммера¹⁾). Мы обозначим нейтральное поле через ϕ_3 ($\phi_3 = \phi_3^*$) и разложим комплексное поле ϕ , с целью его симметричного представления, на его действительные (эрмитовские) составляющие ϕ_1, ϕ_2 , сообразно (3.1). Гамильтонова функция выбирается так:

$$\left. \begin{aligned} H &= H^0 + H', \\ H^0 &= \frac{1}{2} \int dx \sum_{\sigma} \{ \pi_{\sigma}^2 + c^2 |\text{grad } \phi_{\sigma}|^2 + c^2 \mu^2 \phi_{\sigma}^2 \}, \\ H' &= c g' \sum_{\sigma} \sum_n \tau_n^{(\sigma)} \phi_{\sigma}(x_n), \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

где суммирование по σ распространяется на значения 1, 2, 3; $\tau_n^{(1)}, \tau_n^{(2)}, \tau_n^{(3)}$ — матрицы «изотопного спина» n -го протон-нейтрона [ср. (9.12)]; параметр связи g' — действителен. Члены (10.1), относящиеся к заряженному полю ($\sigma = 1, 2$), совпадут с (9.1) и (9.16), если там положить $g = g^* = g' \sqrt{2}$. Но в отношении нейтрального поля ϕ_3 имеется различие с (7.5), выражающееся в том, что в H' $\phi_3(x_n)$ множится на $\tau_n^{(3)}$, т. е. множитель связи в (7.3) имеет различный знак, смотря по тому, находится ли частица в нейтронном или протонном состоянии; этим достигается то, что $\tau_n^{(\sigma)}$ и $\phi_{\sigma}(x_n)$ связаны наподобие скалярного произведения двух векторов τ_n и $\phi(x_n)$. Конечно, надо понимать это как векторы в символическом пространстве, не имеющем ничего общего с обычным пространством (x_1, x_2, x_3) .

С помощью рядов Фурье (5.1) для H^0 и H' получается

$$\left. \begin{aligned} H^0 &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_{\sigma} \{ p_{\sigma, k}^* p_{\sigma, k} + \omega_k^2 q_{\sigma, k}^* q_{\sigma, k} \}, \\ H' &= c g' V^{-1/2} \sum_k \sum_{\sigma} q_{\sigma, k} \sum_n \tau_n^{(\sigma)} e^{ikx_n}. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

¹⁾ Кеммер (K e m m e r), Proc. Cambr. Phil. Soc. 34, 354, 1938.

Для $q_{\sigma, k}$ и $p_{\sigma, k}$ имеют место условия эрмитовости (5.2) и перестановочные соотношения (5.4).

Преобразуем $H = H^0 + H'$ матрицей S , которую мы предполагаем разложенной по степеням g' в смысле метода возмущений:

$$S = 1 + S' + S'' + \dots; \quad (10.3)$$

при этом мы ограничимся вторым приближением, т. е. будем пренебрегать всеми членами, содержащими третью и более высокие степени g' . Поскольку S унитарно, имеет место

$$S^* S = 1 + (S' + S'^*) + (S'^* S' + S'' + S''^*) + \dots = 1.$$

Для выполнения этого условия мы потребуем, чтобы

$$S'^* = -S', \quad (10.4)$$

и положим

$$S'' = S''^* = \frac{1}{2} S'^2; \quad (10.5)$$

тогда в нужном приближении в самом деле будет:

$$S^* S = S S^* = 1, \quad S^* = S^{-1}.$$

Для S' мы примем выражение

$$S' = \frac{i}{\hbar} c g' V^{-1/2} \sum_k \frac{1}{\omega_k^2} \sum_{\sigma} p_{\sigma, k} \sum_n \tau_n^{(\sigma)} e^{-ikx_n}, \quad (10.6)$$

которое удовлетворяет (10.4) благодаря (5.2). Перестановка с H^0 даёт на основании правил (5.4):

$$\begin{aligned} [H^0, S'] = & -\frac{c g'}{2} V^{-1/2} \sum_k \sum_{\sigma} (q_{\sigma, k}^* \sum_n \tau_n^{(\sigma)} e^{-ikx_n} + \\ & + q_{\sigma, k} \sum_n \tau_n^{(\sigma)} e^{+ikx_n}), \end{aligned}$$

или с учётом (5.2):

$$[H^0, S'] = -H'. \quad (10.7)$$

Если разложить преобразованный матрицей S (10.3, 4, 5) оператор Гамильтона по степеням g'

$$\begin{aligned} S^{-1} H S = \\ = \left(1 - S' + \frac{1}{2} S'^2 + \dots \right) (H^0 + H') \left(1 + S' + \frac{1}{2} S'^2 + \dots \right), \end{aligned}$$

то члены, линейные в g' , согласно (10.7), сократятся, и получится во втором приближении:

$$S^{-1}HS = H^0 + \frac{1}{2} [H', S'] + \dots \quad (10.8)$$

Входящий сюда как новый возмущающий член $\frac{1}{2} [H', S']$ представляет, по (10.2, 6), двойную сумму по n и по n' ; мы отделим суммирование членов с $n = n'$ от членов с $n \neq n'$:

$$\frac{1}{2} [H', S'] = H''_{(=)} + H''_{(\neq)}. \quad (10.9)$$

$H''_{(=)}$ — это сумма таких членов, какие появлялись бы и при наличии одного единственного протон-нейтрона (собственная энергия плюс члены, описывающие, например, процессы рассеяния); член $H''_{(=)}$ ничего не прибавляет к ядерным силам, по крайней мере, в рассмотренном здесь приближении. Мы вычислим поэтому только $H''_{(\neq)}$, для которого получится из-за $[\tau_n^{(\sigma)}, \tau_{n'}^{(\sigma')}] = 0$ для $n \neq n'$:

$$H''_{(\neq)} = -c^2 g'^2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{n \neq n'} \sum_{\sigma} \tau_n^{(\sigma)} \tau_{n'}^{(\sigma)} \cdot \frac{1}{V} \sum_k \frac{e^{ik(x_{n'} - x_n)}}{\omega_k^2}.$$

Здесь снова появляется определённый в (7.13) потенциал Юкава. Если ещё для сокращения записи заменить сумму по σ символическим скалярным произведением

$$\sum_{\sigma} \tau_n^{(\sigma)} \tau_{n'}^{(\sigma)} = (\tau_n \cdot \tau_{n'}), \quad (10.10)$$

то получится

$$H''_{(\neq)} = -g'^2 \sum_{n < n'} (\tau_n \cdot \tau_{n'}) U(x_{n'} - x_n). \quad (10.11)$$

Что касается матрицы $(\tau_n \cdot \tau_{n'})$, то члены суммы с $\sigma = 1, 2$ в (10.10) нам уже известны [ср. (9.22)]; сюда прибавляется ещё член $\tau_n^{(3)} \tau_{n'}^{(3)}$, являющийся по (9.12) диагональной матрицей с элементами ± 1 . Обозначая, как в § 9, зарядные состояния пары частиц n, n' буквами a, b, c, d , получим для матрицы $(\tau_n \cdot \tau_{n'})$ следующую схему:

	a	b	c	d
a	$+1$	0	0	0
b	0	-1	$+2$	0
c	0	$+2$	-1	0
d	0	0	0	$+1$

Собственные значения суть: $1, (-1 \pm 2), 1$; три собственных значения $+1$ принадлежат собственным функциям, симметричным в λ_n ,

λ_n , в то время как собственная функция с простым собственным значением — 3 антисимметрична. Так что, если существуют только два протон-нейтрона, то собственные значения $H'_{(\neq)}$ таковы:

$$V_{12}^S = -g'^2 U(x_1 - x_2), \quad V_{12}^A = +3g'^2 U(x_1 - x_2), \quad (10.12)$$

где V_{12}^S , V_{12}^A также относятся к состояниям, собственные функции которых симметричны и соответственно антисимметричны; в первом случае силы притягивающие, во втором — отталкивающие. По сравнению с силами, рассмотренными в § 9, которые создаются только с помощью заряженных мезонов, имеется характерная разница, состоящая в том, что три симметричных состояния имеют одинаковое собственное значение: силы между двумя протонами или между двумя нейтронами таковы же, как и между протоном и нейтроном, если только собственная функция симметрична относительно зарядных чисел. В этом случае говорят о силах, «не зависящих от заряда». Принимая во внимание экспериментальные указания о независимости ядерных сил от заряда (§ 15), теория Кеммера заслуживает особого интереса.

Между прочим, действительно положение, что симметричная теория даёт силы, не зависящие от заряда не только в рассмотренном здесь втором приближении теории возмущений, но и в любом, более высоком приближении (Кеммер). Именно, теория инвариантна относительно одновременного ортогонального преобразования «векторов» ψ_1, ψ_2, ψ_3 и $\tau_n^{(1)}, \tau_n^{(2)}, \tau_n^{(3)}$ (поворотов в пространстве изотопного спина)¹⁾, поэтому гамильтонова функция, после того как она сделана диагональной относительно квантовых чисел поля, зависит от зарядных чисел λ_n только через инвариантные комбинации $(\tau_n \cdot \tau_n)$, собственные значения которых не зависят от заряда.

§ 11. Заряженные частицы в электромагнитном поле

В классической релятивистской механике движение частицы с зарядом e_1 в заданном электромагнитном поле описывается уравнением Гамильтона-Якоби, которое можно привести к такому виду:

$$\sum_{\nu=1}^4 \left(\frac{\partial W}{\partial x_\nu} - \frac{e_1}{c} \Phi_\nu \right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

Здесь Φ_ν — четырёхмерный потенциал электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, взятый в той точке, где находится заряд

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}.$$

¹⁾ Это следует, в частности, из отношений (9.13).

Волновое уравнение, отвечающее этой проблеме, установлено Шредингером¹⁾ и Гордоном²⁾:

$$\left\{ \sum_{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} - \frac{ie_1}{\hbar c} \Phi_{\nu} \right)^2 - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right\} \psi = 0.$$

Это дифференциальное уравнение, которое без поля ($\Phi_{\nu} = 0$) совпадает с (8.1), описывает влияние электромагнитного поля на рассмотренное в § 8 заряженное мезонное поле. Если мы при этом рассматриваем компоненты потенциала Φ_{ν} как заданные функции пространства и времени, то это означает, что мы пренебрегли обратным действием мезонного поля.

Положим, в согласии с обозначениями § 8, массу частицы $m = \mu \hbar / c$ и элементарный заряд $e_1 = \epsilon \hbar$, тогда волновое уравнение и сопряжённое с ним будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} - \frac{i\epsilon}{c} \Phi_{\nu} \right)^2 - \mu^2 \right\} \psi &= 0, \\ \left\{ \sum_{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + \frac{i\epsilon}{c} \Phi_{\nu} \right)^2 - \mu^2 \right\} \psi^* &= 0. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Согласно (3.3), они выводятся из такой функции Лагранжа:

$$L = -c^2 \left\{ \sum_{\nu} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\nu}} + \frac{i\epsilon}{c} \Phi_{\nu} \psi^* \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}} - \frac{i\epsilon}{c} \Phi_{\nu} \psi \right) + \mu^2 \psi^* \psi \right\}. \quad (11.2)$$

По (3.13) отсюда получается плотность заряда и тока ψ -поля³⁾:

$$s_{\nu} = i\epsilon c^2 \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\nu}} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}} \psi^* \right) - 2\epsilon^2 c \Phi_{\nu} \psi^* \psi. \quad (11.3)$$

Уравнение непрерывности $\sum_{\nu} \partial s_{\nu} / \partial x_{\nu} = 0$ выполнено, потому

1) Ann. d. Phys. 81, 109, 1926 (§ 6).

2) Zs. f. Phys. 40, 117, 1926.

3) Так как $\partial \psi / \partial x_{\nu}$ и $\partial \psi^* / \partial x_{\nu}$ входят в L только в комбинациях

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}} - \frac{i\epsilon}{c} \Phi_{\nu} \psi, \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial x_{\nu}} + \frac{i\epsilon}{c} \Phi_{\nu} \psi^*.$$

по (3.13) имеем:

$$s_{\nu} = c \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\nu}}.$$

что L инвариантно относительно преобразования калибровки (3.10). С этим связано то, что теория инвариантна относительно более общего преобразования калибровки:

$$\psi \rightarrow \psi \cdot e^{\frac{i\epsilon}{c} \Lambda}, \quad \psi^* \rightarrow \psi^* \cdot e^{-\frac{i\epsilon}{c} \Lambda}, \quad \Phi_\nu \rightarrow \Phi_\nu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu}, \quad (11.4)$$

где Λ — произвольная функция пространства и времени. Это понятно нужно потребовать, так как преобразование потенциалов Φ_ν составляет напряжение поля $F_{\mu\nu}$, согласно (11.4)¹⁾, инвариантным, а действия поля определяются только через $F_{\mu\nu}$. Как легко проверить²⁾, не только волновые уравнения (11.1), но и функция Лагранжа (11.2) и четырёхмерный ток (11.3) инвариантны относительно преобразования (11.4).

Тензор энергии-импульса, образованный по каноническому правилу (3.8), ещё не удовлетворяет этому требованию инвариантности; также он ещё и несимметричен. Согласно оговорке, сделанной в § 2, мы дополним его до симметричного тензора, который тогда будет и калибровочно-инвариантным, следующим способом:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = c^2 \left\{ \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu} + \frac{i\epsilon}{c} \Phi_\mu \psi^* \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{i\epsilon}{c} \Phi_\nu \psi \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_\nu} + \frac{i\epsilon}{c} \Phi_\nu \psi^* \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{i\epsilon}{c} \Phi_\mu \psi \right) \right\} + L \delta_{\mu\nu}. \quad (11.5) \end{aligned}$$

Как показывает вычисление с помощью волновых уравнений (11.1)³⁾, дивергенция этого тензора соответствует силам,

¹⁾ Преобразование калибровки 2-го рода по Паули; ср. прим. 1, стр. 23.

²⁾ Надо вспомнить операторное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \mp \frac{i\epsilon}{c} \left(\Phi_\nu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu} \right) \right) e^{\pm \frac{i\epsilon}{c} \Lambda} = e^{\pm \frac{i\epsilon}{c} \Lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \mp \frac{i\epsilon}{c} \Phi_\nu \right).$$

³⁾ Удобно применить уравнение, вытекающее из (11.1):

$$\begin{aligned} \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ \chi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{i\epsilon}{c} \Phi_\mu \psi \right) \right\} = \\ = \sum_\mu \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_\mu} + \frac{i\epsilon}{c} \Phi_\mu \chi \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{i\epsilon}{c} \Phi_\mu \psi \right) + \mu^2 \chi \psi. \end{aligned}$$

с которыми электромагнитное поле действует на мезоны:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = -\frac{1}{c} \sum_{\mu} s_{\mu} F_{\mu\nu} \quad (11.6)$$

Но для гамильтоновой функции мы сохраним каноническое определение (3.6); отсюда получаются канонические уравнения поля в согласии с (11.1). При

$$\pi = \frac{1}{ic} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_4}} = \dot{\psi}^* - i\varepsilon \Phi_0 \psi^*, \quad \pi^* = \dot{\psi} + i\varepsilon \Phi_0 \psi; \quad (11.7)$$

($\Phi_4 = i\Phi_0$) мы найдём:

$$H = \pi^* \pi + c^2 \left\{ \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} + \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_k \psi^* \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_k \psi \right) + \mu^2 \psi^* \psi \right\} - \Phi_0 \cdot i\varepsilon (\pi \dot{\psi} - \pi^* \dot{\psi}^*). \quad (11.8)$$

Последний член ($\Phi_0 \rho$) отличает H от плотности энергии — T_{44} . Легко проверить, что (11.8) даёт правильные уравнения поля; так, на основании перестановочных соотношений (3.9), непосредственно следует:

$$\dot{\psi} = \frac{i}{\hbar} \left[\int dx H, \psi \right] = \pi^* - i\varepsilon \Phi_0 \psi,$$

что совпадает с (11.7), и после короткого вычисления

$$\dot{\pi}^* = c^2 \left\{ \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_k \right)^2 - \mu^2 \right\} \psi - i\varepsilon \Phi_0 \pi^*,$$

откуда после исключения π^* снова получается волновое уравнение (11.1). Если, как в (9.1), отщепить в H гамиль-

1) Чтобы это уравнение имело место и в квантованной теории и с выбранным в (11.3) и (8.3) порядком сомножителей (ср. примечание на стр. 58), в $T_{\mu\nu}$ должна ещё быть произведена симметризация отдельных членов; так, в T_{4k} надо заменить $\dot{\psi}^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_k \psi \right)$ на

$$\frac{1}{2} \left\{ \dot{\psi}^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_k \psi \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_k \psi \right) \dot{\psi}^* \right\}.$$

тонову функцию невозмущённого мезонного поля H^0 , то возмущающая энергия будет:

$$H' = H - H^0 = -\Phi_0 \cdot i\varepsilon (\pi \dot{\psi} - \pi^* \dot{\psi}^*) - \\ - i\varepsilon c \sum_{k=1}^3 \Phi_k \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \psi^* \right) + \varepsilon^2 \psi^* \psi \sum_{k=1}^3 \Phi_k^2, \quad (11.9)$$

а после сравнения с (11.3)

$$H' = \Phi_0 \rho - \frac{1}{c} \sum_{k=1}^3 \Phi_k s_k - \varepsilon^2 \psi^* \psi \sum_{k=1}^3 \Phi_k^2. \quad (11.10)$$

Применяя в квантованной теории¹⁾ снова матричное представление (5.5), (8.12, 13), делающее H^0 диагональным, получим представление H' в виде билинейной формы относительно матриц a_k , a_k^* , b_k , b_k^* , т. е. матрица возмущения описывает переходы между стационарными состояниями невозмущённого мезонного поля, при которых два мезонных числа \bar{N}_k , \bar{N}_k меняются на ± 1 или на -1 . Конечно, общий заряд мезонов при этих переходах должен сохраняться, так как электромагнитное поле не может иметь заряда (перестановочность общего заряда $e = \int dx \rho$ с H , которую легко проверить, гарантирует сохранение полного заряда). Таким образом электромагнитное поле может вызвать переходы следующих родов:

$$\begin{aligned} (\alpha) \bar{N}_k \rightarrow \bar{N}_k - 1, \quad \bar{N}_{k'} \rightarrow \bar{N}_{k'} + 1; \\ (\beta) \bar{N}_k \rightarrow \bar{N}_k - 1, \quad \bar{N}_{k'} \rightarrow \bar{N}_{k'} + 1; \\ (\gamma) \bar{N}_k \rightarrow \bar{N}_k + 1, \quad \bar{N}_{k'} \rightarrow \bar{N}_{k'} + 1; \\ (\delta) \bar{N}_k \rightarrow \bar{N}_k - 1, \quad \bar{N}_{k'} \rightarrow \bar{N}_{k'} - 1. \end{aligned}$$

Процессы (α) и (β) представляют рассеяние положительного и соответственно отрицательного мезонов электромагнитным

¹⁾ Мы опускаем доказательство релятивистской инвариантности квантования и указываем на аналогичные рассуждения в § 21 (электроны в электромагнитном поле).

полем, тогда как (γ) и (δ) описывают образование пары или, соответственно, уничтожение (исчезновение) одного положительного и одного отрицательного мезонов. Эти процессы могут происходить реально, если они совместимы с законом сохранения энергии, а также они могут в высших приближениях теории возмущений играть роль виртуальных переходов.

В качестве простейшего примера рассмотрим вкратце рассеяние мезона электростатическим полем:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = 0, \quad \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0. \quad (11.11)$$

Скалярный потенциал разлагается в ряд Фурье

$$\Phi_0 = \sum_k A_k e^{ikx}, \quad A_{-k} = A_k^*. \quad (11.12)$$

Тогда из (11.9) и (5.5) получится путём интегрирования по объёму V :

$$H' = \int_V dx H' = -i\varepsilon \sum_k \sum_{k'} A_{k'-k} (p_{k'} q_k - p_k^* q_{k'}^*);$$

если отщепить здесь члены с $k=k'$, то из (8.11, 12) следует:

$$H' = A_0 e + \frac{\varepsilon h}{2} \sum_{k \neq k'} \sum A_{k'-k} \left\{ \frac{\omega_{k'} + \omega_k}{\sqrt{\omega_{k'} \omega_k}} (a_{k'}^* a_k - b_k^* b_{k'}) + \right. \\ \left. + \frac{\omega_{k'} - \omega_k}{\sqrt{\omega_{k'} \omega_k}} (a_{k'}^* b_k^* - a_k b_{k'}) \right\}. \quad (11.13)$$

Рассмотрим рассеяние положительного мезона: его импульс в начальном состоянии hk , а в конечном hk' , соответствующий матричный элемент H' , по (8.13), содержится в члене $\sim a_{k'}^* a_k$, и если в этих состояниях нет других мезонов, он равен

$$H'_{k'k} = \frac{\varepsilon h}{2} A_{k'-k} \cdot \frac{\omega_{k'} + \omega_k}{\sqrt{\omega_{k'} \omega_k}},$$

или, так как закон сохранения энергии требует, чтобы $\omega_{k'} = \omega_k$ (упругое рассеяние):

$$H'_{k'k} = \varepsilon h A_{k'-k} = \varepsilon h \cdot \frac{1}{V} \int dx \Phi_0 e^{i(k-k')x}. \quad (11.14)$$

Этот результат полностью отвечает «борновскому приближению» теории возмущений в обычной волново-механической теории рассеяния ($H'_{ea} = \epsilon h \int dx u_{k'}^* \Phi_0 u_k$, где $u_k = V^{-1/2} e^{ikx}$). Когда, в частности, Φ_0 — кулоново поле покоящегося точечного заряда, то рассеяние при нерелятивистских скоростях отвечает формуле Резерфорда; при произвольной скорости по известным методам получится следующее эффективное поперечное сечение рассеяния в телесный угол $d\Omega$:

$$dQ = d\Omega \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\frac{Ze_1^2}{2mv^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad (11.15)$$

(v — скорость мезона, ϑ — угол рассеяния, $e_1 = \epsilon h =$ заряду мезона, $Ze_1 =$ заряду рассеивающего ядра).

Члены $\sim a_{k'}^* b_k^*$ в (11.13) представляют образование пары из положительного и отрицательного мезонов. Конечно, статическое поле не может дать необходимую энергию $h(\omega_k + \omega_{k'})$, для того чтобы пары образовывались реально. С другой стороны, также и световая волна сама по себе, даже и при достаточной частоте, неспособна образовать мезонную пару; именно, если подставить векторный потенциал световой волны в (11.9), легко видеть, что $k' - k$ определяется её волновым вектором, т. е. общий импульс мезонной пары $hk' + (-hk)$ задаётся импульсом кванта, но при этом невыполнимо сохранение энергии (так как $c|k - k'| < \omega_k + \omega_{k'}$). Иначе обстоит дело, если, кроме световой волны с высокой частотой, присутствует статическое поле Φ_0 , как, например, кулоново поле атомного ядра, могущее перенять избыточный импульс. В этом случае получается двухстепенный переход по теории возмущений, при котором образуется сначала виртуальная пара, а затем её импульсы во втором переходе изменяются так, чтобы выполнялся закон сохранения энергии. Паули и Вейскопф¹⁾ вычислили эффективное сечение такого процесса, но мы не будем рассматривать этого подробнее. Во всяком случае мы должны каждый раз ожидать, что световая волна достаточно большой частоты при прохождении через материю будет образовывать пары мезонов рассмотренного нами типа, если эти мезоны вообще существуют.

¹⁾ См. сноску на стр. 63.

Как подчёркивалось выше, при этих вычислениях мы пренебрегли обратным действием мезонов на электромагнитное поле. Для кулонова поля тяжёлых ядер это, конечно, допустимо. При образовании пар обратное действие состоит в том, что падающий квант исчезает; чтобы описать это, нужно рассматривать электромагнитное поле на той же основе, что и мезонное, так, чтобы H' представило взаимодействие между обоими полями (квантовая электродинамика, ср. § 17 и дальше). Укажем здесь только, что пренебрежение обратным действием в задаче образования пар во втором приближении теории возмущений не приносит ошибок, так же как и при описании атомных процессов, индуцированных световым полем (поглощение и вынужденное испускание): достаточно положить световое поле заданной функцией пространства и времени. Напротив, спонтанные процессы, такие, как спонтанная аннигиляция мезонной пары, могут быть полностью представлены только в рамках квантовой электродинамики.

Если электромагнитное поле таково, что не может образовывать действительных пар из-за законов сохранения, то будут, тем не менее, виртуальные пары. Представим себе адиабатически включение электрического поля, исходя из состояния вакуума (все $\bar{N}_k, \bar{N}_k = 0, \Phi_v = 0$), причём так, чтобы не возникали реальные мезоны, тогда виртуальные пары проявятся, между прочим, в том, что возникнет неисчезающая в среднем плотность электрического заряда $\rho = -i\epsilon(\pi\psi - \pi^*\psi^*)$, пространственный интеграл которой, конечно, равен нулю. В этом смысле вакуум ведёт себя как поляризуемая электрически среда (ρ — «плотность свободных зарядов»; говорят о «поляризации вакуума»). В более высоких приближениях теории возмущений поляризуемость вакуума зависит от поля, что приводит к эффектам, противоречащим принципу суперпозиции электродинамики (нелинейности уравнений поля). Энергия вакуумной поляризации представляет нечто вроде собственной энергии электромагнитного поля, основанной на его способности вызывать виртуальные мезонные пары. Как и в других задачах о собственной энергии (ср. указанную в § 7 собственную энергию протонов), вычисление по теории возмущений приводит к расходящимся интегралам по k -про-

странству. Так что разумные результаты, относящиеся к поляризации вакуума и к обусловленным ею эффектам, получатся только тогда, когда теория дополнена специальными предписаниями для устранения бесконечностей¹⁾. Мы не будем рассматривать это подробнее, а сошлёмся на § 21, где обсуждаются аналогичные явления, связанные с условием существования электронов и позитронов (со спином $\frac{1}{2}$).

¹⁾ Ср. Вайскопф (Weiskopf), Kgl. Danske Vid. Selsk. Math.-fys. Medd. XIV, 6, 1936.

ГЛАВА III

ВЕКТОРНОЕ МЕЗОННОЕ ПОЛЕ

§ 12. Комплексное поле в вакууме¹⁾

Простейшее после скалярного поле состоит из четырёх компонентов $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 = i\psi_0$, которые образуют четырёхмерный вектор.

Все компоненты классического поля снова были бы подчинены уравнению Шредингера-Гордона (4.16)

$$(\square - \mu^2) \psi_\nu = 0, \quad (12.1)$$

но его решение должно быть ещё ограничено дополнительным условием инвариантности Лорентца

$$\sum_\nu \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_\nu} = 0, \quad (12.2)$$

так что независимыми могут считаться только три волновые функции. Это ограничение приводит к тому, что число стационарных состояний квантованного поля только утраивается (а не учетверяется) по сравнению со скалярным полем, причём каждому такому состоянию соответствуют, как мы покажем, три возможные ориентации мезонного спина 1. При снятии условия (12.2) каждому такому триплету будет соответствовать ещё синглетное состояние, которое нужно было бы отнести к частице со спином 0; но эта частица обладала бы отрицательной энергией ($-\hbar\omega_k$ вместо $\hbar\omega_k$), поскольку выбрана

¹⁾ Впервые изучено (без квантования) Прока (Proca), *Journal de Physique* **7**, 347, 1936.

положительной энергия¹⁾ для частицы со спином 1, а отрицательные энергии должны быть исключены²⁾. Вводя определение

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_\nu} = -f_{\nu\mu}, \quad (12.3)$$

следует из (12.1, 2):

$$\sum_{\mu} \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = \mu^2 \psi_\nu. \quad (12.4)$$

Случай $\mu=0$ отвечает уравнениям Максвелла электромагнитного поля в вакууме. Но мы увидим, что как раз случай $\mu=0$ должен быть рассмотрен особо; его мы поэтому отложим до главы IV, а здесь обсудим только «мезонное поле» с $\mu \neq 0$.

Так как, с точки зрения теории ядерных сил, заряженные мезоны представляют больший интерес, чем нейтральные, то мы введём комплексные поля, так что ψ_ν будут комплексными функциями времени и пространства и соответственно неэрмитовскими операторами. Уравнения (12.1 до 4) должны быть справедливы и для ψ_ν^* . Но, так как применяется мнимая временная координата $x_4 = ict$, комплексно и соответственно эрмитовски сопряжённая с ψ_4 , функция будет обозначена — ψ_4^* :

$$\psi_4 = +i\psi_0, \quad \psi_4^* = +i\psi_0^*;$$

тогда в (12.1 до 4) можно всюду заменить ψ на ψ^* и f на f^* .

1) При функции Лагранжа

$$L = -\frac{c^2}{2} \left\{ \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_\mu} \right)^2 + \mu \sum_{\nu} \psi_\nu^2 \right\},$$

которая даёт (12.1) без (12.2), получается гамильтонова функция

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \{ \pi_\nu^2 + c^2 (\text{grad } \psi_\nu)^2 + c^2 \mu^2 \psi_\nu^2 \};$$

член суммы $\nu=4$ отрицателен, так как $\psi_4 = i\psi_0$ (ψ_0 действительно).

2) Например, заряженные частицы с отрицательной энергией, излучая свет, переходили бы в состояния с большим импульсом. Почему у дираковского электрона отрицательные энергии допустимы, а здесь — нет, будет обсуждено ниже (§ 20 до 22).

Для канонической формулировки задачи мы применим функцию Лагранжа

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{\partial \phi_\nu^*}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi_\mu^*}{\partial x_\nu} \right) \left(\frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\nu} \right) - \mu^2 \sum_\nu \phi_\nu^* \phi_\nu. \quad (12.5)$$

Отсюда получаются уравнения поля (3.3) (которые здесь, конечно, применимы ко всем комплексным компонентам поля):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi_\nu^*} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi_\nu^*}{\partial x_\mu}} &= \\ &= -\mu^2 \phi_\nu + \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\nu} \right) = 0; \end{aligned} \quad (12.6)$$

если продифференцировать это по x_ν и просуммировать по ν ,

$$\mu^2 \sum_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\nu} = \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2 f_{\mu\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\nu};$$

и так как двойная сумма справа исчезает вследствие $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$, то благодаря тому, что $\mu \neq 0$, получается дополнительное условие (12.2), и при этом уравнения (12.6) переходят в (12.1). То же будет при замене ϕ_ν на ϕ_ν^* . Этим показано, что функция Лагранжа даёт желаемое уравнение поля, причём видно, что результат существенным образом покoится на предположении $\mu \neq 0$.

Чтобы получить плотность электрического заряда и тока, надо сложить в (3.13) члены, происходящие от четырёх компонент поля:

$$\begin{aligned} s_\nu &= -\epsilon \sum_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\nu}} \phi_\mu - \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi_\mu^*}{\partial x_\nu}} \phi_\mu^* \right) = \\ &= i\epsilon \sum_\mu (f_{\nu\mu}^* \phi_\mu - f_{\nu\mu} \phi_\mu^*). \end{aligned} \quad (12.7)$$

В самом деле, на основе (12.3, 4) легко проверить законность уравнения непрерывности $\sum_\nu \partial s_\nu / \partial x_\nu = 0$. Тензор энергии-импульса мы рассмотрим позже.

Канонически сопряжённое с ψ_ν , ψ_ν^* поле будет

$$\left. \begin{aligned} \pi_\nu &= \frac{1}{ic} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\nu} = \frac{1}{ic} \left(\frac{\partial \psi_4^*}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \psi_\nu^*}{\partial x_4} \right) = \frac{1}{ic} f_{\nu 4}^*, \\ \pi_\nu^* &= \frac{1}{ic} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\nu^*} = \frac{1}{ic} \left(\frac{\partial \psi_4}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_4} \right) = \frac{1}{ic} f_{\nu 4}. \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

Здесь имеет место тот особый случай, когда π_4 и π_4^* исчезают тождественно¹⁾:

$$\pi_4 = 0, \quad \pi_4^* = 0. \quad (12.9)$$

Несмотря на это, мы образуем функцию Гамильтона обычным образом:

$$H = \sum_\nu (\pi_\nu \dot{\psi}_\nu + \pi_\nu^* \dot{\psi}_\nu^*) - L,$$

где, по (12.8), положено ($j = 1, 2, 3$):

$$\dot{\psi}_j = ic \frac{\partial \psi_j}{\partial x_4} = c^2 \pi_j^* + ic \frac{\partial \psi_4}{\partial x_j}, \quad \dot{\psi}_j^* = c^2 \pi_j + ic \frac{\partial \psi_4^*}{\partial x_j}. \quad (12.10)$$

Если прибавить к H ещё пространственную дивергенцию

$$-ic \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\pi_j \psi_4 + \pi_j^* \psi_4^*),$$

что никак не изменит интегральную гамильтонову функцию

$H = \int dx H$, то получится:

$$\begin{aligned} H &= c^2 \sum_j \pi_j^* \pi_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial \psi_i^*}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_j^*}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right) + \\ &+ \mu^2 \sum_\nu \psi_\nu^* \psi_\nu - ic \left\{ \psi_4 \sum_j \frac{\partial \pi_j}{\partial x_j} + \psi_4^* \sum_j \frac{\partial \pi_j^*}{\partial x_j} \right\}. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Индексы i, j меняются только от 1 до 3²⁾.

¹⁾ L не зависит от ψ_4 и ψ_4^* . На этот случай мы указывали ещё в § 1.

²⁾ Так как в H не входит тождественно равная нулю функция π_4 , H не даёт правильного канонического уравнения для ψ_4 ; его можно получить, формально прибавляя к H известные зависящие от π_4 члены. Но мы не будем входить в это подробнее, потому что последующее исключение ψ_4 , ψ_4^* ведёт к той же цели.

При установлении перестановочных соотношений надо позаботиться о том, чтобы, по (12.9), тождественно равнялись нулю перестановки $[\pi_4, \psi_4]$ и $[\pi_4^*, \psi_4^*]$. Поэтому функции с индексом 4 не могут служить настоящими каноническими переменными. Но есть возможность совсем исключить эти компоненты благодаря тому обстоятельству, что независимы только три из четырёх функций ψ_ν . Если в (12.11), в согласии с (12.6 и 8), подставить

$$\psi_4 = \frac{1}{\mu^2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \psi_4}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_j}{\partial x_4} \right) = \frac{ic}{\mu^2} \sum_j \frac{\partial \pi_j^*}{\partial x_j}, \quad \psi_4^* = \frac{ic}{\mu^2} \sum_j \frac{\partial \pi_j}{\partial x_j}, \quad (12.12)$$

то будет:

$$H = c^2 \sum_j \pi_j^* \pi_j + \frac{c^2}{\mu^2} \sum_i \frac{\partial \pi_i^*}{\partial x_i} \sum_j \frac{\partial \pi_j}{\partial x_j} + \\ + \mu^2 \sum_j \psi_j^* \psi_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial \psi_i^*}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_j^*}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right). \quad (12.13)$$

Сюда входят только составляющие пространственных векторов $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ и $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ и комплексно сопряжённых с ними ψ^* и π^* . В векторных обозначениях уравнения (12.12, 13) гласят:

$$\psi_4 = \frac{ic}{\mu^2} \operatorname{div} \pi^*, \quad \psi_4^* = \frac{ic}{\mu^2} \operatorname{div} \pi; \quad (12.14)$$

$$H = c^2 (\pi^* \cdot \pi) + \frac{c^2}{\mu^2} \operatorname{div} \pi^* \cdot \operatorname{div} \pi + \\ + \mu^2 (\psi^* \cdot \psi) + (\operatorname{rot} \psi^* \cdot \operatorname{rot} \psi). \quad (12.15)$$

Надо заметить, что H теперь зависит и от пространственных производных π_j, π_j^* [ср. (1.10)]. Будучи суммой явно положительных членов вида $\varphi^* \varphi$, H положительно определена.

Для квантования мы потребуем по канонической схеме:

$$[\pi_j(x), \psi_j(x')] = [\pi_j^*(x), \psi_j^*(x')] = \frac{\hbar}{i} \delta(x - x') \\ (j = 1, 2, 3), \quad (12.16)$$

тогда как пары функций с различными индексами 1, 2, 3 должны коммутировать. Тогда канонические уравнения поля будут.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_j(x) &= \frac{1}{h} \int dx' [H(x'), \psi_j(x)] = \\ &= \int dx' \left\{ c^2 \pi_j^*(x') \cdot \delta(x' - x) + \frac{c^2}{\mu^2} \operatorname{div}' \pi^*(x') \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(x' - x) \right\}, \end{aligned}$$

и после интегрирования по частям

$$\dot{\psi} = c^2 \pi^* - \frac{c^2}{\mu^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \pi^*; \quad (12.17)$$

соответственно

$$\dot{\pi}^* = -\mu^2 \psi - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi. \quad (12.18)$$

Исключение π^* или ψ из (12.17, 18) даёт:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \ddot{\psi} &= -\mu^2 \psi - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \psi = \\ &= -\mu^2 \psi + \Delta \psi, \\ \frac{1}{c^2} \ddot{\pi}^* &= -\mu^2 \pi^* - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \pi^* + \operatorname{grad} \operatorname{div} \pi^* = \\ &= -\mu^2 \pi^* + \Delta \pi^*. \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

Для функции ψ_4 , определённой (12.14), получится то же

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\psi}_4 = -\mu^2 \psi_4 + \Delta \psi_4 \quad (12.20)$$

и, по (12.18),

$$\frac{1}{ic} \dot{\psi}_4 = \frac{1}{\mu^2} \operatorname{div} \dot{\pi}^* = -\operatorname{div} \psi. \quad (12.21)$$

Так как уравнения (12.19, 20, 21) формально совпадают с (12.1, 2), то этим показано, что гамильтонова функция (12.15) вместе с правилами перестановки (12.16) правильно передаёт свойства ψ -поля. Она даёт также правильное соотношение между полями $\dot{\psi}_\nu$ и π_j , так как из (12.17) вместе с (12.14) следует

$$\pi^* = \frac{1}{c^2} \dot{\psi} + \frac{1}{ic} \operatorname{grad} \psi_4,$$

что согласно с (12.8). Конечно, справедливы все уравнения, которые получаются от перестановки величин со звёздочками

и без них. Надо заметить, что выбранный здесь метод исключения ψ_4 и ψ_4^* существенным образом основан на допущении $\mu \neq 0$. Чтобы проверить релятивистскую инвариантность квантования, введём опять операторы, зависящие от времени:

$$\begin{aligned}\psi_\nu(x, t) &= e^{\frac{it}{\hbar} H} \psi_\nu(x) e^{-\frac{it}{\hbar} H}, \\ \psi_\nu^*(x, t) &= e^{\frac{it}{\hbar} H} \psi_\nu^*(x) e^{-\frac{it}{\hbar} H},\end{aligned}$$

где $H = \int dx H$ даётся (12.15). Если рассматривать сначала компоненты поля $\nu \neq 4$, то вследствие (12.19) и (4.17) применимы формулы (4.28, 21). Так как, по (12.17), $\dot{\psi}$ связано только с π^* и $\dot{\psi}^*$ только с π , эти формулы приводят к

$$[\psi_\nu(x, t), \psi_{\nu'}(x', t')] = [\psi_\nu^*(x, t), \psi_{\nu'}^*(x', t')] = 0 \quad (12.22)$$

(соответствующие $d_{\alpha\alpha'}^{(1)}$ равны нулю); далее

$$[\psi_\nu(x, t), \psi_{\nu'}^*(x', t')] = \frac{\hbar}{i} d_{\nu\nu'} D(x - x', t - t'), \quad (12.23)$$

где $d_{\nu\nu'}$ определены уравнениями

$$\overset{(1)}{\psi}_\nu(x) = \dot{\psi}_\nu(x) = \sum_{\nu'} d_{\nu\nu'} \pi_{\nu'}^*(x) + \dots$$

Из сравнения с (12.17) находим

$$d_{\nu\nu'} = c^2 \left\{ \delta_{\nu\nu'} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_{\nu'}} \right\}. \quad (12.24)$$

Эти формулы выведены пока что только для компонент $\nu, \nu' = 1, 2, 3$; во всяком случае, рассуждения § 4 не имеют силы для компонент ψ_4, ψ_4^* , так как эти последние по (12.14, 16) не перестановочны с ψ_j^* и ψ_j , в противоречии с предположенными в § 4 правилами перестановок. Несмотря на это, правила перестановки (12.22, 23, 24), если они релятивистски инвариантны, должны выполняться и при $\nu = 4$ равно как и при $\nu' = 4$, ибо только тогда левые и правые стороны (12.22, 23) преобразуются одинаково, именно как произведения двух четырёхмерных векторов либо тензор второго ранга. Чтобы доказать инвариантность квантованной

теории, надо ещё доказать совместимость формул (12.22, 23, 24) и при ν или $\nu' = 4$ с уравнениями (12.14 до 21). Мы ограничимся обсуждением (12.23) [в связи с (12.24), так как переход к (12.22) тривиален].

Если мы, подобно тому как в § 4 [ср. (4.13)], n раз продифференцируем (12.23) по t и n' раз по t' , а потом положим $t = t' = 0$, то из (4.7) последует:

$$\begin{aligned} [\dot{\psi}_{\nu}^{(n)}(x), \dot{\psi}_{\nu'}^{*(n')}(x')] &= \\ &= \frac{\hbar}{i} (-1)^{n'} \left\{ \frac{\partial^{n+n'}}{\partial t^{n+n'}} d_{\nu\nu'} D(x-x', t) \right\}_{t=0}. \end{aligned} \quad (12.25)$$

Совокупность этих уравнений эквивалентна (12.23). Их правые части мы вычислим с помощью формул (4.30, 31 и 33):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 D(x, t)}{\partial t^2} &= c^2 (\Delta - \mu^2) D(x, t), \\ D(x, 0) &= 0, \quad \left(\frac{\partial D(x, t)}{\partial t} \right)_{t=0} = \delta(x). \end{aligned} \right\} \quad (12.26)$$

В частности, мы заметим, что, по (12.24),

$$d_{44} = c^2 + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \text{ а также } d_{44} D(x, t) = \frac{c^2}{\mu^2} \Delta D(x, t).$$

При $n = n' = 0$ (12.25) даёт ($j, j' = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} [\dot{\psi}_j(x), \dot{\psi}_{j'}^*(x')] &= [\dot{\psi}_4(x), \dot{\psi}_4^*(x')] = 0, \\ |\dot{\psi}_4(x), \dot{\psi}_j^*(x')] &= [\dot{\psi}_j(x), \dot{\psi}_4^*(x')] = \frac{\hbar c}{\mu^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(x-x') \end{aligned}$$

в согласии с (12.14, 16). Далее, при $n = 1, n' = 0$:

$$\begin{aligned} [\dot{\dot{\psi}}_j(x), \dot{\psi}_{j'}^*(x')] &= \frac{\hbar}{i} c^2 \left\{ \delta_{jj'} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_{j'}} \right\} \delta(x-x'), \\ [\dot{\dot{\psi}}_4(x), \dot{\psi}_4^*(x')] &= \frac{\hbar}{i} \frac{c^2}{\mu^2} \Delta \delta(x-x'), \\ [\dot{\dot{\psi}}_4(x), \dot{\psi}_j^*(x')] &= [\dot{\dot{\psi}}_j(x), \dot{\psi}_4^*(x')] = 0; \end{aligned}$$

если выразить здесь $\dot{\psi}_j$ и $\dot{\psi}_4$ по (12.17 и 21) через π_j^* и ψ_j , то снова получится совместимость с (12.14, 16). Для $n = n' = 1$ не нужно заново вычислять правые части (12.25), так как они, по (12.26), получатся из значений, найденных

для $n = n' = 0$ путём применения оператора $-c^2(\Delta - \mu^2)$; и здесь имеется согласие с (12.14 до 21). Большие значения n не дают новых уравнений благодаря (12.19, 20) и (12.26). Этим доказана справедливость инвариантных перестановочных соотношений (12.23, 24).

Чтобы представить гамильтонову функцию в пространстве импульсов, мы можем применить ряды Фурье (5.5), отождествляя в них ψ, ψ^*, π, π^* с векторными полями, входящими в (12.15); q_k, q_k^*, p_k, p_k^* означают, разумеется, трёхмерные векторы, для компонент которых, по (12.16), имеет место

$$[p_k, j, q_{k'}, j'] = [p_k^*, j, q_{k'}^*, j'] = \frac{\hbar}{i} \delta_{kk'} \delta_{jj'}. \quad (12.27)$$

Тогда из (12.15) следует¹⁾:

$$H = \int_V dx H = \sum_k \left\{ c^2 (p_k^* \cdot p_k) + \frac{c^2}{\mu^2} (k \cdot p_k^*) (k \cdot p_k) + \right. \\ \left. + \mu^2 (q_k^* \cdot q_k) + [(k \cdot q_k^*) \cdot (k \cdot q_k)] \right\}. \quad (12.28)$$

Разложим теперь векторы амплитуд (например q_k) на продольные и поперечные компоненты: пусть $e_k^{(1)}, e_k^{(2)}, e_k^{(3)}$ — тройка ортогональных единичных векторов

$$(e_k^{(r)} \cdot e_k^{(s)}) = \delta_{rs}, \quad (12.29)$$

ориентированных так, что $e_k^{(1)}$ параллелен импульсу k :

$$\left. \begin{aligned} (e_k^{(1)} \cdot k) &= |k|, & (e_k^{(2)} \cdot k) &= (e_k^{(3)} \cdot k) = 0, \\ [e_k^{(1)} \cdot k] &= 0, & [e_k^{(2)} \cdot k] &= -|k| \cdot e_k^{(3)}, & [e_k^{(3)} \cdot k] &= |k| \cdot e_k^{(2)}. \end{aligned} \right\} (12.30)$$

Компоненты амплитудных векторов в направлениях $e_k^{(r)}$ мы обозначим верхними индексами r ($= 1, 2, 3$):

$$\left. \begin{aligned} q_k &= \sum_r e_k^{(r)} q_k^{(r)}, & q_k^* &= \sum_r e_k^{(r)} q_k^{(r)*}, \\ p_k &= \sum_r e_k^{(r)} p_k^{(r)}, & p_k^* &= \sum_r e_k^{(r)} p_k^{(r)*}; \end{aligned} \right\} (12.31)$$

¹⁾ $(a \cdot b)$ означает скалярное произведение векторов, а $[a \cdot b]$ — векторное произведение.

перестановочные соотношения вследствие (12.27, 29) будут:

$$[p_k^{(r)}, q_k^{(r)}] = [p_k^{(r)*}, q_k^{(s)*}] = \frac{\hbar}{i} \delta_{rs}, \quad (12.32)$$

тогда как другие компоненты перестановочны. Вставляя (12.31) в (12.28), мы разложим H на части, зависящие от продольных и поперечных компонент в отдельности:

$$\left. \begin{aligned} H &= H^{\text{long}} + H^{\text{tr}}, \\ H^{\text{long}} &= \sum_k \left\{ \frac{\omega_k^2}{\mu^2} p_k^{(1)*} p_k^{(1)} + \mu^2 q_k^{(1)*} q_k^{(1)} \right\}, \\ H^{\text{tr}} &= \sum_k \sum_{r=2,3} \left\{ c^2 p_k^{(r)*} p_k^{(r)} + \frac{\omega_k^2}{c^2} q_k^{(r)*} q_k^{(r)} \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (12.33)$$

здесь ω_k снова определено через (6.15).

Отдельные члены суммы (12.33) с данными k, r можно, как и в § 8, представить с помощью диагональной матрицы. Аналогично (8.12), мы положим:

$$\left. \begin{aligned} q_k^{(1)} &= \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2}} (a_k^{(1)} + b_k^{(1)*}), \\ q_k^{(1)*} &= \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2}} (a_k^{(1)*} + b_k^{(1)}), \\ p_k^{(1)} &= \mu \sqrt{\frac{\hbar}{2 \omega_k}} i (a_k^{(1)*} - b_k^{(1)}), \\ p_k^{(1)*} &= \mu \sqrt{\frac{\hbar}{2 \omega_k}} i (-a_k^{(1)} + b_k^{(1)*}); \end{aligned} \right\} \quad (12.34)$$

$$\left. \begin{aligned} q_k^{(r)} &= c \sqrt{\frac{\hbar}{2 \omega_k}} (a_k^{(r)} + b_k^{(r)*}), \\ q_k^{(r)*} &= c \sqrt{\frac{\hbar}{2 \omega_k}} (a_k^{(r)*} + b_k^{(r)}), \\ p_k^{(r)} &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2}} i (a_k^{(r)*} - b_k^{(r)}), \\ p_k^{(r)*} &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2}} i (-a_k^{(r)} + b_k^{(r)*}) \end{aligned} \right\} \quad (12.35)$$

для $r=2, 3$.

При этом a и b — матрицы типа (6.16) или (8.13) относительно целых чисел $\bar{N}_k^{(r)}$ и $\bar{N}_k^{(r)}$ с перестановками

$$[a_k^{(r)}, a_k^{(r)*}] = [b_k^{(r)}, b_k^{(r)*}] = 1, \quad (12.36)$$

в то время как все другие перестановки равны нулю, и притом, согласно (8.14), имеет место

$$(a_k^{(r)*} a_k^{(r)})_N = \bar{N}_k^{(r)}, \quad (b_k^{(r)*} b_k^{(r)})_N = \bar{N}_k^{(r)}. \quad (12.37)$$

Совместно с (12.34, 35) перестановочные соотношения (12.32) удовлетворены, и по (12.33) для H получается диагональная матрица

$$H = \sum_k \sum_{r=1}^3 h\omega_k \cdot \frac{1}{2} \{ a_k^{(r)*} a_k^{(r)} + a_k^{(r)} a_k^{(r)*} + b_k^{(r)*} b_k^{(r)} + b_k^{(r)} b_k^{(r)*} \}. \quad (12.38)$$

Аналогично (8.17) получаются собственные значения H :

$$H_N = \sum_k h\omega_k \sum_{r=1}^3 (\bar{N}_k^{(r)} + \bar{N}_k^{(r)}) + 6H_0. \quad (12.39)$$

Для импульса поля из (2.10) и (3.7) получится¹⁾:

$$G_j = \int dx G_j = - \int dx \sum_v \left(\pi_v \frac{\partial \phi_v}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_v^*}{\partial x_j} \pi_v^* \right), \quad (12.40)$$

или, используя (5.5) и (12.9):

$$G = -i \sum_k k \{ (p_k \cdot q_k) - (q_k^* \cdot p_k^*) \}. \quad (12.41)$$

Матричное представление (12.31, 34, 35) даёт, как и в (8.10, 16), диагональную матрицу

$$G = \sum_k \sum_{r=1}^3 hk \{ a_k^{(r)*} a_k^{(r)} - b_k^{(r)} b_k^{(r)*} \}, \quad (12.42)$$

¹⁾ Обобщение этой формулы на случай поля со многими компонентами тривиально. Относительно плотности импульса см. ниже.

с собственными значениями

$$G_N = \sum_k \hbar k \sum_{r=1}^3 (\bar{N}_k^{+(r)} - \bar{N}_k^{-(r)}). \quad (12.43)$$

Соответственно получается из (3.11) или из (12.7, 8) общий заряд поля:

$$\begin{aligned} e &= \int dx \rho = -i\epsilon \int dx \{(\pi \cdot \psi) - (\pi^* \cdot \psi^*)\} = \\ &= -i\epsilon \sum_k \{(p_k \cdot q_k) - (p_k^* \cdot q_k^*)\} = \frac{\hbar\epsilon}{2} \sum_k \sum_{r=1}^3 \{a_k^{(r)*} a_k^{(r)} + \\ &\quad + a_k^{(r)} a_k^{(r)*} - b_k^{(r)*} b_k^{(r)} - b_k^{(r)} b_k^{(r)*}\}; \quad (12.44) \end{aligned}$$

$$e_N = \hbar\epsilon \sum_k \sum_{r=1}^3 (\bar{N}_k^{+(r)} - \bar{N}_k^{-(r)}). \quad (12.45)$$

Из собственных значений (12.39, 43, 45) видно, что стационарное состояние, характеризуемое квантовыми числами $\bar{N}_k^{+(r)}$, $\bar{N}_k^{-(r)}$, содержит $(\bar{N}_k^{+(1)} + \bar{N}_k^{+(2)} + \bar{N}_k^{+(3)})$ положительных мезонов с импульсом $+\hbar k$ и $(\bar{N}_k^{-(1)} + \bar{N}_k^{-(2)} + \bar{N}_k^{-(3)})$ отрицательных мезонов с импульсом $-\hbar k$. Трёхкратное вырождение, состоящее в том, что число мезонов с заданным зарядом и импульсом равно сумме трёх независимых целых чисел, заставляет заключить, что «векторный мезон» содержит ещё одну величину, подлежащую определению, которая способна принимать три значения. Что это спиновая координата, проще всего видеть из рассмотрения трёх состояний, в которых находится только один (положительный или отрицательный) мезон в состоянии покоя. Так как при $k=0$ ориентация координатных осей $e_0^{(1)}$, $e_0^{(2)}$, $e_0^{(3)}$ произвольна, и различие между продольной и поперечной поляризацией отпадает, получаются три равноправных стационарных состояния, переходящие друг в друга при поворотах координатной системы, что характерно для частиц со спином 1. Дальнейшее рассмотрение момента количества движения подтвердит, что векторный мезон обладает спином 1.

Конечно, состояние всей системы, заданное значениями всех квантовых чисел $\bar{N}_k^{+(r)}$, $\bar{N}_k^{-(r)}$, имеет статистический вес 1, соответственно статистике Бозе-Эйнштейна.

Обратимся теперь к вопросу о виде тензора энергии-импульса, рассмотрение которого мы отложили. Канонический тензор, образованный по правилу (2.8), мы назовём его T^0 , выглядит, согласно (12.5 и 3), так:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^0 &= - \sum_{\rho} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi_{\rho}}{\partial x_{\mu}}} \frac{\partial \phi_{\rho}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial \phi_{\rho}^*}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi_{\rho}^*}{\partial x_{\mu}}} \right) + L \delta_{\mu\nu} = \\ &= \sum_{\rho} \left(f_{\mu\rho}^* \frac{\partial \phi_{\rho}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial \phi_{\rho}^*}{\partial x_{\nu}} f_{\mu\rho} \right) + L \delta_{\mu\nu}; \end{aligned} \quad (12.46)$$

он подчиняется закону сохранения (2.7)

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T_{\mu\nu}^0}{\partial x_{\mu}} = 0. \quad (12.47)$$

Так как он несимметричен, мы дополним его до симметричного тензора прибавлением другого тензора:

$$T'_{\mu\nu} = - \sum_{\rho} \frac{\partial}{\partial x_{\rho}} (f_{\mu\rho}^* \phi_{\nu} + \phi_{\nu}^* f_{\mu\rho}), \quad (12.48)$$

дивергенция которого тождественно равна нулю:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0 \quad (12.49)$$

(так как она имеет вид $\sum_{\mu\rho} a_{\mu\rho}$, а $a_{\mu\rho} = -a_{\rho\mu}$). Для суммы тензоров (12.46 и 48) получится с учётом (12.3, 4).

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu}^0 + T'_{\mu\nu} = \\ &= \sum_{\rho} (f_{\mu\rho}^* f_{\nu\rho} + f_{\nu\rho}^* f_{\mu\rho}) + \mu^2 (\phi_{\mu}^* \phi_{\nu} + \phi_{\nu}^* \phi_{\mu}) + L \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (12.50)$$

Теперь удовлетворено условие симметрии

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad (12.51)$$

и одновременно по (12.47, 49):

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0. \quad (12.52)$$

Порядок сомножителей в (12.50) выбран так, что операторы, принадлежащие действительным величинам в квантованной теории, эрмитовские. По (2.6) мы можем интерпретировать $-T_{44}$ как плотность энергии, а T_{4j}/ic как компоненты плотности импульса. На основе (12.5, 8 и 14) легко убедиться, что T_{44} совпадает с гамильтоновой функцией (12.15) и поэтому положительно определено. Что касается плотности импульса T_{4j} , то хотя она и не совпадает с употреблённой в (12.40) канонической плотностью импульса T_{4j}^0 , но всё же разность $T_{4j} - T_{4j}^0 = T'_{4j}$, по (12.48), является пространственной дивергенцией ($\sum_{j'} \partial \varphi_{jj'} / \partial x_{j'}$, $j' \neq 4$), ничего не прибавляющей к интегралу по объёму:

$$\int dx T_{4j} = \int dx T_{4j}^0; \quad (12.53)$$

поэтому мы могли вычислять общий импульс G (12.40 до 43) из канонического тензора без ошибки. Наоборот, при вычислении момента количества движения

$$M = \int dx [x \cdot G] \quad (12.54)$$

надо обязательно применять полное выражение плотности импульса.

$$G = G^0 + G', \quad G_j^0 = \frac{1}{ic} T_{4j}^0, \quad G'_j = \frac{1}{ic} T'_{4j}. \quad (12.55)$$

Разложим момент количества движения соответствующим образом.

$$M = M^0 + M', \quad M^0 = \int dx [x \cdot G^0], \quad M' = \int dx [x \cdot G']. \quad (12.56)$$

Для составляющих обеих частей момента из (12.46 48 и 8) получим:

$$M_{jj'}^0 = - \int dx \sum_i \left\{ x_j \left(\pi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j'}} + \frac{\partial \psi_i^*}{\partial x_{j'}} \pi_i^* \right) - \right. \\ \left. - x_{j'} \left(\pi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_i^*}{\partial x_j} \pi_i^* \right) \right\}, \quad (12.57)$$

$$M'_{j'l} = \int dx \sum_i \left\{ x_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\pi_i \psi_{j'l} + \psi_{j'l}^* \pi_i^*) - x_{j'} \frac{\partial}{\partial x_i} (\pi_i \psi_j + \psi_j^* \pi_i^*) \right\} = - \int dx \{ (\pi_{j'} \psi_{j'l} + \psi_{j'l}^* \pi_{j'}) - (\pi_{j'} \psi_j + \psi_j^* \pi_{j'}) \} \quad (12.58)$$

(последнее выражение для M' получено путём интегрирования по частям). Вводя ряды Фурье (5.5), получим в векторных обозначениях.

$$M^0 = - \frac{i}{V} \int_V dx \sum_{kk'} e^{i(k-k')x} \{ [x \cdot k] (p_{k'} \cdot q_k) - [x \cdot k'] (q_{k'}^* \cdot p_k^*) \}, \quad (12.59)$$

$$M' = - \sum_k \{ [p_k \cdot q_k] - [q_k^* \cdot p_k^*] \}. \quad (12.60)$$

Разложение M на M^0 и M' имеет физический смысл, ибо, как мы утверждаем, в предположении, что скорости всех существующих мезонов имеют нерелятивистское значение, M^0 представляет орбитальный момент, а M' — спиновый момент мезона. Именно, в этом случае можно показать, что среднее значение M^0 не зависит от состояния поляризации мезонов, т. е. M^0 не изменяется, если мезон, при неизменном импульсе, переводится в любое другое состояние поляризации; поэтому M^0 не может иметь ничего общего со спином мезона. Доказательство, требующее некоторых вычислений, мы здесь опускаем, вместо этого покажем, что спиновый момент, который представляет главный интерес, выражается членом M' .

Так как, по (12.60), M' имеет вид $\sum_k M'_{(k)}$, достаточно рассмотреть отдельный член суммы. Будем искать член $M'_{(0)}$ ($k=0$), т. е. будем вычислять спин каждого мезона в системе, в которой он покоится. Уже было отмечено, что ориентация определённых по (12.29, 30) координатных осей $e_k^{(1)}$, $e_k^{(2)}$, $e_k^{(3)}$ в покоящейся системе совершенно произвольна; так как различие между продольными и поперечными компонентами отпадает, все три оси равноправны, что проявляется в том, что формулы преобразования (12.34, 35) для $r=1, 2, 3$ совершенно идентичны (при $k=0$ $\omega_0 = c\mu$

превращается в $V\overline{\omega_0/\mu} = c/V\overline{\omega_0}$. Не употребляя больше индекса $k = 0$, запишем для компоненты M'_0 вдоль произвольной оси $e^{(1)}$.

$$M'_1 = -p^{(2)}q^{(3)} + p^{(3)}q^{(2)} + q^{(2)*}p^{(3)*} - q^{(3)*}p^{(2)*},$$

или по (12.35)

$$M'_1 = hi \{ -a^{(2)*}a^3 + a^{(3)*}a^{(2)} - b^{(2)*}b^{(2)} + b^{(3)*}b^{(2)} \}.$$

Здесь разделены слагаемые от положительных и отрицательных мезонов (члены a и b) и, учитывая их симметрию, достаточно рассмотреть только положительные мезоны. Мы положим поэтому все $\bar{N}^{(r)} = 0$, так что b -члены дадут 0

$$M'_1 = hi \{ -a^{(2)*}a^{(3)} + a^{(3)*}a^{(2)} \}. \quad (12.61)$$

Вместо операторов $a^{(2)}$, $a^{(2)*}$, $a^{(3)}$, $a^{(3)*}$ мы введём четыре новых оператора a_+ , a_+^* , a_- , a_-^* путём преобразования¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} a_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^{(2)} - ia^{(3)}), & a_+^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^{(2)*} + ia^{(3)*}), \\ a_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^{(2)} + ia^{(3)}), & a_-^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^{(2)*} - ia^{(3)*}). \end{aligned} \right\} \quad (12.62)$$

По (12.36) тогда будет

$$[a_+, a_+^*] = [a_-, a_-^*] = 1,$$

тогда как остальные пары, образованные из четырёх новых операторов, коммутируют. Так как преобразование (12.62) оставляет перестановочные соотношения инвариантными, новые операторы можно снова представить матрицами типа (6.16):

$$\begin{aligned} (a_+)_N'_+ N'_-, N''_+ N''_- &= (a_+^*)_N''_+ N''_-, N'_+ N'_- = \\ &= \sqrt{N''_+} \cdot \delta_{N'_+, N''_+ - 1} \cdot \delta_{N'_-, N''_-}, \end{aligned}$$

и соответственно для a_- , a_-^* , отчего $a_+^* a_+$ и $a_-^* a_-$ становятся диагональными матрицами с неотрицательными собст-

¹⁾ В некантованной теории a_+ , a_- — амплитуды колебаний поляризованных по кругу.

венными значениями N_+ и, соответственно, N_- :

$$(a_+^* a_+)_{N_+ N_-} = N_+, \quad (a_-^* a_-)_{N_+ N_-} = N_-.$$

При этом, по (12.62), имеет место:

$$a_+^* a_+ + a_-^* a_- = a^{(2)*} a^{(2)} + a^{(3)*} a^{(3)},$$

или

$$N_+ + N_- = N^{+(2)} + N^{+(3)}.$$

С другой стороны, из (12.62) получается:

$$a_+^* a_+ - a_-^* a_- = i(-a^{(2)*} a^{(3)} + a^{(3)*} a^{(2)}) = \frac{M_1}{h},$$

так что M_1' в схеме квантовых чисел N_+ , N_- диагонально и имеет собственные значения:

$$(M_1')_{N_+ N_-} = h(N_+ - N_-). \quad (12.63)$$

Этот результат надо интерпретировать так: составляющая мезонного спина по любому направлению в неподвижном пространстве ($e^{(1)}$) может принимать значения $\pm h$ и 0; для рассмотренных положительных покоящихся мезонов, число которых

$$N^{+(1)} + N^{+(2)} + N^{+(3)} = N^{+(1)} + N_+ + N_-,$$

числа

$$N^{+(1)}, N_+, N_-$$

соответственно связаны со спиновыми компонентами 0, $+h$ и $-h$. Три компоненты отвечают трём возможным ориентациям спина величины h или соответственно 1, если спин, как обычно, измеряется в единицах h .

Для квадрата момента $M'_{(0)}$, т. е. слагаемого в (12.60) с $k=0$, на основании (12.61), будет:

$$\begin{aligned} M'^2 &= \sum_j M_j'^2 = -\frac{h^2}{2} \sum_{r \neq s} (a^{(r)*} a^{(s)} - a^{(s)*} a^{(r)})^2 = \\ &= h^2 \sum_{r \neq s} \{ -(a^{(r)*} a^{(s)})^2 + a^{(r)*} a^{(r)} \cdot a^{(s)} a^{(s)*} \}. \end{aligned}$$

Ограничимся далее такими состояниями, в которых есть только один положительный покоящийся мезон ($\sum_r^{+(r)} N = 1$), тогда операторы $(a^{(s)})^2$, уменьшающие число мезонов N на 2, в применении к шредингеровской функции (амплитуде вероятности) этих состояний, обращаются в нуль. Остальные члены M'^2 диагональны в квантовых числах N и дают:

$$M'^2 = h^2 \sum_{r \neq s}^{+(r)} N^{+(s)} (N^{+(r)} + 1).$$

Здесь исчезают ещё члены $N^{+(r)} \cdot N^{+(s)}$, так как один из обоих сомножителей всегда нуль, и таким образом остаётся

$$M'^2 = h^2 \cdot 2 \sum_r^{+(r)} N^{+(r)} = h^2 \cdot 2.$$

Это соответствует известному значению $h^2 \cdot s(s+1)$ квадрата момента количества движения при $s=1$ и снова подтверждает значение спина 1 для рассматриваемых мезонов.

Кроме механического спинового момента, заряженный векторный мезон обладает магнитным спиновым моментом. Чтобы вычислить и его, мы исследуем в дальнейшем действие заданного электромагнитного поля на мезонное.

§ 13. Векторные мезоны в электромагнитном поле¹⁾

Пусть максвелловское поле

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}, \quad (13.1)$$

как и в § 11, — заданное поле, действующее на заряд мезонов. Чтобы построить функцию Лагранжа векторного мезонного поля, заметим, что в случае скалярного поля функция Лагранжа (11.2) происходит от функции (8.2), где $\Phi = 0$, но при замене в (8.2)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \text{ на } \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} - \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_\nu \phi \right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\nu} \text{ на } \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\nu} + \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_\nu \phi^* \right),$$

¹⁾ Впервые рассмотрено (без квантования) Прокка, Journ. de Phys. 7, 347, 1936.

где $e\hbar$ означает элементарный заряд e_1 . Мы применим здесь то же правило в отношении всех компонент поля ϕ_ν и ϕ_ν^* . Для операторов, заменяющих $\partial/\partial x$, введём такое сокращение записи:

$$\partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_\nu, \quad \partial_\nu^* \equiv \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_\nu. \quad (13.2)$$

Тогда из (12.5) получается функция Лагранжа:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} (\partial_\mu^* \phi_\nu^* - \partial_\nu^* \phi_\mu^*) (\partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu) - \mu^2 \sum_\nu \phi_\nu^* \phi_\nu = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} f_{\mu\nu}^* f_{\mu\nu} - \mu^2 \sum_\nu \phi_\nu^* \phi_\nu, \end{aligned} \quad (13.3)$$

если ввести новые определения:

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu, \quad f_{\mu\nu}^* \equiv \partial_\mu^* \phi_\nu^* - \partial_\nu^* \phi_\mu^*. \quad (13.4)$$

Вместо (12.6) из (13.2) теперь, как легко видеть, получается:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_\nu^*} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi_\nu^*}{\partial x_\mu}} = -\mu^2 \phi_\nu + \sum_\mu \partial_\mu f_{\mu\nu} = 0. \quad (13.5)$$

Отсюда следует при $\mu \neq 0$:

$$\sum_\nu \partial_\nu \phi_\nu = \frac{1}{\mu^2} \sum_{\nu\mu} \partial_\nu \partial_\mu f_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} [\partial_\nu, \partial_\mu] f_{\mu\nu}.$$

Это выражение, вообще говоря, не равно нулю, так как по (13.2, 1):

$$[\partial_\nu, \partial_\mu] = \frac{i\varepsilon}{c} \left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right) = \frac{i\varepsilon}{c} F_{\mu\nu}; \quad (13.6)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_\nu \partial_\nu \phi_\nu &= \frac{i\varepsilon}{2c\mu^2} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} f_{\mu\nu}, \\ \sum_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\nu} &= \frac{i\varepsilon}{c} \left\{ \sum_\nu \Phi_\nu \phi_\nu + \frac{1}{2\mu^2} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} f_{\mu\nu} \right\}. \end{aligned}$$

Для четырёхмерного тока и тензора энергии-импульса мы можем просто взять формулы (12.7 и 50), где $f_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}^*$ следует интерпретировать по новым определениям (13.4)¹⁾; вместо (12.52) теперь будет:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = -\frac{1}{c} \sum_{\mu} s_{\mu} F_{\mu\nu} \text{ } ^2).$$

L , s_{ν} и $T_{\mu\nu}$, очевидно, инвариантны относительно преобразования калибровки (11.4).

Как и в скалярной теории (§ 11), плотность энергии T_{44} , выбранная в качестве гамильтоновой функции, не даёт правильных уравнений движения. Мы вернёмся поэтому к канонической гамильтоновой функции

$$H = \sum_{\nu} (\pi_{\nu} \dot{\phi}_{\nu} + \pi_{\nu}^* \dot{\phi}_{\nu}^*) - L,$$

1) Для тока имеет место: $s_{\nu} = c \cdot \partial L / \partial \Phi_{\nu}$.

2) Так как $\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\chi \varphi) = (\partial_{\mu}^* \chi) \varphi + \chi (\partial_{\mu} \varphi)$, из (12.50) и (13.5) следует:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = \sum_{\mu\rho} f_{\mu\rho}^* \left(-\frac{1}{2} \partial_{\nu} f_{\mu\rho} + \partial_{\mu} f_{\nu\rho} \right) + \mu^2 \left(\sum_{\mu} \partial_{\mu}^* \phi_{\mu}^* \right) \phi_{\nu} + \text{Конж.}$$

Вместо этого можно записать:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu\rho} f_{\mu\rho}^* \left(\partial_{\nu} f_{\mu\rho} + \partial_{\rho} f_{\nu\mu} + \partial_{\mu} f_{\rho\nu} + \frac{i\varepsilon}{c} F_{\mu\rho} \phi_{\nu} \right) + \text{Конж.} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu\rho} f_{\mu\rho}^* \left([\partial_{\nu}, \partial_{\mu}] \phi_{\rho} + [\partial_{\rho}, \partial_{\nu}] \phi_{\mu} + [\partial_{\mu}, \partial_{\rho}] \phi_{\nu} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\varepsilon}{c} F_{\mu\rho} \phi_{\nu} \right) + \text{Конж.} \end{aligned}$$

или, пользуясь (13.6):

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = -\frac{i\varepsilon}{c} \sum_{\mu} F_{\mu\nu} \sum_{\rho} f_{\mu\rho}^* \phi_{\rho} + \text{Конж.}$$

Но это и есть утверждаемый закон сохранения [ср. (12.7)]. В квантованной теории нужна ещё симметризация порядка сомножителей в $T_{\mu\nu}$, как и в скалярной теории (ср. примечание на стр. 86).

где

$$\pi_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_v} = \frac{1}{ic} f_{v4}^*, \quad \pi_v^* = \frac{1}{ic} f_{v4}, \quad (13.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_v &= ic \left(\partial_4 + \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_4 \right) \psi_v = c^2 \pi_v^* + ic \partial_v \psi_4 + i\varepsilon \Phi_0 \psi_v, \\ \dot{\psi}_v^* &= ic \left(\partial_4^* - \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_4 \right) \psi_v^* = c^2 \pi_v + ic \partial_v^* \psi_4^* + i\varepsilon \Phi_0 \psi_v^* \end{aligned} \right\} (13.8)$$

($\Phi_4 = i\Phi_0$). Прибавляя к H ещё дивергенцию

$$\begin{aligned} & -ic \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\pi_j \psi_4 + \psi_4^* \pi_j^*) = \\ & = -ic \sum_j \{ \partial_j^* \pi_j \cdot \psi_4 + \pi_j \cdot \partial_j \psi_4 + \partial_j \pi_j^* \cdot \psi_4^* + \pi_j^* \cdot \partial_j^* \psi_4^* \} \end{aligned}$$

и исключая ψ_4, ψ_4^* с помощью волнового уравнения (13.5) (с учётом того, что $\pi_4 = \pi_4^* = 0$):

$$\psi_4 = \frac{1}{\mu^2} \sum_j \partial_j f_{j4} = \frac{ic}{\mu^2} \sum_j \partial_j \pi_j^*, \quad \psi_4^* = \frac{ic}{\mu^2} \sum_j \partial_j^* \pi_j, \quad (13.9)$$

получим для гамильтоновой функции:

$$\begin{aligned} H &= c^2 \sum_j \pi_j^* \pi_j + \frac{c^2}{\mu^2} \sum_i \partial_i \pi_i^* \cdot \sum_j \partial_j^* \pi_j + \\ & + \mu^2 \sum_j \psi_j^* \psi_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} f_{ij} f_{ij} - \Phi_0 \cdot i\varepsilon \sum_j (\pi_j \psi_j - \pi_j^* \psi_j^*). \end{aligned} \quad (13.10)$$

Последний член ($\Phi_0 \cdot \rho$) отличает H от плотности энергии $-T_{44}$, что легко проверить. С помощью перестановочных соотношений (12.16) из (13.10) получаются уравнения поля¹⁾:

$$\dot{\psi}_j = \frac{i}{\hbar} [H, \psi_j] = c^2 \pi_j^* - \frac{c^2}{\mu^2} \partial_j \sum_i \partial_i \pi_i^* - i\varepsilon \Phi_0 \psi_j,$$

что совпадает с (13.8, 9); далее

$$\ddot{\pi}_j^* = \frac{i}{\hbar} [H, \pi_j^*] = -\mu^2 \psi_j + \sum_i \partial_i f_{ij} - i\varepsilon \Phi_0 \pi_j^*$$

1) Надо учесть, что при интегрировании по частям ∂_j^* переходят в $-\partial_j$.

или

$$ic \cdot \partial_4 \pi_j^* \equiv -\partial_4 f_{4j} = -\mu^2 \psi_j + \sum_j \partial_i f_{ij},$$

соответственно уравнениям поля (13.5). В комбинации с определяющими уравнениями (13.9) для ψ_4 и ψ_4^* гамильтонова функция (13.10) эквивалентна функции Лагранжа (13.3).

На основе выбранных так выражений для взаимодействия между электромагнитным и мезонным полями мы должны теперь определить магнитный момент мезона. Для этого введём слабое однородное статическое магнитное поле \mathfrak{H} , представленное как ротор трёхмерного вектора-потенциала Φ :

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{2} [\mathfrak{H} \cdot x] \quad (\mathfrak{H} = \text{const.})^1).$$

Разложим гамильтонову функцию (13.10) с помощью (13.4, 2) по степеням \mathfrak{H} или Φ и ограничимся линейными в Φ членами разложения; в векторных обозначениях это выглядит так:

$$H_1 = -2 \sum_j \Gamma_j \Phi_j = -2 (\Gamma \cdot \Phi),$$

где

$$\Gamma = \frac{i\varepsilon}{2c} \left\{ \frac{c^2}{\mu^2} (\pi \cdot \text{div } \pi^* - \text{div } \pi \cdot \pi^*) + \right. \\ \left. + ([\psi^* \cdot \text{rot } \psi] + [\text{rot } \psi^* \cdot \psi]) \right\}.$$

Так как $(\Gamma \cdot [\mathfrak{H} \cdot x]) = (\mathfrak{H} \cdot [x \cdot \Gamma])$, то

$$H_1 = -(\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{M}),$$

где

$$\mathfrak{M} = [x \cdot \Gamma].$$

Итак, \mathfrak{M} означает плотность магнитного момента в предельном случае $\mathfrak{H} \rightarrow 0$. Сравним эту плотность с плотностью механического момента $\mathbf{M} = [x \cdot \mathbf{G}]$, ограничиваясь тем случаем, когда есть только медленные мезоны. Для \mathbf{G} ($\mathbf{G}_j = = T_{4j}/ic$) в пределе $\mathfrak{H} = 0$ из (12.50, 8, 12) получится:

$$\mathbf{G} = (\psi^* \cdot \text{div } \pi^* + \text{div } \pi \cdot \psi) + (-[\pi \cdot \text{rot } \psi] + [\text{rot } \psi^* \cdot \pi^*]).$$

¹⁾ Вместе с ним можно допустить существование электрического поля $\mathfrak{E} = -\text{grad } \Phi$ (например, центральное поле).

Надо сравнить Γ с \mathbf{G} . Для этого мы снова введём ряды Фурье (5.5) и матричные представления (12.34, 35), в которые в нерелятивистском приближении подставлено $\omega_k = c\mu$. Результат вычислений мы напишем вместе для Γ и \mathbf{G} , причём верхний знак относится к Γ , нижний — к \mathbf{G} .

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\mu}{\epsilon} \Gamma = \\ \mathbf{G} = \end{aligned} \right\} \frac{\hbar}{2} \times \\ \times \frac{1}{V} \sum_{kk'} e^{i(k-k')x} \sum_{rr'} \{ e_k^{(r')} (k \cdot e_k^{(r)}) (a_{k'}^{(r')*} \mp b_{k'}^{(r')}) (a_k^{(r)} - b_k^{(r)*}) + \\ + e_k^{(r)} (k' \cdot e_{k'}^{(r')}) (a_{k'}^{(r')*} - b_{k'}^{(r')}) (a_k^{(r)} \mp b_k^{(r)*}) + \\ + [e_k^{(r')} \cdot [k \cdot e_k^{(r)}]] (a_{k'}^{(r')*} \pm b_{k'}^{(r')}) (a_k^{(r)} + b_k^{(r)*}) + \\ + [e_k^{(r)} \cdot [k' \cdot e_{k'}^{(r')}] (a_{k'}^{(r')*} + b_{k'}^{(r')}) (a_k^{(r)} \pm b_k^{(r)*}) \}.$$

Если вычислить средние значения для состояний, в которых присутствуют только положительные (или только отрицательные) мезоны, то исчезнут члены, содержащие множители b , b^* (соответственно a , a^*), и получится:

$$\Gamma = \frac{\epsilon}{2\mu} \mathbf{G}, \quad \mathfrak{M} = \frac{\epsilon}{2\mu} \mathbf{M} \text{ для положительных мезонов,}$$

$$\Gamma = \frac{-\epsilon}{2\mu} \mathbf{G}, \quad \mathfrak{M} = \frac{-\epsilon}{2\mu} \mathbf{M} \text{ для отрицательных мезонов.}$$

Таким образом по этой теории для медленных мезонов определённого заряда устанавливается точная пропорциональность между магнитным и механическим моментами; отношение обоих моментов равно $\pm \epsilon/2\mu = \pm e_1/2mc$ ($\epsilon\hbar = e_1 =$ элементарному заряду; $\mu\hbar/c = m =$ массе мезона), притом это относится не только к орбитальному, но и к спиновому моменту, т. е. магнитный момент спина по величине равен «мезонному магнетону» $e_1\hbar/2mc$. В действительности, по (12.63), собственные значения компоненты магнитного момента спина покоящихся положительных или отрицательных мезонов в пределе $\Phi_0 \rightarrow 0$ равны

$$\left(\int dx \mathfrak{M}'_1 \right)_{N_+ N_-} = \frac{\pm \epsilon}{2\mu} (M'_1)_{N_+ N_-} = \frac{\pm e_1 \hbar}{2mc} (N_+ - N_-).$$

К предыдущему надо ещё заметить, что предположение (13.3) для связи мезонов с максвелловским полем неоднозначно; именно, к L можно прибавить член

$$\gamma \cdot \frac{i\varepsilon}{2c} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} (\psi_{\mu}^* \psi_{\nu} - \psi_{\nu}^* \psi_{\mu}),$$

где γ — произвольная действительная постоянная¹⁾. Мы не будем доказывать, что тогда величина магнитного момента спина изменится на множитель $(1 - \gamma)$, т. е. в системе покоя будет равна мезонному магнетону, умноженному на $(1 - \gamma)$.

Действия слабых электромагнитных полей на мезоны со спином 1, как и в случае скалярных мезонов, могут быть определены по методам теории возмущения. Рассмотрим, например, снова рассеяние положительных мезонов электростатическим полем Φ_0 (11.11, 12). По (13.10), возмущающая энергия этой задачи равна

$$H' = \int dx \Phi_0 \rho = -i\varepsilon \int dx \Phi_0 \sum_j (\pi_j \psi_j - \pi_j^* \psi_j^*),$$

или в разложении Фурье по (11.12) и (5.5)

$$H' = -i\varepsilon \sum_{kk'} A_{k'-k} \{ (p_{k'} \cdot q_k) (p_k^* \cdot q_k^*) \}.$$

После разложения на продольную и поперечную компоненты, согласно (12.31), мы введём матричные представления (12.34, 35), но, желая исключить отрицательные мезоны, сразу не будем писать члены, содержащие b или b^* . Тогда H' станет выражением такого вида:

$$H' = \varepsilon h \sum_{kk'} A_{k'-k} \sum_{rr'} (e_k^{(r)} \cdot e_{k'}^{(r')}) \zeta_{k'k}^{(r', r)} \cdot a_{k'}^{(r')*} a_k^{(r)}; \quad (13.11)$$

коэффициенты ζ берутся только для $\omega_{k'} = \omega_k$ ($k' \neq k$) из-за сохранения энергии при ударе:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{k'k}^{(r, r)} = \zeta_{k'k}^{(2, 3)} = \zeta_{k'k}^{(3, 2)} = 1, \\ \zeta_{k'k}^{(1, 2)} = \zeta_{k'k}^{(2, 1)} = \zeta_{k'k}^{(1, 3)} = \zeta_{k'k}^{(3, 1)} = \frac{(\mu c)^2 + \omega_k^2}{2\mu c \cdot \omega_k} \equiv \zeta_k \\ (\omega_{k'} = \omega_k). \end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$

¹⁾ Паули (Pauli), доклад на Сольвеевском конгрессе 1939 г. (не опубликован), Rev. of Modern Physics **13**, 203, 1941, Корбен и Швингер (Corben и Schwinger), Phys. Rev. **58**, 953, 1940.

В частности, рассмотрим начальное состояние, в котором мезон обладает определённым импульсом k и определённой поляризацией r ($N_k^{(r)} = 1$, все другие $N = 0$), тогда вероятность перехода в определённое конечное состояние k' , r' даётся квадратом матричного элемента

$$H_{k'k}^{(r', r)} = \varepsilon h A_{k'-k} (e_k^{(r)} \cdot e_{k'}^{(r')}) \cdot \zeta_{k'k}^{(r', r)},$$

так что вероятность перехода зависит не только от импульсов k , k' , но также и от поляризаций r , r' . Если отвлечься от поляризации рассеянного излучения, т. е. интересоваться только общей его интенсивностью в направлении k' , то надо вычислить сумму $\sum_{r'} |H_{k'k}^{(r', r)}|^2$. Рассмотрим сначала случай, когда падающий мезон поляризован продольно ($r = 1$), тогда по (13.12):

$$\sum_{r'} \{ (e_k^{(1)} \cdot e_{k'}^{(r')}) \zeta_{k'k}^{(r', 1)} \}^2 = 1 + (\zeta_k^2 - 1) \sin^2 \vartheta,$$

где ϑ — угол рассеяния: $\cos \vartheta = (e_k^{(1)} \cdot e_{k'}^{(1)})$. Учитывая далее, что $\omega_k^2 = c^2 (\mu^2 + k^2)$,

$$\zeta_k^2 - 1 = \frac{c^2 k^4}{4\mu^2 \omega_k^2},$$

получим:

$$\sum_{r'} |H_{k'k}^{(r', 1)}|^2 = (\varepsilon h)^2 |A_{k'-k}|^2 \left(1 + \frac{c^2 k^4}{4\mu^2 \omega_k^2} \sin^2 \vartheta \right). \quad (13.13)$$

Если, напротив, первичный мезон поляризован поперечно ($r = 2$), то, по (13.12):

$$\sum_{r'} \{ (e_k^{(2)} \cdot e_{k'}^{(r')}) \zeta_{k'k}^{(r', 2)} \}^2 = 1 + (\zeta_k^2 - 1) \cos^2 \varphi,$$

где $\cos \varphi = (e_k^{(2)} \cdot e_{k'}^{(1)})$, т. е. φ — угол между направлением

рассеяния k' и поляризацией $e_k^{(2)}$. В этом случае, следовательно, будет:

$$\sum_{r'} |H_{k'k}^{(r', 2)}|^2 = (\epsilon \hbar)^2 |A_{k'-k}|^2 \left(1 + \frac{c^2 k^4}{4\mu^2 \omega_k^2} \cos^2 \varphi \right). \quad (13.14)$$

Случай произвольных поляризаций (собственных функций спина) можно рассмотреть по (13.11), но мы не будем этого делать¹⁾. При нерелятивистских скоростях мезона ($|k| \ll \mu$), где можно пренебречь $c^2 k^2 / \mu^2 \omega_k^2$ по сравнению с 1, рассеяние в кулоновом поле от точечного заряда всегда происходит по формуле Резерфорда. Но при больших скоростях, по сравнению с рассеянием скалярных мезонов (11.14, 15), появляется дополнительное рассеяние, даваемое членами, зависящими от ϑ и соответственно от φ в (13,13, 14), и которое можно рассматривать как влияние кулонова поля на движущийся магнитный момент спина²⁾. При очень больших энергиях ($|k| \gg \mu$, $\omega_k \gg c\mu$) этот дополнительный член сильно преобладает, что означает, что мезон со спином 1 рассеивается гораздо сильнее, чем со спином 0. Формальная причина этого заключается в том, что коэффициенты ζ_k (13.12), определяющие вероятности перехода между продольными и поперечными состояниями мезонов, неограниченно возрастают при росте энергии $\hbar\omega_k$. И при других действиях электромагнитного поля, как, например, образовании мезонных пар квантами света в присутствии кулонова поля (ср. § 11)³⁾, эффективные сечения при больших энергиях получаются гораздо большими по сравнению с сечениями в скалярной теории, что вызвано переходами между продольными и поперечными состояниями.

¹⁾ Ср. Лапорт (Laporte), Phys. Rev. **54**, 905, 1938, где рассмотрено рассеяние векторного мезона в неквантованной теории.

²⁾ Этот эффект становится важным и при связывании мезона в притягивающем поле. В случае кулонова поля точечного заряда ($\Phi_0 \sim r^{-1}$) из-за этого невыполнимы некоторые требования регулярности собственных функций для определенных азимутальных квантовых чисел; ср. Корбен и Швингер.

³⁾ Ср. Бус и Вильсон (Booth и Wilson), Proc. Roy. Soc. **175**, 483, 1940, Кобаяси и Утияма (Kobayasi и Utiyama), Proc. Phys., Math. Soc. Japan **22**, 882, 1940; Кристи и Кусака (Christi и Kusaka), Phys. Rev. **59**, 405, 1941.

§ 14. Ядерные взаимодействия¹⁾

Наряду с электромагнитными взаимодействиями протона с мезоном, оставляющими постоянный полный заряд мезона, могут, как мы уже видели на примере скалярного мезона в § 9, быть допущены «ядерные» взаимодействия между мезонами и протон-нейтронами, которые ведут к поглощению или испусканию мезонов, причём испускающий или поглощающий протон-нейтрон так меняет свой заряд, что общий заряд сохраняется. Дискутируя эти взаимодействия в случае векторных мезонов, мы для простоты не будем рассматривать электрические силы.

Так как соответствующий сопряжённый член в функции Лагранжа должен быть линейным относительно полей ψ , и ψ^* , то простейшее из возможных выражений для него будет

$$L' = \sum_{\nu} (\eta_{\nu} \psi_{\nu} + \eta_{\nu}^* \psi_{\nu}^*),$$

где η_{ν} — четырёхмерный вектор, образованный из волновых функций протон-нейтрона. Но компоненты η_1, η_2, η_3 могут быть связаны только с плотностью тока, т. е. со скоростью протон-нейтрона, и должны исчезать, если мы снова вернёмся к предельному случаю бесконечно тяжёлой покоящейся частицы:

$$L' = \eta_4 \psi_4 + \eta_4^* \psi_4^*.$$

При $L = L^0 + L'$, где L^0 задаётся через (12.5), уравнение поля (12.6) для $\nu = 4$ меняется таким образом:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial f_{\mu 4}}{\partial x_{\mu}} - \mu^2 \psi_4 + \eta_4^* = 0. \quad (14.1)$$

При переходе к гамильтоновой функции формулы (12.8, 9, 10) сохраняют силу, так что к (12.11) прибавится только ещё

¹⁾ Юкава, Саката и Такетани (Yukawa, Sakata и Taketani), Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **20**, 319, 1938, Кеммер (Kemmer), Proc. Roy. Soc. **166**, 127, 1938; Фрелих, Гайтлер и Кеммер (Fröhlich, Heitler и Kemmer), Proc. Roy. Soc. **166**, 154, 1938; Штюкельберг (Stueckelberg), Helv. Phys. Acta **11**, 299, 1938; Баба (Bhabha), Proc. Roy. Soc. **166**, 501, 1938; Гайтлер (Heitler), Proc. Roy. Soc. **166**, 529, 1938.

член L' . Учитывая, что $\pi_4 = \pi_4^* = 0$, и исключая ψ_4 и ψ_4^* с помощью (14.1), получим, с точностью до аддитивной пространственной дивергенции, выражение для H :

$$H = H^0 + H' + H'',$$

где H^0 даётся (12.13 или 15) и где

$$H' = \frac{c}{\mu^2} \{ \eta_0 \operatorname{div} \pi^* + \eta_0^* \operatorname{div} \pi \}, \quad H'' = \frac{1}{\mu^2} \eta_0^* \eta_0 \quad (14.2)$$

($\eta_{i4} = i\eta_{i0}$, $\eta_{i4}^* = i\eta_{i0}^*$). Для η_{i0} , η_{i0}^* мы примем выражение близкодействия типа (7.3) и соответственно (9.2):

$$\eta_{i0} = \sum_n g_n \delta(x - x_n), \quad \eta_{i0}^* = \sum_n g_n^* \delta(x - x_n), \quad (14.3)$$

где g_n , g_n^* — матрицы относительно зарядных чисел протонов λ_n , выбранные так, что заряд сохраняется. Это требование выполняется, если g_n и g_n^* в (14.3) снова отождествлены с матрицами изотопа спина (9.11, соответственно, 15); доказательство точно такое же, как в § 9¹⁾. С учётом (5.5) (12.30, 31) будет

$$\begin{aligned} H' &= \int_V dx H' = \\ &= \frac{ic}{\mu^2} V^{-1/2} \sum_k |k| \left\{ p_k^{(1)*} \sum_n g_n e^{ikx_n} - p_k^{(1)} \sum_n g_n^* e^{-ikx_n} \right\}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Так как H'' совсем не содержит переменных поля, а H' зависит только от $p_k^{(1)}$, $p_k^{(1)*}$, то выражение (14.2) связывает только продольные составляющие мезонов с покоящимися протон-нейтронами; для поперечных составляющих формулы § 12 строго выполняются.

Чтобы вычислить ядерные силы по теории возмущения, исходя из выражения (14.2), мы поступим так же, как и в § 10: преобразуем гамильтонову функцию унитарной матрицей S , разложенной по параметру связи [ср. (10.3, 4, 5)]:

$$S = 1 + S' + S'' + \dots, \quad S'^* = -S', \quad S'' = S''^* = \frac{1}{2} S'^2.$$

¹⁾ Действительно, уравнения (9.3 до 15) здесь не меняются [в (9.4) $\pi\psi$ надо, согласно (12.44), интерпретировать как скалярное произведение двух векторов π и ψ].

При этом пусть

$$S' = \frac{c}{\hbar} V^{-1/2} \sum_k \frac{|k|}{\omega_k^2} \left\{ q_k^{(1)} \sum_n g_n e^{ikx_n} - q_k^{(1)*} \sum_n g_n^* e^{-ikx_n} \right\}; \quad (14.5)$$

отсюда и из (12.33) получится, аналогично (10.7),

$$[H^0, S'] = [H^{\text{long}}, S'] = -H',$$

так что преобразованная гамильтонова функция, с точностью до членов второго порядка в параметре связи, выразится так [ср. (10.8)]:

$$S^{-1}HS = S^*(H^0 + H' + H'')S = H^0 + \frac{1}{2}[H', S'] + H'' + \dots$$

По (14.2, 3) будет:

$$H'' = \int_V dx H'' = \frac{1}{\mu^2} \sum_{nn'} g_n^* g_{n'} \delta(x_{n'} - x_n); \quad (14.6)$$

расщепим H'' , а также и $[H', S']$ на члены с $n = n'$ и с $n \neq n'$:

$$\frac{1}{2}[H', S'] + H'' = H''_{(=)} + H''_{(\neq)}, \quad (14.7)$$

тогда, с учётом (14.4, 5, 6), получится:

$$H''_{(\neq)} = \frac{1}{\mu^2} \sum_{n \neq n'} g_n^* g_{n'} \left\{ -\frac{1}{V} \sum_k \frac{c^2 k^2}{\omega_k^2} e^{ik(x_{n'} - x_n)} + \delta(x_{n'} - x_n) \right\}.$$

Если ещё учесть, что

$$\delta(x_{n'} - x_n) = \frac{1}{V} \sum_k e^{ik(x_{n'} - x_n)}$$

и что $\omega_k^2 = c^2(\mu^2 + k^2)$, получится простой результат:

$$\begin{aligned} H''_{(\neq)} &= c^2 \sum_{n \neq n'} g_n^* g_{n'} \frac{1}{V} \sum_k \frac{e^{ik(x_{n'} - x_n)}}{\omega_k^2} = \\ &= \sum_{n \neq n'} g_n^* g_{n'} U(x_{n'} - x_n), \end{aligned} \quad (14.8)$$

где U — снова та же потенциальная функция Юкава, что и определённая в (7.13). Сравнение с членами $n \neq n'$ (9.19) учит, что продольные векторные мезоны вызывают с точностью до знака те же ядерные силы, что и скалярные мезоны; знаки же везде противоположные. Отвлекаясь от изменения знака, повторяется всё, что говорилось в § 9 относительно ядерных сил, произведённых скалярными мезонами.

При вычислении членов $H''_{(=)}$ в (14.7) надо помнить, что g_n^* и g_n не коммутируют, более того, по (9.13, 15), имеет место

$$[g_n^*, g_n] = |g|^2 \tau_n^{(3)}.$$

Опуская члены с собственной энергией, не зависящие от переменных поля, получим:

$$H''_{(=)} = -\frac{ic^2}{2\hbar\mu^2} |g|^2 \cdot \frac{1}{V} \sum_{kk'} |k||k'| \left(\frac{q_k^{(1)} p_{k'}^{(1)}}{\omega_k^2} - \frac{q_{k'}^{(1)*} p_k^{(1)*}}{\omega_{k'}^2} \right) \times \\ \times \sum_n \tau_n^{(3)} e^{i(k-k')x_n}.$$

Как можно убедиться в матричном представлении (12.34), эта возмущающая энергия описывает рассеяние продольных мезонов ядерными частицами и, кроме того, двойные процессы испускания и поглощения. Матричный элемент упругого рассеяния продольного мезона на нейтроне ($\tau^{(3)} = 1$) или протоне ($\tau^{(3)} = -1$) оказывается равным

$$\pm \frac{c^2 |g|^2 k^2}{2V\mu^2 \omega_k^2},$$

что соответствует полному поперечному сечению рассеяния

$$Q = \frac{|g|^4 k^4}{4\pi\mu^4 (\hbar\omega_k)^2}. \quad (14.9)$$

По сравнению с эффективным сечением рассеяния скалярных мезонов (9.18) здесь прибавился множитель $(k/\mu)^4$; в то время как сечение в скалярном случае уменьшается при возрастании энергии мезонов, сечение (14.9) неограниченно возрастает, по крайней мере, в том приближении теории возмущений, которое рассмотрено здесь.

В выражение (14.2) не входит спин протонов и нейтронов¹⁾, благодаря чему при всех до сих пор рассмотренных переходах спин ядерных частиц оставался неизменным. В частности, спин протон-нейтрона также не входит в ядерные силы (14.8); если рассмотреть в качестве примера столкновение медленных протона и нейтрона, то статический потенциал вызовет обмен импульсом и зарядом, но без всякого изменения спина. Обменные силы этого типа называются «силами Гейзенберга», так как их впервые ввёл Гей-

¹⁾ Здесь речь идёт не об «изотопном спине», т. е. зарядном числе, а о собственном моменте количества движения ядерных частиц.

зенберг¹⁾, при квантово-механическом рассмотрении энергии связи сложных ядер. Точно так же, как и скалярные мезоны, которые не могут переносить спина, будучи сами лишены его, так и продольные мезоны благодаря связи (14.2) вызывают только силы Гейзенберга между (покоящимися или медленно движущимися) протонами и нейтронами. Однако, как будет разъяснено в § 15, в действительности ядерные силы преимущественно «типа Майорана», которые при взаимодействии производят обмен не только зарядом, но и спином²⁾.

Интересно поэтому кратко рассмотреть, кроме (14.2), ещё другое выражение связи, в котором играет роль спин ядер.

Известно, что протон-нейтрон имеет спин $\frac{1}{2}$. Из его волновых функций можно построить антисимметричный тензор («шестивектор») $\zeta_{\mu\nu} = -\zeta_{\nu\mu}$, $\nu, 4$ -компоненты которого исчезают в системе покоя, тогда как i, j -компоненты ($i, j = 1, 2, 3$) связаны со спином. Из этого тензора и из «напряжений мезонного поля» $f_{\mu\nu}$ (12.3) мы образуем инвариантное слагаемое функции Лагранжа:

$$L' = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \{ \zeta_{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \zeta_{\mu\nu}^* f_{\mu\nu}^* \}.$$

Если опять предположить ядерные частицы покоящимися, то в сумме исчезнут члены $\mu = 4$ и $\nu = 4$:

$$L' = \frac{1}{2} \sum_{ij} \{ \zeta_{ij} f_{ij} + \zeta_{ij}^* f_{ij}^* \} = (\zeta \cdot \text{rot } \psi) + (\zeta^* \cdot \text{rot } \psi^*)$$

(ζ — вектор с компонентами $\zeta_{23}, \zeta_{31}, \zeta_{12}$). Так как L не содержит производных ψ , по времени и ψ_4 тоже в него не входит, то в гамильтонову функцию, по сравнению с § 12, войдёт только дополнительный член

$$H' = - \{ (\zeta \cdot \text{rot } \psi) + (\zeta^* \cdot \text{rot } \psi^*) \}. \quad (14.10)$$

¹⁾ Zs. f. Phys. 77, 1, 1932.

²⁾ Майорана (Majorana), Zs. f. Phys. 82, 137, 1933. Подробная дискуссия сил Майорана — см. § 15.

В квантовой теории компоненты ζ и ζ^* должны трактоваться как матрицы относительно спиновых индексов протон-нейтронов и, кроме того, с учётом сохранения заряда, также и как матрицы относительно зарядных чисел λ_n . Мы положим в (14.10):

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sum_n \sigma_n g_n \delta(x - x_n), \\ \zeta^* &= \sum_n \sigma_n g_n^* \delta(x - x_n), \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

где σ_n — вектор спина n -го протон-нейтрона, т. е. вектор σ_n имеет компонентами $\sigma_n^{(j)}$ матрицы Паули, свойства которых:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n^{(j)} &= \sigma_n^{(j)*}; \quad (\sigma_n^{(j)})^2 = 1; \\ \sigma_n^{(2)} \sigma_n^{(3)} &= -\sigma_n^{(3)} \sigma_n^{(2)} = i\sigma_n^{(1)}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (14.12)$$

Если выбрать для g_n и g_n^* в (14.11) снова матрицы изотопа спина (9.11, соответственно, 15), то опять имеет место (9.6, 7), т. е. сохранение заряда гарантировано. С помощью (5.5), (12.30, 31) пишем возмущающую функцию

$$\begin{aligned} H' &= -iV^{-1/2} \sum_k |k| \left\{ (q_k^{(2)} e_k^{(3)} - q_k^{(3)} e_k^{(2)}) \sum_n \sigma_n g_n e^{ikx_n} - \right. \\ &\quad \left. - (q_k^{(2)*} e_k^{(3)} - q_k^{(3)*} e_k^{(2)}) \sum_n \sigma_n g_n^* e^{-ikx_n} \right\}. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Таким образом, это возмущение действует только на поперечные мезоны ($r=2, 3$).

Вместо (14.5) мы выберем

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{c^2}{h} V^{-1/2} \sum_k \frac{|k|}{\omega_k^2} \left\{ (p_k^{(2)} e_k^{(3)} - p_k^{(3)} e_k^{(2)}) \sum_n \sigma_n g_n^* e^{-ikx_n} - \right. \\ &\quad \left. - (p_k^{(2)*} e_k^{(3)} - p_k^{(3)*} e_k^{(2)}) \sum_n \sigma_n g_n e^{ikx_n} \right\}, \end{aligned} \quad (14.14)$$

так что, с учётом (12.33), снова будет:

$$[H^0, S'] = [H^{\text{tr}}, S'] = -H'.$$

В выражении $\frac{1}{2} [H', S']$ члены $n \neq n'$ дают:

$$\begin{aligned}
 H''_{(n \neq n')} &= -c^2 \sum_{n \neq n'} g_n^* g_{n'} \cdot \frac{1}{V} \sum_k \frac{k^2}{\omega_k^2} \{ (\epsilon_k^{(2)} \cdot \sigma_n) (\epsilon_k^{(2)} \cdot \sigma_{n'}) + \\
 &\quad + (\epsilon_k^{(3)} \cdot \sigma_n) (\epsilon_k^{(3)} \cdot \sigma_{n'}) \} \cdot e^{ik(x_{n'} - x_n)} = \\
 &= -c^2 \sum_{n \neq n'} g_n^* g_{n'} \cdot \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{\omega_k^2} \{ k^2 (\sigma_n \cdot \sigma_{n'}) - \\
 &\quad - (\sigma_n \cdot k)(\sigma_{n'} \cdot k) \} \cdot e^{ik(x_{n'} - x_n),
 \end{aligned}$$

или с (7.13)

$$\begin{aligned}
 H''_{(n \neq n')} &= \sum_{n \neq n'} g_n^* g_{n'} \times \\
 &\quad \times \{ (\sigma_n \cdot \sigma_{n'}) \cdot \Delta_n - (\sigma_n \cdot \text{grad}_n) (\sigma_{n'} \cdot \text{grad}_{n'}) \} U(x_{n'} - x_n). \quad (14.15)
 \end{aligned}$$

Члены $n = n'$ мы здесь совсем не рассматриваем; они описывают, между прочим, рассеяние поперечных мезонов, причём эффективное сечение имеет ту же зависимость от энергии, что и в случае продольных мезонов [ср. (14.9)]¹⁾.

Для случая, когда имеются только две ядерные частицы, формула (14.15) с $x_2 - x_1 = x$ гласит:

$$H'_{(n \neq n')} = (g_1 g_2^* + g_1^* g_2) \cdot \{ (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \Delta - (\sigma_1 \cdot \text{grad}) (\sigma_2 \cdot \text{grad}) \} U(x).$$

Матрица $(g_1 g_2^* + g_1^* g_2)$ уже дискутировалась в § 9, её значения 0 (для $\lambda_1 = \lambda_2$) и $\pm |g|^2$ (для $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Для дискуссии остальных множителей разложим их следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 H''_{(n \neq n')} &= (g_1 g_2^* + g_1^* g_2) (A + B), \\
 A &= \frac{2}{3} (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \Delta U(x), \\
 B &= \left\{ \frac{1}{3} (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \Delta - (\sigma_1 \cdot \text{grad}) (\sigma_2 \cdot \text{grad}) \right\} U(x). \quad (14.16)
 \end{aligned} \right\}$$

Разложение выбрано так, чтобы среднее значение B для всех направлений x исчезало. Для A , по (7.16), можно написать:

$$A = \frac{2}{3} (\sigma_1 \cdot \sigma_2) [\mu^2 U(x) - \delta(x)];$$

¹⁾ Надо заметить, что в случае нейтральных векторных мезонов, где g_n — матрицы, а просто численные коэффициенты, рассеяние продольных мезонов на покоящемся протон-нейтроне не происходит, но поперечные мезоны рассеиваются, потому что компоненты σ_a не перестановочны относительно друг друга.

член с $\sim \delta(x)$ представляет здесь «близодействие» между протоном и нейтроном, которое, однако, несовместимо с конечной энергией связи протона с нейтроном и должно быть исключено, чего можно достичь соответствующей добавкой к функции Лагранжа

$$(L'' = \text{const.} \sum_{\mu\nu} \zeta_{\mu\nu}^* \zeta_{\mu\nu}).$$

После этой поправки остаётся

$$A = \frac{2}{3} \mu^2 (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \cdot U(x). \quad (14.17)$$

Спиновую матрицу $(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \sum_j \sigma_1^{(j)} \sigma_2^{(j)}$ легко привести к диагональному виду: так как матрицы Паули $\sigma_n^{(j)}$ могут быть выбраны формально равными матрицам изотопного спина $\tau_n^{(j)}$ (9.12), то мы имеем ту же задачу, что и уже решённая в § 10 при дискуссии матрицы $(\tau_1 \cdot \tau_2)$ в «симметричной теории», так что можно воспользоваться прежним результатом, только заменяя зарядные числа λ_1, λ_2 спиновыми координатами обеих частиц: $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ имеет трёхкратное собственное значение $+1$ и простое -3 , причём собственные спиновые функции частиц симметричны для трёхкратного собственного значения $+1$ и антисимметричны для значения -3 . С другой стороны, член B в (11.46) с учётом того что $U(x)$ зависит только от расстояния частиц $|x| = r$, преобразуется так:

$$B = \left\{ \frac{1}{3} (\sigma_1 \cdot \sigma_2) - \frac{(\sigma_1 \cdot x)(\sigma_2 \cdot x)}{r^2} \right\} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right). \quad (14.18)$$

Если ввести результирующий спин $s = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$ и его компоненту в направлении x $s_x = (s \cdot x)/r$, то на основе соотношений (14.12):

$$s^2 = \frac{1}{2} \{ 3 + (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \}, \quad s_x^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{(\sigma_1 \cdot x)(\sigma_2 \cdot x)}{r^2} \right\},$$

и поэтому

$$B = 2 \left\{ \frac{1}{3} s^2 - s_x^2 \right\} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right). \quad (14.19)$$

Собственные значения s^2 и s_x (при заданном $x = x_2 - x_1$), как известно, таковы:

$$s^2 = 0, s_x = 0 \quad \text{и} \quad s^2 = 2, s_x = 0, \pm 1,$$

чем определяются и собственные значения B . В тех же обозначениях A из (14.17) равно:

$$A = \mu^2 \cdot 2 \left\{ \frac{2}{3} s^2 - 1 \right\} U. \quad (14.20)$$

Вышенаписанные выражения взаимодействия (14.2) и (14.10) являются единственными выражениями, совместимыми с релятивистскими постулатами и содержащими волновые функции мезонов линейно. Конечно, их можно и линейно комбинировать [$H' =$ сумме (14.2) и (14.10)], считая параметры связи $|g|$ обоих членов независимо выбранными. Тогда с ядерными частицами связываются не только продольные, но и поперечные мезоны: те и другие рассеиваются с помощью сил типа (14.8) и соответственно (14.15 до 20). Наконец, можно, как и в § 10 для скалярного поля, путём добавления нейтрального векторного мезонного поля построить «симметричную» теорию¹⁾. Мы не будем рассматривать выражений этой теории, могущих быть построенными по образцу § 10. Матрицы изотопного спина для ядерных сил (14.8, 15)

$$g_n^* g_{n'} + g_{n'}^* g_n = \frac{1}{2} |g|^2 \{ \tau_n^{(1)} \tau_{n'}^{(1)} + \tau_n^{(2)} \tau_{n'}^{(2)} \}$$

[ср. (9.22)] тогда надо снова заменить на

$$\frac{1}{2} |g|^2 (\tau_n \cdot \tau_{n'}) = \frac{1}{2} |g|^2 \{ \tau_n^{(1)} \tau_{n'}^{(1)} + \tau_n^{(2)} \tau_{n'}^{(2)} + \tau_n^{(3)} \tau_{n'}^{(3)} \}.$$

Самый общий потенциал статического взаимодействия между двумя протон-нейтронами в симметричной векторной теории, по (14.8), (16,17), таков:

$$V_{12} = (\tau_1 \cdot \tau_2) \left\{ \left[|g|^2 + \frac{2}{3} |f|^2 (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \right] U(x) + \frac{1}{\mu^2} |f|^2 \cdot B \right\}, \quad (14.21)$$

где $|g|$ и $|f|$ — два независимых параметра связи. Эти ядерные силы «не зависят от заряда» в том же смысле, что и в § 10: между протоном и нейтроном, собственные функции которых симметричны в обоих зарядах [$(\tau_1 \cdot \tau_2) = 1$], действуют такие же силы, как и между протоном и протоном или нейтроном и нейтроном.

§ 15. Мезонная теория и ядерные силы.

Когда мы в § 9, 10 и 14 подробнее рассматривали теорию Юкава-Кеммера взаимодействия между мезонами и ядерными частицами, то имели в виду, главным образом, поучительный пример вычислительных методов, которые чаще всего встречаются в приложениях квантовой теории поля. Однако эта теория заслуживает также особого интереса как одна из наиболее часто дискутируемых теорий ядерных сил, и мы попутно рассмотрим вопрос, насколько она соответствует фактам ядерной физики. Мы будем поэтому опираться на результаты феноменологической теории ядерных сил, которая, исходя из специально выбранных выражений для силы,

¹⁾ К е м м е r, см. цитату в § 10.

квантовомеханически выводит условия устойчивости ядер и путём сравнения с опытом приходит к заключениям о действительных свойствах сил. Полученные, таким образом, полуэмпирические данные о ядерных силах, хотя и неполные во многих отношениях и не совсем свободные от гипотез, естественно, гораздо лучше обоснованы, чем теория поля, требующая гораздо более детальных допущений о природе поля, передающего ядерные силы, и о его взаимодействии с ядерными частицами¹⁾. Поэтому следует проверять теорию поля путём сравнения с феноменологической теорией.

В этой теории вместе с Гейзенбергом²⁾ принимают, что силы, с которыми взаимодействуют в атомном ядре две частицы (протоны или нейтроны), могут, по крайней мере в первом приближении, считаться статическими и центральными, т. е. представляются потенциалом $J(r)$ (r — расстояние между частицами). Чтобы силы допускали «насыщение», принимается, что они имеют обменный характер. Тогда как Гейзенберг первоначально принимал, что неэлектрические силы в существенном действуют только между протоном и нейтроном, позднейшие экспериментальные исследования рассеяния протонов с энергией 1 MeV³⁾ в водороде показали, что между двумя протонами, кроме кулоновской силы, существует ещё одна, короткодействующая сила, причём из квантовомеханической дискуссии следует, что эта «ядерная» сила между протонами в состоянии (1S) равна или почти равна силе между протоном и нейтроном, а это говорит

¹⁾ Как предшественницу мезонной теории мы упомянем β -теорию ядерных сил, по которой передающее поле — электрона-нейтрино (Тамм и Иваненко, *Nature* **133**, 981, 1934); но, как это видно из большого значения периодов полураспада β -активных веществ, такое поле связано с ядерными частицами слишком слабо, чтобы его можно было считать ответственным за большие ядерные силы. В одном варианте β -теории, свободной от этого возражения, кроме β -поля, принимается ещё и электронно-позитронное поле [Гамов и Теллер (Gamow и Teller), *Phys. Rev.* **51**, 289, 1937; Вентцель (Wentzel), *Helv. Phys. Acta* **10**, 107, 1937; Вигнер, Кричфильд и Теллер (Wigner, Critchfield и Teller), *Phys. Rev.* **56**, 530, 1939; Яух (Jauch), *Helv. Phys. Acta.* **15**, 175, 1942]. Рассматривались также и пары «мезонов» со спином $\frac{1}{2}$ [Маршак (Marschak), *Phys. Rev.* **57**, 1101, 1940; Маршак и Вайскопф (Marschak и Weiskopf), *Phys. Rev.* **59**, 130, 1941]. По сравнению с этими теориями, в которых ядерные силы передаются испусканием и поглощением пар частиц, теория Юкава имеет преимущество в большом сходстве с квантовой электродинамикой, где тоже все взаимодействия сводятся к испусканию и поглощению отдельных частиц со спином 1 (ср. гл. IV).

²⁾ *Zs. f. Phys.* **77**, 1, 1932.

³⁾ Тюв, Хейденбург и Хафстад, (Tuve, Heydenburg и Hafstad), *Phys. Rev.* **50**, 806, 1936.

в пользу «независимости от заряда» ядерных сил¹⁾. С этих пор гипотеза о независимости ядерных сил от заряда кладётся в основу почти всех вычислений в теории ядра.

Если статическая ядерная сила считается независимой от заряда, то, согласно её обменному характеру, могут быть ещё четыре независимых предположения о потенциальной энергии V пары частиц; записываются они так:

$$\text{силы Вигнера} \quad V = J(r),$$

$$\text{силы Бартлетта} \quad V = \frac{1 + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)}{2} \cdot J(r),$$

$$\text{силы Гейзенберга} \quad V = -\frac{1 + (\tau_1 \cdot \tau_2)}{2} \cdot J(r),$$

$$\text{силы Майорана} \quad V = -\frac{1 + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)}{2} \cdot \frac{1 + (\tau_1 \cdot \tau_2)}{2} \cdot J(r).$$

Согласно сказанному выше, операторы $\frac{1 + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)}{2}$ и соответствен-

но $\frac{1 + (\tau_1 \cdot \tau_2)}{2}$ имеют собственные значения ± 1 ²⁾, а принадлежащие

им собственные функции симметричны или антисимметричны в спиновых или зарядных координатах. Благодаря свойствам симметрии

можно также сказать: $\frac{1 + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)}{2}$ и соответственно $\frac{1 + (\tau_1 \cdot \tau_2)}{2}$ — опе-

ратор, переставляющий спиновые или зарядные координаты частиц

1 и 2, так как в применении к симметричной или антисимметричной

функции этот оператор эквивалентен $+1$ или -1 . Применяя его, надо помнить, что, по

принципу Паули, волновая функция должна быть антисимметрична

относительно совокупности координат (пространственных, спиновых и зарядных). Отсюда следует, что харак-

терный для сил Майорана оператор $\left(-\frac{1 + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)}{2} \cdot \frac{1 + (\tau_1 \cdot \tau_2)}{2} \right)$

эквивалентен перестановке пространственных координат частиц 1 и 2.

Допуская, что присутствуют силы всех четырёх типов, причём с одинаковой зависимостью от r , приходим к употребительному допущению о потенциале

$$V = \{c + c_\sigma (\sigma_1 \cdot \sigma_2) + c_\tau (\tau_1 \cdot \tau_2) + c_{\sigma\tau} (\sigma_1 \cdot \sigma_2) (\tau_1 \cdot \tau_2)\} J(r), \quad (15.1)$$

где c , c_σ , c_τ , $c_{\sigma\tau}$ — четыре независимые постоянные. Что касается выбора функции $J(r)$, то существенно, что силам приписывается

¹⁾ Брейт, Кондон и Презент (Breit, Condon и Present), Phys. Rev. **50**, 825, 1936; Брейт и Финберг (Breit и Feenberg), Phys. Rev. **50**, 850, 1936.

²⁾ Собственные значения $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ и соответственно $(\tau_1 \cdot \tau_2)$ равны $+1$ (триплет) и -3 (синглет) (ср. § 10 и 14).

«конечный радиус действия» a : $J(r)$ отлично от нуля только при $r < a$; чаще всего применяются выражения:

$$J(r) = e^{-\frac{r}{a}}, \quad J(r) = e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}, \quad J(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r > a; \end{cases}$$

и в последнее время также потенциал Юкава

$$J(r) = \frac{a}{r} e^{-\frac{r}{a}}.$$

Важнейшие результаты в значительной степени не зависят от выбора типа функции.

Первые два уравнения, определяющих константы в (15.1), получаются из задачи двух тел. Основное состояние дейтрона есть 3S -состояние, так что волновая функция симметрична в пространственных и спиновых координатах протона и нейтрона и, таким образом, антисимметрична, по принципу Паули, в зарядных координатах: $(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = 1$, $(\tau_1 \cdot \tau_2) = -3$. Отсюда по энергии связи дейтрона можно заключить и о численном значении

$$c + c_s - 3c_\tau - 3c_{\sigma\tau} (< 0),$$

если для $J(r)$ выбрана функция определённого типа. Достаточно удовлетворительно известна и энергия 1S -состояния дейтрона, обуславливающего сильное рассеяние медленных нейтронов в водороде; она также играет важнейшую роль как в теории фотоэлектрического разложения дейтрона, так и в теории фотоманнитного захвата нейтрона протоном. Из энергии этого (неустойчивого) состояния, собственные функции которого симметричны в пространственных и зарядных координатах и антисимметричны в спиновых координатах $[(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = -3, (\tau_1 \cdot \tau_2) = 1]$, возможно определить постоянную

$$c - 3c_s + c_\tau - 3c_{\sigma\tau} (< 0).$$

Если силы в самом деле не зависят от заряда, то это же 1S -взаимодействие должно определять и рассеяние протонов на протонах; тот факт, что в действительности так и происходит, а при выборе потенциала Юкава даже и в пределах точности эксперимента¹⁾, является основным опорным пунктом гипотезы о независимости сил от заряда.

Тогда как задачи о трёх и четырёх телах (H^3 , He^3 , He^4) позволяют в основном заключить только о радиусе действия сил « a », новые данные о константах « c » получают из теории тяжёлых ядер.

¹⁾ Хойзингтон, Шэр и Брейт (Hoisington, Share и Breit), Phys. Rev. **56**, 884, 136.

Здесь применяется приближение Хартри-Фока. В потенциальную энергию ядер в первом приближении входят члены двоякого типа:

$$V_1 = \int dx_1 \int dx_2 \rho(x_1, x_1) \rho(x_2, x_2) J(|x_2 - x_1|) \cdot \text{const.},$$

$$V_2 = \int dx_1 \int dx_2 \rho(x_1, x_2) \rho(x_2, x_1) J(|x_2 - x_1|) \cdot \text{const.},$$

(где $\rho(x_1, x_2)$ — функция плотности смеси (матрица плотности):

$$\rho(x_1, x_2) = \sum_n u_n^*(x_1) u_n(x_2)$$

(u_n — пространственная собственная функция ядерной частицы в занятом состоянии). Энергия V_1 , определяемая обыкновенной плотностью частиц $\rho(x, x)$, должна быть положительной во всех случаях; если эти ненасыщенные силы были бы притягивающими, то должны были бы существовать — вопреки опыту — очень маленькие и очень устойчивые ядра. Поэтому, естественно, что V_2 должна быть отрицательной и по абсолютной величине, большей, чем V_1 ; так как эти силы обладают характером насыщения, то объём ядра и энергия связи оказываются приблизительно пропорциональными числу частиц или атомному весу, как того и требует опыт. Условие, чтобы V_1 было положительно для всех мыслимых ядер, даёт для коэффициентов « c » в (15.1) много неравенств, называемых «условиями насыщения». Они особенно ценны благодаря тому, что справедливы независимо от качества приближения Хартри, которое для основного состояния может дать лишь завышенные значения энергии. В применении к таким ядрам, в которых заняты все состояния частиц с обоими значениями спина, можно усреднить по всем спиновым квантовым числам, причём члены (15.1), помноженные на $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$, отпадут, так как шпур (диагональная сумма) $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ равен нулю. Можно произвести такое же усреднение и по зарядным квантовым числам, если только число существующих протонов и нейтронов равно и все пространственные состояния одинаково заняты теми и другими; тогда в V_1 члены, умноженные на $\sim (\tau_1 \cdot \tau_2)$, ничего не прибавят, и условие насыщения будет гласить 1):

$$c \geq 0.$$

Но так как, с другой стороны, не существует очень устойчивых ядер, состоящих исключительно или из одних протонов или из одних нейтронов, т. е. таких, у которых собственная функция симметрична в зарядных числах всех частиц, то надо потребовать положительности V_1 , когда в (15.1) $(\tau_1 \cdot \tau_2) = 1$ и $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ (в среднем) = 0:

$$c + c_\tau \geq 0.$$

Аналогично должно иметь место благодаря симметрии заряда

1) Брейт и Финберг (Breit и Feenberg), Phys. Rev. 50, 850, 1936.

и спина:

$$c + c_{\sigma} \geq 0,$$

что выражает условие того, что не существует очень устойчивого протонно-нейтронного ядра, содержащего исключительно параллельные спины.

Если сопоставить эти неравенства с более качественными результатами, получаемыми из приближения Хартри путём сравнения с опытными данными о ядрах, то теория оказывается в наилучшем соответствии с фактами, когда константы c и c_{σ} положены равными нулю¹⁾. Тогда данные о дейтроне дают значения остальных постоянных c_{τ} и $c_{\sigma\tau}$; они получаются положительными и в примерном отношении $c_{\tau}:c_{\sigma\tau} \cong 1:2$.

Когда $c = c_{\sigma} = 0$, $c_{\tau} > 0$, $c_{\sigma\tau} > 0$, выражение (15.1) согласуется с формулой (14.21), если в последней пренебречь членом B . Постольку, поскольку последнее приближение оправдано, симметричная векторная мезонная теория удовлетворительна. Если прибавить к (15.1) член $\text{const}(\tau_1 \cdot \tau_2)B$, то это ничего не изменит в теории тяжёлых ядер, так как он исчезает при усреднениях как по всем направлениям спина, так и по всем направлениям вектора $x = x_2 - x_1$; но его влияние на дейтрон должно сказываться. Именно, согласно (14.9), B зависит от ориентации радиуса-вектора относительно спина дейтрона Эта «связь спина с орбитой» лишает пространственную волновую функцию основного состояния дейтрона сферической симметрии: 3S -функция получает «добавку 3D » Поэтому и пространственное распределение электрического заряда в дейтроне отклоняется от сферической симметрии, так что возникает электрический квадрупольный момент. Это предсказание теории поля качественно выполняется; как показали Келлог, Раби, Рамсей и Захариас²⁾, наблюдая переходы в молекулах тяжёлого водорода HD и D_2 , вызванные периодическим магнитным полем, дейтрон действительно обладает электрическим квадрупольным моментом. Но количественно возникают принципиальные трудности. Именно, если подставить в B (14.19) для U потенциал Юкава, то при $r \rightarrow 0$ B обращается в бесконечность, как r^{-3} , а такая сильная сингулярность несовместима с конечной энергией связи дейтрона. Это вынуждает либо обрезать, либо ослабить сингулярность путём введения обрывающего множителя. Вычисляя с изменённой в этом смысле потенциальной функцией U , получим, на основании (14.19), добавку 3D к функции Шредингера 3S , как и требовалось, малой (из-за малости амплитуды D -функции в области S -функции), так что вычисленный квадрупольный момент получит правильный порядок величины Тем не менее, возникнет расхождение в знаке квадрупольного момента: теоретическое распределение заряда имеет форму эллипсоида, сплющенного

¹⁾ Кеммер (Kemmer), Nature 140, 192, 1937.

²⁾ Kellogg, Rabi, Ramsey u Zacharias, Phys. Rev. 57, 677, 1940.

в направлении спина¹⁾, а экспериментальные данные говорят о вытянутой форме. Остаётся спорным, не связано ли это несогласие с расходимостями и вызвано поэтому неправильным способом образования²⁾

Для суждения о мезонной теории надо помнить, что формула (14.21) для ядерных сил может считаться только приближённой, потому что она, отвлекаясь от ограничения статическими взаимодействиями, выведена во втором приближении теории возмущений. Если определить константы $|g|^2$ и $|f|^2$ в (14.21) путём сравнения с полуэмпирической формулой (15.1), то можно оценить поправки, обусловленные высшими приближениями; но из-за недостаточной малости $|g|^2$ и $|f|^2$ ³⁾ эти поправки отнюдь не малы, даже и при благоприятном выборе обрывающих множителей, вводимых для устранения расходимостей⁴⁾. При таких обстоятельствах, конечно, нельзя ожидать безупречного согласия с опытом.

Но тем больше значения нужно придать качественным аргументам, говорящим в пользу теории Юкава, после открытия «мезотронов» в космическом излучении. О связи между массой мезона и радиусом действия ядерных сил говорилось уже в § 7. Если отождествить мезон теории Юкава с частицей из космического излучения, масса которой m по точнейшим измерениям лежит между 150 и 220 электронными массами, то для радиуса действия потенциала Юкава $1/\mu = h/mc$ получится число, лежащее между 1,7 и $2,6 \cdot 10^{-13}$ см. Точнейшие экспериментальные данные о радиусе дей-

¹⁾ Это основано на том, что член B в (14.41) в случае основного состояния дейтрона $[(\tau_1 \tau_2) = -3]$, по (14.19), представляет отталкивающий потенциал, когда радиус-вектор x параллелен спину s , и притягивающий потенциал, когда x перпендикулярен к s . Ср. Бете (Bethe), Phys. Rev. 57, 390, 1940.

²⁾ Меллер и Розенфельд (Møller и Rosenfeld; Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Math.-fys. Medd. XVII, 8, 1940) предложили вариант теории Юкава, в котором к векторному мезонному полю добавляется псевдоскалярное; при надлежащем выборе параметров связи статическое взаимодействие спина с орбитой исчезает. Квадрупольный момент дейтрона сводится к нестатическим силам, причём знак может быть согласован с опытом.

³⁾ При $1/\mu = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см («радиус электрона») будет $|g|^2/hc \cong \cong 1/3$, $|f|^2/hc \cong 1$. В случае электрических сил соответствующее число $4\pi e^2/hc \cong 4\pi/137 \cong 1/11$.

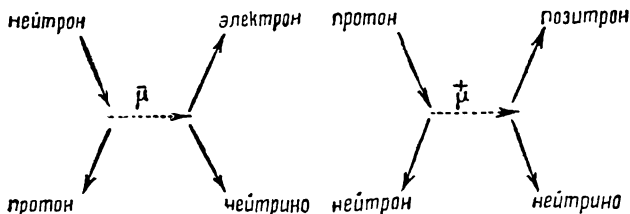
⁴⁾ Если стремить радиус протона к нулю, то расходимости будут ещё сильнее, чем в скалярной теории (§ 9) (ср. Штюкельберг и Патри (Stueckelberd и Patry), Helv. Phys. Acta 13, 167, 1940). Более однозначных результатов, вероятно, можно ожидать в граничном случае «сильной связи» (ср. § 9, последний абзац), но об этом известно слишком мало. Теория, похожая на вариант Меллера-Розенфельда, дискутированная Швингером с этой точки зрения, кажется вполне отвечающей данным опыта (Schwinger, Bull. American Phys. Soc. 16, №7, 7, 1941).

ствия сил даёт квантовомеханическая дискуссия рассеяния протонов на протонах; когда $J(r)$ в (15.1) взят в виде потенциала Юкава U , зависимость рассеяния от энергии и его распределение по углам лучше всего передаются¹ при $1/\mu = 1,2 \cdot 10^{-13}$ см. Совпадение обоих значений по порядку величины (большего нельзя и ожидать), вероятно, не случайно.

Здесь же относится предположенная Юкава²) связь с явлениями β -активности. Известно, что, по Паули и Ферми³), β -распад ядра истолковывается как процесс, при котором нейтрон в ядре превращается в протон, испуская электрон и нейтрино; и, наоборот, протон в ядре может превратиться в нейтрон, испуская позитрон и (анти) нейтрино. Юкава выдвинул гипотезу, согласно которой эти переходы происходят не прямо, а через промежуточное состояние в присутствии мезона. Уже в теории ядерных сил рассматривались переходы:

нейтрон \rightarrow протон + отрицательный мезон,
 протон \rightarrow нейтрон + положительный мезон,

ведущие по энергетическим соображениям не в действительные состояния, а в виртуальные, промежуточные. Если теперь вместе с Юкава принять, что отрицательный мезон может распадаться на электрон и нейтрино, а положительный на позитрон и нейтрино, то β -процессы пойдут как двухстепенные по схеме



Возможен ли процесс энергетически, зависит, конечно, как и в теории Ферми, от энергии ядра в начальном и конечном состояниях. Чтобы формально описать переходы

отрицательный мезон \rightarrow электрон + нейтрино
 положительный мезон \rightarrow позитрон + нейтрино,

нужно ввести связь мезонного поля с электронно-нейтринными волновыми функциями, аналогично рассмотренной в § 14 связи с протон-нейтронными волновыми функциями, причём слова можно построить два инвариантных выражения; соответствующие параметры

1) Хойзингтен, Шэр и Брейт (Hoisington, Share и Breit), Phys. Rev. **56**, 884, 1939.

2) Ср. сноски на стр. 69 и 118.

3) Ферми (Fermi), Zs. f. Phys. **88**, 161, 1934.

связи ($|g_\beta|^2$, $|f_\beta|^2$) выбираются так, чтобы экспериментальные данные — продолжительность жизни β -излучателей¹⁾ и формы β -спектров — передавались как можно лучше. По этой теории свободный мезон неустойчив, так как его масса больше, чем у электрона (позитрона) и нейтрино; он может спонтанно распадаться на эти лёгкие частицы со средним периодом жизни в своей системе покоя²⁾ 10^{-8} сек.³⁾ Мезоны космического излучения действительно неустойчивы, о чём свидетельствуют многие эффекты⁴⁾, но все эти эффекты согласованно между собой указывают на большую продолжительность жизни, именно $3 \cdot 10^{-6}$ сек. Хотя расхождение так велико, что потребует, вероятно, изменения теории⁵⁾, сам факт β -неустойчивости мезона, как таковой, и порядок величины продолжительности жизни мезонов говорят о правильности основных идей теории Юкава.

Если мезотроны имеют свойства, приписываемые им в § 12, 13, 14, то они должны при прохождении через материю испытывать могущее наблюдаться рассеяние на ядрах, причём не только из-за действия электрического поля ядра (ср. § 13), но и благодаря рассмотренному в § 12 ядерному взаимодействию с протонами и нейтронами. По имеющимся наблюдениям это дополнительное рассеяние гораздо меньше, чем можно было бы ожидать из эффективного сечения (14.9), вычисленного по теории возмущений. Но, как заметил Гейзенберг⁶⁾, вычисленное сечение, вероятно, слишком велико, так как метод теории возмущений в применённом приближении не учитывает обратного действия рассеянной мезонной волны на протон-нейтрон. Оце-

1) Длительность периода распада показывает, что связь в этом случае весьма слаба: порядок величины $|g_\beta|^2/hc$ и $|f_\beta|^2/hc$ оказывается $= 10^{-15}$.

2) Движущийся мезон имеет из-за релятивистского удлинения времени большую продолжительность жизни.

3) Бете и Нордгейм (Bethe и Nordheim), Phys. Rev. 57, 998, 1940.

4) Ср. Эйлер и Гейзенберг (Euler и Heisenberg), Erg. d. ex. Naturwiss. 17, 1, 1938; Росси (Rossi), Rev. of Modern Phys. 11, 296, 1939. В камере Вильсона β -распад мезона наблюдали Вильямс, Робертс и Эван (Williams, Roberts и Evans), Nature, 145, 102 и 818, 1940.

5) Одна из возможностей состоит, вероятно, во введении нескольких сортов мезонов (например векторных и псевдоскалярных) (ср. Меллер, Розенфельд и Розенталь (Møller, Rosenfeld и Rosental), Nature 144, 629, 1939; XVIII, 7, 1941 и 60, 612, 1941). По Розенталью, наблюдаемые сравнительно долго живущие частицы космического излучения лучше всего было бы рассматривать как псевдоскалярные; это отвечало бы и наблюдениям над образованными мезонами мягкими ливнями (теоретически рассмотрено Кристи и Кусака (Christy и Kusaka) Phys. Rev. 59, 414, 1941, экспериментальные данные Шейн и Джилл (Schein и Gill) Rev. of Modern Phys. 11, 267, 1939.

6) Zs. f. Phys. 113, 61, 1939.

нивая это обратное действие, отвечающее «радиационному затуханию» при излучении, приходится, из-за отсутствия необходимых квантотеоретических методов, ограничиться вычислением, основанным на принципе соответствия классике; согласно ему, эффективное сечение не возрастает неограниченно, как (14.9), а убывает после прохождения максимума¹⁾, причём из-за сильной связи между мезоном и ядром этот максимум лежит при сравнительно низких энергиях мезона (несколько энергий покоя мезона). Поэтому не кажется исключением, что этот эффект затухания в самом деле отвечает за малость сечения рассеяния²⁾.

Как пример того, что мезонная теория бросает свет и на другие вопросы физики ядра, упомянем проблему магнитного момента протона и нейтрона. Если бы эти частицы взаимодействовали только с электромагнитным полем, они обладали бы, поскольку они подчиняются уравнению Дирака, магнитными моментами 1 и 0 в ядерных магнетонах ($eh/2Mc$), отвечающими их зарядам. Но благодаря связи с полем заряженных мезонов может происходить непрямо дополнительное взаимодействие с внешними магнитными полями, т. е. мезонное поле, окружающее протон-нейтрон, даёт дополнительный магнитный момент. Чтобы вычислить его, надо комбинировать выражения для возмущающих энергий § 13 и 14 и провести расчёт до третьего приближения³⁾.

Так как входящие в результат интегралы по импульсному пространству без обрезания расходятся, теория не может дать численных значений магнитного момента; но качественно она объясняет тот опытный факт, что момент протона отличен от 1, а момент нейтрона — от 0⁴⁾, и даёт указание о соотношении между

1) Баба, Proc. Indian. Acad. Sc. **11**, 247, 1940 и Proc. Roy. Soc. **178**, 314, 1941; Фирц, Helv. Phys. Acta, **14**, 257, 1941. В этих работах расходящиеся инерционные эффекты исключены по методу Дирака, тогда как Гейзенберг оставляет их, делая конечными с помощью обрывающих множителей.

2) Другие возможные объяснения (существование других состояний протон-нейтрона со значениями заряда и спина, отличными от обыкновенных) рассматривались Баба (Bhabha), Proc. Indian. Acad. Sc. **11**, 347, 1940 и Гайтлером и Ма (Heitler и Ma), Proc. Roy. Soc. **176**, 368, 1940. (Теперь известно, что эти рассмотренные эквивалентны. Прим. перев.)

3) Фрелих, Гайтлер и Кеммер (Fröhlich, Heitler и Kemmer), Proc. Roy. Soc. **166**, 154, 1938.

4) Фриш и Штерн (Frisch и Stern), Zs. f. Phys. **85**, 4, 1933; Келлог, Раби, Рэмси и Захарьяс (Kellogg, Rabi, Ramsey и Zacharias), Phys. Rev. **56**, 728, 1939; Милльман и Куш (Millman и Kusch), Phys. Rev. **60**, 91, 1941; Альварец и Блох (Alvarez и Bloch), Phys. Rev. **57**, 111, 1940. Магнитный момент протона, по данным Раби и его сотрудников, равен $2,7896 \pm 0,0008$ ядерных магнетонов, а нейтрона, по Альварцу и Блоху, — $1,935 \pm 0,02$ тех же единиц.

моментами. Именно, так как мезонные поля в окрестности протона и нейтрона отличаются только знаком их плотности заряда, то в этом (третьем) приближении теории возмущения перевес момента протона над ядерным магнетонном равен по абсолютной величине моменту нейтрона, тогда как знаки их обратны (т. е. при параллельных механических моментах спина соответствующие магнитные моменты антипараллельны). Это предсказание теории, могущее иметь, конечно, только приближенный характер, подтверждается измерениями¹⁾.

В основном состоянии дейтрона, где спины протона и нейтрона направлены одинаково, магнитные моменты, обусловленные мезонным полем, приблизительно взаимно уничтожаются, так что момент дейтрона в круглых числах равен одному ядерному магнетону²⁾.

1) Ср. предыдущее примечание.

2) $0,8565 \pm 0,0006$ ядерных магнетонов, по измерениям Раби и сотрудников. В пределах ошибок измерения магнитные моменты протона и нейтрона в основном состоянии дейтрона складываются. Но благодаря упоминавшейся добавке 3D к 3S -волновой функции можно ожидать на самом деле небольшого отклонения от аддитивности [ср. Парита и Швингер (Parita и Schwinger), Phys. Rev. 59, 436, 1941].

ГЛАВА IV

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

§ 16. Электромагнитное поле в вакууме

Электромагнитное поле отличается от векторного мезонного поля в двух смыслах: во-первых, оно действительно и электрически нейтрально и, во-вторых, равен нулю параметр μ , а с ним и масса покоя $m = \mu h/c$ соответствующих корпускул — световых квантов или фотонов. Чтобы выявить аналогию с мезонным полем, насколько она существует, мы обозначим составляющие электромагнитного поля через $f_{\mu\nu}$:

$$f_{4j} = -f_{j4} = i\mathfrak{E}_j, \quad f_{23} = f_{32} = \mathfrak{H}_1, \dots \quad (16.1)$$

Тогда, как известно, уравнения Максвелла для пустоты показывают, что антисимметричный тензор $f_{\mu\nu}$ может быть представлен как ротор четырёхмерного потенциала ϕ_ν :

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\nu}, \quad (16.2)$$

и что его дивергенция обращается в нуль:

$$\sum_\mu \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0. \quad (16.3)$$

Это совпадает с уравнениями (12.3, 4), если в них положено $\mu = 0$.

При описании поля $f_{\mu\nu}$ четырёхмерным потенциалом ϕ_ν надо обратить внимание на то, что (16.2) определяет ϕ_ν неоднозначно: напряжения поля $f_{\mu\nu}$ инвариантны относительно преобразования калибровки

$$\phi_\nu \rightarrow \phi_\nu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu}, \quad (16.4)$$

где Λ — произвольная скалярная функция. Так как все электромагнитные действия определяются только величиной напряжения поля, то теория должна быть сформулирована так, чтобы все измеримые величины были инвариантны относительно калибровки. В этом состоит дальнейшее отличие от мезонной теории, которое, впрочем, связано с исчезновением μ [для $\mu \neq 0$ уравнения поля (12.1 до 4) не обладают группой калибровки].

Если выбрать функцию Лагранжа, аналогичную (12.5),

$$L = -\frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\nu} \right)^2,$$

то получатся уравнения поля (12.6) с $\mu = 0$:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\nu} \right) = 0$$

в согласии с (16.2, 3). Соответственно (12.8), будет $\pi_\nu = f_{\nu 4}/ic$, так что снова $\pi_4 \equiv 0$. Но необходимое для канонического квантования исключение ϕ_4 здесь не может быть произведено тем же способом, что в § 12, ибо там, как подчёркивалось, было существенно допущение $\mu \neq 0$. Хотя эта цель, как показали Гейзенберг и Паули¹⁾, и может быть достигнута, мы предпочтём иную каноническую формулировку, позволяющую избежать трудности, связанной с тождественным обращением в нуль π_4 ²⁾.

Пусть функция Лагранжа имеет вид:

$$L = -\frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\nu} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{\mu} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\mu} \right)^2. \quad (16.5)$$

Тогда уравнения поля (1.2) выглядят так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi_\nu} - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\mu}} &= \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\nu} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\mu} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\mu} = \\ &= \sum_{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} \phi_\nu \equiv \square \phi_\nu = 0. \end{aligned} \quad (16.6)$$

¹⁾ Zs. f. Phys. 56, 1, 1929 и 59, 168, 1930.

²⁾ Ферми (Fermi), Rendiconti d. R. Acc. d. Lincei 9, 881, 1929 и 12, 431, 1930, Rev. of Modern Physics 4, 87, 1932. Мы присоединяемся здесь к представлению Дирака, Фока и Подольского (Dirac, Fock и Podolsky) в Phys. Zs. d. Sowjetunion 2, 468, 1932.

Для напряжённостей поля $f_{\mu\nu}$, определённых по (16.2), получается:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial \chi}{\partial x_{\nu}} = 0, \quad (16.7)$$

где

$$\chi = \sum_{\mu} \frac{\partial \phi_{\mu}}{\partial x_{\mu}}. \quad (16.8)$$

Чтобы (16.7) совпадало с требуемыми уравнениями Максвелла, χ должно быть постоянно в пространстве и во времени. Мы утверждаем, что для этого достаточно наложить на χ и $\partial\chi/\partial t$ требование, чтобы при $t=0$ они всюду исчезали, что имеет смысл начальных условий:

$$\chi = 0 \text{ и } \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0. \quad (16.9)$$

Для доказательства представим χ разложенным в произвольной точке по степеням t :

$$\chi = \chi_{t=0} + \frac{1}{1!} t \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right)_{t=0} + \frac{1}{2!} t^2 \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right)_{t=0} + \dots;$$

первые два члена этого ряда исчезают по (16.9), но так как, по (16.6, 8), $\square \chi = 0$, то при $t=0$ обращаются в нуль и $\partial^2 \chi / \partial t^2 = c^2 \Delta \chi$ и $\partial^3 \chi / \partial t^3 = c^2 \Delta \partial \chi / \partial t$, $\partial^4 \chi / \partial t^4 = c^4 \Delta \Delta \chi$ и вообще все высшие члены, следовательно, в области сходимости ряда, могущей быть сколь угодно продолженной, χ исчезает тождественно:

$$\chi = 0. \quad (16.10)$$

Добавление начальных условий (16.9) выделяет из всей совокупности решений более общей задачи (16.6) максвелловские поля¹⁾.

Чтобы перенести этот ход идей в квантовую теорию, надо перейти сначала к гамильтоновскому формализму. Поля, кано-

¹⁾ Дополнительное условие (16.10) ограничивает группу преобразования калибровки потенциала: скалярная функция Λ в (16.4) должна удовлетворять волновому уравнению $\square \Lambda = 0$. Каждое более общее поле потенциала легко можно перекалибровать так, чтобы выполнялось условие (16.10).

тически сопряжённые с потенциалами ϕ_ν , по (16.5), таковы:

$$\pi_\nu = \frac{1}{ic} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_4}} = \frac{1}{ic} \left\{ \frac{\partial \phi_4}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_4} - \delta_{\nu 4} \sum_\mu \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\mu} \right\},$$

так что по (16.1, 2 и 8):

$$\pi_j = \frac{1}{ic} f_{j4} = -\frac{1}{ic} \mathfrak{E}_j, \quad \pi_4 = \frac{i}{c} \sum_\mu \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{i}{c} \chi. \quad (16.11)$$

Решение относительно $\dot{\phi}_\nu$ следующее:

$$\dot{\phi}_j = c^2 \pi_j + ic \frac{\partial \phi_4}{\partial x_j}, \quad \dot{\phi}_4 = c^2 \pi_4 - ic \sum_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j},$$

или в векторной записи:

$$\dot{\phi} = c^2 \pi + ic \operatorname{grad} \phi_4, \quad \dot{\phi}_4 = c^2 \pi_4 - ic \operatorname{div} \phi. \quad (16.12)$$

Отсюда получается для гамильтоновой функции (1.5):

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2} c^2 (|\pi|^2 + \pi_4^2) + \frac{1}{2} |\operatorname{rot} \phi|^2 + \\ + ic \{ (\pi \cdot \operatorname{grad} \phi_4) - \pi_4 \operatorname{div} \phi \}; \end{aligned} \quad (16.13)$$

для проквантованной теории можно теперь ввести без всякого изменения перестановочные соотношения (1.7):

$$\left. \begin{aligned} [\phi_\nu(x), \phi_{\nu'}(x')] &= [\pi_\nu(x), \pi_{\nu'}(x')] = 0, \\ [\pi_\nu(x), \phi_{\nu'}(x')] &= \frac{\hbar}{i} \delta_{\nu\nu'} \delta(x - x'). \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

Следующие отсюда канонические уравнения поля для $\dot{\phi}_\nu$ совпадают с (16.12)¹⁾; с другой стороны, для $\dot{\pi}_\nu$ получается:

$$\dot{\pi} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \phi - ic \operatorname{grad} \pi_4, \quad \dot{\pi}_4 = ic \operatorname{div} \pi. \quad (16.15)$$

Если из этих уравнений исключим π и π_4 , то снова придём к уравнениям поля (16.6)

$$\ddot{\phi} = c^2 \Delta \phi, \quad \ddot{\phi}_4 = c^2 \Delta \phi_4. \quad (16.16)$$

¹⁾ Ср. аналогичные вычисления в § 12, ведущие к уравнениям (12.17, 18).

Исключение ψ и ψ_4 даёт

$$\ddot{\pi} = c^2 \Delta \pi, \quad \ddot{\pi}_4 = c^2 \Delta \pi_4. \quad (16.17)$$

Так как уравнения (4.17) (при $\mu = 0$) выполнены по (16.16), то для зависящих от времени операторов

$$\psi_\nu(x, t) = e^{\frac{it}{\hbar} H} \psi_\nu(x) e^{-\frac{it}{\hbar} H} \quad (16.18)$$

имеют место правила перестановки (4.28), где $d_{\sigma\sigma'}^{(1)}$ равно $c^2 \delta_{\sigma\sigma'}$, что видно из сравнения (4.21) с (4.16):

$$[\psi_\nu(x, t), \psi_{\nu'}(x', t')] = \frac{\hbar}{i} c^2 \delta_{\nu\nu'} \cdot D(x - x', t - t'). \quad (16.19)$$

Эти правила перестановки, эквивалентные по § 4 каноническим перестановкам (16.14), очевидно, инвариантны относительно преобразований Лорентца. D означает здесь, конечно, инвариантную функцию (4.25) со специальным значением параметра $\mu = 0$:

$$D(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk e^{ikx} \frac{\sin(tc |k|)}{c |k|} \quad (16.20)$$

(инвариантная D -функция Иордана и Паули)¹⁾. Если ещё ввести зависящие от времени операторы напряжённостей поля:

$$f_{\mu\nu}(x, t) = e^{\frac{it}{\hbar} H} f_{\mu\nu}(x) e^{-\frac{it}{\hbar} H} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_\nu(x, t) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi_\mu(x, t),$$

то для них из (16.19) следуют правила перестановки²⁾:

$$[f_{\mu\nu}(x, t), f_{\mu'\nu'}(x', t')] = \frac{\hbar}{i} c^2 \left\{ \delta_{\nu\nu'} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_{\mu'}} - \delta_{\nu\mu'} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_{\nu'}} - \delta_{\mu\nu'} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_{\mu'}} + \delta_{\mu\mu'} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_{\nu'}} \right\} D(x - x', t - t').$$

¹⁾ См. сноску 1 на стр. 33.

²⁾ Эти правила и соответствующие соотношения неопределённости (4.34) дискутировались Бором и Розенфельдом в отношении мысленного эксперимента для измерения напряжённости поля с оптимальной точностью в двух областях пространства — времени (об этом см. конец § 4).

Поле, определённое гамильтоновой функцией (16.13), как и соответствующее классическое поле, слишком общее; в самом деле, канонические уравнения поля (16.12, 15) эквивалентны уравнениям (16.7), следовательно, их общность больше, чем максвелловских уравнений. Чтобы выделить максвелловские поля, мы попробуем снова наложить начальные условия, чтобы χ , т. е., по (16.11), π_4 , исчезало во всей области пространства—времени. Правда, мы не можем потребовать, чтобы оператор π_4 или χ исчезал как таковой; это противоречило бы перестановкам (16.14). Но достаточно потребовать, чтобы оператор π_4 или χ , применённый к шредингеровской функции, давал в результате нуль.

Чтобы выяснить это подробнее, рассмотрим шредингеровскую функцию системы: $F = F(t, q)$. Мы напишем здесь для совокупности переменных системы ($q_j = \psi_j^{(s)}$ в обозначении § 1; по разложению Фурье (5.1), вместо них можно употреблять и коэффициенты Фурье $q_{\sigma, k}$ или $q_k^{(\sigma)}$, о чём см. ниже) F — это решение уравнения Шредингера:

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H \right) F(t, q) = 0,$$

где H — определённый по (16.13) интегральный оператор Гамильтона ($H = \int dx H$, $\partial H / \partial t = 0$). Так как F в момент времени $t = 0$ даётся как функция q , то его значение в момент t получается путём применения оператора $e^{-\frac{it}{\hbar} H}$ к $F(0, q)$:

$$F(t, q) = e^{-\frac{it}{\hbar} H} F(0, q), \quad (16.21)$$

ибо эта функция удовлетворяет уравнению Шредингера и переходит при $t = 0$ в $F(0, q)$. Тогда указанное требование гласит:

$$\chi(x) \cdot F(t, q) = 0 \text{ или } \pi_4(x) \cdot F(t, q) = 0. \quad (16.22)$$

Если применить к функции, стоящей слева, оператор $e^{\frac{it}{\hbar} H}$ и выразить $F(t, q)$, согласно (16.21), через $F(0, q)$, то из уравнения (16.22) будет следовать, что зависящий от времени оператор

$$\chi(x, t) = e^{\frac{it}{\hbar} H} \chi(x) e^{-\frac{it}{\hbar} H}, \quad (16.23)$$

применённый к $F(0, q)$, должен дать нуль:

$$\chi(x, t) \cdot F(0, q) = 0. \quad (16.24)$$

Оператор $\chi(x, t)$, как и соответствующую классическую функцию, можно разложить в ряд Тэйлора:

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \chi^{(n)}(x) = \\ &= \chi(x) + \frac{1}{1!} t \dot{\chi}(x) + \frac{1}{2!} t^2 \ddot{\chi}(x) + \dots \end{aligned} \quad (16.25)$$

[ср. (4.7) и относящуюся к нему сноску].

Остаётся показать, что требование (16.22 или 24) эквивалентно начальному условию и потому выполнимо. По образцу классического начального условия (16.9) мы потребуем:

$$\chi(x) \cdot F(0, q) = 0, \quad \ddot{\chi}(x) \cdot F(0, q) = 0, \quad (16.26)$$

что по (16.11 и 15) означает:

$$\pi_4(x) \cdot F(0, q) = 0, \quad \operatorname{div} \pi(x) \cdot F(0, q) = 0. \quad (16.27)$$

Эти уравнения надо рассматривать как условия, ограничивающие выбор начальной шредингеровской функции $F(0, q)$: допустимы только такие функции $F(0, q)$, которые обращаются в нуль от применения операторов $\pi_4(x)$ и $\operatorname{div} \pi(x)$ при произвольном x . Если зависящий от времени оператор (16.25) применён к $F(0, q)$, то оба первых члена ряда дают по (16.26) нуль. Но то же относится и к дальнейшим членам, ибо, по (16.17),

$$\begin{aligned} \ddot{\chi} &= c^2 \Delta \chi, & \ddot{\dot{\chi}} &= c^2 \Delta \dot{\chi}, \\ \dots & & & \\ \chi &= c^4 \Delta \Delta \chi, & & \end{aligned} \quad \text{и т. д.}$$

тогда как из (16.26) следует:

$$\begin{aligned} \Delta \chi(x) \cdot F(0, q) &= 0, & \Delta \dot{\chi}(x) \cdot F(0, q) &= 0, \\ \Delta \Delta \chi(x) \cdot F(0, q) &= 0, & & \end{aligned} \quad \text{и т. д.}$$

Так получаются уравнения (16.24 и 22) как следствие начальных условий (16.26 или 27). С помощью (16.22) далее следует:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(H + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \pi_4(x) \cdot F(t, q) = \\ &= \left(H \pi_4(x) + \pi_4(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right) F(t, q) = \\ &= [H \pi_4(x) - \pi_4(x) H] F(t, q) = \frac{\hbar}{i} \dot{\pi}_4(x) \cdot F(t, q), \end{aligned} \quad (16.28)$$

или по (16.15):

$$\operatorname{div} \pi(x) \cdot F(t, q) = 0. \quad (16.29)$$

Итак, операторы $\pi_4(x)$ и $\operatorname{div} \pi(x)$ обращают шредингеровскую функцию в нуль при всех $t > 0$, если это имело место в начальный момент ($t = 0$).

Результат этого рассмотрения тот, что мы можем формулировать задачу о максвелловском поле в вакууме с помощью гамильтоновой функции (16.13), если только к уравнению Шредингера добавлены начальные условия (16.26 или 27) или эквивалентное им «дополнительное условие» (16.22). Проверим ещё, что при этом уравнения Максвелла имеют смысл операторных. Прежде всего каноническое уравнение для $\dot{\pi}$ (16.15) вместе с дополнительным условием (16.22) имеет вид:

$$(\dot{\pi} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi) \cdot F(t, q) = 0;$$

но так как по (16.1, 11)

$$\mathfrak{E} = -c\dot{\pi}, \quad \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \psi,$$

то также можно написать:

$$\left(-\frac{1}{c} \mathfrak{E} + \operatorname{rot} \mathfrak{H} \right) \cdot F(t, q) = 0;$$

(16.29) означает

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} \cdot F(t, q) = 0.$$

С другой стороны, из (16.12) следует, так как ротор оператора $(\dot{\psi} - c^2\pi)$ исчезает, что

$$\left(\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} \right) = 0,$$

тогда как $\mathfrak{H} = \text{rot } \phi$ по определению не имеет источников:

$$\text{div } \mathfrak{H} = 0.$$

Тем самым получены все уравнения поля. Образум еще средние значения полей¹⁾:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{E}}(x, t) &= \int dq F^*(t, q) \cdot \mathfrak{E}(x) \cdot F(t, q), \\ \bar{\mathfrak{H}}(x, t) &= \int dq F^*(t, q) \cdot \mathfrak{H}(x) \cdot F(t, q);\end{aligned}$$

они удовлетворяют как функции пространства и времени уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathfrak{E}}}{\partial t} + \text{rot } \bar{\mathfrak{H}} &= 0, & \text{div } \bar{\mathfrak{E}} &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathfrak{H}}}{\partial t} + \text{rot } \bar{\mathfrak{E}} &= 0, & \text{div } \bar{\mathfrak{H}} &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно, распространение волнового поля $\bar{\mathfrak{E}}(x, t)$ и $\bar{\mathfrak{H}}(x, t)$ в пустоте происходит по законам электромагнитной теории света.

Надо упомянуть, что из-за дополнительного условия (16.22) оператор Гамильтона H в уравнении Шредингера может быть заменён более простым оператором. Именно, если прибавить к H (16.13) пространственную дивергенцию

$$-ic \text{div} (\pi \phi_4),$$

получится эквивалентный оператор Гамильтона

$$\frac{1}{2} c^2 (|\pi|^2 + \pi_4^2) + \frac{1}{2} |\text{rot } \phi|^2 - ic \{ \phi_4 \cdot \text{div } \pi + \text{div } \phi \cdot \pi_4 \}.$$

Но в применении к шредингеровской функции $F(t, q)$ все члены, содержащие множители π_4 или $\text{div } \pi$, дают нуль вследствие (16.22, 29), следовательно, H в уравнении Шредингера можно заменить на $H_0 = \int dx H_0$, где

$$H_0 = \frac{1}{2} \{ c^2 |\pi|^2 + |\text{rot } \phi|^2 \} = \frac{1}{2} \{ |\mathfrak{E}|^2 + |\mathfrak{H}|^2 \}. \quad (16.30)$$

¹⁾ Шредингеровская функция нормирована на 1:

$$\int dq F^*(t, q) F(t, q) = 1.$$

H_0 тождественно с известной плотностью энергии электромагнитного поля¹⁾, т. е. $H_0 = -T_{44}$, где электромагнитный тензор энергии-импульса определён, как обычно:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\rho} (f_{\mu\rho} f_{\nu\rho} + f_{\nu\rho} f_{\mu\rho}) - \delta_{\mu\nu} \cdot \frac{1}{4} \sum_{\rho\sigma} f_{\rho\sigma}^2. \quad (16.31)$$

Как и в случае векторного мезонного поля (§ 12), $T_{\mu\nu}$ от-лично от канонического тензора энергии-импульса (2.8), ко-торый несимметричен. Тем не менее, для средних значений $T_{\mu\nu}$ действуют законы сохранения

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0$$

как следствие максвелловских уравнений. Доказательство мы опускаем, потому что его просто получить по образцу клас-сического.

Произведём теперь снова переход к пространству импуль-сов с помощью рядов Фурье (5.1):

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\nu}(x) &= V^{-1/2} \sum_k q_{\nu, k} e^{ikx}, \\ \pi_{\nu}(x) &= V^{-1/2} \sum_k p_{\nu, k} e^{-ikx}. \end{aligned} \right\} \quad (16.32)$$

Так как ψ_j , π_j ($j=1, 2, 3$) должны быть действительными полями и соответственно эрмитовскими операторами, то, со-образно (5.2), надо потребовать:

$$q_{j, -k} = q_{j, k}^*, \quad p_{j, -k} = p_{j, k}^*; \quad (16.33)$$

тогда как из-за употребления мнимой временной координаты x_4 не ψ_4 , π_4 , а $i\psi_4$, $i\pi_4$ — эрмитовские операторы:

$$q_{4, -k} = -q_{4, k}^*, \quad p_{4, -k} = -p_{4, k}^*. \quad (16.34)$$

Для операторов $q_{\nu, k}$, $p_{\nu, k}$ имеют место канонические перестав-новки (5.4):

$$\left. \begin{aligned} [q_{\nu, k}, q_{\nu', k'}] &= [p_{\nu, k}, p_{\nu', k'}] = 0, \\ [p_{\nu, k}, q_{\nu', k'}] &= \frac{\hbar}{i} \delta_{\nu\nu'} \delta_{kk'}. \end{aligned} \right\} \quad (16.35)$$

¹⁾ Поля \mathcal{E} и \mathcal{H} измерены в единицах Хевисайда. При употребле-нии обычных единиц все энергетические величины надо поделить на 4π .

Будем рассматривать теперь шредингеровскую функцию F как функцию от переменных $q_{\nu, k}$; тогда соответствующие импульсы $p_{\nu, k}$ надо истолковать как дифференциальные операторы

$$p_{\nu, k} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_{\nu, k}},$$

ибо тем самым выполнены перестановочные соотношения (16.35) и притом в согласии с условиями эрмитовости (16.33, 34). Обратимся теперь к дополнительному условию (16.22), которое, по (16.32), имеет вид:

$$\sum_k e^{-ikx} \cdot p_{4, k} F(t, q) = 0.$$

Так как это должно иметь место для всех x , надо, чтобы

$$p_{4, k} F(t, q) \sim \frac{\partial}{\partial q_{4, k}} F(t, q) = 0, \quad (16.36)$$

причём для всех k , т. е. $F(t, q)$ должно быть независимо от $q_{4, k}$. Другой простой результат следует из уравнения (16.29), выведенного из дополнительного условия (16.22):

$$\operatorname{div} \pi(x) \sim \sum_k e^{-ikx} \sum_j k_j p_{j, k} = \sum_k e^{-ikx} (k \cdot p_k),$$

где p_k , как в § 12, представляет трёхмерный вектор с компонентами $p_{1, k}$, $p_{2, k}$, $p_{3, k}$, так что (16.29) означает, что

$$(k \cdot p_k) F(t, q) = 0.$$

Если разложить векторы q_k , p_k с помощью координатных осей $e_k^{(r)}$ (12.29, 30) на продольные и поперечные компоненты

$$\begin{aligned} q_k &= \sum_r e_k^{(r)} q_k^{(r)}, \\ p_k &= \sum_r e_k^{(r)} p_k^{(r)} \quad (e_k^{(1)} \parallel k), \end{aligned} \quad (16.37)$$

то получится:

$$p_k^{(1)} F(t, q) \sim \frac{\partial}{\partial q_k^{(1)}} F(t, q) = 0, \quad (16.38)$$

т. е. F не зависит и от продольных компонент $q_k^{(1)}$. Как существенные компоненты, остаются только поперечные $q_k^{(2)}$ и $q_k^{(3)}$.

Об уравнении Шредингера мы уже знаем, что в нём оператор Гамильтона H может быть заменён на H_0 (16.30). Подстановка рядов Фурье (16.32) даёт:

$$H_0 = \int_V dx H_0 = \frac{1}{2} \sum_k \{ c^2 (p_k^* \cdot p_k) + ([k \cdot q_k^*] \cdot [k \cdot q_k]) \},$$

или, применяя разложение на компоненты (16.37):

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= H^{\text{long}} + H^{\text{tr}}, \\ H^{\text{long}} &= \frac{c^2}{2} \sum_k p_k^{(1)*} p_k^{(1)}, \\ H^{\text{tr}} &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_{r=2,3} \{ c^2 p_k^{(r)*} p_k^{(r)} + k^2 q_k^{(r)*} q_k^{(r)} \}. \end{aligned} \right\} \quad (16.39)$$

Так как (16.38) $H^{\text{long}} F(t, q) = 0$, уравнение Шредингера сводится к

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H^{\text{tr}} \right) F(t, q) = 0. \quad (16.40)$$

После того как этим способом исключены величины $q_{4,k}$ и $q_k^{(1)}$, мы снова перейдём к матричному формализму, чтобы определить собственные значения H^{tr} ; решение можно получить подобно тому, как в случае действительного мезонного поля (§ 6). Аналогично (6.20), мы подставим в (16.37)

$$\left. \begin{aligned} q_k^{(r)} &= \sqrt{\frac{\hbar c}{2 |k|}} (a_k^{(r)} + a_{-k}^{(r)*}), \\ p_k^{(r)} &= \sqrt{\frac{\hbar |k|}{2c}} i (a_k^{(r)*} - a_{-k}^{(r)}). \end{aligned} \right\} \quad (16.41)$$

Этим выполнены условия эрмитовости (16.33) в предположении, что принадлежащие двум векторам k и $-k$ координатные оси $e_k^{(r)}$ и $e_{-k}^{(r)}$ параллельны и одинаково направлены:

$$e_k^{(r)} = + e_{-k}^{(r)}. \quad (16.42)$$

1) Надо обратить внимание на то, что и в классической теории уравнение $\text{div } \pi = 0$ или $\text{div } \mathcal{E} = 0$ приводит к поперечности световых волн.

(Это означает перемену знака в уравнениях (12.30) для половины всех значений k , но эти знаки для дальнейшего несущественны.) Пусть $a_k^{(r)}$, $a_k^{(r)*}$ — матрицы относительно целых чисел $N_k^{(r)} (\geq 0)$, с перестановками

$$[a_k^{(r)}, a_{k'}^{(r')}] = [a_k^{(r)*}, a_{k'}^{(r')*}] = 0, \quad [a_k^{(r)}, a_{k'}^{(r')*}] = \delta_{rr'} \delta_{kk'}; \quad (16.43)$$

тогда будет

$$[q_k^{(r)}, q_{k'}^{(r')}] = [p_k^{(r)}, p_{k'}^{(r')}] = 0, \quad [p_k^{(r)}, q_{k'}^{(r')}] = \frac{\hbar}{i} \delta_{rr'} \delta_{kk'},$$

что вместе с (16.37) отвечает правилам перестановки (16.35). Матрицы $(a_k^{(r)*} a_k^{(r)})$ диагональны и имеют собственные значения

$$(a_k^{(r)*} a_k^{(r)})_N = N_k^{(r)}. \quad (16.44)$$

Для H^{tr} (16.39) получаем, с помощью (16.41), диагональную матрицу

$$H^{\text{tr}} = \frac{\hbar c}{2} \sum_k \sum_{r=2,3} |k| (a_k^{(r)*} a_k^{(r)} + a_k^{(r)} a_k^{(r)*})$$

с собственными значениями

$$H_N = \sum_k \hbar c |k| \cdot (N_k^{(2)} + N_k^{(3)} + 1). \quad (16.45)$$

Если, в соответствии с применённой матричной схемой, шредингеровская функция F рассматривается как функция от переменных $N_k^{(r)}$, то общее решение уравнения Шредингера таково:

$$F(t, N) = F(0, N) e^{-\frac{it}{\hbar} H_N};$$

$F(0, N)$ — «амплитуда вероятности» стационарного состояния максвелловского поля, характеризуемого квантовыми числами $N_k^{(r)}$. Помимо нулевой энергии $\hbar c \sum_k |k|$ [ср. (6.23)], значения энергии (16.45) отвечают корпускулярному толкованию света: $N_k^{(2)} + N_k^{(3)}$ — это число квантов с импульсом $\hbar k$ и энергией $\hbar c |k|$, причём верхние индексы ($r=2, 3$) отвечают поперечным линейным поляризациям.

Чтобы подтвердить это толкование, рассмотрим импульс поля, плотность которого в классической теории даётся, как

известно, выражением $1/c \cdot [\mathcal{E} \cdot \mathcal{H}]$; эрмитовский оператор, в согласии с (16.31) ($\mathbf{G}_j = T_{4j}/ic$), таков:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{1}{2c} \{[\mathcal{E} \cdot \mathcal{H}] - [\mathcal{H} \cdot \mathcal{E}]\} = \\ &= -\frac{1}{2} \{[\pi \cdot \text{rot } \psi] - [\text{rot } \psi \cdot \pi]\}. \end{aligned} \quad (16.46)$$

Подставим сюда опять ряды Фурье (16.32) и образуем общий импульс $G = \int_V dx \mathbf{G}$. Для сокращения не будем выписывать члены, содержащие множитель $p_k^{(1)}$, поскольку полагаем, что оператор \mathbf{G} всегда применён к шредингеровской функции F , и при этом учитываем (16.38). Тогда получится

$$G = -\frac{1}{2} \sum_k k \sum_{r=2,3} (p_k^{(r)} q_k^{(r)} + q_k^{(r)} p_k^{(r)}) \quad (16.47)$$

и, с учётом (16.41)¹⁾,

$$G = \frac{h}{2} \sum_k k \sum_{r=2,3} (a_k^{(r)*} a_k^{(r)} + a_k^{(r)} a_k^{(r)*}).$$

Эта диагональная матрица имеет собственные значения

$$G_N = \sum_k h k \cdot (N_k^{(2)} + N_k^{(3)}), \quad (16.48)$$

которые, как и ожидалось, представляют результирующий импульс всех фотонов.

Конечно, каждое состояние $(N_k^{(2)}, N_k^{(3)})$ надо считать по одному разу в соответствии с бозевским методом счёта состояний «газа световых квантов».

То обстоятельство, что число световых квантов с данным импульсом представляется суммой двух независимых целых чисел, означает, что световой квант имеет спин с двумя возможными ориентациями. Чтобы вывести это свойство, разложим момент количества движения

$$M = \int dx [x \cdot \mathbf{G}] = -\frac{1}{2} \int dx [x \cdot \{[\pi \cdot \text{rot } \psi] - [\text{rot } \psi \cdot \pi]\}] \quad (16.49)$$

¹⁾ Ср. аналогичные формулы (6.26, 27, 28).

по образцу формул (12.56 до 60) на два момента M^0 и M' ; если снова отбросить члены с множителем $\text{div } \pi$ [учитывая (16.26 и 38)], то выйдет:

$$\begin{aligned} M &= M^0 + M', \\ M_{j'j}^0 &= -\frac{1}{2} \int dx \sum_i \left\{ x_j \left(\pi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j'}} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \pi_i \right) - \right. \\ &\quad \left. - x_{j'} \left(\pi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j'}} \pi_i \right) \right\}, \\ M'_{j'j} &= - \int dx \{ \pi_j \psi_{j'} - \pi_{j'} \psi_j \}. \end{aligned} \quad (16.50)$$

Относительно M^0 можно снова показать, что его среднее значение не зависит от поляризации световых квантов; следовательно, спиновый момент должен содержаться в M' . Переход к пространству импульсов даёт:

$$M' = \sum_k M'_{(k)}, \quad M'_{(k)} = - [p_k \cdot q_k]. \quad (16.51)$$

Как и в § 12, мы можем изучать каждый член суммы $M'_{(k)}$ в отдельности, но здесь невозможно, в противовес § 12, производить вычисления в системе покоя, так как световой квант не обладает ею, будучи частицей с нулевой массой покоя (в каждой системе отсчёта скорость $d\omega_k/d|k| = c$): Так что мы выберем в сумме (16.51) произвольный член $M'_{(k)}$ и с ним $M'_{(-k)}$, учитывая, что операторы q_k, p_k , по (16.41), действуют на числа световых квантов $N_k^{(r)}$ и $N_{-k}^{(r)}$, и рассмотрим продольную составляющую момента ($M'_{(k)} + M'_{(-k)}$), т. е. её проекцию на направление движения светового кванта [$e_k^{(1)} = e_{-k}^{(1)}$]:

$$\begin{aligned} (M'_{(k)} + M'_{(-k)}) \cdot e_k^{(1)} &= \\ &= - \{ p_k^{(2)} q_k^{(2)} - p_k^{(3)} q_k^{(2)} + p_{-k}^{(2)} q_{-k}^{(3)} - p_{-k}^{(3)} q_{-k}^{(2)} \}. \end{aligned}$$

В матричных представлениях (16.41) это переписется так:

$$\begin{aligned} (M'_{(k)} + M'_{(-k)}) \cdot e_k^{(1)} &= \\ &= \hbar i \{ (-a_k^{(2)*} a_k^{(3)} + a_k^{(3)*} a_k^{(2)}) + (-a_{-k}^{(2)*} a_{-k}^{(3)} + a_{-k}^{(3)*} a_{-k}^{(2)}) \}. \end{aligned}$$

Здесь разделены слагаемые фотонов с импульсами $+ \hbar k$ и $- \hbar k$. Оба слагаемых имеют вид (12.61) и могут быть

приведены к диагональному виду каноническим преобразованием типа (12.62), что соответствовало бы переходу от линейной поляризации к круговой. По (12.63), результат гласит: продольная компонента спина световых квантов с импульсом hk имеет собственные значения

$$h(N_{k+} - N_{k-}),$$

где N_{k+} и N_{k-} — неотрицательные целые числа, сумма которых равна общему числу световых квантов с импульсом hk

$$N_{k+} + N_{k-} = N_k^{(2)} + N_k^{(3)}.$$

Этот результат можно истолковать наглядно в том смысле, что спин фотона имеет величину h (фотон-корпускула со «спином 1»), причём возможны только параллельная и антипараллельная установки спина относительно направления движения. N_{k+} означает число параллельных спинов, а N_{k-} — число антипараллельных

§ 17. Взаимодействие с электронами

При наличии электрических зарядов и токов уравнения Максвелла, как известно, пишутся так:

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \sum_\mu \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = -\frac{1}{c} s_\nu, \quad (17.1)$$

где, как и раньше, $s_4/ic = \rho$ — плотность заряда, а s — плотность тока. В классической теории s_ν — функции пространства и времени, подчинённые уравнению непрерывности

$$\sum_\nu \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} s = 0. \quad (17.2)$$

Если, в частности, заряды точечные, равные e_n , и движутся по известным траекториям $x = x_n(t)$, то плотность заряда в соответствующей точке имеет особенность $e_n \cdot \delta(x - x_n)$, а плотность тока равна плотности заряда, умноженной на поступательную скорость

$$\left. \begin{aligned} \rho(x, t) &= \sum_n e_n \delta(x - x_n(t)), \\ s(x, t) &= \sum_n e_n \dot{x}_n(t) \delta(x - x_n(t)); \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

уравнение непрерывности выполнено, потому что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_n e_n (\dot{x}_n(t) \cdot \text{grad } \delta(x - x_n(t))) = - \text{div } s.$$

Будем сначала рассматривать ρ и s как заданные функции пространства — времени и обобщим на этот случай канонический формализм, применённый в § 16. Пусть

$$L = L^0 + L', \quad L' = \frac{1}{c} \sum_{\nu} s_{\nu} \psi_{\nu}, \quad (17.4)$$

где L^0 — функция Лагранжа поля в вакууме (16.5). Вместо уравнений поля (16.6), очевидно, тогда получится

$$\square \psi_{\nu} + \frac{1}{c} s_{\nu} = 0 \quad (17.5)$$

или

$$\sum_{\mu} \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial \chi}{\partial x_{\nu}} + \frac{1}{c} s_{\nu} = 0, \quad (17.6)$$

где χ снова определено по (16.8):

$$\chi = \sum_{\mu} \frac{\partial b_{\mu}}{\partial x_{\mu}}.$$

Из (17.5), вместе с уравнением непрерывности (17.2), следует.

$$\square \chi = \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \square \psi_{\mu} = - \frac{1}{c} \sum_{\mu} \frac{\partial s_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0.$$

Отсюда, как и в случае поля в вакууме, можно заключить, что, если χ и $\partial \chi / \partial t$ обращаются в 0 при $t=0$, χ вообще исчезает, отчего (17.6) переходит в уравнения Максвелла (17.1). Так как в определяющих канонически сопряжённое поле π_{ν} уравнениях (16.11) ничего не изменяется, функции Лагранжа (17.4) отвечает гамильтонова функция $H^0 + H'$, где H^0 даётся (16.13):

$$H^0 = \frac{1}{2} c^2 (|\pi|^2 + \pi_4^2) + \frac{1}{2} |\text{rot } \psi|^2 + \\ + ic \{ (\pi \cdot \text{grad } \psi_4) - \pi_4 \text{div } \psi \}, \quad (17.7)$$

и где $H' = -L'$ равно

$$H' = -\frac{1}{c} \sum_{\nu} s_{\nu} \phi_{\nu} = -\frac{1}{c} (s \cdot \phi) - i\rho\phi_4. \quad (17.8)$$

Квантование поля можно снова произвести на основании канонических перестановок (16.14) ¹⁾.

Мы откажемся теперь от предположения, что заряды и токи даны, чтобы учесть влияние электромагнитного поля на заряженные поля или частицы, которые должны быть для этого также характеризованы функцией Лагранжа или Гамильтона. Например, по (11.2) функция Лагранжа комплексного скалярного поля Ψ запишется так (если писать для электромагнитных потенциалов ϕ_{ν} вместо Φ_{ν}):

$$-c^2 \left\{ \sum_{\nu} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x_{\nu}} + \frac{i\epsilon}{c} \phi_{\nu} \Psi^* \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_{\nu}} - \frac{i\epsilon}{c} \phi_{\nu} \Psi \right) + \mu \Psi^* \Psi \right\}.$$

Прибавляя сюда ещё L^0 (16.5), получим функцию Лагранжа, описывающую взаимодействие электромагнитного и скалярного полей. В самом деле, отсюда получаются уравнения поля для Ψ и Ψ^* в согласии с (11.1), а уравнения для ϕ_{ν} переходят в (17.5 или 6), если определить четырёхмерный ток скалярного поля s_{ν} по (11.3).

Важнее, чем взаимодействие с гипотетическими скалярными частицами, является взаимодействие с электронами, подчиняющимися волновому уравнению Дирака; этой специальной задачей мы и займёмся. Так как квантование волнового поля электронов с учётом принципа Паули будет произведено только позже (гл. V), то мы должны здесь удовлетвориться описанием электронов в конфигурационном пространстве (волномеханический формализм без «вторичного квантования» ²⁾).

1) При этом дополнительное условие $\chi = 0$, как и в случае вакуума, заменяется операторным уравнением (16.22); см. ниже. Релятивистская инвариантность квантования может быть доказана подобно тому, как в § 7 (мезонное поле в связи со скалярной функцией плотности η). Мы не будем этого делать, так как вопросы инвариантности найдут более общую трактовку в § 18.

2) В том же смысле мы рассматривали и задачу о взаимодействии протон-нейтрона с мезонными полями (§ 9 и 14); но там мы упростили задачу, считая протон-нейтроны покоящимися и бесконечно тяжёлыми, так что их трансляционные степени свободы остались без рассмотрения.

Согласно Дираку, мы припишем n -му электрону следующий оператор Гамильтона:

$$H_{(n)} = m_n c^2 \beta_n + c \left(\alpha_n \cdot \left\{ p_n - \frac{e_n}{c} \psi(x_n) \right\} \right) - e_n \cdot i \psi_4(x_n); \quad (17.9)$$

β_n и α_n (соответственно три компоненты этого вектора) — это известные дираковские матрицы относительно спиновой координаты n -го электрона, p_n означает вектор импульса как дифференциальный оператор относительно вектора x_n :

$$p_n = \frac{\hbar}{i} \text{grad}_n. \quad (17.10)$$

Гамильтонову функцию всей системы (поле плюс электроны) образуем так:

$$H = H^0 + \sum_n H_{(n)}, \quad (17.11)$$

где $H^0 = \int dx H^0$ (17.7) отвечает полю в вакууме. Назовём часть, относящуюся к свободным электронам, H^P ,

$$H^P = \sum_n \left\{ m_n c^2 \beta_n + c (\alpha_n \cdot p_n) \right\}; \quad (17.12)$$

тогда вместо (17.11) можно записать:

$$H = H^0 + H^P + H', \quad (17.13)$$

где H' составляет энергию взаимодействия:

$$H' = - \sum_n e_n \{ (\alpha_n \cdot \psi(x_n)) + i \psi_4(x_n) \}. \quad (17.14)$$

Это выражение для взаимодействия совпадает с (17.8), ибо если туда подставить для плотности заряда и тока электронов

$$\rho(x) = \sum_n e_n \delta(x - x_n), \quad s(x) = c \sum_n e_n \alpha_n \delta(x - x_n) \quad (17.15)$$

[ср. (17.3), α_n отвечает скорости \dot{x}_n], то $\int dx H'$ переходит в H' (17.14). Для заряда (17.15) имеет место закон сохранения в виде операторного уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x) &= \frac{i}{\hbar} [H, \rho(x)] = \frac{i}{\hbar} [H^P, \rho(x)] = \\ &= c \sum_n e_n (\alpha_n \cdot \text{grad}_n \delta(x - x_n)) = - \text{div } s(x). \end{aligned} \quad (17.16)$$

(7.11 или 13) дают уравнение Шредингера

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H\right) F(t, q, q_1, q_2, \dots) = 0. \quad (17.17)$$

Функция Шредингера F зависит, кроме переменных поля q [$=\psi_\nu(x)$ (ср. § 16)], ещё и от электронных координат q_1, q_2, \dots , причём под q_n подразумевают совокупность пространственных и спиновых координат n -го электрона¹⁾.

Движение электронов в поле нам рассматривать не нужно, потому что оно описывается уравнением (17.17), в соответствии с дираковской теорией электрона. Обратимся поэтому снова к рассмотрению поля. Вместо уравнений для пустоты (16.12, 15, 17) на основании (17.13) получаются теперь следующие уравнения [$c H' = \int dx H'$, где H' вида (17.8)]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= c^2 \pi + ic \operatorname{grad} \psi_4, \\ \dot{\psi}_4 &= c^2 \pi_4 - ic \operatorname{div} \psi, \\ \dot{\pi} &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi - ic \operatorname{grad} \pi_4 + \frac{s}{c}, \\ \dot{\pi}_4 &= i(c \operatorname{div} \pi + \rho); \end{aligned} \right\} \quad (17.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi} &= c^2 \Delta \psi + cs, \\ \ddot{\psi}_4 &= c^2 \Delta \psi_4 + cs_4, \\ \ddot{\pi} &= c^2 \Delta \pi + \frac{\dot{s}}{c} + c \operatorname{grad} \rho, \\ \ddot{\pi}_4 &= c^2 \Delta \pi_4. \end{aligned} \right\} \quad (17.19)$$

Эти уравнения отвечают слишком общим уравнениям (17.5, 6); чтобы прийти к максвелловским уравнениям, надо найти соответствие классическому дополнительному условию $\chi = 0$

1) Спиновые координаты, как обычно в волновой механике Дирака, можно представлять индексами у F ; тогда операторы α_n, β_n действуют на n -й спиновый индекс по известным правилам умножения матриц, тогда как относительно остальных спиновых индексов ($n' \neq n$) это единичные матрицы. Вопрос о калибровочной и электромагнитной инвариантности мы рассмотрим в следующем § 18.

или начальным условиям: « $\chi = 0$, $\partial \chi / \partial t = 0$ при $t = 0$ ». По второму уравнению (17.18)

$$\chi \equiv \frac{1}{ic} \dot{\psi}_4 + \operatorname{div} \psi = -ic\pi_4.$$

Как и в случае вакуума, мы наложим на функцию Шредингера F начальные условия

$$\left. \begin{aligned} \pi_4(x) \cdot F(0, q, q_1, \dots) &= 0, \\ \dot{\pi}_4(x) \cdot F(0, q, q_1, \dots) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.20)$$

Так как, по (17.19),

$$\ddot{\pi}_4 = c^2 \Delta \pi_4, \quad \dddot{\pi}_4 = c^2 \Delta \dot{\pi}_4, \quad \pi_4^{(4)} = c^4 \Delta \Delta \pi_4 \text{ и т. д.,}$$

то, подобно тому как и в § 16, отсюда следует, что все операторы $\ddot{\pi}_4(x)$, $\dddot{\pi}_4(x)$, $\pi_4^{(4)}(x)$ и т. д., применённые к $F(0, q, \dots)$, дают нуль, и с помощью формул (16.23, 25, 21) (где $\chi = -ic\pi_4$ и $H = H^0 + H^P + H'$) можно, как и в случае пустоты, заключить отсюда о справедливости уравнений (16.22, 24, 28):

$$\pi_4(x) \cdot F(t, q, q_1, \dots) = 0, \quad \dot{\pi}_4(x) \cdot F(t, q, q_1, \dots) = 0. \quad (17.21)$$

Следовательно, дополнительные условия для F выполняются для $t > 0$, если они выполнялись при $t = 0$. Но, по (17.18), второе дополнительное условие (17.21) означает, что

$$(c \operatorname{div} \pi + \rho) \cdot F(t, q, q_1, \dots) = 0, \quad (17.22)$$

или, так как $\pi_j = f_{j4}/ic = -\mathfrak{E}_j/c$:

$$(\operatorname{div} \mathfrak{E} - \rho) \cdot F(t, q, q_1, \dots) = 0,$$

что отвечает классическому уравнению $\operatorname{div} \mathfrak{E} = \rho$. Далее, третье уравнение (17.18) в связи с (17.21) даёт

$$(\mathfrak{E} - c \operatorname{rot} \mathfrak{H} + s) \cdot F(t, q, q_1, \dots) = 0,$$

и все остальные уравнения Максвелла справедливы без изменения для вакуума. В частности, отсюда следует, что

средние значения $\overline{\mathcal{E}}(x, t)$, $\overline{\mathcal{H}}(x, t)$, $\overline{s}(x, t)$, $\overline{\rho}(x, t)$ удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\mathcal{E}}}{\partial t} + \text{rot } \overline{\mathcal{H}} &= \frac{1}{c} \overline{s}, \quad \text{div } \overline{\mathcal{E}} = \overline{\rho}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial t} + \text{rot } \overline{\mathcal{E}} &= 0, \quad \text{div } \overline{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned}$$

Тем самым квантовомеханически перетолковываются классические уравнения поля; роль классических полей здесь играют средние значения величин поля. Соответственно, для тензора энергии-импульса (16.31) получатся, путём известного из классической теории вычисления, законы сохранения в виде

$$\sum_{\mu} \frac{\partial \overline{T}_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = \frac{1}{c} \overline{\sum_{\mu} s_{\mu} f_{\mu\nu}}.$$

Благодаря дополнительным условиям можно снова упростить оператор Гамильтона в уравнении Шредингера. Прежде всего в H^0 (17.7) отпадают члены, содержащие π_4 . Далее, член

$$ic(\pi \cdot \text{grad } \phi_4)$$

путём прибавления дивергенции $-ic \text{div}(\pi \phi_4)$ может быть превращён в $-ic \phi_4 \text{div } \pi$, а это в применении к F , по (17.22), эквивалентно $i\rho \phi_4$; этот член как раз компенсирует $-i\rho \phi_4$ в H' (17.8). Результат тот, что в уравнении Шредингера надо заменить $H^0 + H'$ на $H_0 + H_1$, где

$$H_0 = \frac{1}{2} \{c^2 |\pi|^2 + |\text{rot } \phi|^2\} \quad (17.23)$$

[ср. (16.30)] — плотность электромагнитной энергии, а

$$H_1 = -\frac{1}{c}(s \cdot \phi), \quad \int dx H_1 = -\sum_n e_n (a_n \cdot \phi(x_n)). \quad (17.24)$$

Новое уравнение Шредингера мы запишем так:

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \int dx (H_0 + H_1) + H^P \right) F(t, q, q_1, \dots) = 0. \quad (17.25)$$

Для дальнейших вычислений целесообразно перейти к пространству импульсов. Для этого мы снова применим ряды

Фурье (16.32), коэффициенты которых $q_{\nu, k}$, $p_{\nu, k}$ подчинены условиям эрмитовости (16.33, 34) и каноническим правилам перестановки (16.35). Тогда дополнительное условие $\pi_4(x) \cdot F = 0$, согласно (16.36), значит, что функция Шредингера не зависит от q_4, k :

$$\frac{\partial}{\partial q_{4, k}} F(t, q, \dots) = 0. \quad (17.26)$$

Во второе дополнительное условие (17.22) мы подставим, согласно (16.32),

$$\operatorname{div} \pi = -iV^{-1/2} \sum_k (k \cdot p_k) e^{-ikx}$$

и предположим плотность заряда ρ разложенной в пространственный ряд Фурье:

$$\rho = V^{-1/2} \sum_k \rho_k e^{-ikx}. \quad (17.27)$$

Здесь, благодаря действительной природе ρ :

$$\rho_{-k} = \rho_k^*. \quad (17.28)$$

Чтобы (17.22) выполнялось для всех x -ов, должно быть

$$\left\{ -i(k \cdot p_k) + \frac{\rho_k}{c} \right\} F(t, q, \dots) = 0,$$

причём для всех k . Если опять рассматривать F как функцию продольных и поперечных составляющих q_k [$q_k^{(1)}$, а также $q_k^{(2)}$, $q_k^{(3)}$; ср. (16.37)], то

$$(k \cdot p_k) = |k| p_k^{(1)} = |k| \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k^{(1)}}, \quad (17.29)$$

и мы получим дифференциальные уравнения

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q_k^{(1)}} - \frac{1}{ch|k|} \rho_k \right\} F(t, q, \dots) = 0.$$

Они интегрируются выражением

$$F(t, q, \dots) = e^{\frac{1}{ch} \sum_k \frac{\rho_k}{|k|} q_k^{(1)}} \cdot F^{\text{tr}}(t, q, \dots), \quad (17.30)$$

где F^{tr} не зависит от $q_k^{(1)}$:

$$\frac{\partial}{\partial q_k^{(1)}} F^{\text{tr}}(t, q, \dots) = 0. \quad (17.31)$$

Здесь ещё надо заметить, что в (17.29) $q_k^{(1)}$ и $p_k^{(1)}$ означают компоненты q_k и p_k в направлении k :

$$q_k^{(1)} = (q_k \cdot e_k^{(1)}), \quad p_k^{(1)} = (p_k \cdot e_k^{(1)}), \quad \text{где } e_k^{(1)} = + \frac{k}{|k|},$$

так что

$$e_{-k}^{(1)} = -e_k^{(1)}, \quad (17.32)$$

и условие эрмитовости (16.33) требует:

$$q_{-k}^{(1)} = -q_k^{(1)*}, \quad p_{-k}^{(1)} = -p_k^{(1)*}. \quad (17.33)$$

Отсюда и из (17.28) видно, что сумма $\sum_k \rho_k q_k^{(1)} / |k|$ в показателе (17.30) чисто мнимая.

Подставим теперь выражение (17.30) в уравнение Шредингера (17.25). Для энергии поля $\int dx H_0$ получится, как и в пустоте [ср. (16.39)]:

$$\left. \begin{aligned} \int dx H_0 &= H^{\text{long}} + H^{\text{tr}}, \\ H^{\text{long}} &= \frac{c^2}{2} \sum_k p_k^{(1)*} p_k^{(1)} = -\frac{c^2}{2} \sum_k p_{-k}^{(1)} p_k^{(1)} = \\ &= \frac{c^2 h^2}{2} \sum_k \frac{\partial^2}{\partial q_{-k}^{(1)} \partial q_k^{(1)}}, \\ H^{\text{tr}} &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_{r=2,3} \{c^2 p_k^{(r)*} p_k^{(r)} + k^2 q_k^{(r)*} q_k^{(r)}\}. \end{aligned} \right\} \quad (17.34)$$

Применим сначала оператор H^{long} к F , учитывая (17.30, 31):

$$H^{\text{long}} \cdot F(t, q, \dots) = H^{\text{C}} \cdot F(t, q, \dots), \quad (17.35)$$

1) Координатные системы $e_k^{(r)}$ не обязательно должны быть праввинтовыми; можно, поэтому, направить поперечные оси $e_k^{(r)}$ и $e_{-k}^{(r)}$ параллельно: $e_{-k}^{(2)} = +e_k^{(2)}$, $e_{-k}^{(3)} = +e_k^{(3)}$. Для дискуссии поперечного поля это предпочтительно, так как тогда можно воспользоваться формулами (16.41 и т. д.).

где

$$H^C = \frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{|k|^2} \rho_{-k} \rho_k. \quad (17.36)$$

Мы утверждаем: H^C — не что иное, как кулоновская энергия распределения зарядов $\rho(x)$ (17.27), ибо эта энергия, как известно, равна $\frac{1}{3} \int dx \rho(x) \Phi(x)$, где Φ — кулоновский потенциал зарядов ρ , определяемый дифференциальным уравнением Пуассона $\Delta\Phi = -\rho$:

$$\Phi(x) = V^{-1/2} \sum_k \frac{\rho_k}{|k|^2} e^{-ikx} \quad (17.37)$$

(ср. 17.27). Но тогда

$$\frac{1}{2} \int_{(V)} dx \rho(x) \Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_k \rho_{-k} \frac{\rho_k}{|k|^2} = H^C, \quad (17.38)$$

что и утверждалось. В частности это верно, когда плотность заряда вырождается в сингулярную функцию (17.15); тогда (в пределе $V = \infty$)

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \frac{e_n}{|x - x_n|},$$

а H^0 равна электростатической энергии точечных зарядов:

$$H^C = \frac{1}{8\pi} \sum_{nn'} \frac{e_n e_{n'}}{|x_n - x_{n'}|}. \quad (17.39)$$

Надо отметить, что здесь вместе с энергиями кулоновского взаимодействия ($n \neq n'$) встречаются и электрические собственные энергии частиц ($n = n'$), которые в пределе точечных зарядов бесконечны. Если приписать электрону конечные размеры, как в классической теории Лорентца, то хотя собственные энергии и остаются конечными, но зато в квантовой теории это означает отказ от релятивистской инвариантности, чего мы подробнее касались в § 7 при обсуждении аналогичной проблемы для мезонного поля. Другая возмож-

1) Множитель $1/4\pi$ отвечает выбору для заряда хевисайдовой системы единиц.

ность исключить или сделать конечной электрическую собственную энергию будет обсуждена в § 19.

После подстановки (17.34, 35) уравнение Шредингера (17.25) выглядит так.

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H^{\text{tr}} + H^{\text{C}} + \int dx \mathbf{H}_1 + H^{\text{P}} \right) F(t, q, \dots) = 0,$$

или, пользуясь (17.12, 24):

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H^{\text{tr}} + H^{\text{C}} + \sum_n \left\{ m_n c^2 \beta_n + \right. \right. \\ \left. \left. + c \left(\mathbf{a}_n \cdot \left\{ p_n - \frac{e_n}{c} \phi(x_n) \right\} \right) \right\} \right) F(t, q, \dots) = 0. \quad (17.40)$$

Теперь нужно перенести налево от оператора Гамильтона (17.40) входящий в F (17.30) экспоненциальный множитель

$$S = e^{\frac{1}{\hbar c} \sum_k \frac{\rho_k}{|k|} q_k^{(1)}}, \quad (17.41)$$

чтобы уравнение Шредингера относилось только к F^{tr} . Очевидно, операторы $\partial/\partial t$, H^{tr} (17.34) и H^{C} коммутируют с S (17.39), но не дифференциальные операторы p_n (17.30), так как S зависит через ρ_k от координат электронов x_n . А именно, по (17.27 и 15),

$$\rho_k = V^{-1/2} \int dx \rho(x) e^{ikx} = V^{-1/2} \sum_n e_n e^{ikx_n}. \quad (17.42)$$

Если это подставить в

$$[p_n, S] = \frac{\hbar}{i} \text{grad}_n S = \frac{1}{ci} \sum_k \frac{1}{|k|} q_k^{(1)} (\text{grad}_n \rho_k) \cdot S,$$

то получится

$$[p_n, S] = \frac{e_n}{c} \cdot V^{-1/2} \sum_k \frac{k}{|k|} q_k^{(1)} e^{ikx_n} \cdot S. \quad (17.43)$$

Входящая сюда сумма по k имеет простое значение: если разложить векторный потенциал

$$\phi(x) = V^{-1/2} \sum_k q_k e^{ikx} = V^{-1/2} \sum_k \left(\sum_r e_k^{(r)} q_k^{(r)} \right) e^{ikx}$$

на продольные и поперечные волны

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi^{\text{long}} + \psi^{\text{tr}}, \\ \psi^{\text{long}}(x) &= V^{-1/2} \sum_k e_k^{(1)} q_k^{(1)} e^{ikx} = \\ &= V^{-1/2} \sum_k \frac{k}{|k|} q_k^{(1)} e^{ikx}, \\ \psi^{\text{tr}}(x) &= V^{-1/2} \sum_k (e_k^{(2)} q_k^{(2)} + e_k^{(3)} q_k^{(3)}) e^{ikx}, \end{aligned} \right\} (17.44)$$

что в (17.43) входит ψ^{long} , взятый в точке x_n :

$$[p_n, S] = \frac{e_n}{c} \psi^{\text{long}}(x_n) \cdot S.$$

Отсюда следует:

$$\left\{ p_n - \frac{e_n}{c} \psi(x_n) \right\} \cdot S = S \cdot \left\{ p_n - \frac{e_n}{c} \psi^{\text{tr}}(x_n) \right\}, \quad (17.45)$$

т. е. перенос S налево превращает ψ в ψ^{tr} , а ψ^{long} исключается. Так что, если подставить в уравнение Шредингера (17.40) $F = S \cdot F^{\text{tr}}$, согласно (17.30, 41), и вынести S налево, то во всех членах ψ превращается в ψ^{tr} . После умножения на S^{-1} [по (17.28, 33) имеем $SS^* = S^*S = 1$, а также $S^{-1} = S^*$] окончательно получится:

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H^{\text{tr}} + H^c + H^p + \right. \\ \left. + H^w \right) F^{\text{tr}}(t, q, q_1, q_2, \dots) = 0. \quad (17.46)$$

Здесь H^p — снова гамильтонов оператор свободных частиц (17.12), а H^w — оператор взаимодействия вида

$$H^w = -\frac{1}{c} \int dx (s \cdot \psi^{\text{tr}}) = -\sum_n e_n (a_n \cdot \psi^{\text{tr}}(x_n)). \quad (17.47)$$

Надо учесть, что продольные величины $q_k^{(1)}$, $p_k^{(1)}$ не входят ни в H^{tr} , ни в H^w , так что (17.46) совместимо с (17.31).

С помощью дополнительных условий (17.21, 22) мы свели задачу о взаимодействии между электромагнитным полем и электронами к задаче (17.46), в которую, кроме электронных

координат, входят только координаты поперечных световых волн $q_k^{(2)}$, $q_k^{(3)}$. Оператор Гамильтона этой приведённой задачи включает: энергию световых волн (H^{tr}), кинетическую и кулоновскую энергии электронов ($H^P + H^C$) и член H^W , связывающий электроны со световыми волнами. Легко видеть, что, если вместо дираковских электронов взяты заряженные частицы с другими свойствами, существенные черты этого результата сохраняют свою силу. Если, например, описывать частицы нерелятивистским уравнением Шредингера, то вместо (17.9) будет:

$$H_{(n)} = \frac{1}{2m_n} \left\{ p_n - \frac{e_n}{c} \psi(x_n) \right\}^2 - e_n \cdot i\psi_4(x_n);$$

а исключение $q_{4,k}$ и $q_k^{(1)}$ снова приведёт к уравнению типа (17.46), где H^W получается из H' путём замены ψ_4 на 0 и ψ на ψ^{tr} :

$$H^W = \sum_n \left\{ -\frac{e_n}{m_n c} (\psi^{tr}(x_n) \cdot p_n) + \frac{e_n^2}{2m_n c^2} (\psi^{tr}(x_n))^2 \right\}. \quad (17.48)$$

То же имеет место, если заряженные частицы представлены квантованными волнами, например, для скалярного комплексного мезонного поля (см. выше).

Приведённое уравнение Шредингера (17.46) в основном то же, что и установленное в 1927 г. Дираком¹⁾ в его известной теории излучения. Дирак разлагал электромагнитные взаимодействия на статические (кулоновские) потенциалы, включённые им в гамильтоновы функции рассматриваемых атомных систем и на взаимодействия между атомами и поперечными волнами, которые квантуются. С точки зрения теории Максвелла, рассматривающей статическое поле и поперечные волны как единое целое, их расщепление было, конечно, неудовлетворительно; только сведение теории Дирака к общей квантовой электродинамике, в чём мы обязаны Гейзенбергу, Паули и Ферми²⁾, сделало возможным возврат к единому понятию поля и установило связь с классической электродинамикой макрофизики. Кроме того, формализм, инвариантный

1) Proc. Roy. Soc. 114, 243 и 710, 1927.

2) См. сноски на стр. 138.

при преобразованиях Лорентца, при которых статическая и волновая части поля преобразуются друг через друга, можно понять только на основе общей квантовой электродинамики (ср. § 18).

В применениях теории к специальным задачам, конечно, удобнее пользоваться приведённой формулировкой (17.46), т. е. дираковской теорией излучения. Мы не намереваемся входить во многие важные результаты теории¹⁾, но удовлетворимся краткой характеристикой возможностей непосредственного применения теории и дадим простой вычислительный пример.

Будем рассматривать член взаимосвязи H^W в (17.46) как малое возмущение. Переменные поля и частиц невозмущённой задачи ($H^W \rightarrow 0$) разделены. Собственные значения H^{tr} такие же, как и в пустоте [ср. (16.45)]:

$$H_N = \sum_k hc |k| \cdot (N_k^{(2)} + N_k^{(3)} + 1).$$

С другой стороны, оператор Гамильтона ($H^P + H^C$) «материальной системы» — подразумевается атом или молекула со стационарными состояниями $M = 1, 2, \dots$ — имеет собственные значения E_M , так что невозмущённая собственная функция имеет вид

$$F(t, N, M) = F(0, N, M) \cdot e^{-\frac{it}{\hbar} (H_N + E_M)}.$$

Член взаимодействия H^W тогда известным образом описывает переходы между этими состояниями невозмущённой системы и притом одновременные переходы как поля, так и материальной системы. Вероятность переходов определяется соответствующим матричным элементом H^W . Представленный в виде матрицы относительно чисел световых квантов $N_k^{(2)}, N_k^{(3)}$

1) Общие обзоры этой теории можно найти у Ферми (Fermi), Rev. of Modern Physics 4, 87, 1932; Брейт (Breit), там же 4, 504, 1932 и 5, 91, 1933; Вентцель (Wentzel), Handbuch der Physik Geiger-Scheel, 24, часть 1-я, 740, 1933; Гайтлер, Квантовая теория излучения; Oxford, 1936 (есть русский перевод Крамер (Kramers), Hand- und Jahrbuch der Chemischen Physik Eucken-Wolf, т. I, раздел II, гл. 8, 1938.

член H^W (17.47) по (17.44) и (17.41), имеет вид

$$H^W = - \sum_k V \sqrt{\frac{\hbar c}{2V|k|}} \sum_{r=2,3} (a_k^{(r)} + a_{-k}^{(r)*}) \sum_n e_n (a_n \cdot e_k^{(r)}) e^{ikx_n}. \quad (17.49)$$

Матричные элементы, определяющие переходы, поэтому таковы:

$$H_{N'M', N''M''}^W = - \sum_k V \sqrt{\frac{\hbar c}{2V|k|}} \sum_{r=2,3} (a_k^{(r)} + a_{-k}^{(r)*}) N', N'' \times \\ \times \left(\sum_n e_n (a_n \cdot e_k^{(r)}) e^{ikx_n} \right)_{M', M''}.$$

Так как операторы $a_k^{(r)}$, $a_k^{(r)*}$ уменьшают или увеличивают число световых квантов $N_k^{(r)}$ на 1, то возмущающая функция H^W описывает процессы поглощения и испускания света, что связано с одновременным изменением состояния материальной системы. Расчёт вероятностей по теории возмущений в первом приближении даёт простые процессы поглощения и испускания, а во втором приближении двухстепенные процессы, такие, как рассеяние света, и т. п.

Для примера рассмотрим рассеяние света на свободном электроде, ограничиваясь нерелятивистским граничным случаем. скоростью электрона будет пренебрегаться, по сравнению со скоростью света, причём не только в начальном состоянии, но и в конечном и в промежуточных. Это дозволено только тогда, когда комптоновская отдача достаточно мала: импульс $\hbar|k|$ кванта должен быть $\ll mc$. Возмущающую матрицу второго приближения мы пишем в виде

$$H_{ea}^W = \sum_z \frac{H_{ez}^W H_{za}^W}{E_a - E_z},$$

где индексы a , z , e [как в (7.10)] относятся соответственно к начальному, промежуточному и конечному состояниям, а E_a , E_z — соответствующие невозмущённые собственные значения энергии. Благодаря множителю a в (17.49) в нерелятивистском граничном случае надо принимать во внимание только те элементы матрицы H^W , которые отвечают пере-

ходам из положительного спектра энергии в отрицательный спектр¹⁾; все остальные матричные элементы, как легко убедиться, исчезающе малы и пренебрегаются. Так что, если электрон в начальном и конечном состояниях обладает положительной энергией ($\cong mc^2$), то его энергия в промежуточном состоянии отрицательна и притом: $\cong -mc^2$. Но так как, по предположению, энергии световых квантов $hc|k| \ll mc^2$, знаменатель $E_a - E_z$ в H''_{ea} для всех реализуемых промежуточных состояний приблизительно равен $+2mc^2$. Так что в нашем приближении

$$H''_{ea} = \frac{1}{2mc^2} \sum_z H_{ez}^W H_{za}^W,$$

т. е. матрица H'' равна квадрату матрицы H^W , делённому на $2mc^2$. Поэтому, вместо того, чтобы вычислять во втором приближении теории возмущений матрицу H'' , достаточно рассмотреть в первом приближении возмущающую функцию

$$H'' = \frac{1}{2mc^2} (H^W)^2.$$

В случае одного электрона оператор H^W , по (17.47), таков

$$H^W = -e(\alpha \cdot \psi^{\text{tr}}(x_1));$$

для квадрата его благодаря известному соотношению $\alpha^{(j)}\alpha^{(j')} + \alpha^{(j')}\alpha^{(j)} = 2\delta_{jj'}$ получают: $(H^W)^2 = e(\psi^{\text{tr}}(x_1))^2$, так что

$$H'' = \frac{e^2}{2mc^2} (\psi^{\text{tr}}(x_1))^2.$$

Здесь надо заметить, что нерелятивистская возмущающая функция (17.48) ведёт к тому же результату; в самом деле, квадратичный в ψ член в (17.48), дающий рассеяние уже в первом приближении («истинное рассеяние» Дирака — «true scattering»), совпадает с H'' , тогда как добавка второго приближения, составленная из линейных в ψ членов, по по-

¹⁾ Если электронные волны квантованы по принципу Паули («дырочная теория»), толкование промежуточных состояний несколько иное; ср. § 21.

рядку величины оказывается малой; с помощью (17.44) и (16.41) будет:

$$H'' = \frac{he^2}{4mcV} \sum_{kk'} e^{i(k+k')x} \frac{1}{V|k||k'|} \sum_{r, r' (\neq 1)} (e_k^{(r)} \cdot e_{k'}^{(r')}) \times \\ \times (a_k^{(r)} + a_{-k}^{(r)*}) (a_{k'}^{(r')} + a_{-k'}^{(r')*}).$$

Матричный элемент перехода светового кванта из состояния k, r в состояние k', r' равен

$$\frac{he^2}{2mcV} \frac{1}{V|k||k'|} (e_k^{(r)} \cdot e_{k'}^{(r')}).$$

Если вычислить отсюда интенсивность и поляризацию рассеянного излучения, то получится полное совпадение с классической (томсоновской) теорией рассеяния света.

§ 18. Теория со многими временами

Применявшееся до сих пор основное уравнение квантовой электродинамики, именно уравнение Шредингера (17.17), содержит пространственные и временные координаты несимметрично: в то время как для каждого электрона мы ввели свой особый радиус-вектор x_n , и к тому же ещё имеется радиус-вектор начала координат x , фигурирует только одна временная координата t . Чтобы сделать очевидной релятивистскую инвариантность теории, надо найти общую формулировку, в которой каждой частице приписывается своё время t_n , — так что пространственно-временные координаты каждой отдельной частицы (x_n, t_n) образуют мировой четырёхмерный вектор; кроме того, задаются текущие координаты (x, t) , которые тоже образуют мировой вектор и называются «точкой поля» и «временем поля». Дирак, Фок и Подольский¹⁾ нашли такую инвариантную формулировку квантовой электродинамики, из которой вытекает теория с одним временем, как мы её представили в § 17, если заставить все времена t_n совпасть с временем поля t .

Мы применим определённые в (16.18), зависящие от времени операторы $\psi, (x, t)$, причём изменим обозначение; опе-

1) Phys. Zs. d. Sowjetunion 2, 468, 1932.

ратор Гамильтона поля в вакууме, который в § 16 писался через H [ср. (16.13)], будет теперь, в смысле (17.7), писаться через H^0 :

$$\psi_\nu(x, t) = e^{\frac{it}{\hbar} H^0} \psi_\nu(x) e^{-\frac{it}{\hbar} H^0}. \quad (18.1)$$

Характерные особенности этих операторов следующие: во-первых, они подчиняются как функции пространства — времени уравнениям для пустоты, т. е. однородным уравнениям¹⁾

$$\square \psi_\nu(x, t) = 0; \quad (18.2)$$

далее имеют место инвариантные правила перестановок (16.19):

$$[\psi_\nu(x, t), \psi_{\nu'}(x', t')] = \frac{\hbar}{i} c^2 \delta_{\nu\nu'} D(x - x', t - t'). \quad (18.3)$$

С помощью этого оператора потенциала мы определим операторы Гамильтона каждого отдельного электрона

$$H_n = m_n c^2 \beta_n + c \left(a_n \cdot \left\{ p_n - \frac{e_n}{c} \psi(x_n, t_n) \right\} - e_n \cdot i \psi_4(x_n, t_n) \right) \quad (18.4)$$

(ψ без индекса снова означает трёхмерный вектор ψ_1, ψ_2, ψ_3).

Пусть Φ — функция Шредингера, которая, кроме переменных поля q и электронов q_n (= радиусам-векторам x_n и спиновым координатам; ср. § 17), зависит также от времён отдельных частиц

$$\Phi = \Phi(q; t_1, q_1; t_2, q_2; \dots), \quad (18.5)$$

но не зависит от времени поля t и от точки поля x :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \text{grad } \Phi = 0. \quad (18.6)$$

¹⁾ Надо обратить внимание на различие с операторами (4.4), для которых при $E = H$, по (17.19), имеют место неоднородные волновые уравнения (17.5). Если $E = H^0$, то благодаря (16.6) будет просто:

$$\frac{\partial^2 \psi_\nu(x, t)}{\partial t^2} = e^{\frac{it}{\hbar} H^0} \cdot \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 [H^0, [H^0, \psi_\nu(x)]] \cdot e^{-\frac{it}{\hbar} H^0} = c^2 \Delta \psi_\nu(x, t),$$

как было замечено уже в § 16.

Чтобы определить зависимость от времён различных частиц, нам нужно соответствующее число уравнений, так что имеет место:

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_n} + H_n\right) \Phi = 0 \quad (18.7)$$

для всех значений n . Эти совместные дифференциальные уравнения во всяком случае не интегрируемы без ограничений¹⁾: если образовать, по (18.7), вторые производные по времени для пары неравных значений $n \neq n'$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_{n'} \partial t_n} \Phi = \frac{\partial}{\partial t_{n'}} \left(-\frac{i}{\hbar} H_n \Phi\right) = -\frac{i}{\hbar} H_n \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n'}} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 H_n H_{n'} \Phi,$$

то результат не должен зависеть от порядка дифференцирования, и тем самым оба уравнения (18.7) будут совместимы; это означает, что операторы H_n и $H_{n'}$ должны коммутировать:

$$[H_n, H_{n'}] = 0. \quad (18.8)$$

Но так как операторы (18.4) содержат потенциалы ϕ , с перестановочными соотношениями (18.3), то получится

$$[H_n, H_{n'}] = \frac{\hbar}{i} c^2 e_n e_{n'} \{(\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_{n'}) - 1\} D(x_n - x_{n'}, t_n - t_{n'}),$$

так что интегрируемость имеет место только тогда, когда исчезает $D(x_n - x_{n'}, t_n - t_{n'})$. По (4.32) это выполняется тогда, когда интервал между частицами n и n' «пространственного рода»:

$$c |t_n - t_{n'}| < |x_n - x_{n'}|. \quad (18.9)$$

Поскольку мы ограничим этими неравенствами времена частиц для всех пар $n \neq n'$, дифференциальные уравнения (18.7) могут применяться для определения Φ . Надо заметить, что область теории с одним временем (все $t_n = t$) лежит в пределах, даваемых (18.9). При $\partial \Phi / \partial t = 0$ уравнения (18.7), конечно, совместимы с (18.6), так как операторы H_n не зависят от времени поля t .

Так как дифференциальные уравнения (18.7) имеют форму дираковского волнового уравнения [ср. (18.4)], то вытекаю-

1) Блох (Bloch), Phys. Zs. d. Sowjetunion 5, 301, 1934.

щие из них выводы релятивистски инвариантны: при переходе к другой системе отсчёта уравнения Дирака сохраняют свою форму, в случае, если Φ множится на оператор $\prod_n S_n$, где S_n — матрица относительно спиновых координат n -го электрона, вид которой известен из одноэлектронной задачи. Пределы применимости уравнений Дирака тоже инвариантно налагаются неравенствами (18.9): каждая мировая точка электрона (x_n, t_n) должна лежать вне световых конусов всех других электронов.

Мы утверждаем, что функция Шредингера F теории с одним временем (§ 17) получится из функции со многими временами Φ , если помножить последнюю на оператор $e^{-\frac{it}{\hbar} H^0}$ и приравнять времена всех частиц времени поля:

$$F(t, q, q_1, q_2, \dots) = e^{-\frac{it}{\hbar} H^0} \cdot \Phi(q; t, q_1; t, q_2; \dots). \quad (18.10)$$

Производная по времени этой функции равна

$$\frac{\partial F}{\partial t} = e^{-\frac{it}{\hbar} H^0} \cdot \left\{ -\frac{i}{\hbar} H^0 \Phi + \sum_n \frac{\partial \Phi}{\partial t_n} \right\}_{t_1=t_2=\dots=t},$$

т. е., по (18.7),

$$-\frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} = e^{-\frac{it}{\hbar} H^0} \cdot \left\{ \left(H^0 + \sum_n H_n \right) \Phi \right\}_{t_1=t_2=\dots=t}. \quad (18.11)$$

Мы перенесём множитель $e^{-\frac{it}{\hbar} H^0}$ направо относительно оператора $\left(H^0 + \sum_n H_n \right)$ и заметим, что он коммутирует со всеми членами последнего, кроме входящих в $(H_n)_{t_n=t}$ операторов потенциала $\psi_v(x_n, t)$, для которых, по (18.1), будет:

$$e^{-\frac{it}{\hbar} H^0} \psi_v(x_n, t) = \psi_v(x_n) e^{-\frac{it}{\hbar} H^0},$$

так что теперь вместо зависящих от времени операторов войдут независящие $\psi_v(x_n)$. Итак, в (18.11) справа появится оператор, обозначенный в (17.9, 11) как $H_{(n)}$,

$$e^{-\frac{it}{\hbar} H^0} (H_n)_{t_n=t} = H_{(n)} e^{-\frac{it}{\hbar} H^0}$$

и, наконец, из (18.10) получится

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial F}{\partial t} = \left(H^0 + \sum_n H_{(n)} \right) F \equiv HF. \quad (18.12)$$

Но это в точности уравнение Шредингера (17.17), что и требовалось доказать. Этим показано, что совместные дифференциальные уравнения (18.7) представляют релятивистски инвариантное обобщение уравнения Шредингера (17.17).

Чтобы получить уравнения Максвелла, в теории с одним временем мы подчинили функцию F в § 17 дополнительному условию

$$\pi_4(x) \cdot F(t, q, \dots) = 0 \quad (18.13)$$

[ср. (17.21)]; второе дополнительное условие (17.21)

$$\dot{\pi}_4(x) \cdot F(t, q, \dots) = 0$$

— следствие первого [ср. (16.28), где $H = H^0 + \sum_n H_{(n)}$].

Если мы выразим F через Φ по (18.10), то (18.13) после умножения на $e^{\frac{it}{\hbar} H^0}$ даст

$$e^{\frac{it}{\hbar} H^0} \pi_4(x) e^{-\frac{it}{\hbar} H^0} \cdot \Phi_{t=t_1=t_2=\dots} = 0. \quad (18.14)$$

По (17.18)

$$-ic\pi_4(x) = \operatorname{div} \psi(x) + \frac{1}{ic} \frac{i}{\hbar} [H, \psi_4(x)]$$

или, так как $H - H^0 (= \sum H_{(n)})$ коммутирует с $\psi_4(x)$:

$$-ic\pi_4(x) = \operatorname{div} \psi(x) + \frac{1}{ic} \frac{i}{\hbar} [H^0, \psi_4(x)].$$

Подставляя это в уравнение (18.14), видим, на основании (18.1), что оно равнозначно с

$$\sum_v \frac{\partial \psi_v(x, t)}{\partial x_v} \cdot \Phi_{t=t_1=t_2=\dots} = 0. \quad (18.15)$$

В пространстве с координатами t, t_1, t_2, \dots «прямая» $t=t_1=t_2=\dots$ представляет область применения теории с одним временем, т. е. дифференциальные уравнения (18.7) с одним временем для функции F эквивалентны (18.10) от-

носительно изменений Φ вдоль этой прямой. Так как, согласно § 17, уравнение Шредингера совместимо вдоль прямой одного времени с дополнительным условием (18.13), то совместимы и уравнения (18.6, 7) с (18.15). Надо теперь обобщить уравнение (18.15) на теорию со многими временами для функции Φ . Мы положим

$$\Omega \cdot \Phi = 0, \quad (18.16)$$

где Ω — оператор, переходящий при $t_n = t$ в $\sum_v \partial \psi_v(x, t) / \partial x_v$.

Если выйти из какой-либо точки прямой одного времени по произвольной кривой в область теории со многими временами, то изменение Φ даётся уравнениями (18.6, 7); Ω должен быть построен так, чтобы $\Omega \cdot \Phi$ вдоль пути автоматически оставался равным нулю. Так как можно достичь любой «точки» t, t_1, t_2, \dots , достигая заданного значения t и двигаясь дальше в «гиперплоскости» $t = \text{const.}$, то достаточно рассмотреть элементы пути с $dt = 0$, т. е. надо потребовать:

$$\frac{\partial}{\partial t_n} (\Omega \Phi) = 0 \text{ для всех } n.$$

Но, по (18.7),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_n} (\Omega \Phi) &= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t_n} + \frac{i}{\hbar} \Omega H_n \right) \Phi = \\ &= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t_n} + \frac{i}{\hbar} [H_n, \Omega] - \frac{i}{\hbar} H_n \Omega \right) \Phi. \end{aligned} \quad (18.17)$$

Пусть Ω выбрано так, что

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t_n} + \frac{i}{\hbar} [H_n, \Omega] = 0 \text{ (для всех } n), \quad (18.18)$$

причём как тождество не только в применении к Φ . Тогда, по (18.17),

$$\frac{\partial}{\partial t_n} (\Omega \Phi) = - \frac{i}{\hbar} H_n \cdot (\Omega \Phi),$$

т. е. если функция $\Omega \Phi$ исчезает в одной точке, то она останется равной нулю на всех исходящих из неё элементах пути в гиперплоскости $t = \text{const.}$ Уравнение (18.8) гарантирует выполнение условия (18.16) во всей той области, в которой интегрируемы дифференциальные уравнения (18.7), в предположении, что Ω

на прямой одного времени совпадает с $\sum_v \partial \psi_v(x, t) / \partial x$, и что уравнение Шредингера (18.10) отвечает дополнительным условиям (17.21) или начальным условиям (17.20).

Вместо (18.18) можно написать также

$$\left[\left\{ \frac{\partial}{\partial t_n} + \frac{i}{\hbar} H_n \right\}, \Omega \right] = 0, \quad (18.19)$$

причём, по (18.4),

$$\frac{\partial}{\partial t_n} + \frac{i}{\hbar} H_n = \frac{i}{\hbar} m_n c^2 \beta_n + c \left(\alpha_n \cdot \left\{ \text{grad}_n - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{i}{\hbar} \frac{e_n}{c} \psi(x_n, t_n) \right\} \right) + \left\{ \frac{\partial}{\partial t_n} - \frac{i}{\hbar} e_n i \phi_4(x_n, t_n) \right\}.$$

Если мы допустим, что Ω не зависит от спиновых координат электронов, т. е. коммутирует с матрицами α_n , β_n , то (18.19) выполнено при условии, что Ω перестановочно с операторами

$$\left\{ \text{grad}_n - \frac{i}{\hbar} \frac{e_n}{c} \psi(x_n, t_n) \right\}$$

и

$$\left\{ \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t_n} - \frac{i}{\hbar} \frac{e_n}{c} \phi_4(x_n, t_n) \right\},$$

т. е. если:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_{n\mu}} - \frac{e_n}{c} \frac{i}{\hbar} [\psi_\mu(x_n, t_n), \Omega] = 0 \\ (\mu = 1, \dots, 4, x_{n4} = ict_n). \quad (18.20)$$

Этим требованиям удовлетворяет выражение

$$\Omega = \sum_v \frac{\partial \psi_v(x, t)}{\partial x_v} + c \sum_n e_n D(x - x_n, t - t_n), \quad (18.21)$$

потому что, согласно правилам перестановки (18.3),

$$\frac{i}{\hbar} [\psi_\mu(x_n, t_n), \Omega] = -c^2 \frac{\partial}{\partial x_{n\mu}} D(x - x_n, t - t_n) = \\ = +c^2 \frac{\partial}{\partial x_{n\mu}} D(x - x_n, t - t_n),$$

так что (18.20) выполнится тождественно. Так как $D(x - x_n, 0)$, по (4.31), равно нулю, то

$$(\Omega)_{t=t_1=t_2=\dots} = \sum_v \frac{\partial \phi_v(x, t)}{\partial x_v},$$

как и требовалось. Искомое обобщение дополнительного условия (18.13) на многие времена даётся (18.16) в связи с (18.21). Относительно преобразований Лорентца оператор (18.21), очевидно, инвариантен.

Если мы будем рассматривать уравнения (18.2 до 7, 16 и 21) как основные уравнения квантовой электродинамики — действительно, все другие следствия могут быть из них выведены, — то релятивистский характер теории очевиден. В частности, рассматривая в произвольной системе изменения шредингеровской функции Φ вдоль «прямой» $t = t_1 = t_2 = \dots$, мы вернёмся к теории с одним временем § 17.

Формализм допускает и калибровочные преобразования

$$\phi_v(x, t) \rightarrow \phi(x, t) + \frac{\partial \Lambda(x, t)}{\partial x_v},$$

где Λ — перестановочная с ϕ_v функция пространства и времени, удовлетворяющая волновому уравнению $\square \Lambda = 0$, так что уравнения (18.2, 3) сохраняют силу. Преобразуя функцию Шредингера по формуле

$$\Phi \rightarrow e^{\frac{i}{\hbar c} \sum_n e_n \Lambda(x_n, t_n)} \cdot \Phi,$$

мы увидим, что уравнения Дирака (18.7, 4) так же калибровочно инвариантны, как и в дираковской волновой механике электрона в заданном поле; дополнительное условие (18.16, 21) тоже инвариантно (вследствие $\square \Lambda = 0$).

Тогда как функция Шредингера с одним временем F имеет простой смысл, известный из обычной волновой механики — она определяет вероятности значений измерения, получаемых при измерении физических величин, — функция со многими временами Φ в построенном нами формализме играет пока что вспомогательную роль. Однако Блох¹⁾ показал, что и Φ может быть интерпретировано как ампли-

¹⁾ Bloch, Phys. Zs. d. Sowjetunion 5, 301, 1934.

туда вероятности для известных измерений, именно для таких измерений или серий измерений, которые производятся в момент t над электромагнитным полем и во времена t_1, t_2, \dots над частицами $n = 1, 2, \dots$. Неравенства (18.19), гарантирующие интегрируемость уравнений (18.7), означают, что не влияют друг на друга произведённые над различными частицами измерения, обратные действия которых на поле распространяются со скоростью света. Истолкование Блоха связано с предположением, что измерение поля производится только в таких областях пространства и времени (x, t) , на которые не оказывают влияния измерения над частицами, действующие на поле. При этих ограничениях $\Phi^* \Phi dq dq_1 dq_2 \dots$ означает вероятность того, что в момент времени t координаты поля q лежат в области dq , в момент t_1 , координаты q_1 частицы $n = 1$ лежат в области dq_1 и т. д.

Рассмотрим какие-нибудь относящиеся к системе величины

$$f = f(x, t, q, q_1, q_2, \dots);$$

их средние значения можно определить так:

$$\int dq \int dq_1 \int dq_2 \dots \Phi^* f \Phi = \bar{f}(x, t, t_1, t_2, \dots).$$

При этом вследствие (18.7)

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t_n} = \frac{i}{\hbar} \overline{[H_n, f]}, \quad (18.22)$$

в то время как, по (18.6),

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}}, \quad \text{grad } \bar{f} = \overline{\text{grad } f}. \quad (18.23)$$

С помощью (18.10) легко видеть, что при $t = t_1 = t_2 = \dots$ f переходит в средние значения теории с одним временем, независимо от того, относится ли f к частице (например p_n) или к полю [например $\text{rot } \psi(x, t)$]. Для изменений во времени средних значений с одним временем из (18.22) получается:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(x, t, t, t, \dots) &= \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \sum_n \frac{\partial \bar{f}}{\partial t_n} \right)_{t_n=t} = \\ &= \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \sum_n \overline{[H_n, f]} \right)_{t_n=t}. \end{aligned} \quad (18.24)$$

Применим эти формулы, например, к напряжениям поля

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial \phi_\nu(x, t)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi_\mu(x, t)}{\partial x_\nu};$$

тогда, по (18.2 и 21),

$$\begin{aligned} \sum_\mu \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} &= -\frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_\mu \frac{\partial \phi_\mu(x, t)}{\partial x_\mu} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \Omega - c \sum_n e_n D(x - x_n, t - t_n) \right\}, \end{aligned}$$

и, так как по (18.16) $\bar{\Omega} = 0$, то

$$\sum_\mu \frac{\partial \bar{f}_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = c \sum_n e_n \overline{\frac{\partial}{\partial x_\nu} D(x - x_n, t - t_n)}. \quad (18.25)$$

В частности, для $\nu = 4$ это уравнение значит, что

$$\operatorname{div} \bar{\mathcal{E}} = \sum_n e_n \overline{\frac{\partial}{\partial t} D(x - x_n, t - t_n)}; \quad (18.26)$$

если здесь все $t_n \rightarrow t$, то, по (4.33), выйдет:

$$\operatorname{div} (\bar{\mathcal{E}})_{t_n=t} = \sum_n e_n (\bar{\delta}(x - x_n))_{t_n=t} = (\bar{\rho}(x))_{t_n=t},$$

в согласии с теорией с одним временем. С другой стороны, (18.25) даёт для $\nu = 1, 2, 3$:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial t} - \operatorname{rot} \bar{\mathcal{H}} = c \operatorname{grad} \sum_n e_n \overline{D(x - x_n, t - t_n)}. \quad (18.27)$$

Правая сторона исчезает при $t_n = t$. Чтобы получить соответствующее уравнение теории Максвелла с одним временем, надо, по (18.24), ещё прибавить член

$$\frac{1}{c} \frac{i}{h} \sum_n \overline{[H_n, \mathcal{E}]_{t_n=t}};$$

его значение легко найти, на основании (18.3, 4), путём короткого вычисления:

$$-\sum_n e_n (\overline{a_n \cdot \delta(x - x_n)})_{t_n=t} = -\frac{1}{c} (\overline{s(x)})_{t_n=t},$$

т. е.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\mathfrak{E}})_{t_n=t} - \text{rot} (\overline{\mathfrak{H}})_{t_n=t} = -\frac{1}{c} (\overline{s(x)})_{t_n=t},$$

чем подтверждается и это уравнение Максвелла. Из тождеств

$$\text{div} \overline{\mathfrak{H}} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\mathfrak{H}}}{\partial t} + \text{rot} \overline{\mathfrak{E}} = 0 \quad (18.28)$$

следуют и другие уравнения Максвелла, если учесть, что $[H_n, \overline{\mathfrak{H}}]$ равно нулю при $t_n = t$.

Полученные уравнения можно применить и для того, чтобы проследить за полями, $\overline{\mathfrak{E}}$, $\overline{\mathfrak{H}}$ и в стороне от прямой общего времени. Мы сделаем это для поля одного электрона, но для простоты только в статическом граничном случае, т. е. мы примем электрон бесконечно тяжёлым и покоящимся, так что в H_1 (18.4) надо заменить матрицы α нулём, а β — единицей:

$$H_1 = \text{const.} - e \cdot i\psi_4(x_1, t_1). \quad (18.29)$$

В этом пределе можно считать фиксированным и положение точки x_1 ; например $x_1 = 0$; тогда $\Phi^* \Phi$ содержит множитель $\delta(x_1)$, и определение среднего относительно x_1 состоит в подстановке 0 вместо x_1 , например:

$$\overline{D(x - x_1, t - t_1)} = D(x, t - t_1).$$

На прямой общего времени действуют уравнения Максвелла, так что в нашем случае законы электростатики имеют вид:

$$\overline{\mathfrak{H}} = 0, \quad \overline{\mathfrak{E}} = -\frac{e}{4\pi} \text{grad} \frac{1}{|x|} \text{ при } t_1 = t. \quad (18.30)$$

Но так как $\overline{\mathfrak{H}} = \text{rot} \psi(x, t)$ коммутирует с H_1 (18.29), то, по (18.22), $\partial \overline{\mathfrak{H}} / \partial t_1 = 0$; следовательно, $\overline{\mathfrak{H}}$ исчезает не только при $t_1 = t$, но и вообще:

$$\overline{\mathfrak{H}} = 0. \quad (18.31)$$

По (18.28) тогда и $\text{rot} \overline{\mathfrak{E}} = 0$, так что $\overline{\mathfrak{E}}$ представляется градиентом скалярной функции

$$\overline{\mathfrak{E}} = -e \text{grad} U. \quad (18.32)$$

Здесь потенциальная функция U может зависеть ещё от x и $(t - t_1)$; по (18.30)

$$U = \frac{1}{4\pi|x|} (+ \text{const.}) \text{ при } t_1 = t. \quad (18.33)$$

Подставляя выражение (18.32) в уравнения (18.26, 27), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= -\frac{\partial}{\partial t} D(x, t - t_1), \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= -c^2 D(x, t - t_1). \end{aligned} \right\} \quad (18.34)$$

Эти два уравнения совместны, так как D -функция Иордана и Паули подчиняется однородному волновому уравнению $\square D = 0$. Пользуясь интегральным представлением (16.20) D -функции, непосредственно видим, что оба дифференциальных уравнения интегрируются:

$$U = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\partial k}{|k|^2} \cos [k|c(t - t_1)] \cdot \cos kx. \quad (18.35)$$

Чтобы вычислить этот интеграл, мы введём полярные координаты в k -пространстве: пусть ϑ — угол между вектором k и постоянным вектором x и $\cos \vartheta = \xi$; $|k|$ назовём κ , так что элемент объёма $dk = 2\pi\kappa^2 d\kappa d\xi$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\kappa \cos [\kappa c (t - t_1)] \int_{-1}^{+1} d\xi \cos (\kappa |x| \xi) = \\ &= \frac{1}{|x|} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\partial \kappa}{\kappa} 2 \cos [\kappa c (t - t_1)] \sin (\kappa |x|) = \\ &= \frac{1}{|x|} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\partial \kappa}{\kappa} [\sin \{ \kappa [|x| - c(t - t_1)] \} + \\ &\quad + \sin \{ \kappa [|x| + c(t - t_1)] \}]. \end{aligned}$$

Сюда входит известный интеграл

$$I(\alpha) \equiv \int_0^{\infty} \frac{\partial x}{x} \sin \alpha x = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{при } \alpha > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } \alpha < 0; \end{cases}$$

отсюда будет:

$$U = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} [I(|x| - c(t - t_1)) + I(|x| + c(t - t_1))]. \quad (18.36)$$

Если четырёхмерный вектор $x - 0$, $t - t_1$ пространственного рода ($|x| > c|t - t_1|$), то аргументы обеих I -функций положительны, следовательно,

$$U = \frac{1}{4\pi|x|} \quad \text{при } |x| > c|t - t_1|. \quad (18.37)$$

При $t_1 = t$ это совпадает с (18.33). Но, помимо этого, (18.37) учит, что U повсюду вне светового конуса $|x - x_1| = c|t - t_1|$ не зависит от $t - t_1$ и равно кулоновскому потенциалу $1/4\pi|x - x_1|$. Но если рассмотреть точки (x, t) , для которых по отношению к мировой точке $(0, t_1)$ имеет место $|x| < c|t - t_1|$ (т. е. или $t - t_1 > |x|/c$ или $t - t_1 < -|x|/c$), то аргументы I -функций в (18.36) и с ними значения функций имеют обратные знаки, так что (18.36)

$$U = 0 \quad \text{при } |x| < c|t - t_1|, \quad (18.38)$$

и поле $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$ тождественно обращается в нуль в световом конусе $|x - x_1| = c|t - t_1|$. Подводя итог статического граничного случая, будем иметь по (18.31, 32, 37, 38):

$$\vec{\mathcal{H}} = 0, \quad \vec{\mathcal{E}} = \begin{cases} -\frac{e}{4\pi} \text{grad} \frac{1}{|x|} & \text{при } |x| > c|t - t_1|, \\ 0 & \text{при } |x| < c|t - t_1|. \end{cases} \quad (18.39)$$

Попутно мы используем формулы (18.37, 38), чтобы рассмотреть D -функцию Иордана и Паули в её пространственно-временной зависимости. По (18.34) (при $t_1 = 0$)

$$D(x, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (18.40)$$

где

$$U = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|x|} & \text{при } |x| > c|t|, \\ 0 & \text{при } |x| < c|t|. \end{cases}$$

Так как U не зависит от t и внутри и вне светового конуса, там исчезает и D :

$$D(x, t) = 0 \text{ при } |x| \neq c|t|. \quad (18.41)$$

На самом световом конусе U терпит разрыв, причём так, что $\int dt \partial U / \partial t$ (проинтегрированный через точку разрыва) $= \pm 1/4\pi|x|$, т. е. конечен; D -функция поэтому имеет на световом конусе « δ -образную» особенность. Если ввести «одномерную δ -функцию» по формулам

$$\delta_1(t) = 0 \text{ при } t \neq 0, \quad \int dt \delta_1(t) = 1,$$

то D -функцию можно записать так:

$$D(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 |x|} \left\{ \delta_1\left(t - \frac{|x|}{c}\right) - \delta_1\left(t + \frac{|x|}{c}\right) \right\}, \quad (18.42)$$

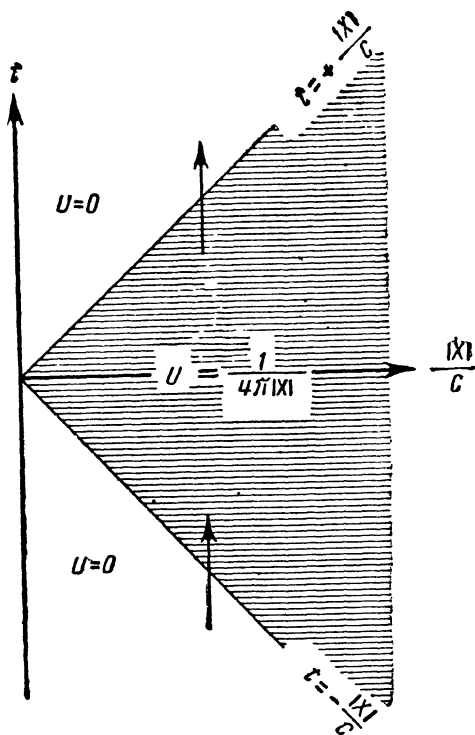
ибо это, во-первых, совпадает с (18.41) при $|t| \neq |x|/c$, а, во-вторых, отсюда получается, согласно (18.40):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -c^2 D = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi|x|} \delta_1\left(t - \frac{|x|}{c}\right) & \text{при } t \cong +\frac{|x|}{c}, \\ +\frac{1}{4\pi|x|} \delta_1\left(t + \frac{|x|}{c}\right) & \text{при } t \cong -\frac{|x|}{c}; \end{cases}$$

если теперь пересечь при заданном расстоянии $|x|$ положительный или отрицательный (в смысле возрастания времени t) световой конус ($t = \pm |x|/c$) в направлении возрастающего времени t (сравни стрелки на приложенном рисунке), то $\int dt \partial U / \partial t = \pm 1/4\pi|x|$, в согласии с данными (18.40) о разрывностях U . Надо ещё помнить, что представление (18.40) относится только к D -функции Иордана и Паули, а не к инвариантной функции (4.25) с $\mu \neq 0$; по (4.32), послед-

няя хотя и исчезает вне светового конуса, но не внутри него.

Что касается поля электрона $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$ в общем нестатическом случае, то мы дадим обобщение формул (18.39) без



доказательства¹⁾. Пусть в теории с одним временем уравнения Максвелла интегрируются известными запаздывающими потенциалами:

$$\vec{\mathcal{H}} = \text{rot } \mathcal{A}, \quad \vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} - \text{grad } U, \quad (18.43)$$

¹⁾ Вентцель (Wentzel), Zs. f. Phys. 86, 479, 1933.

$$\left. \begin{aligned} U &= U^{\text{ret}} \equiv \frac{1}{4\pi} \int dx' \frac{\bar{\rho} \left(x', t - \frac{|x-x'|}{c} \right)}{|x-x'|}, \\ \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}^{\text{ret}} \equiv \frac{1}{4\pi c} \int dx' \frac{\bar{s} \left(x', t - \frac{|x-x'|}{c} \right)}{|x-x'|}. \end{aligned} \right\} \quad (18.44)$$

Тогда оказывается, что эти формулы для поля справедливы и при $t \neq t_1$ ¹⁾, если мировая точка электрона (x_1, t_1) с достоверностью расположена от точки поля (x, t) на расстоянии $|x_1 - x| > c|t_1 - t|$ ($\Phi \neq 0$ только в таких областях x_1 , для которых $|x_1 - x| > c|t_1 - t|$ при заданном x, t и t_1). Если заставить t возрастать при прочих равных условиях, пока точка поля (x, t) с достоверностью попадёт в положительный световой конус электрона, то поле $\bar{\mathfrak{E}}, \bar{\mathfrak{H}}$ с достоверностью обратится в нуль, как и в статическом случае, т. е. в (18.43) будет:

$$U=0, \mathfrak{A}=0 \quad \text{при} \quad t-t_1 > \frac{|x-x_1|}{c}. \quad (18.45)$$

Но поле не исчезает, если t стремится к $-\infty$; более того, имеет место (18.43) с

$$\begin{aligned} U &= U^{\text{ret}} - U^{\text{av}}, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\text{ret}} - \mathfrak{A}^{\text{av}} \\ &\quad \text{при} \quad t-t_1 < -\frac{|x-x_1|}{c}, \end{aligned} \quad (18.46)$$

т. е. U и \mathfrak{A} получаются как разности определённых из (18.44) запаздывающих и «опережающих» потенциалов:

$$\left. \begin{aligned} U^{\text{av}} &\equiv \frac{1}{4\pi} \int dx' \frac{\bar{\rho} \left(x', t + \frac{|x-x'|}{c} \right)}{|x-x'|}, \\ \mathfrak{A}^{\text{av}} &\equiv \frac{1}{4\pi c} \int dx' \frac{\bar{s} \left(x', t + \frac{|x-x'|}{c} \right)}{|x-x'|}. \end{aligned} \right\} \quad (18.47)$$

В статическом граничном случае различие между запаздывающими и опережающими потенциалами, конечно, исчезает, так что мы возвращаемся к (18.39).

¹⁾ В теории со многими временами $\bar{\rho}$ и \bar{s} — функции x и t_1 , но не зависят от t [ср. (18.23) и (17.15)]; для t_1 надо подставить в подынтегральную функцию (18.44) запаздывающее время $t - |x - x'|/c$.

§ 19. К вопросу о собственной энергии

Теория со многими временами имеет перед одновременной не только то преимущество, что в ней непосредственно видна лорентцовская инвариантность, но также заслуживает особого интереса и в связи с трудностями собственной энергии. Хотя полностью устранить эти трудности без радикальной перестройки теории (ср. § 23) вряд ли возможно, но и частичные решения задачи ввиду их принципиального значения заслуживают внимания, а для этого многовременный формализм предоставляет новые возможности.

Для пояснения напомним аналогичные проблемы классической (лорентцовской) теории электрона: в пределе точечного электрона энергия поля и электромагнитная масса электрона становятся бесконечными, точно так же как и сила, с которой на электрон действует его собственное поле. Но сила определяется из выражения Лорентца путём предельного перехода напряжений собственного поля к той точке, где находится электрон. Эти предельные значения в теории со многими временами многозначны. Здесь надо заметить, что предельный переход к классической теории ($\hbar \rightarrow 0$) очень легко производится и в теории с одним и со многими временами; в частности, остаются справедливыми формулы (18.43 до 47) для собственного поля электрона, причём функции плотности ρ , \bar{s} в потенциалах (18.44 до 47) переходят в классические функции (17.3), так что запаздывающие потенциалы (18.44) становятся идентичными с известными лъенард-вихертовскими потенциалами движущегося заряда и то же справедливо для опережающих потенциалов (18.47). Чтобы найти предельное значение напряжений поля (18.43) в мировой точке (x_1, t_1) электрона, надо устремить к ней точку поля (x, t) . В теории с одним временем при этом заранее подставляется $t = t_1$; при этом, как известно, не получается конечной собственной силы точечного электрона. То же самое будет, если приближаться к электрону из любого пространственно-подобного направления $\left(\frac{c|t - t_1|}{|x - x_1|} < 1\right)$, ибо вне светового конуса, как упоминалось выше, всюду действуют запаздывающие поля (18.44). Но имеется возможность подойти из времени-подобного направления $\left(\frac{c|t - t_1|}{|x - x_1|} > 1\right)$; в положительном конусе ($t > t_1$), по (18.45), собственные поля, а значит, и их предельные значения, исчезают; в отрицательном световом конусе ($t < t_1$) поля, хотя и не равны нулю, но имеют конечные предельные значения, так как особенности запаздывающих и опережающих потенциалов сокращаются в разности (18.46). Это делает возможным построение классической теории взаимодействия поля с точечными зарядами, в которой собственные силы конечны¹⁾. Чтобы обеспечить сохранение энергии,

¹⁾ Вентцель (Wentzel), Zs. f. Phys. 86, 489, 1933 и 87, 726, 1934. Другая формулировка классической теории, дающая то же самое, принадлежит Дираку (Dirac), Proc. Roy. Soc. 167, 148, 1938.

надо определить значение напряжения поля в точке, где находится заряд, арифметическим средним предельных значений при подходе к этой точке из положительного и отрицательного светового конуса; собственная сила тогда сводится к лорентцовскому «трению» ($e^2/6\pi c^3 \cdot \ddot{x}_1$ в системе покоя частицы), т. е. в отличие от лорентцовой теории протяжённого электрона не существует электромагнитной инерции; собственная энергия при надлежащем определении тоже конечна.

Указанный рецепт перехода к пределу в точке, где находится частица, может быть перенесён и в квантовую теорию¹⁾. Вместо этого можно, как показал Дирак²⁾, заменить в перестановочных соотношениях (18.3) инвариантную D -функцию другой, неинвариантной, для которой допустим последующий переход в инвариантную. Мы будем следовать методу Дирака.

Пусть ξ — малый вектор в x -пространстве, а τ — малый промежуток времени; вместе они образуют време́не-подобный четырёхмерный вектор, для которого

$$c^2\tau^2 - \xi^2 = s^2 > 0. \quad (19.1)$$

Впоследствии мы устремим ξ и τ вместе к нулю, но так, что отношение ξ'/ct , определяющее направление четырёхмерного вектора, остаётся неизменным; этот предельный переход мы назовём «предельный переход $s \rightarrow 0$ ». Применим теперь функцию Иордана и Паули (16.20) к определению новой функции, зависящей от параметров ξ, τ :

$$D_s(x, t) = \frac{1}{2} \{ D(x + \xi, t + \tau) + D(x - \xi, t - \tau) \}. \quad (19.2)$$

Эта функция релятивистски неинвариантна, так как она выделяет систему, в которой исчезают пространственные составляющие ξ , но в пределе $s \rightarrow 0$ она переходит в инвариантную D -функцию.

Мы формально заимствуем основные уравнения теории из § 18; но, по способу Дирака, заменим всюду D на D_s [ср. (18.2 до 7, 16, 21)]:

$$\square \psi_\nu(x, t) = 0, \quad (19.3)$$

$$[\psi_\nu(x, t), \psi_{\nu'}(x', t')] = \frac{\hbar}{i} c^2 \delta_{\nu\nu'} D_s(x - x', t - t'), \quad (19.4)$$

$$\left[\left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_n} - e_n i \phi_4(x_n, t_n) \right\} + c \left(a_n \cdot \left\{ \frac{\hbar}{i} \text{grad}_n - \frac{e_n}{c} \psi(x_n, t_n) \right\} \right) + m_n c^2 \beta_n \right] \Phi = 0, \quad (19.5)$$

$$\left\{ \sum_\nu \frac{\partial \psi_\nu(x, t)}{\partial x_\nu} + c \sum_n e_n D_s(x - x_n, t - t_n) \right\} \Phi = 0. \quad (19.6)$$

¹⁾ Вентцель (Wentzel), Zs. f. Phys. 86, 635, 1933.

²⁾ Дирак (Dirac), Annales de l'Institut H. Poincaré 9, 13, 1939 (доложено в Париже в марте 1939 г.).

Что «дополнительное условие» (19.6) совместимо с уравнениями Дирака (19.5) видно из такого же вычисления, как в § 19 [ср. (18.19 и дальше)], ибо в приведённом там доказательстве не использовался частный вид пространственно-временной зависимости D -функции, а требовалось только, чтобы дополнительное условие и перестановочные соотношения содержали одну и ту же функцию, что имеет место и здесь. Условия интегрируемости уравнений Дирака (19.5) получаются с помощью изменённых перестановочных соотношений (19.4) [ср. (18.8)]:

$$\left. \begin{aligned} c |t_n - t_{n'} + \tau| < |x_n - x_{n'} + \xi|, \\ c |t_n - t_{n'} - \tau| < |x_n - x_{n'} - \xi| \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

(для всех пар $n \neq n'$) Область интегрируемости немного уменьшена по сравнению с (18.9), но в пределе $s \rightarrow 0$ принимает прежние размеры.

Чтобы показать выполнимость новых перестановочных соотношений (19.4) в связи с (19.3), мы дадим явное матричное представление операторов $\psi_\nu(x, t)$, удовлетворяющее этим требованиям. Волновым уравнениям (19.3) удовлетворим, подставляя ψ_ν в виде суперпозиции световых волн:

$$\psi_\nu(x, t) = V^{-1/2} \sum_k \left\{ A_{\nu, k} e^{i(kx - |k|ct)} + A_{\nu, k}^* e^{-i(kx - |k|c\tau)} \right\}; \quad (19.8)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} A_{\nu, k} &= \left[\frac{hc}{2|k|} \cos(k\xi - |k|c\tau) \right]^{1/2} a_{\nu, k}, \\ A_{\nu, k}^* &= \left[\frac{hc}{2|k|} \cos(k\xi - |k|c\tau) \right]^{1/2} a_{\nu, k}^* \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$

где $a_{\nu, k}$, $a_{\nu, k}^*$ — матрицы часто употреблявшегося нами вида, с перестановочными соотношениями:

$$[a_{\nu, k}, a_{\nu', k'}] = [a_{\nu, k}^*, a_{\nu', k'}^*] = 0, \quad [a_{\nu, k}, a_{\nu', k'}^*] = \delta_{\nu\nu'} \delta_{kk'}. \quad (1)$$

1) Здесь надо обратить внимание на то, что (из-за мнимого характера ψ_4) $a_{4, k}^*$ означает оператор, эрмитовски сопряжённый с $-a_{4, k}$. Если записать $a_{4, k} = ia_{0k}$, $a_{4, k}^* = ia_{0k}^*$, то перестановочное соотношение эрмитовски сопряжённых матриц a_{0k} и a_{0k}^* будет

$$[a_{0k}, a_{0k}^*] = -1 \quad \text{или} \quad [a_{0k}^*, a_{0k}] = +1;$$

по сравнению с компонентами $\nu = 1, 2, 3$ матрицы a и a^* меняются ролью.

Тогда выражение (19.8, 9) даёт

$$[\phi_v(x, t), \phi_{v'}(x', t')] = i\hbar c \delta_{v,v'} \cdot V^{-1} \sum_k \frac{1}{|k|} \cos(kz - |k|c\tau) \times \\ \times \sin\{k(x - x') - |k|c(t - t')\}.$$

Если заменить здесь (в смысле перехода $V \rightarrow \infty$) $V^{-1} \sum_k \dots$ на $(2\pi)^{-3} \int dk \dots$ то достаточно элементарного вычисления, чтобы показать совпадение с (19.4) [в связи с (19.2) и (16.20)]

Чтобы раскрыть дополнительное условие (19.6), разложим трёхмерные векторы a_k (компоненты $a_{1,k}$, $a_{2,k}$, $a_{3,k}$) и a_k^* на продольные и поперечные составляющие:

$$a_k = \sum_r e_k^{(r)} a_k^{(r)} \quad a_k^* = \sum_r e_k^{(r)} a_k^{(r)*}; \quad (19.10)$$

здесь координаты $e_k^{(r)}$ снова определены формулами (12.29-30) ($e_k^{(1)} = +k/|k|$), а перестановочные соотношения для $a_k^{(r)}$, $a_k^{(r)*}$ задаются через (16.43). Тогда получится:

$$\sum_v \frac{\partial \phi_v(x, t)}{\partial x_v} = iV^{-1/2} \sum_k \left[\frac{\hbar c |k|}{2} \cos(kz - |k|c\tau) \right]^{1/2} \times \\ \times \left\{ (a_k^{(1)} + i a_{4,k}) e^{i(kx - |k|ct)} - (a_k^{(1)*} + i a_{4,k}^*) e^{-i(kx - |k|ct)} \right\}.$$

В пределе $s \rightarrow 0$ [$\cos(kz - |k|c\tau) \rightarrow 1$] выражение (19.8, 9) отвечает определению зависящих от времени операторов потенциала (18.1), где

$$\phi_v(x) = \phi_v(x, 0) = V^{-1/2} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar c}{2|k|}} (a_{v,k} + a_{v,-k}^*) e^{ikx}.$$

Чтобы доказать это, заметим, что, по (19.8), (16.11), (17.7),

$$H^0 = \hbar c \sum_k |k| \sum_v a_{v,k}^* a_{v,k} + \text{const.},$$

следовательно,

$$H^0 a_{v,k} = a_{v,k} (H^0 - \hbar c |k|), \quad H^0 a_{v,k}^* = a_{v,k}^* (H^0 + \hbar c |k|), \\ e^{\frac{it}{\hbar} H^0} a_{v,k} = a_{v,k} e^{\frac{it}{\hbar} (H^0 - \hbar c |k|)}, \quad e^{\frac{it}{\hbar} H^0} a_{v,k}^* = a_{v,k}^* e^{\frac{it}{\hbar} (H^0 + \hbar c |k|)}$$

и, наконец,

$$e^{\frac{it}{\hbar} H^0} \phi_v(x) = \phi_v(x, t) e^{\frac{it}{\hbar} H^0}$$

в согласии с (18.1).

С другой стороны, по (19.2) и (16.20):

$$c \sum_n e_n D_s(x - x_n, t - t_n) = \frac{i}{2V} \sum_k \frac{1}{|k|} \cos(k\xi - |k|c\tau) \times \\ \times \left\{ e^{i(kx - |k|c\tau)} \sum_n e_n e^{-i(kx_n - |k|ct_n)} - \right. \\ \left. - e^{-i(kx - |k|ct)} \sum_n e_n e^{i(kx_n - |k|ct_n)} \right\}.$$

Чтобы тождественно выполнялось условие (19.6) при всех x и t , очевидно, должно быть:

$$\left(a_k^{(1)} + ia_{4,k} + C_k \right) \Phi = 0, \quad \left(a_k^{(1)*} + ia_{4,k}^* + C_k^* \right) \Phi = 0, \quad (19.11)$$

где

$$C_k = \left[\frac{1}{2hcV} \cos(k\xi - |k|c\tau) \right]^{1/2} |k|^{-3/2} \sum_n e_n e^{-i(kx_n - |k|ct_n)}. \quad (19.12)$$

Если записать

$$\left. \begin{aligned} P_k &= h(a_k^{(1)} + ia_{4,k}), & P_k^* &= h(a_k^{(1)*} + ia_{4,k}^*), \\ Q_k &= \frac{1}{2i}(a_k^{(1)*} - ia_{4,k}^*), & Q_k^* &= -\frac{1}{2i}(a_k^{(1)} - ia_{4,k}). \end{aligned} \right\} (19.13)$$

то Q_k, Q_k^* и P_k, P_k^* — канонически сопряжённые переменные, так как

$$[P_k, Q_k] = [P_k^*, Q_k^*] = \frac{h}{i},$$

в то время как другие пары коммутируют. Рассматривая функцию Шредингера Φ как функцию от Q_k и Q_k^* , так что $P_k = -i\hbar \partial / \partial Q_k$, $P_k^* = -i\hbar \partial / \partial Q_k^*$, перепишем уравнения (19.11) с помощью (19.13):

$$\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial Q_k} + C_k \right) \Phi = 0, \quad \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial Q_k^*} + C_k^* \right) \Phi = 0.$$

Эти уравнения интегрируются так:

$$\Phi = S \cdot \Phi^{\text{tr}}, \quad (19.14)$$

где

$$S = e^{-i \sum_k (C_k Q_k + C_k^* Q_k^*)}, \quad (19.15)$$

и где Φ^{tr} не зависит от Q_k и Q_k^* :

$$\frac{\partial \Phi^{\text{tr}}}{\partial Q_k} = \frac{\partial \Phi^{\text{tr}}}{\partial Q_k^*} = 0. \quad (19.16)$$

Подставляем теперь (19.14) в уравнения Дирака (19.5); снова возникает задача перенести оператор S налево (ср. § 17). Сначала из (19.15)

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial S}{\partial t_n} = -\hbar \sum_k \left(\frac{\partial C_k^*}{\partial t_n} Q_k^* + \frac{\partial C_k}{\partial t_n} Q_k \right) \cdot S$$

или, по (19.12):

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial S}{\partial t_n} = & ie_n \left(\frac{\hbar c}{2V} \right)^{1/2} \sum_k \left[\frac{1}{|k|} \cos(k\xi - |k|c\tau) \right]^{1/2} \times \\ & \times \left\{ Q_k^* e^{i(kx_n - |k|c t_n)} - Q_k e^{-i(kx_n - |k|c t_n)} \right\} \cdot S. \end{aligned}$$

Далее, по (19.8, 9 и 13):

$$\begin{aligned} -e_n i \phi_4(x_n, t_n) = & -ie_n \left(\frac{\hbar c}{2V} \right)^{1/2} \sum_k \left[\frac{1}{|k|} \cos(k\xi - |k|c\tau) \right]^{1/2} \times \\ \times \left\{ \left(Q_k^* - \frac{i}{2\hbar} P_k \right) e^{i(kx_n - |k|c t_n)} - \left(Q_k + \frac{i}{2\hbar} P_k^* \right) e^{-i(kx_n - |k|c t_n)} \right\}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial S}{\partial t_n} - e_n i \phi_4(x_n, t_n) S = & ie_n \left(\frac{\hbar c}{2V} \right)^{1/2} \sum_k \left[\frac{1}{|k|} \cos(k\xi - |k|c\tau) \right]^{1/2} \times \\ & \times \frac{1}{2} \left\{ e^{i(kx_n - |k|c t_n)} \frac{\partial}{\partial Q_k} + e^{-i(kx_n - |k|c t_n)} \frac{\partial}{\partial Q_k^*} \right\} S. \end{aligned}$$

При учёте (19.14, 15, 16)

$$\left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_n} - e_n i \phi_4(x_n, t_n) \right\} \Phi = S \left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_n} + e_n Y_n \right\} \Phi^{\text{tr}}, \quad (19.17)$$

где

$$\begin{aligned} Y_n = & \left(\frac{\hbar c}{2V} \right)^{1/2} \sum_k \left[\frac{1}{|k|} \cos(k\xi - |k|c\tau) \right]^{1/2} \times \\ & \times \frac{1}{2} \left\{ e^{i(kx_n - |k|c t_n)} C_k + e^{-i(kx_n - |k|c t_n)} C_k^* \right\}, \quad (19.18) \end{aligned}$$

или, по (19.12):

$$\begin{aligned} Y_n = & \frac{1}{2V} \sum_k \frac{1}{|k|^2} \cos(k\xi - |k|c\tau) \times \\ & \times \sum_{n'} e_{n'} \cos \{ k(x_{n'} - x_n) - |k|c(t_{n'} - t_n) \}. \end{aligned}$$

С помощью функции

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{|k|^2} \cos(kx - |k|ct) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \frac{1}{|k|^2} \cos(kx - |k|ct) \end{aligned} \quad (19.19)$$

Y_n , очевидно, может быть представлено так:

$$Y_n = \frac{1}{4} \sum_{n'} e_{n'} \{ U(x_{n'} - x_n + \xi, t_{n'} - t_n + \tau) + U(x_{n'} - x_n - \xi, t_{n'} - t_n - \tau) \}. \quad (19.20)$$

Но $U(x, t)$ тождественно с функцией (18.35), в которой положено $t_1 = 0$; по (18.37, 38) получается:

$$U(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|x|} & \text{при } c|t| < |x|, \\ 0 & \text{при } c|t| > |x|. \end{cases} \quad (19.21)$$

Поэтому член суммы $n' = n$ в (19.2) исчезает, так как четырёхмерный вектор $\xi, c\tau$ — типа (19.1). Для $n' \neq n$, напротив, четырёхмерные векторы $x_{n'} - x_n \pm \xi, c(t_{n'} - t_n \pm \tau)$ — типа (19.7), следовательно,

$$Y_n = \frac{1}{4} \sum_{\substack{n' \\ (n' \neq n)}} \frac{e_{n'}}{4\pi} \left\{ \frac{1}{|x_{n'} - x_n + \xi|} + \frac{1}{|x_{n'} - x_n - \xi|} \right\}, \quad (19.22)$$

и в пределе $s \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} Y_n = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n' \\ (n' \neq n)}} \frac{e_{n'}}{4\pi|x_{n'} - x_n|}. \quad (19.23)$$

Это равно половине кулоновского потенциала остальных зарядов ($n' \neq n$) в точке n -го электрона. Надо заметить, что бесконечный собственный потенциал точечных зарядов благодаря введению времени-подобного вектора $\xi, c\tau$ сюда не входит.

С другой стороны, если разложить трёхмерный потенциал $\phi(x, t)$ на продольные и поперечные составляющие

$$\phi = \phi^{\text{long}} + \phi^{\text{tr}}, \quad (19.24)$$

где ϕ^{long} содержит члены $\sim a_k^{(1)}$ и $a_k^{(1)*}$, то по (19.13):

$$\begin{aligned} -\frac{e_n}{c} \phi^{\text{long}}(x_n, t_n) &= \\ &= ie_n \left(\frac{\hbar}{2cV} \right)^{1/2} \sum_k \frac{k}{|k|} \left[\frac{1}{|k|} \cos(k\xi - |k|c\tau) \right]^{1/2} \times \\ &\times \left\{ \left(Q_k^* + \frac{i}{2\hbar} P_k \right) e^{i(kx_n - |k|ct_n)} - \left(Q_k - \frac{i}{2\hbar} P_k^* \right) e^{-i(kx_n - |k|ct_n)} \right\} \end{aligned}$$

Здесь члены $\sim Q_k^*$ и Q_k снова сократятся при образовании

$$\frac{\hbar}{i} \text{grad}_n S - \frac{e_n}{c} \psi^{\text{long}}(x_n, t_n) S,$$

и, по (19,24), получится аналогично (19,17):

$$\left\{ \frac{\hbar}{i} \text{grad}_n - \frac{e_n}{c} \psi(x_n, t_n) \right\} \Phi = \\ = S \left\{ \frac{\hbar}{i} \text{grad}_n - \frac{e_n}{c} \psi^{\text{tr}}(x_n, t_n) + \frac{e_n}{c} \mathfrak{B}_n \right\} \Phi^{\text{tr}}, \quad (19,25)$$

где \mathfrak{B}_n отличаются от Y_n (19,18) только множителем $k/|k|$ под знаком суммы. Поэтому получатся формулы, аналогичные (19,20 и 19):

$$\mathfrak{B}_n = \frac{1}{4} \sum_{n'} e_{n'} \left\{ \mathfrak{B}(x_{n'} - x_n + \xi, t_{n'} - t_n + \tau) + \right. \\ \left. + \mathfrak{B}(x_{n'} - x_n - \xi, t_{n'} - t_n - \tau) \right\}, \quad (19,26)$$

где

$$\mathfrak{B}(x, t) = \frac{1}{V} \sum_k \frac{k}{|k|^3} \cos(kx - |k|ct). \quad (19,27)$$

Из сравнения с (19,19) находим:

$$\mathfrak{B}(x, t) = -c \text{grad} \int_0^t dt U(x, t).$$

Так как, по (19,21),

$$c \int_0^t dt U(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{ct}{|x|} & \text{при } c|t| < |x|, \\ \frac{1}{4\pi} & \text{при } ct > |x|, \\ -\frac{1}{4\pi} & \text{при } ct < -|x|, \end{cases}$$

то

$$\mathfrak{B}(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{ct \cdot x}{|x|^3} & \text{при } c|t| < |x|, \\ 0 & \text{при } c|t| > |x|. \end{cases} \quad (19,28)$$

В \mathfrak{B}_n (19,26) поэтому снова выпадет член суммы $n' = n$ (из-за $c|\tau| > |\xi|$), так что остается:

$$\mathfrak{B}_n = \frac{c}{4} \sum_{\substack{n' \\ (n' \neq n)}} \frac{e_{n'}}{4\pi} \left\{ \frac{(t_{n'} - t_n + \tau)(x_{n'} - x_n + \xi)}{|x_{n'} - x_n + \xi|^3} + \right. \\ \left. + \frac{(t_{n'} - t_n - \tau)(x_{n'} - x_n - \xi)}{|x_{n'} - x_n - \xi|^3} \right\}, \quad (19,29)$$

а в пределе $s \rightarrow 0$:

$$\lim_{s=0} \beta_a = \frac{c}{2} \sum_{\substack{n' \\ (n' \neq n)}} \frac{e_{n'}}{4\pi} \frac{(t_{n'} - t_n)(x_{n'} - x_n)}{|x_{n'} - x_n|^3}. \quad (19.30)$$

По (19.5, 17, 25) уравнения Дирака для Φ^{tr} гласят так:

$$\left[\left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_n} + e_n Y_n \right\} + \right. \\ \left. + c \left(a_n \cdot \left\{ \frac{\hbar}{i} \text{grad}_n + \frac{e_n}{c} \beta_a - \frac{e_n}{c} \psi^{\text{tr}}(x_n, t_n) \right\} + \right. \right. \\ \left. \left. + m_n c^2 \beta_a \right) \right] \Phi^{\text{tr}} = 0. \quad (19.31)$$

В это уравнение, кроме электронных координат, ещё входят только поперечные составляющие поля.

Проверим ещё, как изменяется по (19.31) Φ^{tr} вдоль «прямой одного времени» $t_1 = t_2 = \dots = t$.

Положим для сокращения

$$\Phi_{t_1=t_2=\dots=t}^{\text{tr}} = F'(t); \quad (19.32)$$

тогда вследствие того, что

$$\frac{\partial F'}{\partial t} = \left(\sum_n \frac{\partial \Phi^{\text{tr}}}{\partial t_n} \right)_{t_1=t_2=\dots=t},$$

и с обозначениями

$$H^P = \sum_n \left\{ c \left(a_n \cdot \frac{\hbar}{i} \text{grad}_n \right) + m_n c^2 \beta_a \right\}$$

[ср. (17.12)] и

$$H^C = \sum_n e_n \{ Y_n + (a_n \cdot \beta_n) \}_{t_1=t_2=\dots=t} \quad (19.33)$$

выйдет:

$$\left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H^P + H^C - \sum_n e_n (a_n \cdot \psi^{\text{tr}}(x_n, t)) \right\} F' = 0. \quad (19.34)$$

В пределе $S \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow 0$), по (19.30), исчезнет слагаемое β_a ; по (19.23):

$$\lim_{s=0} H^C = \frac{1}{8\pi} \sum_{n \neq n'} \frac{e_n e_{n'}}{|x_n - x_{n'}|}, \quad (19.35)$$

а это как раз кулоновская энергия электронов, но не включающая, в противоположность (17.39), собственных потенциалов. Аналогично (18.10) мы положим:

$$F^{\text{tr}} = e^{-\frac{it}{\hbar} H^{\text{tr}}} F', \quad F' = e^{\frac{it}{\hbar} H^{\text{tr}}} F^{\text{tr}},$$

где H^{tr} означает часть энергии поля в вакууме, обязанную поперечным волнам [ср. (17.34)]. В (19.34) можно снова перенести множитель $e^{\frac{i}{\hbar} H^{\text{tr}}}$ налево по формуле

$$\psi^{\text{tr}}(x_n, t) e^{\frac{it}{\hbar} H^{\text{tr}}} = e^{\frac{it}{\hbar} H^{\text{tr}}} \psi^{\text{tr}}(x_n)$$

(по (18.1), так как $H^0 - H^{\text{tr}}$ перестановочно с ψ^{tr} , имеет место:

$$\psi^{\text{tr}}(x, t) = e^{\frac{it}{\hbar} H^0} \psi^{\text{tr}}(x) e^{-\frac{it}{\hbar} H^0} = e^{\frac{it}{\hbar} H^{\text{tr}}} \psi^{\text{tr}}(x) e^{-\frac{it}{\hbar} H^{\text{tr}}}.$$

Отсюда, как легко видеть, получается для F^{tr} дифференциальное уравнение (17.46, 47), где только значение HC и перестановочные соотношения для ψ^{tr} изменяются согласно (19.33) и (19.4).

После того как члены собственного потенциала отпали, собственная энергия электронов может получаться только за счёт взаимодействия электронов с поперечными волнами. Чтобы исследовать этот вопрос, ограничимся тем случаем, когда имеется один единственный электрон. Тогда мы имеем только одно уравнение Дирака (19.31) для Φ^{tr} ; в нём исчезают Y_n и δ_n [нет членов $n' \neq n$ в (19.22, 29)]. Для сокращения введём четырёхмерные векторы

$$(x_1 \text{ } ict_1) = \vec{x} \quad (i\alpha\beta, \beta) = \vec{\gamma};$$

с ними (19.31) имеет вид:

$$\left\{ \left(\vec{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) + \mu - \chi \right\} \Phi^{\text{tr}} = 0, \quad (19.36)$$

$$\text{где} \quad \mu = \frac{mc}{\hbar}, \quad (19.37)$$

$$\chi = \frac{ie}{\hbar c} (\vec{\gamma} \cdot \psi^{\text{tr}}(\vec{x})). \quad (19.38)$$

Мы будем рассматривать χ как возмущение, т. е. разложим Φ^{tr} по степеням параметра e :

$$\Phi^{\text{tr}} = \Phi^0 + \Phi' + \Phi'' + \dots, \quad (19.39)$$

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \left(\vec{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) + \mu \right\} \Phi^0 &= 0, \\ \left\{ \left(\vec{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) + \mu \right\} \Phi' &= \chi \Phi^0, \\ \left\{ \left(\vec{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) + \mu \right\} \Phi'' &= \chi \Phi', \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (19.40)$$

Применяя оператор $\left(\vec{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right) - \mu$ к этим уравнениям, благодаря свойству

$$\gamma_{\nu} \gamma_{\nu'} + \gamma_{\nu'} \gamma_{\nu} = 2\delta_{\nu\nu'}, \quad (19.41)$$

как известно, получим:

$$\left. \begin{aligned} (\square - \mu^2) \Phi^0 &= 0, \\ (\square - \mu^2) \Phi' &= \chi' \Phi^0, \\ (\square - \mu^2) \Phi'' &= \chi' \Phi', \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (19.42)$$

где

$$\chi' = \left\{ \left(\vec{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) - \mu \right\} \chi. \quad (19.43)$$

Для вычисления собственной энергии электрона достаточно выбрать функцию Шредингера Φ^0 такого невозмущённого состояния, в котором нет световых квантов:

$$\Phi_N^0 = \begin{cases} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x})} \cdot u, & \text{когда все } N_k^{(r)} = 0, \\ 0 & \text{в других случаях;} \end{cases} \quad (19.44)$$

при этом u — спинорная амплитуда, удовлетворяющая, по (19.40), уравнению

$$\{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) + \mu\} u = 0; \quad (19.45)$$

конечно, согласно (19.42), должно быть

$$\vec{p}^2 = -\mu^2 \quad (19.46)$$

(hc — вектор энергии-импульса невозмущённого электрона).

Для вычисления Φ' по (19.40 или 42) надо образовать $\chi\Phi^0$ или $\chi'\Phi^0$. Если применить оператор ψ^{tr} [ср. (19.8 9. 10)] к Φ^0 (19.44), то операторы $a_k^{(r)}$ дадут 0 (они отвечают процессам поглощения, невозможным при отсутствии квантов), так что останутся только члены $\sim a_k^{(r)*}$:

$$\begin{aligned} \psi^{\text{tr}}(\vec{x}) \Phi^0 &= \\ &= \left(\frac{hc}{2V}\right)^{1/2} \sum_{\vec{k}} \left[\frac{1}{|\kappa|} \cos(\vec{k} \cdot \vec{\xi}) \right]^{1/2} \sum_{r=2,3} e_k^{(r)} a_k^{(r)*} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x})} \Phi^0 \end{aligned}$$

$(\vec{k} = (k, l | k|), \vec{\xi} = (\xi, l c \tau))$. Если образовать отсюда по (19.38 и 43), $\chi' \Phi^0$, то дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial x}$ в (19.43) действует на показательную функцию $e^{i(\vec{p} - \vec{k} \cdot \vec{x})}$, так что

$$\chi' \Phi^0 = i e (2hcV)^{-1/2} \sum_k \left[\frac{1}{|k|} \cos(\vec{k} \cdot \vec{\xi}) \right]^{1/2} \{ i(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} - \vec{k}) - \mu \} \times \\ \times \sum_{r=2,3} (\gamma \cdot e_k^{(r)}) a_k^{(r)*} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x})} \Phi^0.$$

Но так как, с другой стороны,

$$(\square - \mu^2) e^{i(\vec{p} - \vec{k} \cdot \vec{x})} = - \{ (\vec{p} - \vec{k})^2 + \mu^2 \} e^{i(\vec{p} - \vec{k} \cdot \vec{x})} = \\ = 2(\vec{p} \cdot \vec{k}) e^{i(\vec{p} - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

(благодаря тому, что $\vec{p}^2 = -\mu^2$ и $\vec{k}^2 = 0$) из (19.42) получится для Φ' :

$$\Phi' = \frac{1}{2} e (2hcV)^{-1/2} \sum_k \left[\frac{1}{|k|} \cos(\vec{k} \cdot \vec{\xi}) \right]^{1/2} \frac{1}{(\vec{p} \cdot \vec{k})} \{ i(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} - \vec{k}) - \mu \} \times \\ \times \sum_{r=2,3} (\gamma \cdot e_k^{(r)}) a_k^{(r)*} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x})} \Phi^0.$$

Здесь мы учтём, что, по (19.41),

$$\{ i(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} - \vec{k}) - \mu \} (\gamma \cdot e_k^{(r)}) = \\ = -(\gamma \cdot e_k^{(r)}) \{ i(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} - \vec{k}) + \mu \} + 2i(p - k \cdot e_k^{(r)}),$$

или, так как $(k \cdot e_k^{(r)}) = 0$ (для $r=2,3$) и с учётом (19.45):

$$\{ i(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} - \vec{k}) - \mu \} (\gamma \cdot e_k^{(r)}) u = i \{ (\gamma \cdot e_k^{(r)}) (\vec{\gamma} \cdot \vec{k}) + 2(p \cdot e_k^{(r)}) \} u.$$

Итак, выйдет

$$\Phi' = -\frac{1}{2} e (2hcV)^{-1/2} \sum_k \left[\frac{1}{|k|} \cos(\vec{k} \cdot \vec{\xi}) \right]^{1/2} \frac{1}{(\vec{p} \cdot \vec{k})} \times \\ \times \sum_{r=2,3} \{ (\gamma \cdot e_k^{(r)}) (\vec{\gamma} \cdot \vec{k}) + 2(p \cdot e_k^{(r)}) \} a_k^{(r)*} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x})} \Phi^0. \quad (19.47)$$

Чтобы вычислить тем же способом Φ'' , мы должны снова применить оператор $\psi^{\text{tr}}(\vec{x})$, но только к Φ' . Отсюда возникают, с одной стороны, члены $\sim a_{k'}^{(r')*} a_k^{(r)} \Phi^0$, отвечающие испусканию двух квантов, и, с другой стороны, — члены $\sim a_{k'}^{(r')} a_k^{(r)*} \Phi_0$, отличные от нуля только при $k' = k$, $r' = r$:

$$a_{k'}^{(r')} a_k^{(r)*} \Phi^0 = \Phi^0.$$

В Φ'' для нас здесь интересна только эта последняя часть (Φ_0''), так как только она определяет собственную энергию $\sim e^2$. По (19.8, 9, 10, 42 и 43) для этой составляющей будет:

$$\begin{aligned} (\square - \mu^2) \Phi_0'' = & \\ = -\frac{i}{4} \frac{e^2}{\hbar c} \left\{ (\vec{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x}) - \mu \right\} \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{|k|} \cos(\vec{k} \cdot \vec{\xi}) \frac{1}{(\vec{p} \cdot \vec{k})} \times & \\ \times \sum_{r=2,3} (\gamma \cdot \vec{e}_k^{(r)}) \{ (\gamma \cdot \vec{e}_k^{(r)}) (\vec{\gamma} \cdot \vec{k}) + 2(\vec{p} \cdot \vec{e}_k^{(r)}) \} \Phi^0, & \end{aligned}$$

или

$$(\square - \mu^2) \Phi_0'' = \lambda \cdot \Phi^0, \quad (19.48)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda = -\frac{i}{2} \frac{e^2}{\hbar c} \left\{ (\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) - \mu \right\} \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{|k|} \cos(\vec{k} \cdot \vec{\xi}) \frac{1}{(\vec{p} \cdot \vec{k})} \times & \\ \times \left\{ (\vec{\gamma} \cdot \vec{k}) + \sum_{r=2,3} (\gamma \cdot \vec{e}_k^{(r)}) (\vec{p} \cdot \vec{e}_k^{(r)}) \right\} \Phi^0 & \quad (19.49) \end{aligned}$$

(благодаря тому что $(\gamma \cdot \vec{e}_k^{(r)})^2 = 1$). Мы утверждаем, что члены $\sim \sum_r (\gamma \cdot \vec{e}_k^{(r)}) (\vec{p} \cdot \vec{e}_k^{(r)})$ могут быть опущены, потому что обращается в нуль включающая их сумма по k или интеграл по k -пространству. Именно: если проинтегрировать сначала при заданном направлении трёхмерного вектора k (т. е. при $\vec{e}_k^{(r)} = \text{const.}$), т. е. по $|k| = x$, то $\vec{k} \cdot \vec{\xi}$ и $\vec{p} \cdot \vec{k}$ меняются пропорционально x , и появляется интеграл $\int_0^\infty dx \cos(\beta x)$. Его можно сделать сходящимся с помощью множи-

¹⁾ Теория с одним временем (§ 17) даёт те же формулы с $\vec{\xi} = 0$; тогда сумма по k в (19.49) расходится, и (19.48) даёт бесконечную собственную энергию электрона как это впервые вычислил Валлер (Waller) Zs. f. Phys. 62, 673, 1930.

теля $e^{-\alpha x}$, и тогда

$$\int_0^{\infty} dx \cos(\beta x) e^{-\alpha x} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$$

после предельного перехода $\alpha \rightarrow 0$ исчезает. Надо заметить, что этот результат основан на выбранной нами последовательности предельных переходов $\alpha \rightarrow 0$ до $s \rightarrow 0$ (т. е. $\beta \rightarrow 0$). Важно, кроме того, чтобы β было отлично от нуля для всех направлений k , что гарантируется временным характером $\vec{\xi}$. Частный вид множителя, обеспечивающего сходимость, напротив, не играет роли. Итак, формула (19.49) упрощается:

$$\lambda = -\frac{i}{2} \frac{e^2}{\hbar c} \{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) - \mu\} \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{|k|} \cos(\vec{k} \cdot \vec{\xi}) \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{k})}{(\vec{p} \cdot \vec{k})}$$

Учитывая, кроме того, что, по (19.41),

$$\{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) - \mu\} (\vec{\gamma} \cdot \vec{k}) = -(\vec{\gamma} \cdot \vec{k}) \{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) + \mu\} + 2i(\vec{p} \cdot \vec{k}),$$

а оператор $\{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) + \mu\}$ в применении к Φ^0 , по (19.45), даёт нуль, видим, что λ в (19.48) может быть заменена выражением

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{e^2}{\hbar c} \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{|k|} \cos(\vec{k} \cdot \vec{\xi}) = \\ &= \frac{e}{\hbar c} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{|k|} \cos(k\xi - |k|c\tau). \end{aligned} \quad (19.50)$$

Входящий сюда интеграл по k -пространству может быть представлен обеими релятивистски инвариантными пространственно-временными функциями (4.27)¹⁾ (при $\mu = 0$, $x = \xi$, $t = \tau$); поэтому величина λ инвариантна в том смысле, что она зависит только от абсолютной величины четырёхмерного вектора $\vec{\xi}$, т. е. только от s [ср. (19.1)]. Поэтому для вычисления λ можно выбрать ту систему отсчёта, в которой исчезают пространственные компоненты $\vec{\xi}$:

$$\xi = 0, \quad c|\tau| = s, \quad \cos(\vec{k} \cdot \vec{\xi}) = \cos(|k|s) = \cos(xs).$$

1) Причём их суммой, а не разностью, как D .

Тогда если снова ввести для сходимости множитель $e^{-\alpha x}$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dk}{|k|} \cos(\vec{k} \cdot \vec{\xi}) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \pi 4\pi \int_0^{\infty} dx x \cos(xs) e^{-\alpha x} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \pi 4\pi \frac{\alpha^2 - s^2}{(\alpha^2 + s^2)^2} = -\frac{4\pi}{s^2}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\lambda = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{1}{s^2}. \quad (19.51)$$

Так как в пределе $s \rightarrow 0$ величина λ бесконечна, то по (19.48), то же относится и к Φ_0'' и, следовательно, теория в этой форме не свободна от бесконечностей. Но в вычисленном здесь члене $\sim e^2$ бесконечность, как заметил Дирак, такого рода, что её можно исключить простым изменением функции Гамильтона электрона. Именно, если заменить в уравнении Дирака (19.36) μ на $\mu + \eta$, где η — постоянная которую мы принимаем малой порядка e^2 , то вместо третьего уравнения (19.40 и 42) будет:

$$\left\{ \left(\vec{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) + \mu \right\} \Phi'' = \lambda \Phi' - \eta \Phi_0,$$

$$(\square - \mu^2) \Phi'' = \lambda \Phi' - \eta \left\{ \left(\vec{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) - \mu \right\} \Phi_0 = \lambda' \Phi' + 2\eta \mu \Phi_0,$$

и вместо (19.48):

$$(\square - \mu^2) \Phi_0'' = (\lambda + 2\eta \mu) \Phi_0.$$

Значит если выбрать

$$\eta = -\frac{\lambda}{2\mu} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{1}{\mu} \frac{1}{s^2}, \quad (19.52)$$

то Φ_0'' исчезнет, а вся теория во втором приближении теории возмущения освободится от бесконечностей. Как легко видеть, это верно и при наличии нескольких электронов, в случае, если изменены все массы покоя m_a : по (19.37) массы m_n надо заменить на

$$m_n(s) = m_n + \frac{1}{4\pi^2} \frac{e^2 \hbar}{c^3} \frac{1}{m_n} \frac{1}{s^2}. \quad (19.53)$$

Значит, если приписать свободным частицам массы покоя $m_n(s)$, становящиеся в пределе $s \rightarrow 0$ положительно бесконечными, то в электромагнитном поле они ведут себя как электроны с массами

покоя m_n , что можно истолковать как прибавку к «механической массе покоя» $m_n(s)$ электромагнитной массы покоя $-\frac{1}{4\pi^2} \frac{e^2 h}{c^3} \frac{1}{m_n} \frac{1}{s^2}$.

Итак, найдена квантовая теория взаимодействия поля с точечными зарядами, которая, по крайней мере с точностью до членов $\sim e^2$, не даёт бесконечности и в пределе $s=0$. Хотя введение времени-подобного вектора $\xi, c\tau$ означало вначале выделение той системы, в которой исчезают пространственные компоненты ξ всё же в рассмотренном приближении в пределе $s=0$ теория инвариантна относительно преобразований Лорентца¹⁾.

¹⁾ Автору неизвестно, насколько усовершенствована теория после парижских докладов Дирака в марте 1939 г. (ср. сноску 2, стр. 185). Дальнейшие вопросы относятся к более высоким приближениям (члены e^4, e^6, \dots) и к представлению электронов квантованным волновым полем (ср. следующую главу).

ГЛАВА V

КВАНТОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ ПО ПРИНЦИПУ ПАУЛИ

§ 20. Свободные электроны

Описание взаимодействия световых волн с электронами, данное в прошлой главе, не даёт места аналогии между световыми квантами и электронами; в то время как квантовая природа света получалась как следствие квантования световых волн, электроны вводились с самого начала как индивидуальные единицы и описывались по методу квантовой механики в конфигурационном пространстве в том смысле, что функция Шредингера рассматривалась как функция от координат различных электронов. Аналогичное имело место при описании мезонов, с одной стороны, и протон-нейтрона, с другой, в теории мезонного поля (главы II, III); удовлетворить тому требованию, чтобы частицы с целым и полуцелым спином описывались единообразно, можно только путём квантования волновых полей электронов, протонов и т. п.¹⁾ При этом принцип исключения Паули, справедливый для этих частиц, вносит некоторые изменения в приведённый до сих пор канонический формализм: «Квантование по статистике Бозе-

¹⁾ Говорят о «вторичном квантовании» или «гиперквантовании» в том смысле, что переход от классической механики к квантовой отвечает «первичному квантованию». Аналогию между световым квантом и электроном можно, конечно, получить и путём описания световых квантов с помощью конфигурационного пространства [ср. Дирак (Dirac), Proc. Roy. Soc. **114**, 243, 1927; Паули (Pauli), Handbuch der Physik Geiger—Scheel **24**, часть 1-я, 259], но при этом теория теряет формальную простоту в случае если надо описывать процессы поглощения и испускания, при которых меняется число частиц.

Эйнштейна» заменяется «квантованием по принципу Паули». Для пояснения рассмотрим сначала свободные электроны.

Мы исходим из дираковского волнового уравнения для свободных электронов:

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + E\right) \psi = 0, \quad E = \frac{c\hbar}{i} (\alpha \cdot \text{grad}) + mc^2 \beta; \quad (20.1)$$

ψ означает четырёхкомпонентное спинорное поле; компоненты вектора α и $\beta = \alpha^{(4)}$ — дираковские матрицы со свойствами¹⁾ (20.2):

$$\alpha^{(\nu)} = \alpha^{(\nu)*}, \quad \alpha^{(\mu)} \alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu)} \alpha^{(\mu)} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (20.2)$$

Рассмотрим сначала комплексные составляющие поля как классические функции поля. Функция Лагранжа задачи может быть записана так:

$$\begin{aligned} L &= -\psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + E \right) \psi = \\ &= -\psi^* \left\{ \frac{\hbar}{i} \dot{\psi} + \frac{c\hbar}{i} (\alpha \cdot \text{grad} \psi) + mc^2 \beta \psi \right\} = \\ &= -\sum_{\rho} \psi_{\rho}^* \left\{ \frac{\hbar}{i} \dot{\psi}_{\rho} + \frac{c\hbar}{i} \sum_k \sum_{\sigma} \alpha_{\rho\sigma}^{(k)} \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x_k} + mc^2 \sum_{\sigma} \beta_{\rho\sigma} \psi_{\sigma} \right\}, \quad (20.3) \end{aligned}$$

ибо если L считается функцией ψ_{σ} и ψ_{σ}^* и их производных, то вариация ψ_{σ} , по (1.2), даёт

$$\frac{\hbar}{i} \dot{\psi}_{\sigma}^* + \frac{c\hbar}{i} \sum_k \sum_{\rho} \frac{\partial \psi_{\rho}^*}{\partial x_k} \alpha_{\rho\sigma}^{(k)} - mc^2 \sum_{\rho} \psi_{\rho}^* \beta_{\rho\sigma} = 0,$$

что совпадает с комплексно сопряжённым с (20.1) уравнением, тогда как само это уравнение получается из вариации по ψ_{ρ}^* , производные которой не входят в L :

$$-\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\rho}^*} = \frac{\hbar}{i} \dot{\psi}_{\rho} + \frac{c\hbar}{i} \sum_k \sum_{\sigma} \alpha_{\rho\sigma}^{(k)} \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x_k} + mc^2 \sum_{\sigma} \beta_{\rho\sigma} \psi_{\sigma} = 0.$$

1) Мы для краткости вводим несимметричное в ψ и ψ^* представление, однако заметим, что эту несимметрию легко устранить прибавлением пространственно-временной дивергенции (ср. сноску, стр. 8).

Плотности заряда и тока надо, по (3.11), определить так:

$$\rho = -\epsilon \sum_{\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}} \dot{\psi}_{\sigma} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}^*} \dot{\psi}_{\sigma}^* \right) = \epsilon \hbar \sum_{\sigma} \dot{\psi}_{\sigma}^* \dot{\psi}_{\sigma},$$

$$s_k = -i\epsilon \sum_{\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}} \dot{\psi}_{\sigma} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}^*} \dot{\psi}_{\sigma}^* \right) = \epsilon \hbar c \sum_{\rho\sigma} \dot{\psi}_{\rho}^* \alpha_{\rho\sigma}^{(k)} \dot{\psi}_{\sigma},$$

так что

$$\rho = \epsilon \hbar \cdot \dot{\psi}^* \dot{\psi}, \quad s = \epsilon \hbar c \dot{\psi}^* \alpha \dot{\psi} \quad (20.4)$$

в согласии с известными и выражениями теории Дирака. С помощью матриц

$$\gamma^{(k)} = -i\beta\alpha^{(k)} = \alpha^{(i)}\beta \quad (k = 1, 2, 3), \quad \gamma^{(4)} = \beta, \quad (20.5)$$

тоже имеющих свойства

$$\gamma^{(\nu)} = \gamma^{(\nu)*}, \quad \gamma^{(\mu)}\gamma^{(\nu)} + \gamma^{(\nu)}\gamma^{(\mu)} = 2\delta_{\mu\nu},$$

и в обозначении

$$\psi^{\dagger} = i\psi^* \beta \quad (20.6)$$

перепишем формулы (20.1, 3, 4):

$$\left(\sum_{\nu} \gamma^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + \mu \right) \psi = 0 \quad \left(\mu = \frac{mc}{\hbar} \right), \quad (20.7)$$

$$L = -\frac{\hbar c}{i} \psi^{\dagger} \left(\sum_{\nu} \gamma^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + \mu \right) \psi, \quad (20.8)$$

$$s_{\nu} = \epsilon \hbar c \cdot \psi^{\dagger} \gamma^{(\nu)} \psi \quad \left(\sum_{\nu} \frac{\partial s_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \right). \quad (20.9)$$

Образованный по правилу (2.8), соответственно (3.8), канонический тензор энергии импульса таков:

$$T_{\mu\nu}^0 = \frac{\hbar c}{i} \psi^{\dagger} \gamma^{(\mu)} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}} + L \delta_{\mu\nu}.$$

Член $L \delta_{\mu\nu}$ исчезает, если удовлетворено уравнение Дирака (20.7). Прибавлением тензора

$$T_{\mu\nu}^1 = -\frac{\hbar c}{2i} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \psi^{\dagger} \gamma^{(\mu)} \psi,$$

дивергенция которого равна нулю, в силу уравнения непрерывности четырёхмерного тока, получим действительный тензор ¹⁾:

$$T''_{\mu\nu} = \frac{hc}{2i} \left(\psi \dagger \gamma^{(\mu)} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \psi \dagger}{\partial x_\nu} \gamma^{(\mu)} \psi \right).$$

Этот тензор ещё несимметричен, но так как имеет место не только $\sum_\mu \partial T''_{\mu\nu} / \partial x_\mu = 0$, но, как легко проверить, и

$\sum_\nu \partial T''_{\mu\nu} / \partial x_\nu = 0$, то симметризованный тензор $T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T''_{\mu\nu} + T''_{\nu\mu})$ каждый раз удовлетворяет закону сохранения $\sum_\mu \partial T_{\mu\nu} / \partial x_\mu = 0$.

$$T_{\mu\nu} = \frac{hc}{4i} \left\{ \psi \dagger \gamma^{(\mu)} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \psi \dagger \gamma^{(\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \psi \dagger}{\partial x_\nu} \gamma^{(\mu)} \psi - \frac{\partial \psi \dagger}{\partial x_\mu} \gamma^{(\nu)} \psi \right\}. \quad (20.10)$$

Преобразования Лорентца $\bar{x}_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu$ преобразуют ψ и $\psi \dagger$ по формулам $\bar{\psi} = S\psi$, $\bar{\psi} \dagger = \psi \dagger S^{-1}$, где матрица S определена через

$$S^{-1} \gamma^{(\mu)} S = \sum_\nu a_{\mu\nu} \gamma^{(\nu)} \quad (\text{и } S^{-1} = \beta S^* \beta),$$

так что

$$\begin{aligned} \sum_\nu \gamma^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_\nu} &= \sum_{\nu\mu} \gamma^{(\nu)} a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\mu} = \\ &= S^{-1} \left(\sum_\mu \gamma^{(\mu)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) S. \end{aligned} \quad (20.11)$$

¹⁾ Точнее с действительными компонентами 4, 4 и j j' и мнимыми 4 j и j , 4. Если преобразовать функцию Лагранжа

$$L \rightarrow L + \frac{hc}{2i} \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\psi \dagger \gamma^{(\nu)} \psi),$$

то получится сразу в качестве канонического тензора энергии-импульса тензор $T''_{\mu\nu}$.

Отсюда непосредственно следует инвариантность функции Лагранжа L (20.8), так же как и векторный характер s , (20.9) и тензорный характер $T_{\mu\nu}$ (20.10).

Так как, по (20.3), канонические импульсы $\pi_\sigma^* = \partial L / \partial \dot{\phi}_\sigma^*$ тождественно обращаются в нуль, то при переходе к гамильтоновскому формализму мы будем стараться — аналогично, как и в случае мезонного поля (§ 12) — исключить поля ϕ_σ^* и π_σ^* из гамильтоновой функции; здесь это удаётся непосредственно с помощью соотношений

$$\pi_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_\sigma} = -\frac{\hbar}{i} \dot{\phi}_\sigma^*. \quad (20.12)$$

Для гамильтоновой функции $H = \sum_\sigma \pi_\sigma \dot{\phi}_\sigma + \pi_\sigma^* \dot{\phi}_\sigma^* - L (= -T_{44}^0)$; отсюда получается:

$$H = -\frac{i}{\hbar} \pi E \phi = -\sum_{\rho\sigma} \pi_\rho \left\{ c (\alpha_{\rho\sigma} \cdot \text{grad}) + \frac{imc^2}{\hbar} \beta_{\rho\sigma} \right\} \phi_\sigma. \quad (20.13)$$

С помощью (20.1, 2 и 12) легко видеть, что интегральная гамильтонова функция $H = \int dx H$ действительна, т. е. является эрмитовским оператором и совпадает с полной энергией — $\int dx T_{44}$ [ср. (20.10)]. Если бы мы произвели квантование по каноническим перестановочным соотношениям (1.7), то в качестве канонических уравнений поля получили бы (20.13)

$$\dot{\phi} = \frac{i}{\hbar} [H, \phi] = -\frac{i}{\hbar} E \phi, \quad \dot{\pi} = -\frac{\hbar}{i} \dot{\phi}^* = -(E\phi)^*$$

в формальном соответствии с (20.1).

Против этого канонического метода квантования надо прежде всего возразить, что он не делает энергию положительно определённой. Чтобы показать это, разложим ϕ -функцию по собственным функциям уравнения Дирака (20.1), причём мы снова потребуем пространственную периодичность,

чтобы получить дискретный спектр энергии¹⁾:

$$\psi_{\sigma}(x, t) = \sum_m a_m e^{-\frac{it}{\hbar} E_m} u_{m\sigma}(x), \quad (20.14)$$

$$\psi_{\sigma}^*(x, t) = \sum_m a_m^* e^{\frac{it}{\hbar} E_m} u_{m\sigma}^*(x),$$

где

$$(-E_m + E) u_m = 0, \quad \int_V dx u_m^* u_{m'} = \delta_{mm'}. \quad (20.15)$$

Тогда, по (20.12 и 14),

$$\pi_{\sigma}(x, t) = -\frac{\hbar}{i} \sum_m a_m^* e^{\frac{it}{\hbar} E_m} u_{m\sigma}(x). \quad (20.16)$$

Перестановочные соотношения (1.7) будут выполнены, если коэффициенты a_m , a_m^* рассматриваются как матрицы типа (6.16) с перестановками:

$$[a_m, a_{m'}] = [a_m^*, a_{m'}^*] = 0, \quad [a_m, a_{m'}^*] = \delta_{mm'};$$

отсюда, по (20.14 и 16), находим:

$$\begin{aligned} [\psi_{\sigma}(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t)] &= [\pi_{\sigma}(x, t), \pi_{\sigma'}(x', t)] = 0, \\ [\pi_{\sigma}(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t)] &= \frac{\hbar}{i} \sum_m u_{m\sigma}^*(x) u_{m\sigma'}(x') = \\ &= \frac{\hbar}{i} \delta_{\sigma\sigma'} \delta(x - x'); \end{aligned}$$

в последнем уравнении использовано свойство полноты системы собственных функций u_m . Для энергии $H = \int_V dx H$, по (20.13 до 16), получится

$$H = \sum_m E_m \cdot a_m^* a_m, \quad (20.17)$$

¹⁾ Индекс m , нумерующий собственные функции, стоит вместо импульса и спинового квантового числа; $u_{m\sigma}$ означает σ -компоненту спиновой собственной функции u_m .

где $a_m^* a_m (\geq 0)$, по (6.18), означает число электронов N_m в стационарном состоянии m . Но известно, что собственные значения энергии E_m уравнения Дирака (20.15) наполовину положительны, наполовину отрицательны ($E = \pm c \sqrt{(mc)^2 + p^2}$), так что энергия (20.17) может принимать оба знака (перестановка сомножителей a_m^* , a_m здесь ничего не может изменить).

Как уже упоминалось, другое возражение против канонического метода квантования состоит в том, что оно непосредственно приводит к статистике Бозе-Эйнштейна, в то время как опытным путём известно что электроны подчиняются принципу исключения Паули и статистике Ферми-Дирака. Несовместимость с опытными фактами выражается в том, что число $a_m^* a_m$ электронов, находящихся в одном состоянии, не ограничено сверху, вместо того, чтобы иметь значения 0 и 1. Причину этого надо искать, конечно, не в частном виде гамильтоновой функции (20.13), ибо каждое волновое поле, квадратичное в канонических переменных q, p , эквивалентно системе гармонических осцилляторов, квантовые числа которых при каноническом квантовании не имеют верхней границы, а так как эти квантовые числа означают здесь, сколько раз занято состояние, видно, что канонические перестановочные соотношения (1.7) вообще не могут быть совместимы с принципом Паули.

Изменённым рецептом квантования, позволяющим учесть принцип Паули, мы обязаны Иордану и Вигнеру¹⁾. Чтобы получить соответствующие выражения специально для задачи о свободных электронах, обсудим формулы (20.14), где u_m , как и раньше, означают собственные функции уравнения Дирака (20.15), тогда как смысл операторов a_m должен быть пересмотрен. Положим для пробы, что операторы a_m и a_m^* повышают и соответственно понижают число частиц N_m на 1, оставляя все остальные $N_{m'} (m' \neq m)$ без изменения [ср. (6.17)]:

$$(a_m)_{N'_1, \dots, N'_1, \dots} = (a_m^*)_{N''_1, \dots, N''_1, \dots} \sim \delta_{N'_m, N''_m - 1} \cdot \prod_{m' \neq m} \delta_{N'_{m'}, N''_{m'}}$$

1) Jordan и Wigner, Zs. f. Phys. 47, 631, 1928.

Но числа N_m , в соответствии с принципом Паули, смогут теперь иметь только значения 0 и 1. a_m и a_m^* представляют поэтому двухрядные матрицы относительно всех чисел $N_{m'}$ ($m' \neq m$), тогда как относительно N_m они имеют такой вид:

$$a_m = \eta_m \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_m^* = \eta_m^* \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (20.18)$$

где первый столбец и строка отвечают значению $N_m = 0$, а второй столбец и строка отвечают значению $N_m = 1$. Числовой множитель η_m будет ещё рассмотрен¹⁾. Другими словами: пусть F_{N_m} — функция числа N_m , принимающая два значения; тогда для функций $a_m \cdot F$ и $a_m^* F$, имеющих также по два значения, имеет место.

$$\begin{aligned} (a_m F)_0 &= \eta_m \cdot F_1, & (a_m F)_1 &= 0, \\ (a_m^* F)_0 &= 0, & (a_m^* F)_1 &= \eta_m^* F_0. \end{aligned}$$

По правилам матричного умножения, из (20.18) получится:

$$a_m a_m = a_m^* a_m^* = 0, \quad (20.19)$$

$$\left. \begin{aligned} a_m^* a_m &= |\eta_m|^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |\eta_m|^2 \cdot N_m, \\ a_m a_m^* &= |\eta_m|^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |\eta_m|^2 \cdot (1 - N_m); \end{aligned} \right\} \quad (20.20)$$

здесь мы для краткости обозначили буквой N_m диагональную матрицу с собственными значениями N_m :

$$N_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20.21)$$

Если потребовать $|\eta_m|^2 = 1$, то из (20.20) следует

$$a_m^* a_m + a_m a_m^* = 1; \quad (20.22)$$

¹⁾ η_m выбирается независимо от N_m так, чтобы множитель $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в a_m , изменяющий N_m , был бы перестановочен с η_m :

$$a_m = \eta_m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta_m.$$

Тогда операторы a_m и a_m^* эрмитовски сопряжены.

эта «антиперестановка» a_m и a_m^* равна единичной матрице, в то время как перестановка $[a_m, a_m^*]$, по (20.20), равна диагональной матрице $(1 - 2N_m)$. Произошёл обмен ролями перестановки и антиперестановки по сравнению с каноническим квантованием

$$[a_m, a_m^*] = 1, \quad a_m a_m^* + a_m^* a_m = 1 + 2N_m, \quad \text{ср. (6.18)}.$$

Применяя символ

$$[a, b]_+ = ab + ba,$$

объединим формулы (20.19 и 22) так:

$$[a_m, a_m]_+ = [a_m^*, a_m^*]_+ = 0, \quad [a_m, a_m^*]_+ = 1.$$

Что касается перестановок этих двух матриц с $m \neq m'$, то можно сначала попробовать считать их перестановочными; но это не даст простых перестановочных соотношений для ψ и π (20.14, 16). Вместо этого Иордан и Вигнер заменяют во всех канонических соотношениях перестановки соответствующими антикоммутаторами:

$$[a_m, a_{m'}]_+ = [a_m^*, a_{m'}^*]_+ = 0, \quad [a_m, a_{m'}^*]_+ = \delta_{mm'}. \quad (20.23)$$

Как доказали Иордан и Вигнер, квантованная таким способом теория эквивалентна теории в конфигурационном пространстве, в которой принцип Паули учтён тем, что допускаются только функции, антисимметричные в координатах каждой пары электронов.

Надо ещё показать, как выражения (20.18) выполняют перестановочные соотношения (23) для матричной пары $m \neq m'$. Установим для этого определённую последовательность нумерации стационарных состояний $m = 1, 2, \dots$; по началу она произвольна, но, однажды выбранная, должна сохраняться. Положим теперь η_m в (20.18) равным $+1$ или -1 , в зависимости от того, является ли число занятых состояний с номерами $n < m$ чётным или нечётным¹⁾. Это можно записать такой формулой:

$$\eta_m = \prod_{n=1}^{m-1} (1 - 2N_n); \quad (20.24)$$

¹⁾ Но η_m не должно зависеть от N_m .

ибо в произведении занятые уровни $n < m$ дают множитель $1 - 2N_n = -1$, а свободные дают $1 - 2N_n = +1$. Сравним теперь две матрицы $a_m a_{m'}$ и $a_{m'} a_m$ на основе (20.18 и 24), причём пусть, например, $m < m'$; тогда очевидно, что множитель η_m в обеих матрицах имеет одинаковый знак, потому что оператор $a_{m'}$ не меняет чисел N_n с $n < m$; напротив, $\eta_{m'}$ в обеих матрицах имеют противоположные знаки, потому что в случае расположения множителей $a_{m'} a_m$ предварительное применение оператора a_m изменило число N_m ($m < m'$) на единицу, что не относится к случаю $a_m a_{m'}$; так что $a_{m'} a_m = -a_m a_{m'}$, в согласии с (20.23). То же имеет место, если a_m заменено через a_m^* или $a_{m'}$ через $a_{m'}^*$. Это рассуждение можно уточнить, представляя в η_m (20.24) сомножители $1 - 2N_n$, по (20.21), матрицами

$$1 - 2N_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

что согласуется с $\eta_m \eta_m^* = \eta_m^* \eta_m = 1$; произведения $a_m^{(*)} a_{m'}^{(*)}$ и $a_{m'}^{(*)} a_m^{(*)}$ содержат матрицы, одинаковые относительно всех чисел N_n , кроме N_m ($m < m'$), тогда как в отношении N_m знаки матриц обратные:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этим доказана выполнимость перестановочных соотношений (20.23) для $m \neq m'$ и для $m = m'$. Как показали Иордан и Вигнер, операторы a_m и a_m^* определены этими соотношениями однозначно, если ограничиться неприводимыми системами матриц и не считать различными системы матриц, связанные преобразованием подобия: ($a_m \rightarrow S^{-1} a_m S$, $a_m^* \rightarrow S^{-1} a_m^* S$).

Определённые таким образом операторы a_m и a_m^* мы подставим в разложение собственных функций (20.14) и получим отсюда операторы поля ϕ_σ , причём как функции пространства и времени они, конечно, удовлетворяют урав-

нениям Дирака (20.1). Соотношение между зависящими и не зависящими от времени операторами снова отвечает общему виду (4.4) (при $E = H$), ибо из (20.17 и 23) следует¹⁾:

$$Ha_m = a_m(H - E_m), \quad Ha_m^* = a_m^*(H + E_m),$$

т. е. $a_m^{(*)}$, перенесённое относительно H налево, превращает H в $H(\mp) E_m$; поэтому перенос $a_m^{(*)}$ налево относительно $e^{\frac{it}{\hbar}H}$ даёт

$$e^{\frac{it}{\hbar}H} a_m e^{-\frac{it}{\hbar}H} = a_m e^{-\frac{it}{\hbar}E_m}, \quad e^{\frac{it}{\hbar}H} a_m^* e^{-\frac{it}{\hbar}H} = a_m^* e^{\frac{it}{\hbar}E_m},$$

или, по (20.14),

$$\begin{aligned} \psi_\sigma(x, t) &= e^{\frac{it}{\hbar}H} \psi_\sigma(x, 0) e^{-\frac{it}{\hbar}H}, \\ \psi_\sigma^*(x, t) &= e^{\frac{it}{\hbar}H} \psi_\sigma^*(x, 0) e^{-\frac{it}{\hbar}H}, \end{aligned} \quad (20.25)$$

как и утверждалось.

Для операторов ψ_σ (20.14), на основании (20.23), непосредственно получатся следующие перестановочные соотношения:

$$[\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')]_+ = [\psi_\sigma^*(x, t), \psi_{\sigma'}^*(x', t')]_+ = 0, \quad (20.26)$$

$$[\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}^*(x', t')]_+ = C_{\sigma\sigma'}(x - x', t - t'), \quad (20.27)$$

где

$$C_{\sigma\sigma'}(x - x', t - t') = \sum_m e^{\frac{i}{\hbar}(t' - t)E_m} u_{m\sigma}(x) u_{m\sigma'}^*(x'). \quad (20.28)$$

То, что $C_{\sigma\sigma'}$ зависит только от разностей координат $x - x'$, следует из инвариантности относительно переноса и будет ещё

1) Именно:

$$\begin{aligned} a_m^* a_{m'} \cdot a_m &= -a_m^* a_m a_{m'} = (a_m a_m^* - \delta_{mm'}) a_{m'} = \\ &= a_m (a_m^* a_{m'} - \delta_{mm'}), \\ a_m^* a_{m'} \cdot a_m^* &= a_m^* (a_m^* a_{m'} + \delta_{mm'}). \end{aligned}$$

показано вычислением. В частности, при $t=t'$ получается теорема полноты для ортогональной системы функций u_m :

$$C_{\sigma\sigma'}(x-x', 0) \equiv \sum_m u_{m\sigma}(x) u_{m\sigma'}(x') = \delta_{\sigma\sigma'} \delta(x-x'), \quad (20.29)$$

так что для не зависящих от времени операторов имеют место такие соотношения:

$$[\psi_{\sigma}(x, 0), \psi_{\sigma'}^*(x', 0)]_+ = \delta_{\sigma\sigma'} \delta(x-x'),$$

или, по (20.12),

$$[\psi_{\sigma}(x, 0), \pi_{\sigma'}(x', 0)]_+ = -\frac{\hbar}{i} \delta_{\sigma\sigma'} \delta(x-x'). \quad (20.30)$$

Таким образом, перестановки и здесь заменяются антиперестановками. Вычисление для $t \neq t'$ можно, исходя из (20.25 и 30), провести способом, подобным вычислению перестановок в § 4. Мы будем производить вычисление несколько другим (но в принципе эквивалентным) способом, причём будет использована функция Гамильтона и уравнение поля — в § 4 предполагалась только справедливость уравнения Шредингера-Гордона.

Множитель $e^{\frac{i}{\hbar}(t'-t)E_m} u_{m\sigma}(x)$, входящий в слагаемые (20.28), может быть представлен как σ -компоненты спинора:

$$e^{\frac{i}{\hbar}(t'-t)E_m} u_{m\sigma}(x) = e^{\frac{i}{\hbar}(t'-t)E} u_{m\sigma}(x), \quad (20.31)$$

где E — оператор, определённый по (20.1); уравнение (20.31) имеет силу, потому что, по (20.15), $E_m u_m(x) = E u_m(x)$ (показательную функцию можно разложить в степенной ряд). Вместо (20.28) напишем так:

$$C_{\sigma\sigma'}(x-x', t-t') = \sum_p \left(e^{\frac{i}{\hbar}(t'-t)E} \right)_{\sigma p} \cdot \sum_m u_{mp}(x) u_{m\sigma'}(x'),$$

или, используя (20.29),

$$C_{\sigma\sigma'}(x-x', t-t') = \left(e^{\frac{i}{\hbar}(t'-t)E} \right)_{\sigma\sigma'} \cdot \delta(x-x'), \quad (20.32)$$

где E действует как дифференциальный оператор на пространственные координаты x в аргументе δ -функции; её надо либо представить как предел регулярной функции, либо как интеграл Фурье (4.24), так что E под знаком интеграла в применении к $e^{i \cdot x}$ заменяется на

$$E_k = ch(\alpha \cdot k) + mc^2\beta.$$

Интерпретируя $C_{\alpha\alpha'}$ как элементы матрицы C , запишем вместо (20.32) короче:

$$C(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} tE} \cdot \delta(x). \quad (20.33)$$

Разделим чётные и нечётные в E члены в разложении показательной функции в ряд

$$e^{-\frac{i}{\hbar} tE} = \cos\left(\frac{tE}{\hbar}\right) - i \sin\left(\frac{tE}{\hbar}\right),$$

причём, по (20.1, 2),

$$\left(\frac{E}{\hbar}\right)^2 = c^2(\mu^2 - \Delta); \quad (20.34)$$

член с косинусом, содержащий только чётные степени E , можно поэтому записать:

$$\cos\left(\frac{tE}{\hbar}\right) = \cos(tc\sqrt{\mu^2 - \Delta}),$$

и аналогично для члена с синусом после отделения множителя E/\hbar :

$$\sin\left(\frac{tE}{\hbar}\right) = \frac{E}{\hbar} \cdot \frac{\sin(tc\sqrt{\mu^2 - \Delta})}{c\sqrt{\mu^2 - \Delta}}.$$

Введённые здесь функции оператора $\sqrt{\mu^2 - \Delta}$ содержат в разложениях только целые степени $\mu^2 - \Delta$ и поэтому в применении к e^{ikx} Δ равно $-k^2$. Так получается для C (20.33):

$$C(x, t) = \left\{ \cos(tc\sqrt{\mu^2 - \Delta}) - \frac{i}{\hbar} E \frac{\sin(tc\sqrt{\mu^2 - \Delta})}{c\sqrt{\mu^2 - \Delta}} \right\} \cdot \delta(x),$$

или также

$$C(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} E \right) D(x, t), \quad (20.35)$$

где

$$D(x, t) \equiv \frac{\sin(tc\sqrt{\mu^2 - \Delta})}{c\sqrt{\mu^2 - \Delta}} \cdot \delta(x). \quad (20.36)$$

Но это не что иное, как многократно употреблявшаяся нами D -функция, что непосредственно видно из интегральных представлений $\delta(x)$ и $D(x, t)$ [ср. (4.24, 25)]. Этим определён оператор S . Подстановка (2.35) в (20.27) даёт желаемое перестановочное соотношение

$$\begin{aligned} [\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}^*(x', t')]_+ &= \left(\delta_{\sigma\sigma'} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} E_{\sigma\sigma'} \right) D(x - x', t - t') = \\ &= \left\{ \delta_{\sigma\sigma'} \frac{\partial}{\partial t} - c(\alpha_{\sigma\sigma'} \cdot \text{grad}) - \frac{imc^2}{\hbar} \beta_{\sigma\sigma'} \right\} D(x - x', t - t'). \end{aligned} \quad (20.37)$$

Чтобы доказать инвариантность перестановки относительно преобразований Лорентца, удобно вместо ψ^* ввести «сопряжённую» волновую функцию $\psi^\dagger = i\psi^*\beta$. Умножая (20.27) на $i\beta_{\sigma\sigma'}$ и суммируя по σ' , получим для $[\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}^\dagger(x', t')]$ элемент (σ, σ') матрицы $(iC\beta)$, которая в обозначениях (20.5) выглядит так:

$$\begin{aligned} iC(x, t)\beta &= i \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} \mathbf{E} \right) \beta \cdot D(x, t) = \\ &= -c \left(\sum_{\nu} \gamma^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \mu \right) D(x, t). \end{aligned} \quad (20.38)$$

Преобразуя аналогичным образом остальные перестановки, имеем:

$$\begin{aligned} [\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')]_+ &= [\psi_\sigma^\dagger(x, t), \psi_{\sigma'}^\dagger(x', t')]_+ = 0, \\ [\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}^\dagger(x', t')]_+ &= \\ &= -c \left\{ \sum_{\nu} \gamma_{\sigma\sigma'}^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \mu \delta_{\sigma\sigma'} \right\} D(x - x', t - t'). \end{aligned} \quad (20.39)$$

При изменении системы отсчёта преобразованные спиноры $\bar{\psi} = S\psi$ и $\bar{\psi}^\dagger = \psi^\dagger S^{-1}$ выглядят так:

$$\begin{aligned} [\bar{\psi}_\rho(x, t), \bar{\psi}_{\rho'}^\dagger(x', t')]_+ &= \\ &= \sum_{\sigma\sigma'} S_{\rho\sigma} (S^{-1})_{\sigma'\rho'} [\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}^\dagger(x', t')]_+ = \\ &= -c \left\{ \sum_{\nu} (S\gamma^{(\nu)}S^{-1})_{\rho\rho'} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \mu \delta_{\rho\rho'} \right\} D(x - x', t - t'), \end{aligned}$$

что делает при учёте (20.11) очевидной инвариантность соотношений (20.39). Этим доказана релятивистская инвариантность квантования по Иордану-Вигнеру в применении к свободным электронам.

Что касается тока s_ν и энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, то надо заметить, что выбранный при их определении (20.9, 10) порядок сомножителей может быть непосредственно перенесён в квантованную этим способом теорию, так как он отвечает всем требованиям эрмитовости: законы сохранения $\sum_\nu \partial s_\nu / \partial x_\nu = 0$ и $\sum_\mu \partial T_{\mu\nu} / \partial x_\mu = 0$ справедливы, разумеется, как и в неквантованной теории, потому что операторы ψ (20.14) в их пространственно-временной зависимости удовлетворяют тем же уравнениям поля (20.7), что и «классические» (неквантованные) волновые функции ψ .

Против такой формулировки теории всё ещё сохраняется возражение, поскольку энергия $H = \sum_m E_m N_m$ [ср. (20.17, 20)] неположительно определена. Но этот недостаток можно исправить дальнейшим изменением формализма в смысле «дираковской теории позитрона» («дырочной теории»). Квантование по принципу Паули создало для этого необходимую предпосылку.

Будем для краткости называть положительные и отрицательные уровни энергии ($E \geq 0$) положительными и отрицательными уровнями; тогда, по Дираку, «вакуумом» называется такое состояние системы, в котором заняты все отрицательные уровни, а все положительные свободны:

$$N_m = \begin{cases} 1 & \text{при } E_m < 0, \\ 0 & \text{при } E_m > 0. \end{cases} \quad (20.40)$$

Определения электрического заряда и энергии надо изменить так, чтобы они исчезали в вакууме. По старому определению (20.4) и (20.13 или 17) общий заряд равнялся

$$\epsilon h \int dx \psi^* \psi = \epsilon h \sum_m a_m^* a_m = \epsilon h \sum_m N_m$$

и общая энергия

$$\int dx \psi^* E \psi = \sum_m E_m a_m^* a_m = \sum_m E_m N_m.$$

Вычитая отсюда значения для вакуума

$$\epsilon h \sum_{(E_m < 0)} 1 \text{ и, соответственно, } \sum_{(E_m < 0)} E_m,$$

получим новые определения заряда

$$\begin{aligned} e &= \epsilon h \sum_{(E_m > 0)} N_m - \epsilon h \sum_{(E_m < 0)} (1 - N_m) = \\ &= \epsilon h \sum_{(E_m > 0)} N_m - \epsilon h \sum_{(E_m < 0)} N'_m \end{aligned} \quad (20.41)$$

и энергии

$$\begin{aligned} H &= \sum_{(E_m > 0)} E_m N_m - \sum_{(E_m < 0)} E_m (1 - N_m) = \\ &= \sum_{(E_m > 0)} |E_m| N_m + \sum_{(E_m < 0)} |E_m| N'_m. \end{aligned} \quad (20.42)$$

Введённая здесь диагональная матрица

$$N'_m = 1 - N_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20.43)$$

[ср. (20.21)] даёт в применении к шредингеровской функции 0, если уровень m занят, и 1, если он свободен; другими словами, N'_m означает число «дырок» в отрицательной части спектра энергии или число позитронов. В самом деле, такая дырка ($N'_m = 1$) прибавляет к заряду (20.41) величину $-\epsilon h$ и к энергии (20.42) величину $|E_m|$, тогда как электрону в положительном спектре ($N_m = 1$) отвечает заряд $+\epsilon h$ и энергия $|E_m|$. Этот дираковский искусственный приём вычитания делает энергию положительно определённой, тогда как заряд теряет свой характер определённости, как это и требуется при учёте действительного положения вещей (существование позитрона).

Чтобы рассмотреть с этой точки зрения также импульс и момент количества движения, мы заметим, что выражение (20.10) для плотности импульса ($\mathbf{G}_k = \mathbf{T}_{4k}/ic$)

$$\mathbf{G} = \frac{\hbar}{4i} \left\{ \psi^* \left(\text{grad } \psi - a \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \left(\text{grad } \psi^* - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} a \right) \psi \right\}$$

с помощью уравнения Дирака (20.1) и правил перестановки для α (20.2) может быть переписано так:

$$G = \frac{\hbar}{2i} \{ \psi^* \cdot \text{grad } \psi - \text{grad } \psi^* \cdot \psi \} + \frac{\hbar}{4} \text{rot } \psi^* \sigma \psi; \quad (20.44)$$

здесь σ — матричный вектор с компонентами $\sigma^{(1)} = -ia^{(2)}a^{(3)}, \dots, \dots$ (циклический). Член $\text{rot } \psi^* \sigma \psi$ ничего не прибавляет к общему импульсу $G = \int dx G$. В остальные члены мы подставим разложения (20.14) и учтём, что $u_m \sim e^{ik_m x}$, так что $\text{grad } u_m = ik_m u_m$. На основе соотношений ортогональности (20.15), для общего импульса следует:

$$G = \sum_m \hbar k_m a_m^* a_m = \sum_m \hbar k_m N_m.$$

Вычтем отсюда снова значение в вакууме

$$\sum_{\substack{m \\ (E_m < 0)}} \hbar k_m;$$

тогда получится исправленное определение импульса

$$G = \sum_{\substack{m \\ (E_m > 0)}} \hbar k_m N_m - \sum_{\substack{m \\ (E_m < 0)}} \hbar k_m N_m'. \quad (20.45)$$

Поэтому отдельному занятому состоянию в положительном спектре энергии отвечает импульс $+\hbar k_m$, а свободному состоянию с отрицательной энергией (т. е. позитрону) импульс $-\hbar k_m$.

Момент количества движения $M = \int dx [x \cdot G]$ мы расщепим на два слагаемых (аналогично формулам (12.56 до 60) и (16.50):

$$M = M^0 + M',$$

$$M^0 = \frac{\hbar}{2i} \int_V dx [x \cdot \{ \psi^* \cdot \text{grad } \psi - \text{grad } \psi^* \cdot \psi \}],$$

$$M' = \frac{\hbar}{4} \int_V dx [x \cdot \text{rot } \psi^* \sigma \psi] = \frac{\hbar}{2} \int_V dx \psi^* \sigma \psi.$$

В применении к частицам с нерелятивистскими скоростями не зависящий от ориентации спина член M^0 даёт орбиталь-

ный момент, а член M' — интересующий нас спиновый момент. Так как $u_m \sim e^{ik_mx}$ и σ не зависит от x , M' аддитивно распадается на слагаемые от собственных функций, принадлежащих различным значениям k :

$$M' = \sum_k M'_{(k)},$$

и мы можем, как и в случае мезона со спином 1, ограничиться дискуссией члена $M'_{(0)}$ (частица в системе покоя). При значении импульса $k=0$ имеется, как известно, 4 собственные функции u_1, \dots, u_4 со значениями энергии

$$E_1 = E_2 = +mc^2, \quad E_3 = E_4 = -mc^2,$$

причём u_1, \dots, u_4 (с помощью унитарного преобразования) могут быть определены так, что для одной из компонент векторной матрицы $\int dx u_m^* \sigma u_{m'} (= V \cdot u_m^* \sigma u_{m'})$, например, для x_1 -компоненты, получится:

$$\int dx u_m^* \sigma^{(1)} u_{m'} = 0 \text{ при } m \neq m' (m, m' = 1, \dots, 4),$$

$$\int dx u_m^* \sigma^{(1)} u_m = \begin{cases} +1 & \text{при } m=1 \text{ и } m=3, \\ -1 & \text{при } m=2 \text{ и } m=4. \end{cases}$$

Отсюда получается для x_1 -компоненты $M'_{(0)}$

$$M'_1 = \frac{\hbar}{2} \sum_{m=1}^4 \sum_{m'=1}^4 a_m^* a_{m'} e^{\frac{iE_m - E_{m'}}{\hbar} t} \cdot \int dx u_m^* \sigma^{(1)} u_{m'} =$$

$$= \frac{\hbar}{2} (N_1 - N_2 + N_3 - N_4).$$

Состояния $m=3$ и $m=4$ ($E_m < 0$) в «вакууме» заняты; вычитание вакуумного значения M'_1 превращает также N_3 в $N_3 - 1 = -N'_3$ и N_4 в $N_4 - 1 = -N'_4$, так что исправленное значение M'_1 таково:

$$M'_1 = \frac{\hbar}{2} (N_1 - N_2 - N'_3 + N'_4), \quad (20.46)$$

т. е. N_1 (покоящихся) электронов и N'_4 позитронов имеют компоненту спина (в направлении x_1) $+\frac{\hbar}{2}$, N_2 электронов

и N_3 позитронов — компоненту — $\frac{\hbar}{2}$. Таким образом, физическое значение квантовых чисел N_m и N'_m выяснено.

Очевидно, что состояния всей системы, заданные всеми квантовыми числами N_m, N'_m , должны считаться как простые. Вместе с ограничением значениями 0 и 1 это отвечает методу подсчёта состояний Ферми-Дирака.

Способ вычитания, формулированный нами, оставляет желать большей однозначности, так как приходится вычитать бёсконечные выражения (расходящиеся суммы). При вычислении заряда, энергии и т. д. мы обошли эту неоднозначность тем, что производили вычитание в отдельных членах суммы; но этот способ нельзя обобщить в достаточной мере (электроны в силовых полях, ср. § 21). Чтобы получить формулировку, свободную от этого недостатка, введём следующую «матрицу плотности»¹⁾:

$$r_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t') = \frac{1}{2} \sum_{m, m'} \left(a_{m'}^* a_m - a_m a_{m'}^* + \frac{E_m}{|E_m|} \delta_{mm'} \right) \times \\ \times e^{\frac{i}{\hbar} (t'E_{m'} - tE_m)} u_{m\sigma}(x) u_{m'\sigma'}^+(x'), \quad (20.47)$$

и заменим данные выше определения плотности заряда и энергии-импульса такими:

$$s_v = \lim_{\substack{t'=t \\ x'=x}} \epsilon hc \sum_{\sigma, \sigma'} \gamma_{\sigma'\sigma}^v r_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t'), \quad (20.48)$$

$$T_{\mu\nu} = \lim_{\substack{t'=t \\ x'=x}} \frac{\hbar c}{4i} \sum_{\sigma, \sigma'} \left\{ \gamma_{\sigma'\sigma}^{(\mu)} \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \right) + \gamma_{\sigma'\sigma}^{(\nu)} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \right) \right\} \times \\ \times r_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t'). \quad (20.49)$$

Чтобы установить сначала соответствие с примитивным способом вычитания, сравним новые определения со старыми.

1) Фок (Fock C. R.), Leningrad, 1933, 267; Ферри и Оппенгеймер (Furry и Oppenheimer) Phys. Rev. **45**, 245, 1934; Пайерлс (Peierls), Proc. Roy. Soc. **146**, 420, 1934; Дирак (Dirac), Proc. Camb. Phil. Soc. **30**, 150, 1934; Гейзенберг (Heisenberg), Zs. f. Phys. **90**, 209, 1934.

Что касается, например, четырехмерного тока s_v , то разность выражений (20.48) и (20.9) находится с помощью (20.14 и 23):

$$\begin{aligned} \epsilon h c \frac{1}{2} \sum_m \left(-1 + \frac{F_m}{|E_m|} \right) u_m^\dagger \gamma^{(v)} u_m &= \\ &= -\epsilon h c \sum_{\substack{m \\ (E_m < 0)}} u_m^\dagger \gamma^{(v)} u_m, \end{aligned} \quad (20.50)$$

что совпадает с обратной по знаку величиной среднего значения тока (20.9) в вакууме; то же имеет место и для тензора энергии-импульса. Отсюда легко видеть, что интегральные величины e, H, G, M' на основе (20.47, 48, 49) в самом деле имеют те же значения, что и по начальному способу вычитания вакуума [ср. (20.41, 42, 45, 46)]. Новые выражения (20.47, 48, 49), в противоположность прежним, свободны от расходящихся сумм типа (20.50); ибо если выбрать из матрицы (20.47) диагональные элементы, т. е. члены суммы с $m = m'$, о которых только идет речь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_m \left(a_m^* a_m - a_{n.} a_m^* + \frac{E_m}{|E_m|} \right) e^{\frac{i}{h} (t' - t) E_m} u_{m\sigma}(x) u_{m\sigma'}^\dagger(x') &= \\ = \left\{ \sum_{\substack{m \\ (E_m > 0)}} N_m - \sum_{\substack{m \\ (E_m < 0)}} N_m' \right\} e^{\frac{i}{h} (t' - t) E_m} u_{m\sigma}(x) u_{m\sigma'}^\dagger(x'), \end{aligned}$$

то это конечные суммы, когда занято конечное число положительных уровней и свободно конечное число отрицательных уровней, т. е. если присутствует конечное число частиц.

Если расщепить r (20.47) на две суммы

$$r = R + S, \quad (20.51)$$

$$\begin{aligned} R_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t') &= \\ = \frac{1}{2} \sum_{m, m'} (a_m^* a_m - a_{n.} a_m^*) e^{\frac{i}{h} (t' E_{m'} - t E_m)} u_{m\sigma}(x) u_{m'\sigma'}^\dagger(x'), \end{aligned} \quad (20.52)$$

$$\begin{aligned} S_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t') &= \\ = \frac{1}{2} \sum_m \frac{F_m}{|E_m|} e^{\frac{i}{h} (t' - t) E_m} u_{n.\sigma}(x) u_{m\sigma'}^\dagger(x'), \end{aligned} \quad (20.53)$$

то обе суммы сходятся в отдельности, если только мировой вектор $(x - x', t - t')$ не нулевой ($|x - x'|^2 - c^2(t - t')^2 \neq 0$). Предельный переход $t' \rightarrow t$, $x' \rightarrow x$, предусмотренный в (20.48, 49), возможен только после того, как R и S объединены в r . Для R , по (20.14), можно написать и так:

$$R_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t') = \\ = \frac{1}{2} \{ \phi_{\sigma'}^\dagger(x', t') \phi_\sigma(x, t) - \phi_\sigma(x, t) \phi_{\sigma'}^\dagger(x', t') \}. \quad (20.54)$$

С другой стороны, S есть функция $x - x'$ и $t - t'$, которая может быть вычислена следующим образом. Подставим формально в (20.53) [подобно (20.31) и (20.34)]

$$\frac{1}{|E_m|} u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{E^2}} u_m(x) = \frac{1}{hc \sqrt{\mu^2 - \Delta}} u_m(x),$$

где Δ снова имеет смысл $-k^2$ ($u_m \sim e^{ikx}$); тогда можно представить матрицу S (с элементами $S_{\sigma\sigma'}$) через матрицу C (20.28) так:

$$(S(x, t; x', t')) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{hc \sqrt{\mu^2 - \Delta}} \cdot iC(x - x', t - t') \beta$$

(надо учесть, что $u_m^\dagger = iu_m^* \beta$), и свести её, на основании (20.35 или 38), к инвариантной D -функции

$$S(x, t; x', t') = \\ = -\frac{1}{2} c \left(\sum_{\nu} \gamma^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \mu \right) D'(x - x', t - t'), \quad (20.55)$$

где

$$D'(x, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - \Delta}} D(x, t).$$

В этих формулах надо представить себе C и D разложенными в интеграл Фурье, так что оператор $1/\sqrt{\mu^2 - \Delta}$, применённый под знаком интеграла e^{ikx} , получает значение $1/\sqrt{\mu^2 + k^2}$. По представлению Фурье из D (4.25) получается

$$D'(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk e^{ikx} \cos(tc \sqrt{\mu^2 + k^2}) \frac{1}{c \sqrt{\mu^2 + k^2}}. \quad (20.56)$$

D' , очевидно, релятивистски инвариантно в том же смысле, что и D ; D' определяется суммой инвариантных функций (4.27), а D — их разностью. Производя интегрирование по k -пространству в (20.56), можно прийти к цилиндрическим функциям Ганкеля от аргумента $\mu\sqrt{c^2t^2 - x^2}$, чего мы, однако, производить не будем¹⁾.

Так получается запись основных уравнений теории без привлечения собственных функций, как в (20.14): свойства операторов $\psi_\sigma(x, t)$, $\psi_\sigma^*(x, t)$ определены уравнением Дирака (20.1 или 7) и перестановочными соотношениями (20.26, 37 или 39), а физическая интерпретация основывается на определениях (20.48, 49) для s_ν , $T_{\mu\nu}$ в связи с (20.51, 54, 55, 56).

В то время как примитивный способ вычитания отдаёт предпочтение электронам перед позитронами, интерпретируя последние как электронные «дырки», формулировка с помощью матрицы плотности r имеет ещё и то преимущество, что она симметрична в зарядах обоого знака. Чтобы видеть это, положим

$$a_m^* = a'_m, \quad a_m = a_m'^* \quad (20.57)$$

Это преобразование операторов a оставляет перестановку (20.23), очевидно, инвариантной

$$[a'_m, a_m']_+ = [a_m'^*, a_m'^*]_+ = 0, \quad [a'_m, a_m'^*]_+ = \delta_{mm'}.$$

Оно отвечает подмене занятых и незанятых состояний, т. е. чисел N_m и $N'_m = 1 - N_m$; как, например, оператор a_m понижает число N_m на 1, так и a'_m понижает N'_m на 1. Вспоминая, что N_m — число электронов на положительных уровнях, N'_m — число позитронов на отрицательных, видим, что перестановка электронов и позитронов должна включать и перемену знака энергии. Преобразование этого рода, включающее и (20.57), таково:

$$\psi'_\sigma = \psi_\sigma^\dagger, \quad (20.58)$$

¹⁾ См. сноску 2 на стр. 36. В частном случае $\mu = 0$

$$D'(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \cos kx \frac{\cos |k|ct}{c|k|} = \frac{1}{2\pi^2 c} \frac{1}{x^2 - c^2t^2};$$

ср (19.50) (19.51).

притом определённая (20.58) спинорная функция ψ' удовлетворяет не тому же уравнению Дирака (20.57), что ψ ; именно для ψ^\dagger имеет место уравнение

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_{\nu}} \gamma^{(\nu)} - \mu \psi^\dagger = 0,$$

и отсюда для ψ' :

$$\left(\sum_{\nu} \gamma'^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + \mu \right) \psi' = 0, \quad (20.59)$$

где $\gamma'^{(\nu)}$ означает транспонированную матрицу $\gamma^{(\nu)}$ с обратным знаком:

$$\gamma'^{(\nu)} = -\gamma_{\nu}^{(\nu)}. \quad (20.60)$$

Но так как эти эрмитовские матрицы $\gamma'^{(\nu)}$ обладают теми же перестановочными соотношениями, что и $\gamma^{(\nu)}$ ($\gamma'_{\rho\sigma} \gamma'^{(\mu)} + \gamma'^{(\mu)} \gamma'_{\rho\sigma} = 2\delta_{\mu\nu}$), то уравнение (20.59) можно, путём дальнейшего преобразования $\psi' = S\psi''$, где $\gamma'^{(\nu)} S = S\gamma^{(\nu)}$, $SS^* = S^*S = 1$, привести к виду (20.7)¹⁾, и оба уравнения (20.7 и 60) эквивалентны. Если определить «сопряжённую» с ψ' функцию по (20.6) как $\psi'^\dagger = i\psi'^* \gamma^{(4)}$, то, по (20.60), $\psi'^\dagger = -i\gamma^{(4)} \psi'^*$, и, так как, по (20.58), $\psi'^* = (i\psi' \gamma^{(4)})^* = -i\gamma^{(4)} \psi'$, то

$$\psi'_\sigma{}^\dagger = -\psi'_\sigma. \quad (20.61)$$

Для ψ' и ψ'^\dagger из (20.58, 61, 39) получаются следующие перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} [\psi'_\sigma(x, t), \psi'_\sigma{}^\dagger(x', t')]_+ &= \\ &= c \left\{ \sum_{\nu} \gamma'_{\sigma\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} - \mu \delta_{\sigma\nu} \right\} D(x' - x, t' - t), \end{aligned}$$

а при учёте (20.60) и (4.29):

$$\begin{aligned} [\psi'_\sigma(x, t), \psi'_\sigma{}^\dagger(x', t')]_+ &= \\ &= -c \left\{ \sum_{\nu} \gamma'_{\sigma\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} - \mu \delta_{\sigma\nu} \right\} D(x - x', t - t'), \end{aligned}$$

¹⁾ Ср., например, Паули (Pauli), *Annales de l'Institut H. Poincaré* 6, 109, 1936, в особенности § 4.

и, очевидно, что

$$[\psi'_\sigma(x, t), \psi'_{\sigma'}(x', t')]_+ = [\psi'_{\sigma'}(x, t) \psi'_\sigma(x', t')]_+ = 0.$$

Этим показано, что преобразование (20.58) оставляет инвариантной перестановку (20.39). Чтобы видеть, как преобразуются величины s_ν , $T_{\mu\nu}$, выразим матрицу плотности r через ψ' и ψ'^\dagger . Для составляющей R (20.54) получится

$$R_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t') = \frac{1}{2} \{ \psi'^\dagger_\sigma(x, t) \psi'_{\sigma'}(x', t') - \psi'_{\sigma'}(x', t') \psi'^\dagger_\sigma(x, t) \} = R'_{\sigma'\sigma}(x', t'; x, t).$$

С другой стороны, если учесть (20.60) и свойство чётности функции D' (20.56): $D'(x, t) = D'(-x, -t)$, то S (20.55) переписется:

$$\begin{aligned} S_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t') &= \\ &= -\frac{i}{2} c \left(\sum_\nu \gamma_{\sigma'\sigma}^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} - \mu \delta_{\sigma'\sigma} \right) D'(x' - x, t' - t) = \\ &= S'_{\sigma'\sigma}(x', t'; x, t). \end{aligned}$$

И в R и в S преобразование (20.58) меняет местами штрихованные переменные x' , t' σ' с нештрихованными x , t , σ и то же имеет место для $r = R + S$:

$$r_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t') = r'_{\sigma'\sigma}(x', t'; x, t).$$

При подстановке этого в формулы (20.48, 49) для s_ν , $T_{\mu\nu}$, там надо переставить справа штрихованные переменные с нештрихованными, в смысле перемены обозначений, и при повторном применении (20.60) выйдет:

$$\begin{aligned} s_\nu &= \lim_{\substack{t'=t \\ x'=x}} (-\epsilon) \hbar c \sum_{\sigma, \sigma'} \gamma_{\sigma'\sigma}^{(\nu)} r'_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t') = -s'_\nu, \\ T_{\mu\nu} &= \lim_{\substack{t'=t \\ x'=x}} \frac{\hbar c}{4i} \sum_{\sigma, \sigma'} \left\{ \gamma_{\sigma'\sigma}^{(\mu)} \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \right) + \gamma_{\sigma'\sigma}^{(\nu)} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \right) \right\} \times \\ &\quad \times r'_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t') = +T'_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Этот результат показывает, что тензор энергии-импульса инвариантен относительно рассмотренного преобразования,

тогда как четырёхмерный ток s_ν меняет знак в соответствии с тем обстоятельством, что $e\hbar$ означает в s_ν заряд электрона, а в s'_ν — заряд позитрона. То, что формализм допускает перемену ролями электрона и позитрона, удовлетворительно не только в смысле согласия с экспериментальными фактами, но и тем, что подчёркивается сходство теории частиц со спином $1/2$ с ранее рассмотренными теориями для частиц с целым спином, в которых симметрия относительно заряда видна непосредственно (ср. § 8 и 12).

§ 21. Электроны в электромагнитном поле

В обозначении (13.2)

$$\partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{i e}{c} \Phi_\nu, \quad \partial'_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{i e}{c} \Phi_\nu, \quad (21.1)$$

где Φ_ν — заданные электромагнитные потенциалы, мы получим функцию Лагранжа электронов в поле, если заменим в выражении для свободных электронов (20.8) (подобно § 11 и 13) $\partial/\partial x_\nu$ на ∂_ν :

$$L = -\frac{\hbar c}{i} \psi^\dagger \left(\sum_\nu \gamma^{(\nu)} \partial_\nu + \mu \right) \psi. \quad (21.2)$$

Отсюда, как легко проверить, получатся следующие уравнения поля:

$$\sum_\nu \gamma^{(\nu)} \partial_\nu \psi + \mu \psi = 0, \quad \sum_\nu \partial'_\nu \psi^\dagger \gamma^{(\nu)} - \mu \psi^\dagger = 0. \quad (21.3)$$

Четырёхмерный ток (без вычитания вакуума) остаётся таким же, как и в случае отсутствия поля:

$$s_\nu = \epsilon \hbar c \cdot \psi^\dagger \gamma^{(\nu)} \psi, \quad (21.4)$$

в то время как в тензоре энергии-импульса надо заменить $\partial\psi/\partial x_\nu$ на $\partial_\nu\psi$ и $\partial\psi^\dagger/\partial x_\nu$ на $\partial'_\nu\psi^\dagger$:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\hbar c}{4i} \{ \psi^\dagger \gamma^{(\mu)} \partial_\nu \psi + \psi^\dagger \gamma^{(\nu)} \partial_\mu \psi - \\ - (\partial'_\nu \psi^\dagger) \gamma^{(\mu)} \psi - (\partial'_\mu \psi^\dagger) \gamma^{(\nu)} \psi \}. \quad (21.5)$$

В самом деле, при (21.3, 4, 5) имеют место законы сохранения¹⁾:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial s_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0, \quad \sum_{\mu} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = -\frac{1}{c} \sum_{\mu} s_{\mu} F_{\mu\nu}. \quad (21.6)$$

По отношению к преобразованию калибровки [ср. (11.4)]

$$\Phi_{\nu} \rightarrow \Phi_{\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{\nu}}, \quad \psi \rightarrow e^{\frac{i\epsilon}{c} \Lambda} \psi, \quad \psi^{\dagger} \rightarrow \psi^{\dagger} e^{-\frac{i\epsilon}{c} \Lambda} \quad (21.7)$$

величины L , s_{ν} , $T_{\mu\nu}$, как и уравнения поля (21.3), инвариантны.

В обозначениях

$$\pi_{\sigma} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}} = h (\psi^{\dagger} \gamma^{(4)})_{\sigma} = ih \psi_{\sigma}^*, \quad \pi_{\sigma}^{\dagger} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\sigma}^{\dagger}} = 0 \quad (21.8)$$

гамильтонова функция запишется в виде:

$$\begin{aligned} H &= h \psi^{\dagger} \gamma^{(4)} \dot{\psi} - L = ihc \psi^{\dagger} \gamma^{(4)} \frac{\partial \psi}{\partial x_4} - L = \\ &= -c\pi \sum_{k=1}^3 \alpha^{(k)} \partial_k \psi - i\mu c\beta \psi - i\epsilon\pi\psi\Phi_0 \end{aligned} \quad (21.9)$$

($\Phi_4 = i\Phi_0$). Легко убедиться в том, что $H + i\epsilon\pi\psi\Phi_0$ совпадает с $-T_{44}$ с точностью до членов, которые либо обращаются в нуль по уравнению Дирака, либо имеют вид пространственной дивергенции, т. е. H в существенном отличается от $-T_{44}$ членом $-i\epsilon\pi\psi\Phi_0 = \rho\Phi_0$.

Что касается квантования теории, то мы напомним, что во всех предыдущих случаях при квантовании по статистике Бозе-Эйнштейна правила перестановки не зависящих от времени операторов ψ_{σ} , π_{σ} в электромагнитном поле и без него были одинаковы; это лежит в основе канонического квантования. Поэтому будет естественно и здесь, где мы квантуем по принципу Паули, позаимствовать перестановочные соотношения не зависящих от времени операторов ψ_{σ} , π_{σ} из теории свободных электронов [ср. (20.26, 30)]:

$$\left. \begin{aligned} [\psi_{\sigma}(x), \psi_{\sigma'}(x')]_{+} &= [\pi_{\sigma}(x), \pi_{\sigma'}(x')]_{+} = 0, \\ [\psi_{\sigma}(x), \pi_{\sigma'}(x')]_{+} &= ih\delta_{\sigma\sigma'} \delta(x - x'). \end{aligned} \right\} \quad (21.10)$$

¹⁾ Ср., например Паули, Handbuch der Physik 24, часть 1-я, стр. 235.

Этим соотношениям возможно удовлетворить, разлагая π_σ и ϕ_σ по какой-либо ортогональной системе собственных функций (например, по собственным функциям свободных электронов):

$$\phi_\sigma(x) = \sum_m a_m u_{m\sigma}(x), \quad \pi_\sigma(x) = i\hbar \sum_m a_m^* u_{m\sigma}^*(x), \quad (21.11)$$

где коэффициенты a_m, a_m^* — матрицы типа (20.18) с перестановочными соотношениями (20.23); это выражение удовлетворяет требованию (21.10). На основании (21.9 и 10) находим для $\dot{\phi}(x) = \frac{i}{\hbar} [H, \phi(x)]$ и $\dot{\pi}(x) = \frac{i}{\hbar} [H, \pi(x)]$ 1):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi} &= -c \sum_k \alpha^{(k)} \partial_k \phi - i\mu c \beta \phi - i\epsilon \Phi_0 \phi, \\ \dot{\pi} &= -c \sum_k \partial_k^* \pi \alpha^{(k)} + i\mu c \pi \beta + i\epsilon \Phi_0 \pi, \end{aligned} \right\} \quad (21.12)$$

что отвечает уравнениям поля (21.3) [ср. (21.8)].

Чтобы решить вопрос о релятивистской инвариантности теории, введём зависящие от времени операторы $\phi(x, t), \pi(x, t)$ так, чтобы они удовлетворяли дифференциальным уравнениям (21.12). Мы можем их представить как разложения в ряд Тейлора по степеням времени t :

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \phi(x) + t\dot{\phi}(x) + \frac{1}{2} t^2 \ddot{\phi}(x) + \dots, \\ \pi(x, t) &= \pi(x) + t\dot{\pi}(x) + \frac{1}{2} t^2 \ddot{\pi}(x) + \dots \end{aligned}$$

1) Если H записано в виде

$$H = \sum_{\rho, \sigma} \pi_\rho O_{\rho\sigma} \phi_\sigma,$$

где $O_{\rho\sigma}$ — дифференциальный оператор, действующий на ϕ_σ , то получится, например:

$$\begin{aligned} H\phi_\tau(x) &= - \int dx' \sum_{\rho, \sigma} \pi_\rho(x') \phi_\tau(x) O_{\rho\sigma} \phi_\sigma(x') = \\ &= - \int dx' \sum_{\rho, \sigma} \{ -\phi_\tau(x) \pi_\rho(x') + i\hbar \delta_{\rho\tau} \delta(x-x') \} O_{\rho\sigma} \phi_\sigma(x') = \\ &= \phi_\tau(x) H - i\hbar \sum_\sigma O_{\tau\sigma} \phi_\sigma(x), \end{aligned}$$

так что

$$\dot{\phi}_\tau = \sum_\sigma O_{\tau\sigma} \phi_\sigma = \frac{\partial H}{\partial \pi_\tau}.$$

Если образовать с помощью этих операторов антиперестановки $[\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')]_+$, то, на основании (21.10 и 12), получится:

$$\begin{aligned} [\psi_\sigma(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')]_+ &= [\pi_\sigma(x, t), \pi_{\sigma'}(x', t')]_+ = 0, \quad (21.13) \\ [\psi_\sigma(x, t), \pi_{\sigma'}(x', t')]_+ &= ih \left\{ \delta_{\sigma\sigma'} + \right. \\ &+ t \left(-c \sum_k \alpha_{\sigma\sigma'}^{(k)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_k(x, 0) \right\} - i\mu c \beta_{\sigma\sigma'} - \right. \\ &- i\varepsilon \delta_{\sigma\sigma'} \Phi_0(x, 0) \left. \right) + t' \left(-c \sum_k \alpha_{\sigma\sigma'}^{(k)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_k} + \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_k(x', 0) \right\} + \right. \\ &\left. \left. + i\mu c \beta_{\sigma\sigma'} + i\varepsilon \delta_{\sigma\sigma'} \Phi_0(x', 0) \right) + \dots \right\} \delta(x - x')^{-1}. \end{aligned}$$

Свободные от Φ , части разложений могут быть просуммированы, и результат берётся непосредственно из теории свободных электронов [т. е. из (20.37)]:

$$\begin{aligned} [\psi_\sigma(x, t), \pi_{\sigma'}(x', t')]_+ &= ih \left\{ \delta_{\sigma\sigma'} \frac{\partial}{\partial t} - c (\alpha_{\sigma\sigma'} \cdot \text{grad}) - \right. \\ &- i\mu c \beta_{\sigma\sigma'} \left. \right\} D(x - x', t - t') + \left\{ \varepsilon h (t' - t) [(\alpha_{\sigma\sigma'} \cdot \Phi(x, 0)) - \right. \\ &\left. - \delta_{\sigma\sigma'} \Phi_0(x, 0)] + \dots \right\} \delta(x - x') \quad (21.14) \end{aligned}$$

(здесь подставлено $\Phi_\nu(x', 0) \delta(x - x') = \Phi_\nu(x, 0) \delta(x - x')$, что, ясно, дозволено).

Представим себе преобразование Лорентца и рассмотрим две мировые точки x, t и x', t' , которые одновременны в новой системе отсчёта, так что для них имеет место

$$t' - t = \sum_{k=1}^3 \alpha_k (x'_k - x_k); \quad (21.15)$$

1) Для $t' = t$, разумеется, должно быть

$$[\psi_\sigma(x, t), \pi_{\sigma'}(x', t)]_+ = ih \delta_{\sigma\sigma'} \delta(x - x'),$$

причём для произвольного t . В самом деле, это совместимо с (21.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\psi_\sigma(x, t), \pi_{\sigma'}(x', t)]_+ &= \\ &= [\dot{\psi}_\sigma(x, t), \pi_{\sigma'}(x', t)]_+ + [\psi_\sigma(x, t), \dot{\pi}_{\sigma'}(x', t)]_+ = 0. \end{aligned}$$

Начало отсчёта времени ничем не выделено, и для дальнейшего нет никакого ограничения общности в том, что разлагается по t' и t , а не по $t' - t$ (можно было бы положить $t = 0$).

тогда в (21.14) исчезнет член, линейный в $t' - t$, потому что $(x'_k - x_k) \delta(x - x') = 0$. Ограничиваясь бесконечно малыми преобразованиями Лорентца, при которых можно пренебречь членами более высокого порядка $t' - t$, видим, что уравнение (20.14) в предположении (21.15) становится таким же, как без поля, а так как там релятивистская инвариантность перестановок доказана (§ 20), то здесь для преобразованных операторов $\bar{\Psi} = S\psi$, $\bar{\pi} = \pi S^* = \pi\beta S^{-1}\beta$ мы заключаем, что

$$[\bar{\Psi}_\sigma(\bar{x}, \bar{t}), \bar{\pi}_{\sigma'}(\bar{x}', \bar{t})]_+ = ih \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\bar{x} - \bar{x}').$$

С другой стороны, по (21.13),

$$[\bar{\Psi}_\sigma(\bar{x}, \bar{t}), \bar{\Psi}_{\sigma'}(\bar{x}', \bar{t})]_+ = [\bar{\pi}_\sigma(\bar{x}, \bar{t}), \bar{\pi}_{\sigma'}(\bar{x}', \bar{t})]_+ = 0.$$

Этим доказана инвариантность перестановок для одновременных мировых точек и бесконечно малых преобразований Лорентца, а тогда инвариантность относительно произвольных (не бесконечно малых) преобразований следует непосредственно из группового свойства их совокупности, так что с учётом ещё инвариантности функции Лагранжа (21.2) удовлетворены в этом смысле все требования.

Квантование электронных волн не изменяется, если электромагнитное поле считать не заданным, как раньше, а изменяющимся волновым полем, находящимся во взаимодействии с электронным волновым полем. Тогда Φ_ν имеет смысл операторов поля, обозначавшихся в § 17 через ψ_ν . К гамильтоновой функции (21.9), представляющей кинетическую энергию электронов и их взаимодействие с электромагнитным полем [соответственно $\sum_n H_{(n)}$ в § 17, ср. (17.9, 11)], прибавляется

гамильтонова функция электромагнитного поля в вакууме; далее, функцию Шредингера всей системы надо подчинить известным дополнительным условиям, гарантирующим справедливость уравнений Максвелла, что ведёт к исключению продольных световых волн, как и в § 17. Мы не будем производить здесь вычислений, потому что они вполне сходны с прежними и приводят к аналогичным результатам [ср. (17.46, 47)]: в гамильтоновой функции остаются только поперечные компоненты поля ($\Phi_0 \rightarrow 0$, $\Phi \rightarrow \Phi^{tr}$), а вместо энергии

продольных световых волн появится кулоновская энергия электронов [ср. (17.35 до 39)]:

$$H^C = \frac{1}{8\pi} \int dx \int dx' \frac{\rho(x)\rho(x')}{|x-x'|},$$

где $\rho = -ie\pi\psi^1$). Далее, можно подражать и многовременной формулировке квантовой электродинамики (§ 18), причём роль отдельных электронов в конфигурационном пространстве переходит к квантованному электронному волновому полю, временная координата которого t_1 , заменяющая времена t_n отдельных электронов, должна отличаться от времени максвеллова поля t . В дальнейшем мы ограничимся случаем заданного поля Φ , но иногда будем рассматривать и максвелловское поле как квантованное.

Чтобы рассмотреть действие слабого поля по теории возмущений, напишем гамильтонову функцию (21.9)

$$\left. \begin{aligned} H &= H^0 + H', \\ H^0 &= -c\pi \{(\alpha \cdot \text{grad}) - i\mu\beta\} \psi, \\ H' &= i\epsilon\pi \{(\alpha \cdot \Phi) - \Phi_0\} \psi. \end{aligned} \right\} \quad (21.16)$$

Если разложить далее ψ и π по собственным функциям свободных электронов по (21.11), то

$$\begin{aligned} H &= \int dx H = H^0 + H', \\ H^0 &= \sum_m E_m a_m^* a_m, \\ H' &= \sum_{m,n} E'_{mn} a_m^* a_n, \end{aligned}$$

где

$$E'_{mn} = -\epsilon\hbar \int dx u_m^* \{(\alpha \cdot \Phi) - \Phi_0\} u_n. \quad (21.17)$$

При этом допустимо сразу перекалибровать H^0 в смысле дираковской теории дырок путём вычитания постоянной $\sum_m E_m$ [ср. (20.42, 43)]: $(E_m < 0)$

$$H^0 = \sum_{\substack{m \\ (E_m > 0)}} E_m N_m + \sum_{\substack{m \\ (E_m < 0)}} |E_m| N'_m. \quad (21.18)$$

¹⁾ Надо учесть, что $\rho(x)$ и $\rho(x')$, по (21.10), коммутируют $[\rho(x), \rho(x')] = 0$, поэтому коммутируют также ρ_k и $\rho_{k'}$ [ср. (17.27 и ниже)].

Возмущающая функция H' описывает вызванные полем Φ , переходы между невозмущёнными (свободными) состояниями, причём слагаемое m, n в (21.17), по (20.18), отвечает переходу электрона из состояния n в первоначально свободное состояние m . При этом свободные уровни отрицательной части спектра снова должны истолковываться как позитроны: если рассмотреть, например, член m, n , в котором $E_m > 0$ и $E_n < 0$, то это отвечает рождению электронно-позитронной пары: $N_m = 0 \rightarrow 1, N_n = 1 \rightarrow 0$ или $N'_n = 0 \rightarrow 1$ [ср. (20.43)]. Оставляя в стороне обобщение и уточнение общей формулировки позитронной теории, рассмотрим сначала ход расчётов на примере рассеяния света на свободном электроне.

Матричный элемент двухстепенного перехода $a \rightarrow z \rightarrow e$ напомним, как в (7.10):

$$H''_{ea} = \sum_z \frac{H'_{ez} H'_{za}}{H^0_a - H^0_z}. \quad (21.19)$$

Рассмотрим сначала переход, при котором первоначально существовавший квант света с энергией $h\omega_a$ сперва поглощается электроном, находящимся в состоянии m_a ($E_{m_a} > 0$), а потом испускается с энергией $h\omega_e$. Такой переход прибавляет к H''_{ea} следующее выражение¹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{H'_{ez} H'_{za}}{H^0_a - H^0_z} &= \frac{E'_{m_a m_z}^{(Em)} a_{m_a}^* a_{m_z} \cdot E'_{m_z m_a}^{(Abs)} a_{m_z}^* a_{m_a}}{(E_{m_a} + h\omega_a) - E_{m_z}} = \\ &= \frac{E'_{m_a m_z}^{(Em)} E'_{m_z m_a}^{(Abs)}}{(E_{m_a} + h\omega_a) - E_{m_z}} \cdot a_{m_e}^* a_{m_a} \cdot (1 - N_{m_z}) \end{aligned} \quad (21.20)$$

[ср. (20.18) и ниже]. Состояния m_z , которые были сначала заняты ($N_{m_z} = 1$), ничего не прибавляют к (21.20); соответствующие переходы $a \rightarrow z$ запрещены по принципу Паули. Это относится ко всем уровням с отрицательной энергией ($E_{m_z} < 0$) в случае, если принято, что вначале не было позитронов, т. е.

1) Целесообразно не подставлять для элементов матриц a_n, a_n^* специальных числовых значений, а считать H''_{ea} как матрицу относительно N_1, N_2, \dots [подобно тому как в (9.19) входит матрица относительно зарядных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots$].

дырок, в отрицательной части спектра. Вместо этого уровни, первоначально занятые, приводят к переходам такого рода: сначала испускается световой квант $\hbar\omega_e$, причём первоначально занимавший уровень m_z электрон перескакивает на конечный уровень m_e , а начальный электрон уровня m_a попадает в получившуюся дырку m_z путём поглощения начального светового кванта $\hbar\omega_a$:

$$\begin{aligned} \frac{H'_{ez} H'_{za}}{H'_a - H'_z} &= \frac{E'^{(Abs)}_{m_z m_a} a^*_{m_z} a_{m_a} \cdot E'^{(Em)}_{m_e m_z} a^*_{m_e} a_{m_z}}{E_{m_z} - (E_{m_e} + \hbar\omega_e)} = \\ &= \frac{E'^{(Em)}_{m_e m_z} E'^{(Abs)}_{m_z m_a}}{(E_{m_e} + \hbar\omega_e) - E_{m_z}} \cdot a^*_{m_e} a_{m_a} \cdot N_{m_z}. \end{aligned} \quad (21.21)$$

[Относительно знака учтена некоммутативность матриц a и a^* ; матричные элементы $E'^{(Em)}_{m_e m_z}$ и $E'^{(Abs)}_{m_z m_a}$ здесь имеют тот же смысл, что и в (21.20).] Так как процесс рассеяния может идти только с сохранением энергии, должно быть

$$E_{m_e} + \hbar\omega_e = E_{m_a} + \hbar\omega_a$$

и, следовательно, сумма обоих членов (21.20 и 21) не зависит от N_{m_z} и равна

$$\frac{E'^{(Em)}_{m_e m_z} E'^{(Abs)}_{m_z m_a}}{(E_{m_e} + \hbar\omega_e) - E_{m_z}} \cdot a^*_{m_e} a_{m_a},$$

т. е. каждый уровень m_z , безразлично, занятый или свободный, прибавляет тем или иным путём одну и ту же величину к сумме (21.19). Легко видеть, что то же самое относится к другому классу переходов, которые отличаются от рассмотренного тем, что в них переставлены порядком испускание и поглощение. В совокупности получается:

$$H''_{ea} = \sum_{m_z} \left\{ \frac{E'^{(Em)}_{m_e m_z} E'^{(Abs)}_{m_z m_a}}{(E_{m_e} + \hbar\omega_e) - E_{m_z}} + \frac{E'^{(Abs)}_{m_e m_z} E'^{(Em)}_{m_z m_a}}{E_{m_e} - (E_{m_z} + \hbar\omega_e)} \right\} a^*_{m_e} a_{m_a}. \quad (21.22)$$

Если процесс рассеяния не запрещён вообще принципом Паули (т. е., поскольку в начальном состоянии $N_{m_a} = 1$, $N_{m_e} = 0$), вероятность рассеяния, по (21.22), очевидно, точно такая же, как в некантованной дираковской волновой механике (без

теории дырок), и отвечает известной формуле Клейна и Нишина¹⁾, а, в частности, в нерелятивистском случае — классической томсоновской формуле рассеяния (ср. § 17). То же относится к рассеянию света на позитронах.

Другие вопросы, которые, по (21.17), могут быть рассмотрены с помощью теории возмущений, — это образование и противоположный ему процесс аннигиляции электронно-позитронной пары. По причинам, связанным с сохранением энергии и импульса, для этих процессов, как и для рождения мезонных пар в § 11, необходимо дополнительное электромагнитное (или электростатическое) поле²⁾.

Метод возмущений, набросанный здесь, приводит к удовлетворительным результатам только для весьма ограниченного круга вопросов. В других случаях, даже отвлекаясь от квантово-электродинамических собственных энергий, суммы по виртуальным промежуточным состояниям расходятся. Примером является поляризация вакуума, происходящая, как и в скалярном заряженном поле (ср. § 11), от образования виртуальных пар при включении электрического поля «в вакууме»; происходящая от этого плотность заряда бесконечна, даже и после вычитания «заряда вакуума» без поля. Этим ставится вопрос, как вообще разумно определить величину заряда и энергии-импульса электронов в поле.

Дирак³⁾ и Гейзенберг⁴⁾ предложили метод вычитания, который отвечает на этот вопрос и в то же время симметричен относительно знака заряда (ср. § 20). Мы должны будем удовлетвориться краткой характеристикой метода.

Как и в случае отсутствия поля, вводится матрица плотности $\rho_{\text{оп}}(x, t; x', t')$, выражение которой через операторы ψ, π , и электромагнитное поле должно быть найдено. С её помощью

¹⁾ Klein и Nishina, Zs. f. Phys. 52, 853, 1929, ср. Гайтлер, Квантовая теория излучения, § 16.

²⁾ Оппенгеймер и Плессет (Oppenheimer и Plesset), Phys. Rev. 44, 53, 1933; Гайтлер и Заутер (Heitler и Sauter), Nature 132, 892, 1933; Бете и Гайтлер (Bethe и Heitler), Proc. Roy. Soc. 146, 83, 1934. Ср. Гайтлер, Квантовая теория излучения, § 20. Из процессов аннигиляции важнейший происходит с испусканием двух квантов (Dirac, Proc. Camb. Phil. Soc. 26, 361, 1930); ср. Гайтлер, там же, § 21.

³⁾ Proc. Camb. Phil. Soc. 30, 150, 1934.

⁴⁾ Zs. f. Phys. 90, 209, 1934.

величины тока и тензора энергии-импульса представляются следующим образом:

$$s_\nu = \varepsilon hc \sum_{\sigma, \sigma'} \gamma_{\sigma' \sigma}^{(\nu)} r_{\sigma \sigma'}, \quad (21.23)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\theta_{\mu\nu} + \theta_{\nu\mu}), \\ \theta_{\mu\nu} &= \frac{hc}{2l} (\partial_\nu - \partial_\nu^{*'}) \sum_{\sigma, \sigma'} \gamma_{\sigma' \sigma}^{(\mu)} r_{\sigma \sigma'}, \end{aligned} \right\} \quad (21.24)$$

где, согласно (21.1), ∂_ν , $\partial_\nu^{*'}$ имеют следующее значение:

$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_\nu(x, t), \quad \partial_\nu^{*' } = \frac{\partial}{\partial x'_\nu} + \frac{i\varepsilon}{c} \Phi_\nu(x', t'). \quad (21.25)$$

Для $\Phi_\nu = 0$ эти определения несколько превосходят по общности определения § 20 (20.48, 49) в том смысле, что в них ещё не произведён предельный переход $t' \rightarrow t$ и $x' \rightarrow x$; так что через (21.23, 24) s_ν и $T_{\mu\nu}$ определяются как матрицы относительно пространственно-временных переменных; предполагается, что настоящие плотности получатся путём дальнейшего предельного перехода. Чтобы имело место уравнение непрерывности для четырёхмерного тока, достаточно потребовать, чтобы матрица плотности удовлетворяла такому дифференциальному уравнению:

$$\sum_\nu (\partial_\nu + \partial_\nu^{*' }) \sum_{\sigma, \sigma'} \gamma_{\sigma' \sigma}^{(\nu)} r_{\sigma \sigma'} = 0, \quad (21.26)$$

ибо тогда $\sum_\nu (\partial_\nu + \partial_\nu^{*' }) s_\nu = 0$ или, в пределе $x', t' \rightarrow x, t$ по (21.25):

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\lim s_\nu) = 0.$$

Далее, из (21.26) следует

$$\begin{aligned} \sum_\mu (\partial_\mu + \partial_\mu^{*' }) \theta_{\mu\nu} &= \\ &= \frac{hc}{2l} \sum_\mu [(\partial_\mu + \partial_\mu^{*' }), (\partial_\nu - \partial_\nu^{*' })] \sum_{\sigma, \sigma'} \gamma_{\sigma' \sigma}^{(\mu)} r_{\sigma \sigma'}; \end{aligned}$$

учитывая, что по (21.25) [ср. (13.6)]

$$\begin{aligned} [(\partial_\mu + \partial_\mu^{*' }), (\partial_\nu - \partial_\nu^{*' })] &= [\partial_\mu, \partial_\nu] - [\partial_\mu^{*' }, \partial_\nu^{*' }] = \\ &= -\frac{i\varepsilon}{c} \{F_{\mu\nu}(x, t) + F_{\mu\nu}(x', t')\}, \end{aligned}$$

будем иметь

$$\sum_{\mu} (\partial_{\mu} + \partial_{\mu}^{*}) \theta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2c} \sum_{\mu} \{F_{\mu\nu}(x, t) + F_{\mu\nu}(x', t')\} s_{\mu}$$

и в пределе $x', t' \rightarrow x, t$:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\lim \theta_{\mu\nu}) = -\frac{1}{c} \sum_{\mu} s_{\mu} F_{\mu\nu}.$$

Чтобы выполнялось и равенство

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\lim T_{\mu\nu}) = -\frac{1}{c} \sum_{\mu} s_{\mu} F_{\mu\nu},$$

кроме (21.25), надо потребовать и

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \{ \lim (\theta_{\mu\nu} - \theta_{\nu\mu}) \} = \\ & = \lim \sum_{\mu} (\partial_{\mu} + \partial_{\mu}^{*}) (\theta_{\mu\nu} - \theta_{\nu\mu}) = 0. \end{aligned} \quad (21.27)$$

Если подставить в (21.23, 24)

$$r_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t') = \psi_{\sigma}^{\dagger}(x', t') \psi_{\sigma}(x, t),$$

получаются снова выражения (21.4, 5), из которых не вычтены вакуумные члены. Желая построить матрицу плотности, составленную в смысле дырочной теории, примем, по Дираку и Гейзенбергу, как и в случае, свободном от поля, такое выражение:

$$r = R + S, \quad (21.28)$$

$$\begin{aligned} R_{\sigma\sigma'}(x, t; x', t') &= \\ &= \frac{1}{2} \{ \psi_{\sigma}^{\dagger}(x', t') \psi_{\sigma}(x, t) - \psi_{\sigma}(x, t) \psi_{\sigma}^{\dagger}(x', t') \} \end{aligned} \quad (21.29)$$

($\psi^{\dagger} = i\psi^{*}\beta = \pi\beta/\hbar$). Как следствие уравнений Дирака (21.3) матрица R удовлетворяет дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \sum_{\rho} \gamma_{\sigma\rho}^{(\nu)} \partial_{\nu} R_{\rho\sigma'} + \mu R_{\sigma\sigma'} &= 0, \\ \sum_{\nu} \sum_{\rho} \partial_{\nu}^{*} R_{\sigma\rho} \gamma_{\rho\sigma'}^{(\nu)} - \mu R_{\sigma\sigma'} &= 0. \end{aligned}$$

Складывая эти уравнения и суммируя по σ, σ' , получим

$$\sum_{\nu} (\partial_{\nu} + \partial'_{\nu}) \sum_{\rho, \sigma} \gamma_{\rho\sigma}^{(\nu)} R_{\rho\sigma} = 0,$$

т. е. R -часть r подчиняется уравнению (21.26). Легко проверить, что для K части выполняется и требование (21.27). Надо потребовать того же и от S -части, которая без поля даётся (20.55, 56). При этом, по идее метода вычитания, от S требуется, чтобы оно не зависело от состояний электронов, т. е. не должно явно содержать операторов ψ, ψ^{\dagger} , но допускается явная зависимость от электромагнитных потенциалов и их производных, конечно, при соблюдении релятивистской и калибровочной инвариантности.

Остаётся только определить при должных ограничениях матрицу S так, чтобы оператор $r = R + S$ давал в пределе $x', t' \rightarrow x, t$ при всех обстоятельствах конечные результаты, причём для определения S существенны только те члены, которые задают предельные значения s_{ν} и $T_{\mu\nu}(x', t' \rightarrow x, t)$. В этом объёме задачу, в основном однозначно, решил Гейзенберг¹⁾, основываясь на работах Дирака. Мы не будем входить здесь в сравнительно длинные вычисления и удовлетворимся краткой характеристикой полученной Гейзенбергом исправленной гамильтоновой функции $H = \int dx (-T_{44} + \rho\Phi_0)$. Она содержит, кроме (21.16), вычитаемые члены, являющиеся единичными матрицами относительно чисел электронов N_m и в сложной форме зависящие от Φ , и их производных; при этом Φ , всегда множится на элементарный заряд $e\hbar$. Если разложить H по степеням электронного заряда в смысле теории возмущений

$$H = \sum H^{(k)},$$

то нулевой член $H^{(0)}$, конечно, такой же, как и без поля, т. е., как (20.42, 43) или (21.18), но прибавляется ещё энергия световых квантов, поскольку максвелловское поле считается квантованным. Далее,

$$H^{(1)} = \sum_{\substack{m \\ (E_m > 0)}} E'_m N_m - \sum_{\substack{m \\ (E_m < 0)}} E'_m N'_m + \sum_{m \neq n} E'_{mn} a_m^* a_n,$$

1) Гейзенберг (Heisenberg), Zs. f. Phys. 20, 209, 1934. При этом остаётся, кажется, ещё один пробел, так как не проведена справедливость условия (21.27) для части S .

где E' — матрица, определённая в (21.17). В отношении членов суммы $m \neq n$, конечно, $H^{(1)}$ совпадает с употреблявшейся раньше возмущающей функцией H' (21.27); этим подтверждается рассмотренная выше теория образования пар, рассеяния света и т. п., так как гейзенберговская возмущающая энергия второго приближения $H^{(2)}$ ничего не прибавляет к соответствующим квадратичным в заряде матричным элементам. В задачах, требующих более высоких приближений, метод становится гораздо сложнее. Тогда как в $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$ можно прямо подставить предельные значения при $x', t' = x, t$, в высших членах $H^{(2)}, \dots$ надо вернуться к соответствующим плотностям $H^{(2)}, \dots$, причём их надо понимать как матрицы относительно пространства — времени, потому что предельные значения не обязательно конечны. Чтобы образовать из матриц интегральные величины $H^{(k)}$, положим

$$x = \bar{x} + \xi, \quad x' = \bar{x} - \xi$$

(для упрощения принято $t' = t$) и проинтегрируем по \bar{x} -пространству при постоянном ξ :

$$H^{(k)} = \int d\bar{x} H^{(k)}(\bar{x} + \xi, \bar{x} - \xi).$$

Предельный переход $\xi \rightarrow 0$ может быть, как правило, произведён только в конце вычислений, например во втором приближении, в матричных элементах

$$H_{ea}^{(2)} + \sum_z \frac{H_{ez}^{(1)} H_{za}^{(1)}}{H_a^{(0)} - H_z^{(0)}},$$

и тогда получается конечный результат. R -члены ничего не прибавляют к $H^{(2)}, H^{(3)}, \dots$, поэтому каждая из более высоких по порядку возмущающих функций ($k \geq 2$) постоянна в числах электронов и позитронов (N_m, N'_m), т. е. относительно последних она является единичной матрицей, а зависимость возмущающей функции от потенциалов Φ , даётся S -матрицей. Как сравнительно простой пример, приведём $H^{(4)}$:

$$H^{(4)} = \frac{1}{48\pi^2} \left(\frac{\epsilon^2 \hbar}{c}\right)^2 \frac{1}{\hbar c} \left(\Phi(\bar{x}) \cdot \frac{\xi}{|\xi|}\right)^4.$$

$H^{(3)}$ и более высокие члены исчезают для $\xi = 0$.

Значение гейзенберговских членов $H^{(2)}$, $H^{(3)}$, $H^{(4)}$ существенно, главным образом, для электродинамики. Так как функция Гамильтона содержит члены третьего и четвёртого порядка в Φ , электромагнитные уравнения уже не строго линейны, т. е. при сильных полях надо ожидать отклонений от принципа суперпозиции. Наглядно это можно представить так, как будто вызванная полем поляризация вакуума обратно действует на поле, причём это действие нелинейно (подобно тому, как в поляризуемой среде с зависящей от поля диэлектрической постоянной). Как о типично нелинейном эффекте упомянем о рассеянии света на свете или на электрическом поле. Эти эффекты качественно понятны уже на основе примитивного представления о дырках¹⁾: взаимодействие двух световых квантов, приводящее к рассеянию, можно представить себе через посредство виртуальных электронно-позитронных пар, поглощающих и испускающих кванты, принципиально аналогичным путём с электромагнитным взаимодействием двух электронов через обмен световыми квантами. Но только способ вычитания Гейзенберга даёт достаточно малую вероятность рассеяния света светом (в частности, при низких частотах)²⁾: в относящемся сюда матричном элементе четвёртого порядка относительно ϵ часть от $H^{(1)}$ в большой степени компенсируется членом $H^{(4)}$; последний содержит матричные элементы, отвечающие исчезновению и возникновению двух квантов, без изменения состояний электронов; в $H^{(4)}$ Φ надо, конечно, понимать как заменённый оператором, названным ψ в § 16. Для рассеяния света электрическими полями при не слишком больших частотах тоже получается эффект, величина которого вряд ли наблюдаемого порядка³⁾.

Если все встречающиеся длины волн велики по сравнению с комптоновской длиной волны электрона, то не зависящие от электронов эффекты, повидимому, можно описать

¹⁾ Гальперн (Halpern), Phys. Rev, 44, 855, 1933; Дельбрюк (Delbrück), Zs. f. Phys. 84, 144, 1933.

²⁾ Эйлер (Euler), Ann. d. Phys. 26, 398, 1936.

³⁾ Эйлер (Euler), Ann. d. Phys. 26, 398, 1936; Гейзенберг и Эйлер (Heisenberg и Euler), Zs. f. Phys. 98, 714, 1936; Вайскопф (Weißkopf), Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Math.-fys. Medd. XIV, 6, 1936; Кеммер (Kemmer), там же.

единой функцией Лагранжа для электромагнитного поля

$$L = \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2) + \frac{1}{360\pi^2} \frac{\epsilon^4 h^5}{m^4 c^7} \{ (\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2)^2 + 7 (\mathcal{E}^2 \cdot \mathcal{H})^2 \} + \dots$$

(Эта функция Лагранжа напоминает выражения нелинейных теорий поля Ми и Борна, которые стремились к «единому» описанию поля и заряженных частиц. Но кажется весьма сомнительным, не является ли эта связь чисто формальной, так как основные идеи этих двух теорий весьма отличны.)

В отношении проблемы о собственной энергии метод вычитаний Дирака-Гейзенберга не приводит ни к каким успехам. В квантовой электродинамике собственная энергия электрона всё равно остаётся бесконечной; правда, интеграл по импульсному пространству расходится только логарифмически¹⁾; но как раз это обстоятельство ставит под сомнение, можно ли решить задачу в теории со многими временами, подобно тому как это делалось при описании электронов в конфигурационном пространстве. Далее, в дырочной теории и световой квант обладает собственной энергией благодаря своей способности создавать виртуальные электронно-позитронные пары; формализм Гейзенберга приводит здесь тоже к интегралу, расходящемуся логарифмически. Если значения импульсов обрезаются, то собственная энергия во втором приближении мала по сравнению с невозмущённой энергией (E_m и соответственно $hc|k|$), даже когда обрезание произведено при значении импульса, во много раз большем mc ; это связано, во-первых, с логарифмическим характером расходимости и, во-вторых, с малостью параметра связи $\epsilon^2 h/c$. Как отмечалось выше, способ обрезания может считаться только временной мерой, потому что он нарушает релятивистскую инвариантность теории.

¹⁾ Вайскопф (Weiskopf), Zs. f. Phys. 89, 27, 1934 и 90, 817, 1934; Phys. Rev. 56, 72, 1939.

ГЛАВА VI

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

§ 22. Частицы с более высоким спином. Спин и статистика

Типы полей, подробно рассмотренные в предыдущих главах, выбраны частично из-за их сравнительной простоты, частично из-за их предполагаемой или установленной связи с опытными фактами для известных элементарных частиц: мезонов, фотонов, электронов.

В отношении других, более сложных полей мы удовлетворимся только кратким обзором, уже ввиду того, что при их рассмотрении возникают быстро растущие с числом компонент поля формально-математические осложнения; кроме того, нет указаний на то, что в природе на самом деле встречаются такие поля, за исключением «гравитационных волн», к которым мы вернёмся позже.

Как мы видели, существует связь между характером релятивистского преобразования поля и спином частиц, описываемых квантовым полем: скалярное поле описывает частицы с нулевым спином, векторное — со спином 1, а электроны со спином $\frac{1}{2}$ описываются «спинорным» дираковским полем. Отсюда легко усмотреть обобщение на целочисленный спин: частице со спином s отвечает тензорное поле s -го ранга. При полуцелом спине ($s = 3/2, 5/2, \dots$) математический способ построения поля с требуемым характером преобразования даётся «спинорным исчислением» Ван-дер-Вардена¹⁾, которое мы рассматривать не будем. Это исчисление позволяет описывать

¹⁾ Van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Berlin, 1932.

единым методом как целый, так и полуцелый спин¹⁾, причём при целом спине допускается переход от спиноров к тензорам. Однако, если мы хотим, чтобы определённые тензорные, соответственно спинорные, поля описывали только частицы со вполне определённым спином s , нужно ещё на эти поля наложить дополнительные ограничивающие условия. Пример этого мы видели в § 12; там на векторное поле ψ_ν накладывалось дополнительное условие равенства нулю дивергенции (12.2), чем избегалось появление, кроме частиц со спином 1, ещё частиц с нулевым спином; так как последние имели бы, кроме того, отрицательную энергию, условие (12.2) делает энергию положительно определённой. Ту же роль играют дополнительные условия и при большем спине.

Чтобы показать, как обобщается при большем спине ранее применявшийся формализм, рассмотрим кратко спин 2. Пусть $\psi_{\mu\nu}$ — симметричный тензор второго ранга, шпур (диагональная сумма) которого равен нулю:

$$\psi_{\mu\nu} = \psi_{\nu\mu}, \quad \sum_\nu \psi_{\nu\nu} = 0. \quad (22.1)$$

Не только каждая компонента $\psi_{\mu\nu}$ должна удовлетворять уравнению Шредингера-Гордона

$$(\square - \mu^2) \psi_{\mu\nu} = 0, \quad (22.2).$$

но, кроме того, аналогично (12.2), требуется, чтобы обращалась в нуль векторная дивергенция тензора ψ :

$$\sum_\mu \frac{\partial \psi_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0. \quad (22.3)$$

В неквантованной теории представим ψ как плоскую бегущую волну:

$$\psi_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} e^{ikx - i\omega_k t},$$

где

$$\omega_k^2 = c^2 (\mu^2 + k^2),$$

1) Дирак (Dirac), Proc. Roy. Soc. 155, 447, 1936; Фирц (Fierz), Helv. Phys. Acta 12, 3, 1939.

и сосчитаем, сколько есть независимых волн при заданном волновом векторе k . Для простоты перейдём к системе, где $k=0$ (система покоя частицы в квантованной теории), тогда

$$\psi_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} e^{-i\mu t},$$

и условие (22.3) даёт

$$\mu \cdot \psi_{4\nu} = 0.$$

Если масса покоя не равна нулю, т. е. $\mu \neq 0$, то в этой системе обращаются в нуль все компоненты $\psi_{4\nu} = \psi_{\nu 4}$ и остаются только независимые компоненты трёхмерного тензора ψ_{ik} со свойствами

$$\psi_{ik} = \psi_{ki}, \quad \sum_k \psi_{kk} = 0.$$

Число их равно 5, т. е. $2s + 1$. Из способа преобразования этих компонент при вращении пространственных координат легко заключить, что принадлежащие частице пять состояний в квантованной теории как раз соответствуют пяти возможным ориентациям спина 2.

В частном случае $\mu=0$ имеет место аналогия с электромагнитным полем ($s=1$, ср. § 16). В этом случае существуют преобразования калибровки [аналогично (16.4)], оставляющие уравнения поля инвариантными. Например, уравнения (22.1, 2, 3) с $\mu=0$ не изменяются, если заменить $\psi_{\mu\nu}$ на $\psi_{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial x_\nu}$, где Λ_ν — векторное поле, удовлетворяющее условиям $\square \Lambda_\nu = 0$, и $\sum_\nu \partial \Lambda_\nu / \partial x_\nu = 0$. Если, как в электродинамике, считать физически эквивалентными два состояния поля, переходящие друг в друга при калибровочном преобразовании, то при заданной частоте и направлении распространения волн будут только два независимых состояния поляризации, так же как и у света. Это справедливо при всех $s \neq 0$.

Задача построения такой функции Лагранжа, чтобы не только волновые уравнения, но и дополнительные условия одновременно получались из дифференциальных уравнений Эйлера вариационного принципа [как при $s=1$ из функции

Лагранжа (12.5)], может оказаться довольно сложной¹⁾. Простейшее выражение при $s=2$ таково:

$$L = - \sum_{\lambda, \mu, \nu} \frac{\partial \phi_{\mu\nu}^*}{\partial x_\lambda} \left(\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - 2 \frac{\partial \phi_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu} \right) - \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{\partial \phi_{\mu\nu}^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\nu} \frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \right) + \\ + \sum_{\nu} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} - \mu^2 \left(\sum_{\mu, \nu} \phi_{\mu\nu}^* \phi_{\mu\nu} - \phi^* \phi \right); \quad (22.4)$$

здесь $\phi_{\mu\nu}$ заранее считается симметричным тензором, а ϕ имеет значение

$$\phi = \sum_{\nu} \phi_{\nu\nu}. \quad (22.5)$$

Вариация по десяти независимым компонентам $\phi_{\mu\nu}^*$ даёт уравнения поля

$$\square \phi_{\mu\nu} - \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \phi_{\lambda\nu}}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 \phi_{\lambda\mu}}{\partial x_\lambda \partial x_\nu} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \\ + \delta_{\mu\nu} \left(\sum_{\alpha, \lambda} \frac{\partial^2 \phi_{\alpha\lambda}}{\partial x_\alpha \partial x_\lambda} - \square \phi \right) - \mu^2 (\phi_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu} \phi) = 0. \quad (22.6)$$

Если применить слева ряд операторов

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \dots, \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \dots, \sum_{\mu, \nu} \delta_{\nu\mu} \dots,$$

то последует:

$$\mu^2 \left(\sum_{\mu} \frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \right) = 0, \quad (22.7)$$

$$\mu^2 \left(\sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2 \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \square \phi \right) = 0, \quad (22.8)$$

$$2 \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2 \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - (2 \square - 3 \mu^2) \phi = 0, \quad (22.9)$$

1) Ср. Фирц и Паули (Fierz и Pauli), Proc. Roy. Soc. 173, 211, 1939. Встречающиеся в этой работе функции Лагранжа содержат и вспомогательные поля, принадлежащие меньшему спину, исчезновение которых тоже следует из вариационного принципа. Влияние внешнего электромагнитного поля можно учесть заменой в этих функциях Лагранжа d/dx_ν на ∂_ν и ∂_ν^* [ср. (13.2) и (21.1)]. Здесь мы будем рассматривать только «поля в вакууме», отвлекаясь от внешних сил.

В случае $\mu \neq 0$ из (22.8 и 9) следует, что

$$\psi = 0, \quad (22.10)$$

и тем самым из (22.7)

$$\sum_{\mu} \frac{\partial \psi_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0. \quad (22.11)$$

Тогда (22.6) означает, что и

$$(\square - \mu^2) \psi_{\mu\nu} = 0. \quad (22.12)$$

При $\mu = 0$ следствия (22.10, 11, 12) больше не получаются из (22.6), потому что (22.7, 8) вырождаются в тождества; это отвечает случаю $s = 1$. Если подставить в уравнения (22.6, 9) $\mu = 0$, то они переходят в эйнштейновские уравнения слабо гравитационного поля в пространстве, лишённом материи; $\psi_{\mu\nu}$ тогда означает отклонение фундаментального метрического тензора $g_{\mu\nu}$ от единичного тензора

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu},$$

а члены, квадратичные в $\psi_{\mu\nu}$, отброшены¹⁾. Если ещё ввести поле

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \psi,$$

то, как показал Гильберт¹⁾, можно путём преобразования координат, не меняющего порядка величины $\psi'_{\mu\nu}$, достичь того, чтобы

$$\sum_{\mu} \frac{\partial \psi'_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0,$$

что соответствует преобразованию калибровки поля²⁾; тогда (22.6, 9) сводится к

$$\square \psi'_{\mu\nu} = 0.$$

¹⁾ Ср., например, Паули, *Encykl. d. Math. Wissensch.* 2, § 60. $\psi_{\mu\nu}$ — здесь, конечно, «действительный» тензор. Ср. также Ландау и Лифшиц, *Теория поля*, § 98.

²⁾ Уравнения (22.6, 9) (при $\mu = 0$) инвариантны относительно пре-

Плоские волны, удовлетворяющие этим уравнениям, имеют только два неэквивалентных состояния поляризации¹⁾; эти «гравитационные волны» тождественны с вышеупомянутыми решениями уравнений Фирца для $s=2$, $\mu=0$. Им отвечают частицы квантованной теории, «гравитационные кванты» («гравитоны»), имеющие спин $2h$, который может ориентироваться только параллельно или антипараллельно направлению распространения.

Другая задача состоит в том, чтобы построить тензоры энергии-импульса, удовлетворяющие уравнениям сохранения (2.7), а для комплексных (заряженных) полей согласующиеся с уравнением непрерывности (3.12) для плотности заряда и тока. Это сделано впервые Яухом и Фирцем²⁾. Особенно

образования калибровки

$$\phi_{\mu\nu} \rightarrow \phi_{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial x_\nu},$$

где Λ , — произвольное векторное поле. Этому соответствует преобразование

$$\phi'_{\mu\nu} \rightarrow \phi'_{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu} \sum_\rho \frac{\partial \Lambda_\rho}{\partial x_\rho},$$

так что

$$\sum_\mu \frac{\partial \phi'_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \rightarrow \sum_\mu \frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} + \square \Lambda_\nu;$$

при надлежащем выборе Λ_ν , это выражение можно сделать равным нулю так же как и шпур

$$\phi' = \sum_\nu \phi'_{\nu\nu}.$$

1) Эйнштейн (Einstein), Berliner Berichte, 1918, стр. 154.

2) При рассмотрении свободного поля получаются (кроме случая $s=0$) многие способы определения $T_{\mu\nu}$ и s_ν , причём интегральные величины $\int dx T_{4\nu}$ и $\int dx s_4$ (энергия, импульс и заряд) определяются однозначно; только локализация их в поле оказывается многозначной. Так, например, для $s=1$ к плотности тока (12.7) можно прибавить «ток поляризации»

важны выводы относительно знака энергии и заряда. Мы видели выше, что в случаях $s=1$ и $s=0$ плотность энергии положительно определена. При больших спинах это уже не так; но при целом спине, по крайней мере, полная энергия положительно определена, тогда как общий заряд неопределён. Наоборот, при полужелом спине, как в частности при $s=\frac{1}{2}$ (ср. § 20), заряд определён, а энергия не определена: не предуказан знак энергии. Для квантования поля это имеет те же следствия, с какими мы имели дело в теории электронов и позитронов.

При квантовании полей со спином, большим 1, возникает новое усложнение. В скалярной теории (§ 6 и 8) канонические перестановочные соотношения (1.7) и (3.9) непосредственно давали релятивистски инвариантный метод квантования. В случае $s=1$ (§ 12), вследствие дополнительного условия (12.2), канонические правила перестановки были неприменимы к лишней компоненте поля ϕ_4 ; но всё же ϕ_4 могло быть исключено, и тогда канонический формализм снова приводил к инвариант-

$$s'_\nu = \gamma \cdot i \varepsilon \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\phi_{\nu}^* \phi_{\mu} - \phi_{\mu}^* \phi_{\nu})$$

($\gamma = \text{const.}$), не нарушая уравнения непрерывности; этому отвечает изменение функции Лагранжа на дивергенцию:

$$\begin{aligned} L \rightarrow L - \gamma \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \sum_{\mu} \left(\frac{\partial \phi_{\nu}^*}{\partial x_{\mu}} \phi_{\mu} - \frac{\partial \phi_{\mu}^*}{\partial x_{\nu}} \phi_{\nu} \right) = \\ = L - \gamma \sum_{\nu, \mu} \left(\frac{\partial \phi_{\nu}^*}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \phi_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \phi_{\mu}^*}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial \phi_{\nu}}{\partial x_{\mu}} \right). \end{aligned}$$

Для $s = \frac{1}{2}$ соответствующая подстановка такова:

$$L \rightarrow L - \text{const.} \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \sum_{\mu} \phi^{+i} (\gamma^{(\mu)} \gamma^{(\nu)} - \gamma^{(\nu)} \gamma^{(\mu)}) \frac{\partial \phi}{\partial x_{\mu}}$$

Но функции плотности однозначны, если рассматривать заряженные частицы в электромагнитном поле и приписать им определённые уравнения движения. В случае $s=1$ это означает выбор константы γ в дополнительном члене функции Лагранжа (§ 13, стр. 89—90), т. е. выбор магнитного спинового момента частицы.

ным перестановочным соотношениям. При большем спине число дополнительных условий и лишних компонент поля быстро увеличивается, и оказывается, что их уже нельзя исключить тем же способом, как при $s \leq 1$. Но и без помощи канонического формализма удаётся достигнуть релятивистски инвариантного квантования. Фирц установил инвариантные перестановочные соотношения, справедливые при любом спине, совпадающие при $s \leq 1$ с выведенными ранее (6.8), (8.8), (12.22, 23, 24), (20.39) и обобщающие их. Они удовлетворяют общим требованиям формализма квантовой теории, так как из них для любой величины, не содержащей времени, явно следует операторное уравнение $\dot{\varphi} = i/\hbar \cdot [H, \varphi]$. Корпускулярные свойства квантовой системы выражаются, например, в том, что собственные значения энергии получаются в виде суммы энергий частиц $\hbar\omega_k$.

Для пояснения приведём перестановочные соотношения Фирца для случая $s = 2$, $\mu \neq 0$ (комплексное поле). В тех же обозначениях, что и выше, и с сокращением

$$d_{\nu\nu'} = \delta_{\nu\nu'} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_{\nu'}}$$

[ср. (12.24)] перестановки имеют вид

$$\begin{aligned} [\psi_{\mu\nu}(x, t), \psi_{\mu'\nu'}(x', t')] &= [\psi_{\mu\nu}^*(x, t), \psi_{\mu'\nu'}^*(x', t')] = 0, \\ [\psi_{\mu\nu}(x, t), \psi_{\mu'\nu'}^*(x', t')] &= \frac{\hbar}{i} c^2 \cdot \frac{1}{2} \left(d_{\mu\mu'} d_{\nu\nu'} + d_{\mu\nu'} d_{\mu'\nu} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} d_{\mu\nu} d_{\mu'\nu'} \right) D(x - x', t - t'). \end{aligned} \quad (22.13)$$

Легко проверить, что эти соотношения совместимы с уравнениями поля (22.1, 2, 3), если учесть, что инвариантная функция удовлетворяет уравнению Шредингера-Гордона; например, свёртывание правой части (22.13) по индексам μ, ν даёт нуль, в согласии с (22.1), из-за того, что

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} d_{\nu\mu} d_{\nu\nu'} D &= \left\{ d_{\mu'\nu'} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_{\nu'}} \left(1 - \frac{\square}{\mu^2} \right) \right\} D = d_{\mu'\nu'} D, \\ \sum_{\nu} d_{\nu\nu} D &= \left(4 - \frac{\square}{\mu^2} \right) D = 3D. \end{aligned}$$

Уже указывалось на важность того обстоятельства, что при полуцелом спине ($s = 1/2, 3/2, \dots$) знак энергии в некантованной теории неопределён. Единственный способ получить в квантовой теории положительно определённую энергию — это перенести дырочную теорию позитрона и рассмотренный в § 20 способ вычитания на частицы с большим спином; в частности, вакуум надо отождествить с тем состоянием, в котором заняты все состояния с отрицательной энергией и свободны все состояния с положительной энергией. Но, чтобы говорить о «заполненных» состояниях вообще, надо квантовать по принципу Паули, т. е. правила перестановки надо относить к антикоммутаторам (к скобкам с индексом \dagger).

Требование, чтобы энергия в квантовой теории всегда была положительно определённой, выполнимо только на основе предположения, что частицы с полуцелым спином вообще подчиняются принципу Паули.

С другой стороны, если попробовать применить принцип Паули к частицам с целым спином ($s = 0, 1, \dots$), т. е. подставить плюс в их перестановках, то получится математическое противоречие. Оно основано на том, что антиперестановка оператора с эрмитовски сопряжённым с ним оператором ($[a, a^*]_{\dagger} = aa^* \dagger a^*a$) положительно определённа, тогда как выражение, которому она была бы равна при релятивистски инвариантном квантовании, имеет оба знака. Для целочисленного спина квантование по принципу Паули невозможно. Перестановка с минусом, напротив, не ведёт к противоречию ($[a, a^*] = aa^* - a^*a$ неопределённа по знаку).

Наиболее общее доказательство этих выводов принадлежит Паули¹⁾. При этом частный вид уравнений поля остаётся произвольным, и не предугадывается никакое особое значение спина; по свойствам преобразования компонент поля по отношению к преобразованиям Лорентца судят, описывает ли поле частицы с целым или же с полуцелым спином. Предполагая релятивистскую инвариантность каждого решения в неканто-

¹⁾ Phys. Rev. 58, 716, 1940.

ванной теории¹⁾, можно сопоставить с ним то решение, в которое оно переходит при замене x , на $-x$, и одновременной перемене знака некоторых составляющих поля. Тензор энергии-импульса, составленный квадратично или билинейно из функций поля как тензор второго ранга, имеет то свойство, что значения компонент для обоих решений либо равны, либо равны и противоположны по знаку, смотря по тому, является ли спин целым или полуцелым. Этим доказана неопределённость знака энергии $(-\int dx T_{44})$ в некантованной теории, а значит, необходимо квантовать по принципу Паули. При целом спине соответственно не определён заряд. От инвариантных перестановочных соотношений Паули требует, чтобы перестановки и антиперестановки компонент поля могли быть представлены инвариантной D -функцией (4.25). Правда, здесь есть формальная возможность допустить вторую инвариантную функцию D' [ср. (20.56)]; но так как эта функция вне светового конуса не равна нулю [в противоположность D -функции, ср. (4.34)], то по физическим соображениям пользоваться D' нельзя, ибо перестановочные соотношения, которые содержат D' -функцию, означают, что измерения в двух мировых точках, разделённых пространственным интервалом, не независимы, а это предполагает распространение возмущений быстрее света (ср. § 4, последний абзац). Итак, остаётся только D -функция. Но тогда оказывается, что перестановочное соотношение может непротироречиво применяться со знаком \mp только при полуцелочисленном спине; при целочисленном спине отсюда последовало бы уравнение типа $[a, a^*]_+ = 0$, бессмысленное из-за положительно определённого характера левой стороны. Этим ещё раз доказана в самом общем виде неприменимость принципа Паули к частицам с целым спином.

Таким образом, релятивистская квантовая теория волновых полей принудительно приводит к тому, чтобы описывать частицы с целочисленным спином перестановкой со знаком минус, а с полуцелочисленным спином—со знаком плюс. Это равносильно утверждению, что к частицам с целым спином необходимо

¹⁾ Существенна только инвариантность по отношению к «собственной» лорентцовой группе преобразований, с определением 1, т. е. по отношению к преобразованиям, которые не меняют знака времени на обратный,

применять статистику Бозе-Эйнштейна, а к частицам с полуцелым спином — статистику Ферми-Дирака. Известно, что это отвечает действительности, по крайней мере, у тех элементарных частиц, которые в достаточной мере доступны эксперименту: световых квантов, электронов, протонов и нейтронов. Без сомнения, это один из лучших успехов квантовой теории поля, нашедшей общее теоретическое обоснование для взаимосвязи спина со статистикой на основе постулатов теории относительности.

§ 23. Перспективы

Желая судить об успехах рассмотренной здесь теории в целом, надо различать теории с «взаимодействием» и без него. Теория свободных полей или, соответственно, частиц вряд ли оставляет желать лучшего. Она объединяет волновое и корпускулярное описание; стоит особенно вспомнить, что квантовая природа энергии, импульса и заряда получается как следствие квантования поля; теория даёт естественную классификацию элементарных частиц по спинам, причём может быть обоснована характерная взаимосвязь спина и статистики в зависимости от свойств соответствующего поля; множество простых типов полей достаточно богато, чтобы уместить все известные элементарные частицы в эти рамки.

Напротив, в теориях с взаимодействием последнее слово, конечно, ещё не сказано. Здесь исходят из представления, что заданы различные поля или частицы, которые потом взаимосвязываются путём последующего введения надлежащих инвариантных добавок к функциям Лагранжа. Применение аппарата квантовой теории к системам, определённым таким образом, приводит к некоторым удовлетворительным результатам; например, для сил, определяемых полем; но, с другой стороны, проблемы собственной энергии всегда приводят к расходимостям, устранить которые пока что можно только неннвариантными и весьма произвольными «обрезаниями». Удастся ли здесь помочь чисто формальным изменением теории (ср. § 19), — кажется, по меньшей мере, спорным. Конечно, теории взаимодействия нельзя совсем отказать во всякой ценности: многие результаты, не зависящие от специального выбора метода обрезания, кажутся заслуживающими доверия, и можно считать, что они в основном правильно передают положение дел,

Тем не менее, нужно подчеркнуть, что эти теории надо рассматривать всё же как предварительные, с ограниченной областью применимости.

Из классической электронной теории Лорентца известно, как связана проблема собственной энергии с вопросом об «электромагнитной массе». Те же вопросы, на которые в рамках классической теории поля пытались ответить на основе гипотез о пространственно-протяжённом строении электрона и действующих в нём силах связи¹⁾, возникают здесь снова в несколько изменённой форме. Что для ответа на них в квантовой теории недостаточно приписать электрону пространственную протяжённость и, тем самым, обрывающий множитель, — уже указывалось; к тому же это едва ли было бы совместимо с представлением об электроне как элементарной частице. Хотя путь к удовлетворительному решению ещё скрыт от нас, возникает впечатление, что проблема собственной энергии теснейшим образом связана с вопросом о массах элементарных частиц. В то время как в формализме нынешней теории постоянная массы покоя μ играет роль параметра, выбираемого произвольно, в будущей теории может подняться вопрос — независимо от того, приводит ли взаимодействие с другими полями к дополнительной инерции, — о значении величины массы или о значении отношений масс элементарных частиц.

Если раньше можно было в упомянутых классических исследованиях рассматривать электромагнитное поле (наряду с гравитационным) как единственный агент, так что казалось правомерным искать «единую теорию» на электромагнитной основе, то теперь такое ограничение проблемы никак не отвечает современным знаниям. Кроме электромагнитных сил, нужно учесть, например, ядерные, неэлектромагнитный характер которых несомненен, даже если не соглашаться с мезонной теорией. Например, можно предполагать, что массы протона и нейтрона обусловлены, главным образом, инерцией связанного с ними «ядерного поля», тогда как электромагнетизм приводит только к малым поправкам; это объяснило бы, почему массы протона и нейтрона приближённо равны и велики по сравнению с массой электрона. Точно так же, как и о массах, можно задать вопросы и о других свойствах эле-

¹⁾ Ср. Паули (P a u l i), *Encykl. d. Math. Wissensch.* 2, § 63 до 67,

ментарных частиц. Что касается спина, то мы, правда, видели, что наименьшие значения ($s=0, 1$ и $1/2$) выделяются особой простотой формализма; но это ещё не объясняет, почему в природе встречаются только частицы с малым спином, не говоря уже о том, почему определённые значения спина комбинируют только со вполне определёнными массами и зарядами.

Так же мало мы знаем, почему взаимодействия между различными элементарными частицами именно таковы, как они есть, а не осуществлены другие, формально возможные. Сюда относится вопрос о числовом значении безразмерной постоянной $e^2/\hbar c$, определяющей взаимодействие между электроном и световым квантом¹⁾ (зюмерфельдова постоянная тонкой структуры). В квантовой электродинамике это численное значение берётся из эксперимента ($e^2/\hbar c = 1/137$, если элементарный заряд измерен в обычных, а не «хэвисайдовских» единицах). Такой «параметр связи» входит, конечно, в каждое взаимодействие. Особый случай возникает, если параметр связи исчезает, т. е. взаимодействие не существует; но и это не следует из теории, а получается эмпирически.

Представим себе, например, взаимодействие между протоном, позитроном и электромагнитным полем, которое сделало бы возможным спонтанное превращение протона в позитрон с испусканием кванта²⁾; такое взаимодействие, формально допустимое, не подтверждается известной из опыта стабильностью протона.

Всё это показывает, что квантовая теория волновых полей в её современном виде представляется слишком широкой и всеобъемлющей схемой, заключающей гораздо больше теоретических возможностей, чем их реализуется в природе. Очевидно, вопрос о численном значении параметров связи имеет отношение к проблеме масс, и можно предполагать,

¹⁾ В выражении для взаимодействия (17.14) и (21.17) сила взаимодействия определена множителем e (e_e или $e\hbar$), так что величина $e/\sqrt{\hbar c}$ играет роль безразмерного параметра.

²⁾ Соответствующее выражение возмущающей функции было бы $\sum_{\rho, \sigma, \nu} c_{\rho\sigma\nu} \Phi_{\rho} \varphi_{\sigma}^* \phi_{\nu} + \text{компл. сопряж.}$, где Φ_{ρ} , φ_{σ} , ϕ_{ν} — волновые функции протона, позитрона и светового поля; коэффициенты $c_{\rho\sigma\nu}$ (с точностью до общего множителя) определены из требования лорентцовой инвариантности.

что проблема собственной энергии может быть решена только в общей связи с ним. По всему кажется, что для этого нужна совсем новая мысль, которая в настоящей теории отсутствует. До этого придётся пользоваться вспомогательными средствами типа обрезаний, что так же правомерно, как в классической электронной теории, красивые и бесспорные результаты которой тоже могли быть получены только при отстранении более глубоких вопросов о строении массы электрона. В том же смысле, как и классическую, квантовую теорию поля можно считать в современном виде законченной дисциплиной.

«Классический радиус электрона» получается, как известно, порядка величины $e^2/mc^2 \cong 2,8 \cdot 10^{-18}$ см, если принять электромагнитную массу равной истинной массе m . Всё указывает на то, что в квантовой теории «радиус обрезания» должен быть выбран не бóльшим, чем классический электронный радиус, т. е. обрезание спектра импульсов должно касаться только значений $> h \cdot mc^2/e^2 \cong 137 mc$. Поэтому результаты теории должны были бы иметь достоверный характер только для явлений, в которых играют существенную роль только волны длины $> e^2/mc$ или импульсы $< 137 mc$. В известных вопросах теория подтверждается и в области больших энергий, например, квантово-электродинамические формулы для вероятностей процессов с излучением (тормозное излучение, образование пар) даже и при очень высоких энергиях согласуются с наблюдениями над космическими лучами. Гейзенберг ¹⁾ пытался точнее ограничить область применимости теории на основе ряда правдоподобных допущений; при этом вводится «универсальная длина», которую Гейзенберг принимает порядка классического электронного радиуса. Область по ту сторону этой границы — «белое пятно», и можно, вероятно, надеяться, что эксперимент, например в области космических лучей, укажет, в каком направлении надо искать ответ на ещё открытые вопросы.

1) Heisenberg Zs. f. Phys. 110, 251, 1938.

НОВЕЙШИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ТЕОРИИ МЕЗОНОВ.

(Перевод с английского В. Авербаха¹⁾)

Обозначения

Греческие индексы относятся к пространственно-временным координатам ($x_4 = it$);

γ_ν — матрицы Дирака, действующие на спиновые координаты нуклеонного²⁾ поля;

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4;$$

i — индекс изотопного спина (в симметричной теории принимает значения от 1 до 3);

τ_i — матрицы изотопного спина — матрицы Паули, действующие на зарядную координату нуклеонного поля;

φ — волновая функция нуклеонов (8 компонент — по 4 для протонного и нейтронного состояний; $\varphi^+ = i\varphi^x \gamma_4$);

$\phi_i, \psi_{i\nu}$ — (действительные) волновые функции соответственно псевдоскалярного и векторного мезонных полей;

μ_N, μ_{ps}, μ_v — массы покоя нуклеона, псевдоскалярного и векторного мезона;

g_{ps}, f_{ps}, g_v, f_v — (действительные) константы связи, имеющие размерность длины;

Используются рациональные единицы: $\hbar = c = 1$.

¹⁾ Помещено в *Reviews of Modern Physics* 19, I, 1947.

²⁾ Нуклеон — термин, применяющийся также взамен термина протон-нейтрон, который был использован в основной части этой книги. (Прим. ред.)

Функция Лагранжа системы нуклеонов и мезонов может быть представлена в виде интеграла по объему $\int d^{(3)}x L$, где

$L = L_N + L_{ps} + L'_{ps}$ — в псевдоскалярном варианте теории;

$L = L_N + L_v + L'_v$ — в векторном варианте;

$L = L_N + L_{ps} + L_v + L'_{ps} + L'_v$ в случае смеси.

$$L_N = i\psi + \left\{ \sum_v \gamma_v \frac{\partial}{\partial x_v} + \mu_N \right\} \psi;$$

$$L_{ps} = -\frac{1}{2} \mu_{ps}^2 \sum_i \psi_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{iv} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_v} \right)^2;$$

$$L_v = -\frac{1}{2} \mu_v^2 \sum_{iv} \psi_{iv}^2 - \frac{1}{4} \sum_{iv\mu} \left(\frac{\partial \psi_{iv}}{\partial x_v} - \frac{\partial \psi_{i\mu}}{\partial x_\mu} \right)^2;$$

$$L'_{ps} = f_{ps} \mu_{ps} \sum_i \psi + \tau_i \gamma_5 \psi \psi_i + g_{ps} \sum_{iv} \psi + \tau_i \gamma_v \gamma_5 \psi \frac{\partial \psi_i}{\partial x_v};$$

$$L'_v = g_v \mu_v \sum_{iv} \psi + \tau_i \gamma_v \psi_{iv} + \frac{1}{2} f_v \sum_{i\mu\nu} \psi + \tau_i \gamma_\nu \gamma_\nu \psi \left(\frac{\partial \psi_{i\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \psi_{i\nu}}{\partial x_\mu} \right).$$

§ 1. Вводные замечания

Современная математическая теория мезонов, взаимодействующих с ядерными частицами, может базироваться только на квантовой теории полей. Классические теории могут использоваться в качестве иллюстрации, но в действительных проблемах неизбежно квантовое рассмотрение: мезоны должны описываться квантованным мезонным полем. Вследствие этого теория мезонов страдает теми же хорошо известными пороками, что и квантовая электродинамика. Поиски выхода из этих трудностей занимают главное место в современной литературе по мезодинамике. Существуют как более скромные, так и более претенциозные теории, удовлетворяющие требованию релятивистской инвариантности и внутренне непротиворечивые. Простейшим подходом к проблеме является применение обычного метода возмущений (разложение по степеням константы взаимодействия) с пренебрежением членами высшего порядка, хотя они и могут быть велики или даже бесконечны. В пользу этой процедуры, повторяющей принятую в квантовой электродинамике (где получаются, повидимому, правильные результаты),

можно привести общие аргументы в духе принципа соответствия — или же надеяться на оправдание ее в будущей теории. Однако ядерные силы, которые, как предполагается, обусловлены взаимодействием нуклеонов с мезонным полем, значительно больше электромагнитных. Это означает, что параметр разложения теории возмущений в мезодинамике заметно больше, чем в квантовой электродинамике (в последней разложение ведётся по постоянной тонкой структуры Зоммерфельда). Можно думать поэтому, что в теории мезонов выгоднее разлагать не по возрастающим, а по убывающим степеням константы взаимодействия. Такое разложение характерно для *теории сильной связи*.

Здесь проблема собственной энергии принимает несколько иную форму: если нуклеону приписывается малый, но исчезающий радиус « a », сходимость разложения улучшается с выбором меньших значений « a », но в случае точечного источника (т. е. в пределе при $a \rightarrow 0$) инерционные эффекты мезонного поля становятся бесконечными (исключая случай скалярного поля).

До сих пор не найден способ избежать этой дилеммы, что препятствует релятивистскому описанию нуклеонов в теориях сильной связи. С другой стороны, недавно был предпринят ряд попыток *вычестть* получающиеся в квантовых теориях полей бесконечности, не входя в противоречие с релятивизмом. Мы отметим здесь предельный λ -процесс, подкреплённый новым методом квантования полей, предложенным Дираком, теорию радиационного торможения Гайтлера и Пенга и теорию Штюкельберга, основывающуюся на схеме матрицы S Гейзенберга.

Все эти вычитательные теории существенно предполагают слабость связи, так как в них применяется разложение по возрастающим степеням константы взаимодействия.

Даже из этого поверхностного обзора современной ситуации явствует, что теории мезонов могут быть весьма различными. Об этом всегда нужно помнить при сопоставлении теории с опытом. Более того, та или иная теория может быть хороша в одном отношении и явно недостаточна в другом. Например, вряд ли можно считать очень убедительным тот факт, что некоторые теоретически вычисленные эффективные сечения согласуются с экспериментальными значениями. В то же время, может быть, гораздо большую ценность может составить кон-

статация явных несогласий с опытом, позволяющая отбрасывать те или иные теории. Поэтому для настоящего обзора последних теоретических работ были выбраны именно такие пункты, которые обнаруживают не столько достижения, сколько недостатки и слабые места различных теорий. Итог оказывается довольно неутешительным: ни одна из существующих теорий не является вполне удовлетворительной. Означает ли это, что теория мезонов должна быть полностью отброшена? Пока что нельзя решиться утверждать это, учитывая незаконченность квантовой теории полей. Нужно также иметь в виду, что *основные идеи* мезонной теории подтверждаются, правда, только качественно, несколькими поразительными фактами: 1) приближённым равенством радиуса действия ядерных сил и комптоновской длины волны мезонов, наблюдающихся в космических лучах; 2) β -распадом мезона, согласующимся, более или менее, с предсказанием Юкава; 3) аномальными значениями магнитных моментов протона и нейтрона, указывающими, повидимому, на существование мезонного облака вокруг нуклона. Все эти обстоятельства могут стимулировать дальнейшие теоретические исследования, однако окончательное суждение о теории мезонов должно быть отложено до того момента, когда будет достигнут значительный прогресс в релятивистской квантовой механике.

§ 2. О выборе гамильтониана

Экспериментальные исследования космических лучей доставляют некоторые сведения об основных свойствах мезонов, но в высшей степени желательны более полные и надёжные данные. *Массы* мезонов (массы покоя) заключены в интервале¹⁾ от, примерно, 20 до почти 1000 электронных масс, но, к сожалению, точность большинства экспериментов весьма мала, так что можно сомневаться в том, что мы действительно имеем дело со спектром масс. В теории мезонов обычно выбирается *одно*, максимум *два* значения массы. Для определения *спина*

¹⁾ Н. Maier-Leibnitz, Zeits. f. Phys. **112**, 569, 1939. См. также J. A. Wheeler a. R. Ladenburg, Phys. Rev. **60**, 754, 1941; Leprince-Ringuet et Lheritier, J. de Phys. et Radium. ser. VIII, т. VII, стр. 65, 1945.

мезонов данные об образуемых ими ливнях сравнивались с теоретическими предсказаниями¹⁾).

Результаты говорят в пользу спина 0 или $\frac{1}{2}$ и, повидимому, исключают спин 1; однако, мезоны спина 1 с меньшим временем жизни могут присутствовать в верхних слоях атмосферы²⁾).

Частицы спина $\frac{1}{2}$ допустимы только в теориях парных сил, где за элементарный акт принимается испускание нуклеоном пары мезонов (а не одного, как у Юкава и в обычной теории). Однако парные теории не могут объяснить зависимость ядерных сил от спинов³⁾, и мы не будем их рассматривать.

Таким образом, остаются только мезоны спина 0 (скалярное или псевдоскалярное поле) и, может быть, спина 1 (векторное поле).

Существование *нейтральных мезонов* («нейтретто») трудно доказать, основываясь только на наблюдениях космических лучей. Хорошо известно, что нейтральные мезоны приходится вводить в рассмотрение, чтобы объяснить независимость ядерных сил от электрического заряда нуклеонов. Этот факт вытекает из опытов по рассеянию протонов и нейтронов протонами (в обоих случаях 1S -потенциалы оказываются одинаковыми). Существуют два вида теорий, автоматически обеспечивающих независимость ядерных сил от электрического заряда; симметричная теория Кеммера, в которую равноправно входят как заряженные, так и нейтральные мезоны⁴⁾, и «нейтральная» теория Бете, предполагающая, что нуклоны взаимодействуют только с нейтральными мезонами⁵⁾. Однако эта «нейтральная» теория вряд ли соответствует исходным идеям мезодинамики. В самом деле, радиус действия ядерных сил и времена жизни

¹⁾ M. Schein a. P. S. Gill, Rev. Mod. Phys. 11, 267, 1939; R. E. Lapp, Phys. Rev. 64, 255, 1943; R. F. Christy a. Kusaka, Phys. Rev. 59, 414, 1941; S. B. Batdorf a. R. Thomas, Phys. Rev. 59, 621, 1941.

²⁾ H. Snyder, Phys. Rev. 59, 1043, 1941.

³⁾ W. Pauli a. Ning Hu, Rev. Mod. Phys. 17, 267, 1945; J. M. Blatt, Phys. Rev. 69, 285, 1946.

⁴⁾ N. Kemmer, Proc. Camb. Phil. Soc. 34, 354, 1938.

⁵⁾ H. A. Bethe, Phys. Rev. 55, 1261, 1939.

β -активных ядер в этой теории определяются массой и временем жизни нейтрального мезона, которые совершенно отличны от соответствующих свойств заряженных мезонов, наблюдаемых в космических лучах. Таким образом, как раз те стороны теории Юкава, которые сделали её столь привлекательной при открытии в 1937 г. мезонов в космических лучах, полностью теряются в нейтральной теории. Более того, нейтральная теория не может объяснить магнитных аномалий, так как нейтральное мезонное облако ничего не добавляет к магнитному моменту. Поэтому её нельзя принимать в расчёт слишком серьёзно. В дальнейшем мы ограничимся симметричными теориями, исключая те случаи, когда в других вариантах легче рассматривать общие проблемы.

Рассматривая только *один* вид мезонного поля, мы должны отбросить *скалярный* вариант, ибо такие мезоны не могут взаимодействовать со спином нуклеонов, поэтому, например, не говоря о других недостатках, нельзя будет объяснить аномальные магнитные моменты протона и нейтрона. На *псевдовекторный* вариант не обращалось особого внимания — главным образом потому, что он даёт силы отталкивания в обоих *S*-состояниях проблемы двух тел в предположении слабой связи¹⁾, где исследуются «заряженные» теории, включая псевдовекторную. В симметричной теории только фактор, зависящий от изотопической силы, должен быть изменён хорошо известным образом (см. (10)), однако, этот вариант как будто бы никогда не исследовался в теории сильной связи. В *псевдоскалярном* и *векторном* вариантах трудности менее очевидны. Нашей главной задачей будет рассмотрение более тонких проблем, в которых как раз сказываются эти трудности.

§ 3. Тензорное взаимодействие. Смеси Меллера-Розенфельда и Швингера

Мы начнём с обсуждения проблемы тензорного взаимодействия, потому что здесь можно воспользоваться просто теорией возмущений во втором приближении. В самом деле, поскольку здесь существенны только знак и порядок величины, и теория сильной связи и вычитательные теории дают то же самое. По тем же соображениям достаточно рассмотреть только статиче-

¹⁾ См. N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. **166**, 127, 1938.

ское взаимодействие (оно получится, если считать нуклоны покоящимися). Возможные силы ближкодействия (δ -потенциалы) всегда предполагаются исключёнными путём добавления подходящих членов в лагранжиан.

С этими ограничениями, потенциальная энергия задачи двух тел в псевдоскалярной и векторной симметричных теориях может быть записана в виде:

$$W_{ps} = (\boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\tau}'') \left[\frac{1}{3} (g_{ps} \boldsymbol{\mu}_{ps})^2 (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'') + \right. \\ \left. + g_{ps}^2 T r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{\exp(-\mu_{ps} r)}{4\pi r}, \quad (1)$$

$$W_v = (\boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\tau}'') \left[(g_v \boldsymbol{\mu}_v)^2 + \frac{2}{3} (f_v \boldsymbol{\mu}_v)^2 (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'') - \right. \\ \left. - f_v^2 T r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{\exp(-\mu_v r)}{4\pi r}. \quad (2)$$

$\boldsymbol{\sigma}'$, $\boldsymbol{\sigma}''$, $\boldsymbol{\tau}'$, $\boldsymbol{\tau}''$ суть векторные операторы спина и изотопного спина двух нуклонов, T — оператор тензорного взаимодействия:

$$T = \boldsymbol{\sigma}'_r \boldsymbol{\sigma}''_r - \frac{1}{3} (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'')$$

(индекс r означает проекцию на направление вектора, соединяющего два нуклона). Вводя вектор полного спина $\mathbf{s} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma}'')$ имеем:

$$(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'') = 2s^2 - 3, \quad T = 2 \left(s^2_r - \frac{1}{3} s^2 \right). \quad (3)$$

Собственные значения оператора $(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'')$ суть -3 (спин-синглет, $s^2 = 0$) и $+1$ (спин-триплет, $s^2 = 2$): аналогично, собственные значения $(\boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\tau}'')$ суть -3 (зарядный синглет) и $+1$ (зарядный триплет).

При качественном рассмотрении проблемы двух нуклонов удобно рассматривать тензорное взаимодействие, как малое возмущение. Пренебрегая им в нулевом приближении, мы получаем, что W_{ps} даёт притяжение как в 3S -состоянии $[(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'') = +1, (\boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\tau}'') = -3]$, так и в 1S -состоянии $[(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'') = -3, (\boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\tau}'') = +1]$. То же самое получается и в векторной теории, если только отношение $(g_v/f_v)^2$ достаточно мало¹⁾.

¹⁾ Член $\sim (g_v \boldsymbol{\mu}_v)^2$ в W_v появляется из-за взаимодействия продольных векторных мезонов с нуклонами. В векторной теории сильной связи такой член не появляется, если только $(g_v/f_v)^2 < 4/3$; см. Wentzel, Helv. Phys. Acta 16, 551, 1943.

В следующем приближении, в результате спин-орбитального взаимодействия волновая функция триплета ($s^2 = 2$) перестаёт быть сферически симметричной и превращается в смесь ${}^3S + {}^3D$. Получающееся при этом в дейтероне распределение заряда создаёт *электрический квадрупольный момент*. При этом множитель при s_r^2 (или T) отрицателен в W_{ps} и положителен в W_{σ} . Таким образом, в псевдоскалярной теории выгодны *большие* значения $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})^2$ и, следовательно, распределение заряда в основном состоянии дейтерона *вытянуто* вдоль спиновой оси («сигарообразная» форма), в соответствии со знаком квадрупольного момента, экспериментально определённым Раби с сотрудниками¹⁾. С другой стороны, чисто *векторная* теория даёт неверный знак и, следовательно, должна быть отброшена.

К сожалению, строгие вычисления показывают, что и псевдоскалярный вариант неудовлетворителен. Первую трудность составляет зависимость тензорного потенциала от расстояния:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\exp(-\mu r)}{r} = \left[\frac{3}{r^3} + \frac{3\mu}{r^2} + \frac{\mu^2}{r} \right] \exp(-\mu r). \quad (4)$$

Потенциал со столь сильной особенностью в начале координат при ($r=0$) недопустим в волновой механике (он не даёт уровня с минимальной энергией). Правда, на малых расстояниях уже нельзя пренебрегать нестатическими взаимодействиями, но учёт последних не улучшает дела. В теории, использующей предельный λ — процесс, потенциалы (1), (2) выводятся только для расстояний r , значительно превышающие некоторую критическую длину²⁾, и, может быть, можно надеяться, что вычислительные теории сумеют устранить эти недопустимые особенности. Но пока что единственный выход (в чисто псевдоскалярной теории) состоит в том, чтобы оборвать ход потенциала на малых расстояниях, рассматривая нуклеон, как протяжённый источник поля. Конечно, это означает возврат к нерелятивистскому описанию нуклеонов. Согласно (1), изотропный потенциал в W_{ps} один и тот же как в 1S -состоянии, так и в основном состоянии дейтерона (${}^3S + {}^3D$),

¹⁾ J. M. Kellogg, I. I. Rabi, N. F. Ramsey and J. R. Zacharias, Phys. Rev. **55**, 318, 1939 и **57**, 677, 1940.

²⁾ W. Pauli, Phys. **64**, 332, 1943.

так как в обоих случаях $(\tau' \tau'')(\mathcal{J}' \sigma'') = -3$; разница между двумя собственными значениями энергии (т. е. практически вся энергия связи основного состояния) должна, таким образом, обуславливаться тензорным взаимодействием. Если теперь оборвать ход потенциала только на *малых* расстояниях (радиус обрезания $a \ll \mu^{-1}$), то тензорное взаимодействие всё же останется весьма сильным на малых и средних расстояниях, и можно заподозрить, что разница в энергиях двух состояний окажется чересчур большой ($\gg 2 \text{ MeV}$). И действительно, Феретти¹⁾ показал, что для того, чтобы получить правильные значения обеих энергий, обрывающий радиус должен быть выбран неразумно большим ($a > \mu^{-1}$), независимо от выбора потенциала при $r < a$. Здесь даже вычитательные механизмы, например предельный λ -процесс, не могут помочь. Это как будто бы оправдывает окончательный приговор, выносимый чисто псевдоскалярной (симметричной) теории.

Остаётся возможность рассматривать смесь различных мезонных полей (складывая их лагранжианы). В частности, смеси псевдоскалярного и векторного полей были рассмотрены Меллером и Розенфельдом²⁾ и Швингером³⁾. Силы взаимодействия между двумя телами оказываются просто аддитивными ($W_{\text{mix}} = W_{ps} + W_v$), как в случае сильной, так и в случае слабой связи. Из (1) и (2) легко видеть, что в псевдоскалярно-векторной смеси недопустимые особенности тензорного взаимодействия могут быть устранены без «обрывания». Меллер и Розенфельд предложили принять $\mu_{ps} = \mu_v, |g_{ps}| = |f_v|$; тогда «тензорные» члены в статическом потенциале W_{mix} полностью уничтожаются, а ответственность за электрический квадрупольный момент можно возложить на релятивистские поправки. Однако Нинг Ху⁴⁾ более строгим исследованием релятивистских поправок показал, что если выбрать константы так, что недопустимые особенности исчезают, то и квадр-

¹⁾ В. Feretti, Ricerca Scient. 19, 993, 1941, добавление. Другая неудача чисто псевдоскалярной теории, связанная с теорией β -распада Юкава, была отмечена Нельсоном (E. C. Nelson, Phys. Rev. 60, 830, 1941).

²⁾ C. Moeller a. L. Rosenfeld, Kgl. Danske Vil. Sels. Math.-fys. Medd. 17, № 8, 1940.

³⁾ J. Schwinger, Phys. Rev. 61, 387, 1942.

⁴⁾ Ning Hu, Phys. Rev. 67, 339, 1945.

полный момент исчезает в том же приближении. С другой стороны, Швингер заметил, что для исключения членов с r^{-3} и r^{-2} достаточно положить $|g_{ps}| = |f_{\sigma}|$, но не обязательно должно быть $\mu_{ps} = \mu_{\sigma}$. Это легко проверить, разлагая выражение (4) в ряд по возрастающим степеням μr :

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\exp[-\mu r]}{r} = \frac{3}{r^3} - \frac{\mu^2}{2r} + \dots;$$

подставляя это разложение в (1) и (2), находим, что в $W_{ps} + W_{\sigma}$ (при $|g_{ps}| = |f_{\sigma}|$) остаются только допустимые особенности вида r^{-1} . Знак тензорного взаимодействия определяется теперь знаком $(\mu_{ps}^2 - \mu_{\sigma}^2)$, и из сказанного выше легко усмотреть, что правильный знак квадрупольного момента дейтерона получается, если принять $\mu_{\sigma} > \mu_{ps}$. Швингер отмечает, что этот результат удовлетворителен в связи с данными о космических лучах: хотя в верхних слоях атмосферы одновременно образуются как псевдоскалярные (спин 0), так и векторные (спин 1) мезоны, однако можно ожидать быстрого распада векторных мезонов, так что на небольших высотах будут наблюдаться только псевдоскалярные. Таким образом без труда объясняются полученные Шайном и Гиллом данные об образовании ливней мезонами. Можно заметить здесь, что, согласно теории Швингера, векторный мезон действительно должен быть весьма неустойчив, даже если пренебречь его β -распадом. Рассмотрим, например, отрицательный векторный мезон в вакууме. Применяя к протону «теорию дырок» Дирака, мы должны считать все отрицательные протонные уровни занятыми в состоянии вакуума. Возможен следующий процесс третьего порядка (говоря языком теории возмущений): во-первых, отрицательный векторный мезон поглощается каким-нибудь из протонов с отрицательной энергией, в результате чего этот протон превращается в нейтрон с положительной энергией, оставляя «дырку» на одном из отрицательных уровней. Во-вторых, нейтрон, испуская теперь псевдоскалярный отрицательный мезон, опять становится протоном и падает назад в дырку. Чтобы удовлетворить закону сохранения энергии, одна из участвующих в процессе заряженных частиц должна испустить ещё фотон. В результате, минуя виртуальные промежуточные состояния, первоначальный векторный мезон распадается на псевдоскалярный мезон и фотон; этот процесс

совместим с законами сохранения энергии и импульса, если векторный мезон тяжелее псевдоскалярного, что согласуется с предположением Швингера. Вероятность этого процесса до сих пор не вычислена, но она, несомненно, достаточно велика для того, чтобы объяснить очень быстрый распад векторных мезонов в космических лучах¹). К сожалению, это не избавляет нас от необходимости принять ещё дополнительную, независимую неустойчивость векторного мезона относительно β -распада. В самом деле, хорошо известно, что для предложенной Юкава теории β -распада ядер необходимы мезоны, вероятность распада которых, по крайней мере, в сто раз больше, чем у наблюдаемых в космических лучах²). Таким образом, если последние являются, по предположению, псевдоскалярными, большая вероятность распада должна быть приписана векторным мезонам. Конечно, это сделанное *ad hoc* новое предположение не улучшает внутренней согласованности теории; хотя, с другой стороны, нужно заметить, что оно замечательно хорошо укладывается в картину Швингера.

Возвращаясь к задаче двух нуклеонов, вспомним, что предположение Швингера ($\mu_\sigma > \mu_{ps}$) ведёт к правильному знаку тензорного взаимодействия. Однако его теория не выдерживает более строгой вычислительной проверки. Яух и Нинг Ху³) проделали численное интегрирование волново-механической задачи двух тел с потенциалом смеси Швингера ($W_{\text{mix}} = W_\sigma + W_{ps}$, $|g_{ps}| = |f_\sigma|$, $\mu_{ps} < \mu_\sigma$), принимая $g_\sigma = 0$ (нуклеоны не связаны с продольными векторными мезонами). Масса псевдоскалярного мезона на основании измерений в космических лучах была принята равной 177 электронным массам. Тогда отношение масс μ_σ/μ_{ps} и константу связи ($|g_{ps}|$) можно опре-

¹) J. Hamilton, W. Heitler a. H. W. Peng в своей работе о возникновении космического излучения (Phys. Rev. **64**, 78, 1943; см. также W. Heitler a. P. Walsh, Rev. Mod. Phys. **17**, 252, 1945) не указывают на этот процесс. Правда, их работа основана на теории Меллера-Розенфельда ($\mu_\sigma = \mu_{ps}$). Но коль скоро мы приписали различным сортам мезонов различные массы, β - и γ -распад более тяжёлой из них начинают конкурировать.

²) H. A. Bethe a. L. W. Nordheim, Phys. Rev. **57**, 998, 1940; E. C. Nelson, Phys. Rev. **60**, 830, 1941. По существу, такой же результат получается в теории сильной связи или вычитательной теории.

³) J. M. Jauch a. Ning Hu, Phys. Rev. **65**, 289, 1944.

делить, зная энергию связи основного состояния дейтерона и энергию 1S — состояния ¹⁾); отношение масс оказывается равным 1,6. После этого можно вычислить электрический квадрупольный момент дейтерона в основном состоянии, причём получается значение, равное *одной трети* экспериментального. Расхождение становится ещё больше, если допустить в (2) член $(g_{\rho}\mu_{\rho})^2$, так как он сам по себе привнесёт нечто в разницу энергий 1S - и 3S -состояний; поэтому потребуется более слабое тензорное взаимодействие, и квадрупольный момент получится ещё меньше. Возможно, нестатические силы и другие поправки улучшат положение, но трудно поверить, что они смогут объяснить большую часть квадрупольного момента. Можно, конечно, испробовать смеси с другим значением $g_{\rho s}/f_{\rho}$ (с обрыванием появляющихся тогда особенностей типа r^{-3}). Можно даже исследовать смеси, включающие другие типы мезонных полей. Но нельзя построить убедительную теорию, попросту увеличивая число произвольных констант и подгоняя их под экспериментальные результаты.

§ 4. Теория сильной связи

а) Инерция спина. Изобарные состояния

В § 1 было отмечено, что в теории сильной связи неизбежно использование протяжённой модели нуклона. Хотя это позволяет получить только нерелятивистскую теорию нуклонов, важным преимуществом теории сильной связи является то обстоятельство, что она допускает непосредственный подход к проблемам инерции поля. В самом деле, хорошо известно, что лорентцова электромагнитная теория массы электрона базируется на представлении о протяжённом электроне, в то время как в теориях, рассматривающих точечный электрон, электромагнитная масса оказывается или бесконечной (в пределе при $a \rightarrow 0$) или равной нулю (вычитательные теории). Можно, конечно, усомниться в том, много ли из представлений об инерции поля уцелеет в будущей теории, но

¹⁾ Для эффективного сечения рассеяния нейтронов протонами при малых энергиях Яух и Нинг Ху принимают значение $14,8 \cdot 10^{-24}$ см². Это, может быть, несколько мало, но ошибка здесь вряд ли может как-либо повлиять на численные результаты.

именно потому, что нельзя сделать определённых предсказаний, есть смысл изучить теоретические возможности даже в ограниченных рамках нерелятивистской теории.

В теории электрона обычно рассматривается только инерция относительно трансляционного ускорения. Однако поскольку ядерные силы зависят от спинов, в случае нуклона, окружённого мезонным полем, существенными становятся и ротационные ускорения. Рассмотрим на один момент *классическую* частицу, взаимодействующую с полем. Рассматривая частицу, как протяжённый источник поля, можно вычислить её собственную энергию в нерелятивистском приближении. Вообще говоря, собственная энергия будет содержать трансляционный ($p^2/2m$) и вращательный ($p^2/2C$, где p — момент количества движения) члены. Если действующие силы не зависят от характера вращения, последний член постоянен, и можно не принимать его во внимание. Это может быть правильным для электрона, но в случае нуклона положение иное, так как ядерные силы зависят от спинов. По крайней мере, с точки зрения модели протяжённого источника — аргументы против которой даются вычитательными теориями — нет оснований считать ротационный член несущественным. В квантовой теории, где момент количества движения квантован, учёт ротационной энергии даёт возбуждённые состояния с более высокими значениями спина. Если поле заряжено и связано с «зарядной» координатой («изотопный спин» нуклона), т. е. в симметричных теориях «зарядная» степень свободы также добавляет нечто к «ротационной» собственной энергии, и возбуждённым состояниям могут принадлежать также более высокие значения заряда. Этот результат, конечно, можно выразить, сказав, что мезоны могут связываться с «чистым» нуклоном, образуя таким образом «составные» нуклоны с более высокими значениями спина и заряда. Эти состояния обычно именуется «изобарными».

Строгий квантово-механический вывод ротационной собственной энергии удалось проделать только с помощью *приближения сильной связи*. Что касается математического метода, мы должны ограничиться здесь лишь несколькими указаниями. Рассматривая нуклоны бесконечной массы, можно заменить плотность нуклеонного поля ($\varphi^* \varphi$) данной функцией источника $\delta_a(x)$ (сферически симметричной, исчезающей вне сферы радиуса $\sim a \ll \mu^{-1}$, и удовлетворяющей условно нормировки

($\int d^{(3)} x \delta_a = 1$). Тогда гамильтониан принимает вид: $H = \text{const.} + \int H^0 + H'$, где H^0 описывает свободные мезоны, H' — их взаимодействие с нуклеоном:

$$H' = g \int d^{(3)} x \delta_a \sum_n O_n \psi_n$$

(ψ_n — компоненты мезонного поля, O_n — операторы, выключающие операторы спина и изотопного спина, g — константа связи, например, в смеси Меллера-Розенфельда или Швингера $g = |g_{ps}| = |f_\sigma|$). Поскольку g предполагается большим, первое требование заключается в диагонализации члена большого взаимодействия H' : определяется такой унитарный оператор S (матрица относительно спиновых индексов и индексов изотопного спина), что оператор $SH'S^{-2}$ становится диагональным. Оператор H^0 , зависящий от полей, канонически сопряженных с ψ_n , не коммутирует с S , но можно проделать последовательные канонические преобразования с тем, чтобы диагонализировать весь гамильтониан в форме разложения по убывающим степеням константы связи g ¹). В псевдоскалярной и векторной теориях, включая псевдоскалярно-векторные смеси, условие, гарантирующее быструю сходимость разложения, гласит²)

$$g \gg a \quad (5)$$

(«условие сильной связи»). Член высшего порядка ($\sim g^2$) даёт статическую собственную энергию нуклеона. Следующие члены описывают взаимодействие свободных мезонов с составным нуклеоном; например, рассеяние мезонов ядрами определяется членами $\sim g^0$. Ротационная собственная энергия появляется среди членов $\sim g^{-2}$. В симметричных псевдоскалярной и векторной

1) См. G. Wentzel, *Helv. Phys. Acta* **13**, 269, 1940 и **14**, 633, 1941: заряженная скалярная теория; R. Serber a. S. M. Dancoff, *Phys. Rev.* **63**, 143, 1943: заряженная скалярная и нейтральная псевдоскалярная теория; W. Pauli a. S. M. Dancoff, *Phys. Rev.* **62**, 85, 1942: симметричная псевдоскалярная теория; W. Pauli a. S. Kusaka, *ibid.* **63**, 400, 1943: псевдоскалярная и векторная теория и смеси; G. Wentzel, *Helv. Phys. Acta* **16**, 551, 1943: симметричная векторная теория с двумя константами связи.

2) Мы пользуемся естественными единицами: $\hbar = c = 1$; тогда $g(g_{ps}$ или $f_v)$ имеет размерность длины. Всегда предполагается, что $a \ll \mu^{-1}$.

теориях, а также в смесях она формально равна кинетической энергии шарового волчка:

$$H_{\text{rot}} = \frac{1}{2C} |\mathbf{P}|^2 \quad (6)$$

(C — момент инерции, \mathbf{P} — момент количества движения шарового волчка). «Инерция спина» C зависит от радиуса нуклона « a » и константы связи g следующим образом: $C \sim g^2/a$. $|\mathbf{P}|$ и проекции \mathbf{P} на неподвижную и подвижную оси (говоря языком теорий шарового волчка) имеют полуцелые собственные значения: j, m, n ($|m|, |n| \leq j$). С точки зрения физического нуклона j и m суть обычные спиновые квантовые числа, $n + \frac{1}{2}$ есть заряд данного нуклонного состояния. Собственные значения ротационной энергии суть:

$$H_{\text{rot}} = \frac{1}{2C} j(j + 1);$$

$j = \frac{1}{2} \left(m = \pm \frac{1}{2}, n = \pm \frac{1}{2} \right)$ соответствует обычным протону и нейтрону, $j \geq \frac{3}{2}$ — возбуждённым состояниям или «изобарам». Энергия возбуждения низшего изобарного состояния равна $\frac{3}{2} C^{-1}$. Подбирая подходящие численные значения a и g , можно ожидать, что энергия возбуждения окажется порядка 50 MeV¹⁾. Ясно, что вопрос о том, существуют ли такие изобары в действительности, в высшей степени важен в связи с проблемами собственной энергии. Надо надеяться, что он вскоре будет разрешён экспериментами с мощными ускорителями. Из теории сильной связи можно получить оценку *вероятности возбуждения*. Возбуждение путём фотодиссоциации дейтерона было исследовано Яухом²⁾, который нашёл, что несколько процентов фотонуклеонов должны появляться в возбуждённых состояниях, если энергия γ -лучей несколько превышает

¹⁾ В пределе при $a \rightarrow 0$ энергия возбуждения стремится к нулю ($C \rightarrow \infty$). Именно поэтому точечный источник недопустим в теориях сильной связи, исключая скалярный вариант, в котором C не зависит от a . См. R. Serber и S. M. Dancoff, Phys. Rev. **63**, 143, 1943, где скалярный вариант окончательно отвергается, так как не получают нужные свойства насыщения сил.

²⁾ J. M. Jauch, Phys. Rev. **69**, 275, 1946.

порог возбуждения. Согласно Лоупсу¹⁾, то же самое должно наблюдаться при столкновениях нейтронов или протонов большой энергии.

б) Магнитные моменты и разность масс протона и нейтрона

До сих пор мы не рассматривали взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем. Если теперь поместить нуклеон, например, в однородное магнитное поле \mathbf{H} , то собственная энергия будет содержать дополнительный член — $M(\mathbf{H})$, где M — магнитный момент нуклеона. Вычисление M является очень строгой проверкой для всякой теории мезонов, так как объяснение магнитных аномалий протона и нейтрона присутствием мезонного облака является одним из главных притязаний мезодинамики.

Обращаясь к этой задаче, мы должны обратить внимание на электрические токи, текущие в мезонном облаке. В теории сильной связи мы встречаемся здесь с трудностью, внутренне присущей модели протяжённого источника: как показали Паули и Данков²⁾, нельзя определить плотности электрического заряда и тока так, чтобы удовлетворить уравнению непрерывности внутри источника (где $\delta_a(\mathbf{x}) \neq 0$). К несчастью, в этих теориях область внутри источника вносит весьма значительную долю в магнитный момент. Оказывается, однако, что для стационарных состояний составного нуклеона уравнение непрерывности выполняется точно в предельном случае бесконечно сильной связи (это замечание приписывается Хурье)³⁾. Таким образом, возражения, выдвигаемые против функций Паули и Данкова, для плотности тока-заряда, становятся менее серьёзными в теории сильной связи.

Основываясь на симметричной теории сильной связи, Паули и Данков вывели следующую формулу для магнитного момента в стационарном состоянии:

$$M = \left(\frac{M_0}{2} + \frac{eC}{4} \right) \cdot \frac{mn}{j(j+1)}. \quad (7)$$

¹⁾ J. L. Lopes, Phys. Rev. **70**, 5, 1946.

²⁾ W. Pauli a. S. M. Dancoff, Phys. Rev. **62**, 85, 1942.

³⁾ A. Houriet, Helv. Phys. Acta **18**, 473, 1945.

(Здесь: M_0 — магнитный момент «чистого» нуклеона, e — элементарный электрический заряд, C — спиновый момент инерции.)¹⁾ В частности, для основных состояний: $j = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $n = \pm \frac{1}{2}$ имеем:

$$M = \pm \left(\frac{M_0}{6} + \frac{eC}{12} \right); \quad (7a)$$

знаки «+» и «-» относятся, соответственно, к протонному и нейтронному состояниям. Таким образом, магнитные моменты протона и нейтрона получаются противоположными по знаку и равными по абсолютной величине, что противоречит опыту. Экспериментальные значения суть: протон: $M_p = +2,79$ ядерных магнетонов²⁾, нейтрон: $M_n = -1,9$ ядерных магнетонов³⁾.

Интересно сравнить этот результат теории сильной связи с тем, что получается в предположении слабой связи (по методу возмущений). В обеих теориях все стационарные состояния суть смеси подсостояний, в которых «чистый» нуклеон встречается как в протонном, так и в нейтронном видах.

Физический протон = смеси

- a) «чистый» протон + нейтральное мезонное облако;
- b) «чистый» нейтрон + положительно заряженное мезонное облако.

Физический нейтрон = смеси

- a) «чистый» нейтрон + нейтральное мезонное облако;
- b) «чистый» протон + отрицательно заряженное мезонное облако.

В случае слабой связи подсостояния (b) являются лишь малыми добавками, и к магнитному моменту «чистого» нуклеона добавляется почти целый ядерный магнетон в (физически) протонном состоянии и практически нуль в нейтронном состоянии:

$$\left. \begin{aligned} M_p &\cong 1 + M_{\text{мезона}}, \\ M_n &\cong -M_{\text{мезона}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

¹⁾ В работе Паули и Данкова используется только псевдоскалярная теория, но то же выражение (с точностью до возможного численного фактора 1/4) получается и в векторной теории и для смеси. См. W. Pauli a. S. Kusaka, Phys. Rev. **63**, 400, 1943.

²⁾ S. Millman a. P. Kusch, Phys. Rev. **60**, 91, 1941.

³⁾ L. W. Alvarez a. F. Bloch, Phys. Rev. **57**, 111, 1940.

Это — теория Фрелиха, Гайтлера и Кеммера¹⁾, которую хотя бы приближённо можно подогнать под экспериментальные данные (трудности, возникающие в вычислительных теориях, будут рассмотрены позднее). Однако в теории сильной связи положение совершенно меняется, так как в оба физических состояния в случае бесконечно сильной связи подсостояния а) и б) входят с одинаковыми вероятностями. Именно поэтому в (7а) доля «чистого» протона в M оказывается для физических протонов и нейтрона одинаковой по абсолютной величине и противоположной по знаку. Конечно, значение M , данное Паули и Данковым, является только первым членом разложения по степеням малого параметра a/g . Поправка в следующем приближении была вычислена Хурье. Знак её делает $|M_p| > |M_n|$, в согласии с экспериментальными данными, но порядок величины этой поправки ($M_0(a/g)^4$) очень мал. Это, повидимому, подтверждает заключение Паули и Кусака о том, что в действительности связь не может быть сильной. Надо, однако, иметь в виду, что использование функций электрической плотности Паули и Данкова в вычислениях Хурье может вызвать возражения, так как эти функции выведены не для предельного случая бесконечной сильной связи. Тем не менее, надо признать, что теория сильной связи не сумела объяснить экспериментальные факты в этой области.

В связи с этим надо отметить ещё один недостаток теории. Поскольку магнитный момент определяется собственной энергией нуклона в магнитном поле, с тем же правом можно исследовать и другие электромагнитные члены в собственной энергии, даже в отсутствии внешнего поля. Самый интересный из них даёт кулоновским взаимодействием мезонного облака с «чистым» нуклоном. Из вышеприведённой схемы смесей явствует, что этот член равен нулю для физического протона и отрицателен для физического нейтрона. В случае слабой связи это несущественно, поскольку массы «чистых» протона и нейтрона можно выбрать так, чтобы уничтожить этот и другие члены и получить произвольные значения масс физических протона и нейтрона. Но в теории сильной связи в обоих смешанных состояниях с одинаковыми вероятностями присутствуют

¹⁾ Н. Fröhlich, W. Heitler a. N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. 166, 154, 1938.

как «чистый» протон, так и «чистый» нейтрон, так что они привносят одинаковые доли как в массу физического протона, так и в массу физического нейтрона. Разница масс протона и нейтрона определяется, таким образом, вышеуказанным кулоновским членом. Соответственно, протон должен быть тяжелее нейтрона, что резко противоречит опыту.

Эти соображения были количественно развиты Хурье, который вычислил также следующий член в разложении по степеням a/g . Оказалось, что поправочный член не улучшает неправильного результата, если только не вводить весьма искусственных предположений о массах «чистых» нуклеонов. Это опять подтверждает тот вывод, что связь не может быть действительно «сильной». Однако и здесь остаётся тень сомнения в безукоризненности этого вывода, так как опять использовались функции плотности Паули и Данкова. Кроме того, «чистый» нуклеон рассматривался во всех вычислениях, как бесконечно тяжёлый, что может до некоторой степени повлиять на результат. Наконец, можно заметить, что нерелятивистская теория не может служить надёжным базисом при исследовании собственной энергии. Однако в том же направлении указывают и другие данные, доставляемые задачей двух тел.

с) Дейтерон

Пользуясь описанным в 4а методом сильной связи в случае *двух* нуклеонов, мы находим, что статическая собственная энергия ($\sim g^2$) системы двух тел зависит от координат частиц. Вычитая из неё удвоенную собственную энергию одной частицы, находим энергию статического взаимодействия. В симметричной теории она может быть записана в виде матрицы относительно квантовых чисел $j_1, m_1, n_1, j_2, m_2, n_2$ двух частиц.

Подматрица, отвечающая основным состояниям $\left(j_1 = j_2 = \frac{1}{2}\right)$, совпадает с матрицей W , получающейся по теории возмущений (см. формулы (1), (2) в § 3) с точностью до численного множителя $1/9$; однако есть ещё дополнительные матричные элементы, соответствующие изобарным состояниям. В предельном случае бесконечно высокой энергии возбуждения изобар (спиновый момент инерции $S \rightarrow 0$) возбуждёнными состояниями нуклеонов можно пренебречь, и результаты теории силь-

ной связи совпадают с выводами теории возмущений, рассмотренными в разделе 3 (исключая переменную в обозначениях, вызванную множителем $1/9^1$). Наиболее тщательное исследование проблемы дейтерона на основе теории сильной связи было проделано Вилларсом²). Подобно хорошо известной теории дейтерона³), построенной Рарита и Швингером методом возмущений, Вилларс заменяет потенциал Юкава ($\exp(-\mu r)/r$) и тензорный потенциал прямоугольными потенциальными ямами произвольной глубины, в обоих случаях — с одним и тем же радиусом r_0 . Поскольку теория Вилларса при $C \rightarrow 0$ совпадает с теорией Рарита и Швингера, можно считать, что она обобщает последнюю, учитывая инерцию спина нуклонов. Главная черта волново-механического формализма состоит в том, что, благодаря наличию изобарных состояний, в волновых функциях стационарных состояний появляются дополнительные компоненты. Например, в основном состоянии дейтерона, являющемся, по Рарита и Швингеру, смесью ${}^3S + {}^3D$, появляются ещё примеси типа 1D , 1F , ${}^{11}F$ и т. д.; 1S -состояние превращается в смесь с компонентами 5D , 9F и т. д. Задаваясь произвольными значениями спинового момента инерции C и радиуса потенциальных ям r_0 , Вилларс из известных значений энергии связи и квадрупольного момента основного состояния вычисляет глубины обеих ям (изотропного и тензорного взаимодействий). Зная их, он определяет энергию синглетного состояния, как функцию C и r_0 . В результате синглет оказывается устойчивым (благодаря довольно большой примеси 5D -состояния), если только не принять очень малые значения C . Увеличение энергии синглетного состояния до нуля требует энергии возбуждения изобар ($3\frac{1}{2}C$) не меньше 300 MeV⁴).

1) Детали см. в работе M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **17**, 181, 1944 и **18**, 158, 1945. В симметричной теории существование изобарных состояний не влияет на свойства насыщения сил; см. W. Pauli and S. Kusaka, *Phys. Rev.* **63**, 400, 1943; F. Coester, *Helv. Phys. Acta* **17**, 35, 1944.

2) F. Villars, *Helv. Phys. Acta* **19**, 323, 1946.

3) W. Rarita and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **59**, 436, 1941.

4) При столь больших значениях энергии возбуждения теория Вилларса весьма близко подходит к теории слабой связи Рарита и Швингера, так как новые примеси становятся совершенно несущественными. Этим объясняется, почему при обсуждении тензорного

С другой стороны, условие сильной связи (5) даёт для верхнего предела энергии возбуждения около 100 MeV. Таким образом, мы опять приходим к выводу, что связь не может быть действительно сильной, или, другими словами, что инерция спина нуклеонов не может быть очень большой.

К сожалению, если теория сильной связи потерпит неудачу, у нас остаётся мало надежды получить простое и убедительное описание спин-инерционных эффектов на основе модели протяжённого источника. В самом деле, эта модель в случаях слабой связи и промежуточном оказывается совершенно непрактичной. Остаётся посмотреть, как выглядит проблема инерции спина в модели точечного источника (в вычитательных теориях).

§ 5. Вычитательные теории

а) Предельный λ -процесс

Основную идею предельного λ -процесса легче всего выяснить, рассматривая классическую задачу о взаимодействии электрона со своим собственным электромагнитным полем. Электрон рассматривается здесь, как точечный источник, движущийся по заданной траектории $\mathbf{x}_1(t_1)$. Поле, описываемое четырёхмерным вектором-потенциалом ψ , состоит из собственного поля данного электрона ψ_1 и созданного другими зарядами поля ψ_2 : $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Здесь ψ_1 есть хорошо известный запаздывающий потенциал: $\psi_1 = \psi^{\text{ret}}$. Дирак, Фок и Подольский¹⁾ обобщили уравнения Максвелла, определив $\psi(\mathbf{x}, t)$ для

закона взаимодействия не надо было различать теории сильной и слабой связи. Одно время казалось, что «симметричная» теория Рарита и Швингера не даёт правильного углового распределения рассеяния нейтронов протонами при больших энергиях (E. Amaldi, D. Bocciarelli, B. Fèretti a. G. C. Trabacchi, Naturwissenschaften **30**, 582, 1942 и Ricerca Scient, **13**, 502, 1942), и выражались надежды, что теория сильной связи сможет поправить дело (G. Wentzel, Helv. Phys. Acta **18**, 430, 1945; J. L. Lopes, Phys. Rev. **70**, 5, 1946). Теперь эта проблема устарела с тех пор, как Пауэлл сообщил, что рассеяние нейтронов с энергией 14 MeV протонами практически изотропно в системе координат, связанной с центром инерции. (Международная Конференция по физике, Кэмбридж, июль 1946 г.).

¹⁾ P. A. M. Dirac, V. A. Fock a. B. Podolsky, Physik. Zeits. Sowjet Union, **2**, 468, 1932.

«времени поля» t , отличного от «времени частицы» t_1 . При этом оказалось, что соотношение $\psi_1 = \psi_1^{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$ выполняется всюду вне светового конуса ($|t - t_1| < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1(t_1)|$), в то время как внутри светового конуса ψ_1 исчезает при ($t - t_1 > |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1(t_1)|$) (абсолютно будущее) и равно разности запаздывающего и опережающего потенциалов ($\psi_1^{\text{ret}} - \psi_1^{\text{adv}}$) при ($t - t_1 < -|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1(t_1)|$) (абсолютно прошедшее)²). Действующую на электрон лоренцову силу $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + [\dot{\mathbf{x}}_1 \mathbf{H}])$ можно расщепить на силу реакции \mathbf{F}_1 и внешнюю силу \mathbf{F}_2 . Значения \mathbf{E} и \mathbf{H} в \mathbf{F} нужно брать в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1(t_1)$. Хорошо известно, что в обычной теории из-за особенности запаздывающего потенциала в точке нахождения источника \mathbf{F}_1 становится бесконечной (модель протяжённого источника даёт: $\mathbf{F}_1 = -m\ddot{\mathbf{x}}_1 + \frac{2}{3}e^2(\partial^3 \mathbf{x}_1 / \partial t_1^3) + \dots$ в той системе координат, где электрон покоится; m — электромагнитная масса, обращающаяся в бесконечность при $a \rightarrow 0$). Однако обобщение уравнений поля на случай $t \neq t_1$ позволяет иначе определить необходимые предельные значения \mathbf{E} и \mathbf{H} . Рассмотрим мировую точку $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1(t_1) + \lambda$, $t = t_1 + \lambda_0$, где λ, λ_0 — *временеподобный* четырёхмерный вектор ($|\lambda_0| > |\lambda|$). Пусть длина этого вектора стремится к нулю, причём направление его не меняется ($\lambda/\lambda_0 = \text{const.}$). Двигаясь со стороны абсолютно будущего ($\lambda_0 > |\lambda|$), где $\psi_1(\mathbf{x}, t) = 0$, мы, очевидно, получим: $\mathbf{E}_1 = \mathbf{H}_1 = 0, \mathbf{F}_1 = 0$; в абсолютно прошлом потенциал $\psi_1 = \psi_1^{\text{ret}} - \psi_1^{\text{adv}} \neq 0$, но всюду конечен, так как особенности запаздывающего и опережающего потенциалов взаимно уничтожаются. Соответственно получается конечное предельное значение \mathbf{F}_1 , а именно: $\mathbf{F}_{\text{lim}} = \frac{4e^2}{3} \frac{\partial^3 \mathbf{x}_1}{\partial t_1^3}$ в той системе координат, где электрон покоится, ($(\partial \mathbf{x}_1 / \partial t_1) = 0$). Поскольку численный коэффициент члена, описывающего торможение излучением ($\sim (\partial^3 \mathbf{x}_1 / \partial t_1^3)$), однозначно определяется из закона сохранения энергии, мы неизбежно должны определить \mathbf{F}_1 , как полусумму обоих предельных значений. Это даёт: $\mathbf{F}_1 = \frac{2}{3} e^2 (\partial^3 \mathbf{x}_1 / \partial t_1^3)$ в той системе координат, где электрон покоится. Этот метод

¹) Мы положили попрежнему $c = 1$.

²) G. Wentzel, Zeits. f. Phys. 86, 479, 1933.

нахождения предельных значений величин поля в мировой точке, занимаемой электроном, может быть применён также и в *квантовой* электродинамике — для вычисления четырёхмерного потенциала в дираковском волновом уравнении для электрона¹⁾. Релятивистская инвариантность этого метода очевидна во всех случаях, когда предельные значения не зависят от направлений выбранных четырёхмерных λ -векторов; в противном случае, подходящее усреднение по всем этим направлениям восстанавливает инвариантность. Дирак предложил несколько иную формулировку, в которой λ -вектор появляется в правилах перестановки компонент поля ψ ²⁾; с этим формализмом легче работать, но результаты, очевидно, получаются одинаковые. Теория теперь может быть непосредственно распространена на другие квантованные поля.

В *классической* теории точечного электрона λ -процесс устраняет *все* бесконечности; в самом деле, все классические бесконечности непосредственно связаны с электромагнитной массой, которая в λ -теории точно равна нулю (сила реакции F_1 не содержит инерционного члена). Однако в *квантовой* теории появляется несколько независимых бесконечностей, обычно — в форме расходящихся интегралов по пространству импульсов. Их подинтегральные выражения асимптотически ведут себя как $|k|^n$ ($n \geq -3$): $n = -2$ появляется в интеграле, определяющем классическую электромагнитную массу; собственная энергия дираковского электрона, вычисленная Валлером³⁾, содержит дополнительный член с $n = -1$; «теория дырок» Дирака в соединении с квантовой электродинамикой вызывает логарифмическую расходимость ($n = -3$). Предельный λ -процесс оказывается эффективным средством только для устранения бесконечностей, связанных с *чётными* значениями n ; прочие расходимости остаются. В частности, на встречающиеся в теории дырок логарифмические расходимости λ -процесс никак не влияет⁴⁾. Из-за этой неудачи Дирак оставил

¹⁾ G. Wentzel, Zeits. f. Phys. **86**, 635, 1933.

²⁾ P. A. M. Dirac, Ann. de l'Institut H. Poincaré **9**, 13, 1930. Ср. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, Госиздат, 1947.

³⁾ J. Waller, Zeits. f. Phys. **62**, 673, 1930.

⁴⁾ Паули в своём обзоре подчёркивает несовместимость основных идей теории дырок и λ -процесса.

теорию дырок и предложил новый, весьма сложный способ квантования поля, включающий фотоны отрицательной энергии и «отрицательные вероятности»¹⁾. С помощью этого формализма, соединённого с предельным λ -процессом, Дирак действительно сумел устранить все расходимости; однако его физическая интерпретация довольно загадочна. Недавно²⁾ Дирак опубликовал улучшенную форму теории, в которой этой трудности, повидимому, нет.

Это отступление в область квантовой электродинамики было необходимо для того, чтобы показать, на что способен предельный λ -процесс и как можно оценить дальнейшие перспективы базирующейся на нём теории.

Возвращаясь теперь к мезодинамике, мы должны иметь дело не с фотонами и электронами, а с мезонами и нуклеонами. Как и в случае электронов, формализм «теории дырок» должен быть отброшен.

Паули³⁾ применил λ -процесс к симметричной смеси Меллера и Розенфельда, пользуясь обычным разложением теории слабой связи. Статическая собственная энергия и члены взаимодействия четвёртого и шестого порядков относительно g были вычислены и оказались конечными (члены $\sim g^4$, возникающие из-за взаимодействия нуклеонов с нулевыми колебаниями осцилляторов поля, также оказались конечными в статическом приближении). Сравнивая члены второго и шестого порядков в выражении для взаимодействия двух нуклеонов, Паули нашёл, что разложение теории слабой связи быстро сходится везде, исключая малые расстояния между нуклеонами ($r \lesssim \mu g_{ps}^2$), где статическое приближение (покоящиеся нуклеоны) во всяком случае непригодно.

Что касается инерции спина, то приближение слабой связи, к сожалению, нелегко применить к исследованию этой проблемы. Паули ограничивается изучением *классической* задачи о взаимодействии нейтрального псевдоскалярного поля со спином нуклеона. Вектор спина σ классически истолковывается, как единичный вектор произвольной ориентации. Уравнения движе-

1) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **180**, 1, 1942. См. также цитированную выше книгу Паули.

2) Международная конференция по физике, Кэмбридж, июль 1946 г.

3) W. Pauli, Phys. Rev. **64**, 332, 1943.

ния имеют решения, соответствующие периодическим движениям, при которых спин нуклона свободно вращается около фиксированной оси:

$$\sigma_3 = \text{const.}, \quad \sigma_1 = (1 - \tau_3^2)^{\frac{1}{2}} \cos \omega t, \quad \sigma_2 = (1 - \tau_3^2)^{\frac{1}{2}} \sin \omega t;$$

мезонное поле на больших расстояниях от нуклона ведёт себя либо как шаровая волна, если $\omega^2 > \mu^2$, либо экспоненциально затухает при $\omega^2 < \mu^2$. В первом случае мы имеем классическое описание рассеяния мезонов нуклоном; во втором — нуклон, окружённый облаком связанных мезонов, что весьма напоминает модель составного нуклона в теории сильной связи. В самом деле, считая связь достаточно сильной и описывая нуклон, как протяжённый источник, мы находим, что энергия и момент количества движения составного нуклона связаны формулой (6) раздела 4а¹⁾, причём спиновый момент инерции S всегда порядка g^2/a . Конечно, поскольку момент количества движения не квантован, энергетический спектр непрерывен, но он имеет верхнюю границу благодаря условию $\omega^2 < \mu^2$. Однако, если пользоваться моделью точечного источника и λ -процессом, то результат получается совершенно иной. В этом случае периодические решения с экспоненциально затухающим мезонным полем ($\omega^2 < \mu^2$) возможны только при достаточно сильной связи ($|g_{ps}|$ должна быть больше некоторой критической величины порядка μ^{-1}). В действительности это условие не выполняется для значения g , оценённого по ядерным силам. Переводя этот результат на квантовый язык, Паули приходит к выводу, что в λ -теории не существует стационарных изобарных состояний. Он показывает также, что константа, которую, согласно классическому рассмотрению Баба²⁾, нужно назвать механической инерцией спина, в λ -теории точно равна нулю.

Хотя все эти результаты носят довольно предварительный характер, так как основаны только на классическом рассмотрении нейтрального поля, они, повидимому, подтверждают тот факт, что все эффекты, связанные с инерцией поля, радикально

1) См. также J. R. Oppenheimer a. J. Schwinger, Phys. Rev. **60**, 150, 1941.

2) H. J. Bhabha, Proc. Roy. Soc. **178**, 314, 1941.

уничтожаются λ -процессом. Можно спросить, так ли уж желательна эта тенденция с точки зрения требований будущей теории? Хорошо, конечно, что электромагнитная масса равна нулю, а не бесконечности, но не лучше ли было бы получить конечное значение, которое можно было бы отождествить с действительной массой электрона, покончив тем самым, в соответствии с идеями Лоренца, с концепцией механической массы? Хотя и неизвестно, как достигнуть этого в релятивистской теории, нам всё же кажется, что λ -процесс является слишком радикальной операцией, по крайней мере, в отношении инерционных эффектов, не говоря уже о его бессилии в других вопросах. С чисто теоретической точки зрения можно, таким образом, поставить вопрос: являются ли очень надёжными предсказания λ -процесса, касающиеся, например, инерции спина нуклона, или же теории протяжённого источника дают, может быть, лучшее приближение к действительности?

Единственные вычисления, продвинутые столь далеко, что их можно сравнивать с опытом, принадлежат Яуху¹⁾ и касаются магнитных моментов протона и нейтрона. Следуя Паули, Яух считает связь слабой. Таким образом, вычисления на основе теории возмущений почти те же, что и в теории Фрелиха, Гейтлера и Кеммера, и ведут к формулам, объяснённым в § 4:

$$M_p \approx 1 + M_{\text{мезона}}; \quad M_n \approx -M_{\text{мезона}}. \quad (8)$$

Как в псевдоскалярном, так и в векторном варианте $M_{\text{мезона}}$ содержит интеграл по пространству импульсов, который в простой модели точечного источника был бы расходящимся ($+\infty$). В прежних теориях, основывавшихся на модели протяжённого источника, его сходимости достигалась обрыванием при больших энергиях. Предельный λ -процесс обеспечивает сходимость этого интеграла, по крайней мере — в нерелятивистском приближении (нуклоны бесконечной массы, отдача отсутствует). Однако и здесь вычитание оказывается чересчур радикальным: конечное предельное значение этого интеграла становится даже отрицательным, так что магнитный момент нейтрона делается положительным, в противоречии с опытом. Знак можно изменить, только введя *ad hoc* предположение о наличии у вектор-

1) J. M. Jauch, Phys. Rev. **63**, 334, 1943.

ного мезона аномального магнитного момента, притом с аномальным знаком.

Хоть, как замечает Яух, это предположение в принципе можно проверить независимыми опытами, оно слишком искусственно, чтобы считаться удовлетворительным. Мы можем, таким образом, заключить, что хотя экспериментальные значения магнитных моментов говорят скорее в пользу слабой, нежели сильной связи, как мы видели в разделе 4b, всё же очень мало вероятно, что с помощью предельного λ -процесса удастся построить последовательную и согласующуюся с опытом теорию слабой связи¹⁾.

б) Теории Гайтлера и Штюкельберга.

Во второй группе вычитательных теорий в центре внимания стоит проблема *рассеяния* — рассеяние мезонов нуклеонами. Обычная теория возмущений во втором приближении пренебрегает реакцией рассеянной мезонной волны и поэтому даёт при больших энергиях слишком большие эффективные сечения. Гейзенберг²⁾ первый с помощью классической модели протяжённого источника подчеркнул значение реакции излучения в задаче рассеяния. Согласно таким классическим теориям, как инерционные эффекты, так и торможение излучением уменьшают эффективное сечение. В λ -предельной теории и других теориях точечного источника, в которых спин-инерционные эффекты отсутствуют, остаётся только гораздо менее резко выраженное влияние торможения излучением. В квантовой теории, если принять модель протяжённого нуклеона, метод сильной связи автоматически учитывает все эффекты, связанные с реакцией поля; соответственно, эффективное сечение становится весьма малым ($\lesssim 4\pi a^2$ при всех энергиях, во всех

¹⁾ Можно попытаться заменить λ -процесс другими математическими ухищрениями, вроде схемы, предложенной Риссом, которую, может быть, можно перенести в квантовую теорию полей. См. M. Riesz, *Comptes rendus du Congrès International de Mathématique Oslo, 1936*, 11, 44; N. E. Fremberg, *Lunds Fysiografiska Förh.*, 15, No 27, 1945; T. Gustafson, *Tunds Fysiografiska Förh.*, 15, N 28, 1945 и 16, No 2, 1946; N. E. Fremberg, *Medd. fr. Lunds. Univ. Mat. Semin.*, 7, 1946.

²⁾ W. Heisenberg, *Zeits. f. Phys.* 113, 61, 1939.

вариантах теории, исключая скалярный). В рассматриваемых сейчас вычислительных теориях содержится, вероятно, значительный элемент произвольности в вычитании эффектов, связанных с инерцией спина.

Ясно, что в такой ситуации надёжным путеводителем могут служить экспериментальные измерения эффективных сечений. К сожалению, на опыте трудно отличить рассеяние на большие углы, вызванное ядерным взаимодействием, от многократного кулоновского рассеяния, которым обычно пренебрегают в теории мезонов. Это особенно важно в области малых энергий (порядка 10^8 eV), где результаты различных теорий более всего разнятся между собой. Работа Шатта¹⁾ указывает на то, что ядерное эффективное сечение рассеяния несколько больше, чем думали раньше. Этот результат, если он верен, доставляет ещё один аргумент против теории сильной связи, но точность опытов ещё явно недостаточна, чтобы можно было сделать выбор между различными конкурирующими вычислительными теориями.

Чтобы охарактеризовать эти теории, удобно начать с *интегрального уравнения Гайтлера*²⁾. Мы воспроизведём здесь краткий вывод этого уравнения, принадлежащий Паули³⁾.

В уравнении Шредингера для стационарных состояний

$$H\psi \equiv (H^0 + H')\psi = E\psi$$

рассматриваем ответственный за взаимодействие член H' , как малое возмущение, и пользуемся тем представлением ψ , в котором H^0 диагонально:

$$(q | H^0 | q') = E_q (q | 1 | q')$$

(q — квантовые числа осцилляторов поля в вакууме). Чтобы различить между собой разнообразные решения, напишем ψ в виде матрицы $(q | \psi | q_0)$, где q_0 — начальные значения переменных q , так что в предельном случае равной нулю энергии

1) R. P. Shutt, Phys. Rev. **69**, 261, 1946.

2) W. Heitler, Proc. Camb. Phil. Soc., **37**, 291, 1941; W. Heitler a. H. W. Peng, Proc. Camb. Phil. Soc. **38**, 296, 1942.

3) Международная Конференция по физике, Кембридж, июль 1946. См. также Паули, Мезонная теория ядерных сил, Госиздат 1947 г.

взаимодействия $(q|\psi|q_0) \rightarrow (q|1|q_0)$. Теперь уравнение Шредингера можно записать в виде:

$$(q|H'\psi|q_0) = (E_0 - E_q)(q|\psi|q_0). \quad (9)$$

По Дираку, решения, изображающие процесс рассеяния, имеют вид:

$$(q|\psi|q_0) = (q|1|q_0) + (q|R|q_0)\delta_+(E_q - E_0), \quad (10)$$

где

$$\delta_+(E) = \frac{1}{2} \delta(E) - \frac{1}{2\pi i E} \quad (11)$$

(интегралы типа $\int dE f(E)(E - E')^{-1}$ берутся в смысле главного значения Коши в точке $E = E'$). Подставляя это выражение для ψ в уравнение Шредингера (9), получаем следующее уравнение для R :

$$(q|H'|q_0) + \sum_{q'} (q|H'|q') \times \\ \times (q'|R|q_0)\delta_+(E_{q'} - E_0) = \frac{1}{2\pi i} (q|R|q_0)$$

(в правой части $(E_0 - E_q)\delta(E_0 - E_q)$ и $(E_0 - E_q)(q|1|q_0)$ уничтожаются).

Вводя матрицы:

$$(q|\bar{R}|q_0) = (q|R|q_0)\delta(E_q - E_0), \quad (12)$$

$$(q|T|q') = \frac{(q|H'|q')}{E_0 - E_{q'}}, \quad (13)$$

приводим последнее уравнение к виду:

$$H' + \frac{1}{2} H'\bar{R} + \frac{1}{2\pi i} TR = \frac{1}{2\pi i} R.$$

Умножая на T^n и суммируя по всем n , имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n H' \left(1 + \frac{1}{2} \bar{R}\right) = \frac{1}{2\pi i} R$$

или, обозначая

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n H' = K, \quad (14)$$

$$K \left(1 + \frac{1}{2} \bar{R}\right) = \frac{1}{2\pi i} R. \quad (15)$$

Умножая на $\delta(E_q - E_0)$, имеем окончательно:

$$\bar{K} \left(1 + \frac{1}{2} \bar{R}\right) = \frac{1}{2\pi i} \bar{R}, \quad (16)$$

где

$$(q | \bar{K} | q') = (q | K | q') \delta(E_q - E_{q'}). \quad (17)$$

(15) и (16) суть интегральные уравнения относительно «рассеянной волны» R , так как матричное умножение $(K\bar{R})$ включает интегрирование по пространству импульсов, (16) и есть искомое уравнение Гайтлера в форме, обобщённой на случай учёта высших приближений.

Матрица K , в силу (13) и (14), определена в виде ряда по степеням константы связи g . В случае обычного процесса рассеяния (в обоих состояниях q_0 и q присутствует по одному мезону) матрица H' не имеет элемента, отвечающего непосредственному переходу $q_0 \rightarrow q$, и первый исчезающий член в разложении (14) есть TH' ($\sim g^2$). Поэтому, как легко усмотреть из (15), разложение R по степеням g (слабая связь) также начинается с члена второго порядка, а именно¹⁾: $(q | R | q_0) = 2\pi i (q | TH' | q_0) + \dots$. Отбрасывание членов высшего порядка в R соответствует второму приближению теории возмущений и пренебрежению реакцией излучения.

Однако следующий исчезающий член в $(q | K | q_0)$, т. е. $(q | T^3 H' | q_0)$, в релятивистской теории точечного источника расходится. И здесь-то *вступает в действие вычитательный приём Гайтлера*: вычитаются все расходящиеся члены типа $(q | T^n H' | q_0)$, $n = 3, 5, \dots$. Остаётся только

$$(q | K | q_0) = (q | TH' | q_0). \quad (14a)$$

Вообще, в произвольном процессе $q_0 \rightarrow q$ в разложении (14) оставляется только первый (всегда конечный) исчезающий член, т. е.:

$$(q | K | q_0) = (q | T^{r_0+n-1} H' | q_0), \quad (14b)$$

если в начальном состоянии присутствует n_0 , в конечном — n мезонов. Предполагается, что при таком определении K и \bar{K} (17) уравнение (16) точно определяет \bar{R} . Член $\frac{1}{2} \bar{K}\bar{R}$ в левой

¹⁾ Матричные элементы \bar{K} первого порядка по g исчезают в силу законов сохранения энергии и импульса,

части описывает то, что осталось от реакции излучения. Решение (16) символически может быть записано в виде:

$$R = \frac{2\pi i \bar{K}}{1 - \pi i \bar{K}}. \quad (18)$$

Релятивистская инвариантность этого вычитательного метода явствует из того простого факта, что все члены разложения (14) должны обладать одними и теми же трансформационными свойствами¹⁾.

Будучи применена к рассеянию фотонов малой энергии на свободном электроне ($\nu \ll \mu_{el}$), теория Гайтлера даёт в точности ту же интенсивность рассеяния, что и классическая теория, включающая лоренцову силу трения $\frac{2}{3} e^2 (\partial^3 \mathbf{x}_1 / \partial t^3)$. Также и для рассеяния мезонов нуклеонами гайтлеровские эффективные сечения, вычисленные на основе мезонных теорий²⁾, обнаруживают близкое сходство с результатами классических теорий, учитывающих торможение излучением, но пренебрегающих эффектами инерции поля. В качестве примера приведём гайтлеровскую формулу для эффективного сечения рассеяния продольных векторных мезонов импульса k , вычисленную в статическом приближении (без учёта отдачи) по «заряженной» векторной теории с $f_v = 0$:

$$\sigma = \frac{g_v^4 k^4}{4\pi(\mu^2 + k^2)} \frac{1}{1 + \frac{g_v^4 k^6}{(4\pi)^2(\mu^2 + k^2)}}. \quad (19)$$

Последний множитель учитывает эффект торможения излучением³⁾. Он становится важным с увеличением импульса при $k \gtrsim |g_v|^{-1} (4\pi)^{\frac{1}{2}}$ и ведёт, в конце концов, к уменьшению эффективного сечения, как $4\pi k^{-2}$.

¹⁾ P. G. Gormley a. W. Heitler, Proc. Roy. Irish. Acad. **50**, 29 A, **39**, 1944. См. также E. C. G. Stückelberg a. P. Bouvier, Comptes Rendus Soc. de Physique Geneve **61**, 162, 1944.

²⁾ Для «заряженной» и симметричной смеси Меллера-Розенфельда различные эффективные сечения были даны Гайтлером и Пенгом (W. Heitler and H. W. Peng, Proc. Roy. Irish. Acad. **49**, 101 A, 1943).

³⁾ Квантовая теория торможения излучением была независимо разработана Гора (E. Gora, Acta Phys. Polonica **7**, 159, 1938 и 374, 1939; Zeits. f. Physik. **120**, 121, 1943), Вильсоном (A. H. Wil-

Обратимся теперь к более общей теории, развитой Штյюкельбергом в рамках схемы S -матрицы Гейзенберга¹⁾. Матрица тесно связана с R -матрицей, определяемой формулой (10). Положим:

$$(q|1|q_0) = (q|\Delta|q_0)\delta(E_q - E_0), \quad (20)$$

где Δ — матрица, единичная относительно всех переменных, кроме полной энергии, и

$$\begin{aligned} \delta(E) &= \delta_-(E) + \delta_+(E), \\ \delta_{\mp}(E) &= \frac{1}{2}\delta(E) \pm \frac{1}{2\pi i E}; \end{aligned} \quad (21)$$

тогда вместо (10) можно написать:

$$(q|\psi|q_0) = (q|\Delta|q_0)\delta_-(E_q - E_0) + (q|S|q_0)\delta_+(E_q - E_0), \quad (22)$$

где

$$S = \Delta + R. \quad (23)$$

Два члена в правой части (22) описывают соответственно «падающую» и «уходящую» волны. В силу сохранения энергии в действительности существенна только матрица \bar{S} , определяемая равенством:

$$(q|\bar{S}|q_0) = (q|S|q_0)\delta(E_q - E_0) = (q|1 + \bar{R}|q_0). \quad (24)$$

Принимая соотношения (16) или (18), как результат квантовомеханического рассуждения, мы имеем:

$$\bar{S} = 1 + \bar{R} = \frac{1 + \pi i \bar{K}}{1 - \pi i \bar{K}}. \quad (25)$$

\bar{K} — эрмитова матрица и, следовательно, \bar{S} — унитарна. При преобразованиях Лоренца \bar{S} должна трансформироваться, как единичная матрица, так как $\bar{S} \rightarrow 1$ в предельном случае исчезающего взаимодействия. Вероятности всех наблюдаемых процессов можно выразить через матричные элементы \bar{S} .

Гейзенберг, ввиду связанных с расходимостями трудностей современной теории, стремится освободить матрицу \bar{S} от всех ограничений, налагаемых на неё уравнением Шредингера, со-

son, Proc. Camb. Phil. Soc. **37**, 301, 1941); Иваненко и Соколовым (D. Iwanenko and A. Sokolow, Phys. Rev. **60**, 277, 1941).

¹⁾ W. Heisenberg, Zeits. f. Phys. **120**, 513, 1943.

храняя, однако, её общие свойства, как-то: унитарность и релятивистское поведение. На языке изложенной выше волново-механической теории это означает, что хотя и можно определить эрмитову матрицу \bar{K} соотношениями (16) или (25)¹⁾, её нельзя больше вычислять с помощью гамильтониана по формулам (13), (14) и (17). Само собой разумеется, что до тех пор, пока не даны другие правила, заменяющие уравнение Шредингера, такая теория остаётся весьма неполной, напоминающая пустую раму для ещё не написанной картины.

Для того чтобы хотя бы частично заполнить эту раму, Штюкельберг прежде всего постулирует принцип *соответствия с классической теорией торможения излучением*²⁾. Некоторый элемент произвольности вносится возможностью включить в классическое уравнение движения не только лоренцову силу трения, но и другие силы реакции поля, содержащие четвёртую и высшие производные координат частицы по времени, подобные имеющимся в лоренцовой модели протяжённого электрона. Эта произвольность классической теории имеет квантовый аналог. Предположим, например, что, применяя к разложению (14) определённое правило вычитания, например правило Гайтлера, мы построили конечную матрицу \bar{K} и определили (сохраняя тем самым некоторую аналогию с формализмом волновой механики) матрицу \bar{R} или \bar{S} по формуле (16) или (23). С другой стороны, по теории Гейзенберга можно было бы положить:

$$\bar{S} = e^{i\eta}, \quad \text{tg } \frac{\eta}{2} = \pi\bar{K}, \quad (26)$$

и применить правило вычитания не к \bar{K} , а к η . Эта теория, также свободная от расходимостей и релятивистски инвариантная, будет отличаться от предыдущей в эффектах высшего порядка. Аналогично можно ввести и другие функции от \bar{K} или η . Раз мы покинули волново-механическую теорию, приводящую к интегральному уравнению Гайтлера, неясно, какая из этих функций заслуживает предпочтения. Из рассуждений Штюкельберга следует, что это разнообразие теорий соответ-

1) Гейзенберг вместо (25) полагает: $S = e^{i\eta}$, где η — эрмитова матрица, и рассматривает теории с простыми выражениями для η (Zeits. f. Phys. 120, 673, 1943).

2) E. C. G. Stückelberg, Helv. Phys. Acta, 17, 3, 1944,

ствуется разнообразию классических теорий с различными силами реакции. В частности, теории Гайтлера соответствует простейшее классическое уравнение движения, содержащее только третью производную.

Как бы то ни было, правило вычитания само по себе допускает ещё один элемент произвольности. Как Гейзенберг, так и Штюкельберг применяют следующий вычитательный формализм: хорошо известно, что расходимости всегда возникают из-за промежуточных (виртуальных) процессов, в которых квант (фотон или мезон) испускается и затем вновь поглощается; интеграл по возникающим промежуточным состояниям расходится. Эти расходящиеся интегралы можно исключить релятивистски инвариантным образом, изменив порядок следования операторов испускания и поглощения¹⁾ (например, в $T'H'$). Если, например, поставить все операторы испускания слева от операторов поглощения, то однажды испущенный квант никогда уже не сможет вновь поглотиться, и, соответственно, расходящихся интегралов не будет. Однако возможны и другие расположения множителей, отличающиеся друг от друга лишь конечными интегралами²⁾.

Чтобы сократить число возможностей, Штюкельберг³⁾ вводит ещё один принцип — «принцип соответствия», заявляя, что в пренебрежении торможением излучения и другими силами реакции должна получиться обычная *волново-механическая* теория. Этот новый принцип позволяет ему выразить \bar{K} в виде разложения по степеням константы связи, в котором главный член (выбранный, например, в соответствии с теорией Гайтлера) влечёт за собой бесконечную последовательность членов высшего порядка⁴⁾. Можно, конечно, с тем же правом разлагать $\eta = 2 \operatorname{tg}^{-1}(\pi\bar{K})$, но с \bar{K} гораздо легче работать. Это и не удивительно ввиду интегрального уравнения Гайтлера. Как

¹⁾ Этот приём «изменения порядка» был впервые введён Иорданом и Клейном (P. Jordan u. O. Klein, Zeits. f. Phys. **45**, 751, 1927).

²⁾ Я обязан доктору Костеру за разъясняющую дискуссию по этому и другим вопросам теории Штюкельберга. Работа Костера и Хурье, в которой рассматриваются эти вопросы, приготовлена для публикации в Helv. Phys. Acta.

³⁾ E. C. G. Stückelberg, Comptes Rendus Soc. de Physique Genève, **61**, 159, 1944; Helv. Phys. Acta **18**, 195, 1945.

⁴⁾ E. C. G. Stückelberg, Helv. Phys. Acta **18**, 211—213, 1945.

бы то ни было, это рассуждение явно недостаточно для того, чтобы устранить *всякую* произвольность в расположении операторов испускания и поглощения в членах высшего порядка, не говоря уже о возможности произвольно вводить новые «главные члены».

Наконец, разложение матрицы \bar{S} надо подчинить ещё одному условию¹⁾. Для теорий Гейзенберга и Штюкельберга характерно, что они стремятся только установить связь между начальным и конечным состояниями, не давая пространственно-временного описания реального процесса, который считается ненаблюдаемым. Рассмотрим теперь множественный процесс, в котором участвуют, например, два нуклеона I и II, находящиеся на макроскопическом расстоянии r . Согласно изложенному выше общему формализму, может случиться, что мезон, присутствующий в начальном состоянии, появляется и в конце, но так, что его пространственно-временная локализация приведёт к заключению, будто бы этот вторичный мезон был испущен нуклеоном II, *прежде*, чем первичный мезон поглотился нуклеоном I. В течение интервала времени между испусканием и поглощением, который может быть сколь угодно велик ($\geq \tau$), теория отказывается описывать состояние системы; однако закон сохранения энергии требует присутствия в это время частицы с отрицательной энергией. Несомненно, это предсказание неправильно. Его, однако, можно избежать, соответствующим образом выбрав члены высшего порядка в разложении \bar{K} . Пока ещё неясно, в какой мере результаты этого рассуждения совпадают с выводами из «второго принципа соответствия». Но, вообще говоря, надо ожидать, что более близкое соответствие с волново-механической теорией автоматически приведёт к исключению всех «некаузальных» предсказаний, так как в строгой, базирующейся на уравнении Шредингера волново-механической теории последовательность событий во времени, по необходимости, «каузальна».

До сих пор Штюкельберг и его сотрудники изучали, в основном, упрощённые теории, не допускающие сравнения с опытом. В частности, надо ещё исследовать возможность такого обобщения теории, чтобы она включала эффекты, связанные с инерцией спина. В этом отношении должна быть некоторая

1) E. C. G. Stückelberg, *Helv. Phys. Acta*, **19**, 242, 1946.

свобода, связанная со свободой выбора соответствующей классической и волново-механической теории.

Хотя теории Гайтлера и Штюкельберга применяются прежде всего к рассеянию и связанным с ним явлениям, т. е. к стационарным состояниям, принадлежащим непрерывному спектру энергии, Крамерс и Гейзенберг¹⁾ указали на возможность определить и *дискретный энергетический спектр*. Для примера рассмотрим рассеяние частицы мезона центральным полем сил (покоящимся нуклеоном). Для чистой S -волны (т. е. в случае равного нулю момента количества движения L) асимптотическое поведение волновой функции в обычном пространстве даётся выражением:

$$\psi_k(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{r} e^{-ikr} - S(k) e^{+ikr}. \quad (27)$$

$S(k) = e^{i\eta(k)}$ определяет сдвиг фазы рассеянной волны, вызванный взаимодействием двух частиц. Аналитически продолжая функцию $S(k)$, можно определить ψ_k для комплексных значений k . Для значений k на отрицательной мнимой полуоси в плоскости комплексного переменного k мы получаем, положив $k = -i|k|$:

$$\psi_k(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{r} e^{-|k|r} - S(-i|k|) e^{+|k|r} \quad (28)$$

(при этом $\psi_k(r \rightarrow 0)$ остаётся конечной). Рассматривая (28), как асимптотическое выражение собственной функции связанного состояния («мезон, связанный с нуклеоном»), мы должны иметь, очевидно: $S(k) = S(-i|k|) = 0$. Тогда дискретные собственные значения энергии (принадлежащие S -состояниям) будут:

$$E_n = (\mu^2 + k_n^2)^{\frac{1}{2}} = -(\mu^2 - |k_n|^2)^{\frac{1}{2}},$$

где k_n — расположенные на отрицательной мнимой полуоси нули аналитической функции $S(k)$ ²⁾. Вместо этого можно

1) W. Heisenberg, Заседание Цюрихского семинара по теоретической физике, 1944 г. и две неопубликованные работы, имеющиеся в Швейцарии. См. также C. Moeller, Лекции в Бристольском университете, весенний семестр, 1946 г. и Kgl. Danske Vid. Sels. Math.-fys. Medd. **23**, № 1, 1945.

2) Однако не всем этим нулям обязательно соответствуют собственные функции; см. S. T. Ma, Phys. Rev. **70**, 668, 1946.

искать полюсы на положительной мнимой полуоси; они, согласно общему соотношению $S(k)S(-k) = 1$ или $\eta(k) + \eta(-k) = 0$, находятся в точках $k = \pm i|k_n|$.

Связь с теорией матрицы S можно установить, заметив, что $S(k)$ есть собственное значение матрицы S , принадлежащее S -состоянию ($L=0$) с импульсом k . Аналогично и в более сложных задачах, включающих большое число частиц или другие взаимодействия, можно, зная собственные значения матрицы S , как функции энергии, с помощью аналитического продолжения найти энергию стационарных состояний, в которых несколько частиц связаны друг с другом¹⁾. В рамках волновой механики этот метод полностью эквивалентен более привычным способам определения дискретного энергетического спектра. В теории матрицы S , отбрасывающей уравнение Шредингера, его можно ввести *ad hoc*, чтобы связать энергии связанных систем с рассеянием соответствующих свободных частиц.

Этим способом матрицу S , описывающую рассеяние мезонов нуклеонами по теории Гайтлера или Штюкельберга, можно использовать для определения «изобарных состояний», в которых мезоны связаны с нуклеонами²⁾. Нули функции $S(k)$ принадлежат к числу нулей знаменателя формулы для эффективного сечения рассеяния. Воспользуемся, например, формулой Гайтлера (19) (статическое приближение «заряженной» векторной теории с $f_v = 0$). Уравнение

$$(4\pi)^2(\mu^2 + k^2) + g_v^4 k^6 = 0$$

имеет одно решение вида

$$L = -i|k_1| (0 < |k_1| < \mu),$$

означающее, что мезон может быть соединён с нуклеоном³⁾ с энергией связи $\mu - (\mu^2 - |k_1|^2)^{\frac{1}{2}}$. Соответствующая энергия возбуждения, отсчитываемая от основного состояния («чистый»

¹⁾ Гейзенберг показывает также, как можно вычислить вероятность перехода в эти состояния, зная матричные элементы S для соответствующих множественных процессов рассеяния.

²⁾ W. Heitler a. Ning Hu, Proc. Roy. Irish Acad., в печати; J. Pignone, заседание Цюрихского семинара по теоретической физике, лето 1946 г.

³⁾ Доктор Гайтлер любезно сообщил мне, что по его теории заряд изобарного состояния равен или $+2$ или -1 .

нуклеон), равна $(\mu^2 - |k_1|^2)^{\frac{1}{2}}$. Легко видеть, что она немногим меньше, чем μ в случае сильной связи ($|g_v| \mu \gg 1$), и стремится к нулю в предельном случае исчезающего взаимодействия ($|g_v| \mu \rightarrow 0$). Эта зависимость от величины связи резко расходится с результатами теорий протяжённого источника (см. § 4,а). Очевидное объяснение этого расхождения состоит в том, что спин-инерционные эффекты, ответственные за образование изобарных состояний в теориях протяжённого источника, как раз вычитаются в теории Гайтлера. Численно, пользуясь значениями константы связи, принятыми в теории ядерных сил (приближение слабой связи), можно ожидать энергии возбуждения порядка только 20 MeV.

Зная матрицу S для столкновений протона с нейтроном, можно таким же образом определить энергию связи *дейтерона*. Здесь, однако, нельзя ожидать, что силы реакции окажут заметное влияние, так как волновая функция дейтерона медленно меняется в пространстве.

Что касается решающей проблемы *магнитных аномалий нуклеона*, то здесь мы встречаемся с той трудностью, что электрический заряд «мезонного облака» и распределение тока в нём не определяются непосредственно в теории матрицы S , хотя их и можно определить косвенным путём, изучая рассеяние световой волны нуклеоном. Как бы то ни было, величиной, подлежащей вычислению, является энергия нуклеона в магнитном поле, причём нуклеон находится в одном из основных состояний. Эти состояния нельзя с помощью аналитического продолжения связать с непрерывным спектром мезонных волн. Вместо этого можно попытаться исследовать поведение нуклеонов в осциллирующем или неоднородном магнитном поле, вроде тех, которые в действительности использовались для измерения магнитных моментов. Теории Гайтлера и Штюкельберга должны решить эту проблему магнитных аномалий прежде, чем станет возможным справедливое сравнение их с другими теориями.

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

- Альварец** 135, 269
Амальди 273
Антиперестановка 207—208
- Баба** 118, 135, 277
Бат 257
Батдорф 257
Белифанте 118
 β -распад 133
Бете 132, 134, 232, 257, 263
Блох 135, 170, 175, 269
Бор 37, 141
Борн 238
Бочиарелли 273
Брейт 128, 129, 131, 134, 165
Бувьер 283
Бус 117
- Вайскопф** 63, 89, 91, 127, 237
Валлер 196, 275, 276
Ван дер Варден 239
Вентцель 79, 127, 165, 182, 259, 266, 273, 274, 275
Взаимодействие «тензорное» 258
— ядерное 57 и д., 74 и д., 120 и д.
Вигнер 127, 206
Вилларс 272
Вильсон 117, 283
Вильямс 134
- Гайтлер** 37, 118, 135, 165, 232, 255, 263, 270, 280, 283, 289, 290
Гальперн 237
Гамильтон 263
Гамов 127
Гейзенберг 11, 28, 70, 121, 128, 134, 135, 164, 218, 232, 252, 279, 284, 285, 288, 289
Гилл 257, 262
Гильберт 243
Гора 283
Гордон 84
Гормлей 283
Гравитон (гравитационный квант) 244
Густавсон 279
- Данков** 266, 267, 268
Дейтрон 129 и д., 270 и д.
Дельбрук 237
Дирак 36, 138, 164, 168, 184, 185, 200, 218, 232, 240, 255, 274, 275, 276
- Законы сохранения** 16 и д., 24
Заряд (плотность заряда) 23, 218, 245
Заутер 232
Захариас 131, 135, 260
- Иваненко** 127, 284
Изобары протона 79, 267
Иордан 36, 206, 286
- Келлог** 131, 135, 260
Кеммер 118, 126, 135, 237, 257, 258, 270
Клейн 232, 286
Кобаяси 117
Кондон 128
Конус световой 180 и д.
Корбен 115, 117
Костер 286
Крамерс 165, 288
Кристи 117, 257
Критчфельд 127
Кусака 117, 257, 266, 269, 272
Куш 135, 269
- Ланденбург** 256
 λ -процесс 273 и д.
Лапорт 117
Лапп 257
Лепренс-Ренге 256
Лопес 268, 273
Лоренц-инвариантность 25 и д.
Лоупс 267
- Ма** 135, 289
Майер-Лейбниц 256
Майорана 122, 128
Маршак 127
Масса электромагнитная 184 и д., 199, 249 и д.
Матрица Гейзенберга 284 и д.
— плотности 218
Матрицы Дирака 155, 201
— Паули 72—73, 123
— относительно зарядных чисел 71 и д.
— — числа частиц 46, 67, 82—83
Метод обрезания 61, 250
Меллер 131, 261, 288
Мезон (мезотрон) 50 и д., 103 и д., 109 и д., 133 и д.
Ми 238
Мильман 135, 269
Множитель обрезания (обрывающий множитель) 61, 78, 132, 261
Моменты магнитные 114 и л., 135, 268 и д.
- Нейтретто** 257
Нельсон 263
Нинг-Ху 257, 261, 263, 264, 289
Нишина 232
Нордгейм 134, 263
Нуклон 70
- Образования пар** 87 и д., 117, 230, 232
Оператор поля 12, 22, 26 и д., 45 и д.
Оппенгеймер 79, 218, 232, 277
- Пайерлс** 218
Параметр связи 77 и д.
Патри 133

- Паули 11, 12, 23, 28, 36, 63, 85, 89, 115,
 138, 164, 200, 222, 225, 242, 243, 247,
 250, 257, 260, 266, 268, 269, 272, 276, 280
 Пенг 255, 263, 280, 283
 Пиренне 289
 Плессет 232
 Подольский 138, 168, 274
 Позитрон 214 и д.
 Поле мезонное 50
 — —, векторное 92 и д.
 — —, заряженное 63 и д.
 — —, псевдоскалярное 129 и д.
 — электромагнитное 137 и д.
 — во взаимодействии с мезонами
 154 и д.
 — — — с электронами 152 и д.
 — электронное 200 и д.
 Потенциал кулоновский 161, 180, 190, 229
 — Юкава 59, 129
 Правила перестановки 11 и д., 26 и д.,
 35 и д., 39 и д., 141 и д., 207 и д.,
 246 и д.
 Презент 128
 Преобразование калибровки 1-го рода 23
 — 2-го рода 85, 137, 225
 Принцип исключения (Паули) 206
 Прока 92
 Протон-нейтрон 70

 Раби 131, 135, 260
 Рарита 136, 272
 Рассеяние света 166 и д., 230 и д., 236 и д.
 — мезонов 57 и д., 74 и д., 88 и д.,
 112 и д., 120 и д., 133
 Рисс 279
 Робертс 134
 Розенфельд 18, 28, 37, 131, 141, 261
 Росси 134
 Рэмси 131, 135, 260

 Саката 118
 Сербер 266, 267
 Сила Бартлетта 128
 — Вигнера 128
 — Гайзечберга 121, 128
 — Майорана 122, 128
 Силы, независящие от зарядов 83
 Собственная энергия 60 и д., 78, 90, 161,
 184 и д., 238, 249 и д.
 Соколов 284
 Спин 257
 — векторного мезона 108 и д.
 — изотопный 72
 —, инерция спина 267
 — светового кванта 252
 — электрона и позитрона 217
 Статистика Бозе 150
 — Бозе-Эйнштейна 50
 — Ферми-Дирака 206

 Тамм 127
 Такетани 118

 Теллер 127
 Тензор энергии импульса 17, 218
 Теория излучения Дирака 164 и д.
 — позитронов Дирака 214 и д.
 — сильной связи 255, 264 и д.
 — со многими временами 168 и д.
 — Юкава 75 и д., 120 и д., 133 и д.
 Томас 257
 Ток четырехмерный 25
 Трабачи 273
 Тув 128

 Уравнение Гамильтона-Якоби 83
 — Дирака 202 и д.
 — Шредингера-Гордона 32, 84
 Уравнения Максвелла 145, 158
 — поля 7 и д.
 Утияма 117
 Уэнелер 256

 Феррети 261, 273
 Ферми 134, 138, 164, 165
 Финберг 128, 131
 Фирц 135, 240, 242, 272
 Фок 138, 168, 218, 274
 Фотон 149 и д.
 Фрелих 118, 135, 270
 Фремберг 279
 Фриш 135
 Функция Гамильтона 11
 — D 33
 — D' 220
 — Дирака (δ -функция) 12, 33
 — Лагранжа 7 и д., 245
 — Паули-Иордана 141, 181
 — поля 7 и д.
 Фэрн 218

 Хафстад 128
 Хейдсбург 128
 Хойз нгтон 129, 134
 Хурье 268, 286

 Шайн 257, 262
 Шатт 280
 Швингер 79, 115, 134, 136, 261, 262, 272,
 277
 Шер 129, 134
 Штерн 135
 Штюкельберг 52, 118, 133, 255, 283, 285,
 286

 Эванс 134
 Эйлер 134, 237
 Эйнштейн 244
 Электрон, радиус—252
 Энергия, плотность—16, 245
 —, собственное значение 48

 Юкава 59, 69, 77, 118, 133

 Яух 127, 245, 263, 264, 267, 278,

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
24	14 св.	$\phi' \rightarrow \phi e^{-i\alpha}$	$\phi' \rightarrow \phi' e^{i\alpha}$	Ред.
28	10 сн.	$\phi_{\sigma}(x, t) = e^{-\frac{itE}{\hbar}}$	$\phi_{\sigma}(x, t) = e^{\frac{itE}{\hbar}}$	»
59	7 св.	$x \pm 0$	$x \neq 0$	»
74	11 сн.	$\rightarrow N + \mu_{k'}^{-}$	$\rightarrow N + \mu_{k'}^{+}$	»

Зак. 7157. Вентцель