Е. С. Вентцель

Введение в исследование операций

Е. С. ВЕНТЦЕЛЬ

ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Рисунки М. А. Герштейна

ИЗДАТЕЛЬСТВО „СОВЕТСКОЕ РАДИО“

МОСКВА 1964

519.8 : 623

В книге излагаются основы науки исследования операций, занимающейся способами рациональной организации целенаправленной человеческой деятельности.

Изложение предмета ведется в основном на материале задач, связанных с боевым применением техники. Однако математические методы обоснования рациональных решений излагаются так, что могут быть приложены в любой области практики.

Материал изложен в популярной, общедоступной форме. Применяемый математический аппарат не выходит за пределы обычного курса математики высших технических учебных заведений.

Книга рассчитана на широкий круг читателей: инженеров, аспирантов, конструкторов, научных работников, студентов экономических и технических вузов.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованием операций называется специальная наука, занимающаяся рациональными способами организации целенаправленной человеческой деятельности. Методы исследования операций применяются в самых разных областях: в промышленности, торговле, на транспорте, в медицине, городском и сельском хозяйстве, военном деле — одним словом, везде, где приходится организовывать какие-то мероприятия, направленные к достижению определенной цели. Очевидно, организовывать их следует так, чтобы они наилучшим образом способствовали достижению поставленной цели, т. е. были максимально эффективными.

Исследование операций в настоящее время — одна из самых быстро развивающихся наук, завоевывающая все более обширное поле применений. В данной книге наибольшее внимание будет уделено тем задачам исследования операций, которые имеют непосредственное отношение к организации боевой деятельности войск. Однако методы, которыми мы будем пользоваться для решения этих задач, имеют более общее значение и могут найти применение в любой другой области практики.

Задачи, близкие по смыслу к задачам исследования операций, в военном деле ставились и решались уже давно. Речь идет о созданных в теории стрельбы *методах оценки боевой эффективности* различных видов вооружения. Эти методы дают возможность выбрать и обосновать наилучший способ боевого воздействия, позволяющий нанести противнику наибольший возможный ущерб при ограниченных затратах времени и средств.

Теорию боевой эффективности средств поражения можно считать составной частью или «первой ступенью» исследования операций в военном деле. Она позволяет:

— оценить эффективность стрельбы (или бомбометания) любыми снарядами по любой цели (одиночной, групповой или площадной);

— сравнить между собой по эффективности разные способы организации стрельбы;

— определить влияние на боевую эффективность технических характеристик применяемых образцов;

— определить влияние на боевую эффективность способов боевого применения заданных образцов вооружения;

— оценить соотношение сил;

— рассчитать наряд средств, необходимый для выполнения боевой задачи,

и т. п.

Эта часть исследования операций — оценка эффективности средств поражения — к настоящему времени наиболее разработана и освещена в литературе, а расчетные методы здесь доведены до высокой степени совершенства.

Несколько меньше разработаны более новые разделы исследования операций, где боевые действия рассматриваются в динамике их развития, с учетом противодействия противника, степени надежности применяемых технических средств и их помехозащищенности. Однако и здесь существуют разнообразные расчетные методы, позволяющие оценить влияние этих факторов на боевую эффективность.

Менее всего освещены в литературе самые новые разделы исследования операций, где рассматривается боевая деятельность сложных комплексов (объединений), включающих разнородные боевые средства, обеспечивающие устройства, различные системы для сбора и обработки информации (радиолокационные станции, разведывательные средства, информационные машины), а также управляющие группы или устройства, предназначенные для управления боевой деятельностью войск. Однако применение методов исследования операций для решения конкретных задач подобного рода уже оказалось плодотворным и обещает значительные успехи в будущем.

За последние годы роль исследования операций во всех областях военного дела быстро растет; увеличиваются и требования к самой науке. Это связано с целым рядом причин.

Во-первых, прогрессирующее усложнение военной техники и как следствие высокая стоимость каждого образца заставляют крайне внимательно относиться к выбору его технических характеристик и способов боевого применения. Исследование операций становится мощным средством научной разработки и обоснования системы вооружения и ее отдельных элементов.

Вторая причина связана с широким применением автоматизации во всех областях военной техники, в частности, в сфере управления. Вопрос об автоматизации управления боевыми действиями в настоящее время стоит очень остро. Высокие и все возрастающие скорости подвижных боевых средств (самолетов, ракет) приводят к резкой нехватке времени на все звенья процесса управления: учет информации, принятие решения, передача его исполнительным органам, контроль выполнения и т. п. В условиях современной войны эффективное управление боевыми действиями уже невозможно без автоматизации (по крайней мере частичной) этого процесса. В некоторых случаях (например, при отражении воздушного налета средствами ПВО) напряженный временной режим приводит к необходимости создания полностью автоматизированных систем, в которых функции управления передаются электронным цифровым вычислительным машинам (ЭЦВМ).

Во всех случаях, когда создается полностью или частично автоматизированная система управления, возникает вопрос о рациональном выборе **управляющего алгоритма**. Управляющим алгоритмом называется совокупность четко сформулированных формализованных правил, по которым работает управляющее устройство.

Методы исследования операций позволяют критически оценивать управляющие алгоритмы, сравнивать между собой по эффективности различные их варианты и вносить в них разумные изменения.

В данной книге изложены некоторые методы и практические приемы исследования операций, начиная от самых простых методов оценки эффективности стрельбы до сравнительно сложных, относящихся к организации боевых действий. Там, где это оказывается возможным, даны непосредственно расчетные методы, доведенные до таблиц и графиков. В более сложных случаях приходится ограничиться общим описанием методов решения задач, без уточнения конкретной расчетной схемы.

Ввиду того что книга рассчитана на широкий круг читателей, автор избегает пользования сложным математическим аппаратом. Для понимания материала читатель должен обладать элементарными сведениями по теории вероятностей, а для сознательного усвоения отдельных разделов книги — некоторыми знаниями по высшей математике, нигде не выходящими за пределы обычного курса высших технических учебных заведений. Однако основной текст книги может быть усвоен и без владения этим математическим аппаратом.

В книге содержится много примеров, иллюстрирующих излагаемые методы. При выборе условий этих примеров автор использовал ряд опубликованных материалов, в том числе и зарубежных. Численные значения исходных данных, приведенные в этих примерах, выбирались в первую очередь из методических соображений.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. Г. Мильграму, И. Я. Динеру, В. П. Кравченко, Л. А. Овчарову и Я. М. Лихтерову, ряд материалов которых был использован при написании этой книги.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

§ 1. ОПЕРАЦИЯ. ТЕХНИЧЕСКИЕ И ТАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Под «операцией» мы будем понимать любое мероприятие (или систему действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению определенной цели.

Примерами операций могут служить:

— отражение воздушного налета средствами ПВО;

— налет группы бомбардировщиков на железнодорожный узел;

— обстрел авиационными ракетами ордера кораблей;

— минирование заданного участка морского театра военных действий;

— система мероприятий, направленных к повышению надежности технического устройства;

— разведывательный поиск группы самолетов в тылу противника;

— сбрасывание пассивных радиопомех

и т. п.

Заметим, что понятие «операции» в сформулированном выше смысле не совпадает с понятием «операции», принятым в военном искусстве, а является более широким. В нашем смысле примером операции, хотя и весьма элементарным, может служить даже «пуск одной ракеты» или «сбрасывание одной бомбы». Из таких мелких элементарных операций складываются другие, более сложные.

Каждая операция продумывается, планируется заранее, предполагается к осуществлению в каких-то условиях. Однако, как правило, не все условия, в которых будет выполняться операция и от которых зависит ее успех, полностью известны заранее. Некоторые из них содержат элемент неопределенности, *случайности*.

Например, нельзя заранее в точности предсказать: будет ли налицо оптическая видимость в процессе выполнения операции; на какой высоте будет лететь воздушный противник; насколько интенсивно и как организовано будет его противодействие нашим средствам и т. д.

Большинство операций вообще (а в области боевых действий все без исключения) проводится в условиях, содержащих элемент непредвиденности, случайности, иногда очень существенный. Всем известно, что операция, задуманная определенным образом и рассчитанная на определенный результат, может кончиться совсем иначе из-за наличия случайных факторов.

Возникают две задачи:

— задача предсказания ожидаемого успеха операции в условиях, включающих элемент случайности;

— задача рациональной организации операции с учетом наличия и влияния случайных факторов.

Остановимся на первой задаче. Так как успех операции зависит от заранее неизвестных, случайных факторов, точное предсказание исхода каждой отдельной операции невозможно. Нельзя, например, в точности предсказать, сколько бомб попадет в цель при налете группы бомбардировщиков на промышленный объект. Любое предсказание может иметь смысл только в среднем, для большого числа однородных операций. Нельзя, например, предсказать, будет ли самолет-бомбардировщик сбит истребителем в одной отдельной атаке, но можно подсчитать средний процент сбитых самолетов в целой серии таких атак. Поэтому для того, чтобы предсказание имело смысл, исследуемая операция (по крайней мере, в принципе) должна обладать свойством *повторяемости*.

Перейдем ко второй задаче — организации операции.

Организовать операцию — это значит каким-то образом выбрать некоторые *элементы* или *параметры*, от которых зависит ее успех. Этими элементами могут быть всевозможные *конструктивные* параметры применяемых в операции технических средств, например:

— ширина полосы пропускания радиолокационного устройства;

— коэффициент наполнения боевой части ракеты;

— диаграмма направленности радиовзрывателя;

— калибр и тип бомб, подвешиваемых на самолете,

и т. п.

С другой стороны, такими элементами могут быть *способы осуществления операции*, например:

— число участвующих в операции боевых единиц;

— способ построения налета;

— последовательность ударов по противнику разнородными средствами;

— форма связи между группировками, участвующими в боевых действиях;

— распределение поражающих средств по целям

и т. п.

Мы будем условно разделять задачи организации операций на «технические» (выбор рациональных конструктивных параметров применяемых технических средств) и «*тактические*» (выбор рациональных способов боевого применения определенных, заданных образцов техники).

Примерами «технических» задач могут служить:

— выбор конструктивных параметров прицельного устройства;

— выбор вооружения и радиооборудования истребителя-перехватчика;

— выбор системы калибров авиационных бомб
и т. п.

Примерами «тактических» задач могут служить:

— выбор рационального сочетания огня и маневра в воздушном бою;

— выбор способа выполнения бомбардировочного налета (боевых порядков, эшелонирования и т. д.);

— распределение огня средств ПВО по налетающим целям и т. п.

Заметим, что не всегда удается провести четкую границу между «техническими» и «тактическими» задачами исследования операций. Например, вычислительная машина, предназначенная для автоматизированного управления боем, может рассматриваться с двух точек зрения:

— как средство боевого применения уже имеющегося вооружения;

— как техническое устройство, параметры которого должны выбираться рациональным образом.

Условимся в дальнейшем любой выбор определенного способа организации операции (в техническом или тактическом смысле) называть *решением*.

Основная цель и содержание исследования операций — *количественное обоснование рациональных* (иначе, «оптимальных») *решений*. Из всех возможных способов организации операции выделяется тот или те, которые оказываются по тем или иным соображениям более выгодными.

Заметим, что само *принятие решения* выходит за пределы исследования операций и относится к компетенции командира или другого ответственного лица, которое, опираясь на ряд известных ему данных (в том числе и на расчеты, связанные с математическими исследованиями), производит окончательный выбор того или другого варианта. Даже в тех случаях, когда процесс управления максимально автоматизирован, это правило остается в силе: командиру или другому ответственному лицу нужно принять решение, например, по разумному выбору управляющего алгоритма.

§ 2. МОДЕЛЬ ОПЕРАЦИИ

Для применения математических методов исследования операций необходимым начальным шагом является построение упрощенной схемы или *модели* операции. Без этого этапа никакое исследование операций невозможно.

Действительно, каждая реальная операция (особенно в области боевых действий) связана многочисленными связями с рядом факторов и условий, из которых некоторые являются важными, существенными, а другие побочными, второстепенными.

Например, на эффективность стрельбы в воздушном бою влияет ряд основных факторов, как-то:

— число орудий (или пусковых устройств) на самолете;

— калибр и тип снаряда;

— точность системы, обеспечивающей наведение снаряда на цель;

— условия стрельбы (дальность, ракурс, высота полета) и т. д.

Кроме того, на нее влияет целый ряд второстепенных, менее существенных, факторов, относящихся к конкретному выполнению именно данной, а не какой-либо другой атаки: точный вид маневра, предшествующего выходу в атаку; личные особенности и физическое состояние летчика в момент выполнения боевого задания и обслуживающего персонала в момент подготовки самолета к боевому вылету; метеорологические условия; предварительная история развития боевых действий и т. п.

Очевидно, полный количественный учет всех этих факторов невозможен, да и не требуется, так как наша задача — выявить зависимость эффективности стрельбы от важнейших, решающих факторов с тем, чтобы в дальнейшем, целенаправленно влияя на эти факторы, добиться максимальной эффективности.

Поэтому количественный анализ любой операции должен начинаться с построения ее упрощенной *схемы* или модели, в которой учтены основные черты явления и отброшены второстепенные

Не следует думать, что случайные факторы, от которых зависит успех операции, всегда принадлежат к второстепенным. Напротив, в большинстве операций эти факторы играют очень заметную роль.

Например, при стрельбе с самолета по самолету отклонения снарядов от цели носят случайный характер, но играют весьма существенную роль; при анализе явления было бы грубой ошибкой отбросить эти отклонения и считать, что все снаряды попадают в цель совершенно точно.

Другой пример: отказы аппаратуры носят случайный характер, но могут существенно влиять на эффективность ее применения, и было бы неправильно вообще пренебречь этими отказами и не планировать резервных элементов, обеспечивающих работу системы на случай отказа основных.

Таким образом, при исследовании операции, как правило, приходится учитывать случайные факторы. Поэтому основным математическим аппаратом, применяемым в исследовании операций, является аппарат *теории вероятностей*. Как известно, теория вероятностей есть математическая наука, специально занимающаяся изучением случайных явлений и свойственных им закономерностей. Для творческой работы в области исследования операций необходимо хорошее владение теорией вероятностей, включая ее новейшие разделы: теорию случайных процессов, теорию информации, теорию игр и решений, теорию массового обслуживания и т. п. Однако для решения ряда практических задач часто достаточно сравнительно ограниченных сведений по теории вероятностей.

§ 3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОПЕРАЦИИ. ПОКАЗАТЕЛЬ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Под эффективностью операции разумеется степень ее приспособленности к выполнению стоящей перед ней задачи. Чем лучше организована операция, тем она эффективнее.

Чтобы судить об эффективности операции, нужно иметь некоторый численный критерий, который мы будем называть показателем эффективности; условимся обозначать его буквой W.

В качестве показателя эффективности обычно применяется или вероятность какого-то события, или среднее значение (математическое ожидание) некоторой случайной величины. Например, показателями эффективности могут быть: вероятность поражения цели; средняя площадь разрушений на некотором объекте и т. п.

Конкретный вид показателя эффективности всегда выбирается в зависимости от задачи, стоящей перед операцией.

Рассматривая различные операции с точки зрения их целевой направленности, можно наметить два типичных крайних случая.

Случай 1. Операция выполняется с целью достижения некоторого вполне определенного результата (поражение самолета, разрушение моста, потопление корабля, перерыв в железнодорожном движении, поражение всех самолетов в составе налетающей группы и т. п.). Этот результат может быть только достигнут или не достигнут, а никакие промежуточные результаты не рассматриваются. Другими словами, успешность операции оценивается по схеме «да—нет» («все или ничего»).

В таком случае естественным показателем эффективности является вероятность достижения желаемого результата или, короче, вероятность выполнения боевой задачи.

Если обозначить A событие, состоящее в том, что боевая задача выполнена, то показатель эффективности есть вероятность события A:

$$W = P(A). \tag{3.1}$$

Случай 2. Задачей операции является не достижение определенного результата, а просто нанесение противнику максимально-возможного ущерба («чем больше, тем лучше»).

Этот ущерб в зависимости от задачи может измеряться в тех или других единицах.

Например, при обстреле ракетами крупного промышленного центра мерой ущерба, нанесенного противнику, может служить площадь причиненных разрушений — чем больше эта площадь, тем лучше. Другой пример — группа разведчиков посылается в район расположения войск противника с тем, чтобы выявить в этом районе возможно бóльшую долю находящихся там объектов — чем больше, тем лучше.

Во всех таких случаях естественным показателем эффективности будет среднее значение (или математическое ожидание) ущерба, нанесенного противнику:

$$W = M[Y], \tag{3.2}$$

где случайная величина Y — причиненный ущерб. В зависимости от целей и вида операции величина Y может иметь тот или другой смысл: площади, объема, времени, числа пораженных или обнаруженных объектов, стоимости восстановительных работ и т. п. и соответственно выражаться в тех или других единицах.

Часто в качестве показателя эффективности берут не просто средний ущерб, а средний относительный ущерб (например, средняя доля пораженных целей в составе группы или средняя доля пораженной площади).

Рассмотрим несколько примеров выбора показателя эффективности.

1. Одиночный самолет противника — бомбардировщик или разведчик — прорвался на нашу территорию. Для перехвата самолета поднята группа истребителей. Цель операции — сбить самолет. Показатель эффективности — вероятность того, что самолет будет сбит.

2. Группа бомбардировщиков совершает бомбометание по промышленному району. Цель операции — причинить разрушения заданного вида на возможно большей площади. Показатель эффективности — средняя площадь разрушений.

3. На бомбардировщике имеется оборонительное вооружение, предназначенное для защиты самолета. Задача вооружения — обеспечить сохранность бомбардировщика на пути к цели. Показатель эффективности — вероятность преодоления бомбардировщиком зоны ПВО.

4. Группировка зенитных управляемых ракет, расположенная вблизи границы и несущая функцию обороны территории, ведет огонь по группе бомбардировщиков, совершающей воздушный налет. Задача обороны — сбить возможно большее число самолетов в составе группы. Показатель эффективности — среднее число сбитых самолетов или средняя доля сбитых самолетов в составе налета.

5. Группировка зенитных управляемых ракет, несущая функцию обороны одного объекта большой важности, ведет огонь по группе самолетов, направляющихся на объект. Каждый из самолетов является носителем мощного средства поражения, так что прорыв к объекту хотя бы одного самолета практически равносилен его уничтожению. Задача обороны — не пропустить к объекту ни одного самолета. Показатель эффективности — вероятность того, что ни один самолет не прорвется к объекту.

6. Предпринимается ряд мероприятий по повышению надежности работы электронной цифровой вычислительной машины (ЭЦВМ). Цель мероприятий — уменьшить частоту появления ошибок (сбоев) или, что равносильно, увеличить средний промежуток

времени между сбоями. Показатель эффективности — среднее время безотказной работы ЭЦВМ или среднее относительное время исправной работы.

7. В процессе обстрела ненаблюдаемой цели время от времени высылаются самолеты-разведчики, чтобы установить: поражена цель или не поражена и в случае, если поражена, прекратить огонь. Цель контрольной разведки — уменьшить излишний расход боеприпасов. Показатель эффективности — среднее число сэкономленных снарядов.

Во всех рассмотренных примерах показатель эффективности, каков бы он ни был, требовалось обратить в максимум. Вообще это не обязательно. Можно пользоваться такими показателями, которые, напротив, желательно обратить в минимум. Например, в седьмом примере вместо среднего числа сэкономленных снарядов можно рассмотреть средний расход снарядов, который, естественно, требуется сделать минимальным. Другой пример: оценивается система управления, обеспечивающая наведение снаряда на цель. В ряде случаев для оценки ее эффективности пользуются таким показателем, как среднее квадратическое отклонение рассеивания точек попадания (или же среднее значение промаха снаряда); чем меньше эта величина, тем точнее наведение. Наряд средств, необходимый для выполнения боевой задачи, тоже желательно сделать минимальным, равно как и стоимость, расходуемую на ту или другую систему мероприятий.

В дальнейшем мы будем пользоваться наряду с показателями эффективности, которые нужно обратить в максимум, также и такими, которые нужно обратить в минимум.

Выше мы рассмотрели только наиболее простые примеры, когда целевая направленность операции ярко выражена и в связи с этим выбор показателя эффективности особых трудностей не вызывает. Это не всегда бывает так. На практике часто встречаются задачи, где цель операции несколько неопределенна или же операция преследует одновременно несколько целей.

Рассмотрим пример. Ведется стрельба по группе самолетов. Желательно было бы поразить все эти самолеты без исключения. Однако, если будут поражены не все самолеты, это не означает полной неудачи стрельбы; чем больше самолетов будет поражено, тем лучше.

В данном примере стрельба имеет две задачи: поразить, если возможно, все самолеты, а в случае, если не удастся все — как можно больше. Естественно и эффективность стрельбы оценивать не одним, а двумя критериями:

1) $W_1 = P(A)$ — вероятность поражения всех самолетов в составе группы;

2) $W_2 = M[X_п]$ — среднее число пораженных самолетов ($X_п$ — случайное число пораженных самолетов, а $M[X_п]$ — его среднее значение).

Задачи, в которых эффективность операции оценивается не по одному, а одновременно по нескольким критериям, очень часто встречаются на практике. В таких случаях приходится отдавать предпочтение тому решению, которое является приемлемым по всем критериям сразу. Вопрос о методике выбора такого «компромиссного» решения будет рассмотрен в § 7.

§ 4. ВЫБОР МОДЕЛИ ЯВЛЕНИЯ И ПОКАЗАТЕЛЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели вопрос о выборе показателя эффективности в зависимости от целевой направленности операции. При этом предполагалось, что модель явления, включающая задачу операции, тактическую обстановку, условия выполнения операции (или диапазон условий), уже построена. Здесь мы рассмотрим более сложный методический вопрос о принципах самого построения модели и выборе для нее показателя эффективности в зависимости от задачи исследования.

Любое исследование эффективности всегда предпринимается с некоторой целью. Такой целью или научной задачей исследования может быть, например:

— выявление рациональных конструктивных параметров боевой части снаряда «воздух—воздух» и взрывателя к ней;

— выбор рациональной схемы вооружения истребителя-перехватчика;

— расчет наряда средств, необходимого для выполнения операции; планирование снабжения;

— построение алгоритма для автоматизированного управления боем;

— выбор начального участка траектории ракеты

и т. п.

Модель явления и связанный с нею показатель эффективности всегда должны выбираться с учетом конкретной задачи научного исследования.

Модель должна быть по возможности простой и вместе с тем достаточно гибкой, чтобы отразить влияние на результат операции основных факторов, определяющих решение. Показатель эффективности должен быть чувствителен («критичен») по отношению к тем параметрам, рациональные значения которых требуется определить. Вместе с тем он должен быть достаточно прост для того, чтобы его можно было сравнительно легко вычислить и проанализировать.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Проектируется в заданном весе осколочная боевая часть снаряда «воздух—воздух», предназначенного для вооружения перехватчика. Задача исследования — обосновать конструктивные параметры боевой части: вес осколка, коэффициент наполнения и угол раствора снопа разлета осколков. Требуется построить подходящую модель явления и выбрать показатель эффективности.

В принципе модель для решения поставленной задачи можно строить разными способами: брать ее шире или у́же. Можно, например, рассмотреть бой одного или двух истребителей с бомбардировщиком; можно рассмотреть весь процесс отражения налета средствами ПВО. Можно учитывать или не учитывать ответный огонь бомбардировщиков; включать или не включать в модель этап дальнего наведения и этап обнаружения цели наземным полем радиолокационных станций. Одним словом, для решения поставленной задачи можно предложить самые различные модели. Эти модели обладают разной сложностью и разной степенью чувствительности к искомым параметрам. Очевидно, не существует границ расширению и усложнению модели (разве что «война в целом»). Вместе с тем достаточно ясно, что чувствительность модели к искомым параметрам и ее приспособленность к решению поставленной технической задачи по мере расширения падают; влияние интересующих нас параметров «тонет» в совокупном влиянии многих других факторов. Желательно, чтобы выбранная модель и показатель эффективности были возможно более простыми.

С учетом изложенного можно предложить следующую модель:

— рассматривается один выстрел снарядом данного типа с истребителя по бомбардировщику;

— предполагается, что вывод истребителя в исходное положение для атаки и захват цели бортовыми средствами уже осуществились и атака состоялась;

— ради простоты ответный огонь бомбардировщика по истребителю не учитывается; не учитываются также и такие факторы, как неполная надежность технических устройств и т. п.

В качестве показателя эффективности W (в соответствии с целевым назначением перехватчика) выберем вероятность поражения цели[1] одним выстрелом W_1. Этот показатель критичен по отношению к искомым параметрам снаряда и вместе с тем достаточно просто вычисляется.

2. В пределах данного веса G, отведенного на вооружение истребителя, нужно выбрать один из нескольких возможных вариантов, различающихся числом и типом снарядов «воздух—воздух», размещаемых на самолете. Требуется выбрать модель явления и показатель эффективности.

Очевидно, для решения этой задачи нельзя обойтись вероятностью поражения цели при одном выстреле W_1, как мы это делали в предыдущем примере: этот показатель «некритичен» по отношению к решаемой задаче; он учитывает только тип снаряда и не учитывает число снарядов, размещаемых на самолете. Очевидно, достаточно критичным показателем будет вероятность поражения цели W_n залпом (серией) всех n снарядов, размещаемых на самолете. За этим исключением модель явления можно сохранить

[1] Под поражением бомбардировщика разумеется его сбитие или приведение в такое состояние, когда он не может продолжать выполнение боевой задачи.

той же, что и в предыдущем примере; если сравниваемые варианты равноценны по дальности стрельбы, то нет необходимости усложнять модель учетом ответного огня бомбардировщика.

3. Анализируется не только схема вооружения истребителя-перехватчика, но и весь комплекс, включающий наземную станцию наведения, бортовую аппаратуру истребителя, сам истребитель с его летными данными и, наконец, вооружение. Задача исследования — найти рациональное техническое решение по совокупности всех этих взаимосвязанных элементов. При этом необходимо учесть, что повышение веса радиооборудования или вооружения неизбежно приводит к потере летно-тактических свойств истребителя.

В данном случае модель, рассмотренная в предыдущих примерах, и показатель эффективности «вероятность поражения цели при состоявшейся атаке» будут слишком узкими и некритичными.

Придется расширить модель, включив в нее (кроме самой стрельбы) более ранние этапы боевой деятельности истребителя (взлет, дальний перехват, ближний перехват), а в качестве показателя эффективности рассмотреть полную вероятность поражения цели на заданном рубеже с учетом всех последовательных этапов боевой деятельности истребителя и в общем случае с учетом ответного огня.

4. Исследуется работа системы управления комплексом средств ПВО с целью выбора рационального управляющего алгоритма.

Здесь, очевидно, требуется еще более широкая модель (например, отражение средствами ПВО группового налета воздушных целей или серии таких налетов) и более широкие и разветвленные показатели эффективности (например, математическое ожидание доли пораженных целей или вероятность поражения не менее заданной доли). Эти показатели эффективности должны вычисляться с учетом целого ряда факторов, не учтенных в предыдущих примерах, как-то:

— вероятность обнаружения целей наземными радиолокационными станциями;

— ошибки «прокладывания трасс» воздушных целей по данным радиолокационного поля;

— режим занятости каналов наведения

и т. п.

С первого взгляда может показаться, что чем шире модель, тем точнее исследование и единственным препятствием к пользованию во всех случаях широкими моделями служат чисто расчетные трудности. Однако это не так. Чем сложнее и шире модель, тем большее число данных приходится вводить в рассмотрение, в том числе и тех, о которых в настоящее время нет никаких (или почти никаких) сведений. В связи с этим кажущаяся «точность» широкой модели оказывается в ряде случаев обманчивой. *Модель, принятая для исследования, не должна быть шире,* чем это безусловно необходимо для решения поставленной задачи.

Исходя из всего вышеизложенного, можно сформулировать следующие рекомендации по построению модели явления и выбору показателя эффективности:

— модель явления и показатель эффективности должны выбираться исходя из интересов той научно-технической задачи, которая поставлена перед исследованием;

— они должны быть чувствительны (критичны) по отношению к тем параметрам, рациональные значения которых требуется определить;

— они должны быть наиболее простыми из тех, которые обладают должной критичностью.

§ 5. УСЛОВИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАЦИИ. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ В ДИАПАЗОНЕ УСЛОВИЙ

При построении модели операции нужно всегда задать основные условия ее выполнения. Например, для стрельбы с самолета по самолету такими условиями будут:

— тип цели;

— дальность стрельбы;

— ракурс цели;

— скорость цели;

— скорость стреляющего самолета и т. п.

Основными условиями бомбардировочного налета являются:

— вид и размеры цели;

— число самолетов, участвующих в налете;

— высота полета;

— способ бомбометания (одиночное, серийное, залповое, групповое по команде ведущего и т. п.);

— наличие или отсутствие радиопомех; тип помех и т. п.

Разумеется, условия выполнения операции должны быть выбраны достаточно типичными, но почти никогда не бывает, чтобы операция была рассчитана на проведение только в одних определенных условиях. Как правило, любой вид боевой техники рассчитан на применение в целом диапазоне условий. Возможно, например, применение управляемых снарядов «воздух—воздух» как из задней, так и из передней полусферы; как в дневных, так и в ночных условиях; как на малых, так и на больших высотах. Система управления средствами ПВО должна работать как при больших, так и при малых скоростях и высотах целей; как при больших, так и при малых плотностях налета; как при отсутствии, так и при наличии маневра целей.

Возникает вопрос о принципах выбора рационального решения в случае, когда условия выполнения операции заранее неизвестны и могут варьироваться.

Предположим, что сравниваются по некоторому показателю эффективности W несколько возможных вариантов решения: $A_1, A_2, \ldots, A_m$ в целом диапазоне условий. Возможные варианты условий мы тоже перенумеруем и обозначим $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Обозначим буквой W с двумя индексами: W_{ij} — значение показателя эффективности для варианта A_i в условиях B_j; первый индекс обозначает номер варианта решения, второй — номер совокупности условий, в которых решение применяется.

Например, вариантами решения $A_1, A_2, \ldots, A_m$ могут быть различные типы истребителей-перехватчиков, а вариантами условий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — различные высоты полета воздушных целей; показателем эффективности W — вероятность поражения цели. Тогда W_{23} будет вероятность поражения истребителем типа A_2 цели, летящей на высоте B_3.

Значения показателей эффективности можно расположить в виде прямоугольной таблицы (матрицы):

Варианты решения	Варианты условий			
	B_1	B_2	...	B_n
A_1	W_{11}	W_{12}	...	W_{1n}
A_2	W_{21}	W_{22}	...	W_{2n}
⋮	...	...	...	...
A_m	W_{m1}	W_{m2}	...	W_{mn}

Такая таблица называется «матрицей эффективности».

Матрицу эффективности можно изобразить графически в виде диаграммы: по оси абсцисс откладываются в некотором порядке варианты условий, а по оси ординат — показатель эффективности (рис. 5.1). Для наглядности полученные точки можно соединить. Каждая из кривых соответствует определенному варианту решения.

Заметим, что кривые на рисунке типа 5.1 вовсе не обязательно представляют собой графики зависимости одной величины от другой. Часто «условия» характеризуются не одной величиной, а двумя или более (например, высота полета и скорость цели). В ряде случаев варианты условий различаются не количественно, а качественно (например, «наличие помех» и «отсутствие помех»). Поэтому мы и будем называть рисунок типа 5.1 не «графиком», а «диаграммой» эффективности.

Если бы условия выполнения операции были строго определенными, вся матрица эффективности свелась бы к одному столбцу, а вся диаграмма эффективности — к одному вертикальному столбику. Задача выбора «оптимального решения» была бы очень проста: следовало бы предпочесть то решение, при котором показатель эффективности максимален.

Для разнообразных условий дело обстоит сложнее. Далеко не всегда один и тот же вариант решения оказывается самым эффективным во всем диапазоне условий. Гораздо чаще оказывается, что вариант решения, оптимальный для одних условий, не является оптимальным для других: в одних условиях преимуществами об-

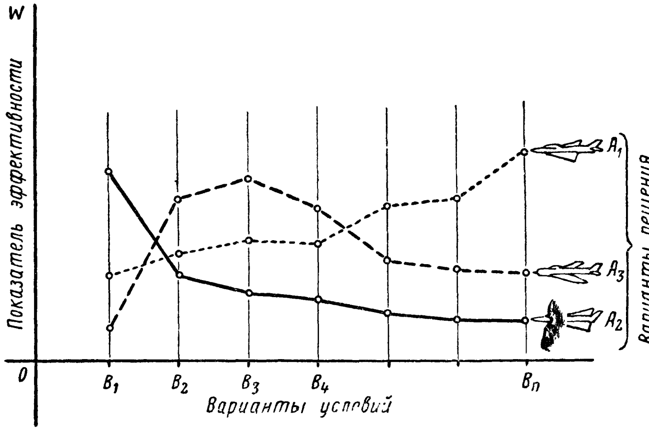


Рис. 5.1.

ладают одни варианты, в других — другие. Именно такой случай «переплетения» кривых показан на рис. 5.1.

Возникает типичная задача выбора компромиссного решения, т. е. такого, которое, не будучи, может быть, строго оптимальным ни для одних условий, обладает приемлемой эффективностью в целом диапазоне условий.

Разумный выбор компромиссного решения — одна из тонких и сложных задач исследования операций.

Часто приходится встречаться с таким рассуждением: поскольку условия выполнения операции B_1, B_2, ..., B_n заранее неизвестны (случайны), то нужно задать вероятности этих условий: p_1, p_2, ..., p_n и «осреднить» показатель эффективности с учетом этих вероятностей. Тогда для каждого варианта решения A_i мы получим только один осредненный показатель эффективности

$$W_i = p_1 W_{i1} + p_2 W_{i2} + \ldots + p_n W_{in} \tag{5.1}$$

и предпочтение отдадим тому варианту, для которого этот показатель максимален.

Несмотря на видимую убедительность такого рассуждения, его никак нельзя рекомендовать.

Во-первых, совершенно неясно, откуда взять «вероятности условий» $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Очевидно, что их нельзя почерпнуть из опыта прошлой войны: за период между двумя войнами техника и тактика меняются слишком резко. Нельзя почерпнуть их и из опыта тактических учений и испытаний образцов военной техники в мирное время: каждое из этих мероприятий организуется по определенному плану, и любые «вероятности условий», взятые по их материалам, отражали бы главным образом план организации этих мероприятий, а не реальную тактическую обстановку военного времени. Таким образом, получение «вероятностей условий» из опыта в мирное время практически исключено; остается задать их более или менее произвольно из умозрительных соображений, например, предположить одинаковыми:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}.$$

Но, очевидно, тогда и «оптимальное» решение, полученное на основе произвольно заданных вероятностей, будет в такой же мере произвольным.

Однако главное возражение против пользования «вероятностями условий» не в этом. Оно состоит в том, что сами вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (какими бы способами мы их ни определяли) не могут рассматриваться как не зависящие от принятого решения: *они неизбежно меняются в ответ на это решение.*

Действительно, допустим, что мы выбрали некоторое решение A_i. Оно обладает неодинаковой эффективностью в разных условиях. Очевидно, если выбор условий зависит от нас, мы будем стремиться к тому, чтобы *обеспечить себе именно те условия, в которых наш вариант наиболее эффективен.* Однако существует ряд условий, которые от нас не зависят и находятся в распоряжении противника (например, высота его полета, тип применяемых помех и т. п.). Очевидно, в той мере, как это от него зависит, противник будет стремиться к тому, чтобы *навязать нам именно те условия, которые для нас наименее выгодны.*

В любом случае «вероятности условий» $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (если они даже существовали и были устойчивы до принятого нами решения) неизбежно изменятся в ответ на это решение.

Приведем пример. Сравниваются три варианта зенитных управляемых ракет: A_1, A_2, A_3. Предположим, для простоты, что противник может летать только на трех высотах: малых (H_1), средних (H_2) и больших (H_3). Допустим, что мы подсчитали вероятность поражения цели W для каждой комбинации «вариант—условия» и построили матрицу эффективности:

Варианты решения	Варианты условий		
	H_1	H_2	H_3
A_1	0,1	0,7	0,9
A_2	0,6	0,5	0,4
A_3	0,8	0,6	0,2

и диаграмму эффективности (рис. 5.2).

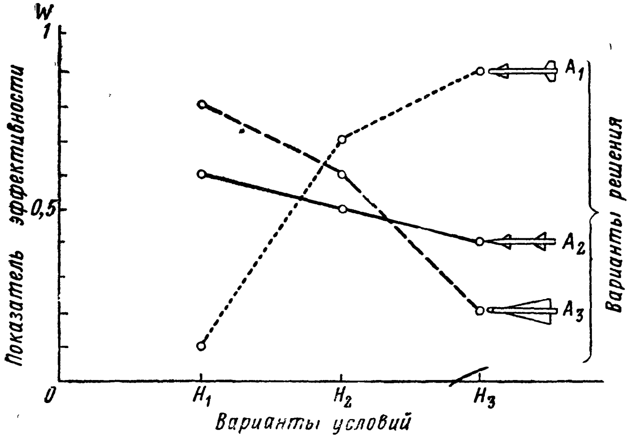


Рис. 5.2.

Попробуем «осреднить по условиям» показатель эффективности. Вероятности p_1, p_2, p_3 нам неизвестны, и данных для их вычисления нет; остается предположить их равными:

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1/3.$$

Осредним показатели эффективности по строкам согласно формуле 5.1:

$$W_1 = 0{,}1 \cdot 1/3 + 0{,}7 \cdot 1/3 + 0{,}9 \cdot 1/3 \approx 0{,}567;$$
$$W_2 = 0{,}6 \cdot 1/3 + 0{,}5 \cdot 1/3 + 0{,}4 \cdot 1/3 \approx 0{,}500;$$
$$W_3 = 0{,}8 \cdot 1/3 + 0{,}6 \cdot 1/3 + 0{,}2 \cdot 1/3 \approx 0{,}533.$$

В среднем наиболее эффективным оказался вариант A_1; казалось бы, его и следует выбрать.

Однако посмотрим, что будет, если мы примем этот вариант на вооружение. Очевидно, весьма скоро противнику станет известно, что наше вооружение неэффективно на малых высотах, и он начнет летать предпочтительно на них; тогда эффективность нашего «лучшего» варианта A_1 упадет до 0,1.

Этот намеренно упрощенный пример приведен здесь для того, чтобы продемонстрировать наличие обратной связи между вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и принятым вариантом решения. Прием «осреднения показателя эффективности по условиям» оказывается явно несостоятельным, так как вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n$, на которых основывается решение, меняются сами в ответ на это решение. Гораздо целесообразнее, не осредняя показателей эффективности, проанализировать сильные и слабые стороны каждого решения и выбрать то из них, которое не оставляет «лазеек» для противника.

В нашем конкретном примере (рис. 5.2), очевидно, таким «наименее уязвимым» является решение A_2: оно на всех высотах обеспечивает примерно одинаковую эффективность и наименее чувствительно к тактическим уловкам противника.

Таким образом, мы приходим к выводу:

П р и в ы б о р е к о м п р о м и с с н о г о р е ш е н и я в д и а п а з о н е у с л о в и й ц е л е с о о б р а з н о н е о с р е д н я т ь п о к а з а т е л и э ф ф е к т и в н о с т и п о у с л о в и я м, а а н а л и з и р о в а т ь ц е л и к о м в с ю м а т р и ц у э ф ф е к т и в н о с т и. Р а з у м н о е к о м п р о м и с с н о е р е ш е н и е в ы р а б а т ы в а е т с я с у ч е т о м с и л ь н ы х и с л а б ы х с т о р о н к а ж д о г о р е ш е н и я, а т а к ж е с у ч е т о м с о з н а т е л ь н о г о п р о т и в о д е й с т в и я р а з у м н о г о п р о т и в н и к а.

Более подробно вопрос о количественном учете сознательного противодействия противника будет рассмотрен в главе 12, где излагаются элементы т е о р и и и г р. Это — математическая наука, специально посвященная методам выбора рациональных решений в так называемых «конфликтных ситуациях», где сталкиваются интересы сторон, преследующих противоположные цели.

Отметим одно обстоятельство. Выше мы отвергли, как неправильный, прием осреднения показателей эффективности «по условиям» и пользование «вероятностями условий» $p_1, p_2, \ldots$ Нужно оговориться, что это относится в основном к тем задачам исследования операций, которые решаются з а р а н е е, в мирное время, и намечаются к реализации в неопределенном будущем. Нельзя отрицать, что в ходе самой войны на некоторых ее этапах могут устанавливаться и временно стабилизироваться некоторые тактические приемы. Если такие «привычки» противника будут подмечены, то вполне возможно плодотворное применение обнаруженных закономерностей для выбора «тактических» решений (рациональных способов боевого применения уже имеющегося вооружения). Что касается «технических» решений, то здесь подобные методы мало перспективны, так как время, потребное на отработку нового образца военной техники и его освоение, обычно значительно больше, чем те короткие промежутки времени, на которых может наблюдаться временная и относительная стабилизация тактических приемов.

В заключение отметим еще одно обстоятельство. При приведении в исполнение намеченного «тактического решения» может оказаться, что условия выполнения операции становятся известными непосредственно перед самой операцией, и можно сформировать решение с учетом этих условий. Например, высота полета целей, их тип и численность становятся известными еще до обстрела целей средствами ПВО. С учетом этих данных должна решаться задача рационального распределения огневых средств по целям (задача целераспределения). Однако в связи со скоротечностью боя запас времени на обоснование и принятие решения резко ограничен. Только применение ЭЦВМ позволяет (пусть приблизительно) выбрать оптимальное решение для каждых конкретных условий. Такой прием, когда решение формируется на месте, в процессе самой боевой деятельности системы, является наиболее прогрессивным. В настоящее время все большее внимание уделяется разработке так называемых «самонастраивающихся» и «самоорганизующихся» систем управления, которые изменяют свои параметры в зависимости от конкретных условий, в которых им приходится действовать.

§ 6. СПЕЦИФИКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ. ДИСЦИПЛИНИРУЮЩЕЕ УСЛОВИЕ

Любая задача исследования операций, в сущности, сводится к задаче: как рационально использовать имеющиеся ресурсы. В каждой из них в явном или скрытом виде имеется некоторое «дисциплинирующее условие» (или ряд таких условий), налагающее ограничения на круг решений, из которых может быть выбрано рациональное. Формулировка этого условия обычно и делает задачу определенной. Если такого условия нет, задача исследования операций становится «не поставленной» и теряет смысл.

Нельзя, например, решить задачу: каковы должны быть параметры осколочного снаряда для того, чтобы вероятность поражения цели была максимальной. Без дисциплинирующего условия эта задача не имеет решения, вернее, решение ее тривиально. Совершенно ясно, что чем больше будет вес снаряда, количество осколков, их скорости и веса, тем более эффективным будет снаряд. Другое дело, если задача решается при заданном весе снаряда: она сразу приобретает смысл. Обнаруживается, что одновременное увеличение всех параметров, благоприятно влияющих на эффективность, невозможно. Увеличивая один из них, мы неизбежно уменьшаем другие. Например, увеличивая начальную скорость осколков за счет повышения коэффициента наполнения, мы тем самым уменьшаем общий вес металла, идущий на образование осколков; увеличивая вес отдельного осколка, уменьшаем общее их число; увеличивая угол раствора конуса разлета осколков, уменьшаем плотность потока осколков, попадающих в цель, и т. д. Наличие дисциплинирующего условия — заданного веса снаряда — сразу сделало поставленную задачу осмысленной и выявило противоречивые соотношения входящих в нее факторов. Такая ситуация «выигрывая в одном — теряем в другом» весьма специфична для задач исследования операций. Математические методы исследования операций дают возможность «взвесить» преимущества и недостатки каждого из возможных решений и найти среди них наиболее рациональное или «приемлемое».

Роль дисциплинирующего условия могут играть самые различные заранее заданные параметры, например:

— общий вес, отводимый на вооружение самолета;

— общий вес, отводимый на вооружение и радиооборудование самолета, вместе с источниками помех;

— количество снарядов (или вообще боевых средств), с помощью которых должна быть решена боевая задача;

— габариты технического устройства;

— общая стоимость технических и прочих средств, которыми можно распоряжаться,

и т. п.

Если в поставленной задаче исследования операций отсутствует в явном виде дисциплинирующее условие, всегда следует отыскать его и сформулировать.

Весьма типичной задачей исследования операций является задача сравнительной оценки различных вариантов решения. При построении расчетной модели для такой сравнительной оценки всегда нужно учесть дисциплинирующее условие, т. е. поставить сравниваемые варианты в каком-то смысле в одинаковые условия.

Например, при сравнительной оценке различных вариантов вооружения истребителя обычно стараются, чтобы сравниваемые варианты укладывались в примерно один и тот же общий вес и примерно одинаково влияли на летно-тактические данные самолета. При решении задачи церасапределения дисциплинирующим условием является обычно наличный запас боевых средств.

В некоторых задачах исследования операций роль дисциплинирующего условия может играть заданный показатель эффективности.

Пусть, например, требуется рассчитать наряд средств, необходимый для того, чтобы причинить противнику заданный средний ущерб y. В такой задаче заданная величина y играет роль дисциплинирующего условия. Если же требуется сравнить между собой несколько вариантов организации операции, приводящих к заданному среднему ущербу y, то необходимо ввести критерий сравнения, например наряд средств, необходимый для получения заданного среднего ущерба (чем меньше наряд средств, тем лучше), или общая стоимость, затрачиваемая на выполнение операции (чем она меньше, тем лучше). В таких задачах показатель эффективности и дисциплинирующее условие как бы меняются местами. В ряде случаев такая постановка задачи оказывается более удобной.

Часто бывает, что одну и ту же задачу исследования операций можно решать по-разному, с различным распределением ролей между дисциплинирующими условиями и показателями эффективности.

Например, можно задаться в качестве дисциплинирующего условия общей стоимостью, отведенной на выполнение мероприятия, и искать такой вариант решения, при котором наносимый противнику средний ущерб будет максимальным. При такой постановке з а д а н н а я с т о и м о с т ь будет дисциплинирующим условием, а с р е д н и й ущерб — показателем эффективности. Можно поставить задачу и наоборот: искать то решение, при котором заданный средний ущерб достигается с минимальными затратами, тогда дисциплинирующим условием будет з а д а н н ы й с р е д н и й у щ е р б, а затраченная с т о и м о с т ь превращается в критерий сравнения или своеобразный показатель эффективности, который требуется обратить в минимум. Та или другая постановка выбирается в зависимости от специфики решаемой задачи и удобства расчетной схемы. Как правило, от такой перемены местами дисциплинирующего условия и показателя эффективности сравнительная ценность вариантов решения не меняется. В редких случаях, когда это оказывается не так (выводы зависят от схемы сравнения), полезно сравнить между собой рекомендации по той и другой схеме и выбрать компромиссное решение, приемлемое как с одной, так и с другой точки зрения.

§ 7. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПО НЕСКОЛЬКИМ КРИТЕРИЯМ

Помимо основного критерия — показателя эффективности, отражающего степень приспособленности операции к решению поставленной перед ней задачи, часто при исследовании операции приходится учитывать еще ряд вспомогательных, «подсобных» критериев.

Рассмотрим, например, операцию, состоящую в бомбометании по площадной цели. Задача бомбометания — нанести цели возможно больший ущерб, т. е. поразить возможно большую площадь. Согласно общим принципам, изложенным в § 3, в качестве показателя эффективности нужно выбрать среднее значение (математическое ожидание) пораженной площади цели:

$$W = M[S_п].$$

Однако при анализе операции помимо этого главного критерия целесообразно рассмотреть еще ряд других. Например, существенный интерес может представлять оценка о ж и д а е м ы х п о т е р ь бомбардировщиков в результате действий ПВО. Этот критерий — среднее число пораженных бомбардировщиков — не является в данном случае основным (так как цель операции — не сохранение возможно большего числа собственных самолетов, а нанесение возможно большего ущерба противнику), но все же должен приниматься во внимание и по возможности должен быть сделан минимальным. Если, например, сравниваются два решения, почти одинаковых по эффективности, из которых одно приводит к меньшим, а другое — к большим потерям, предпочтение, естественно, должно быть отдано первому.

Так обстоит дело почти во всех задачах исследования операций. Обычно приходится наряду с *основным критерием* — показателем эффективности принимать во внимание целый ряд *вспомогательных*. Такими вспомогательными критериями могут быть, например:

— время выполнения операции;

— стоимость затраченных средств;

— количество обслуживающего персонала;

— средняя глубина проникания противника на обороняемую территорию

и т. п.

Более или менее сложные задачи исследования операций всегда решаются не по одному-единственному критерию, а на основе комплексного учета *целой совокупности* критериев. Любое принимаемое решение всегда представляет собой *компромисс*, в котором предпочтение отдается тому варианту, который, не являясь, может быть, оптимальным ни по одному критерию, оказывается *приемлемым* по ряду критериев. О компромиссном характере решения мы уже говорили в связи с оценкой эффективности в диапазоне условий; здесь этот компромисс еще углубляется, так как приходится удовлетворять требованиям не одного, а ряда критериев. На практике задача выбора решения почти никогда не сводится к простой математической задаче отыскания максимума (или минимума) одного числа, а есть задача несравненно более сложная. Исследование операций может только *подготовить количественные данные*, на основе которых может быть принято разумное компромиссное решение. Однако весь процесс принятия решения (по крайней мере, в настоящее время) не может быть полностью формализован: на некотором этапе всегда должно быть принято «волевое» или «командирское» решение, основанное не только на количественных данных, но и на опыте, здравом смысле и ряде дополнительных соображений, которые не могли быть учтены в расчетной схеме. С этой точки зрения исследование операций может рассматриваться не как наука о выборе решений, а как наука о количественном обосновании решений. Исследование операций обычно не дает окончательных рекомендаций по выбору решения, но предоставляет в распоряжение командира (или вообще лица, уполномоченного принять окончательное решение) ряд численных данных, характеризующих возможные варианты решения с разных сторон. При выборе системы критериев нужно стремиться к тому, чтобы они отчетливо характеризовали явление с его самых существенных сторон. Число таких критериев не должно быть слишком большим, иначе в результатах расчета будет трудно разобраться.

Ввиду того что комплексная оценка по нескольким критериям трудна, на практике часто наблюдаются попытки объединить несколько критериев в один. Часто в качестве такого «обобщенного» критерия предлагают некоторую дробь, в числителе которой стоят те величины, увеличение которых желательно, а в знаменателе — те, увеличение которых нежелательно. Например, потери противника — в числителе, собственные потери и стоимость — в знаменателе.

Главным пороком таких «составных» критериев является то, что здесь в принципе недостаток в одном критерии может быть скомпенсирован за счет другого; скажем, недостаточная вероятность поражения цели — за счет очень низкой стоимости вооружения. Критерии подобного рода напоминают в шутку предложенный Львом Толстым «критерий для оценки человека», в виде дроби, где в числителе стоят действительные достоинства человека, а в знаменателе — его мнение о себе. Несостоятельность такого критерия очевидна, так как по нему человек, почти не имеющий достоинств, но совсем не обладающий самомнением, будет иметь бесконечно большую ценность. К аналогичным парадоксальным выводам может привести и пользование «составными критериями» при выборе решений.

Теми же недостатками, что и критерий «в виде дроби», страдают и другие составные критерии, которые часто строятся в виде суммы различных критериев с положительными или отрицательными коэффициентами («весами»). Самому важному критерию приписывается наибольший «вес», а тем критериям, увеличение которых нежелательно, — отрицательные «веса». Нетрудно убедиться, что составной критерий «в виде суммы» представляет собой модификацию составного критерия «в виде дроби», если в последнем различные критерии возвести в произвольно выбранные степени, соответствующие «важности» критериев, а затем прологарифмировать дробь. Поэтому оба типа «составных» критериев обладают одними и теми же недостатками и для практического применения их рекомендовать нельзя.

В некоторых случаях задачу с несколькими критериями удается свести к задаче с одним, если стремиться обращать в максимум (минимум) только один главный критерий W — показатель эффективности операции, а на остальные, вспомогательные критерии K_1, K_2, ... наложить только некоторые о г р а н и ч и т е л ь н ы е у с л о в и я.

Например, при анализе бомбардировочного налета можно потребовать, чтобы нанесенный противнику средний ущерб был максимален, но при этом собственные потери и стоимость не выходили за известные пределы. При такой постановке задачи все критерии, кроме одного — главного, по существу превращаются в дисциплинирующие условия. Варианты, не укладывающиеся в заданные границы, немедленно отбрасываются как «неконкурентоспособные». Полученные рекомендации, очевидно, будут зависеть от того, каковы выбранные ограничительные условия для вспомогательных критериев. Чтобы определить, насколько это влияет на окончательные рекомендации, полезно проварьировать ограничения в разумных пределах.

Наконец, возможен еще один путь построения компромиссного решения, который можно назвать «методом последовательных уступок».

Предположим, что критерии расположены в порядке убывающей важности; сначала основной критерий, или показатель эффективности W, затем другие, второстепенные: K_1, K_2, ... Для простоты будем считать, что каждый из них нужно обратить в максимум (очевидно, если критерий требуется обратить не в максимум, а в минимум, достаточно изменить его знак). Процедура нахождения компромиссного решения сводится к следующему. Сначала ищется решение, обращающее в максимум показатель эффективности W. Затем назначается, более или менее произвольно, «уступка» ΔW в этом показателе, которую мы согласны допустить, чтобы обратить в максимум следующий критерий (например, мы согласны вместо 80% пораженной площади цели иметь 78%, если этой ценой можно обратить в максимум число бомбардировщиков, благополучно возвращающихся на свою базу). Налагаем на показатель эффективности W условие, чтобы он был не меньше $W_{\text{макс}} - \Delta W$, и при этом ограничительном условии находим решение, обращающее в максимум критерий K_1. Снова назначаем «уступку» ΔK_1 в критерии K_1, за счет чего обращаем в максимум следующий критерий K_2, и т. д.

Такой способ последовательного построения компромиссного решения удобен тем, что при нем мы всегда видим, ценой какой «уступки» в одном критерии приобретается выигрыш в другом.

Отметим, что свобода выбора решения, приобретаемая ценой даже незначительных «уступок», может оказаться существенной, так как в районе максимума обычно эффективность решения меняется очень слабо.

* * *

В предыдущих параграфах мы рассмотрели целый ряд вопросов, связанных с методикой обоснования и выбора тактических и технических решений, которые с той или иной точки зрения являются предпочтительными по сравнению с другими. Количественный анализ сильных и слабых сторон каждого решения всегда производится на основе каких-то численных данных — показателей эффективности или других критериев.

Поэтому прежде всего надо научиться вычислять эти характеристики. Ряд последующих глав (2—7) будет посвящен способам вычисления различного рода показателей эффективности и других численных характеристик операций. Однако предварительно мы познакомим читателя с некоторыми понятиями и терминологией, принятой в теории стрельбы.

§ 8. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СТРЕЛЬБЫ

Составной частью любой операции в области военных действий обычно является стрельба, т. е. активное воздействие теми или другими средствами поражения по объектам противника. Под «стрельбой» в широком смысле слова мы будем понимать как собственно стрельбу (снарядами, самолетами-снарядами, ракетами), так и бомбометание любыми видами бомб. Снаряды (бомбы) могут быть как управляемыми, так и неуправляемыми. Задачей стрельбы может быть как нанесение ущерба противнику (стрельба средствами нападения), так и защита объекта или территории (стрельба средствами обороны).

Очевидно, любая стрельба является «операцией» в том широком смысле, который мы условились придавать этому понятию в § 1.

Теория стрельбы — специальная наука, занимающаяся оценкой эффективности всевозможных видов стрельбы по различным целям. Так как стрельба представляет собой частный вид операции, то и теория стрельбы представляет собой составную часть исследования операций. Теория стрельбы начала развиваться уже сравнительно давно, и в настоящее время это наиболее разработанная часть исследования операций.

Лучше всего разработаны методы оценки эффективности стрельбы при отсутствии противодействия, где одна сторона играет активную, а другая — чисто пассивную роль. Задачи оценки эффективности стрельбы с учетом противодействия (или, как их иногда называют, задачи «динамики боя») более сложны. Они представляют собой переходную ступень от классической теории стрельбы к современным методам исследования военных действий, где производится оценка различных способов организации боевой деятельности войск с целью выявления оптимальных способов управления. Это задачи так называемой «военной кибернетики».

Задачи теории стрельбы бывают двух типов:

— прямые — оценка эффективности стрельбы в заданных условиях и

— обратные — отыскание условий, в которых обеспечивается заданная (или максимально возможная) эффективность стрельбы.

Чтобы уметь решать обратные задачи, нужно прежде всего научиться решать прямые. В ряде последующих глав будут изложены различные методы расчета показателей эффективности для заданных условий стрельбы.

§ 9. КЛАССИФИКАЦИЯ ЦЕЛЕЙ. ТИПИЧНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Стрельба может производиться по целям различного типа и преследовать разные задачи. Среди многообразия возможных целей (и задач стрельбы по ним) можно выделить несколько типичных разновидностей.

1. Одиночная цель

Одиночной целью называется отдельный, обычно малоразмерный, объект (самолет, корабль, танк) (рис. 9.1), выполняющий

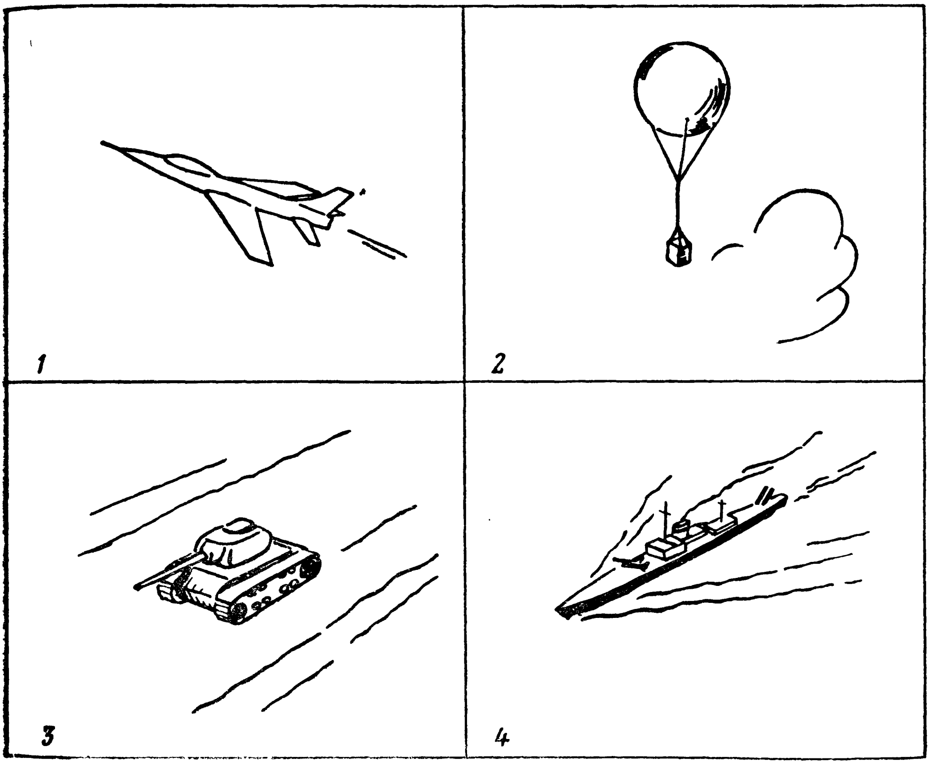


Рис. 9.1. Одиночные цели:
1 — самолет; *2* — аэростат с подвеской; *3* — танк; *4* — корабль.

вполне определенные функции. Задача стрельбы — вывести этот объект из строя, т. е. лишить его возможности выполнять свои функции.

Условимся событие, состоящее в том, что объект перестал выполнять свои функции (вышел из строя), обозначать общим термином «поражение цели».

Так как стрельба по одиночной цели ведется для достижения вполне определенного результата — поражения цели (схема «да—нет»), то в качестве показателя эффективности можно выбрать вероятность поражения цели:

$$W = P(A), \tag{9.1}$$

где A — поражение цели.

Понятие «поражение цели» может иметь различный смысл в зависимости от тактической обстановки. Например, при стрельбе по самолету «поражение» может означать:

— немедленное сбитие;

— невозможность лететь в строю;

— отказ от выполнения боевого задания

и т. п.

Вопрос о том, какое из этих понятий поражения положить в основу оценки эффективности и как его конкретизировать, зависит от тактической обстановки.

Пусть, например, бомбардировщик обстреливается на большом расстоянии от объекта; цель стрельбы — помешать ему выполнить свою боевую задачу. При этих условиях повреждения топливной системы, вызывающие интенсивную течь горючего, будут «поражающими»: самолет не достигнет объекта из-за нехватки горючего. Те же самые повреждения окажутся «непоражающими», если бомбардировщик обстреливается в непосредственной близости от объекта. В этом случае в понятие «поражение» приходится вкладывать смысл «немедленное сбитие».

2. Групповая цель

Групповой целью (рис. 9.2) называется группа одиночных целей (строй самолетов, колонна танков, походный ордер кораблей и т. п.). Задача стрельбы по групповой цели — нанести ущерб группе как единому целому и тем самым помешать ей выполнять свою коллективную функцию. Например, воспрепятствовать группе самолетов осуществить налет на обороняемый объект или группе подводных лодок прорваться в какой-то район морского театра военных действий и т. д.

Чаще всего задача стрельбы по групповой цели состоит в том, чтобы поразить возможно большее число единиц в ее составе («чем больше, тем лучше»).

В этом случае в качестве показателя эффективности берется среднее число пораженных единиц (или математическое ожидание числа пораженных единиц):

$$M_п = M[X_п], \tag{9.2}$$

где случайная величина $X_п$ — число пораженных единиц в составе группы.

Вместо $M_п$ в качестве показателя эффективности можно пользоваться **средней долей** пораженных единиц:

$$\mu_п = \frac{M_п}{N}, \tag{9.3}$$

где N — общее число единиц в группе.

В некоторых случаях перед стрельбой по групповой цели ставится более определенная задача, например поразить **все без**

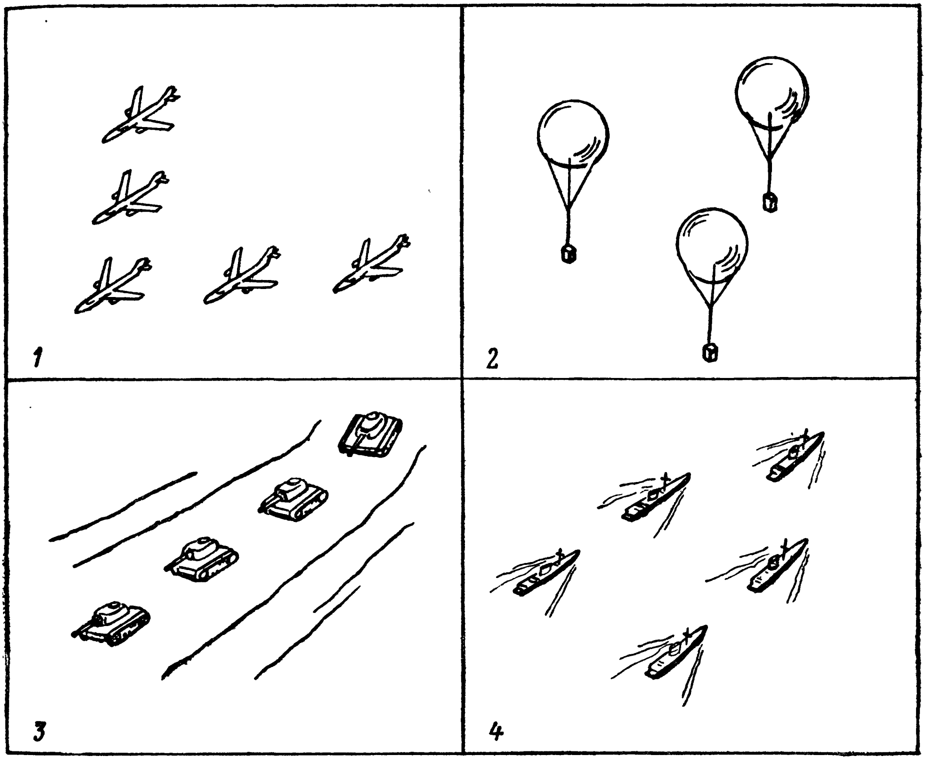


Рис. 9.2. Групповые цели:
1 — строй самолетов; *2* — группа аэростатов; *3* — колонна танков; *4* — ордер кораблей.

исключения единицы в составе группы или поразить **не менее заданной доли** всех единиц. Тогда показателем эффективности стрельбы по групповой цели будет вероятность выполнения поставленной задачи A:

$$W = P(A). \tag{9.4}$$

Например, если стрельба ведется с целью защиты от группы налетающих средств поражения (самолетов или крылатых ракет) определенного объекта большой важности, задачей стрельбы может быть поражение всех N целей в составе групп и тогда

$$W = P_N, \tag{9.5}$$

где P_N — вероятность того, что будут поражены все единицы в составе групповой цели.

Если огневые средства расположены на двух рубежах и возможности второго рубежа ограничены, то задачей первого рубежа может быть поражение не менее k целей из N налетающих, а показатель эффективности будет

$$W = R_k, \tag{9.6}$$

где R_k — вероятность поражения не менее k единиц в составе групповой цели.

Часто приходится оценивать эффективность стрельбы по групповой цели не по одному, а сразу по нескольким критериям, чтобы оценить степень приспособленности данного вида стрельбы для решения различных тактических задач.

3. Площадная цель

Под «площадной целью» (рис. 9.3) разумеется совокупность различных объектов (например, живая сила, техника, сооружения и т. д.), рассредоточенных не вполне известным образом в пределах какой-то площади. Примерами могут служить:

— скопления войск;
— полосы оборонительных сооружений;
— населенные пункты;
— промышленные районы;
— военно-морские базы

и т. п.

Характерным для площадной цели является то, что стрельба ведется не по отдельным объектам, а по всей площади цели как таковой. Объекты чаще всего разнородны, выполняют различные функции и плохо приводятся к одному эквиваленту. Естественной мерой ущерба, нанесенного такой цели, является *средняя площадь*, на которой причинены заданного вида разрушения (например, сильные, средние). Если вид и качество разрушений заданы, то можно называть площадь, на которой эти разрушения достигнуты, *пораженной площадью цели*.

Стрельба по площадной цели, как и по групповой, может иметь различные задачи. Чаще всего ставится задача *поразить максимально возможную площадь* («чем больше, тем лучше»). В этом случае в качестве показателя эффективности берется *средняя пораженная площадь цели* или, что удобнее, *средняя пораженная доля площади*:

$$M = M[U], \tag{9.7}$$

где $U = \frac{S_{\text{пор}}}{S_{\text{ц}}}$ — отношение пораженной площади к полной площади цели.

Перед стрельбой по площадной цели может быть поставлена и более определенная задача: поразить не менее заданной доли площади цели. Тогда показателем эффективности будет

$$R_u = P(U \geqslant u) \tag{9.8}$$

— вероятность того, что пораженная доля площади U будет не меньше, чем заданное значение u.

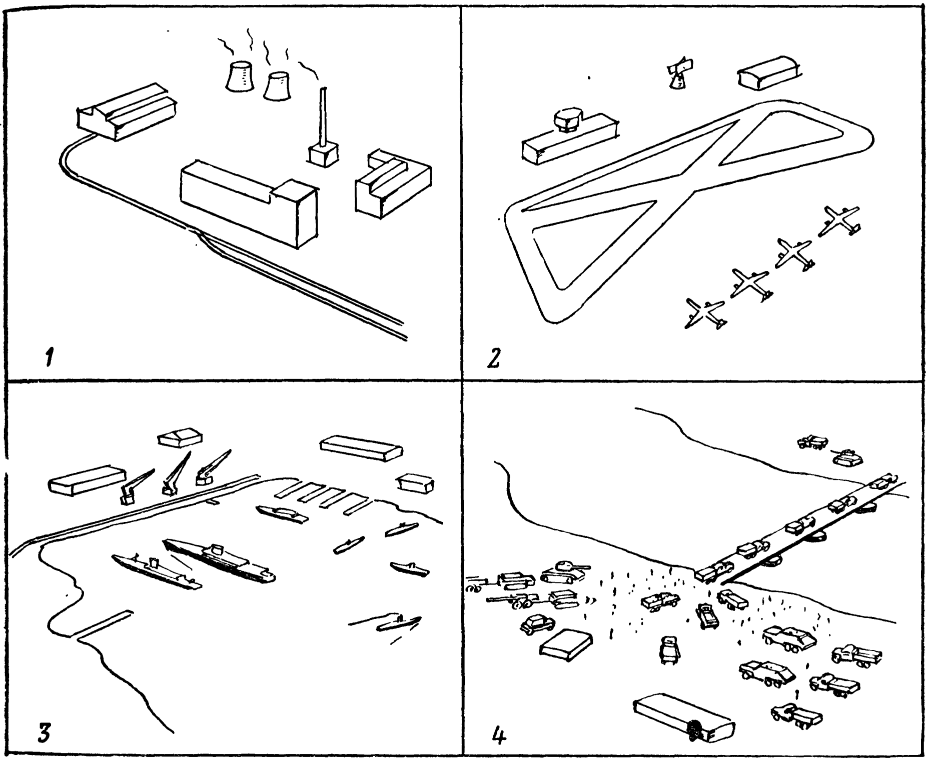


Рис. 9.3. Площадные цели:

1 — территория завода; *2* — аэродром; *3* — военно-морская база; *4* — сосредоточение войск в районе переправы.

Кроме основных типов целей — одиночной, групповой и площадной — в теории стрельбы приходится встречаться с более сложными разновидностями. Например, цель может представлять собой управляемый снаряд, попадание в который приводит иногда к полному уничтожению снаряда, а иногда только к увеличению его рассеивания. Группа одиночных целей может состоять не из однородных, а из разнородных единиц. Наконец, площадная цель (скажем, система промышленных предприятий) может быть «функционирующей», и тогда ущерб, нанесенный этой цели, будет измеряться не пораженной площадью, а снижением интенсивности функционирования. Каждый из таких более сложных случаев приходится рассматривать отдельно и выбирать для него показатель эффективности в зависимости от тактической задачи стрельбы.

§ 10. КЛАССИФИКАЦИЯ СНАРЯДОВ

Расчетные методы оценки эффективности стрельбы зависят от типа снаряда[1]. Мы будем делить снаряды на два класса: у д а р н ы е и д и с т а н ц и о н н ы е (или неконтактные) (рис. 10.1).

Ударные снаряды могут поражать цель только при непосредственном попадании в нее. Дистанционные снаряды могут поражать цель не только при прямом попадании, но и при разрыве на расстоянии. Дистанционный снаряд рассчитан именно на то, чтобы поражать цель при разрыве на расстоянии (отсюда и термин «дистанционный»); в случае прямого попадания, как правило, разрушительная мощь дистанционного снаряда избыточна.

При разрыве на расстоянии дистанционные снаряды могут поражать цель двумя способами:

— за счет непосредственного действия по конструкции цели ударной волны, продуктов детонации и пр.;

— за счет действия по отдельным уязвимым агрегатам цели осколков (или другого типа поражающих элементов).

Дистанционные снаряды первого типа мы будем называть «снарядами непосредственного действия», а второго типа — «осколочными дистанционными снарядами».

Принятая здесь классификация снарядов на ударные и дистанционные не обязательно связана с типом взрывателя (ударный или дистанционный). Например, мощный фугасный снаряд, применяемый по наземной одиночной цели, может быть снаряжен ударным взрывателем и все же (по принципу действия на расстоянии) остается дистанционным.

Заметим, что различие между ударными и дистанционными снарядами не во всех случаях удается провести последовательно. Например, ударный осколочный снаряд, попавший в самолет, может поражать осколками агрегаты, удаленные от точки попадания, и по отношению к этим агрегатам является «дистанционным». При стрельбе по площадной цели разделение снарядов на «ударные» и «дистанционные» вообще теряет смысл: один и тот же снаряд

---

[1] Под «снарядами» мы будем понимать как собственно снаряды, так и бомбы любых типов.

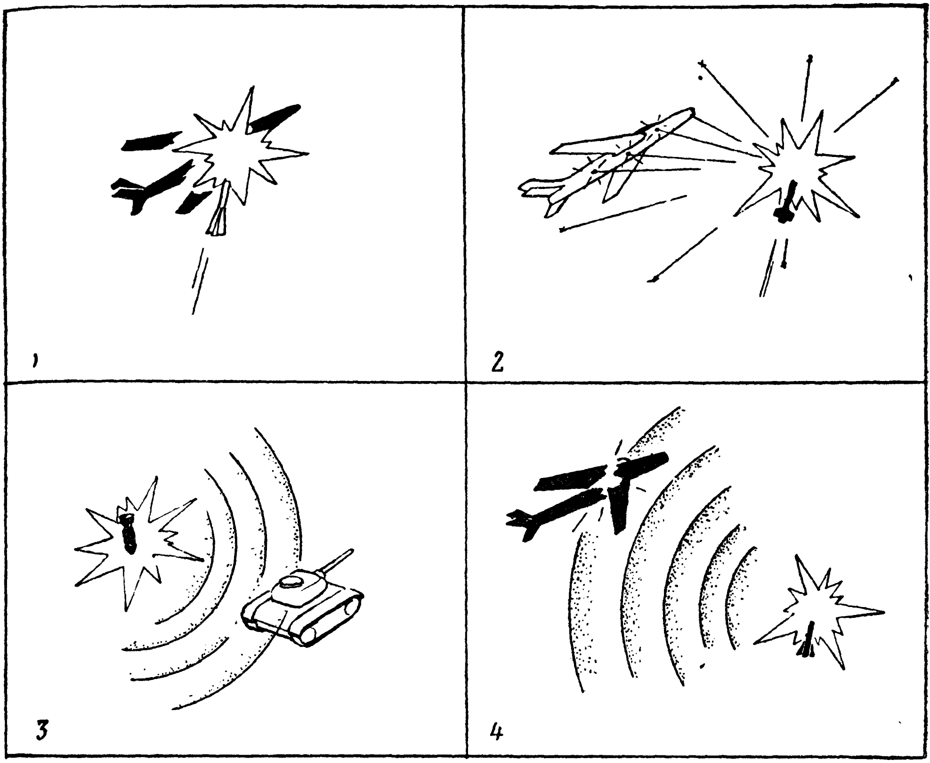


Рис. 10.1. Типы снарядов:
1 — ударного действия; *2* — дистанционный осколочного действия; *3, 4* — дистанционные непосредственного действия.

по различным объектам, расположенным на площади, может действовать то как «ударный», то как «дистанционный»; эффективность стрельбы по такой цели оценивается общим интегральным показателем — площадью разрушений.

ГЛАВА 2

РАССЕИВАНИЕ ПРИ СТРЕЛЬБЕ

§ 11. РАССЕИВАНИЕ И ЕГО ПРИЧИНЫ. ЗАКОН РАССЕИВАНИЯ

При любом виде стрельбы — как неуправляемыми, так и управляемыми снарядами — всегда наблюдается так называемое рассеивание.

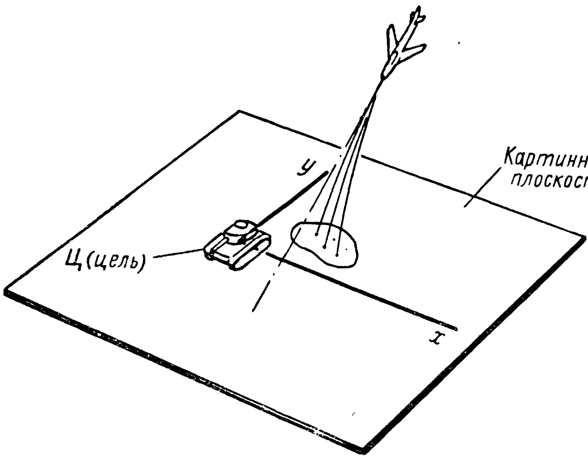


Рис. 11.1. Ударные снаряды (рассеивание на плоскости).

Рассеивание снарядов связано с различными ошибками, неизбежными при любой стрельбе. Причинами ошибок могут быть, например:

— неточное измерение координат цели, ее скорости и других параметров;

— неточности изготовления снаряда (производственные допуски);

— колебания установки, с которой ведется стрельба;

— маневрирование цели;

— метеорологические факторы

и т. д.

В результате совместного влияния всех этих причин фактическая траектория снаряда никогда не совпадает с расчетной, а точка попадания (или разрыва) снаряда неизбежно отклоняется от расчетной точки, куда был направлен снаряд. Это явление и называется «рассеиванием».

При стрельбе ударными снарядами случайное отклонение точки попадания от цели характеризуется двумя случайными величинами

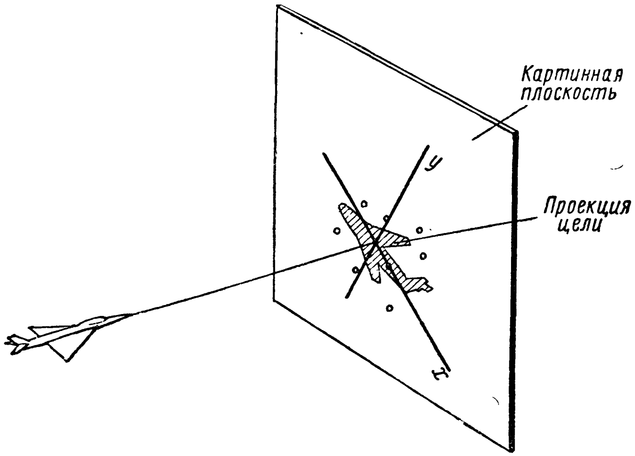


Рис. 11.2. Ударные снаряды (рассеивание на воображаемой плоскости).

(X, Y) — абсциссой и ординатой точки попадания. В этом случае мы говорим о «рассеивании на плоскости». Эта плоскость может быть реальной (рис. 11.1) или воображаемой (рис. 11.2).

Дистанционные снаряды бывают двух типов: с плоским и объемным рассеиванием. Первые снабжены ударным взрывателем,

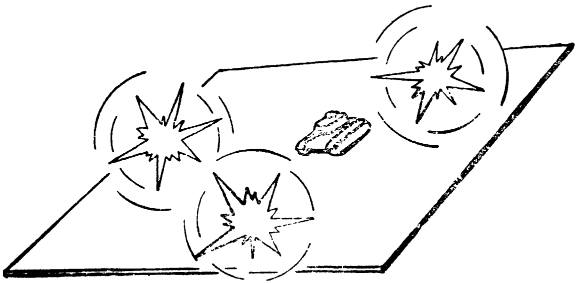


Рис. 11.3. Дистанционные снаряды (плоское рассеивание).

срабатывающим при ударе о какую-то плоскость (поверхность земли, моря) (рис. 11.3). Для дистанционных снарядов с объемным рассеиванием (рис. 11.4) (например, осколочных снарядов «воздух—воздух») точка разрыва снаряда характеризуется тремя случайными величинами (X, Y, Z).

Закон распределения случайных величин, характеризующих точку попадания (или разрыва) снаряда, называется **законом рассеивания**.

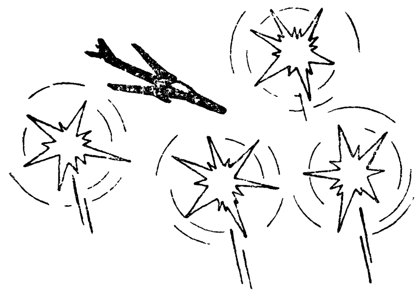


Рис. 11.4. Дистанционные снаряды (объемное рассеивание).

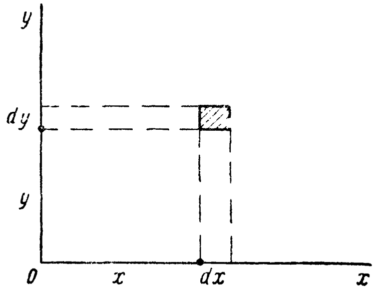


Рис. 11.5.

Для ударных снарядов (или дистанционных с плоским рассеиванием) закон рассеивания представляет собой закон распределения двух координат (X, Y) точки попадания. Обычно он задается **плотностью вероятности** $\varphi(x, y)$; величина $\varphi(x, y)\,dxdy$ представляет собой вероятность попадания снаряда в элементарную площадку $dxdy$, примыкающую к точке с координатами x, y (рис. 11.5). Аналогично для дистанционных снарядов с объемным рассеиванием закон рассеивания есть закон распределения трех координат точки разрыва (X, Y, Z) и характеризуется плотностью $\varphi(x, y, z)$, причем $\varphi(x, y, z)\,dxdydz$ есть вероятность разрыва снаряда в элементарном объеме $dxdydz$, примыкающем к точке (x, y, z) (рис. 11.6).

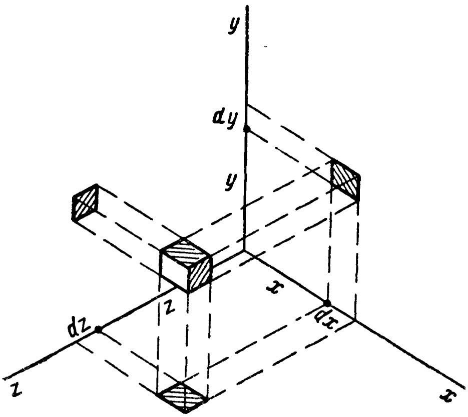


Рис. 11.6.

Если произвести в определенных условиях несколько выстрелов подряд, то рассеивание скажется в том, что точки попадания отдельных снарядов не будут совпадать между собой, а будут как-то разбросаны (отсюда и произошел термин «рассеивание»). При увеличении числа выстрелов в этом разбросе начинает сказываться определенная закономерность, т. е. фактическая густота расположения точек попадания будет отражать закон рассеивания — тем точнее, чем большее число выстрелов произведено.

§ 12. РАССЕИВАНИЕ НА ПЛОСКОСТИ. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ И СЛУЧАЙНЫЕ ОШИБКИ

Рассмотрим сначала случай плоского рассеивания, как более простой. Пусть производится стрельба ударными снарядами или дистанционными с плоским рассеиванием. Выберем прежде всего плоскость, на которой будет рассматриваться рассеивание точек попадания. Эту плоскость мы назовем **картинной плоскостью** или **плоскостью рассеивания**. При стрельбе по наземным или морским целям выбор картинной плоскости обычно подсказывается самой обстановкой: это поверхность земли (моря).

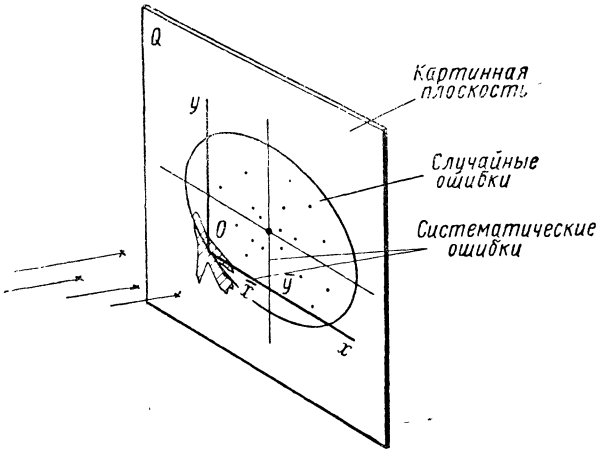


Рис. 12.1.

При стрельбе по воздушным целям картинная плоскость чаще всего проводится через упрежденную точку (точку встречи), обычно перпендикулярно упрежденной линии цели (или же вектору относительной скорости встречи снаряда с целью). Закон рассеивания, определенный для одной какой-то плоскости, всегда может быть пересчитан на другую.

Когда картинная плоскость Q зафиксирована, на ней выбирается прямоугольная система координат xoy (рис. 12.1). Направление координатных осей желательно выбрать так, чтобы они были параллельны (или почти параллельны) главным осям рассеивания. Ориентировочное направление главных осей рассеивания всегда можно определить, исходя из условий стрельбы, и соответственно с этим направить координатные оси. Например, при бомбометании по наземной неподвижной цели одну из осей выбирают по направлению полета бомбардировщика, другую — перпендикулярно ей. При артиллерийской стрельбе (или стрельбе ракетами) одну из осей выбирают по направлению стрельбы, другую — перпендикулярно. При стрельбе по быстро движущейся цели одну из осей выбирают по направлению движения цели. Например, в теории воздушной стрельбы обычно выбирают ось ox по линии пересечения картинной плоскости Q с плоскостью упредительного треугольника (рис. 12.2). При таком выборе координатных осей сильно упрощается вид закона рассеивания, так как координаты (X, Y) будут практически независимыми.

Закон рассеивания $\varphi(x, y)$ зависит от условий стрельбы (например, дальности, скорости цели, высоты полета, направления стрельбы и т. д.). Кроме того, он зависит от вида применяемых при стрельбе технических устройств (например, прицелы, системы управления или самонаведения). Если стрельба ведется с участием

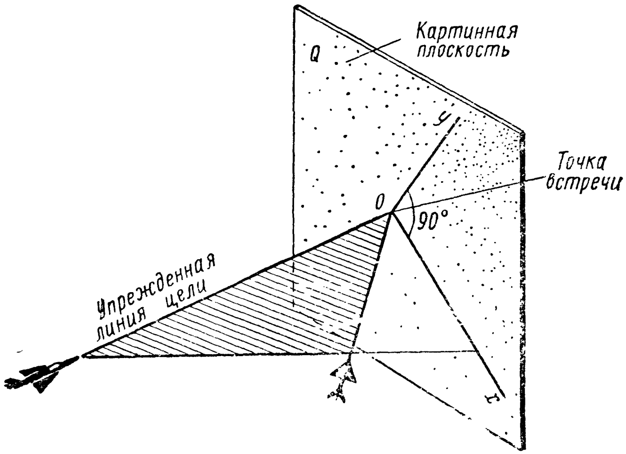


Рис. 12.2.

человека (оператора), закон рассеивания зависит от его квалификации.

В качестве закона рассеивания при всех видах стрельбы и бомбометания применяется, как правило, нормальный закон (или закон Гаусса). Это связано с тем, что ошибка стрельбы по каждой из осей может быть представлена как сумма большого числа элементарных ошибок, вызванных действием отдельных причин. В дальнейшем мы будем везде считать закон рассеивания нормальным.

Если координатные оси совпадают по направлению (хотя бы приближенно) с главными осями рассеивания, закон рассеивания можно записать в виде:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\overline{x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\overline{y})^2}{\sigma_y^2}\right]}, \qquad (12.1)$$

где $\overline{x}$, $\overline{y}$ — координаты центра рассеивания (средней точки попадания);

σ_x, σ_y — средние квадратические отклонения по осям ox, oy.

Если пользоваться не средними квадратическими, а вероятными (или «срединными») отклонениями

$$E_x = \rho\sqrt{2}\sigma_x, \quad E_y = \rho\sqrt{2}\sigma_y,$$

то закон рассеивания будет иметь вид:

$$\varphi(x, y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{E_x^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{E_y^2}\right]}, \tag{12.2}$$

где $\rho \approx 0{,}477$.

Координаты центра рассеивания $\bar{x}$, $\bar{y}$ называются **систематическими ошибками**. Если повторять выстрелы большое число раз в одинаковых условиях, то точки попадания будут группироваться вокруг средней точки с координатами $(\bar{x}, \bar{y})$ (рис. 12.1). Эту точку часто называют «центром группирования».

Случайные величины (X, Y) — координаты точки попадания — можно представить в виде суммы систематической ошибки и случайного отклонения от центра группирования:

$$\left.\begin{aligned} X &= \bar{x} + U \\ Y &= \bar{y} + V \end{aligned}\right\}. \tag{12.3}$$

Величины U, V в отличие от систематических ошибок называются **случайными ошибками**. При повторении выстрелов в одинаковых условиях систематические ошибки будут повторяться (сохранять свое значение); случайные будут меняться от выстрела к выстрелу, создавая рассеивание вокруг центра группирования.

Систематические ошибки возникают главным образом за счет всевозможных допущений и упрощений, принятых при решении задачи стрельбы (неучет высоты, ввод угла атаки самолета средним значением и т. п.). Систематические ошибки, возникающие в результате допущений и упрощений, иногда называют **методическими**.

Разделение ошибок на «систематические» и «случайные» не является безусловным, а зависит от того, какая группа условий фиксируется при определении рассеивания. Например, при стрельбе по самолету ошибка, связанная с маневром цели, является систематической, если привязаться к некоторому вполне определенному маневру и указать его в числе зафиксированных условий стрельбы. Та же ошибка будет случайной, если зафиксировать только среднее (прямолинейное) движение цели, а отклонение от него считать случайным.

Состав систематических и случайных ошибок зависит также от того, какие параметры измеряются, а какие учитываются средними значениями или совсем не учитываются. Неучет какого-либо параметра (например, высоты, угла атаки) приводит к систематической ошибке; если начать его измерять и учитывать, это уменьшает систематическую ошибку, но зато увеличивает случайную. Очевидно, такой учет имеет смысл только в случае, если систематическая ошибка была существенна. На практике обычно, если систематические ошибки малы (например, не превосходят половины вероятного отклонения), их считают допустимыми и не стремятся ликвидировать.

Параметры $\bar{x}$, $\bar{y}$ — систематические ошибки и E_x, E_y — вероятные отклонения случайных ошибок в своей совокупности называются характеристиками рассеивания.

§ 13. ЗАКОН РАССЕИВАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ ВЫСТРЕЛОВ. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ВЕДЕНИЯ СТРЕЛЬБЫ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели закон распределения $\varphi(x, y)$ двух координат X, Y точки попадания на плоскости рассеивания. Это закон рассеивания для одного выстрела. Если стрельба ведется одиночными выстрелами, то такого закона достаточно для описания ошибок стрельбы.

Однако на практике часто стрельба по одной и той же цели производится не одним, а группой снарядов — очередью, залпом, серией. Тогда приходится рассматривать закон рассеивания уже не для одного выстрела, а для целой группы. Если в группе n выстрелов, то закон рассеивания представляет собой закон распределения системы $2n$ случайных величин:

$$(X_1, \ Y_1; \ X_2, \ Y_2; \ \ldots; \ X_i, \ Y_i; \ \ldots; \ X_n, \ Y_n), \tag{13.1}$$

где X_i, Y_i — координаты точки попадания i-го выстрела ($i = 1, \ \ldots, \ n$).

Если выбрать координатные оси так, что они приблизительно параллельны главным осям рассеивания для каждого выстрела, то абсциссы X и ординаты Y всех точек попадания можно считать независимыми. Что касается одноименных координат (X_i и X_j, Y_i и Y_j), то в общем случае они будут зависимыми. Эта зависимость объясняется наличием случайных ошибок, одинаковых для различных выстрелов (так называемых «повторяющихся» случайных ошибок).

Пусть, например, измерение координат цели производится один раз перед всей стрельбой. Тогда ошибка, возникающая от неточности измерения этих координат, будет присуща всем выстрелам группы и будет создавать зависимость между ними. Если эта ошибка велика, то вся группа выстрелов отклонится далеко от цели; если она мала, вся группа выстрелов окажется близко от цели.

Другой пример повторяющейся случайной ошибки — ошибка определения момента сбрасывания серии бомб. Эта ошибка будет присуща всем бомбам серии и будет создавать зависимость между их точками попадания.

Характер зависимости выстрелов, а значит, и вид закона рассеивания зависят от **способа ведения стрельбы**: производятся ли выстрелы одновременно или последовательно; если последовательно, то с какими интервалами; измеряются ли входные параметры один раз перед всей стрельбой или заново перед каждым выстрелом; корректируется ли стрельба по результатам предыдущих выстрелов и т. д.

При бомбометании, например, применяются следующие способы ведения стрельбы:

— одиночное сбрасывание бомб;

— залповое сбрасывание бомб;

— серийное сбрасывание бомб;

— бомбометание группы самолетов по команде ведущего и т. д.

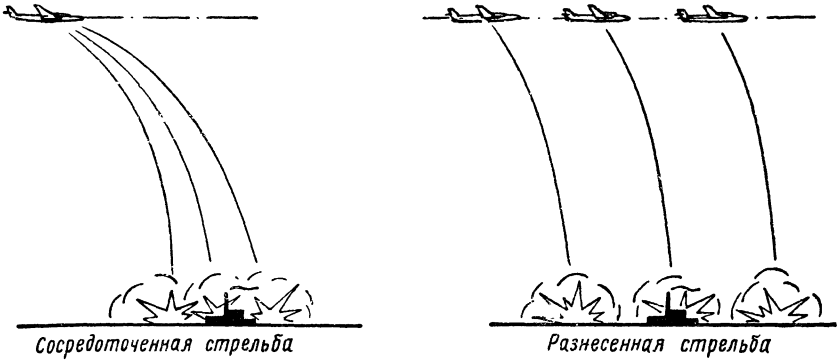


Рис. 13.1.

В воздушной стрельбе применяются следующие способы:

— одиночные выстрелы;

— залпы;

— очереди;

— залпы очередей;

— короткие и длинные серии

и т. п.

В зависимости от того, как располагаются на картинной плоскости теоретические точки попадания (центры рассеивания) отдельных снарядов, можно различать два вида стрельбы: **сосредоточенную** и **разнесенную** (рис. 13.1).

При сосредоточенной стрельбе все центры рассеивания совпадают (все снаряды направляются в одну точку, а различие точек попадания обусловлено только рассеиванием). Примерами могут служить:

— стрельба несколькими управляемыми снарядами «воздух—воздух» по одной цели;

— залповое бомбометание;

— сопроводительная стрельба из оружия очередью из авиационной пушки с самолета по самолету;

— стрельба несколькими зенитными управляемыми ракетами по воздушной цели

и т. п.

При разнесенной стрельбе теоретические точки попадания смещены друг относительно друга. Примерами могут служить:

— бомбометание серией;

— заградительная стрельба неуправляемыми снарядами с самолета по самолету;

— обстрел ракетами некоторой площади с равномерным распределением по ней точек прицеливания отдельных ракет

и т. п.

Разнесенная стрельба называется иногда «стрельбой с искусственным рассеиванием», так как здесь помимо естественного рассеивания снарядов присутствует еще и организованное, преднамеренное рассредоточение точек прицеливания.

Сосредоточенная стрельба применяется обычно в случаях, когда обстреливается сравнительно малоразмерная (одиночная) цель и задачей стрельбы является поражение именно этой малоразмерной цели. Однако иногда по малоразмерным целям применяется и стрельба с искусственным рассеиванием, которая может в некоторых условиях быть эффективнее сосредоточенной, а именно, когда повторяющиеся случайные ошибки стрельбы велики по сравнению с неповторяющимися. Например, серийное бомбометание по малоразмерной цели часто оказывается выгоднее залпового. Это связано с тем, что повторяющиеся ошибки бомбометания (ошибки прицеливания) играют большую роль по сравнению с неповторяющимися (так называемым «техническим рассеиванием» бомб).

В некоторых случаях разнесенная стрельба применяется просто потому, что в данных условиях сосредоточенная стрельба невыполнима (например, при стрельбе с истребителя из неподвижных орудий на пересекающихся курсах).

Разнесенная стрельба широко практикуется при обстреле площадных целей. Введение искусственного рассеивания в этом случае выгодно с двух точек зрения:

— дает возможность равномерно подвергнуть обстрелу всю территорию цели;

— позволяет избежать взаимного перекрытия зон разрушений отдельных снарядов.

§ 14. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ЗАВИСИМОСТИ ВЫСТРЕЛОВ. СХЕМА ДВУХ ГРУПП ОШИБОК

Несколько выстрелов называются независимыми, если координаты точки попадания любого из них не зависят от того, куда попали остальные.

Со случаем независимых выстрелов мы встречаемся при так называемой «одиночной» стрельбе, когда измерение всех входных параметров и все операции, необходимые для прицеливания и наведения снаряда на цель, выполняются для каждого выстрела отдельно (случайные ошибки не повторяются). Примерами могут служить:

— бомбометание с самолетов, каждый из которых сбрасывает одну бомбу и осуществляет индивидуальное прицеливание;

— стрельба по самолету несколькими самонаводящимися снарядами со значительными интервалами по времени;

— обстрел цели несколькими ракетами с разных позиций и т. п.

Если среди случайных факторов, вызывающих рассеивание, имеются факторы, влияющие сразу на несколько выстрелов, то возникает **зависимость выстрелов.**

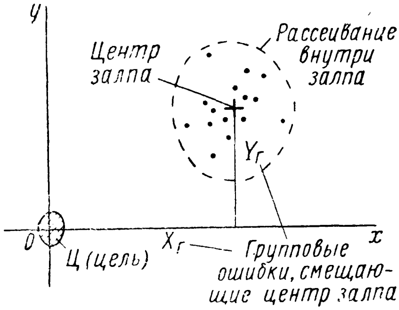


Рис. 14.1.

Эта зависимость может быть более или менее тесной. Теснота зависимости определяется **удельным весом повторяющихся ошибок в суммарном рассеивании.** Чем большая доля ошибок повторяется, тем теснее зависимы выстрелы. Если **все** случайные ошибки одинаковы для **всех** выстрелов, зависимость становится жесткой (функциональной).

Чтобы охарактеризовать степень зависимости выстрелов, нужно проанализировать случайные факторы, вызывающие рассеивание, и разбить их на группы по признаку повторяемости.

Наиболее простой тип зависимости возникает в случае, когда все случайные ошибки стрельбы можно резко разграничить на две независимые группы:

— **индивидуальные** (или неповторяющиеся) ошибки, каждая из которых влияет только на один выстрел;

— **групповые** (или повторяющиеся) ошибки, одинаковые для всех выстрелов и смещающие всю группу выстрелов как единое целое.

Такой тип зависимости выстрелов называется **схемой двух групп ошибок.**

На практике схема двух групп ошибок имеет место, например, при стрельбе залпом неуправляемых снарядов (бомб). Ошибка прицеливания, отклоняющая от цели **весь залп**, как единое целое, является групповой (рис. 14.1). Индивидуальными будут ошибки, связанные с разной баллистикой снарядов и неоднородностью условий их пуска: эти ошибки создают рассеивание **внутри залпа.**

Для схемы двух групп ошибок требуется, чтобы повторяющиеся ошибки были одинаковы для всех выстрелов. Однако во многих случаях практики эту схему можно применять приближенно, несмотря на то, что повторяющиеся ошибки не строго постоянны, а несколько меняются от выстрела к выстрелу.

При схеме двух групп ошибок координаты точки попадания каждого выстрела могут быть представлены в виде суммы следующих слагаемых:

— неслучайной систематической ошибки данного выстрела;

— случайной групповой ошибки, одинаковой для всех выстрелов;

— случайной индивидуальной ошибки данного выстрела.

Запишем координаты i-й точки попадания в виде:

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \bar{x}_i + X_г + U_i, \\ Y_i &= \bar{y}_i + Y_г + V_i, \end{aligned}\right\} \tag{14.1}$$

где $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ — систематические ошибки (координаты центра рассеивания) i-го выстрела;

$X_г$, $Y_г$ — одинаковые для всех выстрелов групповые ошибки;

U_i, V_i — индивидуальные случайные ошибки i-го выстрела, не зависящие ни от групповых ошибок, ни от индивидуальных ошибок других выстрелов.

При сосредоточенной стрельбе

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{x}_2 = \ldots = \bar{x}_n = \bar{x}, \\ \bar{y}_1 &= \bar{y}_2 = \ldots = \bar{y}_n = \bar{y}. \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

Определим средние квадратические отклонения суммарных ошибок i-го выстрела. Пользуясь теоремой сложения дисперсий, находим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x_i}^2 &= \sigma_{xг}^2 + \sigma_{u_i}^2, \\ \sigma_{y_i}^2 &= \sigma_{yг}^2 + \sigma_{v_i}^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.3}$$

где $\sigma_{xг}$, $\sigma_{yг}$ — средние квадратические отклонения групповых ошибок $X_г$, $Y_г$;

σ_{u_i}, σ_{v_i} — средние квадратические отклонения индивидуальных ошибок i-го выстрела U_i, V_i.

Если средние квадратические отклонения индивидуальных ошибок от выстрела к выстрелу не меняются, т. е.

$$\sigma_{u_1} = \sigma_{u_2} = \ldots = \sigma_{u_n} = \sigma_u,$$

$$\sigma_{v_1} = \sigma_{v_2} = \ldots = \sigma_{v_n} = \sigma_v,$$

то формулы (14.3) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sigma_{xг}^2 + \sigma_u^2, \\ \sigma_y^2 &= \sigma_{yг}^2 + \sigma_v^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.4}$$

или, переходя от средних квадратических отклонений к пропорциональным им вероятным отклонениям,

$$\left.\begin{aligned} E_x^2 &= E_{x\text{г}}^2 + E_u^2, \\ E_y^2 &= E_{y\text{г}}^2 + E_v^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \sqrt{E_{x\text{г}}^2 + E_u^2}, \\ E_y &= \sqrt{E_{y\text{г}}^2 + E_v^2}, \end{aligned}\right\} \tag{14.6}$$

т. е. вероятное отклонение суммарной ошибки (полного рассеивания) равно корню квадратному из суммы квадратов вероятных отклонений групповой и индивидуальной ошибок.

Зависимость между выстрелами может быть охарактеризована **коэффициентом корреляции** координат точек попадания.

Обозначим $\mu_{ij}^{(x)}$ коэффициент корреляции случайных величин X_i, X_j — абсцисс точек попадания i-го и j-го выстрелов; аналогично $\mu_{ij}^{(y)}$ — коэффициент корреляции величин Y_i, Y_j. Чем больше удельный вес групповых (повторяющихся) ошибок, тем больше будет коэффициент корреляции. Из формул (14.1) следует, что если рассеивание индивидуальных ошибок от выстрела к выстрелу не меняется, то при схеме двух групп ошибок коэффициент корреляции для каждой пары выстрелов один и тот же и равен отношению квадрата вероятного отклонения групповой ошибки к квадрату вероятного отклонения суммарной ошибки

$$\left.\begin{aligned} \mu^{(x)} &= \frac{E_{x\text{г}}^2}{E_x^2}, \\ \mu^{(y)} &= \frac{E_{y\text{г}}^2}{E_y^2}, \end{aligned}\right\} \tag{14.7}$$

или на основе формул (14.5)

$$\left.\begin{aligned} \mu^{(x)} &= \frac{E_{x\text{г}}^2}{E_{x\text{г}}^2 + E_u^2}, \\ \mu^{(y)} &= \frac{E_{y\text{г}}^2}{E_{y\text{г}}^2 + E_v^2}. \end{aligned}\right\} \tag{14.8}$$

Коэффициенты $\mu^{(x)}$, $\mu^{(y)}$ характеризуют **долю групповых ошибок в суммарном (полном) рассеивании координат точек попадания.**

На практике чаще всего эти два коэффициента не очень сильно различаются и их можно **осреднить** по формуле

$$\mu = \sqrt{\mu^{(x)}\mu^{(y)}}. \tag{14.9}$$

Величину μ обычно называют **коэффициентом корреляции выстрелов**. Значения μ могут быть от 0 до 1:

$$0 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

При $\mu=0$ выстрелы независимы: существует только индивидуальное рассеивание, а групповых ошибок нет. При $\mu=1$ выстрелы функционально зависимы: существуют только групповые ошибки, а индивидуального рассеивания нет.

§ 15. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВЫСТРЕЛОВ И ЕГО СВЕДЕНИЕ К СХЕМЕ ДВУХ ГРУПП ОШИБОК

На практике встречаются случаи, когда групповые ошибки не повторяются от выстрела к выстрелу, а меняются во время стрельбы по случайному закону. Рассмотрим, например, стрельбу очередью из авиационной пушки по воздушной цели. Наводка центральной марки прицела на цель, служащая для измерения угловых координат цели, выполняется в течение всего процесса стрельбы; ошибки наводки непрерывно меняются от выстрела к выстрелу, но не настолько, чтобы их можно было считать для различных выстрелов независимыми (ошибки повторяются, но не полностью). При этом корреляция между выстрелами ослабевает по мере увеличения промежутка времени между ними, и для разных значений номеров выстрелов i, j коэффициенты корреляции μ_{ij} неодинаковы. Это называется **общим случаем корреляционной зависимости**. В этом случае коэффициентов корреляции столько, сколько можно составить различных пар выстрелов (C_n^2). Их обычно записывают в виде прямоугольной таблицы (матрицы), которая называется **корреляционной матрицей**. Корреляционная матрица для абсцисс точек попадания имеет вид:

$$\left\|\begin{matrix} 1 & \mu_{12}^{(x)} & \mu_{13}^{(x)} & \ldots & \mu_{1n}^{(x)} \\ & 1 & \mu_{23}^{(x)} & \ldots & \mu_{2n}^{(x)} \\ & & 1 & \ldots & \mu_{3n}^{(x)} \\ & & & \ldots & \\ & & & \ldots & \\ & & & & 1 \end{matrix}\right\| \qquad (15.1)$$

(аналогично для ординат).

По главной диагонали матрицы стоят единицы, так как каждый выстрел связан с самим собой жесткой функциональной зависимостью. Матрица заполнена только наполовину, так как члены, симметричные относительно главной диагонали, равны.

Обычно коэффициенты корреляции в матрице (15.1) убывают по мере удаления от главной диагонали. Это объясняется тем, что зависимость для близких по времени выстрелов больше, чем для удаленных. Некоторые из коэффициентов корреляции в матрице (15.1) могут быть даже отрицательными. Если два выстрела связаны отрицательной корреляцией, это означает, что отклонение одного из них, скажем, вправо влечет за собой тенденцию другого выстрела отклоняться в обратную сторону — влево. Так, например, может быть, если стрелок, заметив ошибку первого выстрела, стремится ее скомпенсировать на дальнейших и «перебирает» в обратную сторону.

При вычислении показателя эффективности неудобно пользоваться общей схемой зависимости и матрицей вида (15.1) (это приводит к очень громоздким расчетам). Поэтому пользуются следующим приемом: искусственно **сводят общий случай корреляционной зависимости к схеме двух групп ошибок**, т. е. осредняют коэффициенты корреляции в матрице (15.1). Расчеты показывают, что лучше при этом осреднять не сами коэффициенты корреляции, а их квадраты по формуле

$$\mu^{(x)} = \sqrt{\frac{\left(\mu_{12}^{(x)}\right)^2 + \left(\mu_{13}^{(x)}\right)^2 + \ldots + \left(\mu_{n-1,\,n}^{(x)}\right)^2}{\frac{1}{2}\,n\,(n-1)}} \tag{15.2}$$

(в числителе под знаком корня стоит сумма квадратов всех не диагональных коэффициентов корреляции, а в знаменателе — общее их число). Коэффициент $\mu^{(y)}$ вычисляется аналогично.

После вычисления $\mu^{(x)}$, $\mu^{(y)}$ их снова можно осреднить по формуле (14.9).

Пример. Производится стрельба из авиационной пушки по воздушной цели короткими очередями (по 5 выстрелов в очереди). В результате обработки экспериментальных данных получены корреляционные матрицы абсцисс и ординат точек попадания:

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}6 & -0{,}2 \\ & 1 & 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ & & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ & & & 1 & 0{,}6 \\ & & & & 1 \end{matrix}\right\| \quad \text{(для абсцисс)}$$

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & -0{,}1 & -0{,}5 \\ & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ & & 1 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ & & & 1 & 0{,}6 \\ & & & & 1 \end{matrix}\right\| \quad \text{(для ординат)}$$

Требуется свести данный случай к схеме двух групп ошибок и найти осредненный коэффициент корреляции.

Решение.

Находим $\mu^{(x)}$, осредняя квадраты элементов первой матрицы:

$$\mu^{(x)} = \sqrt{\frac{0,9^2 + 0,8^2 + 0,6^2 + 0,2^2 + 0,9^2 + 0,7^2 + 0,4^2 + 0,8^2 + 0,8^2 + 0,6^2}{10}} =$$

$$= 0,704.$$

Аналогично

$$\mu^{(y)} = 0,551.$$

Осредняя, получаем:

$$\mu = \sqrt{\mu^{(x)}\mu^{(y)}} \approx 0,62.$$

§ 16. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РАССЕИВАНИЯ

Структура рассеивания и вызывающие его причины различны для разных видов стрельбы. Поэтому различны и конкретные методы исследования рассеивания. Однако во всех этих методах имеются общие принципы. Прежде всего их можно разделить на две основные категории:

— непосредственно-экспериментальные методы;

— аналитические методы.

Непосредственно-экспериментальный метод исследования рассеивания состоит в том, что производится достаточно большое число выстрелов в одинаковых условиях, регистрируются координаты точек попадания, результаты обрабатываются обычными методами математической статистики и находятся характеристики рассеивания: систематические ошибки, главные вероятные отклонения, коэффициенты корреляции.

Преимущество непосредственного метода в том, что он не требует никаких допущений и упрощений и дает возможность наблюдать рассеивание таким, как оно есть. Однако этот метод обладает и недостатками, а именно:

— требует громоздкого и дорогостоящего эксперимента;

— применим только к существующим образцам и неприменим к технике перспективной, проектируемой;

— дает возможность наблюдать только суммарный эффект действия всех причин, вызывающих рассеивание, но не дает возможности выявить важнейшие из этих причин.

Такими недостатками не обладает расчетный, или аналитический метод. Идея его сводится к следующему. Анализируются процессы, сопровождающие стрельбу, причем выявляются и изучаются отдельные причины, отклоняющие снаряд от цели. В результате такого анализа координаты точки попадания (для простоты возьмем одну абсциссу) представляются в виде суммы элементарных ошибок:

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} + \ldots + X^{(k)}, \tag{16.1}$$

где $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ... — ошибки, вызванные отдельными независимыми факторами. Далее, каждая из элементарных ошибок исследуется в отдельности, в связи с породившими ее причинами. Эти причины обычно называют «первичными ошибками». Примерами первичных ошибок могут служить:

— ошибки измерения координат цели;
— баллистическая неоднородность снарядов;
— ошибки измерения высоты и скорости стреляющего самолета;
— ошибки гировертикали

и т. п.

Первичные ошибки могут быть как случайными величинами, так и случайными функциями времени, меняющимися в процессе стрельбы.

Зная вероятностные характеристики первичных ошибок (они обычно определяются из опыта), можно известными методами теории вероятностей найти характеристики вызванных ими элементарных ошибок $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ..., а затем и суммарной ошибки X.

Хотя для применения аналитического метода тоже необходим эксперимент (нахождение характеристик первичных ошибок), но он по громоздкости и дороговизне не идет в сравнение с опытами, необходимыми для непосредственного исследования рассеивания. К тому же ряд первичных ошибок (например, ошибки различного вида координаторов цели) может быть исследован не в применении к конкретному образцу, а ко всем системам, где такие первичные ошибки встречаются.

Недостаток аналитического метода в том, что он основан на предварительном анализе явления рассеивания и выделении наиболее существенных его причин. При этом некоторые из факторов, может быть и важные, могут оказаться неучтенными. Поэтому аналитическое исследование рассеивания желательно время от времени контролировать экспериментом. Полное и всестороннее исследование рассеивания возможно лишь комбинированным применением аналитического метода и непосредственно-экспериментального.

На основе серии расчетов и экспериментов обычно создаются те или другие **эмпирические формулы** для характеристик рассеивания, выражающие зависимость этих характеристик от условий стрельбы. Некоторые из этих формул утверждаются как «нормативные». Естественно, что эти формулы с развитием техники меняются.

§ 17. ОСОБЕННОСТИ ОБЪЕМНОГО РАССЕИВАНИЯ ПРИ СТРЕЛЬБЕ ДИСТАНЦИОННЫМИ СНАРЯДАМИ

Изложенные в предыдущих параграфах общие положения о рассеивании, его характеристиках и способах их определения относятся также и к случаю объемного рассеивания, с той разницей, что каждая точка разрыва характеризуется не двумя, а тремя координатами (X, Y, Z) и помимо плоского рассеивания на картинной плоскости Q появляется еще «рассеивание по глубине». Оно связано с тем, что момент разрыва снаряда на траектории случаен. Так, например, обстоит дело при стрельбе дистанционными снарядами по воздушным целям.

Рассмотрим наиболее простой случай одного выстрела. Закон рассеивания рассматривается в пространственной системе координат $xoyz$ (рис. 17.1). Плоскость xoy (картинную плоскость) обычно выбирают так же, как и при стрельбе ударными снарядами; отклонения траекторий снарядов от цели *Ц* в этой плоскости вызваны теми же причинами и исследуются в основном теми же методами, что и при ударной стрельбе. Рассеивание вдоль третьей

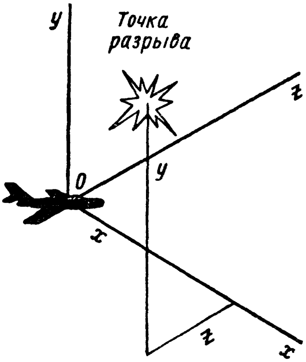


Рис. 17.1.

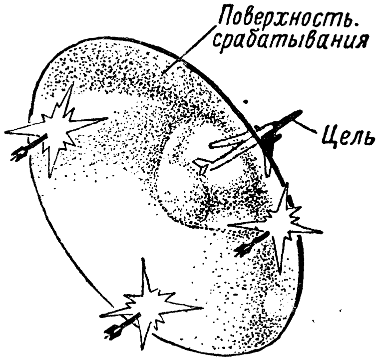


Рис. 17.2.

оси oz, которую обычно выбирают по направлению вектора относительной скорости встречи снаряда с целью, связано главным образом с ошибками взрывателя.

Взрыватели для дистанционных снарядов с объемным рассеиванием бывают двух основных типов:

— работающие по расчету времени или по сигналу с места пуска снаряда (так называемые «дистанционные» взрыватели);

— работающие по сигналу от цели (так называемые «неконтактные» взрыватели).

При пользовании дистанционными взрывателями закон рассеивания $\varphi(x, y, z)$ представляет собой нормальный закон. При надлежащем выборе координатных осей величина Z будет независимой от величин X, Y, определяющих так называемый «промах» снаряда в картинной плоскости. Тогда $\varphi(x, y, z)$ можно представить в виде произведения

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x, y)\,\varphi_2(z), \tag{17.1}$$

где $\varphi_1(x, y)$ — закон рассеивания в картинной плоскости;
$\varphi_2(z)$ — закон ошибок по дальности дистанционного взрывателя.

Если дистанционный взрыватель работает по расчету времени, то главными причинами рассеивания по оси oz являются:

— ошибка в определении времени полета снаряда до цели;

— ошибка временного механизма взрывателя.

Если дистанционный взрыватель работает по сигналу с места пуска снаряда (сигнал подается в момент, когда снаряд достигает заданного положения относительно цели), главными причинами рассеивания будут:

— ошибка в определении координат цели;

— ошибка в определении координат снаряда.

В случае, когда снаряд комплектуется неконтактным взрывателем, работающим по сигналу от цели, структура закона рассеивания несколько сложнее.

Неконтактный взрыватель, в принципе, должен обеспечивать взрыв боевой части на некоторой поверхности, называемой *поверхностью срабатывания* (рис. 17.2). Вид этой поверхности зависит от вида цели, типа взрывателя и направления подхода снаряда к цели. Вследствие ряда причин истинные точки разрыва имеют относительно средней поверхности некоторый разброс. Как среднее значение координаты Z точки разрыва, так и разброс зависят от координат (X, Y) траектории снаряда в картинной плоскости. Закон рассеивания имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x, y)\,\varphi_2(z/x, y), \tag{17.2}$$

где $\varphi_2(z/x, y)$ — условный закон распределения точки разрыва по дальности при заданных координатах (x, y) точки попадания в картинной плоскости.

Закон $\varphi_2(z/x, y)$ для каждого вида цели и типа взрывателя может быть определен экспериментально. Опыты обычно проводятся на моделях, а в некоторых случаях применяется летный эксперимент. Как правило, закон $\varphi_2(z/x, y)$ можно считать нормальным, но обе его характеристики — и математическое ожидание $\bar{z}$ и среднее квадратическое отклонение σ_z — зависят от (x, y):

$$\bar{z} = \bar{z}(x, y); \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y). \tag{17.3}$$

Обычно можно эту зависимость от двух аргументов x и y приближенно заменить зависимостью от одной величины r, так называемого «промаха» снаряда:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{17.4}$$

Тогда

$$\bar{z} = \bar{z}(r); \quad \sigma_z = \sigma_z(r). \tag{17.5}$$

Рассмотрим более сложный случай стрельбы несколькими снарядами с объемным рассеиванием.

Если взрыватель дистанционный, то для приближенного описания закона рассеивания обычно применяются следующие характеристики:

— систематические ошибки $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ (при разнесенной стрельбе они зависят от номера выстрела);

— главные вероятные отклонения полного рассеивания в картинной плоскости E_x, E_y;

— средний коэффициент корреляции в картинной плоскости

$$\mu = \sqrt{\mu^{(x)}\mu^{(y)}};$$

— вероятное отклонение по дальности E_z;

— коэффициент корреляции точек разрывов по дальности $\mu^{(z)}$.

Если взрыватель неконтактный, задача упрощается тем, что можно полагать $\mu^{(z)}=0$ (ошибки взрывателей при данных (x, y) независимы), но зато обе характеристики рассеивания $\bar{z}$ и E_z нужно полагать зависящими от (x, y) или, в простейшем случае, от $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

ГЛАВА 3

ХАРАКТЕРИСТИКИ УЯЗВИМОСТИ ЦЕЛЕЙ

§ 18. ХАРАКТЕРИСТИКИ УЯЗВИМОСТИ. КООРДИНАТНЫЙ ЗАКОН ПОРАЖЕНИЯ

Чтобы оценивать эффективность стрельбы, кроме характеристик рассеивания, нужно знать еще характеристики поражающего действия боеприпасов по цели или, что равносильно, *характеристики уязвимости цели* по отношению к применяемым снарядам. Характеристики рассеивания зависят от точности стрельбы (т. е. степени совершенства технических устройств, приводящих снаряд в район цели). Что касается характеристик уязвимости, то они зависят от параметров снаряда и цели, таких, как:

— конструкция, вес и разрушительная мощь снаряда;

— конструкция и прочность цели.

В зависимости от типа цели и типа снаряда применяются те или другие характеристики уязвимости.

В § 9 мы ввели три основных типа целей: одиночные, групповые и площадные.

Очевидно, специальных характеристик уязвимости групповой цели вводить не нужно, так как она определяется уязвимостью отдельных одиночных целей, образующих группу.

Характеристики уязвимости площадной цели изучать в отдельности тоже не нужно; мы введем их непосредственно в гл. 6, где будут рассматриваться методы оценки эффективности стрельбы по площадной цели. Здесь и в последующих параграфах (§ 19—23) будут рассмотрены характеристики уязвимости одиночных целей.

Одной из возможных характеристик уязвимости одиночной цели является так называемый «*координатный закон поражения*». Он выражает вероятность поражения цели в зависимости от координат точек попаданий (разрывов) снарядов.

Рассмотрим самый простой случай. Пусть ведется стрельба одним снарядом с плоским рассеиванием по одиночной малоразмерной цели $Ц$ (танк, корабль, ракетная установка и т. д.). Предположим, что снаряд попал в точку M с координатами (x, y) (рис. 18.1). Очевидно, вероятность поражения цели будет зависеть от координат (x, y). Обозначим эту вероятность $G_1(x, y)$ и назовем **координатным законом поражения цели**[1].

Координатный закон поражения характеризует данную комбинацию снаряд—цель. Помимо координат (x, y) он зависит в некоторой степени еще и от условий стрельбы (например, угла подхода снаряда к картинной плоскости; скорости снаряда в момент разрыва и т. п.). Мы будем считать эти условия заданными.

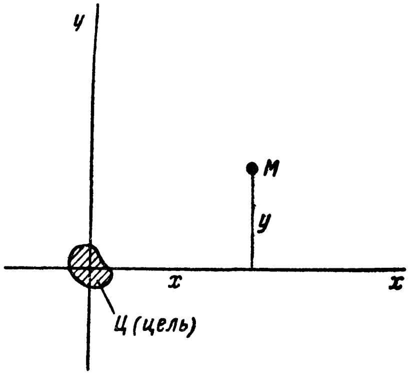


Рис. 18.1.

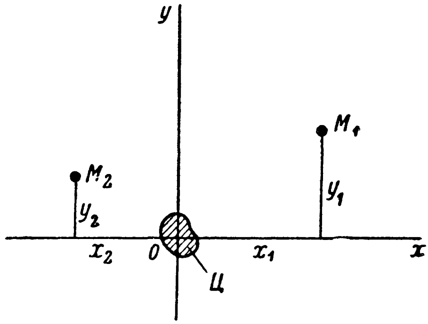


Рис. 18.2.

Рассмотрим случай стрельбы не одним, а двумя снарядами. Здесь придется ввести координатный закон поражения, зависящий от координат обеих точек попадания:

$$G_2(x_1, y_1; x_2, y_2),$$

который представляет собой вероятность поражения цели при условии, что два снаряда разорвались: один — в точке $M_1(x_1, y_1)$, другой в точке $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 18.2).

В общем случае, при стрельбе n снарядами координатный закон поражения будет зависеть от координат всех точек попадания:

$$G_n(x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_n, y_n). \tag{18.1}$$

Функция $G_n(x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_n, y_n)$ есть не что иное, как **условная вероятность поражения цели n снарядами, разорвавшимися в точках с координатами** $(x_1, y_1) \ldots (x_n, y_n)$.

Координатный закон поражения (18.1) представляет собой функцию $2n$ аргументов, и, естественно, оперировать такой функцией крайне неудобно. Однако в частном случае вид этой функции может быть сильно упрощен; а именно: **если снаряды поражают цель независимо друг от друга.**

---

[1] Слово «координатный» указывает на зависимость его от координат точки попадания.

Рассмотрим именно этот случай, когда снаряды поражают цель независимо. Что это значит? Это значит, что при фиксированных координатах точек попадания любых двух снарядов вероятность поражения цели одним из них не зависит от того, какие повреждения причинил ей другой, не поразивший. Обозначим A — поражение цели n снарядами и вычислим вероятность этого события:

$$G_n(x_1, y_1; \ x_2, y_2; \ldots; x_n, y_n) = P(A).$$

Перейдем к противоположному событию $\overline{A}$ — непоражению цели — и представим его как совмещение (произведение) n событий:

$\overline{A}_1$ — первый снаряд не поразил цель;
$\overline{A}_2$ — второй снаряд не поразил цель;
. . . .
$\overline{A}_n$ — n-й снаряд не поразил цель.

Мы условились, что события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$ независимы. Тогда по теореме умножения вероятностей получим

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1)\, P(\overline{A}_2) \ldots P(\overline{A}_n).$$

Найдем $P(\overline{A}_1)$ — вероятность непоражения цели первым снарядом, разорвавшимся в точке (x_1, y_1). Очевидно,

$$P(\overline{A}_1) = 1 - G_1(x_1, y_1).$$

Аналогично

$$P(\overline{A}_2) = 1 - G_1(x_2, y_2); \ \ldots; \ P(\overline{A}_n) = 1 - G_1(x_n, y_n).$$

Следовательно, вероятность непоражения цели всеми n снарядами будет

$$P(\overline{A}) = [1 - G_1(x_1, y_1)]\, [1 - G_1(x_2, y_2)] \ldots [1 - G_1(x_n, y_n)],$$

а вероятность поражения

$$G_n(x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_n, y_n) =$$
$$= 1 - [1 - G_1(x_1, y_1)]\, [1 - G_1(x_2, y_2)] \ldots [1 - G_1(x_n, y_n)]. \quad (18.2)$$

Таким образом, сложная функция $2n$ аргументов $G_n(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n)$ выразилась через гораздо более простую функцию всего двух аргументов $G_1(x, y)$.

Заметим, что для такого упрощения нам понадобилось предположение о том, что снаряды «независимы в смысле поражения».

Это допущение в теории стрельбы часто называют «отсутствием накопления ущерба». Под «накоплением ущерба» понимается явление, состоящее в том, что цель может быть поражена совместным действием двух или более снарядов, ни один из которых цели не поразил. При «накоплении ущерба» снаряды как бы «помогают друг другу». При «отсутствии накопления ущерба» снаряды помогать друг другу не могут и поражают цель независимо.

Для реальных целей накопление ущерба почти всегда имеет место, но обычно играет в балансе уязвимости цели сравнительно малую роль, и им оказывается возможно пренебречь.

При отсутствии накопления ущерба, как показывает формула (18.2), координатный закон поражения цели несколькими снарядами $G_n(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n)$ выражается через простейший координатный закон поражения одним снарядом.

Совершенно аналогично рассмотренному плоскому случаю можно построить характеристики уязвимости одиночной цели по отношению к дистанционным снарядам с объемным рассеиванием. Простейшей характеристикой уязвимости будет координатный закон поражения $G_1(x, y, z)$ — условная вероятность поражения цели при условии, что снаряд разорвался в точке с координатами (x, y, z). В случае стрельбы n снарядами с объемным рассеиванием общей характеристикой уязвимости цели будет координатный закон:

$$G_n(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n),$$

который при отсутствии накопления ущерба выражается через простейший закон $G_1(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} G_n(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n) = \\ = 1 - [1 - G_1(x_1, y_1, z_1)][1 - G_1(x_2, y_2, z_2)] \ldots \\ \ldots [1 - G_1(x_n, y_n, z_n)]. \end{aligned} \tag{18.3}$$

§ 19. ЗАКОН ПОРАЖЕНИЯ ЦЕЛИ ПРИ СТРЕЛЬБЕ УДАРНЫМИ СНАРЯДАМИ

При стрельбе ударными снарядами характеристики уязвимости цели значительно упрощаются. Дело в том, что ударные снаряды могут поражать цель *только при непосредственном попадании в нее*, поэтому для тех точек попадания, которые оказываются за пределами цели, координатный закон равен нулю и может не рассматриваться. Кроме того, если размеры цели не слишком велики по сравнению с областью рассеивания снарядов, задачу удается упростить еще больше и охарактеризовать уязвимость цели с помощью очень простой функции, зависящей только от *одного* аргумента.

Обозначим $G(m)$ *условную вероятность поражения цели при условии, что в нее попало ровно* m *снарядов*. Функцию $G(m)$ мы будем называть просто «*законом поражения цели*». В отличие от аргументов координатного закона поражения аргумент функции $G(m)$ представляет собой *число* попавших снарядов, а не их *координаты*.

Функцию $G(m)$ легко вычислить, если допустить, что попавшие в цель снаряды распределяются по ее проекции на плоскость рассеивания равномерно и независимо друг от друга, т. е. вероятность попадания в какой-либо агрегат пропорциональна площади этого агрегата и не зависит от того, в какие участки цели попали другие снаряды. Такое допущение хорошо оправдывается для целей, размеры которых невелики по сравнению с размерами всей области рассеивания снарядов. При стрельбе по одиночной малоразмерной цели это довольно типичный случай.

Если такое допущение может быть принято, то, зная состав цели, относительные площади, взаимное расположение и уязвимость ее агрегатов, легко можно найти закон поражения $G(m)$ расчетным путем.

Закон поражения цели $G(m)$ обладает следующими очевидными свойствами:

1) $G(0)=0$ (при отсутствии попаданий цель поражена быть не может).

2) $G(\infty)=1$ (при неограниченном увеличении числа попаданий поражение цели становится достоверным).

3) $G(m)$ — неубывающая функция m (при увеличении числа попаданий вероятность поражения цели не может стать меньше).

Пример. Самолет, по которому ведется стрельба, состоит из трех различных по уязвимости частей (рис. 19.1), а именно:

— первая часть: кабина летчика, двигатель;

— вторая часть: топливные баки;

— третья часть: плоскости, хвостовое оперение.

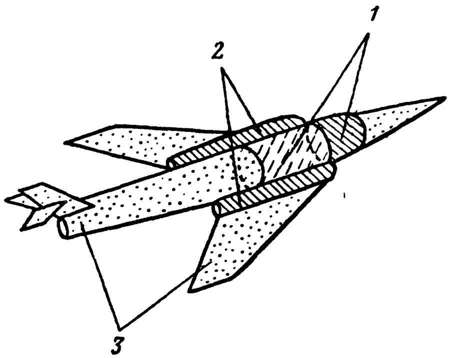


Рис. 19.1.

При попадании снаряда данного типа в первую часть поражение самолета гарантировано. Если один снаряд попал во вторую часть, он вызывает только течь горючего, но не воспламеняет его; второй попавший снаряд воспламеняет горючее, и самолет гибнет в результате пожара; третья часть самолета для снарядов данного типа мало уязвима; для поражения самолета требуется не менее трех попаданий в эту часть. Относительные площади первой, второй и третьей частей на проекции цели равны соответственно 0,3, 0,2 и 0,5. Найти закон поражения самолета $G(m)$ и построить его график.

Решение. Пусть $m=1$ (в самолет попал ровно один снаряд). Для поражения цели нужно, чтобы он попал в первую часть:

$$G(1)=0{,}3.$$

Пусть $m=2$ (в самолет попало ровно два снаряда). Они могут поразить самолет двумя способами:

— хотя бы один из снарядов попадет в первую часть или

— оба снаряда попадут во вторую часть.

По теоремам сложения и умножения вероятностей получим

$$G(2) = 1 - (1 - 0{,}3)^2 + 0{,}2^2 = 0{,}55.$$

Величину $G(3)$ таким простым способом найти уже нельзя, так как при трех попаданиях события «попадание хотя бы одного снаряда в первую часть» и «попадание не менее двух снарядов во вторую» уже не будут несовместными.

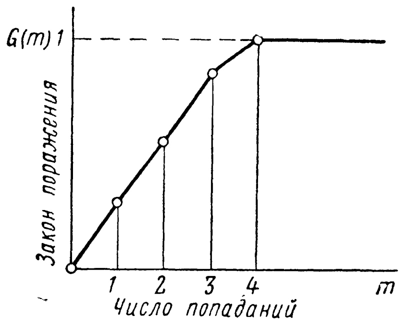


Рис. 19.2.

Для определения $G(3)$ лучше перейти к противоположному событию — непоражению цели при трех попаданиях. Для того чтобы цель не была поражена при трех попаданиях, нужно, чтобы два снаряда попали в третью часть, а один — во вторую. Так как из трех снарядов можно составить три различные комбинации, при которых один снаряд попадает во вторую часть, а два остальных — в третью, вероятность непоражения цели при трех попаданиях будет $3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5^2$, а вероятность поражения

$$G(3) = 1 - 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}85.$$

При четырех попаданиях цель поражается с полной достоверностью

$$G(4) = 1.$$

График закона поражения $G(m)$ представлен на рис. 19.2.

§ 20. СРЕДНЕЕ НЕОБХОДИМОЕ ЧИСЛО ПОПАДАНИЙ ω

Закон поражения цели $G(m)$ представляет собой некоторую *функцию* числа попавших снарядов m. На практике часто уязвимость цели характеризуют не этой функцией, а одним-единственным числом ω — *средним необходимым числом попаданий*:

$$\omega = M[X], \tag{20.1}$$

где X — случайная величина, означающая число попаданий, при котором цель поражается;

$M[X]$ — математическое ожидание (среднее значение) этой случайной величины.

Пояснить смысл величины ω можно следующим образом. В зависимости от конкретного расположения точек попадания снарядов для поражения цели может потребоваться то или другое число попаданий. Может оказаться, что цель будет поражена уже первым попаданием ($X=1$); может оказаться, что первый попавший снаряд не поразит цель, а второй поразит ($X=2$) и т. д. Величина ω показывает сколько *в среднем* требуется снарядов для поражения цели.

Очевидно, величина ω тоже является характеристикой уязвимости цели, хотя и не такой полной, как $G(m)$. Чем меньше ω, тем более уязвима данная цель для данного снаряда. При $\omega=1$ любое попадание приводит к поражению цели.

Можно доказать, что величина ω выражается через закон поражения $G(m)$ формулой:

$$\omega = 1 + [1 - G(1)] + [1 - G(2)] + \ldots \tag{20.2}$$

или, короче (учитывая, что $G(0)=0$)

$$\omega = \sum_{m=0}^{\infty} [1 - G(m)], \tag{20.3}$$

т. е. среднее необходимое число попаданий равно сумме всех дополнений до единицы закона поражения $G(m)$.

На рис. 20.1 дана геометрическая интерпретация этого соотношения. Среднее необходимое число попаданий ω равно сумме высот всех отрезков, показанных жирными линиями.

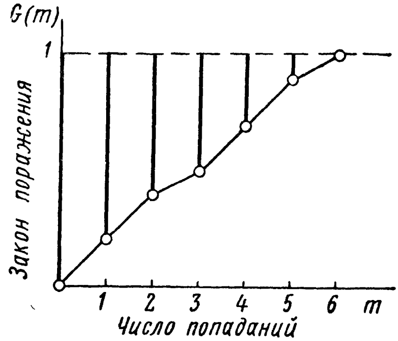


Рис. 20.1.

Пример. Найти среднее необходимое число попаданий для условий, данных в примере § 19.

Решение.

$$\omega = 1 + (1 - 0{,}3) + (1 - 0{,}55) + (1 - 0{,}85) = 2{,}3,$$

т. е. для поражения самолета в среднем необходимо 2,3 попадания.

§ 21. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН ПОРАЖЕНИЯ

Закон поражения цели имеет особенно простой вид в случае отсутствия накопления ущерба. Напомним, что «накоплением ущерба» называется такое явление, когда снаряды «помогают друг другу» поражать цель, т. е. когда цель может быть поражена совместным действием двух или более снарядов (или других поражающих элементов), ни один из которых, взятый в отдельности, цели не поразил бы.

Например, в условиях примера § 19 накопление ущерба имеется, так как при попадании одного снаряда в область баков воспламенения горючего не происходит, а при попадании двух — происходит; при попадании менее чем трех снарядов в планер самолета он не разрушается, а при попадании трех или более — разрушается. Если бы в составе самолета была только безусловно поражаемая область *1*, а остальные части самолета были вовсе неуязвимыми, накопление ущерба отсутствовало бы.

На практике часто встречаются цели, для которых накопление ущерба отсутствует (или почти отсутствует). Такие цели состоят из агрегатов, резко различных по уязвимости: при попадании в одни цели безусловно поражается; при попадании в другие — вовсе не поражается. Тогда поражение цели осуществляется одним «удачно попавшим» снарядом, а не совокупностью нескольких снарядов. В таких случаях закон поражения цели сильно упрощается.

Действительно, предположим, что накопление ущерба отсутствует. и снаряды поражают цель независимо друг от друга. Обозначим r — вероятность поражения цели при попадании в нее одного снаряда. Закон поражения $G(m)$ — вероятность поражения цели

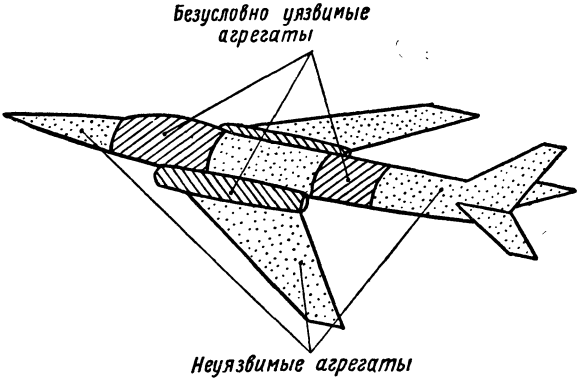


Рис. 21.1.

при m попаданиях — равен вероятности того, что хотя бы один из m снарядов поразит цель:

$$G(m) = 1 - (1 - r)^m. \tag{21.1}$$

Закон поражения (21.1) называется **показательным законом** (так как величина m стоит в показателе степени).

Итак, если для некоторой цели накопление ущерба отсутствует, то ее закон поражения — показательный закон вида (21.1), где r — вероятность поражения цели при одном попадании.

Величину r можно толковать как относительную площадь уязвимых агрегатов цели. Действительно, пусть цель состоит из агрегатов только двух типов (рис. 21.1): безусловно уязвимых (заштрихованы) и вовсе неуязвимых (отмечены точками). Тогда вероятность поражения при одном попадании равна вероятности того, что попавший в цель снаряд попадет в ее уязвимые агрегаты. Если, как мы условились, считать распределение попавших в цель снарядов приблизительно равномерным, то величина r будет равна относительной площади уязвимых агрегатов.

Чем больше величина r, тем круче возрастает показательный закон $G(m)$. На рис. 21.2 приведены графики показательных законов при $r=0,2$ и $r=0,5$ (для упрощения графики даны не ломаными, а плавными линиями).

Найдем среднее необходимое число попаданий для показательного закона (21.1).

Из формулы (20.3) имеем

$$\omega = 1 + (1 - r) + (1 - r)^2 + \ldots,$$

а это есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $(1 - r)$. Суммируя прогрессию, имеем

$$\omega = \frac{1}{1 - (1 - r)}$$

или

$$\omega = \frac{1}{r}, \qquad (21.2)$$

т. е. *для цели, не имеющей накопления ущерба, среднее необходимое число попаданий есть величина, обратная относительной площади ее уязвимых агрегатов.*

Иногда показательный закон поражения $G(m)$ выражают не через величину r, как в формуле (21.1), а через среднее необходимое число попаданий ω:

$$G(m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m. \qquad (21.3)$$

Рассмотрим общий случай, когда накопление ущерба имеет место. Тогда в составе цели имеются агрегаты уже не двух, а трех типов:

— безусловно поражаемые;
— вовсе не поражаемые;
— промежуточные, поражение которых возможно только при совместном попадании нескольких снарядов.

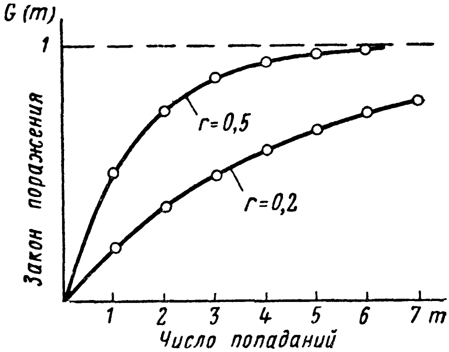


Рис. 21.2.

На практике часто встречаются цели, у которых относительная площадь «промежуточных» агрегатов невелика. Это значит, что накопление ущерба хотя и имеет место, но в общем балансе уязвимости цели играет сравнительно малую роль. Закон поражения такой цели не является строго показательным, но близок к показательному. Такой закон можно приближенно заменить показательным, подобрав его так, чтобы сохранить неизменным среднее необходимое число попаданий ω.

Заменяя непоказательный закон поражения показательным, мы как бы заменяем истинную цель некоторой другой, условной, аналогичной ей по уязвимости, но состоящей только из агрегатов двух типов: безусловно поражаемых и вовсе непоражаемых. Площадь промежуточных агрегатов при такой замене условно делится на две части: первая присоединяется к безусловно поражаемым, вторая — к непоражаемым агрегатам. Величина $r=\frac{1}{\omega}$ при такой замене может быть истолкована как «приведенная относительная уязвимая площадь цели». «Приведенная» потому, что в нее, кроме площади самих безусловно уязвимых агрегатов, включена еще часть площади промежуточных агрегатов.

§ 22. ХАРАКТЕРИСТИКИ УЯЗВИМОСТИ ОДИНОЧНЫХ ЦЕЛЕЙ ПО ОТНОШЕНИЮ К ДИСТАНЦИОННЫМ СНАРЯДАМ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ДЕЙСТВИЯ

Мощные дистанционные (фугасные) снаряды разрушают цель за счет непосредственного действия по ее конструкции. При фиксированном положении точки разрыва и заданных условиях подхода снаряда к цели (направление, скорость) непосредственное действие является довольно устойчивым и координатный закон поражения имеет сравнительно простую структуру: он равен единице внутри некоторой области, включающей цель, и нулю вне этой области.

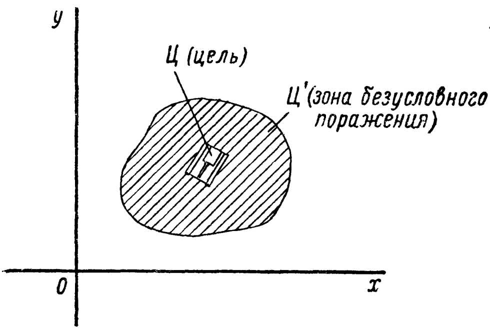


Рис. 22.1.

Будем называть такую область $Ц'$, разрыв снаряда в которой безусловно приводит к поражению цели, **зоной безусловного поражения**. Для снарядов с плоским рассеиванием зона $Ц'$ будет плоской (рис. 22.1), для снарядов с объемным рассеиванием — пространственной.

Таким образом, для снарядов непосредственного разрушительного действия характеристикой уязвимости цели является **зона безусловного поражения** $Ц'$.

Обычно при расчетах контуры зоны поражения упрощают, заменяя ее какой-либо фигурой более простых очертаний (например, круг, эллипс или прямоугольник — на плоскости; шар, эллипсоид, цилиндр или параллелепипед — в пространстве). Чаще всего $Ц'$ заменяют кругом той же площади (или шаром того же объема), и тогда в качестве характеристики уязвимости указывают радиус $R_{пр}$ этого круга (шара), который называется **приведенным радиусом зоны безусловного поражения**.

§ 23. КООРДИНАТНЫЙ ЗАКОН ПОРАЖЕНИЯ ПРИ СТРЕЛЬБЕ ОСКОЛОЧНЫМИ ДИСТАНЦИОННЫМИ СНАРЯДАМИ

При стрельбе по воздушным целям могут применяться осколочные дистанционные снаряды с пространственным рассеиванием точек разрыва. Эти снаряды поражают цель главным образом за счет действия осколков (или искусственных поражающих элементов, которые мы тоже будем называть «осколками») по жизненно важным агрегатам цели. Такими жизненно важными агрегатами на самолете являются, например:

— двигатели;
— органы управления;
— кабина летчика;
— топливная система;

масло-система и т. д.

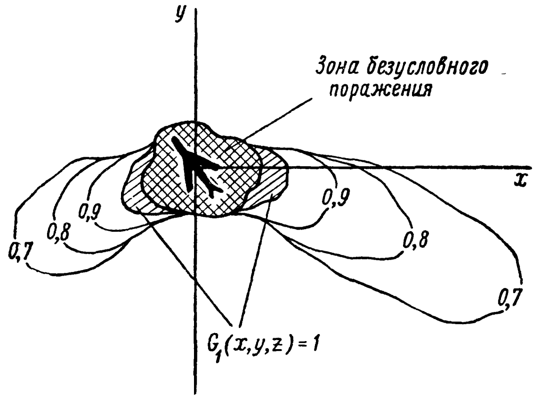


Рис. 23.1.

Основной характеристикой уязвимости цели по отношению к осколочному дистанционному снаряду является простейший координатный закон поражения $G_1(x, y, z)$ — условная вероятность поражения цели, вычисленная при условии, что снаряд разорвется в точке с координатами (x, y, z) относительно цели.

При стрельбе осколочными снарядами закон $G_1(x, y, z)$ нельзя, как это мы делали в предыдущем параграфе, считать равным единице внутри какой-то области и равным нулю вне ее. В данном случае закон $G_1(x, y, z)$ постепенно убывает по мере удаления точки разрыва от цели. Это происходит потому, что поражение цели осколками носит гораздо более случайный характер, чем поражение ударной волной. При одном и том же положении точки разрыва снаряд может иногда поразить цель, а иногда нет, в зависимости от того, какие именно осколки и в какие агрегаты цели попадут в каждом конкретном случае.

Рассмотрим в этом случае структуру функции $G_1(x, y, z)$ (рис. 23.1). Прежде всего, возле цели имеется некоторая зона (зона безусловного поражения), разрыв снаряда в которой безусловно поражает цель за счет непосредственного действия по ее конструкции ударной волны, продуктов детонации или, в некоторых случаях, плотного потока осколков. В этой зоне $G_1(x, y, z) = 1$. При разрыве за пределами этой зоны снаряд может поражать цель только за счет действия отдельных осколков по жизненно важным агрегатам. В связи с тем, что поток осколков имеет, как правило, направленный характер, вокруг цели образуется так называемая «зона опасных разрывов», при разрыве снаряда в которой сноп разлета осколков накрывает цель (полностью или частично). За пределами зоны опасных разрывов (если не считать зоны непосредственного действия) координатный закон поражения $G(x, y, z)$ равен нулю. В пределах зоны опасных разрывов функция $G(x, y, z)$ постепенно убывает от 1 до 0 с удалением точки разрыва от цели. Это убывание связано с двумя факторами:

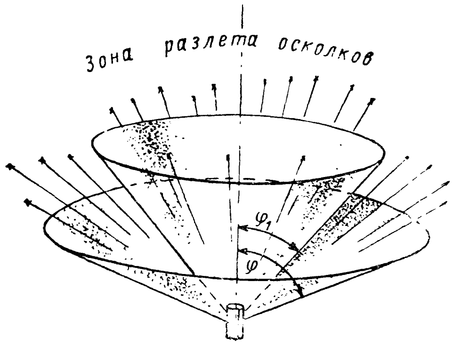


Рис. 23.2.

— уменьшением плотности потока осколков (обратно пропорционально квадрату расстояния);

— уменьшением скорости осколков под действием сопротивления воздуха.

Естественно, на больших высотах последний фактор играет малую роль, и часто при расчетах им пренебрегают.

Значения $G_1(x, y, z)$ в различных точках зоны опасных разрывов определяются, как правило, расчетным путем, на основе экспериментальных данных. Эти данные следующие.

а) **Данные о снаряде:**

— общее число осколков, образующихся при разрыве снаряда;

— вес осколка или (в случае естественного дробления) распределение осколков по весам;

— угловые границы φ_1, φ_2 конуса разлета осколков и распределение осколков по направлениям в пределах этого конуса (рис. 23.2);

— начальные скорости осколков (скорости, сообщаемые осколком разрывным зарядом).

б) **Данные о цели:**

— тип цели, ее боевая задача; понятие «поражения»;

— перечень жизненно важных агрегатов цели, их экранирование и площади в проекции на плоскость, перпендикулярную потоку осколков;

— данные, характеризующие уязвимость агрегатов по отношению к осколкам.

Осколки могут поражать агрегаты цели за счет:

— механического (пробивного) действия;

— зажигательного действия;

— инициирующего действия по боезапасу;

— гидроудара при попадании в емкости с жидкостью и некоторых других факторов.

Эффективность поражающего действия осколка при попадании в агрегат цели зависит от веса и скорости осколка и определяется в основном экспериментально.

Если корпус боевой части дробится на осколки одного и того же веса («однородное дробление») или если применяются готовые осколочные элементы, расчет координатного закона упрощается, так как для заданного положения точки разрыва вероятность поражения любого агрегата определяется только плотностью осколочного поля, определяющей среднее число попадающих в агрегат осколков.

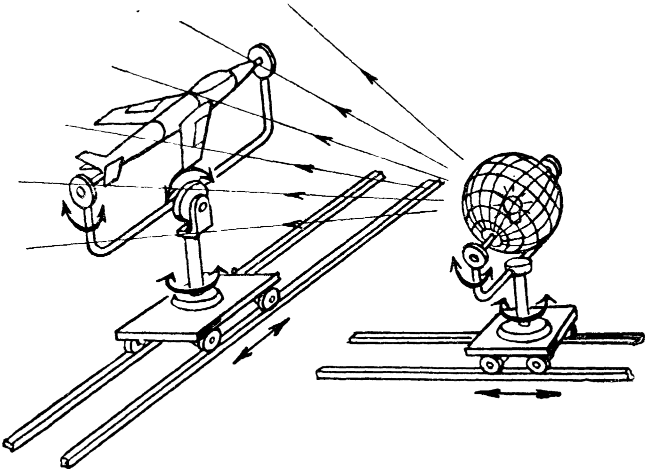


Рис. 23.3.

Чтобы вычислить закон $G_1(x, y, z)$, нужно прежде всего для каждого положения (x, y, z) точки разрыва определить среднее число осколков $\overline{m}$, попадающих в каждый уязвимый агрегат. Это среднее число может быть определено разными способами:

— геометрическим построением;

— расчетом на ЭЦВМ;

— моделированием на специальных приборах.

В качестве примера установки, моделирующей картину разлета осколков, можно привести довольно широко применяемый сферический проектор (рис. 23.3). Проектор представляет собой стеклянную сферу, покрытую глобусной сеткой меридианов и параллелей, ось которой изображает направление оси снаряда. В центре сферы помещается точечный источник света, с помощью которого изображение сетки отбрасывается на модель цели. Траектории осколков имитируются световыми лучами. Скорость движения снаряда (а в случае надобности и цели) может быть учтена соответствующим смещением светящейся точки. Зная среднее число осколков, приходящихся на каждую ячейку глобусной сетки, и количество ячеек, падающее на агрегат, можно определить для каждого

5*

агрегата среднее число осколков $\overline{m}$, попадающее в него при данном положении точки разрыва.

При расчетном определении $\overline{m}$ в основу обычно кладется принцип площадей, т. е. $\overline{m}$ находится по формуле

$$\overline{m}=S\Pi, \tag{23.1}$$

где S — площадь проекции агрегата на направление, перпендикулярное потоку осколков;

Π — плотность потока осколков (среднее число осколков на единицу площади).

Плотность Π рассчитывается исходя из закона разлета осколков. Этот закон, экспериментально определяемый «в статике» (при подрыве покоящегося снаряда), пересчитывается на условия «динамики» с учетом влияния на него скорости снаряда и скорости цели.

Определение величины $\overline{m}$ для каждого агрегата составляет наиболее трудоемкую часть расчета закона поражения. Если все величины $\overline{m}$ для каждого положения (x, y, z) точки разрыва найдены, закон поражения $G_1(x, y, z)$ определяется простым расчетом. При этом, как правило, пользуются допущением, что внутри осколочного поля точки попадания осколков распределяются независимо друг от друга (это допущение хорошо согласуется с опытом). Тогда можно считать, что число попавших в агрегат осколков есть случайная величина, подчиненная закону Пуассона с математическим ожиданием $\overline{m}$. Если каждый осколок поражает агрегат с вероятностью p, то среднее число поражающих осколков будет $\overline{m}p$. Число попавших в агрегат поражающих осколков тоже будет подчиняться закону Пуассона, но с математическим ожиданием $\overline{m}p$. Если осколки поражают агрегат независимо друг от друга (без накопления ущерба), то вероятность поражения агрегата есть вероятность попадания в него хотя бы одного поражающего осколка. Согласно закону Пуассона эта вероятность равна

$$P=1-e^{-\overline{m}p}. \tag{23.2}$$

Заметим, что тот же результат получится, если умножить на p не среднее число $\overline{m}$ попавших в агрегат осколков, а площадь агрегата S, т. е. заменить ее приведенной уязвимой площадью:

$$S^*=pS. \tag{23.3}$$

Умножая величину S^* на плотность потока осколков Π, получаем среднее число осколков, попадающих в приведенную уязвимую площадь агрегата:

$$\overline{m^*}=S^*\Pi=\overline{m}p. \tag{23.4}$$

Формула (23.2) будет иметь вид:

$$P = 1 - e^{-\overline{m}^*}. \tag{23.5}$$

Вероятность поражения агрегата одним осколком p, входящая в формулы (23.2), (23.4), зависит от его веса q и скорости встречи v с агрегатом. Вероятность p в зависимости от q и v определяется обычно экспериментально. Скорость встречи v осколка с агрегатом определяется расчетным путем с учетом скорости снаряда в момент разрыва, начальной скорости осколков, потери скорости осколка на траектории и движения самой цели.

Зная вероятность поражения каждого из жизненно важных агрегатов цели при заданном положении (x, y, z) точки разрыва, можно рассчитать координатный закон поражения цели $G_1(x, y, z)$. Если в состав цели входят жизненно важные агрегаты $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и для поражения цели достаточно поразить любой из них, то закон поражения цели равен вероятности поражения хотя бы одного агрегата и вычисляется по формуле:

$$G_1(x, y, z) = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2) \ldots (1 - P_k), \tag{23.6}$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — вероятности поражения отдельных агрегатов при данном положении точки разрыва (x, y, z). Каждая из них вычисляется по формуле:

$$P_i = 1 - e^{-\overline{m}_i^*}, \tag{23.7}$$

где $\overline{m}_i^*$ — среднее число осколков, попадающих в приведенную уязвимую площадь i-го агрегата.

Подставляя (23.7) в (23.6), получаем:

$$G_1(x, y, z) = 1 - e^{-\overline{m}_1^*} e^{-\overline{m}_2^*} \ldots e^{-\overline{m}_k^*} = 1 - e^{-\left(\overline{m}_1^* + \overline{m}_2^* + \ldots + \overline{m}_k^*\right)}$$

или

$$G_1(x, y, z) = 1 - e^{-\sum\limits_{i=1}^{k} \overline{m}_i^*}, \tag{23.8}$$

откуда, обозначая

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{m}_i^* = \overline{m}^*$$

— общее число осколков, попадающих в уязвимую площадь всех агрегатов, получим

$$G_1(x, y, z) = 1 - e^{-\overline{m}^*}. \tag{23.9}$$

Сравнивая формулы (23.9) и (23.5), видим, что по структуре они одинаковы. Приходим к выводу: *если каждый агрегат безусловно необходим для функционирования* целн, то все они могут быть объединены в один «обобщенный» агрегат и закон поражения цели вычисляется как вероятность попадания хотя бы одного осколка в приведенную уязвимую площадь этого обобщенного агрегата.

Если принять, что плотность потока осколков на всех агрегатах цели одна и та же, то для вычисления $G_1(x, y, z)$ можно пользоваться заранее построенными кривыми, изображающими суммарную приведенную площадь S^* всех уязвимых агрегатов цели в зависимости от веса осколка q и скорости встречи v (рис. 23.4). На рисунке разные кривые соответствуют разным весам осколков. При построении таких кривых принимается допущение, что приведенная уязвимая площадь S^* мало зависит от направления подхода осколков к цели и может быть учтена средним значением.

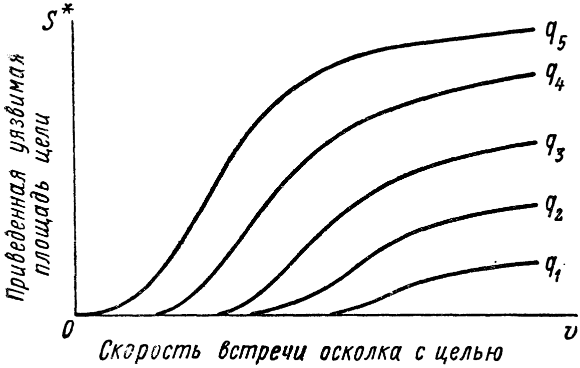


Рис. 23.4.

Несколько сложнее становится расчет координатного закона поражения, если в составе цели кроме «безусловно-необходимых» агрегатов, поражение которых равносильно поражению самой цели, есть еще так называемые «поражаемые комбинации» агрегатов. Под «поражаемой комбинацией» понимается группа из двух или более агрегатов, которые для поражения цели должны быть поражены совместно. Примерами могут служить:

— двигатели (если их два или больше);

— дублированные тяги и тросы управления;

— дублированные трубопроводы, подводящие горючее к двигателям, и т. д.

Наличие в составе цели поражаемых комбинаций означает не что иное, как накопление ущерба, а удельный вес поражаемых комбинаций в балансе уязвимости цели показывает относительную значимость этого фактора.

Для большинства воздушных целей накоплением ущерба можно, в первом приближении, пренебречь аналогично тому, как мы делали для ударных снарядов, заменяя непоказательный закон поражения показательным. При этом наличие поражаемых комбинаций приближенно учитывается тем, что некоторая часть их площади условно включается в состав приведенной уязвимой площади S^*, а часть считается вообще непоражаемой.

ГЛАВА 4

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СТРЕЛЬБЫ ПО ОДИНОЧНОЙ ЦЕЛИ

§ 24. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЖЕНИЯ ОДИНОЧНОЙ ЦЕЛИ ПРИ СТРЕЛЬБЕ УДАРНЫМИ СНАРЯДАМИ. ФОРМУЛА А. Н. КОЛМОГОРОВА

Под одиночной целью (см. гл. 2) мы условились понимать отдельный, обычно малоразмерный, объект (самолет, танк, корабль, аэростат), выполняющий определенную функцию. Задача стрельбы по одиночной цели — поразить цель, т. е. прекратить ее функционирование. Показателем эффективности стрельбы по одиночной цели является вероятность поражения:

$$W = P(A), \tag{24.1}$$

где A — поражение цели.

Методы вычисления вероятности поражения цели зависят от того, какими снарядами ведется стрельба: ударными или дистанционными; если дистанционными, то осколочными или непосредственного действия.

Сравнительно более простой является задача вычисления вероятности поражения цели при стрельбе ударными снарядами. Это объясняется тем, что ударные снаряды могут поражать цель только при прямом попадании, а размеры одиночной цели обычно невелики по сравнению с областью рассеивания снарядов. Поэтому уязвимость цели можно характеризовать законом поражения $G(m)$ (см. гл. 3, § 19), не заботясь о координатах точек попадания отдельных попавших снарядов.

Предположим, что ведется стрельба, состоящая из n выстрелов по одиночной цели, уязвимость которой характеризуется законом поражения $G(m)$. Требуется вычислить вероятность поражения цели.

Сделаем ряд гипотез:

H_1 — в цель попал ровно один снаряд;
H_2 — в цель попало ровно два снаряда;
. . . .
H_m — в цель попало ровно m снарядов;
. . . .
H_n — в цель попали все n снарядов.

Обозначим $P_{m,n}$ вероятность m-й гипотезы: «в цель попало m снарядов». По формуле полной вероятности найдем вероятность поражения цели. Для этого нужно вероятность каждой гипотезы умножить на условную вероятность поражения цели при этой гипотезе и все такие произведения сложить:

$$W = P_{1,n}G(1) + P_{2,n}G(2) + \ldots + P_{n,n}G(n)$$

или

$$W = \sum_{m=1}^{n} P_{m,n}G(m). \qquad (24.2)$$

Формулу (24.2) обычно называют «формулой Колмогорова» по имени академика А. Н. Колмогорова, впервые предложившего такой способ вычисления вероятности поражения цели.

Пример. По цели, рассмотренной в § 19 гл. 3, с законом поражения:

$$G(1) = 0{,}3;\quad G(2) = 0{,}55;\quad G(3) = 0{,}85;\quad G(4) = 1,$$

производится стрельба четырьмя независимыми выстрелами. Вероятность попадания в цель одного, двух, трех, четырех выстрелов соответственно равна:

$$P_{1,4} = 0{,}30;$$
$$P_{2,4} = 0{,}35;$$
$$P_{3,4} = 0{,}20;$$
$$P_{4,4} = 0{,}15.$$

Найти вероятность поражения цели.

Решение. По формуле (24.2) имеем

$$W = 0{,}30 \cdot 0{,}3 + 0{,}35 \cdot 0{,}55 + 0{,}20 \cdot 0{,}85 + 0{,}15 \cdot 1 = 0{,}603.$$

§ 25. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ В ЦЕЛЬ ПРИ ОДНОМ ВЫСТРЕЛЕ

Одним из необходимых элементов для вычисления вероятности поражения цели является вероятность попадания в цель при одном выстреле p. Если выстрелы независимы, то по этой вероятности непосредственно можно найти вероятности $P_{m,n}$, входящие в формулу (24.2). Если выстрелы зависимы, то все равно вероятность p является необходимым элементом расчетной схемы.

Если спроектировать цель на плоскость рассеивания линиями, параллельными направлению стрельбы, то p есть вероятность того, что точка попадания на картинной плоскости окажется в пределах некоторой области $Ц$ — проекции цели (рис. 25.1). Эта вероятность выражается формулой,

$$p = \iint\limits_{(Ц)} \varphi(x, y)\, dx dy, \qquad (25.1)$$

где $\varphi(x, y)$ — закон рассеивания.

Если выбрать координатные оси параллельно главным осям рассеивания, то закон рассеивания имеет вид:

$$\varphi(x, y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2 \left[\frac{(x-\overline{x})^2}{E_x^2} + \frac{(y-\overline{y})^2}{E_y^2}\right]}, \tag{25.2}$$

где $\overline{x}$, $\overline{y}$ — координаты центра рассеивания (систематические ошибки);

E_x, E_y — главные вероятные отклонения;

$\rho \approx 0{,}477$.

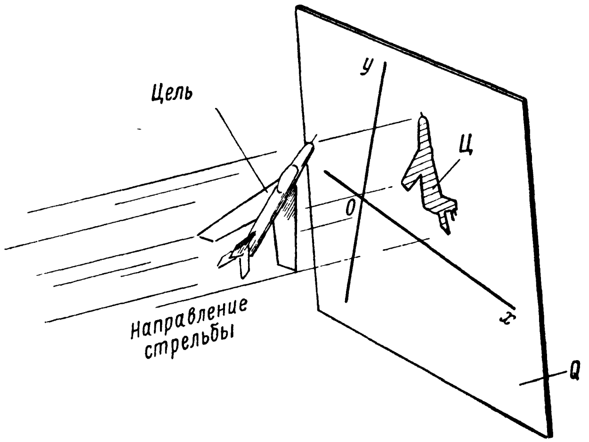


Рис. 25.1.

В некоторых случаях интеграл (25.1) выражается через известные функции. Приведем соответствующие расчетные формулы.

1. *Цель — прямоугольник со сторонами, параллельными главным осям рассеивания* (рис. 25.2).

$$p = \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta - \overline{x}}{E_x}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha - \overline{x}}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\delta - \overline{y}}{E_y}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\gamma - \overline{y}}{E_y}\right)\right], \tag{25.3}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — координаты границ цели по осям ox и oy;

$\hat{\Phi}$ — приведенная функция Лапласа (дана в приложении 1, табл. 1).

Если центр цели O совмещен с центром рассеивания, а систематические ошибки отсутствуют (рис. 25.3), то формула (25.3) принимает вид:

$$p = \hat{\Phi}\left(\frac{b_x}{E_x}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{b_y}{E_y}\right), \tag{25.4}$$

где b_x, b_y — полуразмеры цели в направлении координатных осей.

2. *Цель—круг, рассеивание—круговое* ($E_x = E_y = E$).

Если центр рассеивания совпадает с центром цели (систематическая ошибка отсутствует), то вероятность попадания в круг радиуса $r_ц$ выражается формулой

$$p = 1 - e^{-\rho^2\left(\frac{r_ц}{E}\right)^2} \tag{25.5}$$

или

$$p = 1 - e^{-(\rho R)^2}, \tag{25.6}$$

где $R = \frac{r_ц}{E}$ — радиус цели, выраженный в вероятных отклонениях.

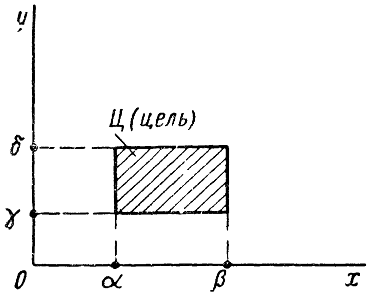


Рис. 25.2.

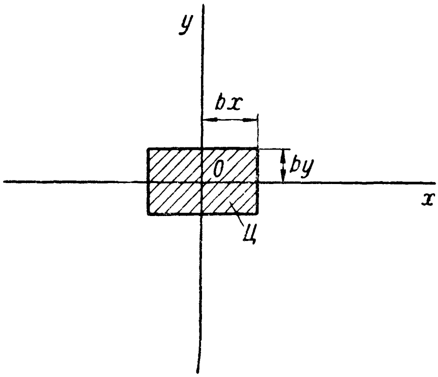


Рис. 25.3.

Если имеется систематическия ошибка (центр рассеивания смещен относительно центра цели), то вероятность попадания в круг можно вычислить по таблицам специальной функции

$$p = P(a, R). \tag{25.7}$$

Таблица значений функции $P(a, R)$ дана в приложении 1, табл. 2. Аргументами этой функции служат:

R — радиус цели в вероятных отклонениях и

a — смещение центра рассеивания от центра цели в вероятных отклонениях:

$$a = \frac{\sqrt{\overline{x}^2 + \overline{y}^2}}{E}.^{1)} \tag{25.8}$$

3. *Цель невелика по сравнению с размерами области рассеивания снарядов* (не превосходит $1/2 \div 1$ вероятных отклонений в направлении соответствующих осей).

[1] По той же таблице, полагая $a=0$, можно найти вероятность попадания в круг при отсутствии систематической ошибки.

Вероятность попадания выражается приближенной формулой:

$$p \approx \frac{\rho^2 S_ц}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2 \left(\frac{\overline{x}^2}{E_x^2} + \frac{\overline{y}^2}{E_y^2} \right)}, \tag{25.9}$$

где $S_ц$ — площадь цели.

При $\overline{x}=\overline{y}=0$ (систематические ошибки отсутствуют)

$$p \approx \frac{\rho^2 S_ц}{\pi E_x E_y}. \tag{25.10}$$

В случае, когда цель имеет произвольную конфигурацию и не является малой, вероятность попадания приходится вычислять приближенно, применяя тот или другой метод численного интегрирования. Если вычисления ведутся не на машине, а «вручную», чаще всего пользуются так называемой «сеткой рассеивания». Это — сетка, составленная из прямоугольных ячеек, вероятности попадания в которые вычислены заранее и записаны в ячейках. Сетка для кругового рассеивания со стороной ячейки $0{,}2E$ дана в приложении 2.

Существует два способа применения сетки рассеивания:

— перестроить сетку в масштабе цели;

— перестроить цель в масштабе сетки.

Термин «перестроить» (вместо «построить») употреблен здесь потому, что в общем случае $E_x \neq E_y$, а значит, при построении сетки в масштабе цели ее ячейки из квадратных становятся прямоугольными; при построении же цели в масштабе сетки берутся разные масштабы по осям.

После построения и наложения сетки подсчитываются вероятности попадания во все ячейки, накрытые целью. Если ячейка накрыта частично, берется соответствующая доля вероятности попадания в ячейку. Первый способ (построение сетки в масштабе цели) рекомендуется применять в тех случаях, когда цель имеет сравнительно сложную конфигурацию (например, самолет).

Приведем примеры на вычисление вероятности попадания.

Пример 1. Самолет, по которому ведется стрельба, можно приближенно заменить прямоугольником с размерами $2b_x = 20$ *м*; $2b_y = 2$ *м*.

Систематические ошибки отсутствуют; $E_x = 10$ *м*, $E_y = 5$ *м*. Найти вероятность попадания в самолет при одном выстреле.

Решение. $b_x = 5$; $b_y = 1$.

По формуле (25.4), пользуясь табл. 1 прилож. 1, находим

$$p = \hat{\Phi}\left(\frac{5}{10}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{1}{5}\right) = 0{,}264 \cdot 0{,}107 \approx 0{,}028.$$

Пример 2. Для тех же условий найти вероятность попадания по приближенной формуле (25.10).

Решение.

$$p \approx \frac{\rho^2 \cdot 20}{\pi \cdot 10 \cdot 5} \approx 0{,}029 \quad (\rho^2 \approx 0{,}2275).$$

Пример 3. Пусть производится стрельба по самолету снарядами «воздух—воздух», снабженными радиовзрывателем. Радиовзрыватель срабатывает на расстоянии от центра самолета — цели не более 25 *м* (рис. 25.4). Рассеивание — круговое, систематическая ошибка отсутствует, $E_x = E_y = E = 20$ *м*. Найти вероятность того, что взрыватель сработает.

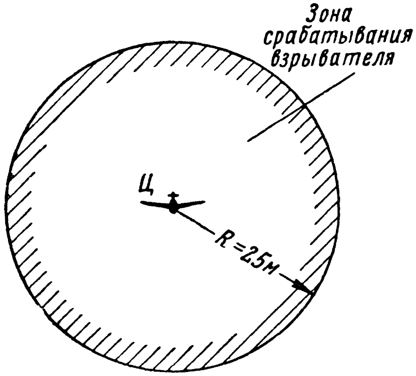


Рис. 25.4.

Решение. По формуле (25.5) имеем

$$p = 1 - e^{-\rho^2 \left(\frac{25}{20}\right)^2} \approx 0{,}297.$$

То же значение находим по табл. 2 прилож. 1 $[P(a,\ R)]$ при $R = \frac{25}{20} = 1{,}25$ и $a = 0$.

Пример 4. Те же условия, что в предыдущем примере, но имеется систематическая ошибка

$$r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = 30 \text{ м}.$$

Решение. По табл. 2 прилож. 1 при $R = 1{,}25$, $a = \frac{30}{20} = 1{,}5$ находим

$$p \approx 0{,}195\,^{1)}.$$

§ 26. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЖЕНИЯ ЦЕЛИ ПРИ НЕЗАВИСИМЫХ ВЫСТРЕЛАХ

Проще всего вычисляется вероятность поражения цели при независимых выстрелах ($\mu = 0$). В этом случае вероятности $P_{m,n}$, входящие в формулу Колмогорова (24.2), вычисляются по теореме о повторении опытов.

Если выстрелы производятся в одинаковых условиях (вероятность попадания p при всех выстрелах одна и та же), то вероятность m попаданий при n выстрелах выражается формулой

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{26.1}$$

где $q = 1 - p$ — вероятность непопадания в цель при одном выстреле.

Если же вероятности попадания при разных выстрелах различны и равны $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$, то вероятность $P_{m,n}$ находится следующим образом: нужно составить „производящую функцию“

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z)\ \ldots\ (q_n + p_n z), \tag{26.2}$$

раскрыть скобки и найти коэффициент при z^m.

---

[1]) Для приобретения опыта в применении сетки рассеивания рекомендуется проверить последний результат по сетке двумя способами: 1) построив сетку в масштабе цели и 2) построив цель в масштабе сетки.

Найденные вероятности $P_{m,n}$ подставляются в формулу Колмогорова

$$W = \sum_{m=1}^{n} P_{m,n} G(m), \qquad (26.3)$$

и вычисляется вероятность поражения цели W.

Пример 1. По цели, рассмотренной в § 19 гл. 3 и имеющей закон поражения

$$G(1) = 0{,}3; \quad G(2) = 0{,}55; \quad G(3) = 0{,}85; \quad G(4) = G(5) = \ldots = 1,$$

производится стрельба пятью независимыми выстрелами. Вероятность попадания в цель при одном выстреле $p = 0{,}4$. Найти вероятность поражения цели.

Решение. По формуле (26.1) имеем:

$$P_{1,5} = 5 \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}259;$$
$$P_{2,5} = 10 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}346;$$
$$P_{3,5} = 10 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}230;$$
$$P_{4,5} = 5 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6 = 0{,}072;$$
$$P_{5,5} = 0{,}4^5 = 0{,}010.$$

По формуле (26.3) имеем

$$W = 0{,}259 \cdot 0{,}3 + 0{,}346 \cdot 0{,}55 + 0{,}230 \cdot 0{,}85 + 0{,}072 \cdot 1{,}00 + $$
$$+ 0{,}010 \cdot 1{,}00 = 0{,}545.$$

Пример 2. По той же цели производится четыре выстрела с вероятностями попадания:

$$p_1 = 0{,}4; \quad p_2 = 0{,}4; \quad p_3 = 0{,}5; \quad p_4 = 0{,}2.$$

Найти вероятность поражения цели.

Решение. Составляем производящую функцию:

$$\varphi_4(z) = (0{,}6 + 0{,}4z)^2 (0{,}5 + 0{,}5z)(0{,}8 + 0{,}2z) =$$
$$= 0{,}144 + 0{,}372z + 0{,}340z^2 + 0{,}128z^3 + 0{,}016z^4,$$

откуда

$$P_{0,4} = 0{,}144; \quad P_{1,4} = 0{,}372; \quad P_{2,4} = 0{,}340; \quad P_{3,4} = 0{,}128; \quad P_{4,4} = 0{,}016.$$

По формуле (26.3) имеем

$$W = 0{,}372 \cdot 0{,}3 + 0{,}340 \cdot 0{,}55 + 0{,}128 \cdot 0{,}85 + 0{,}016 \cdot 1 = 0{,}424.$$

Рассмотрим наиболее простой случай, когда для поражения цели *заведомо достаточно одного попадания*. В этом случае закон поражения $G(m)$ равен единице для любого $m \geqslant 1$:

$$G(0) = 0; \; G(1) = G(2) = \ldots = G(m) = 1.$$

В этом простейшем случае пользование законом поражения $G(m)$ и формулой Колмогорова не нужно: гораздо проще сразу вычислить *вероятность хотя бы одного попадания в цель*. Она равна:

$$W = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots (1 - p_n), \qquad (26.4)$$

или, короче (употребляя знак произведения П),

$$W = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i). \qquad (26.5)$$

Если $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, то

$$W = 1 - (1 - p)^n. \qquad (26.6)$$

Столь же простой является задача о вычислении вероятности поражения цели при показательном законе поражения.

Действительно, при отсутствии накопления ущерба (а именно этому случаю соответствует показательный закон) снаряды поражают цель независимо друг от друга. Чтобы при каком-либо выстреле (например, i-м) цель была поражена, необходимо совмещение двух событий:

— i-й снаряд попал в цель;

— попавший в цель i-й снаряд поразил цель.

Следовательно, вероятность поражения цели i-м выстрелом будет равна

$$p_i r, \qquad (26.7)$$

где p_i — вероятность попадания i-го выстрела в цель;

$r = \frac{1}{\omega}$ — вероятность поражения цели при одном попадании.

Вероятность поражения цели n независимыми выстрелами вычислится как вероятность того, что хотя бы один из снарядов поразит цель:

$$W = 1 - (1 - p_1 r)(1 - p_2 r) \ \ldots \ (1 - p_n r), \qquad (26.8)$$

или, короче (употребляя знак произведения П),

$$W = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i r). \qquad (26.9)$$

Формула (26.9) отличается от формулы (26.5) только тем, что в ней вместо вероятности попадания p_i стоит вероятность поражения $p_i r$.

В случае, когда вероятности попадания при всех выстрелах одинаковы ($p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$), формула (26.9) принимает вид:

$$W = 1 - (1 - p_i r)^n. \qquad (26.10)$$

Очевидно, выведенные формулы будут приближенно справедливы и в случае, когда закон поражения не показательный, но приближенно заменен показательным.

Вместо вычислений по формулам (26.6) и (26.10), имеющим совершенно одинаковую структуру, можно пользоваться специальной таблицей (см. табл. 3 прилож. 1), где приведены значения функции

$$W = 1 - (1 - p)^n.$$

В случае, когда $r=1$ (для поражения цели достаточно одного попадания), в табл. 3 входят непосредственно по вероятности p попадания при одном выстреле. В случае $r<1$ в табл. 3 входят вместо p по величине $p^*=pr$.

Если при вычислении W не требуется большой точности, то вместо таблицы можно пользоваться графиками функции $W=1-(1-p)^n$ (см. рис. 1 и 2 прилож. 2). На первом графике (рис. 1) по оси абсцисс отложено число выстрелов n, а по оси ординат — величина $W=1-(1-p)^n$. Отдельные кривые оцифрованы соответствующими значениями p. Если $r<1$, то вместо p берут величину $p^*=rp$.

На рис. 2 прилож. 2 приведены графики той же функции $W=1-(1-p)^n$, но в зависимости не от n, а от p.

Пример 3. Цель имеет приближенно показательный закон поражения: среднее необходимое число попаданий $\omega=4$. По цели производится 6 выстрелов; вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность поражения цели.

Решение. Имеем $r=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{4}$. По табл. 3 прилож. 1, полагая в ней $p = p^* = \frac{0,8}{4} = 0,2$, находим $W = 0,738 \approx 0,74$. То же значение W можно снять с графика (рис. 1 или рис. 2 прилож. 2).

§ 27. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЖЕНИЯ ЦЕЛИ ПРИ ЗАВИСИМЫХ ВЫСТРЕЛАХ

В случае, когда выстрелы зависимы, задача вычисления вероятности поражения цели усложняется, так как вычислять вероятности $P_{m,n}$ по теореме о повторении опытов уже нельзя. Однако, если зависимость выстрелов сводится к схеме двух групп ошибок, можно сравнительно простым способом вычислить вероятность поражения цели. Идея этого способа сводится к следующему.

Сделаем гипотезу о том, что групповые ошибки приняли вполне определенные значения (x, y). Мы знаем, что при схеме двух групп ошибок зависимость выстрелов обусловлена *только наличием групповых случайных ошибок*; значит, если их значения (x, y) зафиксированы, то *выстрелы при этом предположении уже будут независимыми*. А значит, вероятность поражения цели при *заданных* x, y может быть вычислена, как для независимых выстрелов. Обозначим ее $W(x, y)$.

Зная $W(x, y)$, можно по формуле полной вероятности найти *полную вероятность поражения цели*:

$$W = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} W(x, y)\, \varphi_г(x, y)\, dx dy, \qquad (27.1)$$

где $\varphi_г(x, y)$ — закон группового рассеивания.

Действительно, $\varphi_г(x, y)\,dxdy$ есть не что иное, как вероятность гипотезы, состоящей в том, что групповые ошибки приняли значения в элементарной окрестности S точки (x, y) (рис. 27.1); $W(x, y)$ — вероятность поражения цели при этой гипотезе. Суммируя (интегрируя) произведения этих вероятностей, получаем полную вероятность поражения цели.

Определим условную вероятность $W(x, y)$, входящую в формулу (27.1). Так как при фиксированных (x, y) выстрелы независимы, то можно применить формулу (24.2):

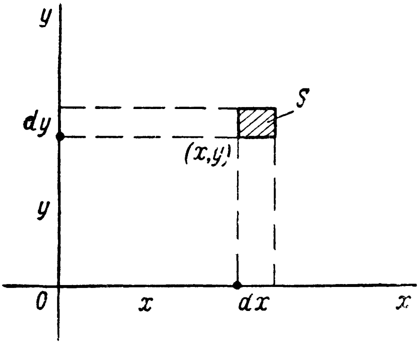


Рис. 27.1.

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{n} P_{m,n}(x, y)\, G(m), \qquad (27.2)$$

где $P_{m,n}(x, y)$ — условная вероятность ровно m попаданий в цель при условии, что групповые ошибки приняли значения (x, y).

Если закон поражения показательный, то формула для $W(x, y)$ упрощается (см. § 25) и принимает вид:

$$W(x, y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - p_i(x, y)\, r], \qquad (27.3)$$

где $p_i(x, y)$ — условная вероятность попадания в цель при i-м выстреле при условии, что групповые ошибки приняли значения (x, y).

Если при этом стрельба сосредоточенная и условия ее от выстрела к выстрелу не меняются, то

$$W(x, y) = 1 - [1 - p(x, y)\, r]^n. \qquad (27.4)$$

Таким образом, формулы для вероятности поражения цели при схеме двух групп ошибок и показательном законе поражения будут:

— при стрельбе в переменных условиях:

$$W = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - p_i(x, y)\, r]\right\} \varphi_г(x, y)\, dxdy; \qquad (27.5)$$

— при стрельбе в одинаковых условиях:

$$W = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \{1 - [1 - p(x, y)\, r]^n\}\, \varphi_г(x, y)\, dxdy. \qquad (27.6)$$

В формулах (27.5) и (27.6) условная вероятность попадания при одном выстреле $[p_i(x, y)$ или $p(x, y)]$ вычисляется, как описано в § 25, с той лишь разницей, что **учитывается только индивидуальное рассеивание, а центр рассеивания смещается на величину групповых ошибок** x, y.

Интегралы типа (27.5), (27.6) легко могут быть вычислены на машинах. Если они вычисляются «вручную», применяют какую-либо приближенную формулу для численного вычисления двойных интегралов.

§ 28. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПОРАЖЕНИЯ ЦЕЛИ ПО ТАБЛИЦАМ И ГРАФИКАМ

Так как вычисление интегралов типа (27.5), (27.6) довольно трудоемко, то на практике обычно вычисляют вероятность поражения цели по заранее составленным таблицам или графикам.

В качестве примера можно привести таблицы для вероятности поражения цели, где приводятся значения вероятности поражения цели W в функции четырех параметров:

— число выстрелов n;

— вероятность попадания в цель при одном выстреле p;

— относительная приведенная уязвимая площадь цели $r=\frac{1}{\omega}$,

— коэффициент корреляции выстрелов μ.

Вероятность p вычисляется с учетом полного (суммарного) рассеивания снарядов.

Таблицы составлены для случая сосредоточенной стрельбы и отсутствия систематических ошибок. Конфигурация цели принята прямоугольной с соотношением сторон $b_x : b_y = 1 : 4$.

Практическое пользование такими таблицами не всегда удобно в связи с необходимостью интерполирования по разным аргументам, поэтому на практике часто пользуются более грубыми, но более простыми способами вычисления W.

Один из таких приближенных методов, например, состоит в следующем. Вероятность поражения цели вычисляется по эмпирической формуле:

$$W = kW^{(н)} + (1-k)\,W^{(ф)}, \tag{28.1}$$

где $W^{(н)}$ — вероятность поражения цели при независимых выстрелах ($\mu=0$);

$W^{(ф)}$ — вероятность поражения цели при функционально зависимых выстрелах ($\mu=1$);

k — коэффициент, зависящий от коэффициента корреляции выстрелов μ и величины

$$M = npr, \tag{28.2}$$

где n — число выстрелов;

p — вероятность попадания в цель при одном выстреле;

$r=\frac{1}{\omega}$ — характеристика уязвимости цели.

Для коэффициента k составлена специальная таблица (см. табл. 4 прилож. 1). Величины $W^{(н)}$ и $W^{(ф)}$ определяются формулами:

$$W^{(н)} = 1 - (1 - pr)^n, \tag{28.3}$$

$$W^{(ф)} = p\,[1 - (1 - r)^n]. \tag{28.4}$$

Вместо того чтобы вычислять величины $W^{(н)}$ и $W^{(ф)}$ по формулам (28.3) и (28.4), можно воспользоваться табл. 3 приложения 1 или графиками (рис. 1 или 2 прилож. 2). При вычислении $W^{(ф)}$ нужно войти в таблицу или график вместо p по величине r и результат умножить на p.

Пример 1. По цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле $p=0{,}2$, производится 10 выстрелов. Коэффициент корреляции $\mu=0{,}8$. Среднее необходимое число попаданий $\omega=3$. Найти вероятность поражения цели.

Решение.

$$M = npr = \frac{np}{\omega} = \frac{10 \cdot 0{,}2}{3} \approx 0{,}667.$$

По табл. 4 прилож. 1 находим для $M=0{,}667$, $\mu=0{,}8$: $k=0{,}67$.

По табл. 3 прилож. 1 находим при $p=0{,}0667$

$$W^{(н)} = 1 - (1 - 0{,}0667)^{10} \approx 0{,}49.$$

Аналогично, входя в таблицу с величиной $r=0{,}333$, имеем

$$W^{(ф)} = 0{,}2\,[1 - (1 - 0{,}333)^{10}] \approx 0{,}183.$$

По формуле (28.1)

$$W \approx 0{,}389.$$

Пример 2. Предположим, что в пределах веса, отведенного на вооружение истребителя-перехватчика, можно создать два варианта:

Вариант 1. 20 неуправляемых реактивных снарядов, выстреливаемых залпом (короткой серией); среднее необходимое число попаданий $\omega=1{,}12$; рассеивание круговое $E_x=E_y=0{,}008Д$ (*м*), где $Д$ — дальность стрельбы. Коэффициент корреляции $\mu=0{,}8$; стрельба ведется с дальности $Д=700\div800$ *м*.

Вариант 2. Две пушки калибра 30 *мм*, скорострельность 600 *в/мин*, среднее необходимое число попаданий $\omega=4$; рассеивание: $E_x=0{,}01Д$, $E_y=0{,}005Д$; коэффициент корреляции $\mu=0{,}5$. Стрельба ведется с дальностей $Д=800\div900$ и $600\div700$ *м* двумя секундными очередями.

Воздушную цель можно схематически представить прямоугольником с размерами $2bx=15$ *м*, $2by=2$ *м*. Определить, какой вариант вооружения более эффективен.

Решение. В качестве показателя эффективности выбираем вероятность поражения цели. Для варианта 1 это будет вероятность поражения цели одним залпом, а для варианта 2 — двумя очередями.

Вариант 1.

Средняя дальность стрельбы $Д=750$ *м*;

$$E_x = E_y = 6 \text{ м}.$$

Вероятность попадания при одном выстреле:

$$p = \hat{\Phi}\left(\frac{7{,}5}{6}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{1}{6}\right) = \hat{\Phi}(1{,}25)\ \hat{\Phi}(0{,}167).$$

По табл. 1 прилож. 1:

$$\hat{\Phi}(1{,}25) = 0{,}601; \quad \hat{\Phi}(0{,}167) = 0{,}090;$$

$$p = 0{,}054;$$

$$M = npr = \frac{np}{\omega} = \frac{20 \cdot 0{,}054}{1{,}12} = 0{,}964.$$

С помощью табл. 4 прилож. 1 находим $W \approx 0{,}43$.

Вариант 2.

Вычисляем вероятность поражения цели первой и второй очередью:

Очередь	$Д$	E_x	E_y	p	$M=npr$	W
1-я	850	8,5	4,25	$\hat{\Phi}\left(\frac{7{,}5}{8{,}5}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{1}{4{,}25}\right) = 0{,}0576$	0,288	0,24
2-я	650	6,5	3,25	$\hat{\Phi}\left(\frac{7{,}5}{6{,}5}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{1}{3{,}25}\right) = 0{,}0930$	0,465	0,35

Вероятность поражения цели двумя очередями (считая их независимыми) будет

$$W = 1 - (1 - 0{,}24)(1 - 0{,}35) \approx 0{,}51.$$

Второй вариант вооружения выгоднее первого.

§ 29. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЖЕНИЯ ЦЕЛИ ПРИ СТРЕЛЬБЕ ДИСТАНЦИОННЫМИ СНАРЯДАМИ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ДЕЙСТВИЯ (ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ)

В предыдущих параграфах данной главы мы рассмотрели способ вычисления вероятности поражения цели при стрельбе ударными снарядами. Здесь и далее мы рассмотрим способы вычисления вероятности поражения цели при стрельбе дистанционными снарядами. Эти способы будут различны в зависимости от того:

— характерно ли для снарядов непосредственное или осколочное действие;

— происходит ли рассеивание точек разрыва на плоскости или в пространстве.

В данном параграфе рассмотрим самый простой случай: стрельбу дистанционными снарядами непосредственного действия с плоским рассеиванием.

Пусть происходит стрельба по цели $Ц$ на плоскости xoy; для поражения цели $Ц$ достаточно попадания хотя бы одного снаряда в зону безусловного поражения $Ц'$ (рис. 29.1). Эту зону $Ц'$ можно рассматривать как обобщенную цель, одного попадания в которую достаточно для ее поражения. Таким образом, случай стрельбы дистанционными снарядами непосредственного действия введением обобщенной цели $Ц'$ сводится к ранее рассмотренному случаю стрельбы ударными снарядами при $r = \frac{1}{\omega} = 1$.

Очевидно, размеры и форма обобщенной цели зависят от:
— прочности цели;
— разрушительной мощи снаряда;
— направленности его действия.

Если радиус поражающего действия снаряда $R_п$ во всех направлениях одинаков, то для получения границ обобщенной цели $Ц'$

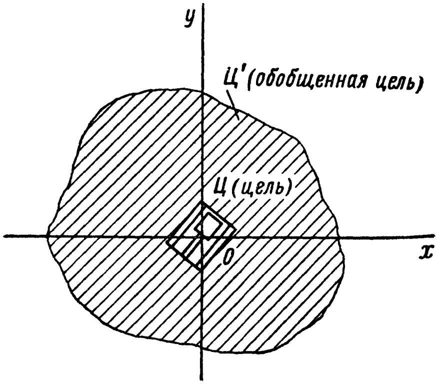


Рис. 29.1.

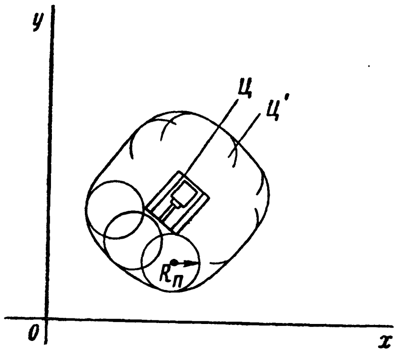


Рис. 29.2.

нужно провести вокруг цели $Ц$ кривую, отстоящую от нее всюду на одинаковое расстояние $R_п$ (рис. 29.2).

В случае, когда размеры цели $Ц$ малы по сравнению с радиусом поражения $R_п$, а направленность взрыва отсутствует, обобщенную цель $Ц'$ можно представить в виде круга радиуса $R_п$.

Вероятность поражения одиночной цели при одном выстреле есть не что иное, как вероятность попадания в обобщенную цель $Ц'$. Эта вероятность вычисляется совершенно теми же способами, как вероятность попадания в плоскую цель при стрельбе ударными снарядами (см. § 25).

Если цель $Ц'$ имеет сложную конфигурацию, применяется сетка рассеивания. Если цель $Ц'$ имеет вид круга (или может быть заменена кругом), рассеивание круговое и систематическая ошибка отсутствует, то

$$p = 1 - e^{-\rho^2 \left(\frac{R_{ц'}}{E}\right)^2}, \qquad (29.1)$$

где $R_{ц'}$ — радиус обобщенной цели;
$E = E_x = E_y$ — вероятное отклонение кругового рассеивания.

Если имеется систематическая ошибка, то вероятность попадания p может быть вычислена по таблице значений функции $P(a, R)$ (см. табл. 2 прилож. 1), где R — радиус обобщенной цели $Ц'$ в вероятных отклонениях:

$$R = \frac{R_{ц'}}{E}; \tag{29.2}$$

a — радиальная систематическая ошибка, выраженная в вероятных отклонениях:

$$a = \frac{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}{E}. \tag{29.3}$$

При стрельбе n независимыми выстрелами вероятность поражения вычисляется как вероятность хотя бы одного попадания в обобщенную цель:

$$W = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i), \tag{29.4}$$

где p_i — вероятность попадания в $Ц'$ при i-м выстреле;
n — число выстрелов.

Если выстрелы производятся в одинаковых условиях ($p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$), то

$$W = 1 - (1 - p)^n. \tag{29.5}$$

Если выстрелы зависимы, то вероятность поражения цели выражается интегралом:

$$W = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \{1 - [1 - p(x, y)]^n\} \varphi_г(x, y)\, dx\, dy, \tag{29.6}$$

где $p(x, y)$ — условная вероятность попадания в цель $Ц'$ при фиксированных групповых ошибках;
$\varphi_г(x, y)$ — закон группового рассеивания.

Этот интеграл полностью совпадает с интегралом (27.6) при $r = 1$. Поэтому вероятность (29.6) можно приближенно вычислять по тем же таблицам и графикам, которые применяются для случая стрельбы ударными снарядами.

Пример 1. Производится стрельба тремя снарядами с мощными боевыми частями по малоразмерной (точечной) цели — подводной лодке. Зона $Ц'$ имеет вид круга с центром в центре лодки и с радиусом $R_п = 600$ *м*. Выстрелы независимы, $E_x = E_y = 400$ *м*. Систематическая ошибка отсутствует. Найти вероятность поражения цели W.

Решение. Радиус цели $Ц'$ в вероятных отклонениях

$$R_{ц'} = \frac{600}{400} = 1{,}5.$$

По таблице значений функции $P(a, R)$ (табл. 2 прилож. 1) при $R = 1{,}5$; $a = 0$ имеем

$$p \approx 0{,}40.$$

По табл. 3 прилож. 1 для $p=0{,}40$, $n=3$ находим

$$W \approx 0{,}85.$$

Пример 2. Та же задача, но имеется систематическая ошибка: центр рассеивания смещен от центра цели на 800 *м*.

Решение. По таблице значений функции $P(a, R)$ (табл. 2 прилож. 1) при $R=1{,}5$, $a=2{,}0$ находим:

$$p = 0{,}198.$$

По графику (рис. 2 прилож. 2) для $p=0{,}198$, $n=3$ имеем

$$W \approx 0{,}58.$$

Пример 3. В условиях примера 1 вычислить вероятность поражения цели, если выстрелы зависимы и коэффициент корреляции $\mu=0{,}7$.

Решение. Определяем W. Из примера 1 $W^{(н)} = 0{,}85$. Так как $r = 1$, то $W^{(ф)} = p = 0{,}40$.

Вычисляем

$$M = npr = np = 1{,}20.$$

По табл. 4 прилож. 1 находим $k=0{,}76$; по формуле (28.1)

$$W = 0{,}76 \cdot 0{,}85 + 0{,}24 \cdot 0{,}40 \approx 0{,}74.$$

§ 30. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЖЕНИЯ ЦЕЛИ ПРИ СТРЕЛЬБЕ ДИСТАНЦИОННЫМИ СНАРЯДАМИ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ДЕЙСТВИЯ (ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СЛУЧАЙ)

Пусть рассеивание снарядов происходит в трехмерном пространстве $xoyz$ (рис. 30.1); ось oz направлена по направлению под-

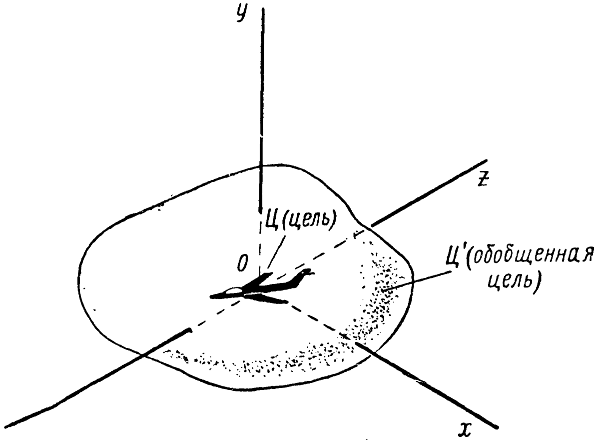


Рис. 30.1.

хода снарядов к цели; плоскость рассеивания xoy — перпендикулярно ей. Вокруг цели *Ц* построена зона поражения — обобщенная цель *Ц'*.

Вероятность поражения цели при одном выстреле равна вероятности p попадания точки разрыва в зону $Ц'$. Если известен закон рассеивания $\varphi(x, y, z)$, то

$$p = \iiint\limits_{(Ц')} \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{30.1}$$

Интеграл (30.1) в общем случае через известные функции не выражается, и его нужно вычислять численно. Однако, учитывая, что конфигурация обобщенной цели $Ц'$, как правило, известна лишь ориентировочно, можно приближенно заменить ее какой-либо областью простых очертаний, вероятность попадания в которую вычисляется сравнительно легко.

В частности, можно заменить цель $Ц'$ прямоугольным параллелепипедом или цилиндром.

Приведем соответствующие расчетные формулы (закон $\varphi(x, y, z)$ предполагается нормальным).

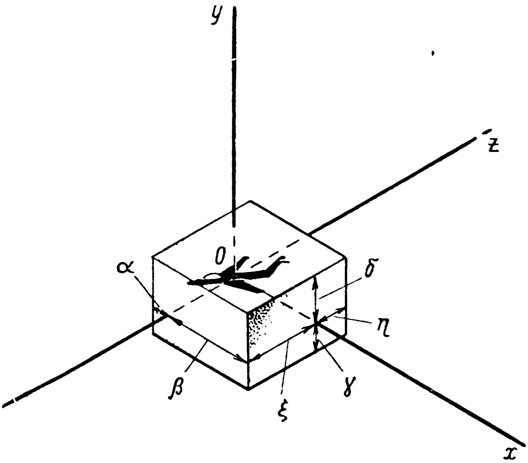


Рис. 30.2

1. Цель $Ц'$ — прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными главным осям рассеивания (рис. 30.2), ограниченный по осям ox, oy, oz соответственно координатами (α, β), (γ, δ), (ε, η).

Вероятность попадания:

$$p = \frac{1}{8}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta - \bar{x}}{E_x}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha - \bar{x}}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\delta - \bar{y}}{E_y}\right) - \right.$$
$$\left. - \hat{\Phi}\left(\frac{\gamma - \bar{y}}{E_y}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\eta - \bar{z}}{E_z}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\varepsilon - \bar{z}}{E_z}\right)\right],$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — координаты центра рассеивания;
E_x, E_y, E_z — главные вероятные отклонения.

2. Цель $Ц'$ — круговой цилиндр с плоскостью основания, параллельной плоскости xoy (рис. 30.3). Рассеивание в плоскости xoy круговое, $E_x = E_y = E$.

Вероятность попадания:

$$p = p_0 p_z, \tag{30.2}$$

где p_0 — вероятность попадания в основание цилиндра;
p_z — вероятность попадания точки разрыва в слой, ограниченный основаниями цилиндра.

Вероятность p_0 определяется по таблице функции $P(a, R)$ (см. табл. 2 прилож. 1)

$$p_0 = P(a, R),$$

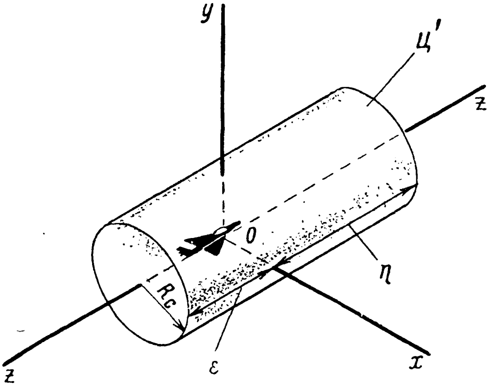


Рис. 30.3.

где a — систематическая ошибка (в вероятных отклонениях) на плоскости xoy:

$$a = \frac{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}{E};$$

R — радиус основания цилиндра в вероятных отклонениях:

$$R = \frac{R_c}{E}.$$

Вероятность p_z находится по формуле

$$p_z = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\eta - \bar{z}}{E_z}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\varepsilon - \bar{z}}{E_z}\right)\right], \qquad (30.3)$$

где ε, η — координаты, ограничивающие цилиндр по оси oz;

$\bar{z}$ — систематическая ошибка по оси oz;

E_z — вероятное отклонение по оси oz.

Заметим, что для цилиндрической цели, основание которой представляет собой не круг, а область D произвольной формы (рис. 30.4), формула (30.2) остается в силе, если в ней за p_0 принята вероятность попадания в область D, лежащую в основании цилиндра. Эта вероятность может быть вычислена, например, по сетке рассеивания.

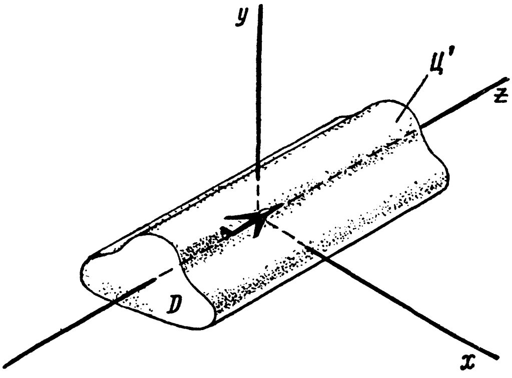


Рис. 30.4.

Если обобщенная цель $Ц'$ имеет произвольную конфигурацию, то можно приближенно разбить ее на ряд цилиндрических областей (рис. 30.5), вычислить вероятность попадания в каждую из них и просуммировать эти вероятности.

Описанные выше способы вычисления вероятности попадания (поражения) относятся к случаю, когда закон рассеивания нормальный, т. е. к случаю стрельбы снарядами с дистанционным взрывателем.

Если взрыватель неконтактный (работает от цели), задача несколько усложняется, так как параметры закона рассеивания точек разрыва по дальности ($\bar{z}$ и E_z) зависят от координат (x, y) точки попадания в картинной плоскости:

$$\bar{z}=\bar{z}(x, y);\ E_z=E_z(x, y). \quad (30.4)$$

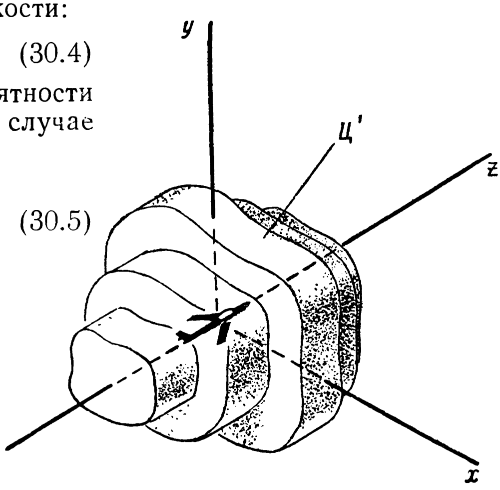


Рис. 30.5.

Общая формула для вероятности попадания в зону $Ц'$ в этом случае имеет вид:

$$p=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\varphi(x, y)\,dxdy, \quad (30.5)$$

где $p(x, y)$ — вероятность попадания точки разрыва по глубине в пределы зоны $Ц'$, вычисленная при условии, что координаты точки попадания в картинной плоскости равны (x, y);

$\varphi(x, y)$ — закон рассеивания в картинной плоскости.

Часто вычисление интеграла удается упростить. Например, можно представить зависимости (30.4), как зависимости не от двух аргументов x, y, а от одного — «промаха» снаряда:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},$$

т. е. записать их в виде:

$$\bar{z}=\bar{z}(r);\ E_z=E_z(r). \quad (30.6)$$

Если при этом рассеивание круговое, а обобщенная цель $Ц'$ может быть заменена прямым круговым цилиндром, то можно вычислить вероятность попадания p как сумму вероятностей попадания в полые цилиндрические области $Ц'_1$, $Ц'_2$, ..., $Ц'_k$ [1] (рис. 30.6). Для каждой из них вероятность попадания можно вычислить по формуле (30.2), полагая в ней p_0 равной вероятности попадания в кольцеобразную зону (разности вероятностей попадания в огра-

[1] Полые, за исключением последнего, центрального, цилиндра.

ничивающие ее круги), а при вычислении p_z по формуле (30.3) полагать

$$\bar{z}=\bar{z}(r_{\text{ср}}),\ E_z=E_z(r_{\text{ср}}), \tag{30.7}$$

где $r_{\text{ср}}$ — средний радиус кольца, лежащего в основании области.

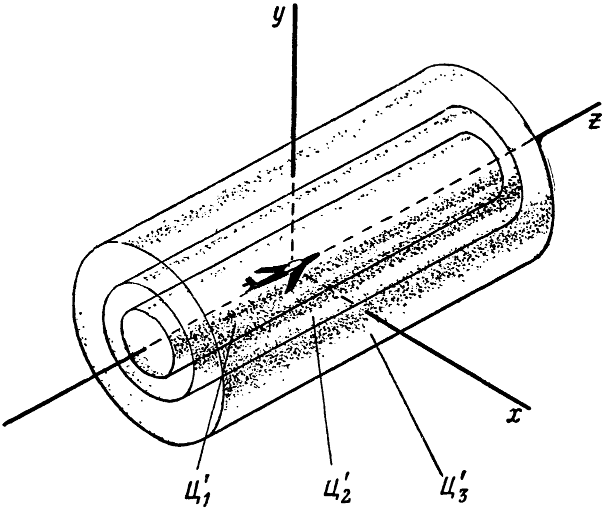


Рис. 30.6.

В случае, когда по цели производится не один, а несколько независимых выстрелов, вероятность поражения цели вычисляется по формуле:

$$W=1-(1-p_1)(1-p_2)\ \ldots\ (1-p_n), \tag{30.8}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — вероятность попадания в обобщенную цель $Ц'$ при различных выстрелах.

Если эти вероятности одинаковы, формула (30.8) упрощается и принимает вид:

$$W=1-(1-p)^n, \tag{30.9}$$

где p — вероятность попадания в обобщенную цель $Ц'$ при одном выстреле.

В случае, если выстрелы зависимы, формулы для вероятности поражения цели значительно усложняются. На этом случае мы останавливаться не будем.

Пример 1. Производится стрельба по воздушной цели снарядом непосредственного действия с пространственным рассеиванием. Снаряд поражает цель, если разрывается в пределах прямоугольного параллелепипеда с размерами (рис. 30.7)

$$Ц_x=Ц_y=100\ м;\ \ Ц_z=200\ м.$$

Снаряд снабжен дистанционным взрывателем. Главные вероятные отклонения:

$$E_x = E_y = E = 50 \text{ м}; \quad E_z = 200 \text{ м}.$$

Систематическая ошибка отсутствует.

Найти вероятность поражения цели: а) при одном выстреле; б) при шести независимых выстрелах.

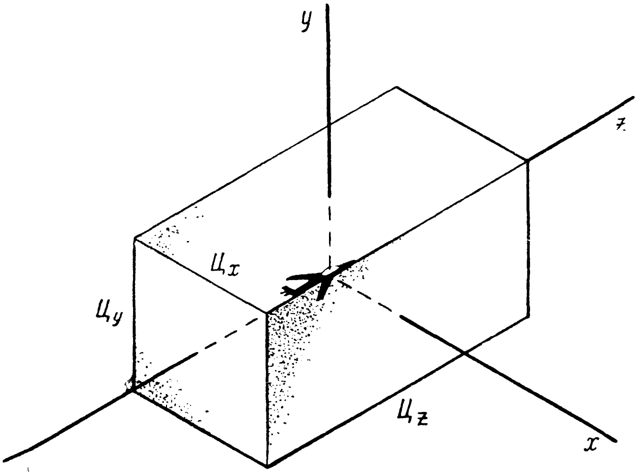


Рис. 30.7.

Решение: а) По формуле (30.1) для одного выстрела с помощью табл. 1 прилож. 1 находим

$$p = \frac{1}{8}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{50}{50}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{-50}{50}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{50}{50}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{-50}{50}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{100}{200}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{-100}{200}\right)\right] =$$

$$= \hat{\Phi}(1)\,\hat{\Phi}(1)\,\hat{\Phi}(0{,}5) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}264 \approx 0{,}066.$$

б) Вероятность поражения цели при шести выстрелах находим по табл. 3 прилож. 1 или по графику (рис. 1 прилож. 2):

$$W = 1 - (1 - 0{,}066)^6 \approx 0{,}34.$$

Пример 2. Зона поражения снарядом воздушной цели может быть приближенно представлена как прямой круговой цилиндр (рис. 30.8) с основанием радиуса 100 *м*, параллельным плоскости xoy, и с высотой $h=200$ *м*. Систематические ошибки отсутствуют; рассеивание шаровое: $E_x = E_y = E_z = 100$ *м*. Найти вероятность поражения цели: а) при одном выстреле; б) при 10 независимых выстрелах.

Решение. а) По таблице функции $P(a, R)$ (см. табл. 2 прилож. 1) при $a=0$, $R=1$ имеем

$$p_0 = 0{,}203.$$

По формуле (30.3)

$$p_z = \hat{\Phi}\left(\frac{100}{100}\right) = 0{,}5.$$

По формуле (30.2)

$$p = p_0 p_z = 0{,}203 \cdot 0{,}5 \approx 0{,}10.$$

б) По табл. 3 прилож. 1

$$W \approx 0{,}65.$$

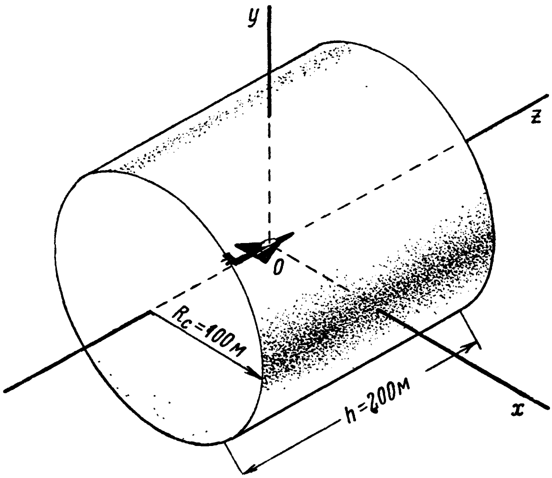


Рис. 30.8.

§ 31. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЖЕНИЯ ЦЕЛИ ПРИ СТРЕЛЬБЕ ДИСТАНЦИОННЫМИ СНАРЯДАМИ ОСКОЛОЧНОГО ДЕЙСТВИЯ

В отличие от снарядов непосредственного разрушающего действия осколочные дистанционные снаряды поражают цель отдельными убойными элементами (осколками) с вероятностью, постепенно убывающей от единицы до нуля по мере удаления точки разрыва от цели.

Осколочные дистанционные снаряды могут иметь как плоское, так и пространственное рассеивание. Плоское рассеивание характерно для снарядов, применяемых по наземным целям, пространственное — по воздушным.

Здесь мы рассмотрим сразу пространственный случай, как более общий и имеющий основное практическое значение.

Проще всего вычисляется вероятность поражения, когда по цели производится только один выстрел:

$$W = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(x, y, z)\,\varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \qquad (31.1)$$

где $G_1(x, y, z)$ — координатный закон поражения (см. § 18);
$\varphi(x, y, z)$ — закон рассеивания.

Для практических расчетов формула (31.1) обычно упрощается на основе тех или иных допущений. Эти допущения принимаются в зависимости от вида функций $G_1(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$. Закон рассеивания $\varphi(x, y, z)$ имеет различный вид в зависимости от конструкции взрывателя (дистанционный или неконтактный). Поэтому эти два случая рассматриваются отдельно и для каждого из них разрабатываются приближенные аналитические методы расчета. При наличии ЭЦВМ интеграл (31.1) вычисляется без затруднений.

При нескольких независимых выстрелах пользуются формулами (30.8), (30.9), подставляя в них вместо вероятностей попадания вероятности поражения при одном выстреле.

Если выстрелы зависимы, эти формулы дают несколько завышенный результат. Однако в большинстве практически важных случаев завышение незначительно.

Существует ряд приближенных способов, позволяющих учесть влияние зависимости выстрелов, а также накопление ущерба при стрельбе дистанционными снарядами, но мы на них останавливаться не будем.

§ 32. ОБОБЩЕННЫЙ ВЫСТРЕЛ. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЖЕНИЯ ЦЕЛИ ПРИ НЕСКОЛЬКИХ ОБОБЩЕННЫХ ВЫСТРЕЛАХ

В предыдущих параграфах данной главы были изложены некоторые методы вычисления вероятности поражения одиночной цели при стрельбе, состоящей из нескольких (в общем случае зависимых) выстрелов ударными или дистанционными снарядами.

Каждую из таких стрельб можно рассматривать как один «обобщенный выстрел», поражающий цель с некоторой вероятностью. Под обобщенным выстрелом может, например, пониматься:

— очередь из всех пушек, установленных на истребителе;

— залп реактивных неуправляемых снарядов;

— серия управляемых снарядов класса «воздух—воздух», выпускаемая по одной цели;

— атака воздушной цели истребителем-перехватчиком (или парой истребителей-перехватчиков);

— бомбометание одним самолетом (или группой самолетов) по одиночной цели

и т. п.

Примеры обобщенных выстрелов приведены на рис. 32.1.

В дальнейшем обобщенные выстрелы мы всегда будем предполагать *независимыми* (если несколько обобщенных выстрелов зависимы, всегда можно объединить их в один). Кроме того, для простоты будем везде считать, что накопление ущерба отсутствует.

Пусть по одиночной цели производится n обобщенных выстрелов, поражающих цель с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Так как обобщенный выстрел ничем в принципе не отличается от одиночного (при отсутствии накопления ущерба как тот, так и другой могут только либо «поражать», либо «не поражать» цель), то для обобщенных выстрелов остаются справедливыми формулы (30.8) и (30.9):

$$W = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_n), \tag{32.1}$$

если обобщенные выстрелы производятся в различных условиях, и

$$W = 1 - (1 - p)^n, \tag{32.2}$$

если условия стрельбы одинаковы ($p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$). В дальнейшем мы будем часто, если это не приводит к недоразумениям, вместо «обобщенный выстрел» говорить просто «выстрел».

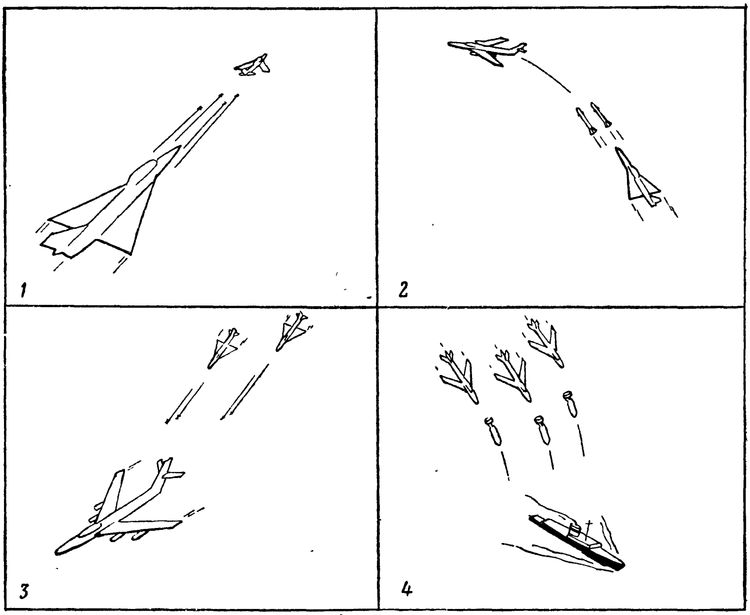


Рис. 32.1. Обобщенный выстрел:

1 — залп очередей из пушек; *2* — серия управляемых снарядов; *3* — атака пары истребителей; *4* — сбрасывание бомб группой самолетов.

На практике часто встречается случай, когда по тем или иным причинам обобщенный выстрел может состояться или не состояться. Причиной того, что обобщенный выстрел не состоится, могут быть, например:

— поражение истребителя ответным огнем цели;

— «забитость» технических устройств радиопомехами;

— отказ каких-либо элементов аппаратуры;

— невывод летательного аппарата в область пространства, откуда он может атаковать цель,

и т. д.

Чтобы учесть неполную достоверность осуществления обобщенного выстрела, достаточно умножить вероятность поражения цели каждым выстрелом на вероятность того, что данный выстрел состоится. Формула (32.1) принимает вид:

$$W = 1 - (1 - Q_1 p_1)(1 - Q_2 p_2) \ldots (1 - Q_n p_n), \qquad (32.3)$$

где Q_i — вероятность того, что i-й выстрел состоится;
p_i — вероятность поражения цели i-м выстрелом ($i = 1, 2, \ldots, n$)[1].

Если выстрелы производятся в одинаковых условиях и осуществляются с одинаковой вероятностью, то формула (32.3) принимает вид:

$$W = 1 - (1 - Qp)^n, \qquad (32.4)$$

где p — вероятность поражения цели одним выстрелом;
Q — вероятность того, что выстрел состоится.

Пример 1. Группа, состоящая из трех бомбардировщиков, высылается в район расположения противника для нанесения удара по малоразмерному объекту (цели) *Ц*. Вероятности поражения цели первым, вторым и третьим бомбардировщиками соответственно равны:

$$p_1 = 0{,}6; \quad p_2 = p_3 = 0{,}7.$$

Перед выходом к цели каждый из бомбардировщиков должен пройти зону ПВО противника, в которой его могут сбить с вероятностью $P=0{,}4$. Найти вероятность поражения цели *Ц*.

Решение. Налет трех бомбардировщиков представим как три обобщенных выстрела, поражающих цель с вероятностями p_1, p_2, p_3. Каждый из них осуществится только в случае, если соответствующий бомбардировщик не будет сбит; вероятность этого

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1 - P = 0{,}6.$$

По формуле (32.3) имеем

$$W = 1 - (1 - 0{,}6 \cdot 0{,}6)(1 - 0{,}6 \cdot 0{,}7)^2 = 0{,}629.$$

Пример 2. Для атаки воздушной цели выделено четыре истребителя. Атака происходит в условиях отсутствия оптической видимости. Если радиолокационный прицел работает исправно, самолет поражает атакованную им цель с вероятностью $P=0{,}4$. Если прицел не работает, атака срывается. Надежность (вероятность безотказной работы) прицела равна 0,8. Найти вероятность поражения воздушной цели.

Решение. По формуле (32.4) получаем

$$W = 1 - (1 - 0{,}8 \cdot 0{,}4)^4 = 0{,}786.$$

Мы рассмотрели случай, когда число обобщенных выстрелов n, выделенных по данной цели, вполне определенно, но каждый из них в силу случайных причин может не состояться. На практике часто бывает, что случайно не только число фактически осущест-

---

[1] Предполагается, что выстрелы осуществляются или не осуществляются независимо друг от друга, т. е. причины, препятствующие их осуществлению, для разных выстрелов различны.

вленных, но и число выделенных обобщенных выстрелов. Тогда вероятность поражения цели может быть вычислена по формуле

$$W = P_1 W_1(1) + P_2 W(2) + \ldots + P_n W(n) \qquad (32.5)$$

или, короче,

$$W = \sum_{m=1}^{n} P_m W(m),$$

где P_m — вероятность того, что по цели будет выделено m обобщенных выстрелов;

$W(m)$ — вероятность поражения цели, если по ней будет выделено m обобщенных выстрелов.

Пример 3. По самолету, совершающему полет над территорией противника, может быть осуществлено заранее неизвестное число атак истребителей. Вероятнее всего, что это будут две атаки:

$$P_2 = 0{,}6;$$

вероятности того, что будет одна атака P_1 или три атаки P_3, одинаковы и равны:

$$P_1 = P_3 = 0{,}2.$$

Каждый из истребителей, если его аппаратура работает исправно, поражает самолет с вероятностью $p=0{,}7$. Надежность (вероятность безотказной работы) аппаратуры истребителя равна $Q=0{,}9$. Найти вероятность того, что самолет будет поражен.

Решение. По формуле (32.6) имеем

$$W = 0{,}2\,W(1) + 0{,}6\,W(2) + 0{,}2\,W(3),$$

где $W(1)$ — вероятность поражения самолета одной атакой;

$W(2)$ — вероятность поражения самолета двумя атаками;

$W(3)$ — вероятность поражения самолета тремя атаками.

Имеем:

$$W(1) = Qp = 0{,}63,$$
$$W(2) = 1 - (1 - Qp)^2 \approx 0{,}86,$$
$$W(3) = 1 - (1 - Qp)^3 \approx 0{,}95,$$

откуда

$$W = 0{,}2 \cdot 0{,}63 + 0{,}6 \cdot 0{,}86 + 0{,}2 \cdot 0{,}95 \approx 0{,}83.$$

§ 33. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЖЕНИЯ ЦЕЛИ ПРИ ПУАССОНОВСКОМ ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ВЫСТРЕЛОВ

На практике часто число обобщенных выстрелов, которым подвергается цель, можно считать распределенным по так называемому закону Пуассона. Это бывает, когда моменты осуществления отдельных выстрелов независимы (или слабо зависимы), например, если цель обстреливается в течение некоторого промежутка времени несколькими батареями, ведущими огонь без строгого согласования друг с другом. Согласно закону Пуассона вероятность того, что на цель будет направлено ровно m обобщенных выстрелов, равна

$$P(m)=\frac{a^m}{m!}\,e^{-a}, \qquad (33.1)$$

где a — среднее ожидаемое число обобщенных выстрелов.

В этом случае вероятность поражения цели вычисляется по очень простой формуле:

$$W=1-e^{-ap}, \qquad (33.2)$$

где p — вероятность поражения цели одним обобщенным выстрелом.

Если обобщенный выстрел осуществляется не с полной достоверностью, а с вероятностью Q (хотя бы вследствие неполной надежности аппаратуры), формула (33.2) принимает вид:

$$W=1-e^{-aQp}. \qquad (33.3)$$

Пример 1. В условиях примера 3 § 32 фактическое число атак, которым подвергается самолет, распределено по закону Пуассона; среднее ожидаемое число атак $a=2$. Определить вероятность поражения.

Решение. Имеем $a=2$, $Q=0{,}9$, $p=0{,}7$

По формуле (33.3)

$$W=1-e^{-2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}7}\approx 0{,}72.$$

ГЛАВА 5

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СТРЕЛЬБЫ ПО ГРУППОВОЙ ЦЕЛИ

§ 34. СРЕДНЕЕ ЧИСЛО ПОРАЖЕННЫХ ЕДИНИЦ В СОСТАВЕ ГРУППОВОЙ ЦЕЛИ

Как было указано в гл. 2 (§ 19), групповой целью называется совокупность нескольких однородных одиночных целей, стрельба по которым преследует общую задачу. Примерами могут служить:

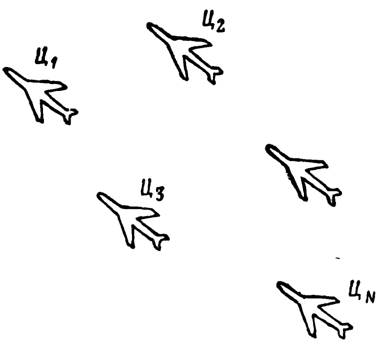


Рис. 34.1.

— группа самолетов (ракет), совершающих налет на обороняемый объект;

— походный ордер кораблей или подводных лодок;

— соединение танков и т. д.

Одиночные цели, входящие в состав групповой, называются «единицами».

Чаще всего задача стрельбы по групповой цели состоит в том, чтобы поразить возможно большее количество единиц в составе групповой цели.

В этом случае в качестве показателя эффективности естественно взять *среднее число пораженных единиц*:

$$M_{п} = M[X_{п}], \tag{34.1}$$

где случайная величина $X_{п}$ — число пораженных единиц.

Выведем самую общую формулу для $M_{п}$, пригодную *во всех без исключения случаях стрельбы по групповой цели*.

Рассмотрим групповую цель, состоящую из N единиц $Ц_1, Ц_2, \ldots, Ц_N$ (рис. 34.1). По этой цели ведется стрельба любыми снарядами (ударными или дистанционными), состоящая из любого числа выстрелов — зависимых или независимых, в постоянных или переменных условиях, объединенных или не объединенных в «обобщенные выстрелы». Прицеливание при этом может производиться как по отдельным единицам, так и по всей группе как единому целому.

Выведем формулу для математического ожидания числа пораженных единиц. Для этого представим общее число пораженных единиц $X_п$ в виде суммы N случайных величин:

$$X_п = X_1 + X_2 + \ldots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i. \qquad (34.2)$$

Каждой i-й единице $Ц_i$ соответствует своя случайная величина X_i, которую мы определим так:

—если единица $Ц_i$ поражена, $X_i = 1$;

—если единица $Ц_i$ не поражена, $X_i = 0$.

Нетрудно убедиться, что общее число пораженных целей $X_п$ равно просто сумме всех величин X_i. По теореме сложения математических ожиданий

$$M[X_п] = M[X_1] + M[X_2] + \ldots + M[X_N] = \sum_{i=1}^{N} M[X_i]. \qquad (34.3)$$

Обозначим W_i вероятность поражения i-й единицы за всю стрельбу. Тогда по определению математического ожидания

$$M[X_i] = W_i \cdot 1 + (1 - W_i)\,0 = W_i.$$

Подставляя в (34.3), получаем

$$M[X_п] = W_1 + W_2 + \ldots + W_N = \sum_{i=1}^{N} W_i,$$

или, окончательно,

$$M_п = \sum_{i=1}^{N} W_i, \qquad (34.4)$$

т. е. *среднее число пораженных единиц в составе групповой цели равно сумме вероятностей поражения всех отдельных единиц.*

Формула (34.4) совершенно общая и справедлива при любом виде групповой цели и любом способе организации стрельбы. Однако входящие в нее вероятности W_i вычисляются просто, только если режим обстрела каждой отдельной единицы не зависит от того, поражены или не поражены другие.

Это условие нарушается, например, в случае, когда имеется возможность переноса огня с одной — пораженной единицы на другую — непораженную. Поэтому мы будем применять формулу (34.4) только в случае, когда стрельба ведется без переноса огня.

Пример. Производится стрельба пятью независимыми выстрелами (или обобщенными выстрелами) по группе, состоящей из четырех самолетов. Стрельба ведется по всей группе как единому целому без наблюдения результатов и переноса огня. Каждый выстрел, направленный по группе, может поразить не более одного самолета. Вероятности поражения первого, второго, третьего и четвертого самолетов при одном выстреле равны соответственно:

$$p_1 = 0{,}1; \quad p_2 = 0{,}2; \quad p_3 = 0{,}2; \quad p_4 = 0{,}1; \quad p_5 = 0{,}1.$$

Определить среднее число пораженных самолетов в результате всей стрельбы.

Решение. Находим вероятности поражения отдельных единиц при пяти выстрелах:

$$W_1 = W_4 = W_5 = 1 - (1 - 0{,}1)^5 = 0{,}410,$$

$$W_2 = W_3 = 1 - (1 - 0{,}2)^5 = 0{,}672.$$

Отсюда

$$M_п = 3 \cdot 0{,}410 + 2 \cdot 0{,}672 = 2{,}574.$$

§ 35. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ПОРАЖЕННЫХ ЕДИНИЦ

В некоторых случаях стрельбы по групповой цели среднее число пораженных единиц не может служить (во всяком случае, единственным) показателем эффективности. Перед стрельбой по групповой цели могут быть поставлены разные задачи, например:

— поразить все N единиц

или

— поразить не менее k единиц в составе группы.

Тогда показателями эффективности будут служить:

P_N — вероятность поражения всех N единиц

или

R_k — вероятность поражения не менее k единиц.

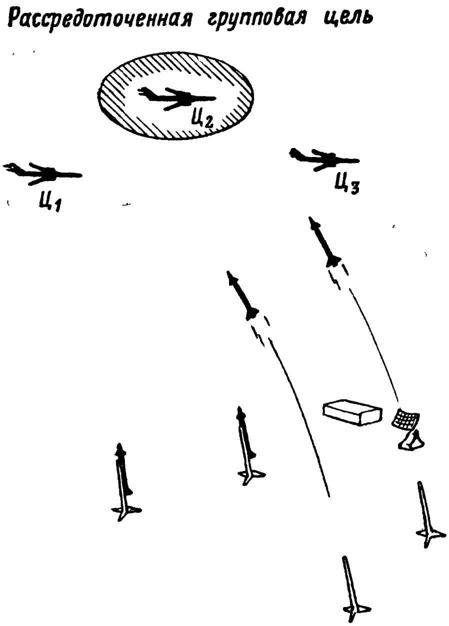


Рис. 35.1.

Очевидно, первый из этих показателей P_N есть частный случай второго R_k при $k=N$.

Чтобы вычислить любую из этих вероятностей, достаточно знать закон распределения числа пораженных единиц, т. е. вероятности

$$P_0, \ P_1, \ P_2, \ \ldots, P_N$$

того, что будут поражены $0, 1, 2, \ldots, N$ единиц в составе групповой цели.

Способы вычисления этих вероятностей зависят от *типа групповой цели* и *способа организации стрельбы*.

Условимся делить групповые цели на два класса:

— рассредоточенные и

— компактные.

Рассредоточенной будем называть такую групповую цель, в которой отдельные единицы разделены такими расстояниями, что *снаряд, предназначенный для поражения одной единицы, не может поразить другую*. Рассредоточенная цель характерна тем, что расстояния между единицами велики как по сравнению с областью рассеивания снарядов, так и по сравнению с зоной их разрушительного действия.

Примером рассредоточенной групповой цели может служить группа одиночных самолетов (ракет), совершающих налет на некоторый объект с большими временными интервалами. При таких условиях средства ПВО, выделенные для атаки одной цели, не могут в той же атаке поразить другую (рис. 35.1).

Компактной будем называть такую групповую цель, что *снаряд, предназначенный для поражения одной цели, может поразить другую* (в силу естественного рассеивания снарядов или большой зоны разрушительного действия). У компактной групповой цели расстояния между единицами сравнительно невелики.

Примером компактной групповой цели может служить ордер кораблей, обстреливаемых самонаводящимися ракетами, если при каждом выстреле головка самонаведения может случайным образом захватить ту или иную цель (рис. 35.2). Другим примером может служить строй самолетов, по которому ведется стрельба снарядами с мощными боевыми частями, причем размер зоны поражения сравним с размерами строя.

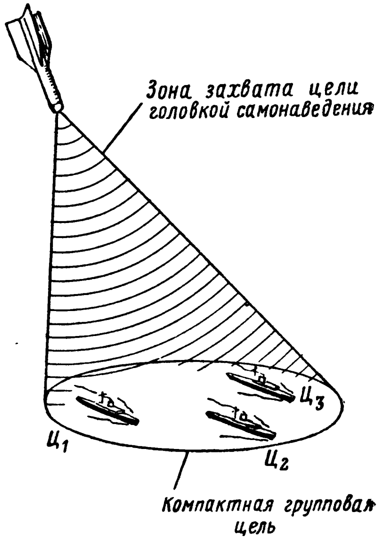


Рис. 35.2.

Следует заметить, что появление снарядов с мощными боевыми частями ведет за собой, как правило, тенденцию к рассредоточению групповых целей на такие расстояния, когда совместное поражение двух или более единиц невозможно. Поэтому мы основное внимание уделим случаю стрельбы по рассредоточенной групповой цели.

Кроме вида цели (рассредоточенная, компактная), методы вычисления вероятностей P_m зависят еще от *способа обстрела* цели, в частности, от того, возможен или исключен перенос огня с пораженных единиц на другие.

Перенос огня, естественно, требует наблюдения результатов стрельбы и быстрого внесения изменений в прицельные данные в зависимости от полученной информации. Очевидно, такой перенос не всегда возможен. Иногда временной режим обстрела и отсутствие источников информации делают перенос огня неосуществимым. Следует заметить, что перенос огня легче осуществим (и дает бо́льшие преимущества) в случае стрельбы по рассредоточенной групповой цели, когда каждый выстрел направляется на строго определенную цель и может поразить только ее. Если прицеливание ведется по всей группе как по единому целому, перенос огня смысла не имеет.

В § 36, 37 мы рассмотрим способы оценки эффективности стрельбы по рассредоточенной групповой цели (как с переносом, так и без переноса огня), а в § 38 — способы оценки эффективности стрельбы по компактной групповой цели.

§ 36. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СТРЕЛЬБЫ ПО РАССРЕДОТОЧЕННОЙ ГРУППОВОЙ ЦЕЛИ (БЕЗ ПЕРЕНОСА ОГНЯ)

Рассмотрим рассредоточенную групповую цель, состоящую из N единиц; по ней ведется стрельба определенным количеством обобщенных выстрелов, которые любым способом распределены между N единицами. Каждая цель обстреливается вполне определенным, заранее назначенным количеством выстрелов; перенос огня с пораженной единицы на другую, еще не пораженную, неосуществим (например, по условиям территориальной удаленности или нехватки времени).

Тогда результат стрельбы по каждой единице не зависит от того, чем кончилась стрельба по остальным. Следовательно, N обстрелов отдельных единиц можно рассматривать как N независимых опытов и применить известную теорему о повторении опытов.

Если каждая из единиц в результате ее обстрела поражается с одной и той же вероятностью W, то по теореме о повторении опытов вероятность того, что будет поражено ровно m единиц из N обстрелянных, равна

$$P_m = C_N^m W^m (1 - W)^{N-m}. \tag{36.1}$$

Если же условия обстрела единиц неодинаковы и они поражаются с разными вероятностями:

$$W_1, \ W_2, \ldots, W_N,$$

то вероятность P_m можно найти как коэффициент при z^m в разложении по степеням z производящей функции:

$$\varphi_N(z) = [(1 - W_1) + W_1 z]\,[(1 - W_2) + W_2 z] \ldots$$
$$\ldots [(1 - W_N) + W_N z]. \tag{36.2}$$

Зная вероятность P_m, можно найти вероятность R_k поражения не менее k единиц. А именно:

$$R_k = P_k + P_{k+1} + \ldots + P_N. \tag{36.3}$$

Если число k сравнительно невелико, удобнее вместо формулы (36.3) пользоваться другой, равносильной:

$$R_k = 1 - (P_0 + P_1 + \ldots + P_{k-1}). \tag{36.4}$$

Пример 1. Производится отражение воздушного налета в составе $N=5$ крылатых ракет средствами ПВО. Ввиду кратковременности налета перенос огня исключается. Каждая ракета поражается выделенными на нее средствами с вероятностью $W=0{,}7$. Определить среднее число пораженных единиц $M_п$ и вероятность поражения не менее четырех единиц R_4.

Решение. По формуле (34.3)

$$M_п = 5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5.$$

По формуле (36.1)

$$P_4 = 0{,}360; \quad P_5 = 0{,}168.$$

По формуле (36.3)

$$R_4 = 0{,}360 + 0{,}168 = 0{,}528.$$

Пример 2. Производится стрельба по рассредоточенной группе из трех кораблей ($N=3$). Первый из них поражается выделенными на него средствами с вероятностью $W_1=0{,}4$; второй — с вероятностью $W_2=0{,}5$, третий — с вероятностью $W_3=0{,}6$. Найти среднее число M пораженных кораблей и вероятность R_2 поражения не менее двух кораблей.

Решение. Составляем производящую функцию:

$$\varphi_3(z) = (0{,}6 + 0{,}4z)(0{,}5 + 0{,}5z)(0{,}4 + 0{,}6z) = 0{,}12 + 0{,}38z + 0{,}38z^2 + 0{,}12z^3,$$

$$P_2 = 0{,}38, \quad P_3 = 0{,}12.$$

По формуле (36.3)

$$R_2 = 0{,}38 + 0{,}12 = 0{,}50.$$

§ 37. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СТРЕЛЬБЫ ПО РАССРЕДОТОЧЕННОЙ ГРУППОВОЙ ЦЕЛИ (С ПЕРЕНОСОМ ОГНЯ)

Рассмотрим рассредоточенную групповую цель, состоящую из N единиц, на обстрел которой выделено некоторое количество средств, так что всего возможно произвести n обобщенных выстрелов. Обстрел группы целей ведется в последовательном порядке, одна цель за другой, причем после каждого выстрела его результат наблюдается и, если цель поражена, огонь переносится на другую.

Для простоты допустим, что вероятность поражения обстреливаемой единицы при каждом выстреле одна и та же и равна p.

Требуется найти закон распределения числа пораженных единиц, т. е. вероятности

$$P_0, P_1, \ldots, P_N \tag{37.1}$$

того, что в составе группы будет поражено 0, 1, ..., N единиц.

Очевидно,

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_N = 1 \tag{37.2}$$

как сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную группу.

Предположим, что $n > N$ (число выстрелов превышает число целей), и найдем вероятности (37.1).

Условимся называть «успешным» выстрелом тот, который поражает единицу, по которой он направлен, и «безуспешным» — если не поражает.

Очевидно, вероятность произведенному выстрелу быть успешным равна p.

Вероятность P_0 того, что не будет поражено ни одной единицы в составе групповой цели, очевидно, равна вероятности того, что все выстрелы будут безуспешными:

$$P_0 = (1 - p)^n. \tag{37.3}$$

Найдем вероятность P_1 того, что будет поражена ровно одна единица, иначе вероятность того, что среди n выстрелов ровно один будет успешным. По теореме о повторении опытов

$$P_1 = C_n^1 p^1 (1 - p)^{n-1} = np (1 - p)^{n-1}. \tag{37.4}$$

Возьмем любое $m < N$. Вероятность P_m того, что будет поражено ровно m единиц, равна

$$P_m = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}. \tag{37.5}$$

Эта формула справедлива вплоть до $m = N - 1$:

$$P_{N-1} = C_n^{N-1} p^{N-1} (1 - p)^{n-N+1}. \tag{37.6}$$

Очевидно, последнюю вероятность P_N по этой формуле определить уже нельзя. Действительно, если последняя (N-я) цель будет поражена раньше, чем израсходованы все n выстрелов, оставшиеся выстрелы будет уже «некуда переносить», они просто останутся неизрасходованными. Однако вероятность P_N легко найти, учитывая соотношение (37.2): она должна дополнять до единицы сумму всех остальных вероятностей:

$$P_N = 1 - (P_0 + P_1 + \ldots + P_{N-1}) = 1 - \sum_{m=0}^{N-1} P_m. \tag{37.7}$$

Таким образом, найдены все вероятности P_0, P_1, ..., P_N для случая $n > N$.

При $n < N$ (число выстрелов меньше числа единиц) все N единиц поражены быть не могут. Поэтому для любого $m \leqslant N$ вероятность P_m выражается формулой (37.5).

Зная вероятности P_0, $P_1, \ldots, P_N$, можно найти среднее число пораженных единиц в составе группы:

$$\begin{aligned} M_{\text{п}} &= 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \ldots + NP_N = \\ &= P_1 + 2P_2 + \ldots + NP_N. \end{aligned} \tag{37.8}$$

В случае $n<N$ эта формула упрощается: *среднее число пораженных единиц просто равно среднему числу успешных выстрелов:*

$$M_п = np. \tag{37.9}$$

Пример 1. Производится пять выстрелов с переносом огня по рассредоточенной групповой цели, состоящей из трех единиц ($N=3$). Вероятность поражения одним выстрелом $p=0,7$.

Определить: а) вероятности P_0, P_1, P_2, P_3 того, что в состав группы будет поражено 0, 1, 2, 3 единиц; б) вероятность R_2 того, что будет поражено не менее двух единиц; в) среднее число пораженных единиц $M_п$.

Решение. $N=3$; $n=5$; $n>N$.

а) По формулам (37.3)—(37.7) имеем:

$$P_0 = 0,3^5 \approx 0,002,$$

$$P_1 = C_6^1 \cdot 0,7 \cdot 0,3^4 \approx 0,028,$$

$$P_2 = C_5^2 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^3 \approx 0,132,$$

$$P_3 \approx 1 - (0,002 + 0,028 + 0,132) = 0,838.$$

б) По формуле (36.3) находим вероятность поражения не менее двух единиц:

$$R_2 = P_2 + P_3 = 0,970.$$

По формуле (37.8) находим среднее число пораженных единиц:

$$M_п = P_1 + 2P_2 + 3P_3 = 0,028 + 2 \cdot 0,132 + 3 \cdot 0,838 = 2,806.$$

Пример 2. По рассредоточенной групповой цели, состоящей из 10 единиц, ведется стрельба с переносом огня четырьмя выстрелами. Каждый выстрел поражает единицу с вероятностью $p=0,6$. Найти: а) среднее число пораженных единиц $M_п$; б) вероятность R_3 того, что будет поражено не менее трех единиц.

Решение. $N=10$, $n=4$, $n<N$.

а) По формуле (37.9)

$$M_п = np = 4 \cdot 0,6 = 2,4.$$

б) По формуле (37.5)

$$P_3 = C_4^3 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 = 0,345,$$

$$P_4 = C_4^4 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^0 = 0,130.$$

в) По формуле (36.3)

$$R_3 = P_3 + P_4 = 0,475.$$

§ 38. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СТРЕЛЬБЫ ПО КОМПАКТНОЙ ГРУППОВОЙ ЦЕЛИ

Особенность компактной групповой цели в том, что при одном обобщенном выстреле может поражаться не одна-единственная, строго определенная единица в составе групповой цели, а с какой-то вероятностью та или другая из единиц. Эта особенность может быть обусловлена:

— естественным рассеиванием снарядов, размеры которого сравнимы с размерами групповой цели;

— применением снарядов большой мощности, когда снаряд, предназначенный для одной цели и поразивший ее, может поразить также и другую.

Здесь мы рассмотрим только первый случай, когда возможность поражения других единиц связана с рассеиванием снарядов (т. е. когда другая цель поражается вместо первой, а не совместно с ней). Будем предполагать, что одним обобщенным выстрелом может быть поражена т о л ь к о о д н а ц е л ь из группы.

Наиболее простым и достаточно типичным случаем стрельбы по компактной групповой цели является случай, когда стрельба ведется по всей цели как единому целому, без выделения для прицеливания отдельных единиц, без наблюдения результатов стрельбы по ним и без переноса огня. Именно такой простейший случай мы и рассмотрим.

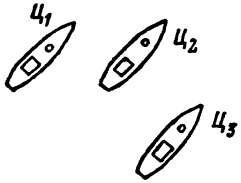


Рис. 38.1.

Среднее число пораженных единиц $M_п$ при стрельбе по компактной групповой цели вычисляется по универсальной формуле (34.3), и это вычисление никаких затруднений не вызывает.

Затруднения появляются при вычислении вероятностей $P_0, P_1, \ldots, P_N$. Они связаны с тем, что события, состоящие в поражении отдельных целей, уже н е м о г у т с ч и т а т ь с я н е з а в и с и м ы м и.

Действительно, представим себе, что компактная групповая цель состоит, например, из трех кораблей (рис. 38.1), по которым ведется стрельба одной самонаводящейся ракетой. Головка самонаведения с одинаковой вероятностью $^1/_3$ захватывает любой из кораблей. Захваченный корабль поражается с полной достоверностью.

Очевидно, что события:

A_1 — поражение первого корабля,

A_2 — поражение второго корабля,

A_3 — поражение третьего корабля

зависимы: появление одного из них заведомо исключает появление другого. В данном случае было бы грубой ошибкой рассматривать обстрел трех целей как три независимых опыта.

Методика оценки эффективности стрельбы по компактной групповой цели н е п р е м е н н о д о л ж н а у ч и т ы в а т ь з а в и с и м о с т ь м е ж д у п о р а ж е н и е м о т д е л ь н ы х ц е л е й.

Продемонстрируем один из возможных путей подхода к оценке эффективности стрельбы по компактной групповой цели на простом примере, аналогичном рассмотренному выше.

Пусть имеется компактная групповая цель, состоящая из трех единиц (кораблей) $Ц_1$, $Ц_2$, $Ц_3$, и по ней производятся два выстрела. Каждый выстрел может случайным образом поразить ту или иную единицу. Вероятности того, что при одном выстреле будут поражены соответственно цели $Ц_1$, $Ц_2$, $Ц_3$, равны p_1, p_2, p_3

$(p_1+p_2+p_3\leqslant 1)$. Вероятность того, что выстрел не поразит одну из целей, будет

$$p_0=1-(p_1+p_2+p_3).$$

Рассмотрим, как могут распределиться успешные (поражающие) выстрелы по целям, если производится не один, а два выстрела, и найдем вероятности P_0, P_1, P_2, P_3 того, что будут поражены 0, 1, 2, 3 единицы в составе группы.

Очевидно, P_0 есть вероятность того, что оба снаряда не поразят ни одной единицы:

$$P_0=p_0^2. \tag{38.1}$$

Найдем P_1 — вероятность того, что будет поражена р о в н о о д н а единица. Это событие может произойти следующим образом:

— оба выстрела поразят одну и ту же единицу;

или

— один из выстрелов поразит одну единицу, а другой — ни одной.

Найдем вероятность того, что оба выстрела поразят одну и ту же единицу ($Ц_1$, или $Ц_2$, или $Ц_3$):

$$P_1'=p_1^2+p_2^2+p_3^2.$$

Вероятность того, что один выстрел поразит одну единицу, а другой — ни одной, равна:

$$P_1''=2p_1p_0+2p_2p_0+2p_3p_0$$

(множитель 2 стоит потому, что поразить единицу может как первый выстрел, так и второй).

Вероятность P_1 найдется как сумма этих двух вероятностей:

$$P_1=P_1'+P_1''=p_1^2+p_2^2+p_3^2+2p_1p_0+2p_2p_0+2p_3p_0.$$

Аналогично найдем P_2 — вероятность того, что будут поражены ровно две единицы. Для этого требуется, чтобы двумя снарядами были поражены какие-то две цели из трех:

$$P_2=2p_1p_2+2p_1p_3+2p_2p_3.$$

Что касается вероятности P_3, то, очевидно, при стрельбе двумя снарядами она равна нулю:

$$P_3=0.$$

Таким образом, вычислены вероятности всех возможных исходов стрельбы двумя снарядами по групповой цели, состоящей из трех единиц.

Нетрудно видеть, что тот же результат мы получим, применяя следующий формальный прием. Составим многочлен вида:

$$p_0+p_1z_1+p_2z_2+p_2z_3$$

и возведем его в квадрат (степень берется по числу выстрелов $n=2$). Получим функцию:

$$\varphi_2(z_1, z_2, z_3) = (p_0 + p_1 z_1 + p_2 z_2 + p_3 z_3)^2. \qquad (38.2)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем:

$$\varphi_2(z_1, z_2, z_3) = p_0^2 + p_1^2 z_1^2 + p_2^2 z_2^2 + p_3^2 z_3^2 + 2p_1 p_0 z_1 +$$
$$+ 2p_2 p_0 z_2 + 2p_3 p_0 z_3 + 2p_1 p_2 z_1 z_2 + 2p_1 p_3 z_1 z_3 + 2p_2 p_3 z_2 z_3. \qquad (38.3)$$

Очевидно, вероятность $P_0 = p_0^2$ есть не что иное как свободный член разложения (38.3); вероятность P_1 — сумма коэффициентов при членах, содержащих только одну из букв z_1, z_2, z_3 (все равно, в какой степени); вероятность P_2 — сумма коэффициентов при членах, содержащих две из этих букв.

Можно доказать, что такой же прием дает вероятности P_m при любом числе единиц в групповой цели и любом числе выстрелов. Если в составе компактной групповой цели N единиц, поражаемых при одном выстреле с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_N$, и по ней производится n выстрелов, то закон распределения числа пораженных единиц можно найти следующим способом. Составляется функция

$$\varphi_n(z_1, z_2, \ldots, z_N) = (p_0 + p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_N z_N)^n, \qquad (38.4)$$

где $p_0 = 1 - (p_1 + p_2 + \ldots + p_N)$, и производится возведение в степень и приведение подобных членов. После этого находятся вероятности:

P_0 — свободный член разложения (38.4);

P_1 — сумма коэффициентов всех членов разложения, содержащих ровно одну из букв $z_1, \ldots, z_N$ (все равно в какой степени) и так далее

и вообще

P_m — сумма коэффициентов всех членов, содержащих ровно m из букв $z_1, \ldots z_N$ (все равно каких и все равно в какой степени).

ГЛАВА 6

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СТРЕЛЬБЫ ПО ПЛОЩАДНОЙ ЦЕЛИ

§ 39. ЗАДАЧА ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СТРЕЛЬБЫ ПО ПЛОЩАДНОЙ ЦЕЛИ

В практике боевых действий часто встречаются случаи, когда стрельба (бомбометание) производится не по отдельным объектам (одиночным целям), а по совокупностям или скоплениям различных объектов, расположенных на какой-то площади. При этом часто ни точное количество объектов, ни их взаимное расположение на площади заранее неизвестны, а если и известны, то не учитываются при стрельбе. Огневое воздействие осуществляется не по отдельным конкретным объектам, а по всей площади как единому целому. Такие цели обычно называются **площадными** (см. § 9 гл. 2).

Примерами площадных целей могут служить:

— группировки живой силы и техники противника;

— города и промышленные объекты;

— военно-морские базы;

— железнодорожные узлы;

— все не полностью разведанные цели, относительно которых известно только, что они находятся в каком-то районе.

Очертания фигуры, ограничивающей площадную цель, часто бывают неопределенными, расплывчатыми. Например, намечая возможный район местонахождения плохо разведанной цели, можно в лучшем случае очертить этот район, указав его протяженность в двух направлениях.

Задача стрельбы по площадной цели, естественно, не имеет такой определенности, как задача стрельбы по одиночной цели. При стрельбе по одиночной цели наша задача — **поразить цель**, т. е. лишить ее возможности функционировать. По отношению к площадной цели термин «поражение» не имеет такого определенного смысла. Если под «поражением» разуметь полное уничтожение всех объектов, находящихся на площади, то оно обычно практически невыполнимо, да его и не требуется. Обычно перед стрельбой по площадной цели ставится задача менее определенная — нанести цели какой-то ущерб, назначаемый довольно условно — например, поразить около 50 или 70% объектов, находящихся на площади. Ввиду того что сама площадная цель в подробностях нам неизвестна, очевидно, нет смысла гнаться за особой точностью оценки эффективности стрельбы по такой цели. Все подобные расчеты могут иметь лишь ориентировочное значение.

Так как площадная цель не является конкретной в деталях, то для нее трудно дать четкое количественное определение наносимого ущерба. Остается предположить, что этот ущерб пропорционален величине пораженной площади, на которой имеются заданного вида разрушения. Вид разрушений (например, «сильные», «средние») зависит от прочности объектов, находящихся на площади, и от тактической задачи стрельбы.

Предположим, что требуемый вид разрушений задан, и условимся характеризовать ущерб, нанесенный цели, величиной пораженной площади $S_п$, на которой имеются разрушения не менее заданных, или, что равносильно, долей пораженной площади:

$$U = \frac{S_п}{S_ц}, \tag{39.1}$$

где $S_п$ — пораженная площадь;
$S_ц$ — полная площадь цели.

Если объекты расположены на площадной цели приблизительно равномерно, с одинаковой средней плотностью, то доля пораженной площади будет равна доле пораженных объектов. Таким образом, те цели, которые мы в гл. 5 называли «компактными групповыми», могут при известных условиях рассматриваться как площадные. Для этого нужно, чтобы число единиц в составе групповой цели было довольно велико, а их точное взаимное расположение — не вполне определенно. Тогда групповую цель можно рассматривать как площадную, с какой-то средней плотностью расположения единиц на площади. Рассматривая групповую цель как площадную, можно приближенно учесть поражающее действие боеприпасов любой мощности.

Рассмотрим случай стрельбы по площадной цели. Показатель эффективности стрельбы в зависимости от ее задач может быть различным.

Если перед стрельбой по площадной цели поставлено простое требование — нанести ей максимально-возможный относительный ущерб U, то в качестве показателя эффективности выбирается математическое ожидание (среднее значение) наносимого цели ущерба. Эту величину будем обозначать M:

$$M = M[U]$$

и называть для краткости средней долей поражения.

Может оказаться, что перед стрельбой поставлена более определенная задача: получить на цели ущерб, не меньший заданного значения u (например, поразить не менее 70% площади цели; при этом $u=0,7$). Тогда в качестве показателя эффективности выбирается не средняя доля поражения, а вероятность того, что доля поражения будет не меньше заданной:

$$R_u = P(U \geqslant u), \tag{39.2}$$

где $P(U \geqslant u)$ — вероятность того, что доля пораженной площади U будет не меньше заданного значения u.

В первом случае расчет эффективности называется «расчетом по математическому ожиданию», а во втором — «расчетом по вероятности» [1].

В общем случае, если не принимать никаких допущений о цели, зоне поражения и условиях стрельбы, задача оценки эффективности стрельбы по площадной цели становится довольно сложной. Однако, учитывая общую невысокую точность сведений, которые у нас имеются о площадной цели, можно сделать ряд допущений и существенно упростить задачу. В частности, не имеет смысла вводить в расчет точную конфигурацию цели и зоны поражения, а можно обе области заменить прямоугольниками.

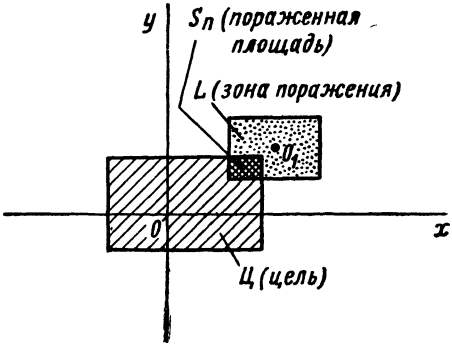


Рис. 39.1.

Примем следующие допущения:

— цель представляет собой прямоугольник с размерами $Ц_x$, $Ц_y$, со сторонами, параллельными главным осям рассеивания;

— зона поражения также представляет собой прямоугольник с размерами L_x, L_y, со сторонами, параллельными главным осям рассеивания [2].

Будем представлять себе процесс стрельбы по площадной цели так, как будто при каждом выстреле (или обобщенном выстреле) на цель $Ц$ сбрасывается зона поражения L. Положение зоны L относительно цели $Ц$ характеризуется одной случайной точкой O_1 (эпицентром взрыва), которая может занять то или другое положение относительно начала координат — точки прицеливания.

Если начало координат O совпадает с центром цели, то говорят о прицеливании по центру цели; если не совпадает — о прицеливании с выносом.

В зависимости от того, какое положение займет в результате выстрела точка O_1, зона поражения L накроет ту или другую часть площади цели (рис. 39.1). При нескольких выстрелах пораженная

[1] Вместо термина «расчет по вероятности» часто употребляется термин «расчет с гарантийностью», разумея под «гарантийностью» вероятность выполнения задачи.

[2] Если зона поражения, как это часто бывает, представляет собой круг, то его заменяют равновеликим квадратом.

площадь цели зависит от конкретного расположения центров всех зон поражения (рис. 39.2).

Обратим внимание на то, что суммарная пораженная площадь $S_п$ не равна сумме площадей, пораженных отдельными выстрелами, так как зоны поражения могут перекрываться. При наличии перекрытий обычно пренебрегают увеличением разрушительного эффекта на участках цели, накрытых дважды, трижды и т. д., а за пораженную площадь $S_п$ принимают площадь, накрытую хотя бы одной зоной поражения. На рис. 39.1 и 39.2 площадь $S_ц$ отмечена густой штриховкой.

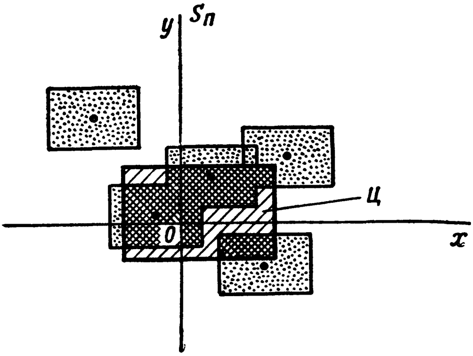


Рис. 39.2.

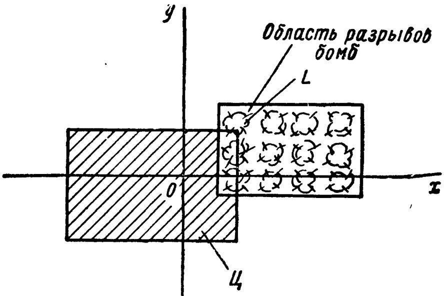


Рис. 39.3.

Деля пораженную площадь $S_п$ на площадь цели $S_ц$, получаем долю пораженной площади:

$$U = \frac{S_п}{S_ц}.$$

Эта случайная величина характеризует успешность стрельбы по площадной цели.

В случае, когда по площадной цели применяется серийное, залповое бомбометание или бомбометание строем по команде ведущего, задачу тоже можно рассматривать так, как будто при одном обобщенном выстреле на площадную цель сбрасывается одна прямоугольная зона поражения L (рис. 39.3), внутри которой создана требуемая плотность разрывов. Таким образом, этот случай приближенно сводится к уже рассмотренному.

Как уже упоминалось выше (см. § 9 гл. 2), основными показателями эффективности стрельбы по площадной цели, выбор между которыми определяется тактической обстановкой и задачами исследования, являются следующие величины:

M — средняя доля пораженной площади (или, короче, „средняя доля поражения“);

R_u — вероятность того, что доля поражения будет не меньше u (или, короче, „вероятность заданной доли поражения“).

Методы расчета этих характеристик различны в зависимости от того, производится по цели один обобщенный выстрел или несколько. Поэтому мы последовательно рассмотрим методы вычисления следующих показателей:

M — средняя доля поражения при одном выстреле;
M_n — средняя доля поражения при n выстрелах;
R_u — вероятность заданной доли поражения при одном выстреле;
$R_{u;\,n}$ — вероятность заданной доли поражения при n выстрелах.

В следующих параграфах мы дадим некоторые приближенные способы вычисления этих характеристик, но прежде всего рассмотрим принципиальную сторону вопроса.

§ 40. ДОЛЯ ПОРАЖЕНИЯ U ПРИ ОДНОМ ВЫСТРЕЛЕ. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ U

Рассмотрим площадную цель $Ц$, по которой производится один выстрел снарядом с зоной поражения L (рис. 40.1).

В общем случае прицеливание производится «с выносом», т. е. точку O_1 (эпицентр взрыва) стремятся совместить не с центром цели $O_ц$, а с точкой O, смещенной от центра цели на расстояния a_x, a_y. Оси ox и oy, проходящие через O, являются главными осями рассеивания, а точка O — центром рассеивания.

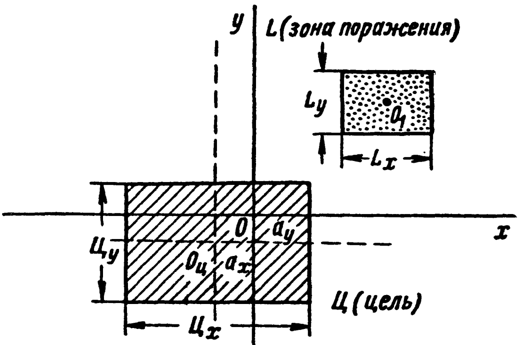


Рис. 40.1.

Условимся в дальнейшем все линейные размеры выражать не в метрах, а в **вероятных отклонениях по соответствующим осям**. В тех случаях, когда встретится надобность выражать их в метрах, мы будем отмечать это специальным значком ($м$):

$$\left.\begin{aligned} Ц_x &= \frac{Ц_x^{(м)}}{E_x}; & Ц_y &= \frac{Ц_y^{(м)}}{E_y}; \\ L_x &= \frac{L_x^{(м)}}{E_x}; & L_y &= \frac{L_y^{(м)}}{E_y}; \\ a_x &= \frac{a_x^{(м)}}{E_x}; & a_y &= \frac{a_y^{(м)}}{E_y}. \end{aligned}\right\} \qquad (40.1)$$

Итак, рассматривается один выстрел, при котором зона поражения L сбрасывается на цель $Ц$ так, что случайная точка O_1 (эпицентр взрыва) рассеивается вокруг начала координат O по нормальному закону. Вероятные отклонения этого закона, выбранные в качестве единиц измерения, равны единице. Требуется найти среднюю долю поражения U.

Рассмотрим случайную площадь перекрытия $S_п$ зоны поражения L с целью $Ц$ (см. заштрихованную область на рис. 39.1) и долю поражения

$$U = \frac{S_п}{S_ц}. \tag{40.2}$$

Величина U зависит от случайного положения эпицентра O_1. Если точка O_1 ляжет на достаточно большом расстоянии от цели

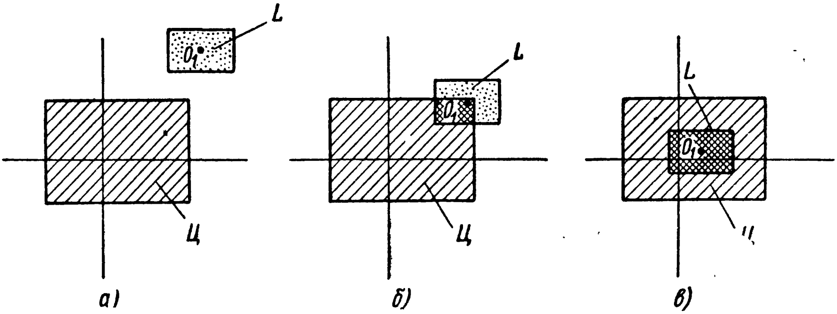


Рис. 40.2.

(рис. 40.2, *а*), то доля поражения будет равна нулю. Если точка O_1 ляжет так, как показано на рис. 40.2, *б*, то зона поражения и цель перекроются частично. Наконец, если зона поражения ляжет, как показано на рис. 40.2, *в*, то будет накрыта максимально-возможная площадь. В данном случае (когда зона поражения по размерам меньше цели) эта максимальная доля равна отношению площади зоны поражения к площади цели:

$$u_{макс} = \frac{S_L}{S_ц} = \frac{L_x L_y}{Ц_x Ц_y}.$$

Бывает и другой случай, когда зона поражения велика, а цель мала и вся цель может быть накрыта зоной поражения (рис. 40.3). В этом случае

$$u_{макс} = 1.$$

Так или иначе, при любом соотношении размеров зоны поражения и цели существует некоторое максимальное значение $u_{макс}$ доли поражения U.

Случайная величина U принадлежит к так называемым в е л и ч и н а м с м е ш а н н о г о т и п а, у которых имеются отдельные значения с конечными, отличными от нуля, вероятностями и участки, где функция распределения непрерывна, а каждому отдельному значению соответствует только некоторая **плотность вероятности**. Функция распределения (интегральный закон распределения) для таких случайных величин имеет разрывы (скачки) в отдельных точках, а на участках между ними непрерывно возрастает.

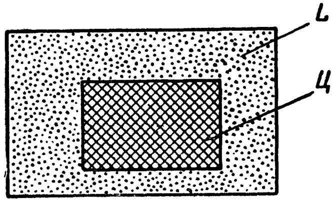


Рис. 40.3.

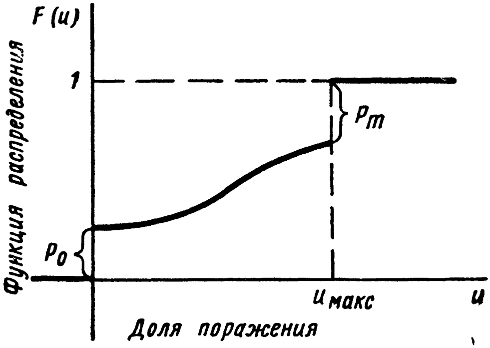


Рис. 40.4.

На рис. 40.4 показан вид функции распределения величины U — доли поражения при одном выстреле. Крайние значения 0 и $u_{макс}$ величины U имеют отличные от нуля вероятности. В этих точках функция распределения имеет разрывы (скачки). По величине скачки равны вероятностям этих крайних значений:

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= P(U=0), \\ p_m &= P(U=u_{макс}). \end{aligned}\right\}$$

Для промежуточных значений $0<u<u_{макс}$ функция распределения непрерывна, и вероятность каждого отдельного значения равна нулю.

При одном выстреле не представляет большого труда построить точный закон распределения величины U.

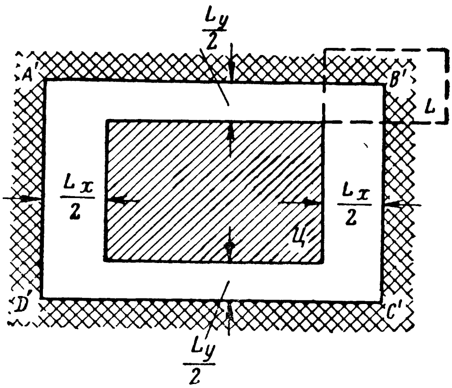


Рис. 40.5.

Например, рассмотрим такое соотношение размеров цели $Ц$ и зоны поражения L (пунктирный прямоугольник), какое показано на рис. 40.5. Ясно, что вероятность p_0 есть не что иное, как вероятность попадания эпицентра O_1 в зону, заштрихованную на рис. 40.5, — внешнюю часть прямоугольника $A'B'C'D'$. Аналогично может быть найдена и вероятность p_m (рис. 40.6) как вероятность попадания O_1 в заштрихованную зону $ABCD$, соответствующую максимальной площади перекрытия (в данном случае $L_x \times L_y$).

Сходным геометрическим построением может быть найдена и функция распределения $F(u)$ для любого промежуточного значения $0<u<u_{\text{макс}}$. Для этого нужно построить ряд кривых (геометрических мест центра зоны поражения), соответствующих одной и той же доле поражения u. Вероятность получения доли поражения, меньшей u, есть не что иное, как вероятность попадания точки O_1 во внешнюю часть соответствующей кривой. Однако точное построение таких кривых — довольно трудоемкое дело, и, учитывая, что прямоугольная конфигурация цели и зоны поражения выбраны нами достаточно произвольно, можно все такие кривые приближенно заменить прямоугольниками (см. пунктир на рис. 40.7). Вероятность попадания точки O_1 во внешнюю часть каждого из таких прямоугольников, соответствующего заданной величине доли поражения u, вычисляется по формуле

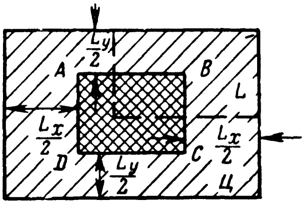


Рис. 40.6.

$$F(u)=1-\frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}(\beta_u)-\hat{\Phi}(\alpha_u)\right]\left[\hat{\Phi}(\delta_u)-\hat{\Phi}(\gamma_u)\right], \qquad (40.3)$$

где α_u, β_u, γ_u, δ_u — координаты, ограничивающие прямоугольник, соответствующий данному значению u, по осям ox и oy (рис. 40.8).

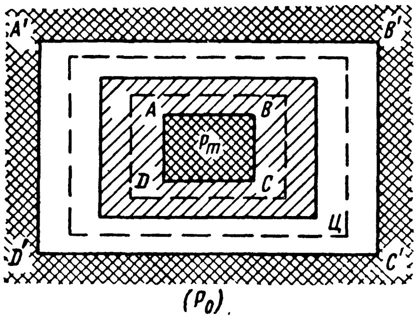


Рис. 40.7.

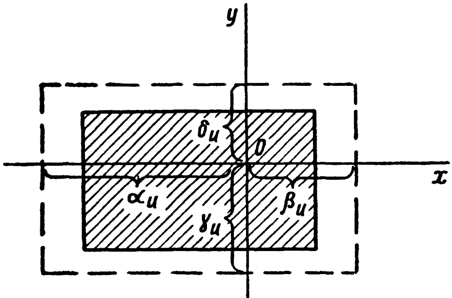


Рис. 40.8.

Для грубо приближенного построения функции $F(u)$ практически бывает достаточно четырех точек: двух крайних и двух средних, например, для $u=\frac{u_{\text{макс}}}{3}$ и $u=\frac{2u_{\text{макс}}}{3}$.

Пример 1. Производится один выстрел по цели с размерами $Ц_x=4$, $Ц_y=3$ с выносом точки прицеливания $a_x=a_y=1$. Зона поражения имеет размеры $L_x=L_y=2$. Построить по четырем точкам функцию распределения $F(u)$ доли поражения U.

Решение. Строим цель (рис. 40.9), зону (p_0) (внешняя часть прямоугольника $A'B'C'D'$) и зону (p_m) (внутренняя часть прямоугольника $ABCD$), а также два прямоугольника, соответствующих $u = \frac{1}{3} u_{\text{макс}}$ и $u = \frac{2}{3} u_{\text{макс}}$ (пунктир на рис. 40.9).

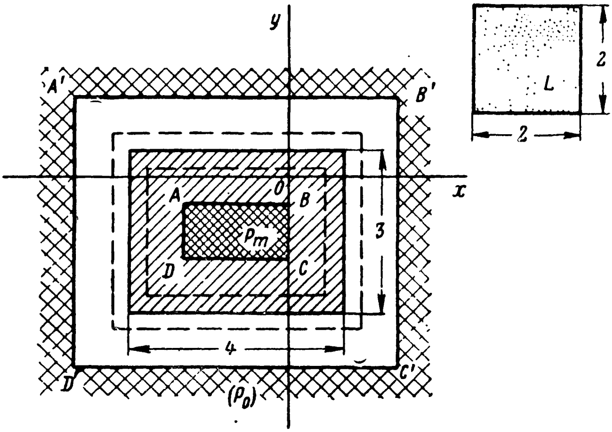


Рис. 40.9.

Находим вероятности попадания в зоны (p_0) и (p_m), а также во внешние части пунктирных прямоугольников:

$$p_0 = 1 - \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}(2) - \hat{\Phi}(-4)\right]\left[\hat{\Phi}(1{,}5) - \hat{\Phi}(-3{,}5)\right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}[0{,}823 + 0{,}993][0{,}688 + 0{,}982] = 0{,}243;$$

$$p_m = \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}(0) - \hat{\Phi}(-2)\right]\left[\hat{\Phi}(-0{,}5) - \hat{\Phi}(-1{,}5)\right] = 0{,}087;$$

$$F\left(\frac{1}{3} u_{\text{макс}}\right) = 1 - \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}(1{,}33) - \hat{\Phi}(-3{,}33)\right]\left[\hat{\Phi}(0{,}83) -\right.$$

$$\left. - \hat{\Phi}(-2{,}83)\right] = 1 - \frac{1}{4}[0{,}630 + 0{,}975][0{,}424 + 0{,}944] = 0{,}452;$$

$$F\left(\frac{2}{3} u_{\text{макс}}\right) = 1 - \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}(0{,}17) - \hat{\Phi}(-2{,}17)\right]\left[\hat{\Phi}(0{,}67) - \hat{\Phi}(-2{,}67)\right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}[0{,}091 + 0{,}857][0{,}349 + 0{,}928] = 0{,}698.$$

На рис. 40.10 показан график закона $F(u)$, построенный по четырем точкам.

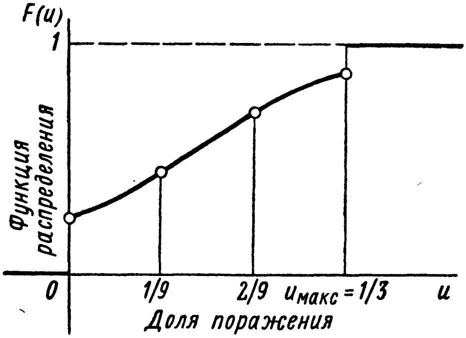


Рис. 40.10.

Пример 2. Производится один выстрел по цели с размерами $Ц_x = 2$; $Ц_y = 1$. Зона поражения имеет размеры $L_x = L_y = 3$. Вынос точки прицеливания отсутствует. Построить по четырем точкам функцию распределения $F(u)$ доли поражения U.

Решение. Построение зон показано на рис. 40.11. Попадание эпицентра в зону (p_m) — внутренняя часть прямоугольника $ABCD$ — соответствует накрытию всей цели ($u=1$). Попадание в зону (p_0) (внешняя часть прямоугольника $A'B'C'D'$) означает отсутствие накрытия цели ($u=0$).

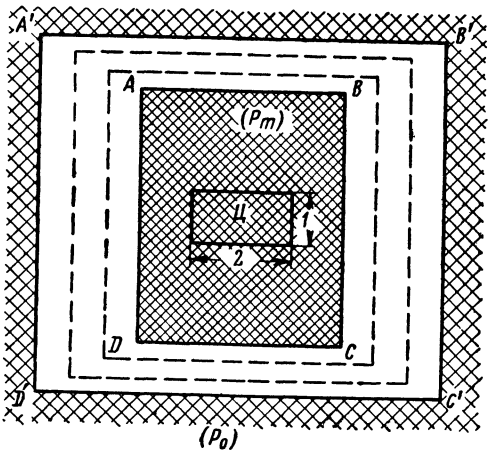


Рис. 40.11.

Аналогично предыдущему примеру находим:

$$p_0 = 1 - \hat{\Phi}(3{,}5)\,\hat{\Phi}(4) = 0{,}025,$$

$$p_m = \hat{\Phi}(2)\,\hat{\Phi}(2{,}5) = 0{,}746,$$

$$F(1/3u_{\text{макс}}) = 1 - \hat{\Phi}(3{,}33)\,\hat{\Phi}(3{,}17) = 0{,}056,$$

$$F(2/3u_{\text{макс}}) = 1 - \hat{\Phi}(2{,}67)\,\hat{\Phi}(2{,}83) = 0{,}125.$$

График функции $F(u)$, построенный по четырем точкам, показан на рис. 40.12.

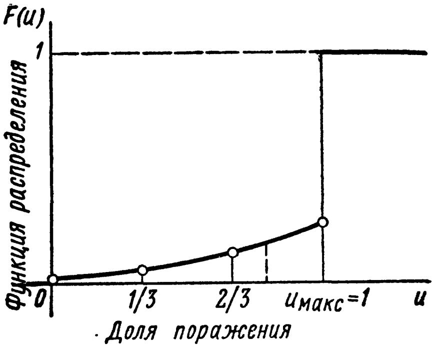


Рис. 40.12.

Зная функцию распределения $F(u)$ величины U при одном выстреле, легко найти вероятность R_u того, что при одном выстреле доля поражения U будет не менее заданной величины u:

$$R_u = 1 - F(u).$$

Пример 3. В условиях примера 1 найти вероятность того, что при одном выстреле будет поражено не менее 20% площади цели.

Решение. Имеем $u=0{,}2$. По графику рис. 40.10 находим приближенно

$$F(0{,}2) \approx 0{,}68, \quad R_{0,2} = 1 - F(0{,}2) \approx 0{,}32.$$

Пример 4. В условиях примера 2 найти вероятность того, что будет поражено не менее 70% площади цели.

Решение. По графику (рис. 40.12) при $u=0{,}8$ имеем:

$$F(0{,}8) \approx 0{,}16, \quad R_{0,8} \approx 1 - 0{,}16 = 0{,}84.$$

Изложенный выше приближенный метод нахождения закона распределения доли поражения U имеет свои отрицательные черты. Во-первых, несмотря на приближенность, он все же достаточно трудоемок. Во-вторых, и это самое главное, он пригоден только для случая одного выстрела и не может быть распространен на более сложный случай нескольких выстрелов $(n>1)$.

В следующих параграфах (§ 41—45) будут кратко изложены некоторые приближенные методы решения задачи оценки эффективности стрельбы по площадной цели. Преимущество этих методов в том, что они в одинаковой мере применимы к случаю одного и нескольких выстрелов и, кроме того, не являются особенно трудоемкими, так как доведены до готовых таблиц и графиков.

§ 41. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДОЛИ ПОРАЖЕНИЯ U В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Поскольку и цель $Ц$, и зона поражения L представляют собой прямоугольники со сторонами, параллельными главным осям рассеивания, то область накрытия цели зоной поражения тоже представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными главным осям. Это дает возможность расчленить плоскую задачу на две независимые линейные задачи: о накрытии цели зоной поражения по оси ox и по оси oy. Действительно, рассмотрим цель $Ц$ и зону поражения L (рис. 41.1); пусть $S_п$ — площадь прямоугольника, образованного перекрытием $Ц$ и L.

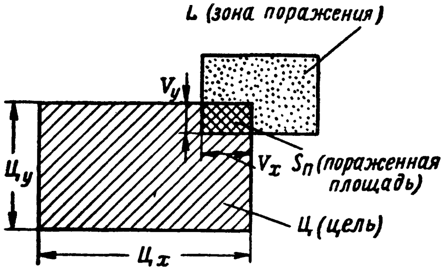


Рис. 41.1.

Доля поражения U будет равна

$$U = \frac{S_п}{S_ц}. \qquad (41.1)$$

Представим величину $S_п$ в виде произведения линейных размеров прямоугольника:

$$S_п = V_x V_y, \qquad (41.2)$$

где V_x — накрытая зоной поражения часть длины цели $Ц_x$;
V_y — накрытая зоной поражения часть ширины цели $Ц_y$.

Имеем

$$U = \frac{V_x V_y}{Ц_x Ц_y} = \frac{V_x}{Ц_x} \frac{V_y}{Ц_y}.$$

Введем обозначение:

$U_x = \frac{V_x}{Ц_x}$ — доля размера цели $Ц_x$ по оси ox, накрытая зоной поражения, или, короче, доля накрытия по оси ox.

Аналогично

$U_y = \frac{V_y}{Ц_y}$ — доля накрытия по оси oy.

Таким образом, плоская задача о площади перекрытия зоны поражения с целью свелась к двум линейным задачам о длине накрытия.

Зная законы распределения величин U_x, U_y, можно обычными методами теории вероятностей найти и закон распределения их произведения U. Однако точный вид этого закона распределения нам не нужен: для приближенного решения задачи достаточно знать лишь его числовые характеристики.

В частности, для нахождения средней доли поражения M вовсе не требуется знать закон распределения величины U; достаточно знать законы распределения отдельных сомножителей U_x, U_y.

§ 42. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ДОЛИ ПОРАЖЕНИЯ ПРИ ОДНОМ ВЫСТРЕЛЕ

Рассмотрим задачу о вычислении средней доли поражения при одном выстреле:

$$M = M[U]. \tag{42.1}$$

Представляя U в виде

$$U = U_x U_y, \tag{42.2}$$

получаем

$$M = M[U_x U_y]. \tag{42.3}$$

Так как величины U_x и U_y независимы, то можно применить теорему умножения математических ожиданий:

$$M = M[U_x]\, M[U_y]. \tag{42.4}$$

Обозначим

$M_x = M[U_x]$ — средняя доля накрытия по оси ox;
$M_y = M[U_y]$ — средняя доля накрытия по оси oy.

Имеем

$$M = M_x M_y, \tag{42.5}$$

т. е. *средняя доля поражения при одном выстреле равна произведению средних долей накрытия по осям.*

Рассмотрим линейную задачу о средней доле накрытия по одной оси, например, ox. Для этого найдем функцию распределения $F_x(u_x)$ случайной величины U_x:

$$F_x(u_x) = P(U < u_x). \tag{42.6}$$

Случайная величина U_x так же, как и U, есть величина смешанного типа. Ее крайние значения 0 и $(u_x)_{\text{макс}}$ будут иметь в общем случае отличные от нуля вероятности p_{ox} и p_{mx}, а в промежутках между ними функция распределения будет непрерывна.

Найдем прежде всего максимально-возможное значение величины U_x. Обозначим его для краткости z_x:

$$(u_x)_{\text{макс}} = z_x.$$

Очевидно, если размер зоны поражения по оси ox меньше размера цели ($L_x < Ц_x$), то

$$z_x = \frac{L_x}{Ц_x}.$$

Если же $L_x > Ц_x$, то зона поражения может накрыть всю длину цели:

$$z_x = 1.$$

При $L_x = Ц_x$, очевидно, обе формулы совпадают. Таким образом, имеем:

$$\left.\begin{aligned} z_x &= \frac{L_x}{Ц_x} \quad \text{при} \quad L_x \leqslant Ц_x, \\ z_x &= 1 \quad \text{при} \quad L_x \geqslant Ц_x. \end{aligned}\right\} \tag{42.7}$$

Найдем функцию распределения $F_x(u_x)$ величины U_x для участка $0 < u_x < z_x$, т. е. вероятность события

$$U_x < u_x.$$

Изобразим на рис. 42.1 взаимное положение цели $Ц$ и зоны поражения L для случая, когда $U_x = u_x$.

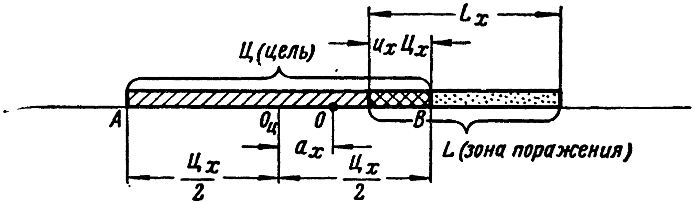


Рис. 42.1.

Очевидно, для того чтобы доля перекрытия была меньше u_x, нужно, чтобы центр O_1 отрезка L_x попал за пределы отрезка $A'B'$, ограниченного точками:

$$A' \text{ с координатой } -\left(\frac{Ц_x + L_x}{2} - u_x Ц_x\right);$$

$$B' \text{ с координатой } \frac{Ц_x + L_x}{2} - u_x Ц_x.$$

Вычисляя вероятность попадания случайной точки O_1 за пределы отрезка $A'B'$, получаем:

$$F_x(u_x) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{Ц_x + L_x}{2} - u_x Ц_x - a_x\right) + \hat{\Phi}\left(\frac{Ц_x + L_x}{2} - u_x Ц_x + a_x\right)\right], \tag{42.8}$$

где a_x — вынос точки прицеливания по оси ox.

Таким образом, функция распределения величины U_x найдена. Она выражается тремя разными формулами на трех участках оси Ox:

$$\left.\begin{aligned} &F_x(u_x) = 0 \quad \text{при} \quad u_x \leqslant 0, \\ &F_x(u_x) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{Ц_x + L_x}{2} - u_x Ц_x - a_x\right) + \hat{\Phi}\left(\frac{Ц_x + L_x}{2} - u_x Ц_x + a_x\right)\right] \\ &\qquad\qquad \text{при} \quad 0 < u_x \leqslant z_x, \\ &F_x(u_x) = 1 \quad \text{при} \quad u_x > z_x. \end{aligned}\right\} \tag{42.9}$$

Зная функцию распределения величины U_x, можно легко найти ее среднее значение (математическое ожидание) M_x. Для случайных величин смешанного типа математическое ожидание состоит из двух частей: суммы и интеграла. Сумма распространяется на те значения, которые имеют ненулевые вероятности (т. е. где функция распределения делает скачок), а интеграл — на тот участок, где функция распределения непрерывна. В нашем случае имеется два скачка функции распределения: в точках 0 и z_x. Следовательно,

$$M_x = 0 \cdot p_{ox} + z_x p_{mx} + \int\limits_0^{z_x} u_x \left(F_x(u_x)\right)'_{u_x} dx =$$

$$= z_x p_{mx} + \int\limits_0^{z_x} u_x \left(F_x(u_x)\right)'_{u_x} dx, \qquad (42.10)$$

где p_{ox} — скачок функции (42.9) в точке 0;

p_{mx} — скачок функции (42.9) в точке z_x.

Очевидно, аналогичная формула может быть написана и для M_y.

Интеграл, входящий в формулу (42.10), выражается через известные функции и может быть вычислен для любых конкретных значений $Ц_x$, L_x, a_x. Для случая $a_x=0$ сосчитаны таблицы значений функции (42.10). Однако на практике удобнее пользоваться не таблицами, а графиками. Образец такого графика приведен в приложении 2 (рис. 3). По оси абсцисс L откладывается размер зоны поражения в вероятных отклонениях по оси ox или oy, т. е. L_x или L_y. По оси ординат — средняя доля накрытия по оси ox или oy, т. е. M_x или M_y. Различные кривые оцифрованы соответственно размеру цели ($Ц_x$ или $Ц_y$).

Пользуясь этим графиком, можно легко определить среднюю долю поражения для случая прицеливания без выноса ($a_x=0$). Порядок работы следующий:

— выразить линейные размеры цели и зоны поражения в вероятных отклонениях, т. е. найти $Ц_x$, L_x, $Ц_y$, L_y;

— по графику найти M_x, M_y;

— перемножить их и найти среднюю долю поражения:

$$M = M_x M_y.$$

Пример. По цели с размерами $Ц_x^{(м)} = 1000$ *м*, $Ц_y^{(м)} = 600$ *м* производится один выстрел. Зона поражения L имеет размеры $L_x^{(м)} = 500$ *м* и $L_y^{(м)} = 600$ *м*. $E_x = E_y = 200$ *м*. Найти среднюю долю поражения M.

Решение. $Ц_x = 5, \quad L_x = 2{,}5,$

$Ц_y = 3, \quad L_y = 3.$

По графику (рис. 3 прилож. 2), интерполируя между кривыми $Ц=4$ и $Ц=6$, находим

$$M_x \approx 0{,}45.$$

По тому же графику (между кривыми $Ц=2$ и $Ц=4$) находим $M_y \approx 0{,}63$. Окончательно получим

$$M = M_x M_y \approx 0{,}28,$$

т. е. при одном выстреле будет поражено в среднем 28% площади цели.

§ 43. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ДОЛИ ПОРАЖЕНИЯ ПРИ ПРИЦЕЛИВАНИИ С ВЫНОСОМ

В предыдущем параграфе был дан способ вычисления средней доли поражения M для случая прицеливания без выноса ($a_x = a_y = 0$). Но и при наличии выноса точки прицеливания можно среднюю долю поражения M находить по тем же таблицам и графикам, которые составлены для случая прицеливания без выноса. Только придется войти в эти таблицы не один раз, а дважды, при измененном размере зоны поражения, и взять полусумму или полуразность найденных значений.

Сформулируем (без доказательства) правила вычисления средней доли поражения $M_x^{(a_x)}$ при наличии выноса точки прицеливания на величину a_x (очевидно, для $M_y^{(a_y)}$ правила будут аналогичными).

Случай 1. $L_x > 2a_x$ (размер зоны поражения больше удвоенного выноса).

Для нахождения $M_x^{(a_x)}$ нужно войти в таблицы (или графики) дважды при одном и том же истинном размере цели $Ц_x$, но при измененных размерах зоны поражения:

$$L_x^{(1)} = L_x + 2a_x; \quad L_x^{(2)} = L_x - 2a_x,$$

и взять полусумму полученных значений M_x:

$$M_x^{(a_x)} = \frac{1}{2}\left(M_x^{(1)} + M_x^{(2)}\right). \tag{43.1}$$

Случай 2. $L_x < 2a_x$ (размер зоны поражения меньше удвоенного выноса).

Для нахождения $M_x^{(a_x)}$ нужно войти в таблицы (или графики) дважды при одном и том же истинном размере цели $Ц_x$, но при измененных размерах зоны поражения:

$$L_x^{(1)} = L_x + 2a_x; \quad L_x^{(2)} = 2a_x - L_x,$$

и взять полуразность полученных значений M_x:

$$M_x^{(a_x)} = \frac{1}{2}\left(M_x^{(1)} - M_x^{(2)}\right). \tag{43.2}$$

Пример. По цели, размеры которой $Ц_x^{(м)} = 800$ *м* и $Ц_y^{(м)} = 400$ *м*, производится один выстрел. Зона поражения $L_x^{(м)} = L_y^{(м)} = 400$ *м* (рис. 43.1). Прицеливание производится по точке O, вынесенной относительно центра цели $O_ц$ на расстояния: $a_x^{(м)} = 100$ *м*, $a_y^{(м)} = 300$ *м*. Главные вероятные отклонения $E_x = 100$ *м*, $E_y = 50$ *м*. Найти среднюю долю поражения M.

Решение. $Ц_x = 8, \quad Ц_y = 8,$

$L_x = 4, \quad L_y = 8,$

$a_x = 1, \quad a_y = 6.$

Находим $M_x^{(a_x)}$. Учитывая, что $L_x > 2a_x$, получаем:

$$L_x^{(1)} = L_x + 2a_x = 6, \quad L_x^{(2)} = L_x - 2a_x = 2.$$

Входя в график (рис. 3 прилож. 2) дважды (при $Ц_x = 8$, $L_x^{(1)} = 6$ и при $Ц_x = 8$, $L_x^{(2)} = 2$), находим:

$$M_x^{(1)} \approx 0{,}69, \quad M_x^{(2)} \approx 0{,}25.$$

По формуле (43.1)

$$M_x^{(a_x)} \approx \frac{1}{2}(0{,}69 + 0{,}25) = 0{,}47.$$

Учитывая, что $L_y < 2a_y$, получаем

$$L_y^{(1)} = L_y + 2a_y = 20,$$

$$L_y^{(2)} = 2a_y - L_y = 4.$$

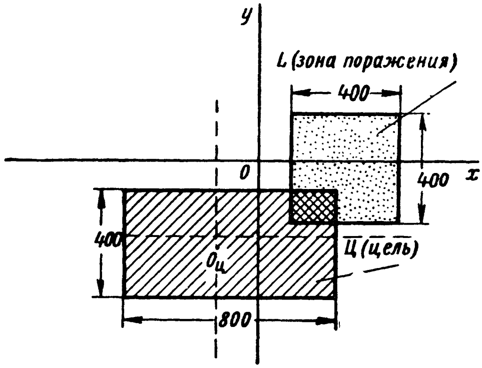


Рис. 43.1.

По тому же графику

$$M_y^{(1)} \approx 1{,}00, \quad M_y^{(2)} \approx 0{,}48.$$

По формуле (43.2)

$$M_y^{(a_y)} \approx \frac{1}{2}(1{,}00 - 0{,}48) = 0{,}26.$$

Окончательно

$$M = M_x^{(a_x)} M_y^{(a_y)} \approx 0{,}46 \cdot 0{,}26 \approx 0{,}122,$$

т. е. при одном выстреле будет поражено в среднем около 12% площади цели.

§ 44. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ДОЛИ ПОРАЖЕНИЯ ПРИ НЕСКОЛЬКИХ ВЫСТРЕЛАХ

В § 42 и 43 были рассмотрены способы вычисления средней доли поражения M при одном выстреле (или одном обобщенном выстреле), когда на цель бросается одна зона поражения L [1].

Здесь мы рассмотрим более сложную задачу о вычислении средней доли поражения M_n при n выстрелах. Предположим, что по цели $Ц$ производится n независимых выстрелов с одинаковой зоной поражения L (рис. 44.1) и прицеливание производится по одной и той же точке O. Мы уже обращали внимание на то, что при увеличении числа выстрелов n средняя доля поражения

[1] При серийном или групповом бомбометании обычными бомбами в качестве такой зоны рассматривается вся «область разрывов», внутри которой считается обеспеченной определенная плотность разрывов.

M_n растет не пропорционально числу выстрелов n, а медленнее. Это объясняется двумя причинами:

— при нескольких выстрелах зоны поражения отдельных снарядов могут перекрываться (см. рис. 44.1);

— средняя доля поражения M_n ни при каком числе выстрелов не может превзойти единицы и при неограниченном увеличении n может только асимптотически приближаться к единице (рис. 44.2).

Точная зависимость, связывающая M_n и число выстрелов n, довольно сложна. Однако многочисленные расчеты показали, что

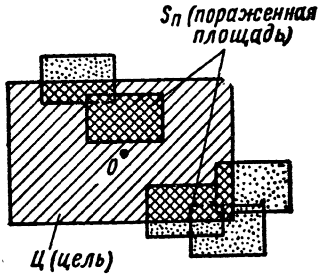


Рис. 44.1.

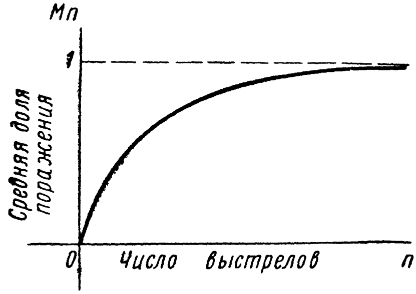


Рис. 44.2.

для практических надобностей ее в большинстве случаев можно заменить показательной функцией вида

$$M_n = 1 - (1 - M)^n, \tag{44.1}$$

где M — средняя доля поражения при одном выстреле[1].

В дальнейшем мы будем пользоваться для M_n приближенной формулой (44.1).

Пример. По цели с размерами $Ц_x^{(м)} = 500$ *м* и $Ц_y^{(м)} = 200$ *м* производится восемь независимых выстрелов с прицеливанием по центру цели. Размеры зоны поражения $L_x^{(м)} = L_y^{(м)} = 400$ *м*. Главные вероятные отклонения $E_x = 500$ *м*, $E_y = 400$ *м*.

Найти среднюю долю поражения M_8.

Решение. $Ц_x = 1, \quad Ц_y = 0{,}5,$

$L_x = 0{,}8, \quad L_y = 1{,}0,$

$a_x = a_y = 0.$

По графику (рис. 3 прилож. 2) находим:

$$M_x \approx 0{,}27, \quad M_y \approx 0{,}28,$$

$$M = M_x M_y \approx 0{,}076.$$

При $n=8$ по формуле (44.1) (или табл. 3 прилож. 1) имеем $M_8 = 1 - (1 - 0{,}076)^8 \approx 0{,}47$.

---

[1] Формула (44.1) становится недостаточно точной в случае, когда размеры цели велики по сравнению с областью рассеивания снарядов.

§ 45. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ $R_{u;\,n}$ ЗАДАННОЙ ДОЛИ ПОРАЖЕНИЯ U

В § 40 нами был уже рассмотрен приближенный способ определения вероятности R_u заданной доли поражения u при одном выстреле: для этого нужно было по точкам построить функцию распределения доли поражения $F(u)$ и взять ее дополнение до единицы. Однако этот способ, как уже было сказано, довольно трудоемкий и к тому же применим только для случая $n=1$. В данном параграфе мы изложим другой приближенный метод определения $R_{u;\,n}$, применимый как для $n=1$, так и для $n>1$. Идея этого метода состоит в следующем.

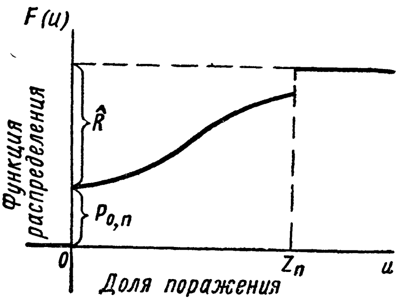


Рис. 45.1.

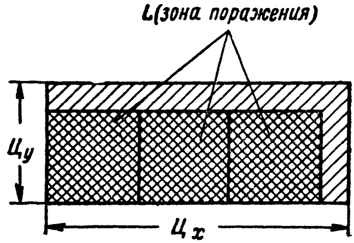


Рис. 45.2.

Рассмотрим функцию распределения $F(u)$ доли поражения U при n выстрелах (рис. 45.1).

Эта функция в общем случае имеет скачки (разрывы) в двух точках: 0 и z_n, где z_n — максимально-возможная доля поражения при n выстрелах.

Для точного определения величины z_n нужно рассмотреть изображение цели $Ц$ и зоны поражения L и посмотреть, какую максимальную долю площади цели можно накрыть n зонами поражения. Например, для $Ц_x=5$, $Ц_y=2$, $L_x=L_y=1{,}5$ и $n=3$ максимальная доля поражения равна $z_3=0{,}675$ (рис. 45.2). На практике в большинстве случаев для надежного поражения цели берут число выстрелов n таким, чтобы можно было накрыть зонами поражения всю цель, и тогда величина z_n обращается в единицу.

Таким образом, точка z_n, где расположен второй скачок функции $F(u)$, всегда известна. Первый скачок функции $F(u)$ всегда находится в точке $u=0$. Величина этого скачка есть вероятность $p_{0,\,n}$ того, что при n выстрелах накрытая зоной поражения площадь цели будет равна нулю, т. е. цель совсем не будет «задета» зоной поражения. Очевидно,

$$p_{0,\,n} = p_0^n, \tag{45.1}$$

где p_0 — вероятность того, что цель не будет задета зоной поражения при одном выстреле.

Дополнение величины $p_{0,\,n}$ до единицы обозначим $\hat{R}_n$:

$$R_n = 1 - p_{0,\,n}. \tag{45.2}$$

Это вероятность того, что при n выстрелах цель будет хотя бы один раз задета зоной поражения.

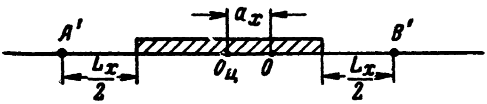


Рис. 45.3.

Очевидно,

$$\hat{R}_n = 1 - \left(1 - \hat{R}\right)^n, \tag{45.3}$$

где $\hat{R} = 1 - p_0$ вероятность того, что цель будет задета при одном выстреле.

Для того чтобы при одном выстреле цель была задета, необходимо совмещение двух событий: цель должна быть задета зоной поражения по оси ox и по оси oy одновременно; отсюда

$$\hat{R} = \hat{R}_x \hat{R}_y, \tag{45.4}$$

где $\hat{R}_x$ — вероятность того, что цель будет задета зоной поражения по оси ox;

$\hat{R}_y$ — то же, по оси oy.

Из рис. 45.3 видно, что вероятность $\hat{R}_x$ есть не что иное, как вероятность попадания центра O_1 зоны поражения L_x в пределы отрезка от A' до B':

$$\hat{R}_x = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{Ц_x + L_x}{2} - a_x\right) + \hat{\Phi}\left(\frac{Ц_x + L_x}{2} + a_x\right)\right]. \tag{45.5}$$

Аналогично

$$\hat{R}_y = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{Ц_y + L_y}{2} - a_y\right) + \hat{\Phi}\left(\frac{Ц_y + L_y}{2} + a_y\right)\right]. \tag{45.6}$$

При $a_x = a_y = 0$ (прицеливание без выноса)

$$\left.\begin{aligned} \hat{R}_x &= \hat{\Phi}\left(\frac{Ц_x + L_x}{2}\right), \\ \hat{R}_y &= \hat{\Phi}\left(\frac{Ц_y + L_y}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{45.7}$$

Таким образом, величина скачка функции $F(u)$ в точке $u=0$ выяснена.

Для приближенного вычисления $F(u)$ при $0<u<z_n$ можно применить следующий прием: заменить кривую $F(u)$ параболой второго порядка (рис. 45.4), т. е. выражением вида

$$\tilde{F}(u) = au^2 + bu + c \tag{45.8}$$

так, чтобы сохранились неизменными следующие параметры:

— скачок p_0 в точке $u=0$;

— средняя доля пораженной площади

$$M_n = M[U];$$

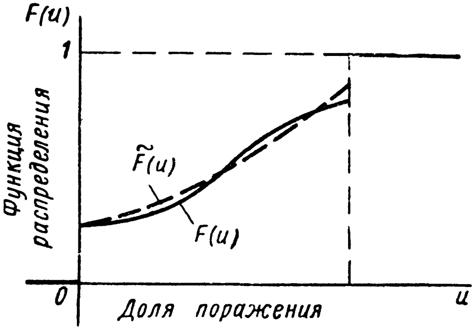


Рис. 45.4.

— средний квадрат доли пораженной площади

$$C_n = M[U^2].$$

Можно показать, что коэффициенты в формуле (45.8) будут равны:

$$\left.\begin{aligned} a &= 6\left(-\frac{\hat{R}_n}{z_n^2} + \frac{4M_n}{z_n^3} - \frac{3C_n}{z_n^4}\right), \\ b &= 6\left(\frac{\hat{R}_n}{z_n} - \frac{3M_n}{z_n^2} + \frac{2C_n}{z_n^3}\right), \\ c &= 1 - \hat{R}_n. \end{aligned}\right\} \tag{45.9}$$

Подставляя коэффициенты (45.9) в выражение (45.8), вычитая из единицы и группируя члены, содержащие $\hat{R}_n$, M_n и C_n, получаем следующее приближенное выражение для $R_{u;\,n}$:

$$R_{u;\,n} \approx \hat{R}_n\left(1 - \frac{6}{z_n}u + \frac{6}{z_n^2}u^2\right) + M_n\left(\frac{18}{z_n^2}u - \frac{24}{z_n^3}u^2\right) + \\ + C_n\left(-\frac{12}{z_n^3}u + \frac{18}{z_n^4}u^2\right). \tag{45.10}$$

Таким образом, получено выражение для $R_{u;\,n}$ в зависимости от пяти параметров, а именно:

— заданная доля поражения u;

— максимально возможная в данных условиях доля поражения z_n;

— вероятность того, что цель будет задета $\hat{R}_n$;

— средняя доля поражения M_n;

— средний квадрат доли поражения C_n.

Способы вычисления величин z_n, $\hat{R}_n$, M_n были освещены ранее. Остается указать, как вычисляется величина C_n.

Способ ее вычисления аналогичен способу вычисления средней доли поражения M_n. Сначала находится средний квадрат доли поражения при одном выстреле:

$$C = C_x C_y, \tag{45.11}$$

где $C_x = M\left[U_x^2\right]$ — средний квадрат доли накрытия по оси ox;

C_y — средний квадрат доли накрытия по оси oy.

Зная функцию распределения $F_x(u_x)$ величины U_x, можно легко найти C_x:

$$C_x = z_x^2 p_z + \int\limits_0^z u_x^2 \left(F_x(u_x)\right)'_{u_x} dx. \tag{45.12}$$

Аналогичной формулой выражается C_y. Интеграл (45.12) вычисляется через известные функции и для него составлены таблицы и графики. На рис. 4 прилож. 2 приведен график $C_x C_y$ в зависимости от $L_x(L_y)$, построенный по тому же принципу, что и график для $M_x(M_y)$.

Для вычисления C_n — среднего квадрата доли поражения при n выстрелах — можно воспользоваться приближенными формулами:

$$\left.\begin{aligned} C_n &= M_n^2 + (C - M^2), \text{ если } C < 0{,}25, \\ C_n &= 1 - (1 - C)^n, \quad \text{ если } C \geqslant 0{,}25. \end{aligned}\right\} \tag{45.13}$$

Приближенные формулы (45.10)—(45.13) для вычисления $R_{u;\,n}$ дают иногда заметные ошибки, в частности, в случае, когда размеры как цели, так и зоны поражения велики по сравнению с вероятными отклонениями. В таких условиях практически гарантировано накрытие значительной части цели зоной поражения, и функция $R_{u;\,n}$ оказывается на целом участке оси ou практически равной единице, в связи с чем плохо изображается параболой второго порядка. В подобных случаях, пользуясь формулами (45.10)—(45.13), можно получить даже значение $R_{u;\,n}$, несколько большее единицы, что, разумеется, бессмысленно. Существуют приемы, позволяющие в таких случаях ввести поправку в расчет, но мы на них останавливаться не будем. Имея в виду сугубо приближенный характер всех расчетов, связанных с оценкой эффективности стрельбы по площадной цели, можно ограничиться тем, что в случаях, когда расчет по приближенным формулам дает $R_{u;\,n}>1$, полагать $R_{u;\,n}=1$.

Пример. Производится стрельба без выноса точки прицеливания тремя выстрелами по целям $Ц_x^{(м)}=800$ *м* и $Ц_y^{(м)}=400$ *м*. Зона поражения $L_x^{(м)}=L_y^{(м)}=600$ *м*. Главные вероятные отклонения $E_x=E_y=200$ *м*. Найти вероятность того, что в результате этих трех выстрелов будет поражено не менее 80% площади цели.

Решение. Заданное значение доли поражения $u=0{,}8$. Требуется найти вероятность $R_{0,8;\,3}=P(U\geqslant 0{,}8)$.

Имеем:

$$Ц_x=4,\quad Ц_y=2;$$
$$L_x=3,\quad L_y=3.$$

По графику (рис. 3 прилож. 2) находим:

$$M_x\approx 0{,}57,\quad M_y\approx 0{,}67,$$
$$M=M_xM_y\approx 0{,}382,$$
$$M_3=1-(1-M)^3\approx 0{,}765.$$

По графику (рис. 4 прилож. 2) находим:

$$C_x\approx 0{,}36,\quad C_y\approx 0{,}54,$$
$$C=C_xC_y\approx 0{,}194<0{,}25.$$

По первой формуле (45.13) получим

$$C_3=M_3^2-(C-M^2)\approx 0{,}585+0{,}048=0{,}633.$$

Так как тремя зонами может быть накрыта вся цель, то

$$z_3=1.$$

Вычисляем вероятность того, что цель будет задета хотя бы одной зоной поражения:

$$\hat{R}_3=1-\left(1-\hat{R}\right)^3,\quad \hat{R}=\hat{R}_x\hat{R}_y,$$

$$\hat{R}_x=\hat{\Phi}\left(\frac{Ц_x+L_x}{2}\right)=\hat{\Phi}(3{,}5)=0{,}982,\quad \hat{R}_y\approx 0{,}908,$$

$$\hat{R}=\hat{R}_x\hat{R}_y\approx 0{,}89,\quad \hat{R}_3\approx 0{,}999.$$

По формуле (45.10) при $u=0{,}8$ найдем

$$R_{0,8;\,3}=0{,}999\,(1-6\cdot 0{,}8+6\cdot 0{,}8^2)+0{,}765\,(18\cdot 0{,}8-24\cdot 0{,}8^2)+$$
$$+0{,}633\,(-12\cdot 0{,}8+18\cdot 0{,}8^2)\approx 0{,}52.$$

ГЛАВА 7

КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

§ 46. ЗАДАЧА КОМПЛЕКСНОЙ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ

В предыдущих главах мы оценивали эффективность стрельбы по различным целям, предполагая, что стрельба (атака цели) уже состоялась. Например, вероятность поражения воздушной цели истребителем-перехватчиком вычислялась в предположении, что истребитель выведен наземными средствами в такое положение относительно цели, из которого возможна атака, обнаружил цель с помощью бортовой аппаратуры, занял исходное положение для атаки и ведет стрельбу. Аналогичным образом вычислялась средняя доля поражения площадной цели M и вероятность не менее заданной доли поражения R_u; при их вычислении предполагалось, что самолет-бомбардировщик выведен на цель, обнаружил ее и приступил к выполнению боевой задачи.

В действительности дело обстоит не так просто. Предшествующие стрельбе этапы боевой деятельности летательного аппарата тоже могут в зависимости от случайных факторов закончиться более или менее успешно. Истребитель может быть наведен на воздушную цель наземными средствами, а может быть и не наведен; может обнаружить ее или не обнаружить. Аналогично бомбардировщик, выполняющий бомбометание по некоторому объекту в тылу противника, может не выйти к цели по целому ряду случайных причин, а выйдя к цели, может ее не обнаружить или опоздать выйти на боевый курс.

Следует ли учитывать при оценке эффективности эти этапы боевой деятельности, предшествующие стрельбе как таковой?

Ответ на этот вопрос зависит от характера задачи, стоящей перед исследованием.

Предположим, что речь идет о сравнительной оценке различных образцов вооружения, устанавливаемых на летательных аппаратах с одними и теми же летно-тактическими характеристиками и одинаковым радиолокационным оборудованием. Такую оценку вполне можно производить, рассматривая только один последний этап операции (этап стрельбы) и исходя из предположения, что все предыдущие этапы выполнены.

Положение меняется, если речь идет о комплексной сравнительной оценке летательных аппаратов, различающихся не только вооружением, но и другими параметрами. Такую сравнительную оценку нужно производить с учетом всех этапов боевой деятельности этих аппаратов.

Рассмотрим пример. Допустим, что сравниваются по эффективности два варианта истребителя-перехватчика, имеющих одно и то же назначение: уничтожать воздушные цели. Первый вариант обладает мощным тяжелым вооружением и совершенным радиооборудованием, позволяющим обнаруживать воздушные цели на большом расстоянии, но сравнительно малой маневренностью. Второй вариант облегчен за счет веса вооружения и радиооборудования и обладает большей скоростью и маневренностью, чем первый. Очевидно, сравнительная оценка боевой эффективности этих двух истребителей требует комплексного учета всех этапов их боевой деятельности.

Заметим, что задача комплексной оценки эффективности летательных аппаратов вообще сложнее, чем аналогичная ей задача оценки эффективности стрельбы. Если при оценке эффективности стрельбы обычно сравнительно нетрудно выбрать показатель эффективности, исходя из существа боевой задачи, то при комплексной оценке выбор критерия не столь очевиден и часто приходится вести оценку не по одному критерию, а сразу по нескольким. В ряде случаев важно бывает оценить экономическую целесообразность каждого варианта, для чего применяются различные стоимостные критерии. В некоторых случаях основное значение приобретает время выполнения боевой задачи. Для аппаратов многоразового действия часто бывает целесообразно оценить полную эффективность боевой деятельности аппарата за все время его существования.

Для того чтобы определять все эти и подобные им критерии, прежде всего необходимо научиться оценивать эффективность однократного боевого применения летательного аппарата (одного самолето-вылета) с учетом всех этапов его боевой деятельности.

Здесь мы будем различать два типичных случая:

1. Летательный аппарат выполняет вполне определенную боевую задачу A, которая может быть только выполнена или не выполнена. Тогда показателем боевой эффективности летательного аппарата является полная вероятность выполнения боевой задачи

$$\widetilde{W} = P(A), \tag{46.1}$$

вычисленная с учетом всех этапов боевой деятельности.

2. Летательный аппарат имеет задачу нанести противнику возможно больший ущерб U (чем больше, тем лучше). Тогда показателем боевой эффективности аппарата является полное мате-

матическое ожидание ущерба U (полный средний ущерб)

$$\tilde{M}=M[U], \tag{46.2}$$

вычисляемое с учетом всех этапов боевой деятельности.

§ 47. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ФАЗЫ ВЫПОЛНЕНИЯ БОЕВОЙ ЗАДАЧИ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ МНОГОФАЗОВОЙ ОПЕРАЦИИ

Рассмотрим некоторый летательный аппарат (истребитель, беспилотный истребитель, зенитная управляемая ракета), перед которым поставлена задача поражения воздушной цели (бомбардировщика, крылатой ракеты). Боевую деятельность такого аппарата можно условно расчленить на несколько последовательных

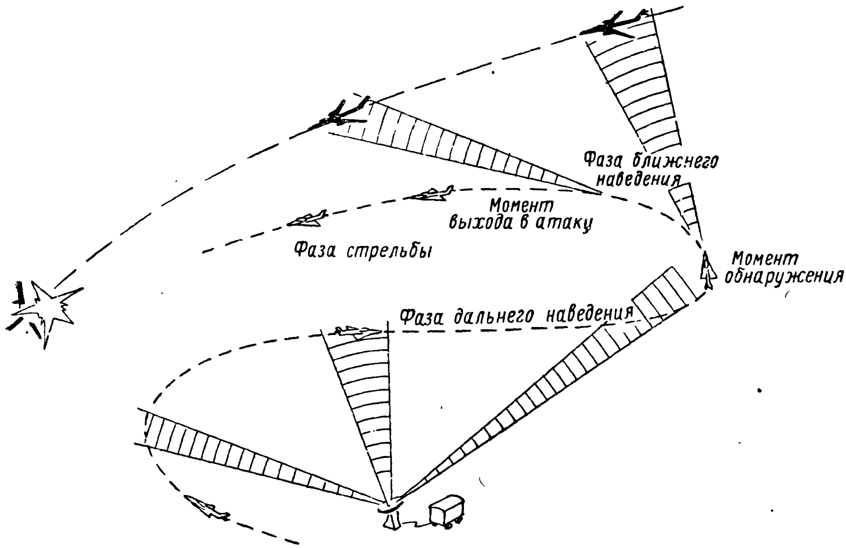


Рис. 47.1. Последовательные фазы выполнения боевой задачи.

этапов или «фаз». Например, для истребителя можно рассмотреть следующие фазы (рис. 47.1):

— фаза дальнего наведения на цель с помощью наземных средств; в случае успешного выполнения этой фазы истребитель будет выведен в район цели, причем взаимное расположение истребителя и цели будет таким, что при этом возможна атака цели;

— фаза ближнего наведения, включающая обнаружение цели с помощью бортовых средств и вывод истребителя в исходное положение для атаки; в случае успешного выполнения этой фазы атака цели состоится;

— фаза стрельбы, в результате успешного выполнения которой цель будет поражена.

Для успешного выполнения каждой фазы необходимо успешное выполнение предыдущих. Полная вероятность поражения цели может быть вычислена по теореме умножения вероятностей:

$$\widetilde{W} = p_1 p_2 p_3, \qquad (47.1)$$

где p_1, p_2, p_3 — вероятности успешного выполнения всех трех фаз; каждая последующая вероятность вычисляется при условии, что предыдущая фаза закончилась успешно.

Вообще говоря, вероятность успешного выполнения каждой последующей фазы зависит не только от того, успешно ли закончилась предыдущая, но еще и от того, чем именно она закончилась. Например, вероятность поражения цели при стрельбе с истребителя зависит от того, на какую из возможных кривых атаки выведен истребитель. Однако для грубо приближенной оценки эффективности можно этой зависимостью пренебречь и вводить в расчет каждую из вероятностей p_1, p_2, ... каким-то средним значением.

В зависимости от задачи научного исследования и тех конкретных вопросов, которые должны быть решены, число рассматриваемых фаз может быть больше или меньше. Например, фазу ближнего наведения можно подразделить на две, а именно:

— фаза обнаружения цели;

— фаза маневрирования для выхода в атаку.

При решении задач, связанных с оценкой эффективности аппаратов многоразового действия, часто бывает целесообразно ввести в рассмотрение еще одну фазу, а именно:

— фаза возвращения аппарата к месту базирования.

В любом случае полную вероятность выполнения боевой задачи $\widetilde{W}$ можно приближенно вычислить как произведение вероятностей выполнения последовательных фаз:

$$\widetilde{W} = p_1 p_2 \ldots p_k. \qquad (47.2)$$

Рассмотрим другой случай, когда боевая эффективность летательного аппарата оценивается по математическому ожиданию ущерба, нанесенного противнику, и когда непосредственному выполнению стрельбы предшествуют несколько предварительных фаз.

Например, выполнение боевой задачи — бомбометание по площадной цели — бомбардировщиком может состоять из следующих фаз:

— фаза взлета и полета до зоны ПВО противника;

— фаза преодоления ПВО;

— фаза выхода в район цели;

— фаза обнаружения и выхода на боевой курс;

— фаза бомбометания.

Очевидно, для того чтобы могла быть выполнена последняя, пятая фаза, необходимо, чтобы были успешно выполнены все предыдущие. Показатель эффективности — полная средняя доля поражения $\widetilde{M}$ — может быть вычислен по формуле:

$$\widetilde{M} = p_1 p_2 p_3 p_4 M,$$

где p_1, p_2, p_3, p_4 — вероятности успешного выполнения первой, второй, третьей и четвертой фаз;

M — средняя доля поражения, вычисляемая в предположении, что все предыдущие фазы закончились успешно.

Во многих случаях практики вероятность выполнения фазы зависит от надежности применяемых в ней технических устройств, т. е. от вероятности безотказной работы этих устройств в течение времени, потребного для выполнения фазы. Вопросы, связанные с учетом надежности, будут подробно рассмотрены в гл. 10. Здесь мы ограничимся следующим общим указанием: *если успешное выполнение какой-либо фазы требует безотказной работы некоторых технических устройств, то для учета их надежности достаточно умножить вероятность выполнения данной фазы на надёжность (вероятность безотказной работы) устройства.*

Пример 1. Оценить полную вероятность поражения воздушной цели истребителем, учитывая следующие данные:

— вероятность вывода истребителя на цель наземной станцией наведения $p_1 = 0,8$;

— вероятность обнаружения воздушной цели при условии, что истребитель выведен на цель $p_2 = 0,95$;

— вероятность того, что истребителю, обнаружившему цель, удастся атаковать ее $p_3 = 0,9$;

— вероятность поражения цели, если атака состоялась $p_4 = 0,8$;

— надежность бортовой радиоаппаратуры истребителя, без которой невозможны ни дальнее, ни ближнее наведение, $p_5 = 0,98$.

Решение. Полная вероятность поражения цели равна произведению вероятностей всех фаз; чтобы учесть надежность работы аппаратуры, необходимо умножить это произведение еще на $p_5 = 0,98$:

$$\widetilde{W} = 0,8 \cdot 0,95 \cdot 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,98 \approx 0,535.$$

Пример 2. Оценить полную долю поражения площадной цели бомбардировщиком с учетом следующих данных:

— вероятность безаварийного взлета и полета до зоны ПВО противника $p_1 = 0,99$;

— вероятность преодоления ПВО $p_2 = 0,8$;

— вероятность выхода в район цели, где возможно ее обнаружение $p_3 = 0,9$;

— вероятность того, что цель будет обнаружена и бомбардировщик выйдет на боевой курс $p_4 = 0,97$;

— средняя доля поражения цели, если бомбометание по ней будет выполнено $M = 0,9$.

Решение. Имеем

$$\widetilde{M} = p_1 p_2 p_3 p_4 M = 0,99 \cdot 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,97 \cdot 0,9 \approx 0.622.$$

§ 48. КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ МНОГОРАЗОВОГО ДЕЙСТВИЯ

При комплексной оценке эффективности летательных аппаратов многоразового действия, а также при их сравнении с аппаратами одноразового действия часто бывает полезно оценить суммарную эффективность летательного аппарата за все время его боевой деятельности. Эту суммарную эффективность естественно оценивать *средним суммарным ущербом*, который может принести противнику летательный аппарат за все время своего существования. При этом, разумеется, необходимо учитывать возможность гибели летательного аппарата в процессе боевых действий в результате аварий, ответного огня противника или боевого воздействия средств ПВО.

Для того чтобы произвести такую оценку, рассмотрим боевую деятельность летательного аппарата как ряд повторяющихся однородных боевых задач, причем каждую последующую задачу аппарат может выполнить, только если он остался боеспособным (не был поражен) при выполнении предыдущих задач.

Обозначим $\widetilde{У}$ — полный средний ущерб, наносимый противнику летательным аппаратом за один боевой вылет; n — номинальный ресурс, т. е. количество боевых вылетов, которые способен выполнить летательный аппарат за все время своей боевой деятельности. Поставим задачу: определить *средний суммарный ущерб* $\widetilde{У}_с$, который наносит противнику данный летательный аппарат за все время своей боевой деятельности.

Предположим, что в каждом боевом вылете летательный аппарат может выйти из строя (быть поражен или потерпеть аварию) с какой-то вероятностью P. Тогда истинное число боевых вылетов N есть величина случайная. Суммарный средний ущерб $\widetilde{У}_с$ можно вычислить по формуле

$$\widetilde{У}_с = \widetilde{У}\bar{n}, \tag{48.1}$$

где $\bar{n} = M[N]$ — среднее число боевых вылетов, которое фактически осуществит летательный аппарат.

Найдем величину $\bar{n}$. Будем рассуждать следующим образом. В одном боевом вылете аппарат поражается с вероятностью P; следовательно, на один боевой вылет приходится в среднем P пораженных аппаратов. За все время своей боевой деятельности аппарат поражается с вероятностью

$$1-(1-P)^n,$$

следовательно, на все время боевой деятельности приходится $1-(1-P)^n$ пораженных аппаратов. Чтобы найти среднее число боевых вылетов, нужно разделить вторую величину на первую:

$$\bar{n} = \frac{1-(1-P)^n}{P}. \tag{48.2}$$

В случае, когда n велико, а вероятность P не очень мала, второй член в числителе становится пренебрежимо малым и среднее число боевых вылетов приближенно равно

$$\bar{n} = \frac{1}{P}, \tag{48.3}$$

где P — вероятность поражения (выхода из строя) летательного аппарата в одном боевом вылете.

Остановимся на вопросе о том, в каких единицах определяется ущерб, наносимый противнику.

В случае, если летательный аппарат предназначен для поражения одиночных целей (например, истребитель-перехватчик для поражения самолетов), в качестве суммарного среднего ущерба $\tilde{У}_с$ можно взять среднее число пораженных истребителем типовых целей.

Вычислим величину $\tilde{У}_с$. Средний ущерб, нанесенный истребителем за один вылет, — это полная вероятность поражения воздушной цели[1]:

$$\tilde{У} = \tilde{W}, \tag{48.4}$$

откуда

$$\tilde{У}_с = \tilde{W}\bar{n}. \tag{48.5}$$

Рассмотрим другой случай, когда летательный аппарат (бомбардировщик) предназначен для воздействия по площадным целям. Тогда суммарный средний ущерб $\tilde{У}_с$ и полный средний ущерб в одном вылете $\tilde{У}$ можно измерять средней пораженной площадью типовой цели[2]:

$$\tilde{У} = \tilde{S}_{пор}, \tag{48.6}$$

$$\tilde{У}_с = \tilde{S}_{пор}\,\bar{n}. \tag{48.7}$$

Среднюю пораженную площадь $\tilde{S}_{пор}$ в одном боевом вылете легко определить, умножая среднюю долю поражения M на площадь цели $\tilde{S}_ц$ и на вероятности успешного выполнения всех фаз, предшествующих бомбометанию:

$$\tilde{S}_{пор} = p_1 p_2 \ldots p_k M S_ц. \tag{48.8}$$

Пример 1. Оценить суммарный средний ущерб, наносимый противнику истребителем-перехватчиком с учетом следующих предположительных данных. Номинальный ресурс истребителя 200 вылетов. Боевой вылет разделяется на следующие фазы:

— фаза взлета;

— фаза дальнего наведения;

---

[1] Предполагается, что за один вылет истребитель может атаковать только одну цель.

[2] В отличие от случая стрельбы по одной цели здесь удобнее рассматривать не «долю поражения», а самое пораженную площадь.

— фаза ближнего наведения, в ходе которой истребитель подвергается ответному огню со стороны бомбардировщика;

— фаза стрельбы;

— фаза возвращения на базу и посадки.

Вероятности успешного выполнения фаз заданы:

— вероятность безаварийного взлета $p_1=0{,}99$;

— вероятность успешного осуществления дальнего наведения $p_2=0{,}98$;

— вероятность успешного осуществления ближнего наведения $p_3=0{,}95$;

— вероятность того, что на этом этапе истребитель не будет сбит бомбардировщиком, $p'_3=0{,}8$;

— вероятность поражения цели при стрельбе $p_4=0{,}9$;

— вероятность возвращения на базу и безаварийной посадки $p_5=0{,}99$.

Решение. Находим полную вероятность поражения цели в одном вылете с учетом всех фаз, предшествующих стрельбе:

$$\widetilde{W}=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p'_3\cdot p_4\approx 0{,}657.$$

Определяем вероятность гибели истребителя в одном вылете.

Считаем, что гибель истребителя возможна только: при взлете, от ответного огня цели, при посадке и что авария при взлете и посадке равносильна гибели истребителя. Тогда вероятность выхода из строя истребителя в одном вылете будет равна сумме следующих вероятностей:

1) вероятность того, что истребитель погибнет при взлете: $1-p_1$;

2) вероятность того, что истребитель не погибнет при взлете, но будет наведен на цель и сбит ответным огнем: $p_1p_2(1-p'_3)$;

3) вероятность того, что он не погибнет при взлете, будет наведен на цель, не будет сбит ответным огнем, но погибнет при посадке: $p_1p_2p_3'(1-p_5)$;

4) вероятность того, что он не погибнет при взлете, не будет наведен на цель и погибнет при посадке: $p_1(1-p_2)(1-p_5)$.

Складывая эти вероятности, получим вероятность гибели истребителя в одном вылете: $p\approx 0{,}211$.

Так как $(1-P)^{200}\approx 0$, среднее число боевых вылетов найдем по формуле (48.3):

$$\bar{n}=\frac{1}{P}=\frac{1}{0{,}211}\approx 4{,}74.$$

Суммарный средний ущерб, наносимый противнику за все время боевой деятельности истребителя, будет

$$\widetilde{У}_с=0{,}657\cdot 4{,}74\approx 3{,}13,$$

т. е. за все время своей боевой деятельности истребитель собьет в среднем около трех воздушных целей.

Пример 2. Оценить суммарный средний ущерб, наносимый противнику самолетом-бомбардировщиком за все время его боевой деятельности. Пусть номинальный ресурс бомбардировщика 40 боевых вылетов; типовая площадная цель имеет размеры 500×200 *м*, а боевой вылет состоит из следующих фаз, с вероятностями их успешного выполнения:

— фаза взлета и полета до зоны ПВО ($p_1=0{,}99$);

— фаза преодоления ПВО по пути к цели ($p_2=0{,}8$);

— фаза выхода на цель ($p_3=0{,}95$);

— фаза бомбометания (средняя доля поражения цели при состоявшемся бомбометании $M=0{,}8$);

— фаза вторичного преодоления ПВО по пути назад ($p_4=0{,}85$);

— фаза возвращения на базу и посадки ($p_5=0{,}97$).

Бомбардировщик может потерпеть аварию только на первой и последней фазах (для простоты считаем ее равносильной гибели самолета).

Решение. Полная средняя доля поражения цели в одном вылете

$$\widetilde{M} = p_1 p_2 p_3 M \approx 0{,}602.$$

Абсолютная величина средней площади, пораженной в одном вылете:

$$\widetilde{S}_{\text{пор}} = 0{,}602 S_{\text{ц}} \approx 0{,}6 \cdot 10^5 \text{ м}^2.$$

Вероятность гибели бомбардировщика в одном вылете

$$P = 1 - p_1 p_2 p_4 p_5 \approx 0{,}346.$$

Среднее число боевых вылетов

$$\bar{n} = \frac{1}{P} \approx 2{,}9.$$

Средний ущерб, наносимый противнику за все время боевой деятельности бомбардировщика:

$$\widetilde{У}_{\text{с}} = 2{,}9 \cdot 0{,}6 \cdot 10^5 \text{ м}^2 \approx 1{,}74 \cdot 10^5 \text{ м}^2.$$

§ 49. ЗАДАЧА НАВЕДЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА ЦЕЛЬ

Чтобы найти полный показатель эффективности летательного аппарата $\widetilde{W}$ (или $\widetilde{M}$), необходимо уметь:

— оценивать эффективность стрельбы (бомбометания) по цели;

— вычислять вероятности успешного выполнения фаз боевой деятельности, предшествующих стрельбе.

Одной из важнейших фаз боевой деятельности самолета (истребителя или бомбардировщика) является фаза его **наведения** на цель. Под «наведением» летательного аппарата понимается вывод его в такую область пространства, откуда возможны обнаружение цели, переход на боевой курс и атака.

В зависимости от вида вооружения летательного аппарата и способа его боевого применения фаза наведения может иметь ту или другую задачу.

Рассмотрим, например, истребитель-перехватчик, вооруженный одним управляемым снарядом класса «воздух—воздух». На этапе дальнего наведения истребитель ведется на цель наземными станциями. Затем, оказавшись в достаточной близости от цели, он обнаруживает ее с помощью бортовых средств и переходит на ближнее наведение, заканчивающееся пуском снаряда по цели.

В чем состоит задача дальнего наведения? В том, чтобы вывести истребитель в такое положение относительно цели, из которого он сможет:

— обнаружить цель;

— соответствующим образом маневрируя, переместиться в точку возможного пуска снаряда.

Заметим, что одного только обнаружения цели не достаточно для того, чтобы ближнее наведение осуществилось. Может оказаться, что истребитель «видит» цель, но не может ее атаковать из-за ограничений по маневру. Таким образом, «вывести истребитель на цель» — значит не только привести его в определенную область пространства, но привести так, чтобы направление оси истребителя не выходило за пределы некоторого углового сектора.

Дальнее наведение в некотором роде можно рассматривать как «выстрел» телеуправляемым снарядом (истребителем) в определенную область пространства (окрестность цели), но с тем усложнением, что требуется не только привести снаряд в эту область, но и обеспечить, чтобы в момент попадания ось снаряда была определенным образом направлена.

Аналогично обстоит дело с наведением бомбардировщика на наземную (подвижную или неподвижную) цель. Какими бы техническими средствами ни осуществлялось это наведение, задача его — привести бомбардировщик в такое положение относительно цели, из которого он сможет обнаружить цель, успеет развернуться, лечь на боевой курс и сбросить бомбы.

Вообще сформулированная выше задача — привести летательный аппарат в заданную зону пространства при выполнении определенных условий, наложенных на его угловую ориентацию, — характерна для всех многоступенчатых средств поражения, где одна ступень является «носителем» для другой.

В принципе все задачи, связанные с наведением летательных аппаратов, сходны. Варьируются только размеры и форма области, куда нужно привести аппарат, и условия, налагаемые на направление его оси. Эти подробности зависят от конкретного вида вооружения летательного аппарата. Например, если вооружение истребителя-перехватчика предназначено для стрельбы только в узком конусе сзади, задача дальнего наведения — вывести истребитель достаточно точно «в хвост» воздушной цели. Если бомбардировщик может выполнять бомбометание «с разворота», то задача наведения на цель будет иная, чем в случае, когда он может бросать бомбы только на прямолинейном полете.

§ 50. УСЛОВИЯ ВОЗМОЖНОСТИ НАВЕДЕНИЯ ИСТРЕБИТЕЛЯ НА ВОЗДУШНУЮ ЦЕЛЬ

В данном и в следующем параграфах мы в качестве примера рассмотрим задачу дальнего наведения на воздушную цель истребителя-перехватчика, вооруженного одним управляемым снарядом «воздух—воздух».

Для простоты будем рассматривать задачу наведения как плоскую, т. е. допустим, что истребитель *И* и цель *Ц* перемещаются в одной горизонтальной плоскости. Вообще говоря, это не так, и в задачу дальнего наведения входят две, а именно:

— вывод истребителя на высоту полета цели;
— наведение по направлению.

Но первая из этих задач более проста, так как современные технические средства позволяют довольно точно вывести истребитель на заданную высоту. Поэтому мы рассмотрим только вторую задачу.

Предположим, что воздушная цель *Ц* движется горизонтально, равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}_ц$ (рис. 50.1), а истребитель *И*, имеющий скорость $\vec{v}_и$, может маневрировать, меняя направление скорости, но не ее абсолютную величину $v_и$.

Построим схему наведения истребителя на цель. Предположим, что задан определенный угол перехвата β, т. е. угол, который

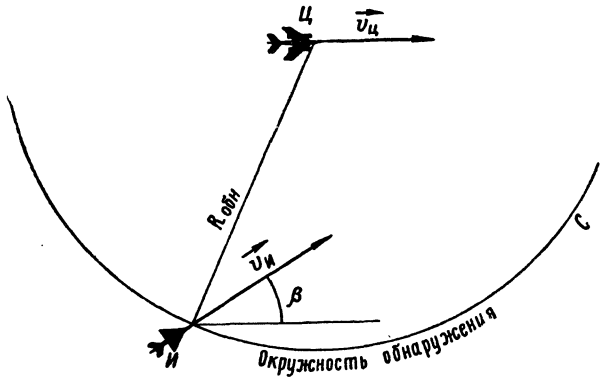


Рис. 50.1.

составляют векторы $\vec{v}_и$ и $\vec{v}_ц$ в момент обнаружения. В этот момент истребитель должен находиться в одной из точек окружности *C*, описанной вокруг точки *Ц*, радиус которой (дальность обнаружения) обозначим $R_{обн}$. Величина $R_{обн}$ определяется дальностью действия бортовой РЛС (радиолокационной станции).

Значение угла перехвата β зависит от метода наведения, условий полета цели, характеристик истребителя и его вооружения. Для каждой совокупности условий существует какое-то рациональное значение угла перехвата β^*, который и будут стараться осуществить при наведении, однако не с очень большой точностью, так как перехват возможен и на других углах β. Фактически значение β будет случайным и может изменяться в некоторых пределах β_1, β_2 около «идеального» значения β^*.

При рассмотрении задачи сначала предположим, что угол β вполне определенный (не случайный), а потом покажем, как можно учесть его случайность.

При построении схемы наведения мы будем пользоваться подвижной системой отсчета, связанной с целью *Ц*, и будем рассматривать в этой системе относительное движение истребителя *И*.

Для простоты допустим, что все возможные точки пуска снаряда расположены на некоторой кривой K, которую мы будем называть **кривой пуска** (рис. 50.2). Эту кривую можно построить, откладывая от цели $Ц$ в разных направлениях минимальные расстояния, на которых управляемый снаряд успевает выбрать ошибки ближнего наведения.

Для упрощения дальнейших рассуждений положим, что время полета $T_у$ управляемого снаряда до цели из всех точек кривой пуска K одно и то же.

Пусть в момент пуска истребитель находится в точке $И$ на кривой K (рис. 50.3). Предположим, что снаряд неуправляем. Тогда

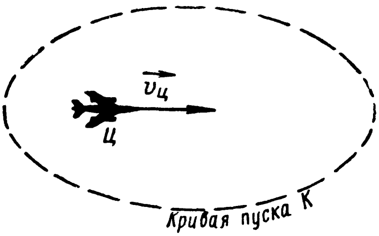


Рис. 50.2.

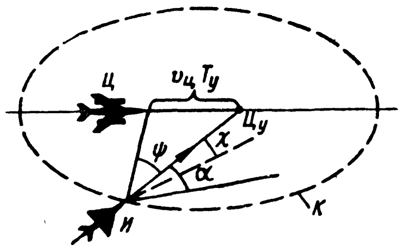


Рис. 50.3.

скорость истребителя $\vec{v}_и$ в момент пуска должна быть определенным образом ориентирована. Угол ψ, определяющий эту ориентацию, зависит от метода наведения снаряда. Предположим, для простоты, что в момент пуска ось истребителя должна быть направлена в упрежденную точку $Ц_у$, отстоящую от цели на расстояние $v_ц T_у$. Так как согласно допущению время $T_у$ для всех точек кривой пуска одинаково, то и упрежденная точка $Ц_у$ будет одна и та же для всех точек пуска. Это несколько упростит геометрические построения.

Мы исходили из того, что ось истребителя в момент пуска должна быть ориентирована вполне определенным образом. В действительности управляемый снаряд за время своего полета к цели имеет еще возможность выбрать какую-то ошибку. Поэтому требование «ось истребителя должна быть направлена в точку $Ц_у$» может быть ослаблено.

Обозначим α — максимальную угловую ошибку, которую за время $T_у$ успевает выбрать снаряд. Тогда условие возможности успешного пуска примет вид: **в момент пуска ось истребителя должна составлять с направлением на упрежденную точку угол χ, не превышающий α** (рис. 50.3).

Поставим следующий вопрос: **где должен находиться истребитель в момент обнаружения** при заданном значении угла перехвата, для того чтобы, пользуясь своими маневренными возможностями, выйти на кривую K и произвести прицельный пуск снаряда?

Другими словами, нужно найти такой участок окружности обнаружения C (рис. 50.1), попав на который, истребитель сможет:

— обнаружить цель и

— выйти на кривую пуска K с выполненным условием $\chi \leqslant \alpha$.

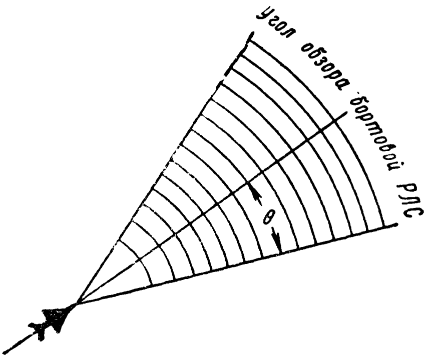


Рис. 50.4.

Возможность обнаружить цель, находясь на окружности C, зависит от угла обзора бортовой РЛС. Возможность выйти в точку пуска, имея выполненным условие $\chi \leqslant \alpha$, определяется маневренными возможностями истребителя.

Будем решать эти задачи последовательно. Сначала найдем на окружности C тот участок A_0B_0 («участок обнаружения»), попав на который истребитель обнаружит цель.

Обозначим θ половину угла обзора бортовой РЛС истребителя (рис. 50.4).

Чтобы найти участок обнаружения, достаточно выполнить следующее построение. Проведем через цель $Ц$ (рис. 50.5) ось $I—I$, составляющую угол β с направлением скорости цели $\vec{v}_ц$, и два луча

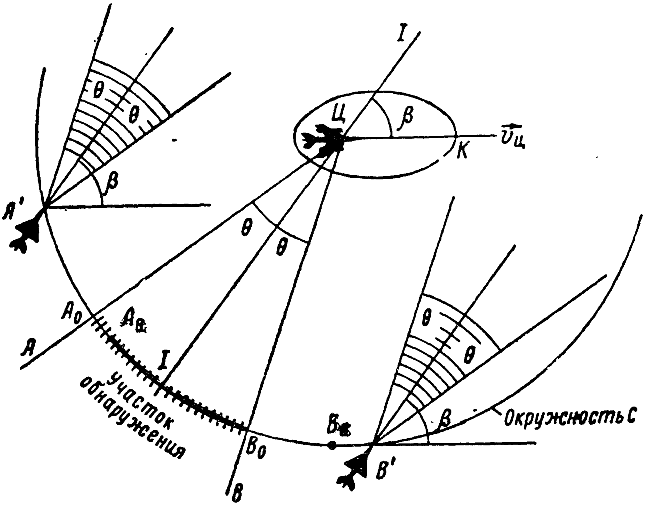


Рис. 50.5.

$ЦA$ и $ЦB$, составляющие с этой осью углы θ. Нетрудно убедиться, что точки пересечения этих лучей с окружностью C определят участок обнаружения A_0B_0. Действительно, выйдя на окружность C с углом перехвата β, но оказавшись правее B_0 (точка B' на рис. 50.5), истребитель не сможет обнаружить цель, так как она будет за пределами сектора обзора. То же будет, если истребитель выйдет на окружность C левее A_0 (в точку A').

Таким образом, на окружности C построен участок обнаружения A_0B_0.

Однако в общем случае не из каждой точки этого участка истребитель сможет выйти на кривую пуска K при условии $\chi \leqslant \alpha$; для этого может не хватить маневренных возможностей истребителя.

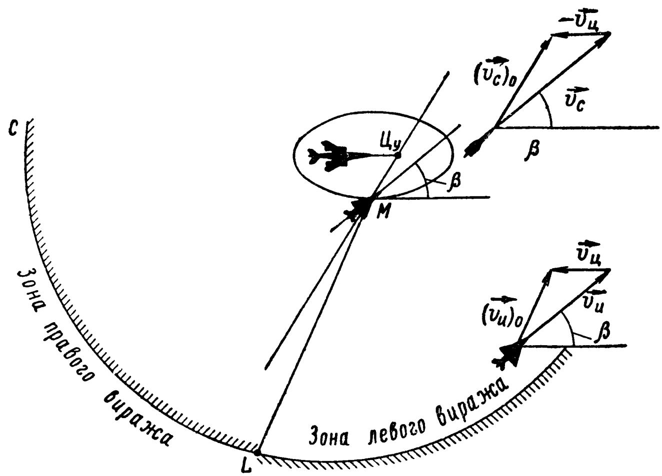


Рис. 50.6.

Действительно, если, маневрируя с максимальной перегрузкой, истребитель все же не сможет повернуть свою ось так, чтобы к моменту прихода на кривую K выполнить условие $\chi \leqslant \alpha$, стрельба по цели невозможна, хотя истребитель и видит цель. Нужно построить на окружности C кроме участка обнаружения A_0B_0 еще «участок выхода» $A_вB_в$, из каждой точки которого истребитель может выйти на кривую K при условии $\chi \leqslant \alpha$. Общая часть участков A_0B_0 и $A_вB_в$ и будет определять на окружности C тот участок, с которого возможны и обнаружение цели и выход на кривую K (короче, наведение истребителя) (рис. 50.5).

Построим на окружности C участок выхода $A_вB_в$. Его крайние точки $A_в$, $B_в$ характерны тем, что из них истребитель, даже применяя максимальный маневр, все же не сможет выйти на кривую пуска K при условии $\chi < \alpha$.

Заметим, что для выхода на кривую пуска в некоторых случаях может понадобиться правый разворот истребителя, а в некоторых — левый. Построим на окружности обнаружения C точку L, отделяющую «зону правого виража» от «зоны левого виража» (рис. 50.6). Очевидно, точка L будет соответствовать случаю «идеального» перехвата, без всяких ошибок, когда истребитель, имея в момент обнаружения направление оси, характеризуемое углом перехвата β, перемещается далее на кривую пуска K уже без всякого маневра, и пущенный оттуда снаряд будет иметь направление прямо в точку встречи $Ц_у$. Точка M на кривой пуска K, в которую приходит истребитель при «идеальном» перехвате, определяется однозначно построением на рис. 50.6 (если считать скорость снаряда $\vec{v}_с$ постоянной и направленной по оси истребителя в момент пуска). Действительно, обе линии — кривая пуска K и окружность обнаружения C — связаны с целью $Ц$ и движутся вместе с ней. Чтобы найти точку M на кривой пуска K, достаточно провести через точку $Ц_у$ вектор относительной скорости снаряда в системе координат, связанной с целью:

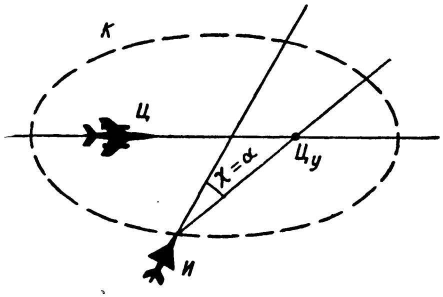


Рис. 50.7.

$$(\vec{v}_с)_0 = \vec{v}_с - \vec{v}_ц,$$

и продолжить его до пересечения с кривой K. Верхний вспомогательный чертеж на рис. 50.6 иллюстрирует это построение.

Аналогично, зная точку M на кривой пуска K, можно найти однозначно ту точку L на окружности обнаружения C, откуда истребитель приходит в M, не маневрируя. Для этого проводим через точку M вектор относительной скорости истребителя:

$$(\vec{v}_и)_0 = \vec{v}_и - \vec{v}_ц.$$

Нижний вспомогательный чертеж на рис. 50.6 иллюстрирует это построение.

Очевидно, если истребитель, имея угол перехвата β, выйдет на окружность C правее точки L, то ему придется доворачивать влево; если точка выхода будет лежать левее L, то доворачивать придется вправо.

Найдем на окружности C такую точку $A_в$, откуда истребитель, применяя правый вираж с максимальной перегрузкой, выходит на кривую пуска K, так что угол χ между его осью и направлением на упрежденную точку в точности равен α (рис. 50.7). Чтобы найти эту точку на окружности C, нужно прежде всего построить траекторию истребителя, совершающего максимальный правый вираж, в относительной системе координат.

Пусть в момент прихода на окружность C истребитель находится в некоторой точке H (рис. 50.8), и вектор его скорости составляет с вектором скорости цели угол перехвата β. В точке H

истребитель применяет максимально возможный правый вираж. Его траектория в абсолютной системе координат есть окружность, проходящая через точку H, касающаяся вектора скорости истребителя и имеющая радиус $R_{мин}$ (минимальный радиус разворота), однозначно связанный с максимальной перегрузкой $n_{макс}$:

$$R_{мин} = \frac{v_и^2}{n_{макс} g}, \qquad (50.1)$$

где $g = 9{,}81$ — ускорение силы тяжести.

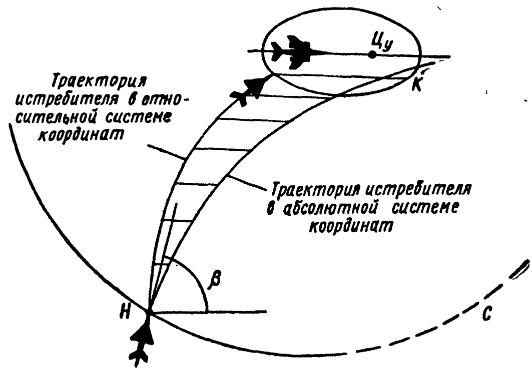


Рис. 50.8.

Траектория истребителя в относительной системе координат будет уже не окружность, а циклоида. Чтобы ее построить, нужно каждую точку окружности сместить в направлении, противоположном движению цели, на отрезок $v_ц t$, где t — время, протекшее от начала разворота (рис. 50.9). При построении циклоиды удобно на исходной окружности разметить точки, соот-

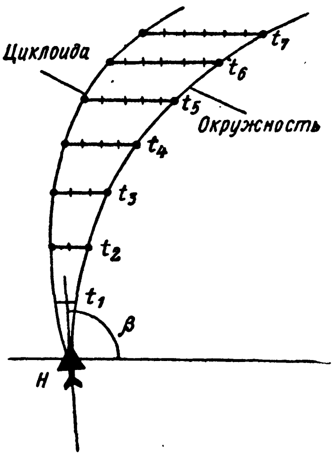


Рис. 50.9.

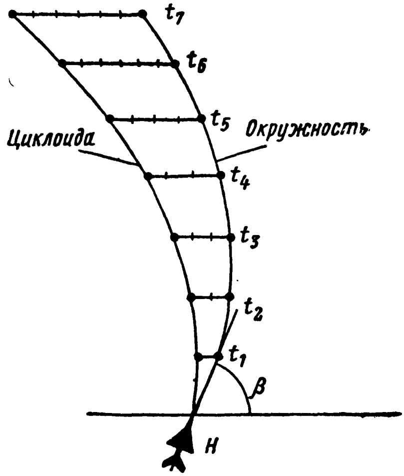


Рис. 50.10.

ветствующие круглым значениям времени: t_1, t_2, ..., и каждую из них перенести на циклоиду.

Заметим, что построенная циклоида будет одна и та же для всех точек H, лежащих левее L на окружности C, и поэтому построить ее придется только один раз. Удобно это сделать на прозрачной бумаге. Для точек, лежащих правее L, циклоида будет другой (рис. 50.10).

Построив циклоиду для правого разворота и перемещая ее параллельно самой себе по окружности C влево от точки L, можно найти левую границу $A_в$ участка выхода. Действительно, пусть для некоторого положения точки H на окружности циклоида пересекает кривую пуска K в точке G (рис. 50.11). Зная время полета t до

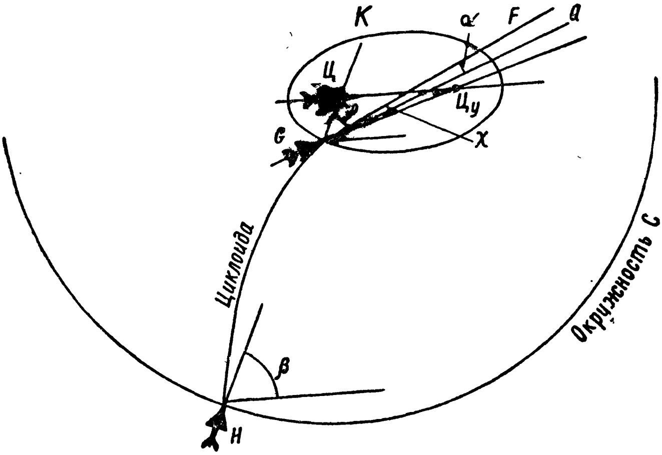


Рис. 50.11.

точки G, можно определить угол φ, на который развернулась ось истребителя. В радианах он равен

$$\varphi = \omega t = \frac{v_ц t}{R_{мин}},$$

а в градусах

$$\varphi^\circ = \frac{v_ц t \pi}{R_{мин} \cdot 180}.$$

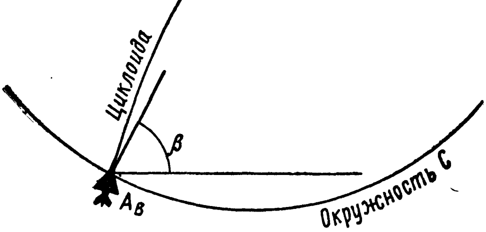


Рис. 50.12.

Таким образом, можно построить линию GF, по которой будет направлена ось истребителя в момент пуска снаряда. Если, повернув этот вектор вправо на угол α (до прямой GQ), мы все-таки не доворачиваем до упрежденной точки $Ц_у$ (как это показано на рис. 50.11), то из данной точки H выход на кривую K при $\chi \leqslant \alpha$ невозможен, и она лежит вне участка выхода $A_вB_в$. Если линия GQ лежит правее $Ц_у$, то выход на кривую K возможен и при перегрузке, меньшей $n_{макс}$. Для левой границы участка выхода $A_в$ прямая GQ будет направлена строго в точку встречи (рис. 50.12).

Совершенно аналогично может быть найдена правая граница $B_в$ участка выхода, только для этого нужно будет построить другую циклоиду, соответствующую максимальному левому виражу, и перемещать ее от точки L не влево, а вправо.

Зная оба участка:

—обнаружения A_0B_0 и

—выхода $A_вB_в$,

можно легко построить их общую часть — участок наведения AB, попав на который истребитель может быть наведен на цель.

Тут могут встретиться различные случаи (рис. 50.13):

а) Участок A_0B_0 полностью лежит внутри участка $A_вB_в$. Тогда их общая часть есть не что иное как A_0B_0, т. е. возможности наведения ограничиваются только углом обзора, а не маневренностью истребителя.

б) Участок $A_вB_в$ полностью лежит внутри участка A_0B_0; общая часть совпадает с $A_вB_в$; возможности наведения ограничиваются маневренностью истребителя.

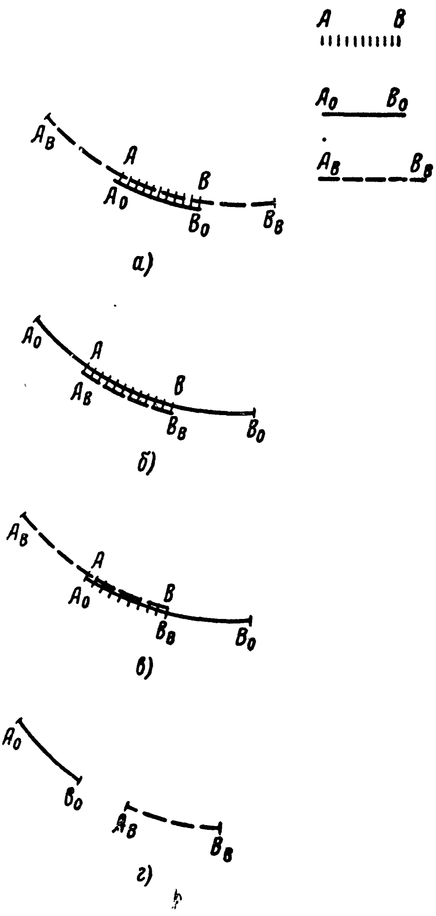


Рис. 50.13.

в) Участки A_0B_0 и $A_вB_в$ имеют одностороннее перекрытие; возможности наведения ограничены как маневренностью истребителя, так и углом обзора РЛС.

г) Участки A_0B_0 и $A_вB_в$ не имеют общих точек; в этом случае наведение истребителя при данном угле перехвата β невозможно.

Очевидно, построение участков A_0B_0 и $A_вB_в$ и анализ возможностей наведения уже сами по себе без подробных дальнейших расчетов могут помочь выдвинуть рациональные согласованные требования к радиооборудованию истребителя и к его летным качествам.

Выше мы для упрощения задачи предполагали, что пуск снаряда возможен из любой точки кривой K, лишь бы только угол рассогласования между осью истребителя и направлением на упрежденную точку не превосходил заданного. На практике в ряде случаев пуск снаряда возможен не с любого направления, а только в некотором диапазоне, определяемом углом μ в передней или задней полусфере (рис. 50.14). Тогда в предыдущей задаче вместо полной кривой пуска K нужно рассмотреть только ее часть K' и под участком $A_в B_в$ понимать этот участок окружности C, с которого, применив разворот с максимальной перегрузкой, истребитель еще может выйти на участок K' кривой K.

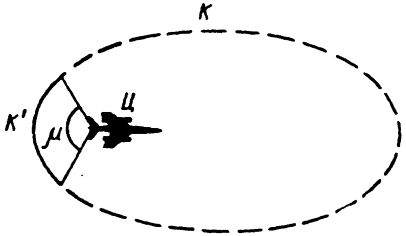


Рис. 50.14.

§ 51. ВЕРОЯТНОСТЬ НАВЕДЕНИЯ ИСТРЕБИТЕЛЯ НА ВОЗДУШНУЮ ЦЕЛЬ

В предыдущем параграфе мы дали способ построения на окружности C участка наведения AB. Зная этот участок, можно вычислить вероятность наведения истребителя на воздушную цель. Это вероятность того, что траектория истребителя (в относительной системе координат) пройдет через участок AB кривой обнаружения.

Спроектируем участок AB на ось ox, перпендикулярную направлению относительной скорости истребителя (рис. 51.1). Получим участок $A'B'$ оси ox.

Очевидно, для того чтобы наведение истребителя осуществилось, точка пересечения X относительной траектории истребителя с осью ox должна попасть в пределы отрезка $A'B'$.

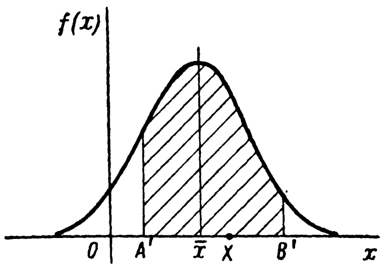


Рис. 51.1.

Таким образом, задачу о наведении удалось свести к простой задаче о попадании случайной точки X в пределы заданного отрезка. Для того чтобы найти вероятность попадания в заданный участок, необходимо знать закон рассеивания точки X, т. е. знать закон ошибок наведения.

Рассеивание точки X обусловлено рядом причин таких, например, как:

— неточность определения координат цели и истребителя наземными станциями;

— запаздывание подачи команд и их выполнения;

— неточность выполнения команд летчиком

и т. д.

В силу многочисленности причин закон рассеивания, как и при стрельбе, близок к нормальному.

Зная метод наведения и параметры применяемых технических средств, можно найти характеристики рассеивания точки X: центр рассеивания $\bar{x}$ и вероятное отклонение E_x. Пользуясь этими данными, легко найти вероятность попадания точки X в пределы отрезка $A'B'$, иначе, вероятность наведения истребителя на цель:

$$p_{\text{н}} = P(A' < X < B') = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{B' - \bar{x}}{E_x}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{A' - \bar{x}}{E_x}\right)\right],$$

где A', B' — координаты концов отрезка.

Геометрически эта вероятность изображается площадью кривой нормального закона, опирающейся на отрезок $A'B'$ (рис. 51.1).

Участок наведения AB на окружности C и его проекция $A'B'$ на оси ox зависят от ряда технических характеристик истребителя, его оборудования и вооружения, таких, например, как:

— скорость истребителя $v_{\text{и}}$;

— минимальный радиус виража $R_{\text{мин}}$;

— угол обзора РЛС 2θ;

— дальность обнаружения $R_{\text{обн}}$;

— условия возможности пуска снаряда (размеры углового сектора μ);

— ошибка α, которая может быть выбрана системой наведения снаряда,

и т. п.

Изменяя каждый из этих параметров, можно проследить его влияние на вероятность наведения $p_{\text{н}}$ и определить те факторы, изменение которых в первую очередь желательно для повышения вероятности наведения.

До сих пор мы рассматривали задачу наведения истребителя при заданном, фиксированном угле перехвата β. В действительности же угол β будет случайным. Закон распределения $\varphi(\beta)$ величины β может быть получен либо из статистических данных, либо теоретически, расчетным путем. Для последнего требуется точное знание организации всей процедуры дальнего наведения истребителя на цель (алгоритма наведения), на котором мы останавливаться не будем.

Если закон распределения угла перехвата известен, можно найти полную вероятность $P_{н}$ наведения истребителя на цель:

$$P_{н}=\int_{\beta_1}^{\beta_2} p_{н}(\beta)\,\varphi(\beta)\,d\beta, \tag{51.1}$$

где $p_{н}(\beta)$ — вероятность наведения при фиксированном значении β, вычисленная так, как описано выше;

β_1, β_2 — границы возможных значений угла перехвата.

Если диапазон возможных значений угла перехвата β не слишком велик, можно не производить интегрирования по формуле (51.1), а просто вычислить вероятность наведения $p_{н}$ для некоторого среднего, типичного значения угла перехвата $\beta_{ср}$ и положить приближенно

$$P_{н}\approx p_{н}(\beta_{ср}). \tag{51.2}$$

Заметим, что все рассуждения велись нами в предположении, что обнаружение цели достоверно, если только цель окажется на дальности $R_{обн}$ в пределах сектора обзора РЛС истребителя.

В действительности цель не обнаруживается достоверно на определенном расстоянии $R_{обн}$, а дальность обнаружения R представляет собой некоторую случайную величину, закон распределения которой может быть построен. Если этот закон $f(R)$ известен, то можно аналогично тому, как выше мы находили полную вероятность наведения $P_{н}$, найти полную вероятность наведения $P_{н}^{*}$ с учетом случайности величины R:

$$P_{н}^{*}=\int_{R_1}^{R_2} P_{н}(R)\,f(R)\,dR, \tag{51.3}$$

где R_1, R_2 — границы возможных значений дальности обнаружения;

$P_{н}(R)$ — вероятность наведения при фиксированной дальности обнаружения R, вычисленная так, как это описано выше.

Таким образом, в принципе решена задача об оценке вероятности наведения истребителя на воздушную цель.

Очевидно, аналогичным методом может быть решена и задача о наведении на цель любого летательного аппарата, предназначенного для пуска по цели какого-либо средства поражения. Примерами таких аппаратов могут быть:

— самолет-бомбардировщик, решающий задачу бомбометания по наземной цели;

— самолет — носитель крылатой ракеты, атакующий наземную или морскую подвижную или неподвижную цель,

и т. д.

Каждый из таких аппаратов может рассматриваться как первая ступень средства поражения, а задача наведения — как задача вывода первой ступени в такое положение относительно цели и придание ей такой ориентировки в пространстве, при которой становится возможным успешный пуск второй ступени.

В заключение подчеркнем еще раз, что задача комплексной оценки летательных аппаратов может быть сведена к «поэтапной оценке» только приближенно. В действительности боевое применение летательного аппарата представляет собой с начала и до конца единый процесс, звенья которого связаны между собой сложными зависимостями. Аналитическому описанию эти зависимости плохо поддаются, поэтому до сих пор основным методом исследования таких задач остается непосредственное моделирование на электронных машинах.

ГЛАВА 8

МЕТОДЫ УЧЕТА ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

§ 52. ЗАДАЧА УЧЕТА ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

В гл. 4, 5, 6 мы рассмотрели задачи оценки эффективности стрельбы по целям различного вида (одиночным, групповым, площадным), выполняемой одиночными летательными аппаратами или группой таких аппаратов. При решении таких задач цель чаще всего рассматривалась нами как пассивный объект боевого воздействия, а возможное противодействие со стороны противника не учитывалось.

Такая односторонняя постановка задачи в ряде случаев является недостаточной. Пусть, например, речь идет о сравнительной комплексной оценке эффективности трех типов летательных аппаратов, предназначенных для стрельбы по наземным целям:

— бомбардировщиков;

— баллистических ракет;

— крылатых ракет.

При одинаковых характеристиках боевого заряда, доставляемого к цели, эти три типа средств поражения обладают неодинаковой точностью стрельбы. Очевидно, сравнительная оценка этих средств поражения по одной только эффективности стрельбы невозможна: в расчет должно быть принято возможное противодействие противника каждому из этих средств, так как эффективность этого противодействия далеко не одинакова для сравниваемых типов.

Равным образом нельзя произвести планирование операции и расчет наряда средств, необходимых для ее осуществления, без учета противодействия противника.

В данной главе мы специально рассмотрим методы учета противодействия, которые до сих пор затрагивались весьма бегло.

Противодействие со стороны противника может быть двух основных типов:

— огневое противодействие;

— радиопротиводействие, т. е. создание всевозможных (активных или пассивных) помех.

Огневое противодействие состоит в стрельбе по применяемым средствам поражения или их носителям. Обычно огневое противодействие средству поражения (самолету, крылатой ракете, снаряду) ведется с целью «поразить» это средство, т. е. нанести ему такие физические повреждения, которые делают его безопасным для объекта стрельбы. В случае успешного противодействия средству поражения наносится чаще всего невосстановимый (в пределах длительности операции) ущерб. Поэтому можно считать, что «пораженные» средства поражения дальнейшего участия в боевых действиях не принимают.

Особенность радиопротиводействия та, что в его результате происходит временное снижение эффективности применяемых средств. В зависимости от типа помех их влияние может сказываться различно, от незначительного снижения эффективности до полной невозможности боевого применения средства поражения, когда его радиолокационные устройства оказываются на некоторое время «забиты» помехами.

Учитывая эти особенности, можно высказать следующее общее соображение по поводу огневого и радиопротиводействия: если в пределах данной операции огневое и радиопротиводействие оказываются, при прочих равных условиях, одинаково эффективными, то следует отдать предпочтение огневому противодействию, так как оно наносит противнику качественно другой, более тяжелый, иногда невосстановимый ущерб.

Это замечание отнюдь не означает отрицания важности радиопротиводействия, которое зачастую может помочь сорвать замысел противника более простыми и дешевыми средствами, чем огневое противодействие.

Задача учета огневого противодействия, в сущности, представляет собой не что иное, как двустороннюю задачу оценки эффективности стрельбы. Она может быть решена с помощью, в принципе, тех же приемов и методов, которые применялись при оценке эффективности стрельбы.

Задача учета радиопротиводействия гораздо сложнее.

В настоящей главе мы рассмотрим главным образом задачу учета огневого противодействия. Некоторые общие соображения по поводу учета радиопротиводействия будут даны в § 58.

§ 53. УЧЕТ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ, ПРЕДШЕСТВУЮЩЕГО ВЫПОЛНЕНИЮ БОЕВОЙ ЗАДАЧИ

Самым простым случаем учета противодействия является случай, когда «действие» и «противодействие» разделены по времени, а именно: когда противодействие противника предшествует той операции, эффективность которой оценивается [1]).

Рассмотрим способы учета противодействия, предшествующего выполнению боевой задачи (короче, «предшествующего противо-

[1]) Очевидно, если противодействие не предшествует операции, а **следует за** ней, оно не меняет ее эффективности.

действия»). Схема учета такого противодействия зависит от того, выполняется ли задача **одной** боевой единицей или **несколькими**.

Рассмотрим сначала первый случай.

Для выполнения задачи выделена одна боевая единица (самолет, ракета, подводная лодка); эффективность этой боевой единицы без учета противодействия характеризуется некоторым показателем эффективности W. Заметим, что величина W может иметь любой смысл, например, под ней может подразумеваться:

— вероятность поражения некоторого объекта;

— пораженная площадь цели или средняя доля поражения;

— средний объем разведывательной информации, приносимый самолетом-разведчиком;

— средняя стоимость восстановительных работ, необходимых для компенсации нанесенного ущерба,

и т. д.

Предположим, что перед выполнением задачи боевая единица подвергается противодействию со стороны противника, в результате чего она может быть:

— поражена

или

— не поражена.

«Поражение» боевой единицы означает невозможность выполнения ею своей боевой задачи.

Поставим задачу: вычислить показатель эффективности боевой единицы **с учетом противодействия**.

Сделаем две гипотезы:

H_0 — боевая единица поражена;

H_1 — боевая единица не поражена.

Очевидно, при первой гипотезе показатель эффективности будет нуль, при второй W. Обозначим вероятность второй гипотезы Q:

$$Q = P(H_1).$$

Тогда

$$P(H_0) = 1 - Q.$$

Для того чтобы найти полный показатель эффективности, нужно умножить вероятность каждой гипотезы на значение показателя эффективности при этой гипотезе и такие произведения сложить:

$$\widetilde{W} = (1 - Q) \cdot 0 + QW$$

или

$$\widetilde{W} = QW, \tag{53.1}$$

т. е. для того чтобы учесть предшествующее противодействие одной боевой единице, достаточно умножить ее показатель эффектив-

ности без учета противодействия на вероятность Q того, что противодействие будет безуспешным[1].

Пример 1. Истребитель атакует бомбардировщик; оба самолета вооружены управляемыми снарядами. Бортовая РЛС бомбардировщика имеет бо́льшую дальность действия, чем РЛС истребителя, поэтому бомбардировщик обнаруживает истребитель и стреляет по нему первым. Истребитель может стрелять по бомбардировщику, если только он не поражен предшествующим противодействием бомбардировщика. Вероятность поражения истребителя снарядами, пущенными с бомбардировщика, равна 0,4. Вероятность поражения бомбардировщика истребителем (если последний будет стрелять) равна $W=0{,}8$. Требуется оценить эффективность стрельбы истребителя с учетом противодействия (ответного огня) бомбардировщика.

Решение. Находим вероятность Q того, что противодействие будет безуспешным:

$$Q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

По формуле (53.1) находим вероятность поражения бомбардировщика с учетом ответного огня:

$$\widetilde{W} = QW = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48.$$

Пример 2. Самолет-разведчик высылается на боевое задание, состоящее в разведке группы целей на поле боя. В качестве показателя эффективности деятельности разведчика принята средняя доля обнаруженных им целей $M_{\text{обн}}$. Данные о целях передаются разведчиком по радио. Перед выходом в район противника разведчик должен пройти зону ПВО противника, в которой он может быть поражен с вероятностью $p=0{,}3$. Если разведчик пройдет зону ПВО, то он обнаружит в среднем 75% всех целей, находящихся на разведываемой территории ($M_{\text{обн}}=0{,}75$). Определить среднюю долю обнаруживаемых целей с учетом противодействия.

Решение. Находим вероятность Q того, что противодействие будет безуспешным:

$$Q = 1 - p = 0{,}7.$$

По формуле (53.1)

$$\widetilde{M}_{\text{обн}} = 0{,}7 \cdot 0{,}75 \approx 0{,}525,$$

т. е. с учетом противодействия один разведчик обнаружит в среднем 52,5% целей.

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда для выполнения боевой задачи выделена не одна, а несколько (n) боевых единиц (самолетов, ракет, лодок).

Выведем точную формулу для учета противодействия. Сделаем ряд гипотез:

H_0 — не сохранилось ни одной боевой единицы;
H_1 — сохранилась ровно одна боевая единица;
. . . .
H_m — сохранилось ровно m боевых единиц;
. . . .
H_n — сохранились все n боевых единиц.

Чтобы найти значение показателя эффективности $\widetilde{W}$ с учетом противодействия, нужно вероятность каждой гипотезы умножить

---

[1] В § 47 мы уже рассматривали подобный вид учета противодействия, где вероятность Q выглядела как «вероятность преодоления ПВО» летательным аппаратом.

на значение показателя эффективности при этой гипотезе и все такие произведения сложить:

$$\widetilde{W}=P(H_1)\,W(1)+P(H_2)\,W(2)+\ldots+P(H_n)\,W(n), \qquad (53.2)$$

где $W(1)$ — показатель эффективности, вычисленный при условии, что сохранилась ровно одна боевая единица;

$W(2), W(3), \ldots$ — показатель эффективности, вычисленный при условии, что сохранились ровно две, три и так далее боевых единиц.

Короче формулу (53.2) можно записать в виде

$$\widetilde{W}=\sum_{m=1}^{n} Q_m W(m), \qquad (53.3)$$

где Q_m — вероятность того, что в результате противодействия сохранится ровно m единиц (а, значит, $n-m$ единиц будет поражено);

$W(m)$ — показатель эффективности, вычисленный при условии, что задачу выполняло ровно m боевых единиц.

Пример 3. Для выполнения боевого задания (бомбометания по площадной цели) посылается три самолета ($n=3$). Перед выполнением задачи самолеты должны пройти зону ПВО противника. В этой зоне каждый из самолетов независимо от других поражается с вероятностью $p=0{,}3$. Если к цели прорвется один самолет, то средняя доля поражения будет

$$M(1)=0{,}5.$$

Если к цели прорвутся два самолета,

$$M(2)=0{,}8,$$

если три,

$$M(3)=0{,}95.$$

Найти среднюю долю поражения $\widetilde{M}$ с учетом противодействия.

Решение. По отношению к системе ПВО противника группа из трех самолетов является рассредоточенной групповой целью (см. гл. 5, § 36). По формуле (36.1) можно найти вероятность того, что в составе групповой цели будет поражено ровно m единиц:

$$P_m=C_N^m W^m (1-W)^{N-m},$$

где W — вероятность поражения одного самолета.

В данном случае $W=p=0{,}3$, $N=n=3$.

Нам нужно найти Q_m — вероятность того, что в составе групповой цели **сохранится** m единиц. Очевидно,

$$Q_m=P_{n-m}=C_n^{n-m}p^{n-m}(1-p)^m$$

или, учитывая, что $C_n^{n-m}=C_n^m$,

$$Q_m=C_n^m p^{n-m}(1-p)^m.$$

Подставляя $n=3$, $p=0,3$, получаем:

$$Q_1 = 3p^2(1-p) = 0{,}189,$$
$$Q_2 = 3p(1-p)^2 = 0{,}441,$$
$$Q_3 = (1-p)^3 = 0{,}343.$$

По формуле (53.3)

$$\widetilde{M} = 0{,}189 \cdot 0{,}5 + 0{,}441 \cdot 0{,}8 + 0{,}343 \cdot 0{,}95 = 0{,}773,$$

т. е. с учетом противодействия бомбардировщики поразят в среднем около 77% площади цели.

При некоторых условиях общая формула (53.3) может быть сильно упрощена. Предположим, что соблюдаются следующие условия:

— боевые единицы поражаются независимо друг от друга;

— показатель эффективности без учета противодействия $W(n)$ возрастает в зависимости от числа единиц n (точно или приближенно) по показательному закону:

$$W(n) = 1 - (1 - W)^n, \tag{53.4}$$

где W — показатель эффективности одной боевой единицы.

Можно доказать, что при этих условиях противодействие может быть учтено очень просто. А именно, *для учета противодействия достаточно в формуле (53.4) умножить показатель эффективности W каждой боевой единицы на вероятность Q того, что противодействие данной единице будет безуспешным:*

$$\widetilde{W} = 1 - (1 - QW)^n. \tag{53.5}$$

По формуле (53.5) показатель эффективности при наличии противодействия вычисляется совершенно так же, как при его отсутствии, с той разницей, что эффективность каждой боевой единицы «ослабляется» умножением на Q — вероятность непоражения этой единицы [1)].

Пример 4. Звено, состоящее из трех истребителей, атакует бомбардировщик; каждый истребитель до своей атаки (пуска снарядов) может быть сбит огнем бомбардировщика независимо от других с вероятностью $p=0,3$. Если истребитель не поражен, он сбивает бомбардировщик с вероятностью $W=0,4$. Найти вероятность поражения бомбардировщика всей группой истребителей с учетом противодействия.

Решение. Без учета противодействия вероятность поражения бомбардировщика n истребителями выражается показательной формулой:

$$W(n) = 1 - (1 - W)^n,$$

и истребители поражаются независимо друг от друга. Значит, применима формула (53.5). Имеем

$$Q = 1 - p = 0{,}7.$$

[1)] В § 33 мы уже встречались с таким способом учета случайного числа обобщенных выстрелов. Там Q — вероятность того, что обобщенный выстрел состоится.

По формуле (53.5) при $n=3$ получим вероятность поражения бомбардировщика тремя истребителями с учетом противодействия:

$$\widetilde{W} = 1 - (1 - 0{,}7 \cdot 0{,}4)^3 \approx 0{,}627.$$

Пример 5. Группа, состоящая из четырех бомбардировщиков, высылается на боевое задание, состоящее в бомбометании по площадной цели. Эффективность действия по цели одного бомбардировщика (в случае, если он пройдет зону обороны) характеризуется средней долей поражения $M=0{,}3$. В зоне ПВО бомбардировщик сбивается с вероятностью $p=0{,}4$. Найти среднюю долю поражения $\widetilde{M}_{\text{н}}$ для группы самолетов с учетом противодействия.

Решение. В § 44 гл. 6 была приведена приближенная формула (44.1) для средней доли поражения при n обобщенных выстрелах:

$$M_n = 1 - (1 - M)^n,$$

по форме совпадающая с (53.4). Следовательно, для учета противодействия достаточно умножить величину M на вероятность Q того, что противодействие одной боевой единице будет безуспешным:

$$Q = 1 - p = 0{,}6,$$

откуда

$$\widetilde{M}_4 = 1 - (1 - 0{,}6 \cdot 0{,}3)^4 \approx 0{,}55.$$

Изложенный выше простой прием учета предшествующего противодействия умножением показателя эффективности каждой боевой единицы на вероятность непоражения этой единицы может применяться и в случае, когда эффективности отдельных единиц и эффективности противодействия им не одинаковы. Требуется только, чтобы единицы поражались независимо друг от друга, а показатель эффективности в зависимости от числа единиц n выражался формулой:

$$W(n) = 1 - (1 - W_1)(1 - W_2)\ldots(1 - W_n), \tag{53.6}$$

где $W_1, W_2, \ldots W_n$ — показатели эффективности для отдельных боевых единиц.

Тогда для учета противодействия достаточно в формуле (53.6) показатель эффективности каждой единицы умножить на вероятность того, что противодействие данной единице будет безуспешным:

$$\widetilde{W} = 1 - (1 - Q_1 W_1)(1 - Q_2 W_2)\ldots(1 - Q_n W_n), \tag{53.7}$$

где $Q_1, Q_2, \ldots$ — вероятность того, что противодействие 1-й, 2-й и т. д. боевым единицам будет безуспешным.

Пример 7. Для поражения морской цели (корабля) посылаются три крылатые ракеты на разных высотах. Первая ракета (без учета противодействия) поражает корабль с вероятностью $W_1=0{,}7$ и сама поражается зенитной обороной корабля с вероятностью $p_1=0{,}8$. Для второй ракеты соответствующие данные $W_2=0{,}5$, $p_2=0{,}6$; для третьей $W_3=0{,}4$, $p_3=0{,}1$. Найти вероятность поражения цели тремя ракетами с учетом противодействия.

Решение. По формуле (53.7)

$$\tilde{W} = 1 - (1 - Q_1 W_1)(1 - Q_2 W_2)(1 - Q_3 W_3),$$

где

$$Q_1 = 1 - p_1, \quad Q_2 = 1 - p_2, \quad Q_3 = 1 - p_3.$$

Отсюда

$$\tilde{W} = 1 - (1 - 0{,}2 \cdot 0{,}7)(1 - 0{,}4 \cdot 0{,}5)(1 - 0{,}9 \cdot 0{,}4) \approx 0{,}56.$$

§ 54. ПРОТИВОДЕЙСТВИЕ В ХОДЕ ВЫПОЛНЕНИЯ БОЕВОЙ ЗАДАЧИ

1. **Схема последовательных ударов.** На практике часто встречается случай, когда противодействие не предшествует операции, а выполняется в ходе самой операции и влияет на этот ход. Например, в процессе воздушного боя самолеты могут обмениваться выстрелами в различные моменты времени.

Самым простым случаем учета противодействия в ходе боя является случай, когда моменты взаимного огневого воздействия сторон (моменты «ударов» или «обобщенных выстрелов») заранее известны и считаются заданными.

Схему учета противодействия, основанную на таком допущении, мы будем называть «схемой последовательных ударов».

Продемонстрируем эту схему на примере воздушного боя двух самолетов, которые мы условно назовем «истребителем» и «бомбардировщиком» [1].

Зададимся следующей схемой боя. В какой-то заданный момент истребитель атакует бомбардировщик, дает по нему один обобщенный выстрел и поражает его с вероятностью W_1. Если бомбардировщик не поражен, он отвечает истребителю огнем (тоже в определенный, заданный момент) и поражает его с вероятностью V_1. Если истребитель не поражен, он продолжает атаку, вторично стреляет по бомбардировщику и поражает его с вероятностью W_2. Если бомбардировщик снова не поражен, он вторично стреляет по истребителю и поражает его с вероятностью V_2. Время полета снаряда мало́ по сравнению с промежутком времени между последовательными ударами, а поражение самолета наступает мгновенно, в момент разрыва поражающего снаряда. Накопление ущерба (как и везде ранее) предполагается отсутствующим.

Требуется оценить эффективность стрельбы каждого из самолетов, т. е. найти следующие вероятности:

$\tilde{W}$ — вероятность поражения бомбардировщика истребителем за весь бой с учетом ответного огня;

$\tilde{V}$ — вероятность поражения истребителя бомбардировщиком за весь бой с учетом ответного огня.

[1] Смысл задачи не изменится, если вместо «истребителя» и «бомбардировщика» поставить любые сражающиеся боевые единицы (танки, корабли, подводные лодки и т. п.).

Применим для решения задачи следующий вспомогательный графический прием. Построим схему, напоминающую ветвящееся дерево (рис. 54.1); разветвления схемы происходят в моменты t_1, t_1', t_2, t_2', когда становится известным, поразил ли соответствующий

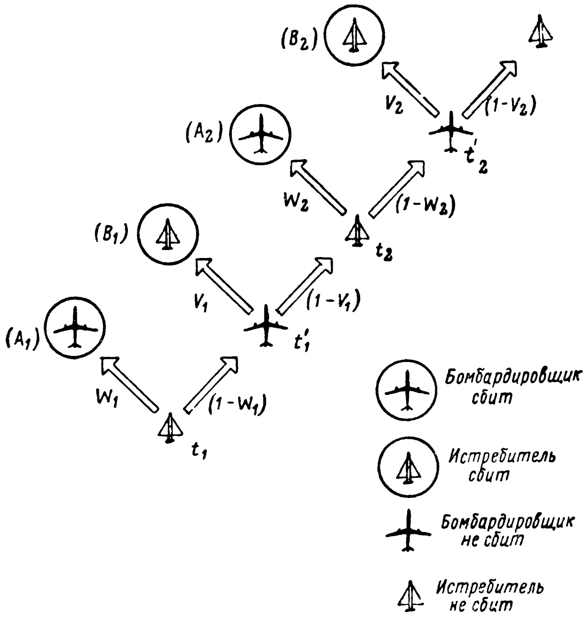


Рис. 54.1.

снаряд свою цель или не поразил. Моменты можно выбрать следующим образом:

t_1 — момент прихода к цели первого выстрела истребителя;

t_1' — момент прихода к цели первого выстрела бомбардировщика (если он состоялся);

t_2 — момент прихода к цели второго выстрела истребителя (если он состоялся);

t_2' — момент прихода к цели второго выстрела бомбардировщика (если он состоялся).

На рис. 54.1 специальными значками изображены поражение и непоражение истребителя и бомбардировщика. Удобно на каждой ветви схемы записать соответствующую ей вероятность.

Назовем построенную ветвящуюся схему «деревом боя». Пользуясь такой схемой, можно весьма просто найти интересующие нас вероятности.

Пусть нас интересует $\widetilde{W}$ — полная вероятность поражения бомбардировщика истребителем с учетом ответного огня.

Отметим на схеме рис. 54.1 буквами A_1, A_2 те исходы боя, которые соответствуют поражению бомбардировщика.

A_1 — бомбардировщик сбит сразу, первым выстрелом истребителя;

A_2 — бомбардировщик сбит вторым выстрелом истребителя (для чего нужно, чтобы этот выстрел состоялся).

По теореме сложения вероятностей

$$\widetilde{W} = P(A_1) + P(A_2).$$

Очевидно,

$$P(A_1) = W_1.$$

Для того чтобы событие A_2 состоялось, нужно совмещение следующих событий:

— бомбардировщик не поражен первым выстрелом истребителя;

— истребитель не поражен первым выстрелом бомбардировщика;

— бомбардировщик поражен вторым выстрелом истребителя.

По теореме умножения вероятностей

$$P(A_2) = (1 - W_1)(1 - V_1) W_2.$$

Окончательно получим

$$\widetilde{W} = W_1 + (1 - W_1)(1 - V_1) W_2. \tag{54.1}$$

Очевидно, тот же результат можно получить без всяких рассуждений, автоматически, пользуясь одним только «деревом боя». Действительно, перемножая вероятности, записанные на тех ветвях «дерева боя», которые ведут к точкам A_1, A_2 (рис. 54.1), и складывая результаты, получаем $\widetilde{W}$.

Найдем указанным упрощенным методом вероятность $\widetilde{V}$ поражения истребителя бомбардировщиком. Отметим буквами B_1, B_2 те концы ветвей «дерева боя», которые соответствуют поражению истребителя. Перемножая вероятности, написанные на ветвях, ведущих к исходам B_1, B_2, и складывая результаты, получаем

$$\widetilde{V} = (1 - W_1) V_1 + (1 - W_1)(1 - V_1)(1 - W_2) V_2$$

или, вынося $(1 - W_1)$ за скобку,

$$\widetilde{V} = (1 - W_1)[V_1 + (1 - V_1)(1 - W_2) V_2]. \tag{54.2}$$

Аналогично тому, как было учтено противодействие в случае парного боя (дуэли), можно учесть его и в случае боя между группами, состоящими из нескольких боевых единиц с каждой стороны, только, естественно, «дерево боя» станет при этом сложнее.

2. **Схема случайного распределения огня.** Изложенная выше расчетная схема последовательных ударов применима только в случае, когда моменты ударов (обобщенных выстрелов) в порядке их чередования известны заранее. На практике чаще бывает, что моменты выстрелов заранее не могут быть указаны, а являются неопределенными, случайными, причем область неопределенности сравнима со всей длительностью боя. Случайными могут оказаться не только моменты ударов и их последовательность во времени, но и число ударов (в частности, та или другая сторона в силу случайных причин может вообще не успеть выстрелить).

В подобных случаях естественно рассматривать моменты выстрелов той и другой стороны как *случайные величины*.

Такую схему учета противодействия в отличие от «схемы последовательных ударов» называют «схемой случайного распределения огня».

Для решения многих задач исследования операций схема случайного распределения огня оказывается лучше приспособленной, чем схема последовательных ударов. При разумных допущениях, положенных в ее основу, она может оказаться даже проще в расчетном отношении. Дело в том, что схема последовательных ударов сильно усложняется при увеличении числа единиц, участвующих в бою. Напротив, схема случайного распределения огня, как мы увидим в дальнейшем (см. гл. 9), приводит к простым расчетным формулам именно при анализе боя многочисленных групп.

Для того чтобы составить схему учета противодействия при случайном распределении огня, нужно задаться законами распределения моментов обобщенных выстрелов, которыми обмениваются стороны, характеристиками их эффективности, а также уточнить режим боя (какая из единиц с какой борется; ведется ли стрельба с переносом огня или без переноса и т. д.).

Наиболее простые математические модели, учитывающие противодействие по схеме случайного распределения огня, получаются, если предположить, что выстрелы образуют так называемый «пуассоновский поток событий». С некоторыми примерами таких моделей мы познакомимся в гл. 9.

§ 55. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБОРОНИТЕЛЬНОЙ СТРЕЛЬБЫ ПО УПРАВЛЯЕМЫМ СНАРЯДАМ

Современные управляемые снаряды представляют собой достаточно крупные объекты, размеры которых позволяют вести по ним оборонительную стрельбу.

Задача оценки эффективности стрельбы по управляемым снарядам требует выбора специального показателя эффективности.

Подойдем к выбору этого показателя с точки зрения целевой направленности стрельбы. Стрельба по управляемому снаряду имеет задачу: насколько возможно *снизить эффективность стрельбы этим снарядом по обороняющейся цели.*

Поэтому в качестве показателя эффективности стрельбы по управляемому снаряду разумно взять величину, характеризующую снижение эффективности стрельбы управляемыми снарядами по данной цели.

Так как в нашей задаче будут две цели (управляемый снаряд и обороняющаяся цель, по которой этот снаряд направлен), удобно обозначить их разными буквами. Условимся обозначать снаряд буквой «C», а обороняющуюся цель — буквой «$Ц$» (рис. 55.1).

Рис. 55.1.

Обозначим W — показатель эффективности стрельбы управляемым снарядом по цели $Ц$ при отсутствии противодействия с ее стороны: $\tilde{W}$ — тот же показатель эффективности, но при наличии противодействия. Удобно характеризовать эффективность противодействия относительным уменьшением показателя W в результате противодействия:

$$\xi = \frac{W - \tilde{W}}{W}. \qquad (55.1)$$

Эту величину мы и примем в качестве основного показателя эффективности при стрельбе по управляемым снарядам.

Предположим, что в результате оборонительной стрельбы по управляемому снаряду ему могут быть причинены повреждения трех видов:

— поражающие повреждения, в результате которых снаряд не может причинить цели $Ц$ никакого ущерба;

— повреждения, не поражающие снаряд окончательно, но снижающие его эффективность (например, за счет вывода из строя системы управления);

— незначительные повреждения, не снижающие эффективности снаряда, или же полное отсутствие повреждений.

Обозначим H_1, H_2, H_3 гипотезы, состоящие в том, что управляемому снаряду в результате оборонительной стрельбы нанесены повреждения первого, второго или третьего типа. Тогда по формуле полной вероятности[1] получим

$$\tilde{W} = P(H_1)\cdot 0 + P(H_2)\, W' + P(H_3)\, W,$$

где $P(H_1)$, $P(H_2)$, $P(H_3)$ — вероятности гипотез;

W' — показатель эффективности для управляемого снаряда, которому нанесены повреждения второго типа.

[1] Или полного математического ожидания, если W имеет смысл среднего ущерба, нанесенного цели $Ц$.

Отбрасывая первый, равный нулю, член, запишем формулу в виде

$$\widetilde{W} = P(H_2)\,W' + P(H_3)\,W. \qquad (55.2)$$

Пример 1. Самолет-бомбардировщик $Ц$ ведет оборонительную стрельбу по управляемому снаряду класса «земля — воздух». При отсутствии противодействия снаряд поражает самолет с вероятностью $W=0,8$.

Оборонительная стрельба причиняет снаряду:

— поражающие повреждения, делающие его безопасным для цели, с вероятностью 0,3;

— повреждения, делающие снаряд неуправляемым, с вероятностью 0,5;

— несущественные повреждения (или отсутствие повреждений) с вероятностью 0,2.

Снаряд, лишенный управления, поражает цель $Ц$ с вероятностью $W'=0,2$. Оценить эффективность оборонительной стрельбы.

Решение. По формуле (55.2) имеем

$$\widetilde{W} = 0,5 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,26.$$

По формуле (55.1) находим показатель эффективности — относительное снижение вероятности поражения самолета:

$$\xi = \frac{0,80 - 0,26}{0,80} = 0,7,$$

т. е. оборонительная стрельба снижает эффективность стрельбы управляемым снарядом по самолету на 70%.

В случае, когда оборонительная стрельба ведется не по одному, а по нескольким управляемым снарядам, показатель эффективности рассчитывается также не по одному снаряду, а сразу по нескольким.

Пример 2. По площадной цели производится стрельба тремя управляемыми снарядами класса «воздух—земля». При отсутствии противодействия каждый снаряд поражает среднюю долю площади цели, равную $M=0,6$.

На площадной цели расположены средства ПВО, в результате применения которых каждому снаряду наносятся:

— с вероятностью 0,35 — поражающие повреждения, делающие его безопасным для цели;

— с вероятностью 0,25 — повреждения, снижающие эффективность действия снаряда по цели в среднем на 50%;

— с вероятностью 0,30 — никаких повреждений.

Оценить эффективность оборонительной стрельбы.

Решение. Имеем: $P(H_1) = 0,35,\ P(H_2) = 0,25,\ P(H_3) = 0,30.$

Для одного снаряда показатель эффективности с учетом противодействия равен

$$\widetilde{M} = 0,25 \cdot 0,3 + 0,30 \cdot 0,6 = 0,255.$$

Для трех снарядов по приближенной формуле (44.1) (см. § 44, гл. 6):

$$\widetilde{M}_3 = 1 - (1 - \widetilde{M})^3 \approx 0,586.$$

При отсутствии противодействия

$$M_3 = 1 - (1 - M)^3 \approx 0,936.$$

По формуле (55.1)

$$\xi = \frac{M_3 - \widetilde{M}_3}{M_3} = \frac{0,936 - 0,586}{0,936} \approx 0,364,$$

т. е. противодействие снижает эффективность стрельбы по площадной цели примерно на 36%.

Во многих случаях стрельбы по управляемым снарядам можно пренебречь возможностью «промежуточных» повреждений, снижающих эффективность снаряда (если, например, поражение системы управления увеличивает рассеивание снаряда настолько, что он становится практически безопасным для цели *Ц*). В этом случае управляемый снаряд может рассматриваться как боевая единица, которая в результате стрельбы может быть только «поражена» или «не поражена», а сама стрельба по управляемому снаряду становится типичным видом «предшествующего противодействия», которое мы уже рассмотрели в § 53.

Пример 3. По управляемому снаряду производится стрельба очередью из 18 выстрелов; средняя вероятность попадания каждым выстрелом в уязвимые агрегаты снаряда (боевая часть, система управления, взрыватель) равна $p = 0{,}05$. При попадании в любую из этих частей снаряд выводится из строя и становится безопасным для цели *Ц*.

Выстрелы зависимы, коэффициент корреляции $\mu = 0{,}8$. Неповрежденный снаряд поражает цель с вероятностью $W = 0{,}9$.

Оценить эффективность оборонительной стрельбы.

Решение. Вычислим вероятность поражения приближенным методом, изложенным на стр. 81. При $r = 1$, $M = npr = 0{,}9$, $\mu = 0{,}8$, имеем вероятность поражения снаряда С:

$$W_{\text{с}} = 0{,}41.$$

Вероятность того, что противодействие снаряду будет безуспешно:

$$Q = 1 - W_{\text{с}} = 0{,}59.$$

Вероятность поражения цели *Ц* с учетом противодействия:

$$\widetilde{W} = QW = 0{,}53.$$

Показатель эффективности оборонительной стрельбы:

$$\xi = \frac{W - \widetilde{W}}{W} = \frac{W(1 - Q)}{W} = 1 - Q = 0{,}41.$$

(оборонительная стрельба снижает эффективность снаряда на 41%).

§ 56. ПРИНЦИПЫ УЧЕТА РАДИОПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

Одним из мощных средств противодействия огневым средствам противника является так называемое радиопротиводействие. Оно может иметь следующие основные формы:

— применение специальных противорадиолокационных покрытий, уменьшающих эффективную отражающую поверхность цели;

— применение активных помех;

— применение пассивных помех.

Применение противорадиолокационных покрытий приводит к существенному уменьшению радиуса действия радиолокационных устройств, применяемых при стрельбе. Что касается помех, то в зависимости от их типа, интенсивности и способа боевого применения они могут влиять на эффективность огневых средств самым различным образом. В результате применения помех могут быть выведены из строя («забиты») полностью или частично отдельные узлы, входящие в состав радиолокационных устройств, а также различные комбинации этих узлов.

Проблема количественной оценки эффективности радиопротиводействия в полном объеме является очень сложной. На ее технической стороне мы останавливаться не будем. Ограничимся некоторыми самыми общими указаниями на возможную принципиальную схему учета радиопротиводействия при построении математической модели боевых действий.

Предположим, что в боевых действиях участвует две стороны: *I* и *II*. Сторона *I* является нападающей и применяет активные огневые средства. Сторона *II* применяет радиопротиводействие.

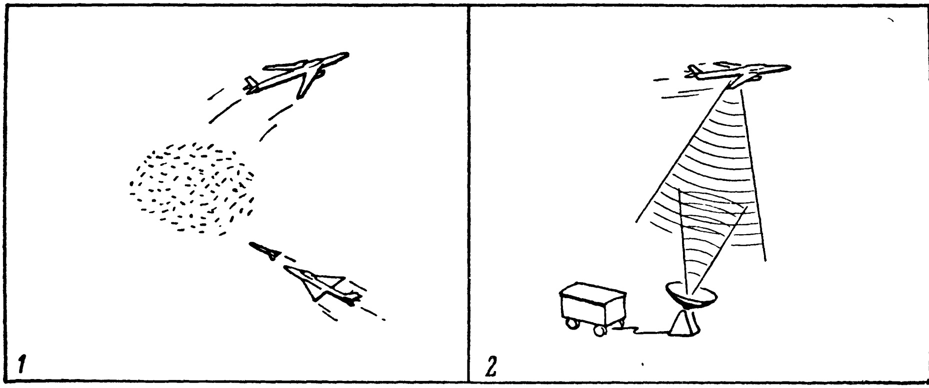


Рис. 56.1. Помехи:
1 — пассивные; *2* — активные.

Возникает вопрос: насколько снижается эффективность боевых действий стороны *I* в результате радиопротиводействия?

Будем рассуждать следующим образом. В общем случае сторона *I* применяет по стороне *II* несколько (n) боевых единиц (ракет, самолетов). Поставим себе прежде всего простейшую задачу: оценить эффективность радиопротиводействия одной, отдельно взятой, боевой единице.

Пусть боевая единица представляет собой летательный аппарат, например истребитель-перехватчик, вооруженный управляемыми снарядами «воздух—воздух».

Воспользуемся схемой комплексной оценки эффективности летательных аппаратов, изложенной в гл. 7. Согласно этой схеме, боевая деятельность летательного аппарата представляет собой ряд последовательных этапов или фаз, например:

— фаза взлета;
— фаза дальнего наведения;
— фаза ближнего наведения;
— фаза стрельбы.

В качестве показателя эффективности боевой деятельности истребителя примем полную вероятность поражения воздушной цели $\widetilde{W}$, равную произведению вероятностей успешного выполнения всех фаз. Успешность выполнения первой фазы (взлета) практически не зависит от того, применяет ли противник радиопротиводействие или нет. Представим полную вероятность поражения цели с учетом радиопротиводействия в виде произведения четырех сомножителей:

$$\widetilde{W} = p_0 \widetilde{p}_1 \widetilde{p}_2 \widetilde{p}_3, \tag{56.1}$$

где p_0 — вероятность успешного осуществления взлета;

$\widetilde{p}_1$ — вероятность успешного выполнения дальнего перехвата с учетом радиопротиводействия;

$\widetilde{p}_2$ — вероятность успешного выполнения ближнего перехвата с учетом радиопротиводействия;

$\widetilde{p}_3$ — вероятность успешного выполнения стрельбы по воздушной цели (поражения цели) с учетом радиопротиводействия.

Предположим, что на истребителе имеется два управляемых снаряда, выпускаемых по цели залпом или короткой серией. Допустим, что они наводятся по цели независимо один от другого и каждый из них может поразить цель (с условной вероятностью $p_п$) только в случае, если произошло совмещение двух событий:

— снаряд наведен в зону, при попадании в которую может сработать радиовзрыватель;

— радиовзрыватель сработал нормально.

Тогда вероятность выполнения третьего этапа с учетом радиопротиводействия будет равна

$$\widetilde{p}_3 = 1 - (1 - \widetilde{p}_н \widetilde{p}_в p_п)^2, \tag{56.2}$$

где $\widetilde{p}_н$ — вероятность наведения снаряда с учетом радиопротиводействия;

$\widetilde{p}_в$ — вероятность нормального срабатывания взрывателя с учетом радиопротиводействия.

Подставляя значение p_3 в (56.1), получаем:

$$\widetilde{W} = p_0 \widetilde{p}_1 \widetilde{p}_2 \left[1 - (1 - \widetilde{p}_н \widetilde{p}_в p_п)^2\right]. \tag{56.3}$$

Составляя формулы, подобные (56.3) и зная влияние радиопомех на вероятность выполнения каждого этапа или его элемента, можно оценить влияние радиопротиводействия на эффективность боевой деятельности любой отдельно взятой единицы.

Пример 1. Рассматривается боевая деятельность истребителя-перехватчика в условиях помех. Истребитель вооружен четырьмя управляемыми снарядами, «воздух—воздух», выпускаемыми по цели короткой серией. Применяемые противником помехи снижают:

— вероятность успешного выполнения дальнего перехвата на 20%;

— вероятность успешного выполнения ближнего перехвата (обнаружение цели, выход в атаку) на 10%;

— вероятность наведения снаряда на 30%;

— вероятность нормального срабатывания взрывателя на 40%.

В условиях отсутствия помех вероятности выполнения этапов следующие:

— вероятность успешного выполнения дальнего перехвата $p_1=0{,}9$;

— вероятность успешного выполнения ближнего перехвата $p_2=0{,}95$;

— вероятность наведения снаряда $p_н = 0{,}7$;

— вероятность срабатывания взрывателя $p_в = 0{,}9$.

Помехи действуют на отдельные снаряды независимо.

Вероятность поражения цели одним нормально разорвавшимся снарядом $p_п=0{,}8$.

Требуется определить:

— на сколько процентов снижают помехи эффективность боевой деятельности истребителя;

— на помехозащищенность каких элементов истребительного комплекса следует обратить внимание в первую очередь для того, чтобы максимально нейтрализовать вредное влияние помех.

Решение. Вычисляем, прежде всего, полную вероятность поражения цели без учета противодействия:

$$W = p_1 \cdot p_2 [1 - (1 - p_н p_в p_п)^4] = 0{,}9 \cdot 0{,}95 [1 - (1 - 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8)^4] \approx 0{,}804.$$

Вероятности этапов и их элементов с учетом противодействия будут равны:

$$\tilde{p}_1 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72, \quad \tilde{p}_2 = 0{,}95 \cdot 0{,}9 = 0{,}855,$$
$$\tilde{p}_н = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49, \quad \tilde{p}_в = 0{,}9 \cdot 0{,}6 = 0{,}54.$$

Полная вероятность поражения цели с учетом радиопротиводействия будет равна:

$$\tilde{W} = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \left[1 - \left(1 - \tilde{p}_н \tilde{p}_в \tilde{p}_п\right)^4\right] = 0{,}72 \cdot 0{,}855 \times$$
$$\times [1 - (1 - 0{,}49 \cdot 0{,}54 \cdot 0{,}8)^4] \approx 0{,}378.$$

Относительное снижение эффективности

$$\xi = \frac{W - \tilde{W}}{W} = \frac{0{,}804 - 0{,}378}{0{,}804} \approx 0{,}53.$$

Эффективность истребителя снижается помехами на 53%.

Для того чтобы решить второй вопрос, применим следующий приближенный прием: продифференцируем вероятность $\tilde{W}$ по каждому из параметров $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$, $\tilde{p}_н$, $\tilde{p}_в$. Получим

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{p}_1} = \tilde{p}_2 \left[1 - \left(1 - \tilde{p}_н \tilde{p}_в p_п\right)^4\right] = 0{,}524,$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{p}_2} = \tilde{p}_1 \left[1 - \left(1 - \tilde{p}_н \tilde{p}_в p_п\right)^4\right] = 0{,}442,$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{p}_н} = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \cdot 4 \left(1 - \tilde{p}_н \tilde{p}_в p_п\right)^3 \tilde{p}_в p_п = 0{,}094,$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{p}_в} = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \cdot 4 \left(1 - \tilde{p}_н \tilde{p}_в p_п\right)^3 \tilde{p}_н p_п = 0{,}090.$$

Каждая из производных по смыслу представляет собой отношение приращения полной вероятности выполнения боевой задачи к малому приращению соответствующего параметра. Значение $\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{p}_1}=0{,}524$ означает, грубо говоря, что при увеличении вероятности дальнего наведения (за счет повышения помехозащищенности соответствующих устройств) на 10% полная вероятность поражения увеличится на 5%.

Аналогично значение $\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{p}_{н}}=0{,}094$ означает, что при таком же десятипроцентном увеличении вероятности наведения снаряда полная вероятность поражения увеличится только на 1%.

Следовательно, при заданных условиях наиболее перспективным является повышение помехозащищенности радиолокационных устройств, относящихся к этапу дальнего наведения истребителя; во вторую очередь к этапу ближнего наведения. Помехи, действующие на снаряды и взрыватели, имеют в данном случае второстепенное значение.

В примере 1 мы считали, что помехи действуют на снаряды независимо. Однако это предположение не всегда будет правильным. Может оказаться, что помехи действуют сразу на все снаряды, применяемые по данной цели. В этом случае расчетная схема будет другая.

Пример 2. В условиях примера 1 численные данные остаются неизменными, однако помехи действуют сразу на все четыре снаряда. В 30% всех случаев боевого применения радиопомехами «забиваются» все радиолокационные устройства снарядов; в 40% все случаев становятся неработоспособными радиовзрыватели четырех снарядов.

Дать ответ на оба вопроса, поставленные в предыдущем примере.

Решение.

$$\widetilde{W}=\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_{н}\widetilde{p}_{в}[1-(1-p_{п})^4]=0{,}72\cdot 0{,}855\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}998\approx 0{,}258,$$

$$\xi=\frac{W-\widetilde{W}}{W}\approx\frac{0{,}546}{0{,}804}\approx 0{,}68.$$

Помехи снижают эффективность применения истребителя на 68%.

Для ответа на второй вопрос продифференцируем W по всем аргументам:

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{p}_1}=\widetilde{p}_2\widetilde{p}_{н}\widetilde{p}_{в}[1-(1-p_{п})^4]\approx 0{,}357,$$

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{p}_2}=\widetilde{p}_1\widetilde{p}_{н}\widetilde{p}_{в}[1-(1-p_{п})^4]\approx 0{,}302,$$

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{p}_{н}}=\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_{в}[1-(1-p_{п})^4]\approx 0{,}369,$$

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{p}_{в}}=\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_{н}[1-(1-p_{п})^4]\approx 0{,}430.$$

В данном случае порядок влияния помех на эффективность по всем каналам приблизительно одинаков ($0{,}3\div 0{,}4$).

ГЛАВА 9

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

§ 57. ОСОБЕННОСТИ БОЯ МНОГОЧИСЛЕННЫХ ГРУПП. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ БОЯ

В предыдущей главе (§ 54) мы познакомились с некоторыми способами учета огневого противодействия, протекающего в ходе выполнения самой боевой задачи. Эти способы (например, построение «дерева боя») являются приемлемыми, только если в бою участвует очень ограниченное число единиц. С увеличением числа боевых единиц подобные методы чрезвычайно усложняются.

Однако в случае, когда бой ведется между весьма многочисленными группами, как это ни парадоксально, сама эта многочисленность позволяет сильно упростить задачу. Известно, что вообще случайные процессы, в которых участвует большое число элементов, в принципе описываются более простыми закономерностями, чем аналогичные процессы, в которых таких элементов немного.

В качестве примера приведем процесс движения молекул в сосуде, заполненном газом. Несмотря на то что отдельные молекулы газа движутся беспорядочно, хаотически, случайным образом, поведение всего объема газа в целом практически не зависит от случайных траекторий отдельных молекул и подчиняется весьма точным законам.

Аналогичные закономерности (хотя и в менее четком виде) проявляются и при анализе боевого взаимодействия больших группировок. Если группы боевых средств, участвующих в бою, достаточно многочисленны, то случайности, связанные с состоянием каждой отдельной единицы (поражена — не поражена; выстрелила — не выстрелила), будут мало сказываться на состоянии всей группы в целом.

Действительно, согласно закону больших чисел относительное число сохранившихся боевых единиц с той и другой стороны будет близко к его математическому ожиданию. Поэтому для многочисленных групп могут быть созданы сравнительно простые (хотя и грубые) методы учета противодействия, где можно отказаться от рассмотрения подробностей, связанных с состоянием каждой отдельной боевой единицы, а заняться всей группой в целом.

В зависимости от допущений, положенных в основу исследования, можно получить ту или другую математическую модель боевых действий, описываемую с помощью тех или других уравнений. В последующих параграфах мы рассмотрим некоторые простейшие модели и выведем описывающие их уравнения и математические формулы.

Однако предварительно нам нужно будет ввести некоторые вспомогательные понятия, в частности понятие о «потоке выстрелов».

§ 58. ПОТОК СОБЫТИЙ. ПУАССОНОВСКИЙ ПОТОК

Рассматривая динамику боя многочисленных группировок, естественно, нельзя строго зафиксировать моменты каждого выстрела, каждой из боевых единиц, участвующих в бою: модель оказалась бы слишком сложной, а главное не отражала бы реального положения вещей. В действительности моменты выстрелов отдельных боевых единиц неизбежно будут **случайными**.

Поэтому при рассмотрении динамики боя мы всюду будем пользоваться схемой **случайного распределения огня**.

Рис. 58 1.

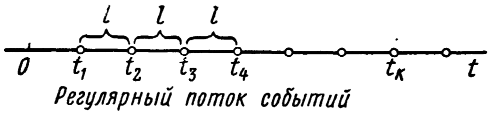


Рис. 58.2.

Последовательность выстрелов во времени будем рассматривать как некоторый **поток событий**.

В теории вероятностей **потоком событий** называется последовательность однородных событий, осуществляющихся одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Примерами могут служить:

— поток включений осветительных приборов в электросеть;

— поток отказов (сбоев) вычислительной машины;

— поток воздушных целей, входящих в зону действия системы ПВО;

— поток атак, которым подвергается воздушная цель над обороняемой территорией

и т. д.

Поток событий можно изобразить как последовательность моментов их появления $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ на оси времени ot (рис. 58.1).

Если точки $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ разделены строго одинаковыми ининтервалами l (рис. 58.2), то поток называется **регулярным**.

С первого взгляда может показаться, что регулярный поток представляет собой наиболее простой из всех возможных потоков событий. Однако это не так. Дело в том, что в регулярном потоке моменты появлений последовательных событий связаны между собой жесткой, функциональной зависимостью. Это сильно затрудняет анализ явлений, в которых фигурирует одновременно большое число таких потоков (например, бой многочисленных групп боевых единиц, каждая из которых совершает выстрелы в моменты времени, разделенные жесткими интервалами). Гораздо проще анализировать потоки событий, появляющихся в случайные моменты времени *независимо* друг от друга (так называемые пуассоновские потоки).

Представим себе какие-то события $A_1, A_2, \ldots$, появляющиеся в моменты $t_1, t_2, \ldots$, которые мы изобразим точками на оси абсцисс ot (рис. 58.3). Предположим, что точки появляются на оси ot поодиночке, т. е. совпадение в один и тот же момент времени двух или более событий практически невозможно. Такой поток называется *ординарным*.

Выделим на оси ot отрезок длиной τ, начинающийся в точке t и заканчивающийся в точке $t+\tau$. Поток событий называется *потоком без последействия*, если вероятность того, что на участок τ попадет то или другое число точек, не зависит от того, как расположились на оси ot другие точки, не попавшие на этот участок.

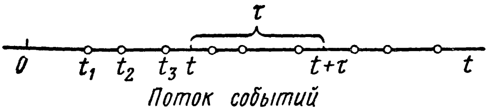


Рис. 58.3.

Потоки событий без последействия возникают везде, где появления последовательных событий обусловлены различными не связанными друг с другом причинами. Хорошим примером такого потока событий может служить поток вызовов на телефонной станции, когда разные абоненты звонят не сговариваясь, руководимые какими-то не связанными между собой причинами.

В теории вероятностей доказывается, что если поток событий ординарный и не имеет последействия, то число событий, попадающих на заданный участок τ, распределяется по так называемому *закону Пуассона*. А именно, вероятность того, что на участок попадет ровно m точек, определяется формулой

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \qquad (58.1)$$

где a — среднее число точек, попадающих на участок τ.

В связи с этим ординарный поток событий без последействия называется коротко *пуассоновским потоком*.

Рассмотрим на оси ot пуассоновский поток событий.

Обозначим λ среднее число событий, приходящееся на единицу времени, и назовем эту величину *плотностью* потока событий. Например, плотностью потока вызовов на телефонной станции будет среднее число вызовов, приходящее на станцию в единицу времени (час, минуту).

Плотность потока событий может быть как постоянной, так и переменной, зависящей от времени.

Рассмотрим сначала самый простой случай, когда плотность потока постоянна:

$$\lambda = \text{const}.$$

Такой поток событий называется стационарным пуассоновским, или простейшим потоком.

Очевидно, для простейшего потока среднее число событий, приходящееся на участок τ, пропорционально его длине:

$$a = \lambda\tau \tag{58.2}$$

и не зависит от того, где именно на оси ot выбран участок.

В случае, когда плотность потока зависит от времени, т. е. задана некоторой функцией $\lambda(t)$, среднее число событий, приходящееся на участок τ, выразится интегралом:

$$a = \int_{t}^{t+\tau} \lambda(t)\,dt. \tag{58.3}$$

Что касается формулы (58.1) для вероятности P_m, то она в обоих случаях остается одной и той же.

Полагая в формуле (58.1) $m=0$, найдем вероятность того, что за время τ не появится ни одного события:

$$P_0 = e^{-a}. \tag{58.4}$$

Вычитая P_0 из единицы, получаем вероятность того, что на участке τ появится хотя бы одно событие:

$$R_1 = 1 - e^{-a}. \tag{58.5}$$

Пример 1. На станцию метро в данное время суток направляется простейший поток пассажиров плотностью $\lambda = 120$ *чел-час*. Найти вероятность того, что за одну минуту на станцию: 1) не войдет ни один пассажир, 2) войдут один, два, три, четыре пассажира, 3) войдет хотя бы один пассажир.

Решение. Имеем $\tau = 1$ *мин* $= \frac{1}{60}$ *час*,

$$a = \lambda\tau = \frac{120}{60} = 2.$$

1) Применяя формулу (58.4), находим

$$P_0 = e^{-2} = 0{,}135.$$

2) По формуле (58.1), полагая $m=1, 2, 3, 4$, получаем:

$$P_1 = \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 0{,}270,$$

$$P_2 = \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 0{,}270,$$

$$P_3 = \frac{2^3}{3!}e^{-2} = 0{,}180,$$

$$P_4 = \frac{2^4}{4!}e^{-2} = 0{,}090.$$

По формуле (58.5)

$$R_1 = 1 - P_0 = 0{,}865.$$

Пример 2. Плотность потока вызовов на телефонной станции зависит от времени суток и выражается приближенной формулой:

$$\lambda(t) = 20 - 0{,}1\,(t - 12)^2 \ (\textit{вызов/час}).$$

Найти вероятность того, что за промежуток времени от 17 *час* до 17 *час.* 10 *мин* станция получит не менее двух вызовов.

Решение. Вероятность R_2 того, что станция получит не менее двух вызовов, найдем через вероятность противоположного события («менее двух вызовов», т. е. 0 или 1 вызов)

$$R_2 = 1 - (P_0 + P_1).$$

Находим среднее число вызовов на указанный промежуток времени

$$a = \int_{17}^{17\frac{1}{6}} \lambda(t)\,dt = 20 \cdot \frac{1}{6} - 0{,}1 \frac{(t-12)^3}{3} \Bigg|_{17}^{17\frac{1}{6}} = 2{,}91.$$

Отсюда

$$P_0 = e^{-2{,}91} = 0{,}054,$$

$$P_1 = \frac{2{,}91^1}{1!} e^{-2{,}91} = 0{,}157$$

и вероятность получения не менее двух вызовов:

$$R_2 = 1 - 0{,}211 = 0{,}789.$$

§ 59. ПОТОК ВЫСТРЕЛОВ. ПУАССОНОВСКИЙ ПОТОК УСПЕШНЫХ ВЫСТРЕЛОВ

При исследовании динамики боевых действий последовательность выстрелов (или обобщенных выстрелов), осуществляемых каждой единицей, участвующей в бою, удобно представлять, как поток событий. Наиболее простой математический аппарат описания процессов боевых действий получается, если поток выстрелов предположить пуассоновским. Подчеркнем, что этот поток вовсе не обязательно должен иметь постоянную плотность — она может любым образом зависеть от времени. В частности, например, если осуществляется один короткий удар, можно задавать плотность λ равной нулю до некоторого момента t_0 (начало удара) и постоянной до какого-то момента $t_к$ (конец удара), после которого она снова полагается равной нулю (рис. 59.1).

В течение времени $(t_0, t_к)$ можно в случае надобности полагать плотность потока выстрелов $\lambda(t)$ не постоянной, а изменяющейся по любому закону (рис. 59.2).

Заметим, что представление потока выстрелов в виде пуассоновского потока всегда представляет собой некоторую натяжку. Например, моменты последовательных выстрелов из одного орудия не могут представлять собой в точности пуассоновский поток, так как они неизбежно разделены некоторыми интервалами времени (нужными, например, для заряжания орудия). Однако необходимо иметь в виду следующее. В теории вероятностей доказывается, что *при взаимном наложении нескольких независимых случайных потоков событий практически всегда получается поток, близкий к пуассоновскому* (так называемая теорема Пальма). Так что, если, например, одна и та же цель обстреливается независимо несколькими орудиями, суммарный поток выстрелов, воспринимаемый целью, можно вполне заменять пуассоновским. Но даже и в том случае, когда поток выстрелов имеет один источник и содержит заметное последействие, замена такого потока пуассоновским, как правило, мало влияет на результаты расчета. Поэтому допущение о пуассоновском потоке выстрелов широко применяется при математическом описании боевых действий.

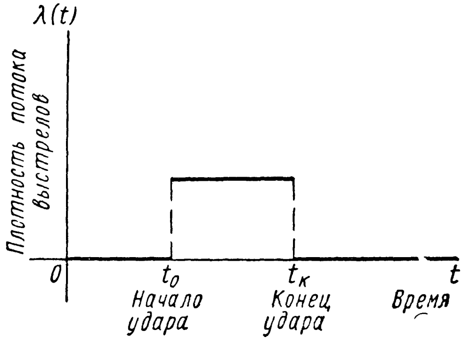


Рис. 59.1.

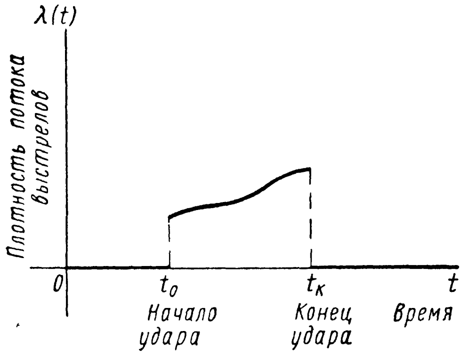


Рис. 59.2.

Очень удобным при таком описании оказывается еще один прием. Он состоит в том, чтобы перейти от потока выстрелов к так называемому «потоку успешных выстрелов».

Условимся называть данный выстрел «успешным», если он поражает цель (или поразил бы, если бы она до тех пор не была уже поражена).

Рассмотрим на оси времени $0t$ поток выстрелов, изображенный точками на рис. 59.3. Каждый из этих выстрелов с какой-то вероятностью p поражает цель, т. е. оказывается успешным. Отметим на оси $0t$ успешные выстрелы крестиками. Очевидно, успешные выстрелы в свою очередь образуют какой-то поток. В случае, если исходный поток выстрелов был пуассоновским, а выстрелы оказываются «поражающими» или «непоражающими» независимо друг от друга,

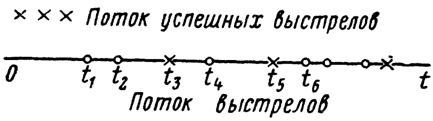


Рис. 59.3.

поток успешных выстрелов тоже будет пуассоновским, но с другой плотностью, а именно:

$$\Lambda = p\lambda,$$

где λ — плотность потока выстрелов;

p — вероятность поражения цели одним выстрелом.

Плотность потока успешных выстрелов Λ представляет собой как бы «эффективную скорострельность», тогда как λ — просто скорострельность орудия или группы орудий.

Заметим, что обе величины λ и p могут быть как постоянными, так и зависящими от времени.

В дальнейшем при анализе динамики боя многочисленных групп мы будем широко пользоваться понятиями пуассоновского потока успешных выстрелов.

§ 60. МОДЕЛЬ А. УРАВНЕНИЯ ЛАНЧЕСТЕРА

Рассмотрим следующую простейшую модель боя — модель **А**. В бою участвуют две группировки: Красные (I) и Синие (II) (рис. 60.1).

В составе группировки I (Красные) имеется N_1 однородных боевых единиц (например, танков, кораблей, самолетов, ракетных

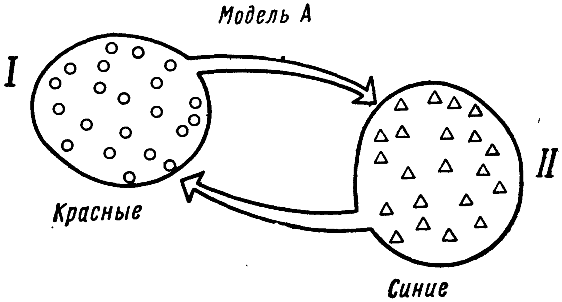


Рис. 60.1.

установок). В составе группировки II (Синие) имеется N_2 боевых единиц, однородных между собой, но необязательно однородных с боевыми единицами Красных (например, может рассматриваться бой самолетов с танками или кораблями).

Примем следующие допущения.

1. Каждая боевая единица любой стороны, пока она не поражена, производит случайный поток выстрелов с некоторой средней скорострельностью; этот поток является (точно или приближенно) пуассоновским.

2. Каждая боевая единица Красных может стрелять по любой из боевых единиц Синих, и наоборот. Огонь является прицельным, т. е. направлен на поражение вполне определенной боевой

единицы противника. Одним выстрелом нельзя поразить более одной боевой единицы.

3. Если боевая единица поражена, огонь мгновенно переносится на другую, а сама пораженная единица в дальнейших боевых действиях не участвует.

4. Временем полета снаряда (летательного аппарата) до цели можно пренебречь по сравнению с общей длительностью боя.

5. В любой момент времени суммарная боевая мощь каждой группировки (средняя скорострельность всей группы сохранившихся боевых единиц) пропорциональна не самому случайному числу сохранившихся боевых единиц, а его среднему значению (математическому ожиданию).

Последнее допущение особенно естественно для многочисленных группировок, когда случайности, связанные с поражением или непоражением отдельной боевой единицы, мало сказываются на суммарной огневой мощи группировки, которая для каждого этапа боя оказывается близкой к своему среднему значению. Для многочисленных групп эти случайности начинают сказываться только в конце боя, в «периоде истощения», когда в составе одной из сторон (или обеих) остается совсем небольшое число единиц. Для начальных же стадий боя замена случайного числа сохранившихся единиц его средним значением вполне допустима.

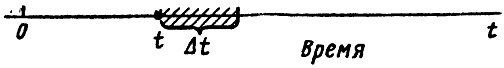


Рис. 60.2.

Обозначим m_1 среднее число боевых единиц Красных, сохранившихся непораженными к моменту t; аналогично m_2 — для Синих. Назовем m_1, m_2 *средними численностями сторон*.

Выведем математические формулы, позволяющие определить для любого момента t средние численности сторон, т. е. ориентировочно предсказать течение боя.

Обозначим λ_1 среднюю скорострельность (число выстрелов в единицу времени) для одной боевой единицы Красных; λ_2 — то же для Синих. Предположим, что каждый выстрел боевой единицы Красных поражает цель, по которой он направлен, с вероятностью p_1, для Синих — p_2. Тогда каждая боевая единица Красных будет осуществлять пуассоновский поток успешных выстрелов с плотностью

$$\Lambda_1 = \lambda_1 p_1;$$

боевая единица Синих — с плотностью

$$\Lambda_2 = \lambda_2 p_2.$$

Зафиксируем некоторый момент времени t и посмотрим, как изменятся средние численности сторон m_1 и m_2 за малый промежуток времени Δt, примыкающий к моменту t (рис. 60.2). Обозначим Δm_1 приращение величины m_1 за время Δt. Величина m_1 со временем уменьшается; за время Δt это уменьшение будет равно среднему числу пораженных противником за этот промежуток боевых единиц.

Посмотрим, сколько единиц поразит противник (Синие) за время Δt. В момент t у Синих имеется m_2 боевых единиц; каждая из них за время Δt производит в среднем $\Lambda_2 \Delta t$ успешных выстрелов; каждый из них поражает одну и только одну единицу Красных. Следовательно,

$$\Delta m_1 = -\Lambda_2 m_2 \Delta t. \tag{60.1}$$

Деля обе стороны равенства (60.1) на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем для m_1 дифференциальное уравнение

$$\frac{dm_1}{dt} = -\Lambda_2 m_2.$$

Рассуждая аналогично для m_2, получаем систему двух линейных дифференциальных уравнений, описывающих средние численности Красных и Синих в процессе боя:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\Lambda_2 m_2, \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\Lambda_1 m_1. \end{aligned}\right\} \tag{60.2}$$

Чтобы решить уравнения (60.2), нужно задаться начальными условиями. Очевидно, в момент начала боя ($t=0$) нужно положить

$$m_1 = N_1, \quad m_2 = N_2. \tag{60.3}$$

Уравнения, подобные (60.2), описывающие изменения средних численностей сторон в процессе боя, называются *уравнениями динамики боя*; часто их называют также *уравнениями Ланчестера*. В частности, уравнения (60.2) известны под названием «уравнений Ланчестера 2-го рода».

При выводе этих уравнений мы не оговаривали, являются ли величины $\Lambda_1 \Lambda_2$ (эффективные скорострельности) постоянными или же они зависят от времени. Уравнения (60.2) справедливы как в одном, так и в другом случае. Однако при $\Lambda_1 = \text{const}$, $\Lambda_2 = \text{const}$ они легко интегрируются. Опуская элементарные преобразования, приведем сразу окончательный результат — решение системы (60.2):

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= N_1 \operatorname{ch} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}\, t - N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} \operatorname{sh} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}\, t, \\ m_2 &= N_2 \operatorname{ch} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}\, t - N_1 \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} \operatorname{sh} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}\, t, \end{aligned}\right\} \tag{60.4}$$

где

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} -$$

гиперболические функции.

Формулы (60.4) можно упростить, если перейти от абсолютных численностей к относительным, т. е. к доле сохранившихся единиц. Обозначим

$$\mu_1 = \frac{m_1}{N_1}, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{N_2}.$$

Деля обе части уравнений (60.2) на N_1 и N_2 соответственно и переходя к переменным μ_1, μ_2, получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= -\Lambda_2 \frac{N_2}{N_1}\mu_2, \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= -\Lambda_1 \frac{N_1}{N_2}\mu_1. \end{aligned}\right\} \tag{60.5}$$

Эти уравнения интегрируются при начальных условиях:

$$\text{при} \quad t = 0 \quad \mu_1 = \mu_2 = 1.$$

Введем обозначения

$$\frac{\Lambda_2 N_2}{N_1} = u_2, \quad \frac{\Lambda_1 N_1}{N_2} = u_1$$

и запишем уравнения (60.5) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= -u_2\mu_1, \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= -u_1\mu_2. \end{aligned}\right\} \tag{60.6}$$

Выясним, каков физический смысл параметров u_1, u_2.

В числителе выражения $u_1 = \frac{\Lambda_1 N_1}{N_2}$ стоит $\Lambda_1 N_1$ — среднее число успешных выстрелов, которое могут в единицу времени производить Красные в своем первоначальном составе; иначе, среднее число единиц Синих, которое могут поражать Красные за единицу времени в начале боя. Разделив это число на N_2, получим *среднюю долю* Синих, которую могут поражать Красные за единицу времени в начале боя.

Аналогичный смысл, с переменой сторон местами, имеет величина u_2.

Назовем величину u_1 *характеристикой интенсивности воздействия* Красных по Синим, величину u_2 — характеристикой интенсивности воздействия Синих по Красным.

Так как уравнения (60.6) ничем не отличаются от (60.2), кроме начальных условий и обозначений, то для них можно написать решение в форме (60.4), заменяя m_1, m_2 через μ_1, μ_2; N_1 и N_2 — через единицу, Λ_1 и Λ_2 — через u_1, u_2.

Получим

$$\left.\begin{aligned}\mu_1 &= \operatorname{ch}\sqrt{u_1 u_2}\,t - \sqrt{\frac{u_2}{u_1}}\operatorname{sh}\sqrt{u_1 u_2}\,t,\\ \mu_2 &= \operatorname{ch}\sqrt{u_1 u_2}\,t - \sqrt{\frac{u_1}{u_2}}\operatorname{sh}\sqrt{u_1 u_2}\,t.\end{aligned}\right\} \qquad (60.7)$$

Эти формулы можно еще упростить, если ввести в них новую переменную — «приведенное время»

$$\tilde{t} = \sqrt{u_1 u_2}\,t$$

и ввести обозначение

$$\sqrt{\frac{u_1}{u_2}} = \varkappa.$$

Получим

$$\left.\begin{aligned}\mu_1 &= \operatorname{ch}\tilde{t} - \frac{1}{\varkappa}\operatorname{sh}\tilde{t},\\ \mu_2 &= \operatorname{ch}\tilde{t} - \varkappa\operatorname{sh}\tilde{t}.\end{aligned}\right\} \qquad (60.8)$$

В частности, при $\varkappa=1$ (силы сторон равны) формулы (60.8) дают

$$\mu_1 = \mu_2 = e^{-\tilde{t}}.$$

В формулах (60.8) средние доли сохранившихся боевых единиц μ_1, μ_2 зависят только от приведенного времени $\tilde{t}$ и от одного параметра $\varkappa$, характеризующего соотношение сил:

$$\varkappa = \sqrt{\frac{u_1}{u_2}} = \frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}}. \qquad (60.9)$$

Параметр $\varkappa$ характеризует п р е и м у щ е с т в о Красных над Синими. Если $\varkappa>1$, Красные сильнее Синих и бой через некоторое время закончится победой Красных; если $\varkappa<1$, — наоборот; при $\varkappa=1$ ни одна из сторон преимущества не имеет.

Из формулы (60.9) видно, что коэффициент преимущества $\varkappa$ в большей мере зависит от соотношения сил $\frac{N_1}{N_2}$, чем от соотношения эффективных скорострельностей $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$. Согласно формуле (60.9) увеличение N_1, например, в два раза удваивает коэффициент $\varkappa$, тогда как удвоение эффективной скорострельности Λ_1 увеличивает $\varkappa$ только в $\sqrt{2}=1{,}4$ раза.

Этот не сразу очевидный вывод связан с принятой схемой учета противодействия. Одна установка с удвоенной скорострельностью требует для своего поражения меньшего расхода выстрелов со стороны противника, чем две установки с нормальной скорострельностью; поэтому повышение скорострельности оказывается менее выгодным, чем пропорциональное увеличение числа боевых единиц.

То же относится к повышению эффективной скорострельности за счет увеличения вероятности поражения: в условиях противодействия выгоднее увеличить число стреляющих единиц, чем в такое же число раз повысить вероятность поражения каждым выстрелом.

Посмотрим, что будет, если мы уменьшим число единиц Красных вдвое и одновременно учетверим их эффективную скорострельность. При этом величины u_1 и u_2 увеличатся вдвое, а коэффи-

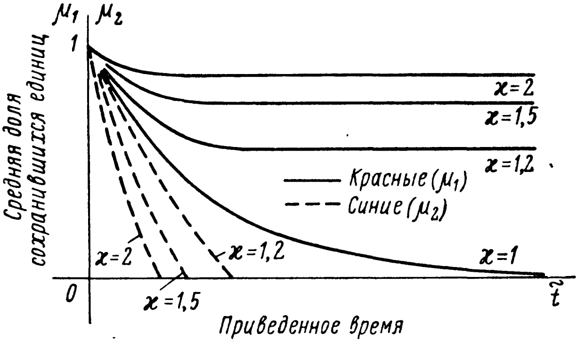


Рис. 60.3.

циент $\varkappa$ не изменится. Поэтому ход боя в «приведенном» времени $\tilde{t}$, описываемый формулами (60.8), не изменится. Однако ход боя в реальном времени t изменится: он убыстрится вдвое, так как масштабный коэффициент $\sqrt{u_1 u_2}$ удвоится.

Отметим, что этот вывод не является универсальным и относится не к любому противодействию. Он связан с тем, что в нашей модели **А** предполагается возможным свободный перенос огня с пораженной боевой единицы на другую. Предполагается, что необходимая для этого информация о том, какие цели поражены, имеется в распоряжении каждой стороны и перенос огня осуществляется мгновенно[1].

На рис. 60.3 приведены кривые зависимости μ_1 и μ_2 от приведенного времени $\tilde{t}$ для различных значений коэффициента преимущества $\varkappa$; Красные (сторона I) условно рассматриваются как «побеждающая» сторона ($\varkappa>1$). Кривые μ_1 (Красные) даны сплошными линиями, кривые μ_2 (Синие) — пунктиром. При $\varkappa=1$ кривые μ_1, μ_2 сливаются. При $\varkappa>1$ кривая μ_1, начиная с некоторого $\tilde{t}$, вырождается в горизонтальную прямую (численность Красных перестает убывать), а кривая μ_2 сливается с осью абсцисс (Синие

[1] В дальнейшем мы познакомимся с другой моделью **Б**, в которой перенос огня отсутствует и процесс боевых действий развивается иначе.

истреблены полностью). Заметим, что кривые μ_2 пересекают ось $o\tilde{t}$ под углом; если бы их продолжить далее, они зашли бы в отрицательную область, тогда как очевидно, что доля сохранившихся единиц отрицательной быть не может. Это недоразумение связано с тем, что выбранный нами математический аппарат (основанный, в частности, на допущении 5) пригоден лишь на таких стадиях боя, когда число сохранившихся боевых единиц велико, и непригоден на «стадии истощения». В действительности кривые μ_2 будут подходить к оси абсцисс не под углом, как на рис. 60.3, а плавно, как показано пунктиром на рис. 60.4. Однако расчеты показывают, что для достаточно многочисленных групп (число единиц порядка 50 и выше) различия между действительной кривой и решением уравнений Ланчестера незначительны, и для ориентировочного определения момента «практически полного истребления» побежденной стороны можно пользоваться кривыми рис. 60.3.

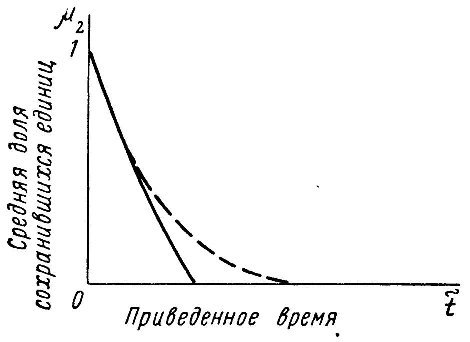


Рис. 60.4.

Пример. Происходит бой между двумя группами танков: Красные в составе 50 и Синие в составе 25 танков. Танки Красных обладают средней скорострельностью (с учетом времени на перенос огня) 0,25 выстрелов в минуту; средняя вероятность поражения цели $p_1=0{,}56$. Танки Синих обладают скорострельностью 0,5 выстрелов в минуту; $p_2=0{,}5$. Сделать прогноз развития боя: указать, победой какой из сторон и ориентировочно через какое время закончится бой и каковы будут приблизительно потери победившей стороны.

Решение. Имеем

$$u_1=\frac{\Lambda_1 N_1}{N_2}=\frac{0{,}25\cdot 0{,}56\cdot 50}{25}=0{,}28,$$

$$u_2=\frac{\Lambda_2 N_2}{N_1}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 25}{50}=0{,}125.$$

Так как $u_1>u_2$, победит сторона Красных. Переходим к приведенному времени:

$$\tilde{t}=\sqrt{0{,}28\cdot 0{,}125}\,t=0{,}187t.$$

Коэффициент преимущества:

$$\varkappa=\sqrt{\frac{0{,}28}{0{,}125}}\approx 1{,}5.$$

По кривым рис. 60.3 для $\varkappa=1{,}5$ находим приближенно момент $\tilde{t}_к$, в который кривая μ_2 пересекает ось абсцисс (момент окончания боя). В приведенном масштабе времени $\tilde{t}_к=0{,}8$.

Переходя к истинному масштабу времени (в минутах), получаем

$$t_к=\frac{\tilde{t}_к}{0{,}187}=4{,}28\ (мин).$$

По кривой μ_1 для $\widetilde{t}_к = 0{,}8$ находим долю сил Красных, сохранившуюся к моменту $t_к$:

$$\mu_1 \approx 0{,}75.$$

Итак, бой танков закончится приблизительно через четыре с половиной минуты победой Красных. Победившая сторона понесет потери в размере около 25% своего первоначального состава (приблизительно 12 танков).

§ 61. УЧЕТ ПОПОЛНЕНИЯ СИЛ, УПРЕЖДАЮЩЕГО УДАРА, ТЕМПА МОБИЛИЗАЦИИ И ПРОЧИХ ФАКТОРОВ

До сих пор мы рассматривали модель боя, в которой происходит только потеря боевых единиц с той и другой стороны, а пополнение сил отсутствует. Применяя ту же методику, можно вывести уравнения, описывающие динамику боя с пополнением сил.

Действительно, предположим, что в процессе боя происходит непрерывное пополнение сил (ввод резервов), причем Красные вводят в бой n_1 новых боевых единиц в единицу времени; Синие — n_2 боевых единиц. (Числа n_1, n_2 могут быть как постоянными, так и зависящими от времени.)

С учетом этого вместо (60.1) напишем новую формулу для приращения численности Красных за время Δt:

$$\Delta m_1 = -\Lambda_2 m_2 \Delta t + n_1 \Delta t.$$

В этом выражении первый, отрицательный, член представляет собой убыль боевых единиц за счет поражения противником; второй, положительный, — увеличение за счет ввода резервов. Деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$\frac{dm_1}{dt} = -\Lambda_2 m_2 + n_1.$$

Рассуждая аналогично для m_2, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\Lambda_2 m_2 + n_1, \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\Lambda_1 m_1 + n_2, \end{aligned}\right\} \tag{61.1}$$

где коэффициенты Λ_1, Λ_2, n_1, n_2 могут быть как постоянными, так и переменными[1)].

Деля первое уравнение на N_1, второе на N_2, получаем (в относительных величинах)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= -u_2 \mu_2 + \nu_1, \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= -u_1 \mu_1 + \nu_2, \end{aligned}\right\} \tag{61.2}$$

[1)] Система уравнений (61.1) с переменными коэффициентами может быть легко проинтегрирована, например, на машине непрерывного действия.

где коэффициенты u_1, u_2 имеют тот же смысл, как и ранее:

$$u_1 = \frac{\Lambda_1 N_1}{N_2}; \quad u_2 = \frac{\Lambda_2 N_2}{N_1},$$

а

$$\nu_1 = \frac{n_1}{N_1}; \quad \nu_2 = \frac{n_2}{N_2}$$

представляют собой пополнение сил в долях первоначального состава, которое осуществляют в единицу времени Красные и Синие.

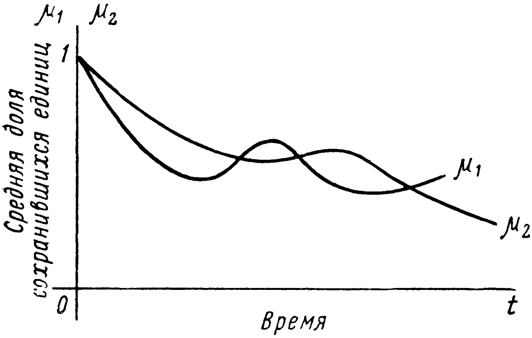


Рис. 61.1.

С учетом пополнения сил кривые $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ могут выглядеть уже совсем иначе, чем ранее; например, как показано на рис. 61.1. Вид этих кривых будет меняться в зависимости от того, в каких размерах, на каких участках времени и какими темпами вводятся резервы.

С помощью уравнений динамики боя можно учесть не только пополнение сил, но и влияние целого ряда факторов, как-то: упреждающий удар одной из сторон, темп мобилизации сил, истощение наличного ресурса боеприпасов и его восстановление и т. д. Для учета всех таких факторов достаточно полагать в уравнениях (60.6) коэффициенты u_1, u_2 не постоянными, а изменяющимися по определенному закону:

$$u_1 = u_1(t), \quad u_2 = u_2(t).$$

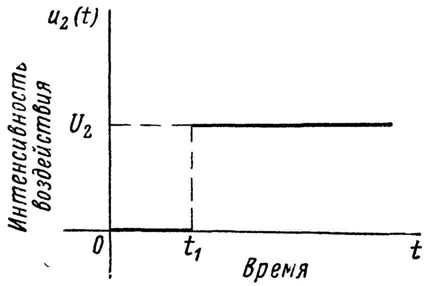


Рис. 61.2.

Пусть, например, Красные наносят Синим упреждающий удар, начиная огонь в какой-то момент $t_0 = 0$, а Синие, застигнутые врасплох, не отвечают никаким противодействием до некоторого момента t_1, в который они вводят в действие все свои силы. Тогда в уравнениях (60.6) нужно положить величину $u_2(t)$ равной нулю до момента t_1 и равной постоянной величине U_2 после $t = t_1$ (рис. 61.2).

Здесь мы исходили из предположения, что подвергшаяся нападению сторона совсем не отвечает противнику до момента t_1, а в этот момент вводит в бой сразу все свои силы. Очевидно, более естественно предположить, что Синие, подвергшись нападению, будут постепенно мобилизовывать и вводить в действие свои силы. Темп нарастания сил можно охарактеризовать какой-то функцией

$$u_2(t) = U_2 f_2(t),$$

где U_2 — характеристика интенсивности воздействия Синих по Красным в их полном составе;

$f_2(t)$ — доля сил Синих, введенная в действие к моменту t. При $t=0$ (момент внезапного удара) $f_2(t)=0$; к моменту t_1 $f_2(t)=1$ — Синие успевают полностью отмобилизоваться (рис. 61.3).

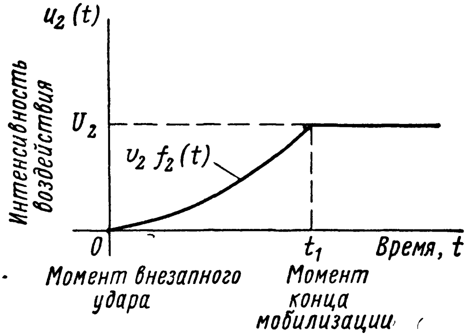


Рис. 61.3.

Проинтегрировав уравнения (60.6) при таком виде функции $u_2(t)$, можно учесть влияние темпа мобилизации на соотношение сил в ходе боевых действий.

С первого взгляда может показаться, что учет мобилизации сил должен производиться теми же методами, что и учет ввода резерва. Однако это не так. Неотмобилизованные к моменту t силы находятся на территории, подвергаемой огню противника; сами они не ведут стрельбы, но могут быть поражены огнем противника, еще не войдя в действие. Свежие силы (резервы), вводимые на обстреливаемую территорию, начинают подвергаться огню только с момента ввода. Поэтому указанные факторы учитываются по различной схеме: ввод резервов — слагаемым в правой части уравнения; мобилизация — переменной характеристикой интенсивности воздействия, входящей в уравнения с помощью коэффициента (u_1 или u_2).

По аналогичной схеме можно учесть в уравнениях динамики боя и ограниченность боезапаса.

Предположим сначала, что боезапас жестко связан с определенной боевой единицей (уничтожается вместе с ней и не может перераспределяться) и достаточен для ведения огня с заданной скорострельностью в течение некоторого времени; обозначим это время τ_1 для Красных и τ_2 для Синих.

Очевидно,

$$\tau_1 = \frac{k_1}{\lambda_1}, \quad \tau_2 = \frac{k_2}{\lambda_2},$$

где k_1 — запас снарядов, имеющийся у каждой боевой единицы Красных;

λ_1 — средняя скорострельность боевой единицы Красных;

k_2, λ_2 — аналогичные характеристики Синих.

Для учета ограниченности боезапаса достаточно положить, после момента τ_1 для Красных и τ_2 для Синих, интенсивность воздействия равной нулю:

$$u_1(t) = 0 \text{ при } t > \tau_1,$$
$$u_2(t) = 0 \text{ при } t > \tau_2.$$

Несколько иначе будут писаться уравнения в случае, когда имеется общий склад боеприпасов, надежно защищенный от огня противника и питающий все боевые единицы данной группы.

Пусть склад боепитания Красных имеет по k_1 снарядов на каждую единицу, всего $k_1N_1 = M_1$ снарядов; склад боепитания Синих — $k_2N_2 = M_2$ снарядов. При поражении боевой единицы ее боезапас не уничтожается, а перераспределяется между другими единицами. Тогда каждая оставшаяся непораженной боевая единица Красных будет вести огонь со своей средней скорострельностью до того момента τ^*_1, когда истощится весь боезапас. Очевидно (если скорострельность в первом и втором случае одинаковая), $\tau^*_1 > \tau_1$, т. е. при централизованном распределении огонь прекратится позднее.

Найдем величину τ^*_1. Предположим, что в момент t число сохранившихся единиц Красных равно m_1. Определим среднее число снарядов, которое будет израсходовано этими единицами за элементарный промежуток времени dt. Каждая единица за время dt израсходует $\lambda_1 dt$ снарядов; m_1 единиц — $m_1\lambda_1 dt$ снарядов. Чтобы найти общий средний расход снарядов r_1 к моменту t, нужно вычислить интеграл

$$r_1 = \int_0^t m_1\lambda_1\, dt, \tag{61.3}$$

где m_1, зависящее от t, — среднее число боевых единиц, сохранившихся к моменту t;

λ_1 — средняя скорострельность боевой единицы.

Величина τ^*_1 может быть определена, как такое значение t, при котором интеграл (61.3) становится равным всему наличному боезапасу $k_1N_1 = M_1$:

$$M_1 = \int_0^{\tau_1^*} m_1\lambda_1\, dt. \tag{61.4}$$

Аналогичная характеристика τ^*_2 для Синих может быть найдена из соотношения

$$M_2 = \int_0^{\tau_2^*} m_2\lambda_2\, dt. \tag{61.5}$$

Практически для учета ограниченности боезапаса можно одновременно с интегрированием уравнений динамики боя вычислять (на машине или другим способом) интегралы

$$r_1 = \int_0^t m_1\lambda_1\,dt, \quad r_2 = \int_0^t m_2\lambda_2\,dt,$$

представляющие собой расходы боезапаса сторон к моменту t, и полагать интенсивность воздействия данной стороны равной нулю после того, как интеграл достиг значения полного боезапаса.

Очевидно, не представляет труда учесть аналогичным способом и подвоз боеприпасов.

§ 62. МОДЕЛЬ Б. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ Б

Уравнения Ланчестера 2-го рода, выведенные в § 60, описывают такую модель боя (модель **А**), в которой перенос огня с пораженной цели на непораженную осуществляется мгновенно; при этом предполагается, что в распоряжении каждой стороны имеется точная информация о том, какие цели поражены, а время, необходимое для учета этой информации и переноса огня на еще непораженные цели, пренебрежимо мало. Таким образом, модель **А** представляет собой модель высокоорганизованного боя с полной и незапаздывающей информацией о состоянии противника и мгновенным учетом этой информации.

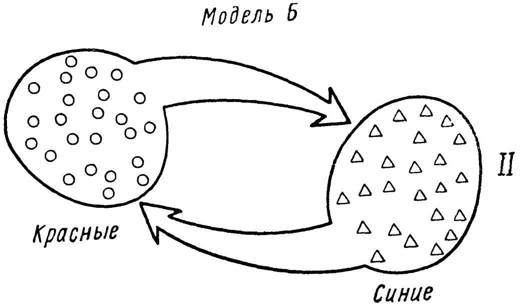


Рис. 62.1.

В данном параграфе мы рассмотрим противоположный крайний случай плохо организованного боя, где информация о состоянии противника не поступает и перенос огня не производится. Назовем такую модель боя «моделью **Б**».

Рассмотрим снова две группировки: I (Красные) и II (Синие), состоящие соответственно из N_1 и N_2 боевых единиц (рис. 62.1).

Примем следующие допущения, в ряде пунктов отличающиеся от допущений § 60.

1. Каждая боевая единица любой стороны осуществляет пуассоновский поток выстрелов.

2. Огонь каждой стороны распределяется статистически равномерно по всем боевым единицам противника, т. е. среднее число выстрелов, которым подвергается единица за время Δt, для всех единиц одно и то же; каждый успешный выстрел может поразить не более одной боевой единицы.

3. Информация о поражении целей не поступает, и перераспределения огня не производится.

4. Время полета снаряда (летательного аппарата) до цели пренебрежимо мало.

5. Суммарная боевая мощь каждой группировки зависит не от фактического числа сохранившихся единиц, а от его среднего значения.

Напишем дифференциальные уравнения для средних численностей m_1 и m_2, сохранившихся к моменту t единиц.

Обозначим Λ_1 плотность потока успешных выстрелов одной боевой единицы Красных, Λ_2 — Синих.

Определим Δm_1 — приращение числа сохранившихся боевых единиц Красных за время Δt. Оно равно (с обратным знаком) числу успешных выстрелов Синих, но не всех выстрелов, а только тех, которые пришлись на еще не пораженные единицы Красных. Вероятность того, что успешный выстрел Синих придется на непораженную боевую единицу Красных, равна $\frac{m_1}{N_1}$. Следовательно,

$$\Delta m_1 = -\Lambda_2 \Delta t m_2 \frac{m_1}{N_1},$$

откуда, деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$\frac{dm_1}{dt} = -\frac{\Lambda_2}{N_1} m_2 m_1.$$

Рассуждая аналогично для m_2, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\Lambda_2 \frac{m_1}{N_1} m_2, \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\Lambda_1 \frac{m_2}{N_2} m_1. \end{aligned}\right\} \tag{62.1}$$

Уравнения (62.1) должны интегрироваться при начальных условиях: при $t=0$, $m_1=N_1$, $m_2=N_2$.

Как видно, уравнения (62.1) отличаются от аналогичных уравнений (60.1); они уже не являются линейными. Этим уравнениям можно придать несколько более простой вид, если разделить их на $N_1 \cdot N_2$ и перейти к относительным численностям:

$$\mu_1 = \frac{m_1}{N_1}, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{N_2}.$$

Получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= -u_2 \mu_1 \mu_2, \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= -u_1 \mu_1 \mu_2, \end{aligned}\right\} \tag{62.2}$$

при начальных условиях $t=0$, $\mu_1=\mu_2=1$, где параметры

$$u_1 = \frac{\Lambda_1 N_1}{N_2}, \quad u_2 = \frac{\Lambda_2 N_2}{N_1}$$

имеют прежний смысл: доля боевых единиц противника, поражаемая в единицу времени всеми силами данной группировки в ее первоначальном составе.

В отличие от уравнений Ланчестера (60.2), (60.6) будем называть уравнения динамики боя (62.1), (62.2) **уравнениями модели Б.**

Как и уравнения Ланчестера, уравнения модели **Б** при $u_1=\text{const}$, $u_2=\text{const}$ интегрируются в конечном виде.

Не производя промежуточных выкладок, приведем сразу решения уравнений (62.2):

$$\left.\begin{aligned}\mu_1&=\frac{u_2-u_1}{u_2 e^{(u_2-u_1)t}-u_1},\\ \mu_2&=\frac{u_1-u_2}{u_1 e^{(u_1-u_2)t}-u_2}.\end{aligned}\right\}\tag{62.3}$$

В правые части формул (62.3) входят два параметра: u_1 и u_2. Однако аналогично тому, как мы делали в случае модели **А**, можно перейти к «приведенному времени»

$$t^*=\frac{u_1+u_2}{2}t$$

и ввести один параметр, характеризующий преимущество одной стороны над другой:

$$\beta=\frac{u_1-u_2}{u_1+u_2}\ ^{1)}.$$

С учетом этих обозначений формулы (62.3) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\mu_1&=\frac{2\beta}{(1+\beta)-(1-\beta)e^{-2\beta t^*}},\\ \mu_2&=\frac{2\beta}{(1+\beta)e^{2\beta t^*}-(1-\beta)}.\end{aligned}\right\}\tag{62.4}$$

Модель боя **Б** (без переноса огня) по сравнению с моделью **А** (с переносом огня) отличается более затяжным, «вялым» развитием; преимущество одной стороны над другой выражено более слабо; убывание доли сохранившихся сил идет медленнее.

Пример. Сравнить на отрезке времени 4 *мин* развитие боя, рассмотренного в примере § 60, для условий модели **А** [формулы (60.7)] и модели **Б** [формулы (62.3)].

Решение. Из условий примера § 60 берем

$$u_1=0{,}28,\quad u_2=0{,}125.$$

---

1) В случае, если $u_2>u_1$, «преимущество» рассматривается для Синих и равно $\beta=\dfrac{u_2-u_1}{u_1+u_2}$.

Вычисляя μ_1 и μ_2 по формулам (60.7) (модель **А**) и (64.3) (модель **Б**), получаем следующую таблицу.

Таблица 1

Модель	Средняя доля сохранившихся единиц	0	1	2	3	4
А	μ_1	1	0,891	0,813	0,161	0,739
	μ_2	1	0,736	0,497	0,277	0,069
Б	μ_1	1	0,895	0,825	0,771	0,731
	μ_2	1	0,768	0,603	0,483	0,393

Зависимость величин μ_1 и μ_2 от t представлена графически на рис. 62.2.

Кривые, соответствующие модели **А**, даны сплошными линиями, модели **Б** — пунктиром. Из графика видно, что в условиях модели **Б** (отсутствие переноса

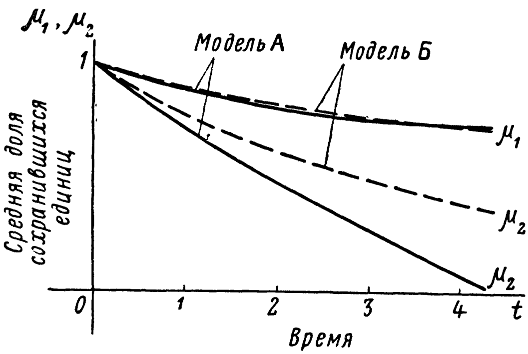


Рис. 62.2.

огня) течение боя становится более затяжным, а преимущество одной стороны над другой — менее ярко выраженным.

При написании уравнений модели **Б**, как и в случае модели **А**, могут быть учтены такие факторы, как наличие упреждающего удара, темп мобилизации сил, ввод резервов, ограниченность боезапаса и т. п.

В заключение заметим, что обе модели **А** и **Б** могут быть истолкованы не в терминах «боевых единиц», а в терминах «площадей». Действительно, если предположить, что силы противников размещены на каких-то «плацдармах» I и II и пораженная площадь каждого плацдарма пропорциональна числу пораженных боевых единиц, то уравнения, полностью совпадающие с уравнениями (60.6) (модель **А**) и уравнениями (62.2) (модель **Б**), будут описывать уже не долю сохранившихся единиц, а *долю непораженной площади* плацдармов.

§ 63. УЧЕТ ПОРАЖАЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ БОЕВЫХ СРЕДСТВ СРАЗУ ПО НЕСКОЛЬКИМ ЕДИНИЦАМ

При выводе уравнений для обеих моделей (**А** и **Б**) мы исходили из предположения, что выстрел, направленный по одной из боевых единиц, может поразить только эту боевую единицу и не может поразить других.

Такое допущение справедливо только для снарядов малой мощности или для весьма рассредоточенных целей.

Не представляет труда приближенно учесть поражающее действие боеприпасов не только по данной боевой единице, но и по соседним.

Введем такую «поправку на мощность действия» сначала в модели **А**. Предположим, что прицеливание осуществляется по вполне определенной боевой единице, и при попадании в нее происходит поражение не только данной единицы, но и нескольких соседних, в пределах радиуса поражения $R_п$ (рис. 63.1). Оценим среднее число таких «соседних» единиц, помещая центр круга в каждую из боевых единиц, подсчитывая число соседних и осредняя его по всей группировке. Обозначим k_1 среднее число соседних единиц для Красных; k_2 — для Синих.

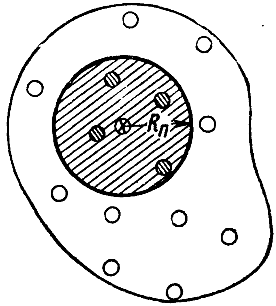


Рис. 63.1.

Аналогично тому, как мы рассуждали в § 60, подсчитаем среднюю убыль числа единиц Красных в единицу времени. Эта убыль Δm состоит из двух слагаемых:

1) среднее число боевых единиц, пораженных непосредственно стрельбой по ним самим;

2) среднее число соседних боевых единиц, пораженных за счет большого радиуса действия снаряда.

Первое число, как и ранее, равно $-\Lambda_2 m_2 \Delta t$. Второе число можно рассчитать так: взять среднее число соседних единиц, поражаемых одним выстрелом k_1, умножить его на число выстрелов $\Lambda_2 m_2 \Delta t$ и на вероятность $\frac{m_1}{N_1}$ того, что соседняя единица не поражена ранее; получим

$$-k_1 \Lambda_2 m_2 \frac{m_1}{N_1} \Delta t.$$

Следовательно,

$$\Delta m_1 = -\Lambda_2 m_2 \Delta t \left(1 + k_1 \frac{m_1}{N_1}\right),$$

или, деля на Δt и переходя к пределу,

$$\frac{dm_1}{dt} = -\Lambda_2 m_2 \left(1 + k_1 \frac{m_1}{N_1}\right) \tag{63.1}$$

и аналогично $$\frac{dm_2}{dt} = -\Lambda_1 m_1 \left(1 + k_2 \frac{m_2}{N_2}\right). \tag{63.2}$$

Переходя в уравнениях (63.1) и (63.2) к переменным

$$\mu_1 = \frac{m_1}{N_1}, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{N_2},$$

получаем
$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= -u_2\mu_2 - \tilde{u}_2\mu_1\mu_2, \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= -u_1\mu_1 - \tilde{u}_1\mu_1\mu_2, \end{aligned}\right\} \tag{63.3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{\Lambda_1 N_1}{N_2}, \\ u_2 &= \frac{\Lambda_2 N_2}{N_1} \end{aligned}\right\}$$

— ранее введенные характеристики интенсивности боевого воздействия Красных на Синих и Синих на Красных за счет поражения только самих обстреливаемых единиц;

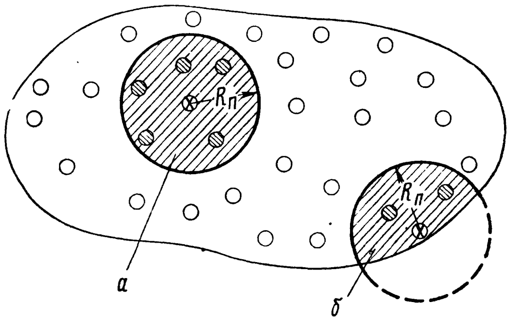


Рис. 63.2.

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \Lambda_1 k_2 \frac{N_1}{N_2}, \\ \tilde{u}_2 &= \Lambda_2 k_1 \frac{N_2}{N_1} \end{aligned}\right\}$$

— характеристики интенсивности боевого воздействия за счет поражения соседних боевых единиц зарядом большой мощности.

Система уравнений (63.3) может быть проинтегрирована любым численным способом вручную или на машине.

Покажем, как может быть определено среднее число пораженных соседних единиц.

Пусть боевые единицы Красных расположены, как показано на рис. 63.2. Опишем вокруг каждой единицы круг радиуса $R_п$, где $R_п$ — радиус поражающего действия снаряда для боевой единицы Синих. Перемещая центр круга, мы получим то или другое число попавших в него соседних боевых единиц. Например, для положения *а* это число равно пяти, для положения *б* — двум. Осредняя полученные значения по всем возможным положениям центра круга, получаем величину k_1. В случае, если точные положения единиц неизвестны, а они расположены на плоскости статистически равномерно в пределах некоторого плацдарма с площадью S_I, можно полагать среднее число пораженных соседних единиц k_1 пропорциональным площади, накрытой кругом, т. е. равным средней доле площади плацдарма, накрытой кругом, умноженной на N_1-1.

Аналогично тому, как были выведены уравнения (63.3) для условий модели **А** (строго прицельная стрельба с переносом огня), можно вывести соответствующие уравнения и для условий модели **Б** (стрельба без переноса огня или по всей группировке, как единому целому).

Предположим, что успешные выстрелы Синих случайным образом распределяются по боевым единицам Красных, причем при поражении одной боевой единицы поражаются и соседние в среднем числе k_1; всего одним успешным выстрелом Синих поражается k_1+1 боевых единиц Красных, если они ранее не были поражены. Чтобы учесть последнее обстоятельство и получить среднее число боевых единиц Красных, поражаемых одним успешным выстрелом Синих, нужно умножить k_1+1 на $\frac{m_1}{N_1}$ — долю сохранившихся к моменту t непораженных боевых единиц Красных. Аналогично (63.3) получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= -\tilde{u}_2\mu_1\mu_2, \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= -\tilde{u}_1\mu_1\mu_2, \end{aligned}\right\} \qquad (63.4)$$

где

$$\tilde{u}_1 = \Lambda_1(k_2+1)\frac{N_1}{N_2}$$

— средняя доля боевых единиц Синих, поражаемая всеми боевыми единицами Красных в единицу времени, считая как самое обстреливаемую единицу, так и соседние;

$$\tilde{u}_2 = \Lambda_2(k_1+1)\frac{N_2}{N_1}$$

— аналогичная характеристика для Синих.

Уравнения (63.4) по форме полностью совпадают с уравнениями модели **Б** (62.2), разница заключается только в смысле коэффициентов $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$. В уравнениях (63.4) эти коэффициенты вычисляются с учетом поражающего действия боеприпасов не только по обстреливаемой боевой единице, но и по соседним.

Заметим, что при истолковании модели боя **Б** не в терминах «боевых единиц», а в терминах «площадей» уравнения (63.4) сохраняют силу, а параметры $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ получают смысл *средней доли площади* плацдарма противника, поражаемой всеми средствами данного плацдарма в единицу времени.

Пример. Силы Красных и Синих размещены на двух плацдармах площадью $S_1=200\times200$ *км²* и $S_2=100\times100$ *км²*. Красные располагают десятью стартовыми позициями баллистических ракет и двумя аэродромами. Каждая стартовая позиция способна выпускать по плацдарму Синих в среднем две ракеты в сутки; каждая ракета достигает плацдарма Синих S_2 с вероятностью

$p_1^{(р)}=0{,}8$; каждая достигшая плацдарма S_2 ракета причиняет разрушения, достаточные для поражения всех боевых средств, на средней площади $S_1^{(р)}=100$ *км*² плацдарма S_2. Каждый аэродром Красных способен послать по плацдарму S_2 двадцать бомбардировщиков в сутки; каждый бомбардировщик достигает плацдарма S_2 с вероятностью $p_1^{(б)}=0{,}6$; достигший плацдарма бомбардировщик причиняет разрушения на средней площади $S_1^{(б)}=50$ *км*².

Синие располагают пятью стартовыми позициями баллистических ракет и одним аэродромом. Средняя скорострельность стартовой позиции — три ракеты в сутки; каждая ракета достигает плацдарма Красных S_1 с вероятностью $p_2^{(р)}=0{,}9$ и причиняет разрушения на площади $S_2^{(р)}=150$ *км*². Аэродром может послать по плацдарму S_1 25 бомбардировщиков в сутки, каждый бомбардировщик достигает плацдарма S_1 с вероятностью $p_2^{(б)}=0{,}8$ и, сбросив бомбы, причиняет разрушения на площади $S_2^{(б)}=100$ *км*². Требуется описать количественно динамику боя, принимая схему модели **Б**. Предсказать, через какой срок, ориентировочно, побежденная сторона будет располагать только двадцатью процентами своих первоначальных сил.

Решение. Определяем характеристику интенсивности воздействия Красных по Синим, т. е. среднюю долю площади плацдарма Синих $\tilde{u}_1$, разрушаемую в единицу времени всеми силами Красных. Одна ракета наносит средний относительный ущерб, равный

$$p_1^{(р)}\frac{S_1^{(р)}}{S_2}=0{,}8\,\frac{100}{10000}=0{,}008.$$

Каждая стартовая позиция Красных в сутки наносит ущерб

$$2\cdot 0{,}8\cdot 10^{-2}=0{,}016,$$

а десять стартовых позиций

$$10\cdot 0{,}016=0{,}16.$$

Каждый бомбардировщик Красных наносит ущерб

$$p_1^{(б)}\frac{S_1^{(б)}}{S_2}=0{,}6\,\frac{50}{10000}=0{,}003,$$

а два аэродрома в течение суток наносят ущерб

$$2\cdot 20\cdot 0{,}003=0{,}12.$$

Суммарный относительный ущерб, наносимый за сутки Красными Синим, равен

$$\tilde{u}_1=0{,}16+0{,}12=0{,}28.$$

Рассуждая аналогично для Синих, находим

$$\tilde{u}_2=0{,}1006.$$

Подставляя $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ вместо u_1 и u_2 в формулы (62.3), получаем

$$\mu_1=\frac{-0{,}1794}{0{,}1006e^{-0{,}1794t}-0{,}28},$$

$$\mu_2=\frac{0{,}1794}{0{,}28e^{0{,}1794t}-0{,}1006}.$$

Вычисляя значения μ_1 и μ_2 в зависимости от t, получаем следующую таблицу.

Таблица 2

Время t (сутки)	Средняя доля сохранившихся единиц	
	μ_1	μ_2
0	1	1
4	0,778	0,380
8	0,701	0,167
12	0,671	0,077

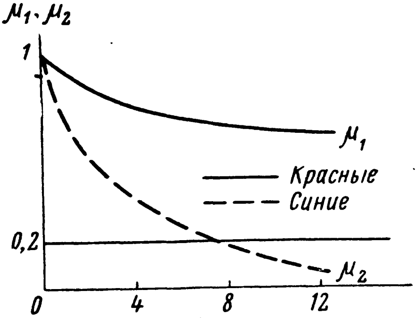


Рис. 63.3.

Нанося полученные значения на график (рис. 63.3), получаем кривые, характеризующие динамику боевых действий. Красные имеют над Синими заметное преимущество.

По кривым рис. 63.3 можно приближенно установить, что Синие сохранят только 20% своих сил ориентировочно через 7 суток с момента начала боя; к этому моменту Красные сохранят около 70% своих сил.

§ 64. МЕТОД ДИНАМИКИ СРЕДНИХ

В предыдущих параграфах были выведены дифференциальные уравнения, с помощью которых можно приближенно описать динамику развития боя между достаточно многочисленными группами. Метод, с помощью которого выведены эти уравнения, так называемый «метод динамики средних», может быть обобщен и распространен на гораздо более широкий класс процессов.

Рассмотрим некоторую систему (или группу) S, состоящую из большого числа N однородных единиц (приборов, самолетов, радиостанций и т. д.). Предположим, что каждая из единиц может с течением времени случайным образом менять свое состояние (например, переходить из категории действующих в категорию пораженных; из категории исправных — в категорию неисправных, ремонтирующихся, а из последней — снова в категорию исправных, и т. д.).

Обозначим A, B, C ... различные состояния, в которых может находиться отдельная единица (элемент системы). Для наглядности можно изобразить схему возможных состояний графически (в виде прямоугольников) и стрелками показать возможные переходы из состояния в состояние. Проиллюстрируем это на нескольких примерах.

1. Система S представляет собой группу самолетов, совершающих налет на территорию противника и подвергающихся воздействию со стороны средств ПВО. В каждый момент времени t

каждая из единиц (самолетов), входящих в систему, может находиться в одном из трех состояний:

A — самолет не поврежден и продолжает выполнение боевого задания;

B — самолет сбит;

C — самолет получил повреждения и вынужден возвращаться на свою базу.

Схема возможных состояний единицы дана на рис. 64.1. Стрелками показаны возможные переходы из состояния в состояние. Стрелка, направленная из C в B, показывает, что самолет, возвращающийся на свою базу, тоже может быть сбит огнем средств ПВО.

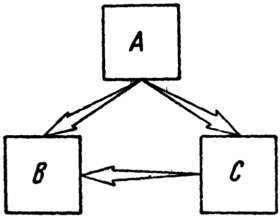


Рис. 64.1.

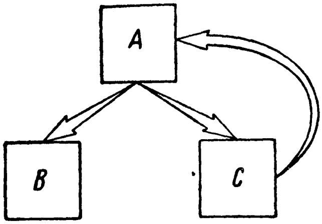


Рис. 64.2.

2. Техническое устройство состоит из большого числа элементов (узлов), которые с течением времени могут случайным образом выходить из строя — окончательно или с возможностью ремонта. Каждый элемент в момент времени t может быть в одном из трех состояний:

A — элемент исправен;

B — элемент вышел из строя окончательно;

C — элемент неисправен и ремонтируется.

Схема возможных состояний дана на рис. 64.2. Стрелка, идущая из C в A, показывает возможность восстановления элемента (возвращения из категории ремонтируемых в категорию исправных).

3. Условия те же, что в предыдущем примере, с той разницей, что элементы могут ремонтироваться не более одного раза; если после ремонта элемент выйдет из строя вторично, его выбрасывают (переводят в категорию окончательно негодных).

Возможные состояния элемента:

A — исправен, не ремонтировался;

B — окончательно негоден;

C — неисправен, ремонтируется;

D — исправен после ремонта.

Схема возможных состояний показана на рис. 64.3.

4. На некоторой территории размещены радиостанции, каждая из которых может быть обнаружена противником. После обнаружения станция может быть или обстреляна противником, или под-

вергнута действию помех. Обстрелянная станция может быть поражена или не поражена. Если станция подвергнута действию помех, то она на некоторое время «забивается» ими, после чего возвращается в категорию действующих, но не обнаруженных.

Возможные состояния радиостанции:

A — исправна, не обнаружена;

B — обнаружена, обстреливается, но еще не поражена;

C — обнаружена, обстреляна и поражена;

D — обнаружена, забита помехами.

Схема возможных состояний дана на рис. 64.4.

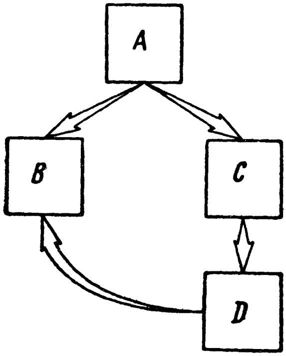


Рис. 64.3.

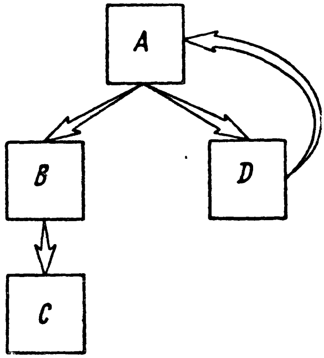


Рис. 64.4.

Рассмотрим теперь задачу в общем виде.

Пусть имеется некоторая система S, состоящая из большого числа N однородных единиц, каждая из которых в любой момент может находиться в одном из состояний $A, B, C, \ldots$

Поставим задачу: для каждого момента t определить среднее число единиц, находящихся в каждом состоянии.

Обозначим эти средние числа (средние численности состояний) $A(t), B(t), C(t), \ldots$

Исследовать поведение функций $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ ... с течением времени — это значит исследовать «динамику средних» для всех состояний системы.

«Метод динамики средних» дает возможность определить функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ ... с помощью решения системы дифференциальных уравнений.

Для того чтобы можно было применять этот метод, нужно принять одно допущение, а именно, что переход каждой единицы из одного состояния в другое происходит под влиянием некоторого пуассоновского потока событий (поток выстрелов; поток неисправностей и т. д.). Если задать плотности всех этих потоков, то можно сразу написать систему дифференциальных уравнений для средних численностей состояний.

Рассмотрим для конкретности систему S, приведенную в примере 1 (группа из N самолетов, преодолевающая систему ПВО). Повторим снова схему возможных состояний, приведенную на рис. 64.1, но проставим против каждой стрелки плотность пуассоновского потока событий, переводящего единицу (самолет) по данной стрелке из состояния в состояние (рис. 64.5).

Предположим, что каждый самолет — как летящий на боевое задание, так и возвращающийся на свою базу — подвергается некоторому пуассоновскому потоку обобщенных выстрелов с плотностью в первом случае λ_1, во втором λ_2.

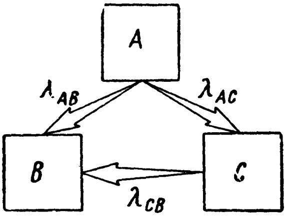


Рис. 64.5.

Допустим, что каждый выстрел, направленный по неповрежденному самолету, с вероятностью p_1 сбивает его, а с вероятностью p_1' наносит ему повреждения, вынуждающие его вернуться на базу. Каждый выстрел, направленный по поврежденному самолету, сбивает его с вероятностью p_2.

Тогда плотность потока событий, переводящего самолет из состояния A в B, будет

$$\lambda_{AB} = p_1\lambda_1;$$

из A в C

$$\lambda_{AC} = p_1'\lambda_1;$$

из C в B

$$\lambda_{CB} = p_2\lambda_2.$$

Напишем теперь дифференциальные уравнения для средних численностей состояний: $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$.

Для сокращения записи будем обозначать их просто A, B, C, опуская аргумент t.

Рассмотрим величину A — среднее число самолетов, неповрежденных к моменту t, и определим, насколько она изменится за элементарный промежуток времени Δt. Это изменение составлено из следующих двух частей:

1) уменьшение, связанное с тем, что за время Δt какое-то число самолетов перейдет из состояния A в B (будет поражено);

2) уменьшение, связанное с тем, что за это же время какое-то число самолетов перейдет из A в C (получит повреждения).

Определим, сколько самолетов в среднем будет поражено за время Δt. Один самолет за это время будет поражен с вероятностью $\lambda_{AB}\Delta t$. Среднее значение (математическое ожидание) числа пораженных самолетов за это время будет равно среднему их числу A, умноженному на $\lambda_{AB}\Delta t$. Следовательно, за время Δt из состояния A в B перейдет в среднем $A\lambda_{AB}\Delta t$ самолетов.

Аналогично из A в C перейдет $A\lambda_{AC}\Delta t$ самолетов.

Общее приращение величины A за время Δt будет равно

$$\Delta A = -A(\lambda_{AB} + \lambda_{AC})\,\Delta t,$$

откуда, деля на Δt и переходя к пределу, получаем для A дифференциальное уравнение

$$\frac{dA}{dt} = -A(\lambda_{AB} + \lambda_{AC}).$$

Рассуждая аналогично, составим уравнение для B — средней численности пораженных к моменту t самолетов. С течением времени величина B будет только возрастать. Среднее число самолетов, переходящих за время Δt из A в B, будет равно

$$A \cdot \lambda_{AB}\Delta t.$$

За это же время из C в B перейдет в среднем $C\lambda_{CB}\Delta t$ самолетов.

Отсюда

$$\Delta B = A\lambda_{AB}\Delta t + C\lambda_{CB}\Delta t$$

и

$$\frac{dB}{dt} = A\lambda_{AB} + C\lambda_{CB}.$$

Совершенно аналогично выведем уравнение для C — средней численности состояния C. Оно будет пополняться за счет самолетов, переходящих из A в C, и убывать за счет самолетов, переходящих из C в B; в правой части уравнения для C будет один положительный член и один отрицательный:

$$\frac{dC}{dt} = A\lambda_{AC} - C\lambda_{CB}.$$

Таким образом, динамика средних численностей состояний будет выражаться системой дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -A(\lambda_{AB} + \lambda_{AC}), \\ \frac{dB}{dt} &= A\lambda_{AB} + C\lambda_{CB}, \\ \frac{dC}{dt} &= A\lambda_{AC} - C\lambda_{CB}. \end{aligned}\right\} \qquad (64.1)$$

Эта система должна интегрироваться при начальных условиях: $t=0$, $A=N$, $B=C=0$ [1].

При постоянных плотностях λ_{AB}, λ_{AC} и λ_{CB} систему (64.1) можно проинтегрировать в конечном виде. Однако мы не будем приводить этого решения, так как нас интересует общий принцип составления подобного рода уравнений. Заметим, что, располагая схемой возможных состояний, можно написать соответствующую систему дифференциальных уравнений совсем без размышлений, если пользоваться следующим мнемоническим правилом.

---

[1] В начальный момент все самолеты исправны.

В уравнении для средней численности каждого состояния слева стоит производная этой численности, а справа — положительные и отрицательные члены, число которых равно числу стрелок, ведущих в данное состояние и из него. Если стрелка ведет **в** данное состояние, член берется со знаком плюс (единицы прибывают в состояние); если стрелка ведет **из** данного состояния, то — со знаком минус (единицы убывают из него). Каждый член равен средней численности состояния, из которого идет стрелка, умноженной на плотность потока событий, переводящего единицу по данной стрелке.

В качестве примера применения данного правила напишем уравнения динамики средних для условий примера 4 (N радиолокационных станций), схема которого дана на рис. 64.4.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -A\lambda_{AB} - A\lambda_{AD} + D\lambda_{DA}, \\ \frac{dB}{dt} &= A\lambda_{AB} - B\lambda_{BC}, \\ \frac{dC}{dt} &= B\lambda_{BC}, \\ \frac{dD}{dt} &= A\lambda_{AD} - D\lambda_{DA}. \end{aligned}\right\} \qquad (64.2)$$

Покажем, как в данном случае могут быть определены плотности потоков событий λ_{AB}, λ_{BC}, λ_{AD} и λ_{DA}, переводящих станцию из одного состояния в другое. При этом нам удобно будет в некоторых случаях пользоваться таким правилом: плотность потока событий, переводящего единицу из какого-либо состояния в другие, есть величина, обратная среднему времени пребывания в этом состоянии. Если из данного состояния есть переход не в одно, а в несколько других, то эта плотность разделяется пропорционально вероятностям переходов. Таким образом, если схема возможных состояний в каком-либо звене ветвится, необходимо указать, с какой вероятностью осуществляется переход по одной стрелке, и с какой — по другой.

Например, для нашей ветвящейся схемы (рис. 64.4) должны быть указаны следующие вероятности:

P_{AB} — вероятность того, что обнаруженная единица будет обстреляна;

$P_{AD} = 1 - P_{AB}$ — вероятность того, что против нее будут применены помехи. Тогда

$$\lambda_{AB} = \frac{1}{\bar{t}_н} P_{AB},$$

где $\bar{t}_н$ — среднее время пребывания станции в необнаруженном состоянии;

$$\lambda_{AD} = \frac{1}{\bar{t}_н} P_{AD}.$$

λ_{BC} представляет собой не что иное, как плотность потока успешных выстрелов по одной радиостанции, если она обнаружена и обстреливается; плотность λ_{DA} равна:

$$\lambda_{DA} = \frac{1}{\bar{t}_з},$$

где $\bar{t}_з$ — среднее время, в течение которого остается «забитой» станция, против которой применены помехи.

В примерах, рассмотренных выше, плотности потоков событий, переводящих единицы из состояния в состояние, были постоянны и *не зависели* от численностей самих этих состояний.

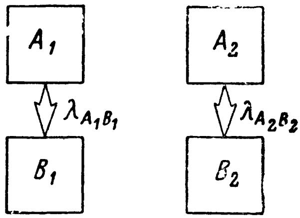


Рис. 64.6.

В других случаях эти плотности могут *зависеть* от численностей состояний. Например, среднее время, в течение которого единица ожидает ремонта, может зависеть от того, *сколько всего единиц* нуждаются в ремонте. Это обстоятельство можно учесть, если допустить, что плотности потоков событий, переводящих единицы из состояния в состояние, *зависят не от фактического числа единиц в том или другом состоянии, а от среднего.*

В качестве примера рассмотрим уже знакомую нам модель **А** двустороннего боя и выведем уже известные нам уравнения Ланчестера 2-го рода, пользуясь общей схемой, изложенной в данном параграфе.

В бою участвуют две стороны: Красные и Синие; каждая боевая единица Красных может быть в двух состояниях:

A_1 — не поражена;

B_1 — поражена.

Аналогично боевая единица Синих может быть в таких же состояниях:

A_2 — не поражена;

B_2 — поражена.

Составим схему состояний (рис. 64.6).

Дифференциальные уравнения для средних численностей состояний A_1, A_2 (непораженные единицы) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -A_1\lambda_{A_1B_1}, \\ \frac{dA_2}{dt} &= -A_2\lambda_{A_2B_2} \end{aligned}\right\} \qquad (64.3)$$

с начальными условиями: при $t=0$, $A_1=N_1$, $A_2=N_2$.

Заметим, что уравнений для B_1 и B_2 можно и не писать, так как для любого момента времени

$$A_1 + B_1 = N_1, \quad A_2 + B_2 = N_2,$$

следовательно, достаточно решить систему (64.3).

Посмотрим, чему будут равны плотности $\lambda_{A_1B_1}$ и $\lambda_{A_2B_2}$.

Очевидно, $\lambda_{A_1B_1}$ есть не что иное, как плотность потока успешных выстрелов, приходящаяся на одну обстреливаемую боевую единицу Красных. Она вычисляется следующим образом. Каждая боевая единица Синих дает в единицу времени в среднем Λ_2 успешных выстрелов. Умножим это число на среднее число A_2 непораженных боевых единиц Синих. Эти $A_2\Lambda_2$ выстрелов распределяются равномерно между A_1 боевыми единицами Красных; на каждую придется в среднем $\frac{A_2\Lambda_2}{A_1}$ успешных выстрелов в единицу времени. Следовательно,

$$\lambda_{A_1B_1} = \frac{A_2\Lambda_2}{A_1}$$

и аналогично

$$\lambda_{A_2B_2} = \frac{A_1\Lambda_1}{\Lambda_2}.$$

Подставляя эти выражения в (64.3), получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -\Lambda_2 A_2, \\ \frac{dA_2}{dt} &= -\Lambda_1 A_1. \end{aligned}\right\} \qquad (64.4)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (60.2), видим, что они различаются только обозначениями. Таким образом, уравнения Ланчестера выведены нами из более общей схемы «динамики средних».

Заметим, что из уравнений (64.3) могут быть при других допущениях получены и уравнения модели **Б** (62.1). Действительно, если огонь всех сохранившихся боевых единиц не сосредоточивается только на непораженных единицах противника, а распределяется равномерно по всем единицам (как пораженным, так и непораженным), то

$$\lambda_{A_1B_1} = \frac{A_2\Lambda_2}{N_1}; \quad \lambda_{A_2B_2} = \frac{A_1\Lambda_1}{N_2}.$$

Подставляя эти выражения в (64.3), получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -\Lambda_2 \frac{A_1A_2}{N_1}, \\ \frac{dA_2}{dt} &= -\Lambda_1 \frac{A_1A_2}{N_2}, \end{aligned}\right\}$$

что только обозначениями отличается от уравнений (62.1).

Пользуясь схемой возможных состояний и методом «динамики средних», можно описывать дифференциальными уравнениями разнообразные модели боевых действий, различающиеся составом группировок и способом организации боевых действий. В частности, можно составлять модели, промежуточные между **А** и **Б**, накладывая определенные условия на точность и быстроту получения информации о противнике, на скорость прохождения команд по линиям управления и т. д.

С помощью уравнений «динамики средних» можно описывать не только боевые действия, но и самые разные процессы, такие, например, как работа аэродромного узла, группы ремонтных мастерских и т. п. Для этого достаточно перечислить возможные состояния каждой единицы, участвующей в процессе, составить схему возможных состояний и определить плотности потоков, переводящих единицу из состояния в состояние.

Полученная система уравнений лишь в редких случаях будет интегрироваться в конечном виде. Однако это не служит препятствием для получения решения, которое легко можно осуществить на машине непрерывного действия, а в случае, если к этому есть возможность, и на электронной цифровой вычислительной машине (ЭЦВМ).

ГЛАВА 10

МЕТОДЫ УЧЕТА НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

§ 65. ПРОБЛЕМА ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ

Полная оценка эффективности боевого применения современной военной техники не может быть произведена без учета надежности применяемых технических средств.

Под *надежностью* в широком смысле слова понимается способность технического устройства к бесперебойной (безотказной) работе в течение заданного промежутка времени в определенных условиях. Под условиями могут пониматься как внешние условия (температура, вибрации, загрузка устройства), так и внутренние (время предварительной службы элементов; срок, прошедший со времени профилактического осмотра и т. д.).

В настоящее время в связи с постоянно возрастающей сложностью технических устройств и широким внедрением автоматизации проблема надежности становится одной из узловых проблем техники. Особое значение приобретает она при боевом применении военной техники, когда своевременное устранение возникших неисправностей зачастую невозможно. Обеспечение надежной работы всех элементов оборудования, применяемых в бою, — задача первостепенной важности.

Борьба за надежность требует научного рассмотрения и количественного анализа явлений, связанных со случайными отказами технических устройств. За последние годы теория надежности превратилась в специальную науку, широко пользующуюся вероятностными методами исследования.

В теории надежности принято различать два типа отказов:

— внезапные

и

— постепенные.

Под внезапным отказом устройства разумеется полный выход его из строя, означающий невозможность применения и возникающий мгновенно в некоторый момент времени.

Примерами внезапных отказов могут служить:

— перегорание электро- или радиолампы;

— обрыв проводника, обеспечивающего связь между элементами устройства;

— пробой конденсатора и т. д.

Под постепенными разумеются отказы устройства, связанные с постепенным ухудшением («сползанием») его характеристик, возникающим в процессе работы устройства. Для устранения таких отказов требуется регулировка прибора.

Постепенные отказы можно условно рассматривать как внезапные, если условиться считать, что какие-то отклонения параметров устройства от номинальных значений являются уже недопустимыми: как только отклонения вышли за эти пределы, устройство считается «отказавшим».

В настоящей главе мы будем рассматривать только внезапные отказы.

Надежность технического устройства или, как мы будем говорить, системы зависит от состава образующих систему элементов («узлов»), от способа объединения элементов в систему и от характеристик каждого отдельного элемента.

Деление технических устройств на «системы» и образующие их «элементы» носит условный характер и зависит от постановки задачи. Одно и то же техническое устройство, например радиолокационный прицел истребителя, может рассматриваться и как «система», состоящая из отдельных элементов (радиоламп, конденсаторов, реле и т. п.), и как «элемент» более сложной системы — всего оборудования самолета. В свою очередь, самолет-истребитель является «элементом» системы средств ПВО. В дальнейшем мы будем называть «элементом» любой технический агрегат, не подлежащий дальнейшему расчленению, надежность которого исследуется как таковая. Соединяя такие «элементы» различными способами в «системы», мы будем решать вторичную задачу — определение надежности системы в целом по заданным надежностям составляющих ее элементов.

§ 66. НАДЕЖНОСТЬ ЭЛЕМЕНТА. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ. СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

Оценка надежности систем и элементов требует введения количественных характеристик. Рассмотрим здесь некоторые из этих характеристик. Для краткости будем определять их применительно к «элементу», однако те же определения будут относиться и к «системе».

Надежностью элемента (в узком смысле слова) называется вероятность того, что данный элемент в данных условиях будет работать безотказно в течение времени t. Эту вероятность будем обозначать $p(t)$ [1].

---

[1] Функция $p(t)$ называется иногда «законом надежности».

Ненадежностью элемента называется вероятность $q(t)$ того, что элемент откажет (выйдет из строя) в течение времени t. Очевидно,

$$q(t) = 1 - p(t). \tag{66.1}$$

Рассмотрим время безотказной работы элемента T как случайную величину. Очевидно, ненадежность $q(t)$, есть не

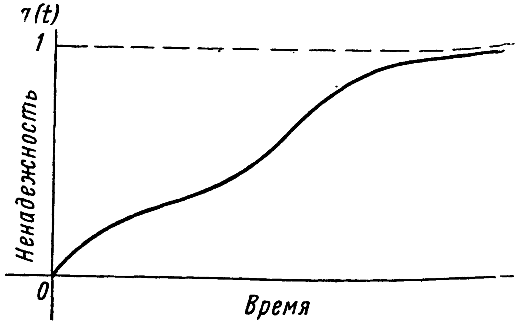


Рис. 66.1.

что иное, как функция распределения (интегральный закон распределения) $F(t)$ величины T:

$$q(t) = P(T < t) = F(t). \tag{66.2}$$

Отсюда

$$p(t) = 1 - F(t). \tag{66.3}$$

Ненадежность $q(t)$ обладает свойствами функции распределения неотрицательной случайной величины. Она (рис. 66.1):

— равна нулю при $t=0$;

— не убывает с возрастанием t;

— стремится к единице при $t \to \infty$.

Соответственно надежность $p(t)$ — невозрастающая функция, равная единице при $t=0$ и стремящаяся к нулю при $t \to \infty$ (рис. 66.2).

На практике часто вместо функции распределения $q(t) = F(t)$ пользуются ее производной:

$$f(t) = F'(t) = q'(t). \tag{66.4}$$

Функция $f(t)$ представляет собой плотность распределения (дифференциальный закон распределения) времени T безотказной работы элемента. Величина $f(t)\,dt$ — вероятность того, что время работы T примет значение в пределах от t до $t+dt$, т. е. того, что элемент, начавший работать в момент $t=0$, откажет на участке времени $(t,\ t+dt)$. В литературе по вопросам надежности характеристику $f(t)$ часто называют «плотностью отказов». Во избежание недоразумений, связанных с нечеткой терминологией, мы будем называть $f(t)$ более точно: плотностью распределения времени безотказной работы.

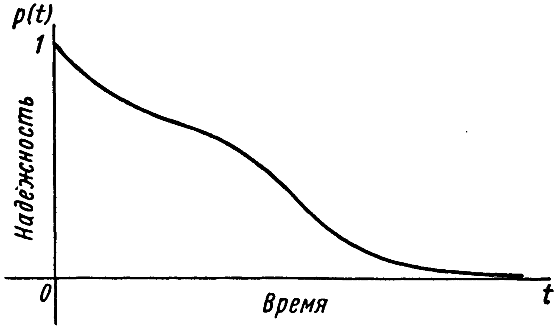


Рис. 66.2.

Чтобы приближенно определить $f(t)$ из опыта, нужно поступать следующим образом: в один и тот же момент $t=0$ ввести в действие большое число N однородных элементов и зарегистрировать время работы каждого из них до момента отказа T. Полученные данные обрабатывают обычными методами математической стати-

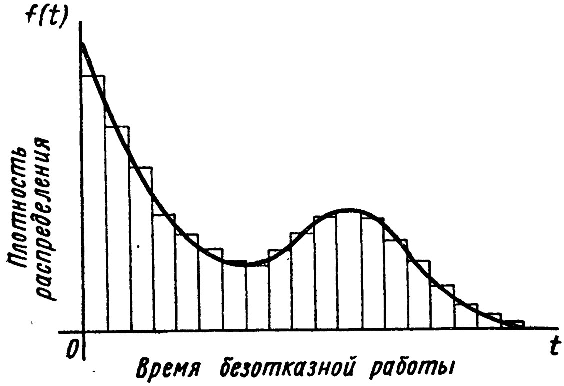


Рис. 66.3.

стики, т. е. строят гистограмму (рис. 66.3) и выравнивают ее какой-либо плавной кривой. Ордината гистограммы на каждом элементарном участке времени представляет собой не что иное, как среднее число отказов на единицу времени, приходящееся на один испытанный элемент. Тот же смысл можно приписать и функции $f(t)$.

Приближенно плотность $f(t)$ определяется по формуле

$$f(t) \approx \frac{\Delta n(t)}{N\Delta t}, \tag{66.5}$$

где $\Delta n(t)$ — число элементов, отказавших на элементарном участке времени;
N — общее число испытываемых элементов;
Δt — длина элементарного участка.

Пример. Было испытано 1000 ламп на длительность безотказной работы. Результаты опытов приведены в табл. 3.

Таблица 3

Длительность работы, *час* (от—до)	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—80	80—100	100—150	150—200
Число ламп	151	102	77	61	79	120	200	77	83	50

Найти приближенно плотность $f(t)$ для каждого участка времени, построить гистограмму и выровнять ее от руки плавной кривой.

Решение. На первом участке 0—10 *час* приближенно имеем

$$f(t) \approx \frac{151}{1000 \cdot 10} = 0{,}0151,$$

на втором

$$f(t) \approx \frac{102}{1000 \cdot 10} = 0{,}0102$$

и т. д. Значения $f(t)$ приведены в табл. 4.

Таблица 4

Длительность работы, *час* (от—до)	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—80	80—100	100—150	150—200
Плотность	0,0151	0,0102	0,0077	0,0061	0,0079	0,0120	0,0100	0,0038	0,0017	0,0010

Гистограмма и выравнивающая кривая $f(t)$ приведены на рис. 66.4.

В качестве характеристики надежности элемента часто применяется с р е д н е е в р е м я б е з о т к а з н о й р а б о т ы, т. е. математическое ожидание величины T:

$$\bar{t} = M[T] = \int_0^\infty t f(t)\, dt. \tag{66.6}$$

Величина $\bar{t}$ может быть выражена не через плотность распределения времени безотказной работы, а непосредственно через надежность $p(t)$.

Действительно,

$$\bar{t} = \int_0^\infty t f(t)\, dt = \int_0^\infty t q'(t)\, dt = -\int_0^\infty t p'(t)\, dt.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\bar{t} = -tp(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty p(t)\,dt. \tag{66.7}$$

Первый член в правой части выражения (66.7) равен нулю, так как для случайной величины, имеющей конечное математическое ожидание, разность $1 - F(t) = p(t)$ при $t \to \infty$ должна убывать быстрее, чем растет t.

Получим

$$\bar{t} = \int_0^\infty p(t)\,dt. \tag{66.8}$$

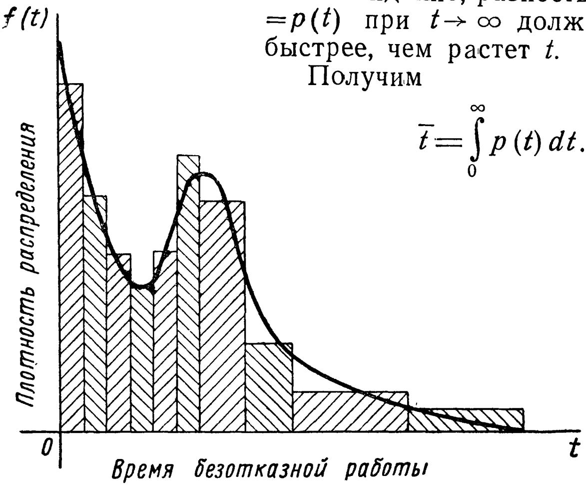


Рис. 66.4.

Геометрически это означает, что *среднее время безотказной работы элемента равно полной площади, ограниченной кривой надежности и осями координат* (рис. 66.5).

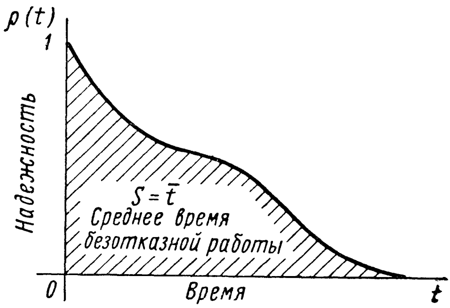


Рис. 66.5.

§ 67. ИНТЕНСИВНОСТЬ ОТКАЗОВ. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ЗАКОН НАДЕЖНОСТИ

Кроме плотности $f(t)$ в теории надежности широко применяется другая характеристика: так называемая «интенсивность» отказов. Интенсивностью (или «опасностью») отказов называется плотность распределения времени безотказной работы, деленная на надежность элемента:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)}. \tag{67.1}$$

Поясним физический смысл этой характеристики. Пусть одновременно исследуется N однородных элементов. Обозначим $n(t)$ число элементов, оставшихся исправными к моменту t, а $\Delta n(t)$ — число элементов, отказавших за элементарный промежуток времени $(t,\ t+\Delta t)$. На единицу времени придется среднее число отказов $\frac{\Delta n(t)}{\Delta t}$. Разделим эту величину не на общее число испытываемых элементов, как мы делали при определении $f(t)$, а на число исправных к моменту t элементов $n(t)$. Нетрудно убедиться, что при большом N это отношение будет приближенно равно интенсивности отказов $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) \approx \frac{\Delta n(t)}{n(t)\,\Delta t}. \qquad (67.2)$$

Действительно, при большом N

$$n(t) \approx N p(t),$$

$$\frac{\Delta n(t)}{n(t)\,\Delta t} \approx \frac{\Delta n(t)}{N\Delta t p(t)}.$$

Но $f(t) \approx \frac{\Delta n(t)}{N\Delta t}$, следовательно,

$$\frac{\Delta n(t)}{N\Delta t p(t)} \approx \frac{f(t)}{p(t)} = \lambda(t).$$

В теории надежности часто приближенную формулу (67.2) рассматривают как определение интенсивности отказов, т. е. определяют интенсивность как среднее число отказов в единицу времени, приходящееся на один исправно работающий элемент.

Характеристике $\lambda(t)$ можно дать еще одно толкование: величина $\lambda(t)dt$ есть не что иное, как условная вероятность отказа элемента на участке времени $(t,\ t+dt)$ при условии, что до момента t он работал безотказно.

Действительно, вероятность того, что элемент откажет на участке $(t,\ t+dt)$, равна $f(t)dt$. Это есть вероятность совмещения (произведения) двух событий:

A — элемент работал исправно до момента t;

B — элемент отказал на участке времени $(t,\ t+dt)$.

По теореме умножения вероятностей

$$f(t)\,dt = P(AB) = P(A)\,P(B/A).$$

Учитывая, что $P(A) = p(t)$, получаем

$$P(B/A) = \frac{f(t)\,dt}{p(t)} = \lambda(t)\,dt,$$

что и требовалось доказать.

Выведем выражение для надежности $p(t)$ через интенсивность отказов $\lambda(t)$. Учитывая, что $f(t)=-p'(t)$, запишем формулу (67.1) в виде

$$\lambda(t)=-\frac{p'(t)}{p(t)}=[\ln p(t)]'.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln p(t)=\int_0^t \lambda(t)\,dt,$$

откуда

$$p(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(t)\,dt} \qquad (67.3)$$

Для практики особенно важен частный случай, когда и н т е н с и в н о с т ь   о т к а з о в $\lambda(t)$ н а   з н а ч и т е л ь н о м   у ч а с т к е   в р е м е н и   о с т а е т с я   п о с т о я н н о й   и л и   п о ч т и   п о с т о я н н о й:

$$\lambda(t)=\mathrm{const}=\lambda.$$

Это означает, что вероятность элементу отказать на каком-либо элементарном участке времени не зависит или почти не зависит от того, сколько времени элемент работал до сих пор.

При $\lambda=\mathrm{const}$ формула (67.3) принимает вид

$$p(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}. \qquad (67.4)$$

Если надежность выражается в зависимости от времени формулой (67.4), то говорят, что э л е м е н т   и м е е т   э к с п о н е н ц и а л ь н ы й   з а к о н   н а д е ж н о с т и.

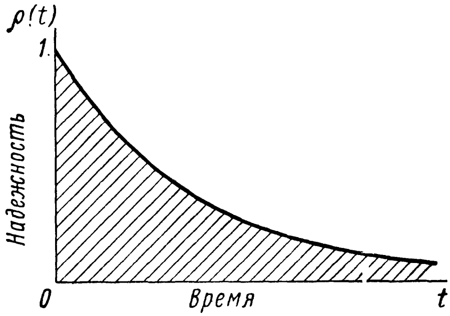


Рис. 67.1.

График экспоненциального закона приведен на рис. 67.1. Крутизна спада кривой надежности зависит от интенсивности отказов λ.

Найдем среднее время безотказной работы для экспоненциального закона надежности:

$$\bar{t}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом,

$$\bar{t}=\frac{1}{\lambda}, \qquad (67.5)$$

т. е. *при постоянной интенсивности отказов среднее время безотказной работы элемента равно единице, деленной на эту интенсивность*.

Отсюда вытекает способ приближенного определения интенсивности отказов: вычисляют среднее время $\bar{t}$ безотказной работы элемента и берут величину, обратную ему.

Пример 1. Надежность элемента $p(t)$ убывает со временем по линейному закону (рис. 67.2). Найти:

1) интенсивность отказов $\lambda(t)$;

2) среднее время безотказной работы элемента $\bar{t}$.

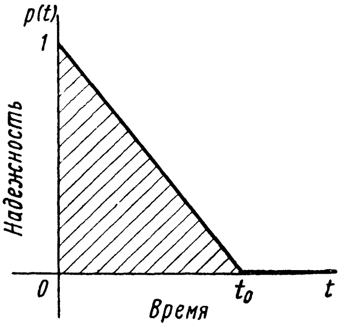


Рис. 67.2.

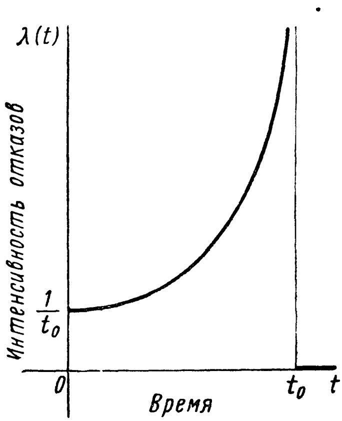


Рис. 67.3.

Решение. 1) По формуле (67.1) на участке $(0,\ t_0)$ имеем

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = -\frac{p'(t)}{p(t)}.$$

Согласно заданному виду закона надежности

$$p(t) = 1 - \frac{t}{t_0} \quad (0 < t < t_0),$$

$$p'(t) = -\frac{1}{t_0},$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{t_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)} = \frac{1}{t_0 - t}.$$

График функции $\lambda(t)$ показан на рис. 67.3. При $t = t_0$ $\lambda(t)$ стремится к бесконечности.

2) Среднее время безотказной работы элемента $\bar{t}$ равно площади, заключенной между кривой $p(t)$ и осью абсцисс (рис. 67.2):

$$\bar{t} = \frac{t_0}{2}.$$

Пример 2. Интенсивность отказов элемента $\lambda(t)$ меняется по закону, представленному графически на рис. 67.4. Построить закон надежности элемента $p(t)$.

Решение. На участке (0, 1)

$$\lambda(t) = 3 - 2t;$$

по формуле (69.3)

$$p(t) = e^{-\int\limits_0^t \lambda(t)\,dt} = e^{-(3t-t^2)}.$$

Вычислим $p(t)$ на участке $t>1$.

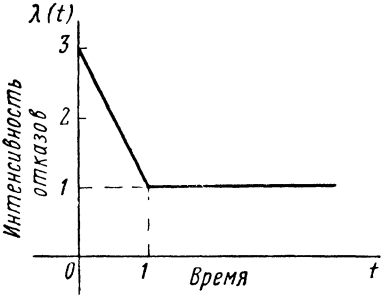


Рис. 67.4.

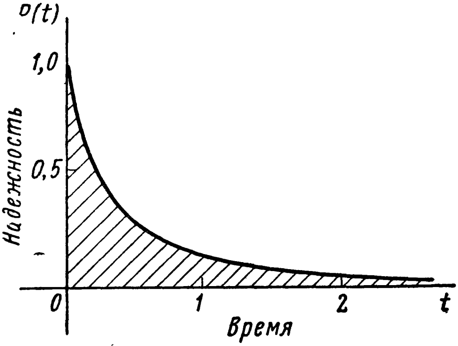


Рис. 67.5.

Имеем общую формулу

$$p(t) = e^{-\int\limits_0^t \lambda(t)\,dt},$$

в которой мы промежуток интегрирования разобьем на участки: от 0 до 1 и от 1 до t:

$$\int\limits_0^t \lambda(t)\,dt = \int\limits_0^1 \lambda(t)dt + \int\limits_1^t \lambda(t)\,dt = \int\limits_0^1 (3-2t)\,dt + \int\limits_1^t dt = 2 + t - 1 = 1 + t,$$

$$p(t) = e^{-(1+t)}.$$

График функции $p(t)$ (закон надежности) показан на рис. 67.5. Заштрихованная площадь изображает среднее время безотказной работы.

§ 68. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ ПО НАДЕЖНОСТЯМ ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ. НАДЕЖНОСТЬ НЕРЕЗЕРВИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ

В данном параграфе мы дадим представление о том, как определяется надежность системы, составленной из ряда элементов, характеристики надежности которых известны.

Надежность системы зависит от того, каким образом элементы объединены в систему и в какой мере исправная работа каждого элемента необходима для работы системы в целом. В ряде систем недостаточная надежность отдельных элементов повышается путем их дублирования (резервирования).

Наиболее простым случаем в расчетном отношении является *система без резервирования*. В такой системе отказ каждого из элементов равносилен отказу системы в целом. По аналогии с цепочкой последовательно включенных проводников, обрыв каждого из которых равносилен размыканию всей цепи, такое соединение элементов называется «последовательным».

Рассмотрим в некоторый момент t нерезервированную систему, состоящую из n «последовательно» соединенных элементов $Э_1, Э_2, \ldots, Э_n$ (рис. 68.1).

Выразим надежность системы через надежности отдельных элементов. Обозначим надежности элементов $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а надежность системы p (для простоты записи аргумент t опущен).

Для безотказной работы системы необходимо, чтобы каждый из элементов работал безотказно; значит, событие C — безотказная работа системы — есть произведение (совмещение) событий $Э_1$, $Э_2$, ..., $Э_n$, представляющих собой каждое безотказную работу соответствующего элемента:

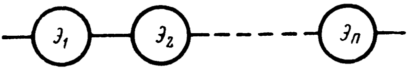


Рис. 68.1.

$$C = Э_1 Э_2 \ldots Э_n. \tag{68.1}$$

Если элементы выходят из строя независимо друг от друга, то вероятность события C вычисляется как произведение вероятностей событий $Э_1, Э_2, \ldots, Э_n$:

$$p = p_1 p_2 \ldots p_n \tag{68.2}$$

или, короче,

$$p = \prod_{i=1}^{n} p_i, \tag{68.3}$$

т. е. *надежность нерезервированной системы, элементы которой выходят из строя независимо друг от друга, равна произведению надежностей ее элементов.*

В частном случае, когда элементы системы обладают одинаковой надежностью p_1, формула (68.3) принимает вид

$$p = p_1^n. \tag{68.4}$$

Пример 1. Нерезервированная система состоит из 10 элементов, надежность каждого из которых равна $p_1 = 0{,}95$. Определить надежность системы.

Решение. По формуле (68.4) имеем

$$p = 0{,}95^{10} \approx 0{,}60.$$

Из примера видно, как быстро падает надежность нерезервированной системы при увеличении числа элементов. Очевидно, если число элементов системы велико, то для обеспечения хотя бы приемлемой надежности системы каждый элемент должен обладать весьма высокой надежностью.

Поставим задачу: какой надежностью p_1 должен обладать один элемент системы для того, чтобы нерезервированная система, составленная из n таких элементов, обладала заданной надежностью P?

Полагая в формуле (68.4) $p=P$, получаем

$$p_1=\sqrt[n]{P}. \tag{68.5}$$

Пример 2. Нерезервированная система состоит из 1000 элементов, одинаковых по надежности. Какой надежностью должен обладать каждый отдельный элемент для того, чтобы надежность системы была не ниже 0,9?

Решение. Из формулы (68.5) имеем

$$p_1=\sqrt[1000]{P}=\sqrt[1000]{0{,}9}\approx 0{,}9999.$$

Выразим интенсивность отказов системы $\lambda(t)$ через интенсивности отказов $\lambda_i(t)$ отдельных элементов. При независимых отказах элементов имеем:

$$p(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(t)\,dt},$$

$$p_i(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_i(t)\,dt}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (68.2) или (68.3), получаем

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(t)\,dt}=\mathrm{e}^{-\left\{\int_0^t \lambda_1(t)\,dt+\int_0^t \lambda_2(t)\,dt+\ldots+\int_0^t \lambda_n(t)\,dt\right\}}=$$

$$=\mathrm{e}^{-\int_0^t [\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\ldots+\lambda_n(t)]\,dt}$$

или, короче,

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(t)\,dt}=\mathrm{e}^{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\,dt},$$

откуда

$$\int_0^t \lambda(t)\,dt=\int_0^t \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\,dt. \tag{68.6}$$

Дифференцируя равенство (68.6) по t, получаем

$$\lambda(t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t), \tag{68.7}$$

т. е. *при «последовательном» соединении элементов интенсивности отказов складываются.* Это и естественно, так как при последовательном соединении элементов все «потоки отказов», воздействующие на отдельные элементы, складываются в один общий поток отказов системы с интенсивностью, равной сумме интенсивностей отдельных потоков.

§ 69. НАДЕЖНОСТЬ РЕЗЕРВИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ

Одним из путей повышения надежности системы является введение в нее дублирующих (резервных) элементов. Резервные элементы включаются в систему как бы «параллельно» тем элементам, надежность которых недостаточна.

Рассмотрим самый простой пример резервированной системы: два «параллельно» включенных элемента $Э_1$, $Э_2$ (рис. 69.1) с надежностями p_1, p_2. Предположим, что при отказе одного из элементов, например $Э_1$, система автоматически переключается на другой; надежность переключающего устройства для простоты будем считать равной единице, а отказы элементов — независимыми. Найдем надежность системы p. Перейдем для этого к ненадежности q — вероятности отказа. Для того чтобы система отказала, нужно, чтобы отказали сразу оба элемента:

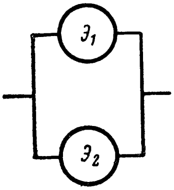


Рис. 69.1.

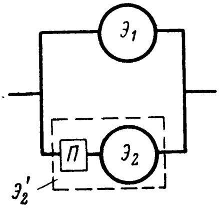


Рис. 69.2.

$$q = q_1 q_2, \tag{69.1}$$

где q_1, q_2 — соответственно ненадежности первого и второго элементов. Мы видим, что при *«параллельном» соединении элементов их ненадежности перемножаются.*

Переходя от ненадежностей к надежностям, имеем

$$p = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2). \tag{69.2}$$

При произвольном числе n дублирующих друг друга элементов

$$p = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_n) \tag{69.3}$$

или, короче,

$$p = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i). \tag{69.3$'$}$$

В случае, если надежности всех элементов одинаковы, т. е. $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, формула (69.3′) дает

$$p = 1 - (1 - p_1)^n. \tag{69.4}$$

Бросается в глаза сходство формул (69.3) и (69.4) с известными формулами для вероятности хотя бы одного попадания при стрельбе. Это и естественно, так как природа обоих явлений одинакова: и в том и в другом случае идет речь о том, чтобы сработало х о т я б ы о д н о из n устройств, действующих независимо друг от друга.

Пример 1. Взрывательное устройство ракеты состоит из трех дублирующих друг друга взрывателей. Надежность каждого из них $p_1=0{,}9$. Определить надежность устройства.

Решение. По формуле (69.4) имеем

$$p = 1 - (1 - 0{,}9)^3 = 0{,}999.$$

До сих пор мы предполагали надежность переключающего устройства полной; если это не так, легко учесть его неполную надежность. Предположим, что включены «параллельно» два элемента $Э_1$ и $Э_2$ (рис. 69.2). В случае, если элемент $Э_1$ выходит из строя, переключающее устройство П переключает систему на другой, резервный элемент $Э_2$. Надежности элементов $Э_1$, $Э_2$ и переключателя П равны соответственно p_1, p_2 и $p_п$. Определим надежность системы. Для этого объединим переключатель П и элемент $Э_2$ в одну «последовательную» цепь с надежностью, равной $p_2'=p_п p_2$. Рассматривая эту цепочку как новый параллельно включенный элемент $Э_2'$, найдем по формуле (69.2) надежность системы p:

$$p = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2') = 1 - (1 - p_1)(1 - p_п p_2). \qquad (69.5)$$

Таким образом, *неполная надежность переключающего устройства может быть учтена простым умножением надежности дублирующего элемента на надежность переключающего устройства.*

Пример 2. Определить надежность устройства, состоящего из двух дублирующих друг друга элементов $Э_1$ и $Э_2$ с надежностями $p_1=p_2=0{,}9$, причем надежность переключающего устройства $p_п=0{,}95$.

Решение. По формуле (69.5) имеем

$$p = 1 - (1 - 0{,}9)(1 - 0{,}95 \cdot 0{,}9) \approx 0{,}9855.$$

В общем случае в системах с резервированием могут применяться как «последовательные», так и «параллельные» соединения элементов, причем обычно дублируются наименее надежные звенья. При оценке надежности такой системы нужно расчленить ее на ряд «подсистем», не имеющих общих элементов, найти надежность каждой из них и, рассматривая подсистемы как элементы, оценить надежность системы в целом.

Пример 3. Оценить надежность системы, состоящей из семи элементов: $Э_1$, $Э_2$, $Э_3$, $Э_4$, $Э_5$, $Э_6$, $Э_7$ с надежностями p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 (рис. 69.3).

Решение. Подсистема I — «последовательно» соединенные элементы $Э_1$, $Э_2$; надежность

$$p_{\mathrm{I}} = p_1 p_2.$$

Подсистема II — «параллельно» соединенные элементы $Э_3$ и $Э_4$; надежность

$$p_{\mathrm{II}} = 1 - (1 - p_3)(1 - p_4).$$

Подсистема III — «последовательно» соединенные подсистемы I и II; надежность

$$p_{\mathrm{III}} = p_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{II}}.$$

Подсистема IV — «параллельно» соединенные элементы $Э_6$ и $Э_7$; надежность

$$p_{\mathrm{IV}} = 1 - (1 - p_6)(1 - p_7).$$

Подсистема V — «последовательно» соединенные элемент $Э_5$ и подсистема IV; надежность

$$p_{\mathrm{V}} = p_5 p_{\mathrm{IV}}.$$

Вся система — «параллельно» соединенные подсистемы III и V; надежность

$$p = 1 - (1 - p_{\mathrm{III}})(1 - p_{\mathrm{V}}).$$

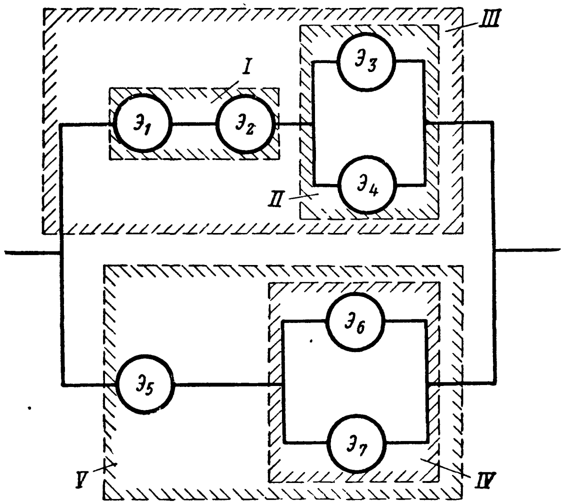


Рис. 69.3.

§ 70. УЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ ПРИ ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

Чтобы составить реальное представление о подлинной (а не сравнительной) эффективности любой операции, относящейся к боевой деятельности войск, необходимо учитывать надежность применяемых в этой операции технических средств.

Методы учета надежности во многом аналогичны рассмотренным в предыдущей главе методам учета противодействия. А именно, если требуется учесть влияние на эффективность боевых действий неполной надежности комплекса технических средств, применяемых для доставки средств поражения к цели, то для этого достаточно *умножить характеристику эффективности каждого отдельного средства поражения на надежность p комплекса, применяемого для его доставки.*

Если комплекс применяется для одновременной доставки нескольких средств поражения, то на его надежность p умножается суммарный показатель эффективности всех доставляемых средств поражения.

Пример 1. Для перехвата воздушной цели высылается три истребителя; каждый из них вооружен одним управляемым снарядом и приводится на цель независимо от других. Если все технические средства, применяемые для перехвата, работают безотказно, то один истребитель поражает цель с вероятностью $W=0,6$. Надежность системы оценивается величиной $p=0,8$. Определить вероятность того, что воздушная цель будет поражена с учетом надежности.

Решение. Вероятность поражения цели с учетом надежности будет

$$\widetilde{W} = 1 - (1 - pW)^3 \approx 0,86.$$

Пример 2. Три истребителя, выделенные для перехвата воздушной цели, наводятся на нее одновременно одной и той же наземной станцией, имеющей надежность $p=0,8$. Остальные элементы системы работают практически безотказно. Если наземная станция работает исправно, то один истребитель поражает цель с вероятностью $W=0,6$. Найти вероятность поражения цели с учетом надежности.

Решение. Если наземная станция работала безотказно, три истребителя поразят цель с вероятностью

$$1 - (1 - 0,6)^3 = 0,936.$$

Эту величину нужно умножить на надежность станции p; в этом случае получим

$$\widetilde{W} = p \cdot 0,936 = 0,8 \cdot 0,936 \approx 0,749.$$

Несколько сложнее производится учет надежности в случае, если в процессе боя применяются разнообразные технические средства, каждое из которых обладает какой-то надежностью, причем некоторые из них включены «последовательно», а другие «параллельно». Такие задачи удобно решать, пользуясь наглядными схемами, подобными тем, что в предыдущем параграфе применялись для оценки надежностей сложных цепей. Однако в эти схемы необходимо ввести некоторые изменения.

До сих пор, рассматривая задачи надежности, мы предполагали, что система или элемент может только «работать» или «не работать», а выполнение своей функции работающим элементом гарантируется с вероятностью единица. Однако может быть и так, что при условии безотказной работы системы поставленная задача решается лишь *с некоторой вероятностью*. Такие случаи легко сводятся к предыдущим, если ввести в схему учета надежности некоторые «фиктивные» элементы, которым условно приписывается надежность, равная вероятности выполнения своей функции работающим элементом. Если боевая задача выполняется совместно несколькими боевыми единицами, то их можно рассматривать, как «параллельно» включенные элементы системы.

Пример 3. Самолет-истребитель, вооруженный двумя управляемыми снарядами класса «воздух—воздух», наводится на воздушную цель с помощью наземной РЛС. При условии безотказной работы наземной РЛС и бортовой станции истребителя наведение на цель осуществляется с вероятностью W_1. При условии безотказной работы системы управления и взрывателя один снаряд поражает цель с вероятностью W_2. Наведенный на цель истребитель выпускает по ней два снаряда, наводящихся независимо друг от друга. Заданы:

— надежность наземной РЛС $p_н$;
— надежность бортовой станции $p_б$;
— надежность системы управления снаряда $p_у$;
— надежность взрывателя $p_в$.

Требуется определить полную вероятность поражения цели с учетом как эффективности, так и надежности применяемых технических средств.

Решение. Представим систему в виде «последовательно» и «параллельно» соединенных элементов (рис. 70.1). Вычисляем полную вероятность поражения цели аналогично тому, как вычисляли надежность в примере 3 предыдущего параграфа.

Подсистема I (цепь 1-го снаряда) — «последовательно» соединенные элементы: «система управления», «взрыватель», «поражение цели»; надежность

$$P_{\mathrm{I}} = p_{\text{у}} p_{\text{в}} W_2.$$

Аналогично для второго снаряда (подсистема II)

$$P_{\mathrm{II}} = P_{\mathrm{I}} = p_{\text{у}} p_{\text{в}} W_2.$$

Подсистема III — оба снаряда, соединенные параллельно (дублирующие друг друга); надежность

$$P_{\mathrm{III}} = 1 - (1 - P_{\mathrm{I}})^2.$$

Таким образом, систему образуют следующие элементы: наземная РЛС, бортовая станция, фиктивный элемент «наведение» и подсистема III (два снаряда),

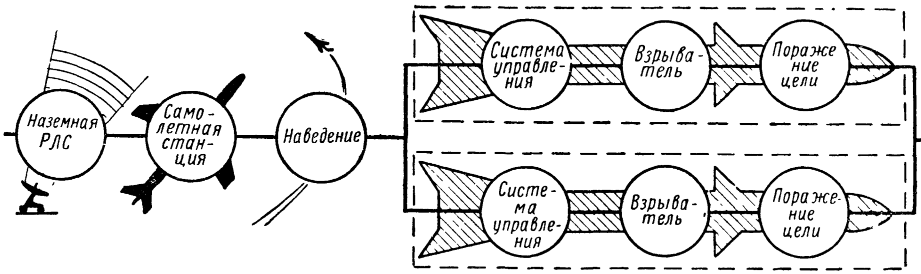


Рис. 70.1.

соединенных «последовательно». Отсюда полная вероятность поражения цели, полученная как «обобщенная надежность», равна

$$\widetilde{W} = p_{\text{н}} p_5 W_1 P_{\mathrm{III}}.$$

С помощью аналогичных схем можно оценивать и влияние радиопротиводействия (см. § 56), рассматривая помехозащищенность элементов системы как разновидность надежности.

§ 71. УЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ ОТКАЗОВ

До сих пор, рассматривая задачи надежности, мы исходили из допущения, что отказы элементов происходят *независимо* друг от друга. Это допущение не всегда справедливо: в ряде случаев отказы элементов могут быть *зависимыми*.

Зависимость между отказами элементов может быть двух типов.

Первый тип зависимости сводится к тому, что отказ какого-либо элемента *меняет режим работы системы* (например, могут возникнуть короткое замыкание в одном из участков цепи или резкие колебания напряжения), в связи с чем вероятности выхода из строя других элементов меняются.

Такой тип зависимости совершенно не играет роли при оценке надежности нерезервированной системы. Действительно, поскольку для отказа нерезервированной системы достаточно выхода из строя хотя бы одного из элементов, то совсем неважно, какова будет надежность других элементов после того, как один уже вышел из строя.

Что касается резервированной системы, то зависимость этого типа, если она существует, следует учитывать. Для этого достаточно в расчетной схеме надежность каждого элемента вводить в расчет не абсолютным, а условным значением, вычисленным при условии, что то или другое число элементов схемы отказало.

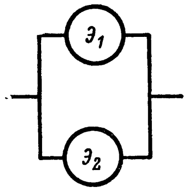


Рис. 71.1.

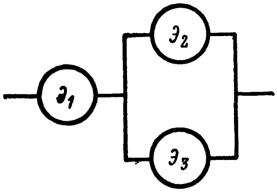


Рис. 71.2.

Пример 1. Система состоит из двух дублирующих друг друга элементов $Э_1$ и $Э_2$ (рис. 71.1). Надежность каждого из них в нормальных условиях равна $p=0{,}9$. Если элемент $Э_1$ вышел из строя, система автоматически переключается на элемент $Э_2$ (надежность переключающего устройства равна единице); однако выход из строя элемента $Э_1$ вызывает колебания напряжения в цепи, понижающие надежность элемента $Э_2$, которая становится равной $p'=0{,}8$. Оценить надежность системы.

Решение.

$$p = 1 - (1 - 0{,}9)(1 - 0{,}8) = 0{,}98.$$

Пример 2. Из трех элементов $Э_1$, $Э_2$ и $Э_3$, надежность которых в нормальных условиях равна $p=0{,}9$, составлена система (рис. 71.2). Выход из строя любого из элементов системы понижает надежность двух остальных до $p=0{,}7$. Оценить надежность системы.

Решение. Вероятность безотказной работы системы вычислим по формуле полной вероятности, применяя две гипотезы:

H_1 — элемент $Э_2$ работал безотказно;

H_2 — элемент $Э_2$ отказал.

Полная надежность системы будет равна

$$p = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2),$$

где $P(A/H_2)$ — условная вероятность безотказной работы системы при условии, что элемент $Э_2$ работал безотказно;

$P(A/H_2)$ — та же вероятность при условии, что элемент $Э_2$ отказал.

Очевидно, $P(H_1)=0{,}9$; $P(H_2)=1-0{,}9=0{,}1$. Найдем условные вероятности $P(A/H_1)$ и $P(A/H_2)$. Если элемент $Э_2$ не отказал, то для безотказной работы системы достаточно безотказной работы элемента $Э_1$; следовательно, $P(A/H_1=$ $=0{,}9$. Если элемент $Э_2$ отказал, то для безотказной работы системы требуется, чтобы не отказали элементы $Э_1$ и $Э_3$; следовательно, $P(A/H_2)=0{,}7\cdot 0{,}7=0{,}49$.

Полная надежность системы будет

$$P = 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}49 = 0{,}859.$$

Второй тип зависимости отказов связан с тем, что на систему в целом действуют какие-то внешние условия (групповые факторы), благоприятствующие одновременному выходу из строя сразу нескольких элементов. Примерами таких факторов могут служить:

— скачки напряжения в цепи электропитания;

— тряска, вибрации;

— уклонение температурного режима от нормы;

— повышенное время предварительного хранения изделия и т. п.

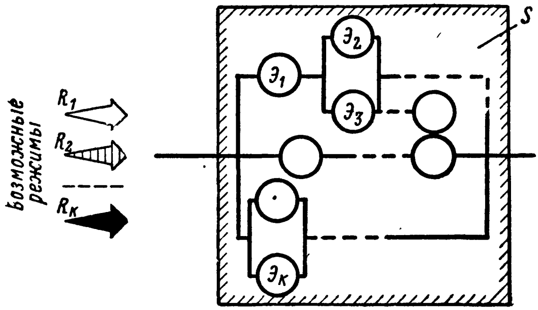


Рис. 71.3.

Если удельный вес таких «групповых» факторов в общем балансе причин, вызывающих отказы, велик, возникает зависимость между отказами, пренебрегать которой нельзя.

Дадим приближенный метод учета такой зависимости как для резервированной, так и для нерезервированной систем.

Пусть имеется некоторая система S, состоящая из любого числа произвольным образом соединенных элементов (рис. 71.3). Предположим, что система может работать в одном из режимов

$$R_1,\ R_2, \ldots,\ R_k,$$

причем вероятность того, что система будет работать в режиме R_i, равна P_i. Допустим, что при режиме R_i надежности всех элементов системы известны и элементы выходят из строя независимо друг от друга. Тогда можно определить условную надежность системы для режима работы R_i. Обозначим ее $P(A/R_i)$. По формуле полной вероятности найдем полную надежность системы

$$p = P_1 P(A/R_1) + P_2 P(A/R_2) + \ldots + P_k\, P(A/R_k) \qquad (71.1)$$

или, короче,

$$p = \sum_{i=1}^{k} P_i P(A/R_i), \qquad (71.1')$$

т. е. *полная надежность системы равна сумме вероятностей различных режимов работы, умноженных на условную надежность системы для этого режима.*

Пример 3. Система, состоящая из трех последовательно включенных элементов $Э_1$, $Э_2$ и $Э_3$ (рис. 71.4), может работать в двух температурных режимах:

R_1 — нормальном;

R_2 — ненормальном.

Вероятности этих режимов равны

$$P_1 = 0{,}6, \quad P_2 = 0{,}4.$$

В первом режиме надежности элементов равны соответственно

$$p_1 = 0{,}95, \quad p_2 = 0{,}90, \quad p_3 = 0{,}85.$$

Во втором режиме надежности элементов равны

$$p_1' = 0{,}8, \quad p_2' = 0{,}7, \quad p_3' = 0{,}6.$$

Определить полную надежность системы.

Решение. Определяем условную надежность системы при первом режиме:

$$P(A/R_1) = 0{,}95 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}85 = 0{,}726.$$

При втором режиме:

$$P(A/R_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}336.$$

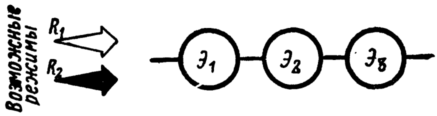


Рис. 71.4.

Полная надежность равна

$$p = 0{,}6 \cdot 0{,}726 + 0{,}4 \cdot 0{,}336 = 0{,}571.$$

Для сравнения оценим надежность той же системы, считая отказы элементов независимыми. Полная надежность первого элемента равна

$$\tilde{p}_1 = 0{,}6 \cdot 0{,}95 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}89;$$

второго элемента:

$$\tilde{p}_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}90 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}82;$$

третьего элемента:

$$\tilde{p}_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}85 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}74.$$

Если бы элементы отказывали независимо друг от друга, полная надежность системы была бы равна

$$\tilde{p} = 0{,}89 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}74 \approx 0{,}540.$$

Из примера мы видим, что без учета зависимости значение надежности получается заниженным.

Это свойство является общим для всех нерезервированных систем: надежность, подсчитанная без учета зависимости между отказами, получается всегда з а н и ж е н н о й. Это особенно ярко проявляется в случае системы, состоящей из большого числа элементов.

Пример 4. Система состоит из 50 однородных элементов, включенных «последовательно», и может работать в двух режимах:

R_1 — нормальном;

R_2 — ненормальном.

Вероятности этих режимов равны соответственно

$$P_1 = 0{,}9, \quad P_2 = 0{,}1.$$

В нормальном режиме работы надежность каждого элемента равна $p = 0{,}998$; в ненормальном $p_1' = 0{,}9$. Определить полную надежность системы и сравнить с той, которая получилась бы, если бы элементы выходили из строя независимо друг от друга.

Решение. Определяем условные надежности при двух режимах:

$$P(A/R_1) = 0{,}998^{50} \approx 0{,}904,$$

$$P(A/R_2) = 0{,}9^{50} \approx 0{,}004.$$

Полная надежность системы равна

$$p = 0{,}9 \cdot 0{,}904 + 0{,}1 \cdot 0{,}004 \approx 0{,}813.$$

Подсчитаем ту же надежность, считая отказы элементов независимыми и приписывая каждому из них надежность, равную

$$p_1 = 0{,}9 \cdot 0{,}998 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \approx 0{,}988.$$

При этом полная надежность была бы равна

$$\tilde{p} = \tilde{p}_1^{50} = 0{,}549.$$

Как видно из примера, пренебрежение зависимостью приводит к значительному занижению надежности.

Совершенно другую картину мы получим, учитывая зависимость отказов элементов для дублированных узлов. Здесь пренебрежение зависимостью отказов приводит не к занижению, а к *завышению* надежности.

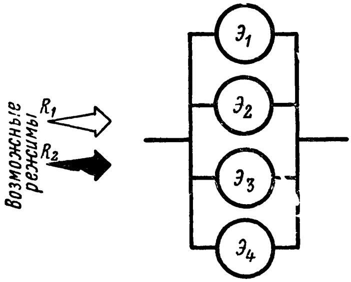


Рис. 71.5.

Пример 5. Резервированная система состоит из четырех однородных параллельно соединенных элементов (рис. 71.5) и может работать в двух режимах:

R_1 — нормальном;

R_2 — ненормальном.

Вероятности этих режимов равны соответственно

$$P_1 = 0{,}7; \quad P_2 = 0{,}3.$$

В первом режиме работы надежность каждого элемента $p_1 = 0{,}99$; во втором — $p_1' = 0{,}4$. Определить полную надежность p системы и сравнить с той надежностью $\tilde{p}$, которая получится, если считать отказы элементов независимыми.

Решение. Условная надежность системы равна:

при первом режиме

$$P(A/R_1) = 1 - (1 - 0{,}99)^4 \approx 1{,}000;$$

при втором режиме

$$P(A/R_2) = 1 - (1 - 0{,}4)^4 \approx 0{,}870.$$

Полная надежность системы равна

$$P = 0{,}7 \cdot 1{,}000 + 0{,}3 \cdot 0{,}870 = 0{,}961,$$

т. е. примерно в 4% всех случаев работы система будет отказывать.

Найдем для сравнения надежность системы, считая отказы независимыми

Полная надежность одного элемента равна

$$\tilde{p}_1 = 0{,}7 \cdot 0{,}99 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}704.$$

Надежность системы при независимых отказах:

$$\tilde{p} = 1 - (1 - p_1)^4 \approx 0{,}992,$$

т. е. отказы будут наблюдаться в 0,8% случаев.

Завышение надежности резервированной системы, которое получается при пренебрежении зависимостью, сказывается тем больше, чем больше количество дублирующих друг друга элементов.

ГЛАВА 11

РАСЧЕТ НАРЯДА СРЕДСТВ

§ 72. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА НАРЯДА СРЕДСТВ

Задачи оценки эффективности стрельбы по одиночной, групповой и площадной целям, а также комплексной оценки эффективности летательных аппаратов, рассмотренные в гл. 4—7, принадлежат к типу так называемых *прямых задач*.

Схема прямой задачи оценки эффективности: заданы условия операции, в частности количество средств (выстрелов, обобщенных выстрелов самолетов, атак, залпов), выделенных для решения боевой задачи. Требуется вычислить показатель эффективности.

Для практики представляют интерес не только прямые, но и *обратные задачи*. Схема обратной задачи: задано значение показателя эффективности, которого нужно достигнуть; требуется найти такие условия выполнения операции, при которых показатель эффективности достигает заданного (или максимального) значения.

При планировании боевых действий постоянно приходится решать обратные задачи, связанные *с расчетом наряда средств*.

Примеры таких задач:

— сколько нужно сделать выстрелов (залпов, очередей), чтобы поразить одиночную цель с заданной вероятностью?

— сколько выстрелов (обобщенных выстрелов) нужно произвести по групповой цели, чтобы среднее число пораженных единиц достигло заданного значения?

— сколько нужно выделить истребителей ПВО для того, чтобы в составе воздушного налета с заданной вероятностью уничтожить не менее k % единиц?

— сколько стрельб (обобщенных выстрелов) нужно произвести по площадной цели для того, чтобы средняя доля поражения достигла заданного значения?

Все задачи расчета наряда средств в принципе одинаковы и решаются одними и теми же методами. Схема решения сводится к следующему.

Рассматривается операция, эффективность которой оценивается показателем W. Для ее выполнения выделяется какое-то число средств (выстрелов, обобщенных выстрелов, боевых единиц) n. Требуется найти то значение n, при котором показатель эффективности достигает заданного значения W^*.

Будем исходить из условия, что мы умеем решать прямую задачу оценки эффективности, т. е. при заданном n находить соответствующее значение W; обозначим его $W(n)$ (рис. 72.1).

Для определения необходимого наряда средств n отложим по оси ординат требуемое значение показателя эффективности W^* и найдем такое n, при котором $W(n)$ достигает значения W^*. Схема решения задачи расчета наряда средств показана на рис. 72.1 стрелками.

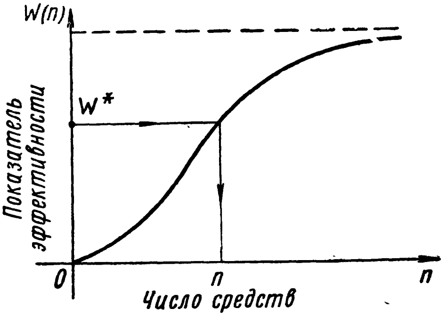


Рис. 72.1.

Так как число обобщенных выстрелов n по существу не может быть дробным, то найденное значение n округляется до ближайшего бо́льшего целого числа. Показатель эффективности W может иметь любой смысл; например, представлять собой вероятность поражения одиночной цели; среднее число пораженных единиц в составе групповой цели; среднюю долю поражения площадной цели и т. д.

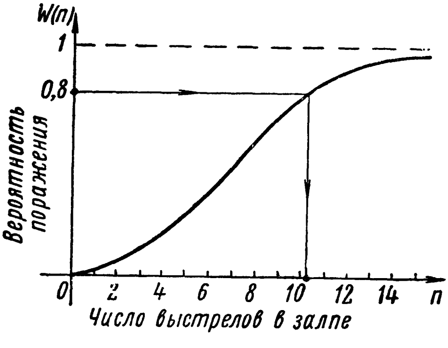


Рис. 72.2.

Пример 1. По одиночной цели производится стрельба залпом снарядов; зависимость вероятности поражения цели W от числа выстрелов в залпе n представлена на рис. 72.2. Сколько выстрелов должно быть в залпе для того, чтобы цель была поражена с вероятностью 0,8?

Решение. Пользуясь графиком рис. 72.2, находим

$$n = 10{,}3;$$

округляя в бо́льшую сторону, имеем $n = 11$.

§ 73. РАСЧЕТ НАРЯДА СРЕДСТВ, КОГДА ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАСТЕТ ПО ПОКАЗАТЕЛЬНОМУ ЗАКОНУ

В случае, когда зависимость показателя эффективности от числа обобщенных выстрелов n имеет простой аналитический вид, нет надобности строить график $W(n)$, а можно сразу решить задачу расчета наряда средств в общем виде.

На практике очень часто встречается случай, когда показатель эффективности $W(n)$ в зависимости от числа средств n растет по показательному закону:

$$W(n) = 1 - (1 - W)^n, \quad (73.1)$$

где W — показатель эффективности при одном обобщенном выстреле;

$W(n)$ — показатель эффективности при n обобщенных выстрелах.

Например, при стрельбе по одиночной цели n независимыми выстрелами, каждый из которых поражает ее с вероятностью p, вероятность поражения равна

$$W(n) = 1 - (1 - p)^n. \quad (73.2)$$

При стрельбе по площадной цели n обобщенными выстрелами средняя доля поражения возрастает приближенно по формуле

$$M(n) = 1 - (1 - M)^n, \quad (73.3)$$

где M — средняя доля поражения при одном выстреле.

Во всех этих случаях можно решить задачу о расчете наряда средств аналитически. Действительно, пусть показатель эффективности растет с увеличением n по показательному закону (73.1) и требуется найти такое значение n, при котором оно будет достигать заданного значения W^*. Положим

$$1 - (1 - W)^n = W^*, \quad (73.4)$$

и разрешим показательное уравнение (73.4) относительно n. Получим

$$n = \frac{\lg(1 - W^*)}{\lg(1 - W)}. \quad (73.5)$$

Формула (73.5) является основной расчетной формулой для определения наряда средств при независимых выстрелах. При пользовании ею обычно округляют полученное значение n до ближайшего бо́льшего целого числа.

Пример 1. Одним залпом неуправляемых снарядов цель — корабль противника — поражается с вероятностью 0,2. Сколько нужно сделать залпов для того, чтобы поразить цель с вероятностью 0,8?

Решение.

$W^* = 0{,}8$, $W = 0{,}2$. По формуле (73.5) имеем

$$\frac{\lg(1 - W^*)}{\lg(1 - W)} = \frac{\lg 0{,}2}{\lg 0{,}8} = 7{,}21; \quad n = 8.$$

Пример 2. При стрельбе по площадной цели одной ракетой поражается в среднем 0,4 площади цели. Сколько требуется выделить ракет для того, чтобы поразить в среднем 0,9 площади цели?

Решение. Полагая $W^* = M(n) = 0{,}9$, $W = M = 0{,}4$, получаем

$$\frac{\lg(1 - 0{,}9)}{\lg(1 - 0{,}4)} \approx 4{,}5; \quad n = 5.$$

Рассмотрим задачу о расчете наряда средств при стрельбе по групповой цели. Если групповая цель рассредоточенная, а обобщенные выстрелы независимы и оценка эффективности производится по среднему числу пораженных единиц $M_п$, то можно воспользоваться для расчета наряда средств той же формулой (73.5) (или, что равносильно, табл. 3 прилож. 2).

Действительно, пусть производится обстрел рассредоточенной групповой цели, состоящей из N единиц. Вероятность поражения одной единицы одним обобщенным выстрелом равна p. Сколько требуется выделить обобщенных выстрелов для того, чтобы поразить в составе групповой цели в среднем $M_п^*$ единиц?

Будем рассуждать следующим образом. Пусть на каждую единицу в составе групповой цели выделено k, а всего по цели $Nk=n$ обобщенных выстрелов. Каждая цель поражается с вероятностью $W=1-(1-p)^k$. Среднее число пораженных единиц в составе групповой цели будет равно

$$M_п = N\left[1-(1-p)^k\right], \tag{73.6}$$

а средняя доля пораженных целей

$$\mu_п = \frac{M_п}{N} = 1-(1-p)^k,$$

т. е. средняя доля пораженных целей возрастает с возрастанием количества средств, выделенных на каждую из них, по показательному закону[1]. Отсюда вытекает приближенная формула для определения общего наряда средств:

$$n = Nk = N\frac{\lg\left(1-\mu_п^*\right)}{\lg(1-p)}, \tag{73.7}$$

где $\mu_п^*$ — заданная средняя доля пораженных единиц;

p — вероятность поражения единицы одним обобщенным выстрелом;

N — число единиц в составе групповой цели.

При пользовании этой формулой величину n округляют до ближайшего большего целого числа.

Пример 3. Сколько истребителей-перехватчиков нужно выделить для поражения в среднем 70% состава налета, если в налете участвует 250 воздушных целей, а каждый истребитель поражает цель с вероятностью 0,6?

Решение. Имеем $\mu_п^* = 0{,}7$, $p = 0{,}6$. По формуле (73.7) имеем

$$n = 250\frac{\lg(1-0{,}7)}{\lg(1-0{,}6)} \approx 330 \text{ истребителей.}$$

При таком числе выделенных истребителей на некоторые цели придется по одному истребителю, а на некоторые — по два.

[1] Эта формула точна только в случае, когда на каждую цель выделено ровно одно и то же количество средств k.

§ 74. РАСЧЕТ НАРЯДА СРЕДСТВ, КОГДА ЦЕЛЬ НАХОДИТСЯ В ПУАССОНОВСКОМ ПОТОКЕ ВЫСТРЕЛОВ

В ряде случаев точное число средств, которое удастся направить по цели, заранее неизвестно и является величиной случайной. Так, например, обстоит дело, если воздушная цель перемещается в зоне действия ПВО, а фактическое число обобщенных выстрелов, которое удается осуществить по цели, является случайным и зависит от того, какой конкретный маршрут изберет цель, когда она будет обнаружена наземными РЛС, и т. д. В подобных случаях, чтобы обеспечить данный уровень эффективности обороны, приходится выделять для размещения на всей территории некоторое число средств с тем, чтобы *в среднем* на каждую воздушную цель к моменту ее прихода на заданный рубеж приходилось не менее определенного числа обобщенных выстрелов.

При решении таких задач удобно пользоваться допущением, что поток обобщенных выстрелов, направляемый на цель, является пуассоновским; роль наряда средств в данном случае будет играть *среднее число выстрелов* $\bar{n}$, которое нужно произвести по цели, чтобы она была поражена с заданной вероятностью W^*.

Поставим задачу: каково должно быть среднее число обобщенных выстрелов $\bar{n}$, которое нужно осуществить по цели, находящейся в пуассоновском потоке выстрелов, если каждый из них поражает ее с вероятностью p, а требуется поразить цель с вероятностью W^*?

Найдем вероятность поражения цели, находящейся в пуассоновском потоке выстрелов:

$$W = 1 - e^{-\bar{n}p}. \tag{74.1}$$

Отсюда, полагая

$$1 - e^{-\bar{n}p} = W^*,$$

находим:

$$\bar{n} = -\frac{\ln(1 - W^*)}{p}. \tag{74.2}$$

Пример 1. Сколько в среднем атак нужно осуществить по воздушной цели, чтобы поразить ее с вероятностью 0,9, если каждой атакой она поражается с вероятностью 0,3, а поток атак пуассоновский?

Решение. Нам задано $W^* = 0{,}9$, $p = 0{,}3$. По формуле (74.2) имеем

$$\bar{n} = -\frac{\ln 0{,}1}{0{,}3} \approx \frac{2{,}02}{0{,}3} \approx 6{,}8,$$

т. е. насыщенность обороны средствами поражения должна быть такова, чтобы на цель приходилось в среднем около 7 атак.

С помощью формулы (74.2) можно определить и плотность потока выстрелов λ, необходимую для того, чтобы цель, находящаяся в этом потоке заданное время τ, была поражена с вероятностью W^*.

Действительно,

$$\bar{n} = \lambda\tau,$$

откуда

$$\lambda = \frac{\bar{n}}{\tau}.$$

Пример 2. Одной атакой цель поражается с вероятностью 0,6. Какова должна быть плотность потока атак для того, чтобы воздушная цель, затрачивающая 30 *мин* на преодоление зоны ПВО, была поражена с вероятностью 0,8?

Решение. Имеем $W^* = 0{,}8$, $p = 0{,}6$, $\tau = 0{,}5$ *час*,

$$\lambda = \frac{1}{0{,}5} \cdot \frac{-\ln 0{,}2}{0{,}6} = 5{,}36 \text{ атак/час.}$$

Пример 3. Сколько времени должна подвергаться цель пуассоновскому потоку выстрелов с плотностью 12 *выстр/час*, чтобы быть пораженной с вероятностью 0,95, если одним выстрелом она поражается с вероятностью 0,4?

Решение. Время τ можно найти по формуле

$$\tau = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{-\ln(1 - W^*)}{p}.$$

Имеем $W^* = 0{,}95$, $p = 0{,}4$, $\lambda = 12$.
Отсюда

$$\tau = \frac{1}{12} \cdot \frac{-\ln 0{,}05}{0{,}4} \approx 0{,}624 \text{ час} \approx 37 \text{ мин.}$$

Формула (74.2) для расчета среднего наряда средств дает значение несколько большее, чем наряд средств, который получается при пользовании формулой (73.5), когда число выделенных средств считается не случайным, а вполне определенным.

§ 75. РАСЧЕТ НАРЯДА СРЕДСТВ ПО ТАБЛИЦАМ И ГРАФИКАМ

Чтобы быстро и без громоздких вычислений определять наряд средств, необходимый для решения той или иной боевой задачи, удобно пользоваться таблицами и графиками. В частности, когда показатель эффективности возрастает в зависимости от числа выделенных средств n по показательному закону:

$$W(n) = 1 - (1 - W)^n \qquad (75.1)$$

(где W — показатель эффективности при одном обобщенном выстреле), для расчета наряда средств можно пользоваться теми же таблицами и графиками функции

$$W = 1 - (1 - p)^n, \qquad (75.2)$$

которыми мы пользовались для вычисления вероятности поражения цели при независимых выстрелах (табл. 3 прилож. 1 или рис. 1,2 прилож. 2).

Предположим, нам нужно найти то значение наряда средств n, при котором показатель эффективности достигает заданного значения W^*.

Возьмем таблицу функции $W=1-(1-p)^n$ и войдем в нее вместо p со значением W (т. е. положим $p=W$). Перемещаясь по соответствующей строке таблицы, найдем то значение n, для которого величина W станет не меньше заданного значения W^*. Это значение n и определит необходимый наряд средств.

Пример 1. Сколько нужно сделать обобщенных выстрелов, чтобы поразить одиночную цель с вероятностью $W^*=0{,}9$, если каждый выстрел независимо от других поражает цель с вероятностью $W=0{,}16$?

Решение. По табл. 3 прилож. 1, перемещаясь по строке, соответствующей $p=0{,}16$, видим, что W достигает 0,9 при $n\approx 14$; это и определяет наряд средств.

Наряд средств n можно определить не только по таблице, но и по графикам типа рис. 1 или 2 прилож. 2. Чтобы найти наряд средств по графикам типа рис. 2, нужно по оси абсцисс отложить значение показателя эффективности при одном выстреле W, по оси ординат — заданное значение W^*; через первую точку провести вертикальную, а через вторую — горизонтальную прямую и определить, какому значению n соответствует их точка пересечения.

Так как число n может быть только целым, нужно брать ближайшую кривую, лежащую выше точки пересечения.

Пример 2. Сколько нужно выделить ракет для поражения одиночной цели, чтобы поразить ее с вероятностью $W^*=0{,}75$, если одна ракета поражает цель с вероятностью $W=0{,}2$?

Решение. По графику рис. 2 прилож. 2 при $p=0{,}2$, $W=0{,}75$ получаем $n\approx 6$.

Так как формула (73.3) по структуре совпадает с формулой (75.1), то при расчете наряда средств, необходимых для поражения заданной доли площади цели, можно пользоваться теми же таблицами и графиками.

Пример 3. При стрельбе по площадной цели одна ракета поражает в среднем 0,5 площади цели. Сколько нужно ракет, чтобы поразить в среднем 0,9 площади цели?

Решение. Откладывая по оси абсцисс графика рис. 2 прилож. 2 $M=0{,}5$, а по оси ординат $M^*=0{,}9$, получаем $n=4$.

В случае, если показателем эффективности стрельбы по площадной цели является не средняя доля поражения M, а вероятность $R_{u,n}$ поражения не менее заданной доли u площади цели, для расчета наряда средств составляются специальные таблицы или графики.

В прилож. 1 приведены табл. 5 и 6, пользуясь которыми можно рассчитывать наряд средств, необходимый для получения ущерба на площадной цели не менее заданного u с определенной гарантийной вероятностью P^* (в данном случае она играет роль требуемого показателя эффективности).

В табл. 5 прилож. 1 приводятся значения вероятности получения на площадной цели не менее 30% ущерба ($u=0{,}3$); в табл. 6 — вероятности получения не менее 70% ущерба ($u=0{,}7$).

Входными величинами в таблицы являются:

— средняя доля поражения при одном выстреле M;

— средний квадрат доли поражения при одном выстреле C;

— гарантийная вероятность P.

Пример 4. Производится стрельба ракетами по площадной цели с размерами $Ц_x^{(м)} = 800$ *м*; $Ц_y^{(м)} = 400$ *м* (см. пример 2 § 45); зона поражения $L_x^{(м)} = L_y^{(м)} = 600$ *м*; главные вероятные отклонения $E_x = E_y = 200$ *м*.

Определить:

а) наряд средств n, необходимый для поражения не менее 30% площади цели с вероятностью $P=0{,}9$;

б) наряд средств n, необходимый для поражения не менее 70% площади цели с вероятностью $P=0{,}95$.

Решение. Из примера 2 § 45 имеем:

— средняя доля поражения при одном выстреле $M=0{,}382$;

— средний квадрат доли поражения при одном выстреле $C=0{,}194$.

а) По табл. 5 прилож. 1 при $M=0{,}4$, $C=0{,}2$ и $P=0{,}90$ находим $n=2$; при $M=0{,}36$, $C=0{,}2$ и $P=0{,}90$ находим $n=3$; при $M=0{,}382$, $C=0{,}19$ положим $n=3$; т. е. для получения ущерба не менее 30% с 90%-ной гарантией требуется 3 выстрела.

б) По табл. 6 прилож. 1 при $M=0{,}4$, $C=0{,}2$ и $P=0{,}95$ находим $n=5$; при $M=0{,}36$, $C=0{,}2$ и $P=0{,}95$ находим $n=7$; при $M=0{,}382$, $C=0{,}19$ положим $n=6$, т. е. для получения ущерба не менее 70% с 95%-ной гарантией требуется 6 выстрелов.

§ 76. РАСЧЕТ НАРЯДА СРЕДСТВ С УЧЕТОМ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ ПРОТИВНИКА И НЕПОЛНОЙ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ

Способы расчета наряда средств, которые были изложены выше, не учитывают двух существенных факторов:

— противодействия противника, в результате которого те или другие из выделенных средств могут быть поражены, не выполнив своей задачи;

— неполной надежности применяемых технических средств, в результате которой некоторые из обобщенных выстрелов могут не состояться.

Очевидно, при расчете наряда средств необходимо учитывать оба эти фактора, планируя наряд «с запасом» так, чтобы заранее учесть возможные потери от огня противника и от технических неисправностей. Для такого расчета совершенно неважны п р и ч и н ы потерь — огонь противника или неисправность; важно только знать для каждого обобщенного выстрела вероятность Q того, что он состоится (см. § 53).

Рассмотрим сначала самый простой случай, когда показатель эффективности W возрастает с возрастанием числа обобщенных выстрелов n по показательному закону:

$$W(n) = 1 - (1 - W)^n, \tag{76.1}$$

где W — показатель эффективности при одном выстреле.

В § 53 было показано, что для учета противодействия (а следовательно, и неполной надежности) нужно умножить в формуле (76.1) величину W на вероятность Q того, что обобщенный выстрел состоится; получим

$$W(n) = 1 - (1 - QW)^n. \qquad (76.2)$$

В данном случае Q есть вероятность того, что боевая единица, выполняющая обобщенный выстрел:

— не будет поражена,

— не выйдет из строя по причине технических неисправностей.

По теореме умножения вероятностей

$$Q = Q_п p, \qquad (76.3)$$

где $Q_п$ — вероятность того, что противодействие противника данной боевой единице будет безуспешным;

p — надежность технических устройств, применяемых для доставки средства поражения к цели.

Таким образом, учет указанных двух факторов (противодействия противника и надежности) при расчете наряда средств сводится к тому, что *показатель эффективности одного выстрела множится на вероятность Q того, что он состоится;* наряд средств определяется по формуле

$$n = \frac{\log(1 - W^*)}{\log(1 - QW)}, \qquad (76.4)$$

где W^* — заданное значение показателя эффективности;

W — показатель эффективности при одном выстреле;

Q — вероятность того, что выстрел состоится.

Если наряд n определяется не по формуле, а по таблицам или графикам функции $1 - (1 - p)^n$ (табл. 3 прилож. 1, рис. 1, 2 прилож. 2), то в них тоже нужно входить, полагая p равным не W, а QW.

Пример 1. Сколько истребителей-перехватчиков нужно выделить для того, чтобы поразить воздушную цель с вероятностью $W^* = 0{,}9$, при следующих условиях:

— один истребитель поражает цель, если ему удастся по ней стрелять, с вероятностью 0,7;

— истребитель наводится на цель с вероятностью 0,9;

— истребитель поражается ответным огнем цели с вероятностью 0,2;

— надежность технических средств, применяемых при атаке цели, равна 0,95.

Решение. Показатель эффективности для одного истребителя — без учета противодействия и надежности — равен вероятности того, что истребитель будет наведен и поразит цель:

$$W = 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}63.$$

Вероятность Q того, что обобщенный выстрел состоится, равна произведению вероятности непоражения истребителя и его надежности:

$$Q = (1 - 0{,}2) \cdot 0{,}95 = 0{,}76.$$

Отсюда эффективность одного обобщенного выстрела (одной атаки истребителя) равна

$$QW = 0{,}76 \cdot 0{,}63 \approx 0{,}48.$$

Входя с этой величиной по оси абсцисс в график рис. 2 прилож. 2, найдем то значение n, при котором достигается значение $W^*=0,9: n=4$, т. е. для поражения цели с заданной вероятностью нужно выделить четыре истребителя.

Пример 2. Для бомбометания по площадной цели требуется выделить наряд бомбардировщиков, учитывая, что:

— один бомбардировщик, если бомбометание состоится, поражает в среднем 30% площади цели;

— вероятность вывода бомбардировщика в район цели равна 0,9;

— надежность технических устройств, применяемых при доставке боевых зарядов к цели, для одного самолето-вылета равна 0,8;

— перед подходом к цели каждый бомбардировщик должен преодолеть зону ПВО, в которой его поражают с вероятностью 0,4;

— требуется поразить в среднем 60% площади цели.

Решение. Показатель эффективности для одного обобщенного выстрела (самолето-вылета), если он состоится, равен

$$W = 0,3 \cdot 0,9 = 0,27.$$

Вероятность того, что выстрел состоится

$$Q = (1 - 0,4) \cdot 0,8 = 0,48.$$

Показатель эффективности одного обобщенного выстрела равен

$$QW = 0,48 \cdot 0,27 \approx 0,13.$$

По графику рис. 2 прилож. 2, входя в него по оси абсцисс со значением $W=0,13$ и по оси ординат со значением $W^*=0,6$, получаем $n \approx 7$, т. е. наряд бомбардировщиков равен семи. (Заметим, что без учета противодействия и надежности он был бы равен $n=3$.)

При расчете наряда средств n, необходимого для поражения заданной доли площади цели с определенной гарантийной вероятностью P^*, тоже можно приближенно пользоваться аналогичным приемом: входить в графики или таблицы с «исправленными» значениями M и C, вычисленными с учетом противодействия и неполной надежности технических средств. А именно, вместо M и C нужно подставить величины

$$\tilde{M} = QM, \tag{76.5}$$

$$\tilde{C} = QC, \tag{76.6}$$

где Q — вероятность того, что обобщенный выстрел состоится;
M — средняя доля поражения при одном обобщенном выстреле;
C — средний квадрат доли поражения при одном обобщенном выстреле.

Пример 3. В условиях примера 2 § 45 найти наряд средств, необходимый для поражения не менее 70% площади цели с вероятностью 0,95, если каждая ракета поражается антиракетами противника с вероятностью 0,3 и надежность системы запуска ракеты и взрывательного устройства равна 0,9.

Решение. Вероятность того, что обобщенный выстрел состоится, равна

$$Q = (1 - 0,3) \cdot 0,9 = 0,63.$$

Находим значения $\widetilde{M}$ и $\widetilde{C}$ с учетом противодействия и надежности:

$$\widetilde{M} = QM = 0{,}63 \cdot 0{,}382 \approx 0{,}24,$$

$$\widetilde{C} = QC = 0{,}63 \cdot 0{,}194 \approx 0{,}12.$$

По табл. 6 прилож. 1, полагая $M=0{,}24$, $C=0{,}12$, $P = P^* = 0{,}95$, находим $n = 12$, т. е. нужно выделить 12 ракет.

§ 77. РАСЧЕТ СРЕДНЕГО ФАКТИЧЕСКОГО РАСХОДА СРЕДСТВ

Рассмотренные выше задачи расчета наряда средств отвечают на вопрос: какое число средств n надо выделить (иметь в распоряжении), чтобы показатель эффективности достигал заданного значения W^*. Однако не всегда все выделенные средства будут фактически израсходованы. После поражения цели дальнейшая стрельба по ней теряет смысл, поэтому естественно прекратить огонь немедленно после получения информации о поражении цели. При этом в общем случае удается сэкономить некоторое количество средств. Отсюда ясно, что нужно различать запас средств n и их фактический расход.

Разница между «запасом» и «расходом» средств зависит от того, насколько хорошо организовано наблюдение за целью и управление стрельбой — насколько быстро удается получить информацию о поражении цели и прекратить по ней огонь. Если время, потребное для получения информации и прекращения огня, превышает общую длительность обстрела, то разница между «запасом» и «расходом» исчезает.

Поставим сначала самую простую задачу о расходе средств. Пусть для поражения одиночной цели выделено n обобщенных выстрелов, каждый из которых поражает ее с вероятностью p. Стрельба прекращается мгновенно после поражения цели. Требуется определить средний расход средств $\nu^{(n)}$.

Определим средний расход средств при помощи достаточно наглядных, но не совсем строгих рассуждений.

Вероятность поражения цели при n обобщенных выстрелах равна

$$W(n) = 1 - (1-p)^n. \tag{77.1}$$

Следовательно, на все n обобщенных выстрелов приходится в среднем $W(n)$ пораженных целей.

Каждый обобщенный выстрел поражает в среднем p целей. Если будет произведено в среднем $\nu^{(n)}$ обобщенных выстрелов, то они поразят в среднем $\nu^{(n)}p$ целей. Следовательно,

$$\nu^{(n)}p = 1 - (1-p)^n,$$

откуда и находим средний расход средств:

$$\nu^{(n)} = \frac{1-(1-p)^n}{p}, \tag{77.2}$$

т. е. *при мгновенном прекращении огня по пораженной цели средний расход средств равен вероятности поражения цели при n выстрелах, деленной на вероятность поражения одним выстрелом.*

Пример 1. По воздушной цели ведется стрельба залпами зенитных управляемых ракет; выделенный запас средств $n=3$ залпам; каждым залпом цель поражается с вероятностью $p=0{,}6$. Стрельба по цели прекращается немедленно после ее поражения. Найти средний фактический расход средств.

Решение. Вероятность поражения цели тремя залпами равна

$$W(3) = 1-(1-p)^3 = 0{,}936.$$

Средний фактический расход средств

$$\nu^{(3)} = \frac{1-(1-p)^3}{p} = \frac{0{,}936}{0{,}6} \approx 1{,}56 \text{ залпа},$$

т. е. из трех выделенных залпов фактически будет в среднем израсходовано 1,56, а 1,44 залпа в среднем будет сэкономлено.

Если запас средств, выделенный для поражения цели, практически неограничен ($n=\infty$), то вероятность поражения цели $W(n)$ обращается в единицу и формула (77.2) принимает вид:

$$\nu^{(\infty)} = \frac{1}{p}, \tag{77.3}$$

т. е. *при неограниченном запасе средств средний фактический их расход до поражения цели есть величина, обратная вероятности поражения цели на один выстрел.*

Пример 2. Производится стрельба неуправляемыми ракетами по цели, вероятность поражения которой при одном выстреле равна 0,2. Запас средств неограничен. Определить средний фактический расход средств.

Решение.

$$\nu^{(\infty)} = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}2} = 5 \text{ ракет}.$$

До сих пор мы рассматривали расход средств при мгновенном прекращении огня после поражения цели. Рассмотрим более сложный случай, когда прекращение огня после поражения цели з а п а з д ы в а е т. Это запаздывание может быть связано с двумя причинами:

— поражение цели обнаруживается не сразу;

— при получении информации о поражении цели стрельба не прекращается мгновенно, а еще длится некоторое время (хотя бы потому, что некоторые средства, выпущенные по цели, уже находятся в полете и не могут быть возвращены обратно).

Определим средний расход средств с учетом запаздывания. Обозначим τ суммарный промежуток времени, отделяющий момент поражения цели от момента прекращения огня по ней (время запаздывания). За это время может быть произведено некоторое количество выстрелов; обозначим его k.

Требуется найти средний расход средств при данном «перерасходе» k.

Вполне естественно предположить, что $k<n$, где n — запас средств. Обозначим $\nu_k^{(n)}$ средний расход средств с учетом «перерас-

хода» k и вычислим величину $\tilde{\nu}_k^{(n)}$. Будем рассуждать так: средний расход средств $\tilde{\nu}_k^{(n)}$ будет складываться из фиксированного «перерасхода» k, который будет потрачен при любых обстоятельствах, и того среднего расхода остальных $n-k$ средств, которое пришлось бы потратить, если бы весь наш запас был $n-k$. Получим:

$$\tilde{\nu}_k^{(n)} = \nu^{(n-k)} + k, \tag{77.4}$$

или, пользуясь формулой (77.2),

$$\tilde{\nu}_k^{(n)} = \frac{1-(1-p)^{n-k}}{p} + k. \tag{77.5}$$

Для упрощения расчетов по формуле (77.5) можно величину k, стоящую в показателе степени, округлять до ближайшего целого числа. При неограниченном запасе средств средний расход с учетом запаздывания будет

$$\tilde{\nu}^{(\infty)} = \frac{1}{p} + k. \tag{77.6}$$

Пример 3. На поражение одиночной цели выделено 5 ракет; каждая ракета поражает цель с вероятностью $p=0{,}4$. Средний интервал времени между выстрелами равен 2 *мин;* время полета ракеты до цели 45 *сек.* Поражение цели обнаруживается в среднем через 1,5 *мин,* после чего стрельба прекращается. Определить средний расход ракет на поражение цели.

Решение. Время запаздывания τ равно времени, необходимому на получение информации о поражении, плюс время полета ракеты:

$$\tau = 1{,}5 + 0{,}75 = 2{,}25 \text{ мин.}$$

За это время будет выпущено в среднем

$$\frac{2{,}25}{2} = 1{,}12 \approx 1 \text{ ракета.}$$

Средний расход средств равен

$$\nu_1^{(5)} = \frac{1-(1-0{,}4)^4}{0{,}4} + 1{,}12 \approx 3{,}30 \text{ ракеты.}$$

Аналогичным способом производится расчет фактического среднего расхода средств при стрельбе по групповой цели, если только заданы у с л о в и я п р е к р а щ е н и я о г н я, т. е. указано, при достижении какого результата обстрел групповой цели прекращается.

Наиболее просто решается задача о среднем расходе средств, если стрельба ведется до полного истребления групповой цели или до истощения всех выделенных средств. Тогда средний расход (при отсутствии запаздывания) может быть определен по формуле

$$\nu^{(n)} = \frac{M_{\text{п}}}{p}, \tag{77.7}$$

где $M_{\text{п}}$ — среднее число пораженных единиц в группе при n выстрелах по ней;

p — вероятность поражения элементарной цели одним выстрелом.

Пример 4. Производится стрельба с переносом огня по рассредоточенной групповой цели, состоящей из трех единиц ($N=3$) (см. пример 1 § 37); выделено 5 обобщенных выстрелов, вероятность поражения одним выстрелом $p=0,7$. Стрельба ведется либо до поражения всех трех целей, либо до израсходования всех пяти выстрелов. Определить средний фактический расход средств.

Решение. Из примера 1 § 37 берем среднее число пораженных единиц

$$M_{\text{п}} = 2{,}806.$$

Разделив его на $p=0,7$, найдем средний фактический расход:

$$\nu^{(5)} = \frac{2{,}806}{0{,}7} = 4 \text{ выстрела.}$$

Расчет среднего расхода средств при стрельбе по групповой цели с учетом запаздывания несколько более сложен, чем в случае одиночной цели, и мы на нем останавливаться не будем.

Остановимся на вопросе о соотношении между запасом средств и фактическим их расходом. При стрельбе по одиночной цели запас средств n, как правило, не совпадает с расходом $\nu^{(n)}$. Эти величины совпадают только в случае, когда время запаздывания τ больше всего времени обстрела. Таким образом, при стрельбе по одиночной цели средства, выделенные для ее поражения, могут оказаться частично «замороженными». При стрельбе по групповой цели, если возможен свободный перенос огня, разница между запасом средств и их фактическим расходом сглаживается, так как средства, сэкономленные на одной из элементарных целей, после ее поражения могут быть использованы для стрельбы по другой цели. В частности, если вероятность полного истребления групповой цели мала, средний расход средств практически совпадает с запасом:

$$\nu^{(n)} \approx n.$$

Это и естественно, так как в условиях, когда полное истребление групповой цели маловероятно, практически все запасенные средства будут израсходованы.

Таким образом, при стрельбе по группе целей, если имеется возможность переноса огня, запасенные средства расходуются более интенсивно. Среднее количество запасенных средств, приходящееся на одну пораженную цель, оказывается меньше; с точки зрения экономической такой способ обстрела является более выгодным. В частности, с точки зрения запаса средств при обороне территории от воздушного налета выгоднее располагать средства обороны не на одном, а на нескольких рубежах, с тем чтобы на последующих рубежах обстреливать только те цели, которые не были поражены на предыдущих.

ГЛАВА 12

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

§ 78. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ИГР. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В предыдущих главах мы рассмотрели ряд задач, связанных с учетом противодействия противника. При решении всех этих задач мы считали, что образ действий противника известен. Однако далеко не всегда это бывает так. Очень часто намерения противника заранее неизвестны: он может поступить так, а может и иначе. Кроме того, в общем случае противник принимает свои контрмеры в зависимости от того, какое решение примем мы сами.

Единственное, что мы всегда знаем об образе действий противника, это следующее: он всегда будет стремиться поступать *наихудшим для нас образом*, т. е. примет все зависящие от него меры, чтобы помешать нам добиться успеха.

При решении таких задач исследования операций, где образ действий противника заранее неизвестен, может быть полезной специальная математическая наука — *теория игр*.

Теорию игр определяют обычно, как *математическую теорию конфликтных ситуаций*. Конфликтной называется ситуация, в которой сталкиваются интересы двух или более сторон, преследующих различные цели.

Практика дает нам многие примеры конфликтных ситуаций. Несомненно, что любая ситуация из области военных действий принадлежит к их числу. Встречаются конфликтные ситуации и в экономике (особенно в условиях капиталистической конкуренции).

Наиболее простые примеры конфликтных ситуаций наблюдаются в играх (шахматы, шашки, карты, домино и т. п.). Отсюда и название «теория игр», закрепившееся за математической теорией конфликтных ситуаций. Игра — это конфликтная ситуация, регламентированная определенными правилами, указывающими:

— порядок чередования действий, или «ходов», участников;

— правила выполнения каждого хода;

— количественный результат игры (выигрыш, проигрыш), к которому приводит данная совокупность ходов.

Сформулировать реальную конфликтную ситуацию в *игровой форме* — это значит, схематизировать ее так, чтобы ясно были видны возможные способы поведения участников (так называемые «стратегии») и численный результат, к которому приводит каждая комбинация стратегий той и другой стороны.

Здесь мы будем рассматривать только парные игры, в которых участвуют две стороны. Эти стороны мы будем обозначать К и С (Красные и Синие). Сторону К условно назовем «мы», сторону С — «противник». Будем считать, что интересы сторон в игре прямо противоположны, т. е. одна сторона выигрывает то, что проигрывает другая. Это нам позволит интересоваться выигрышем только одной стороны, например К (выигрыш С будет равен ему по абсолютной величине и противоположен по знаку).

Рассмотрим игру двух участников: К (Красные) и С (Синие); у игрока К имеется m возможных стратегий (образов действий):

$$K_1,\ K_2, \ldots,\ K_m,$$

а у игрока С — n возможных стратегий:

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_n.$$

Такая игра называется «игрой $m \times n$». Каждой комбинации стратегий K_i и C_j соответствует определенный выигрыш (или средний выигрыш) игрока К (равный выигрышу С с обратным знаком). Обозначим этот выигрыш k_{ij}.

Предположим, что нам известны значения k_{ij} для каждой пары стратегий. Тогда игра является полностью определенной, и ее условия могут быть записаны в виде таблицы (матрицы):

t		Стратегии Синих			
		C_1	C_2	...	C_n
Стратегии Красных	K_1	k_{11}	k_{12}	...	k_{1n}
	K_2	k_{21}	k_{22}	...	k_{2n}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	K_m	k_{m1}	k_{m2}	...	k_{mn}

Такая матрица называется «платежной матрицей» или «матрицей игры». Если игра записана в таком виде, то говорят, что она **приведена к нормальной форме**.

Любая конечная игра, т. е. игра, в которой у каждой стороны имеется конечное число стратегий, в принципе может быть приведена к нормальной форме. Практически осуществить это бывает иногда трудно, если число стратегий очень велико. Мы будем рассматривать примеры игр только с небольшим числом стратегий, где построение матрицы трудностей не вызывает.

Пример 1. Сторона К (Красные), располагающая двумя батальонами пехоты, стремится захватить некоторый объект Синих (рис. 78.1). Каждый из батальонов может быть направлен к объекту по любой из двух дорог: I и II. Сторона С располагает тремя батальонами, которые она может любым образом распределить по дорогам I и II. Если на дороге встречаются один батальон Красных с одним батальоном Синих, то они вступают в бой, батальон Красных с вероятностью P_1 подавляет оборону Синих, проходит к объекту и занимает его, с вероятностью $1 - P_1$ отступает и отказывается от выполнения задания. Если встречаются два батальона Красных с двумя батальонами Синих, то Красные с вероятностью P_2 подавляют оборону Синих и занимают объект, а с вероятностью $1 - P_2$ отступают и отказываются от выполнения задания. Если

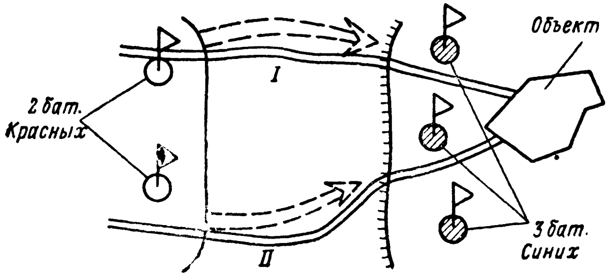


Рис. 78.1.

встречается один батальон Красных с превосходящими силами Синих (два или три батальона), то Красные вынуждены отступить. Если встречаются два батальона Красных с одним Синих, то они с полной достоверностью подавляют оборону Синих, проходят к объекту и занимают его. Считается, что, заняв объект, Красные получают выигрыш, равный 1, а отступив, — выигрыш, равный 0 (потери, понесенные обеими сторонами в ходе боя, в счет не идут). Требуется сформулировать ситуацию в игровых терминах и построить матрицу игры

Решение. У Красных имеются три стратегии:

K_1 — послать оба батальона по дороге I $\left(\begin{array}{r} -\cdot-\cdot- \text{ I} \\ -- \text{ II} \end{array}\right)$;

K_2 — послать оба батальона по дороге II $\left(\begin{array}{r} -- \text{ I} \\ -\cdot-\cdot- \text{ II} \end{array}\right)$;

K_3 — послать по одному батальону по каждой дороге $\left(\begin{array}{r} -\cdot- \text{ I} \\ -\cdot- \text{ II} \end{array}\right)$.

У Синих имеются четыре стратегии:

C_1 — оборонять всеми тремя батальонами дорогу I, а дорогу II оставить незащищенной $\left(\begin{array}{r} -\cdot-\cdot-\cdot- \text{ I} \\ --- \text{ II} \end{array}\right)$;

C_2 — оборонять всеми тремя батальонами дорогу II, а дорогу I оставить незащищенной $\left(\begin{array}{r} --- \text{ I} \\ -\cdot-\cdot-\cdot- \text{ II} \end{array}\right)$;

C_3 — поставить на дороге I один батальон, а на дороге II два батальона $\left(\begin{array}{r} -\cdot- \text{ I} \\ -\cdot-\cdot- \text{ II} \end{array}\right)$;

C_4 — поставить на дороге I два батальона, а на дороге II один батальон $\left(\begin{array}{r} -\cdot-\cdot- \text{ I} \\ -\cdot- \text{ II} \end{array}\right)$.

Матрица игры имеет следующий вид:

		Стратегии Синих			
		C_1 —·—·—·— I ——— II	C_2 ——— I —·—·—·— II	C_3 —·— I —·—·— II	C_4 —·—·— I —·— II
Стратегии Красных	K_1 —·—·— I ——— II	0	1	1	P_2
	K_2 ——— I —·—·— II	1	0	P_2	1
	K_3 —·— I —·— II	1	1	P_1	P_1

Возникает вопрос: как действовать сторонам в данной конфликтной ситуации? Не зная аппарата теории игр, ответить на этот вопрос затруднительно.

К рассмотренной здесь игре мы еще вернемся в дальнейшем и дадим ее «решение», т. е. сформулируем рекомендации сторонам.

§ 79. ЗАДАЧА ТЕОРИИ ИГР. ПРИНЦИП МИНИМАКСА

Целью теории игр является выработка рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтных ситуациях, т. е. определение **оптимальной стратегии** каждого из игроков.

«Оптимальной стратегией» игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку **максимально возможный средний выигрыш**) (или, что то же, минимально возможный средний проигрыш).

При выборе этой стратегии за основу берется предположение, что противник является вполне разумным и делает все, чтобы помешать нам добиться своей цели. Основной принцип теории игр можно сформулировать так:

выбирай свое поведение так, чтобы оно было рассчитано на наихудший для тебя образ действий противника.

«Решить игру» — это значит указать оптимальные стратегии для каждого игрока, такие, что они гарантируют каждому игроку при систематическом их применении в среднем наилучший возможный для него результат.

Перед тем как заниматься решением игр, необходимо познакомиться еще с некоторыми понятиями и ввести новые определения. Сделаем это на конкретных примерах.

Рассмотрим конечную игру 3×4 с матрицей:

		Стратегии Синих			
		C_1	C_2	C_3	C_4
Стратегии Красных	K_1	3	8	2	3
	K_2	4	3	8	7
	K_3	7	2	1	5

Требуется проанализировать эту игру и указать, какой стратегией должен пользоваться каждый из игроков. Предполагается, что игроку можно пользоваться только одной-единственной из своих стратегий.

Для того чтобы дать рекомендации, проанализируем стратегии Красных, начиная с первой. Предположим, что «мы» (Красные) выбрали стратегию K_1. Тогда, учитывая, что «противник» (Синие) разумен и заинтересован в том, чтобы проиграть поменьше, нужно ожидать, что он выберет стратегию C_3, при которой наш выигрыш наименьший (две единицы). Таким образом, число 2 — тот выигрыш, на который мы можем ориентироваться, выбирая стратегию K_1.

Аналогично, выбирая стратегию K_2, мы должны ориентироваться на выигрыш 3 (так как разумный противник выберет стратегию C_2). При нашей стратегии K_3 мы вправе рассчитывать только на выигрыш 1.

Запишем эти выигрыши (минимумы строк) в виде дополнительного столбца справа от матрицы.

		Стратегии Синих				
		C_1	C_2	C_3	C_4	Минимумы строк
Стратегии Красных	K_1	3	8	2	3	2
	K_2	4	3	8	7	3*
	K_3	7	2	1	5	1

Очевидно, «мы» (Красные) должны отдать предпочтение той стратегии, для которой выигрыш, на который мы вправе ориентироваться, максимален. Максимальным из минимумов в данном случае является число 3 (отмечено звездочкой). Следовательно, из всех своих стратегий «мы» должны предпочесть K_2.

Отмеченное звездочкой число — максимум из минимумов по строкам таблицы — называется *максимином* или *нижней ценой игры*. Условимся обозначать его α. В нашем случае $\alpha=3$. Нижняя цена игры α — это *максимальный выигрыш, который мы себе можем гарантировать в игре против разумного противника, выбирая одну из своих стратегий.*

Проведем аналогичное рассуждение за противника (Синие). Он заинтересован в том, чтобы отдать поменьше, но, памятуя о нашей злонамеренности, должен рассчитывать каждый раз на наихудшее для себя наше поведение. Если он выберет стратегию C_1, мы ему ответим K_3, и он отдаст 7 единиц. Если он выберет C_2, мы ответим K_1, и он отдаст 8 единиц и т. д. Выпишем максимумы столбцов внизу, под таблицей, в виде дополнительной строки.

		Стратегии Синих				
		C_1	C_2	C_3	C_4	Минимумы строк
Стратегии Красных	K_1	3	8	2	3	2
	K_2	4	3	8	6	3*
	K_3	7	2	1	5	1
	Максимумы столбцов	7	8	8	6*	

Минимальный из этих максимумов (отмечен звездочкой) равен 6. Эта величина называется *минимаксом*, или *верхней ценой игры*. Верхняя цена игры — это *минимальный проигрыш, на который может рассчитывать «противник» (Синие), выбрав одну из своих стратегий в расчете на наихудшее для себя наше поведение.*

Условимся обозначать верхнюю цену игры β. В нашем случае $\beta=6$.

Принцип, диктующий каждой стороне выбор своей наиболее осторожной («перестраховочной») стратегии, в расчете на наихудшее для себя поведение противника, является основным в теории игр и носит название «принципа минимакса». Сами же стратегии, рекомендуемые на основании этого принципа, называются минимаксными стратегиями.

В данном примере минимаксные стратегии будут:

— для Красных стратегия K_2;

— для Синих стратегия C_4.

Пример 1. У «нас» (Красные) три образца вооружения: K_1, K_2, K_3, у противника» (Синие) три образца радиопомех: C_1, C_2, C_3. Эффективность вооружения характеризуется математическим ожиданием числа пораженных целей. «Мы» заинтересованы в том, чтобы эта величина была максимальна, «противник» — чтобы она была минимальна. Матрица игры имеет вид:

	C_1	C_2	C_3	Минимумы строк
K_1	3	6	10	3
K_2	4	7	5	4*
K_3	8	2	1	1
Максимумы столбцов	8	7*	10	

Найти нижнюю цену игры α, верхнюю цену игры β и минимаксные стратегии сторон К и С.

Решение. $\alpha=4$, $\beta=7$; минимаксные стратегии K_2 и C_2.

Минимаксные стратегии, которые мы в первом приближении рекомендовали игрокам, обладают одним досадным свойством — неустойчивостью. Они изменяются, когда становится что-то известно о поведении противника. Действительно, вернемся к примеру 1 и допустим, что Красные придерживаются рекомендуемой им стратегии K_2, а Синие — стратегии C_2. Пока они это делают, выигрыш Красных равен 7. Предположим теперь, что Синим стала известна стратегия Красных. Тогда они, стремясь уменьшить свой проигрыш, перейдут на стратегию C_1 и будут проигрывать только 4. Но допустим, что Красные узнали о том, что Синие держатся стратегии C_1. Тогда они перейдут на стратегию K_3, стремясь к выигрышу 8, и т. д. Таким образом, минимаксные стратегии в общем случае неустойчивы: они могут быть нарушены, если та или другая сторона раздобудет сведения об образе действий своего противника.

Однако существуют игры, для которых минимаксные стратегии устойчивы. Это те игры, для которых нижняя цена равна верхней:

$$\alpha=\beta.$$

Общее значение нижней и верхней цен игры, если оно существует, называется чистой ценой игры (иногда просто «ценой игры»). Мы его будем обозначать ν.

Рассмотрим, например, игру 4×4 матрицей:

	C_1	C_2	C_3	C_4	Минимумы строк
K_1	4	5	9	3	3
K_2	8	4	3	7	3
K_3	7	**6**	8	9	6*
K_4	7	2	4	6	2
Максимумы столбцов	8	6*	8	9	

Требуется найти нижнюю и верхнюю цены игры, указать минимаксные стратегии и проверить их на устойчивость.

Имеем: $\alpha=6$; $\beta=6$; нижняя цена игры равна верхней. Следовательно, у игры имеется чистая цена, равная $\nu=6$. Минимаксные стратегии — K_3 и C_2. Легко убедиться, что эти стратегии устойчивы, так как никакие сведения об образе действий одной стороны не могут побудить другую изменить свое поведение.

Элемент 6, выделенный жирным шрифтом в матрице, является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. Такой элемент матрицы, если он имеется, называется седловой точкой.

Седловой точке соответствует пара минимаксных стратегий (в нашем примере K_3 и C_2). Эти стратегии называются оптимальными, а их совокупность — решением игры.

Решение игры обладает следующим замечательным свойством Если один из игроков (например, K) придерживается своей оптимальной стратегии, а другой (C) будет отклоняться от своей, то такое отклонение ни в каком случае не может быть для него выгодно; оно может в лучшем случае оставить его положение неизменным, а в худшем случае испортить его.

Решение игры в игре с седловой точкой представляет собой как бы положение равновесия: любое одностороннее изменение каждым игроком своей оптимальной стратегии может быть для него только невыгодно. Отступая от своей оптимальной стратегии, игрок уменьшает свой выигрыш, что вынуждает его вернуться обратно.

Таким образом, если игра имеет седловую точку, то у нее существует решение — пара устойчивых стратегий [1].

Пример 2. Найти решение игры 3×4:

	C_1	C_2	C_3	C_4	Минимумы строк
K_1	1	9	4	5	1
K_2	7	6	**5**	8	5*
K_3	2	3	4	10	2
Максимумы столбцов	7	9	5*	10	

Решение. $\alpha=\beta=\nu=5$. Решение игры — пара стратегий: K_2 и C_3

Пример 3. Найти решение игры 4×4:

	C_1	C_2	C_3	C_4	Минимумы строк
K_1	0,2	0,9	0,3	0,5	0,2
K_2	0,7	0,6	**0,5***	0,8	0,5*
K_3	0,2	0,3	0,4	1,0	0,2
K_4	0,5	0,6	**0,5***	0,6	0,5*
Максимумы столбцов	0,7	0,9	0,5*	1,0	

Решение. $\alpha=\beta=\nu=0{,}5$. Игра имеет две седловые точки и два решения: K_2C_3 и K_4C_3.

Класс игр, обладающих седловой точкой, имеет большое значение в теории игр.

Анализируя любую игру, надо прежде всего поинтересоваться вопросом: а нет ли у нее седловой точки?. Если есть, то игра решается очень просто.

---

[1] Игра может иметь не одну седловую точку, а несколько. Тогда она имеет не одно решение, а несколько. Можно доказать, что все они приводят к одному и тому же выигрышу.

Имеются типы игр, для которых существование седловой точки доказано теоретически. Примером игр, которые всегда имеют седловую точку, являются так называемые **игры с полной информацией**. Это те игры, в которых каждый из участников знает все о поведении другого с начала игры до данного момента. К играм с полной информацией относятся такие общеизвестные игры, как шахматы, шашки. Теоретически доказано, что любая из них имеет седловую точку и, значит, решение (пару оптимальных стратегий). Конкретное решение шахматной игры не найдено только потому, что число возможных стратегий в этой игре необозримо велико, так что нет практической возможности привести игру к нормальной форме и найти в матрице седловую точку.

§ 80. ЧИСТЫЕ И СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ. РЕШЕНИЕ ИГРЫ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

Среди игр, имеющих практическое значение, сравнительно редко встречаются игры с седловой точкой; гораздо чаще нижняя и верхняя цены игры различны. Если в такой игре каждый игрок может применять только одну-единственную стратегию, он может выбрать ее, пользуясь принципом минимакса. Например, игрок К, выбирая свою минимаксную стратегию, гарантирует себе выигрыш. не меньший α. Возникает вопрос: а нельзя ли гарантировать себе больший выигрыш, если применять не одну-единственную «чистую» стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий?

Такие комбинированные стратегии, состоящие в случайном чередовании нескольких «чистых» с определенными частотами (вероятностями), называются в теории игр **смешанными стратегиями**.

В том, что смешанные стратегии могут дать преимущество, можно убедиться на элементарном примере.

Два игрока К и С ведут следующую игру («поиск»). Игрок К хочет поймать С, игрок С хочет избежать встречи с К. Имеются два пункта: I и II, в которых может находиться С. Игрок К может искать С в любом (но только в одном) из этих двух пунктов. Если К найдет С, то последний платит К один рубль. Если же К не найдет С, то он сам должен ему заплатить один рубль. Требуется построить матрицу игры, найти ее нижнюю и верхнюю цены и сформулировать рекомендации сторонам.

Проанализируем возможности игроков. У игрока К — две стратегии:

K_1 — искать в пункте I;

K_2 — искать в пункте II.

У игрока С — тоже две стратегии:

C_1 — прятаться в пункте I;

C_2 — прятаться в пункте II.

Матрица игры имеет вид:

	C_1	C_2	Минимумы строк
K_1	1	—1	—1
K_2	—1	1	—1
Максимумы столбцов	1	1	1

Нижняя цена игры $\alpha = -1$. Это значит, что игрок К ни в каком случае не проиграет более одного рубля. Вывод тривиальный и был ясен заранее. Верхняя цена игры $\beta = 1$. Это значит, что игрок С тоже ни при каких условиях не проиграет К больше одного рубля. Вывод также очевиден.

Любая стратегия К и любая стратегия С являются минимаксными, так что принцип минимакса в выборе стратегий помочь не может.

Действительно, встанем мысленно на место К. Какую стратегию ему выбрать?

Предположим, что он выбрал K_1, т. е. ищет всегда в пункте I. Тогда, естественно, его противник С догадается об этом и будет прятаться всегда в пункте II; К всегда будет проигрывать один рубль. Нетрудно убедиться, что систематическое применение *любой* стратегии приведет применяющего ее игрока (будь это К или С) *только к проигрышу*: противник догадается об этом и будет поступать всегда наихудшим для партнера образом.

Как же быть, чтобы, если не выигрывать, то по крайней мере не проигрывать в данной игре? Ответ напрашивается сам собой: нужно не придерживаться слепо одной какой-либо (чистой) стратегии, а применять их чередуя, «в разбивку», так чтобы противник не мог догадаться, с какой именно стратегией он каждый раз имеет дело. Однако строгое чередование стратегий (например, через одну) не достигает цели, так как о порядке чередования противник тоже может догадаться. Очевидно, хорошим способом, при котором противник не может догадаться о нашем поведении в каждой партии игры, будет такой, когда *мы сами заранее не знаем, что будем делать*. Например, К может подбросить монету и, если выпадет герб, искать в пункте I, а если выпадет цифра — в пункте II. Тогда, очевидно, он гарантирует себя от проигрыша: средний его выигрыш (как и противника) будет равен нулю.

Таким образом, мы приходим к одному из основных понятий теории игр: к понятию «смешанной стратегии».

Смешанной стратегией называется сложная стратегия, состоящая в случайном чередовании двух или более чистых стратегий с определенными частотами.

Очевидно, каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной, в которой все стратегии, кроме одной, применяются с нулевыми частотами, а данная — с частотой 1.

В предыдущем параграфе мы установили, что если игра имеет седловую точку, то у нее есть решение *в чистых стратегиях*. Признак наличия седловой точки: $\alpha=\beta$ (нижняя цена игры равна верхней).

Как же обстоит дело, если $\alpha\neq\beta$? Существует ли у таких игр решение?

Оказывается, существует, но не в области чистых стратегий, а в области *смешанных*.

Например, игра «поиск», только что нами рассмотренная, не имеет решения в чистых стратегиях, но зато имеет решение в смешанных. А именно: каждый игрок должен смешивать свои две стратегии в равных пропорциях, т. е. с частотами $1/2$. Легко убедиться, что любое отступление от такой оптимальной стратегии может быть только невыгодным, так как отступающий игрок рискует быть «разоблаченным» своим противником, который постарается на этом выгадать.

Можно доказать, что *любая конечная игра имеет решение* (в области чистых или смешанных стратегий). Это положение, которое мы приводим без доказательства, называется «основной теоремой теории игр».

Предположим, что обе стороны К и С, участвующие в игре, придерживаются каждая своей оптимальной (чистой или смешанной) стратегии, т. е. поступают согласно решению игры. Тогда результат игры (выигрыш игрока К) будет характеризовать объективное соотношение сил в данной игре, вытекающее из ее условий. Этот выигрыш называется *ценой игры*; мы будем его обозначать ν (так же, как чистую цену игры на стр. 248). Если $\nu=0$ (как в игре «поиск»), это означает, что игра в равной мере выгодна или невыгодна каждой стороне, т. е. шансы участников одинаковы. Если $\nu>0$, это означает, что игра выгодна для К и невыгодна для С; если $\nu<0$ — наоборот.

Если оба игрока в игре с ценой ν будут придерживаться своих оптимальных стратегий, то выигрыш К будет равен цене игры ν. Этот выигрыш К будет получать, если противник тоже будет вести себя разумно; если же противник отступит от своей оптимальной стратегии, то для К это может быть только выгодно: его выигрыш от этого меньше стать не может; если он изменится, то только в бо́льшую сторону.

Цена игры ν всегда лежит между нижней ценой игры α и верхней ценой игры β:

$$\alpha\leqslant\nu\leqslant\beta.$$

Введем специальное обозначение для смешанных стратегий. Пусть, например, смешанная стратегия Красных состоит в применении стратегий $К_1$, $К_2$, $К_3$ с частотами p_1, p_2, p_3, причем $p_1+p_2+p_3=1$. Мы будем обозначать эту стратегию

$$S_{к}=\begin{pmatrix} К_1 & К_2 & К_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично смешанную стратегию Синих будем обозначать

$$S_{с}=\begin{pmatrix} С_1 & С_2 & С_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix},$$

где q_1, q_2, q_3 — частоты стратегий $С_1$, $С_2$, $С_3$ $(q_1+q_2+q_3=1)$. Оптимальные стратегии, образующие решение игры, будем обозначать $S^*_{к}$, $S^*_{с}$. Например, в игре «поиск» решение игры образуют смешанные стратегии:

$$S^*_{к}=\begin{pmatrix} К_1 & К_2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad S^*_{с}=\begin{pmatrix} С_1 & С_2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

В оптимальную смешанную стратегию игрока вовсе не обязательно должны входить все его стратегии. В общем случае в нее входят не все, а только некоторые. Стратегии, входящие в решение игры, называются а к т и в н ы м и.

Игра, в которой все стратегии обеих сторон являются активными, называется п о л н о с т ь ю у с р е д н е н н о й.

Решение игры обладает одним замечательным свойством, которое мы приведем здесь без доказательства. *Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры* ν *независимо от того, что делает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.* Он, например, может пользоваться любой из них в чистом виде, а также может их смешивать в любых пропорциях.

Этим свойством оптимальных стратегий мы будем в дальнейшем пользоваться при решении игр.

§ 81. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ИГР. ИГРЫ 2×2

Если игра $m \times n$ не имеет седловой точки, то нахождение решения — довольно трудная задача, особенно при больших m и n. Часто эту задачу удается упростить, если предварительно уменьшить число стратегий, вычеркивая некоторые излишние.

Излишние стратегии бывают: дублирующие и заведомо невыгодные.

Рассмотрим, например, игру 4×4 с матрицей:

	C_1	C_2	C_3	C_4
K_1	1	2	4	3
K_2	0	2	3	2
K_3	1	2	4	3
K_4	4	3	1	0

Сразу видно, что стратегия K_3 в точности повторяет (дублирует) K_1, поэтому любую из них можно вычеркнуть. Далее, сравнивая почленно строки K_1 и K_2, видим, что каждый элемент строки K_2 меньше соответствующего элемента строки K_1 (или, в крайнем случае, равен ему). Значит, для игрока К, стремящегося к выигрышу, стратегия K_2 заведомо невыгодна. Вычеркнем и ее. Матрица приведена к виду 2×4:

	C_1	C_2	C_3	C_4
K_1	1	2	4	3
K_4	4	3	1	0

Сравнивая между собой стратегии Синих, стремящихся отдать как можно меньше, замечаем, что для них стратегия C_3 заведомо невыгодна по сравнению с C_4; вычеркивая C_3, приводим матрицу окончательно к виду 2×3:

	C_1	C_2	C_4
K_1	1	2	3
K_4	4	3	0

В таком виде эту игру уже можно решать.

Наиболее простыми типами конечных игр, которые всегда можно решить элементарными способами, являются игры 2×2 и $2 \times n$.

Рассмотрим игру 2×2 с матрицей:

	C_1	C_2
K_1	k_{11}	k_{12}
K_2	k_{21}	k_{22}

(81.1)

Здесь могут встретиться два случая: 1) игра имеет седловую точку и 2) игра не имеет седловой точки.

Рассмотрим сначала первый случай. Если игра 2×2 имеет седловую точку, то решение очевидно: это — пара чистых стратегий, пересекающихся в седловой точке. Заметим, кстати, что в игре 2×2 наличие седловой точки всегда соответствует существованию заведомо невыгодных стратегий, которые должны быть вычеркнуты при предварительном анализе.

Пример 1. Найти решение игры 2×2 с матрицей:

	C_1	C_2	Минимумы строк
K_1	3	7	2
K_2	4	5	4*
Максимумы столбцов	4*	7	

Решение. $\alpha=\beta=\nu=4$. Оптимальные стратегии сторон: K_2 и C_1. Одновременно замечаем, что для Синих стратегия C_2 заведомо невыгодна и должна была бы быть вычеркнута заранее до решения игры.

Рассмотрим второй случай, когда матрица (81.1) не имеет седловой точки ($\alpha \neq \beta$). Найдем оптимальную смешанную стратегию Красных:

$$S_{\text{к}}^{*} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Для этого воспользуемся сформулированным выше свойством оптимальной стратегии: если К будет применять свою оптимальную стратегию $S_{\text{к}}^{*}$, то его выигрыш ν останется неизменным, как бы ни поступала сторона С, если только она не выйдет за пределы своих активных стратегий. Но в нашем случае обе стратегии Синих — C_1 и C_2 — заведомо активные (иначе игра имела бы седловую точку).

Значит, если сторона К будет пользоваться своей стратегией $S_к^*$, то С может выбрать любую из своих стратегий (C_1 или C_2), не меняя выигрыша ν. Найдем средний выигрыш, если К будет пользоваться смешанной стратегией $S_к^*$, а С — чистой стратегией C_1. Среднее значение (математическое ожидание) выигрыша будет равно $k_{11}p_1+k_{21}p_2$. Аналогично, если противник будет пользоваться стратегией C_2, средний выигрыш будет $k_{12}p_1+k_{22}p_2$. В обоих случаях он будет равен цене игры ν. Получим два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} k_{11}p_1+k_{21}p_2&=\nu, \\ k_{12}p_1+k_{22}p_2&=\nu. \end{aligned}\right\} \tag{81.2}$$

Учитывая, что $p_1+p_2=1$, получаем

$$k_{11}p_1+k_{21}(1-p_1)=k_{12}p_1+k_{22}(1-p_1),$$

откуда находим оптимальную частоту первой стратегии p_1:

$$p_1=\frac{k_{22}-k_{21}}{k_{11}+k_{22}-k_{12}-k_{21}}. \tag{81.3}$$

Частоту p_2 найдем, вычитая p_1 из единицы:

$$p_2=1-p_1. \tag{81.4}$$

Цену игры ν найдем, подставляя p_1, p_2 в любое из уравнений (81.2).

Так как цена игры ν известна, то для определения оптимальной стратегии Синих

$$S_c^*=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

достаточно одного уравнения, например:

$$k_{11}q_1+k_{12}q_2=\nu,$$

откуда, учитывая, что $q_1+q_2=1$, имеем

$$q_1=\frac{\nu-k_{12}}{k_{11}-k_{12}}, \quad q_2=1-q_1. \tag{81.5}$$

Пример 2. У «нас» (Красные) имеется два вида вооружения K_1 и K_2; у противника (Синие) — два вида помех: C_1 и C_2. Вероятность выполнения боевой задачи при различных комбинациях «вооружение»—«помехи» задана матрицей 2×2:

	C_1	C_2	Минимумы строк
K_1	0,2	0,8	0,2
K_2	0,7	0,3	0,3*
Максимумы столбцов	0,7*	0,8	

Найти решение игры.

Решение. $\alpha=0,3$; $\beta=0,7$. Игра не имеет седловой точки. По формуле (81.3) получим

$$p_1 = \frac{0,3-0,7}{0,2+0,3-0,8-0,7} = \frac{-0,4}{-1,0} = 0,4,$$

отсюда

$$p_2 = 1 - p_1 = 0,6.$$

Цена игры

$$\nu = 0,2 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,5.$$

По формуле (81.5)

$$q_1 = \frac{0,5-0,8}{0,2-0,8} = \frac{-0,3}{-0,6} = 0,5,$$

$$q_2 = 1 - 0,5 = 0,5.$$

Таким образом, оптимальные стратегии Красных и Синих найдены:

$$S_{\text{к}}^* = \begin{pmatrix} К_1 & К_2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad S_{\text{с}}^* = \begin{pmatrix} С_1 & С_2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix},$$

т. е. Красные должны в 40% всех случаев применять вооружение $К_1$, а в 60% — вооружение $К_2$. Синие должны в половине всех случаев применять помехи $С_1$, а в половине — помехи $С_2$. Если обе стороны (или, по крайней мере, одна из них) будут применять свои оптимальные стратегии, то вероятность выполнения боевой задачи будет равна $\nu=0,5$.

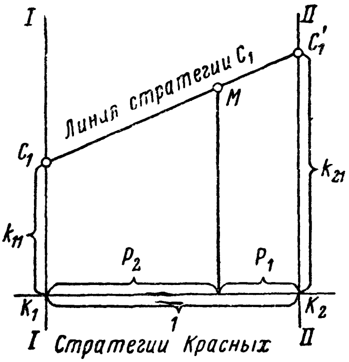


Рис. 81.1.

Решению игры 2×2 можно дать простую геометрическую интерпретацию. Пусть имеется игра 2×2 с матрицей (81.1). Возьмем участок оси абсцисс длиной 1 (рис. 81.1) и проведем через его концы $К_1$ и $К_2$ оси $I—I$ и $II—II$. На первой оси мы будем откладывать выигрыш при стратегии Красных $К_1$, на второй — при стратегии $К_2$.

Предположим, что Синие выбрали стратегию $С_1$. Очевидно, если «мы» (Красные) будем применять смешанную стратегию, смешивая в различных пропорциях $К_1$ и $К_2$, то наш выигрыш будет меняться по прямой $С_1С_1'$ — от k_{11} (при чистой стратегии $К_1$) до k_{21} (при чистой стратегии $К_2$). Если мы, например, смешаем их с частотами p_1 и p_2, то выигрыш будет изображаться ординатой точки M. Назовем прямую $С_1С_1'$ «линией стратегии $С_1$». Аналогично можно изобразить прямой линией $С_2С_2'$ выигрыш при стратегии $С_2$ (рис. 81.2).

Нам нужно найти оптимальную стратегию $S_{\text{к}}^*$, т. е. такую, при которой минимальный выигрыш (при любом поведении Синих) обращался бы в максимум. Для этого построим н и ж н ю ю границу выигрыша (жирная линия на рис. 81.2). Максимальная ордината этой нижней границы и будет цена игры ν, а точка O, где этот максимум достигается, определит пропорции p_1, p_2, в которых нужно смешивать стратегии K_1, K_2. Отрезок слева от точки O равен p_2, а справа — p_1.

Мы пришли к следующему графическому способу нахождения оптимальной стратегии Красных:

— построить линии стратегий Синих;

— обвести нижнюю границу выигрыша;

— найти на ней максимум; он будет равен цене игры ν и разделит отрезок между точками K_1, K_2 в отношении $p_2 : p_1$.

Как же искать оптимальную стратегию Синих? Совершенно аналогично, только вместо нижней границы выигрыша нужно

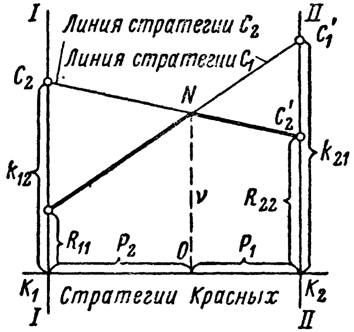


Рис. 81.2.

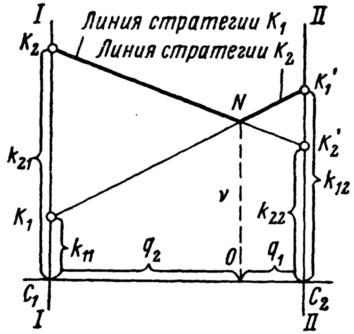


Рис. 81.3.

строить верхнюю границу и на ней искать не максимум, а минимум (рис. 81.3).

Пример 2. Красные посылают в район расположения Синих два бомбардировщика $Б_1$ и $Б_2$; $Б_1$ летит впереди, $Б_2$ — сзади.

Один из бомбардировщиков — заранее неизвестно какой — должен нести бомбу, другой выполняет функцию сопровождения. По пути к цели бомбардировщики подвергаются нападению истребителя Синих. Если истребитель атакует передний бомбардировщик, то по нему ведут огонь пушки обоих бомбардировщиков $Б_1$ и $Б_2$ (рис. 81.4, *а*). Если он атакует задний бомбардировщик, то по нему ведут огонь только пушки заднего бомбардировщика $Б_2$ (передний не может стрелять, так как в зону обстрела попадает задний бомбардировщик) (рис. 81.4, *б*). Оба бомбардировщика имеют одинаковое вооружение: стрелковые установки одного бомбардировщика сбивают истребитель с вероятностью $p_1 = 0{,}4$. Если истребитель не сбит, он сбивает атакуемый им бомбардировщик с вероятностью $p_2 = 0{,}9$.

Задача бомбардировщиков — донести бомбу до цели; задача истребителя — воспрепятствовать этому, т. е. сбить самолет-носитель. Требуется выбрать оптимальные стратегии сторон, а именно:

для Красных:

— какой бомбардировщик сделать носителем?

для Синих:

— какой бомбардировщик атаковать?

Решение. Стратегии Красных:

K_1 — сделать носителем $Б_1$;

K_2 — сделать носителем $Б_2$.

Стратегии Синих:
C_1 — атаковать $Б_1$;
C_2 — атаковать $Б_2$.

Игра 2×2; выигрыш — вероятность непоражения носителя.

Составляем матрицу игры, комбинируя стратегии попарно:

1. $К_1$, C_1 — носитель $Б_1$, атакуется $Б_1$; носитель не будет поражен, если бомбардировщики собьют истребителя, или не собьют, но он не поразит свою цель:

$$k_{11} = (1 - 0{,}6^2) + 0{,}6^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}676.$$

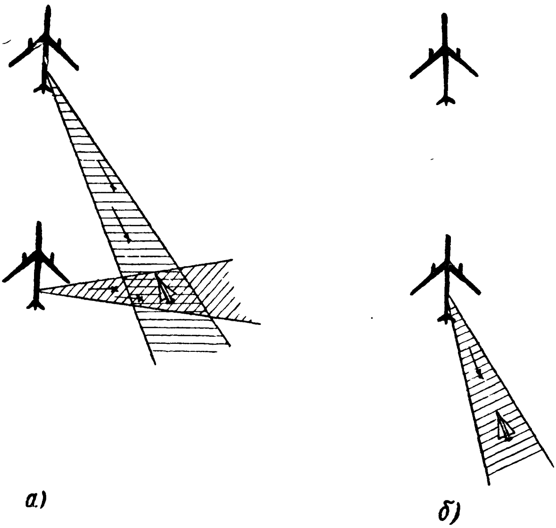


Рис. 81.4.

2. $К_2$, C_1 — носитель $Б_2$, атакуется $Б_1$; носитель не будет поражен, т. е.

$$k_{21} = 1.$$

3. $К_1$, C_2 — носитель $Б_1$, атакуется $Б_2$; носитель не будет поражен:

$$k_{12} = 1.$$

4. $К_2$, C_2 — носитель $Б_2$, атакуется $Б_2$. Носитель не будет поражен, если бомбардировщик $Б_2$ собьет истребитель или не собьет, но истребитель не поразит его:

$$k_{22} = 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}46.$$

Матрица игры имеет вид:

	C_1	C_2
$К_1$	0,676	1
$К_2$	1	0,46

Нижняя цена игры $\alpha = 0{,}676$.
Верхняя цена игры $\beta = 1$.

Ищем решение игры графически (рис. 81.5). Получаем

$$p_1 \approx 0{,}63; \quad p_2 \approx 0{,}37; \quad \nu = 0{,}8.$$

Оптимальная смешанная стратегия Красных:

$$S_{\text{К}}^* = \begin{pmatrix} \text{К}_1 & \text{К}_2 \\ 0{,}63 & 0{,}37 \end{pmatrix},$$

т. е. в 63% всех случаев надо делать носителем $Б_1$; в 37% всех случаев — $Б_2$.

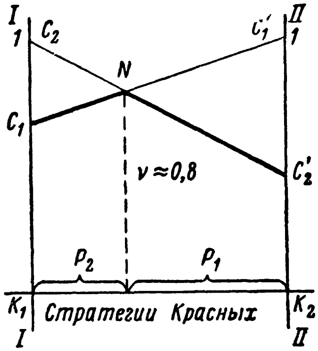


Рис. 81.5.

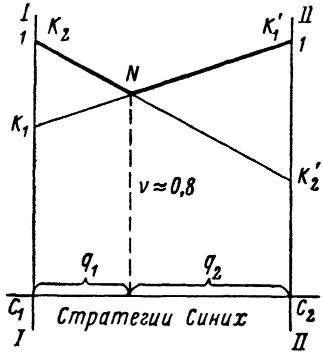


Рис. 81.6.

Решаем задачу за Синих (рис. 81.6). Чертеж, за исключением жирной линии, получается такой же, как на рис. 81.5; ему соответствует такое же решение:

$$S_{\text{с}}^* = \begin{pmatrix} \text{С}_1 & \text{С}_2 \\ 0{,}63 & 0{,}37 \end{pmatrix},$$

т. е. истребитель Синих должен в 63% случаев атаковать $Б_1$, а в 37% случаев атаковать $Б_2$. При таких стратегиях сторон бомбардировщики решают свою задачу — доносят бомбу до цели — в 80% случаев.

Заметим, что если бы Красные применяли свою минимаксную чистую стратегию К_1, т. е. всегда делали бы носителем $Б_1$, они могли бы гарантировать себе выигрыш только $\alpha = 0{,}676$.

§ 82. ИГРЫ $2\times n$

В предыдущем параграфе мы рассмотрели элементарные способы решения игр 2×2. Совершенно такими же способами решаются любые игры, где у одного игрока две стратегии, а у другого — любое число (игры $2\times n$). Можно доказать, что для любой игры $m\times n$, где $m<n$, существует решение, в котором с каждой стороны участвует не больше m активных стратегий. Отсюда следует, что у любой игры $2\times n$ есть решение, в котором с каждой стороны участвует не более двух активных стратегий. Таким образом, любая игра $2\times n$ сводится к игре 2×2.

Как же выделить из n стратегий противника две активные? Это очень просто сделать графическим способом. Пусть имеется игра $2\times n$, в которой у Красных две стратегии К_1 и К_2, а у Синих —

любое число стратегий. Построим линии стратегий Синих (рис. 82.1).

Активные стратегии Синих определяются так: строится нижняя граница выигрыша (жирная ломаная линия), и на ней находится точка N с максимальной ординатой. Те линии стратегий, пересече-

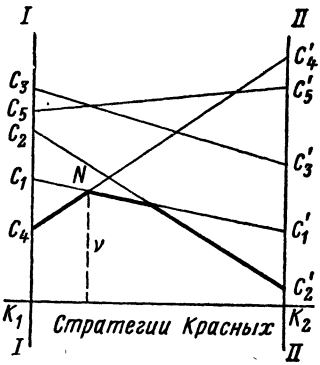


Рис. 82.1.

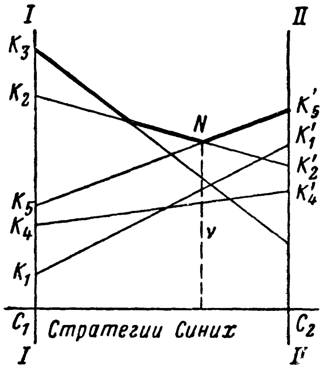


Рис. 82.2.

нием которых образована точка N, и представляют активные стратегии Синих (в данном случае C_1 и C_4). Таким образом, игра сводится к игре 2×2, которая может быть решена любым способом — графически или по формулам.

Если через точку N проходят не две, а больше линий стратегий, то можно в качестве активных взять любую пару из них.

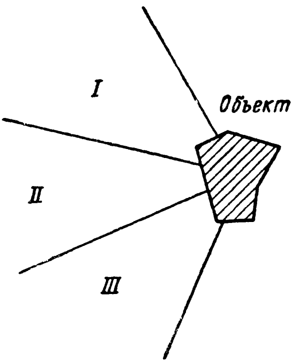


Рис. 82.3.

Очевидно, аналогичным способом можно поступать, если решается игра $m\times 2$, где у Красных — m стратегий, а у Синих — только две. В этом случае поступают так же, как в случае $2\times n$, меняя ролями стороны Красных и Синих (рис. 82.2).

Пример 1. Красные нападают на объект; Синие обороняют его. У Красных — два бомбардировщика; у Синих — три зенитных орудия. Каждый бомбардировщик — носитель мощного поражающего средства; чтобы объект был уничтожен, достаточно, чтобы к нему прорвался хотя бы один бомбардировщик. Бомбардировщики Красных могут выбирать для подхода к объекту любое из трех направлений: I, II и III (рис. 82.3). «Противник» (Синие) может размещать любое из своих орудий на любом направлении; при этом каждое оружие простреливает только область пространства, относящуюся к данному направлению, и не простреливает соседних направлений. Каждое орудие может обстрелять только один бомбардировщик; обстрелянный бомбардировщик поражается с вероятностью 1. Красные не знают, где размещены орудия; Синие не знают, откуда прилетят самолеты. Задача Красных — поразить объект; задача Синих — сохранить его непораженным. Найти решение игры.

Решение. Задача сводится к игре 2×3. Выигрыш — вероятность поражения объекта, т. е. прорыва хотя бы одного самолета через оборону.

Стратегии Красных:

K_1 — послать бомбардировщики по двум разным направлениям;

K_2 — послать оба бомбардировщика по одному и тому же направлению (выбрав их случайным образом, неожиданно для противника).

Стратегии Синих:

C_1 — поставить по одному орудию на каждое направление;

C_2 — поставить два орудия на одно направление и одно на другое, оставив третье незащищенным;

C_3 — поставить все три орудия на одно направление.

Составляем матрицу игры:

1. K_1, C_1 — бомбардировщики летят порознь, орудия расставлены по одному на каждом направлении. При этом ни один самолет не прорвется к объекту: $k_{11}=0$.

2. K_2, C_1 — бомбардировщики летят вместе, орудия расставлены поодиночке. При этом один самолет будет не обстрелян и прорвется к объекту: $k_{21}=1$.

3. K_1, C_2 — бомбардировщики летят порознь; противник защищает два направления и оставляет незащищенным третье. Вероятность того, что хотя бы один бомбардировщик прорвется к объекту, равна вероятности того, что хотя бы один из них выберет незащищенное направление. Вероятность этого вычислим через вероятность противоположного события: оба бомбардировщика, летя порознь, выберут защищенные направления:

$$k_{12} = 1 - 2/3 \cdot 1/2 = 2/3.$$

4. K_2, C_1 — бомбардировщики летят вместе; противник защищает одно направление двумя орудиями, а одно — одним, т. е. фактически защищает одно направление и оставляет незащищенным два.

Вероятность того, что хотя бы один самолет прорвется к объекту, равна вероятности выбора парой самолетов фактически незащищенного направления:

$$k_{22} = 2/3.$$

5. K_1, C_3 — бомбардировщики летят порознь; противник защищает тремя орудиями только одно направление: $k_{13}=1$.

6. K_2, C_3 — бомбардировщики летят вместе; противник защищает тремя орудиями только одно направление.

Чтобы прорваться к объекту, бомбардировщики должны выбрать незащищенное направление:

$$k_{23} = 2/3.$$

Матрица игры будет:

	C_1	C_2	C_3	Минимумы строк
K_1	0	2/3	1	0
K_2	1	2/3	2/3	2/3*
Максимумы столбцов	1	2/3*	1	

Так как нижняя цена игры равна верхней ($\alpha=\beta=2/3$), то игра имеет седловую точку и решение в чистых стратегиях. Оптимальными являются: для Красных стратегия K_2 (оба бомбардировщика летят вместе), для Синих стратегия C_2 (поставить на одно направление два орудия, на другое — одно, и третье направление оставить незащищенным).

Применяя геометрическую интерпретацию (рис. 82.4), видим, кроме того, что стратегия C_3 является заведомо невыгодной и что найденное решение не является единственным; к тому же результату ($\nu = 2/3$) мы придем, смешивая стратегии C_1 и C_2 в пропорции от $p_1 = 0$ (чистая стратегия C_2) до $p_1 = 1/3$ (точка пересечения линий стратегий C_1 и C_2).

Пример 2. Те же условия, что в предыдущем примере, но для Красных возможны четыре направления удара, а Синие располагают четырьмя орудиями.

Решение. У Красных по-прежнему две возможные стратегии:

K_1 — посылать бомбардировщики порознь;

K_2 — посылать бомбардировщики вместе.

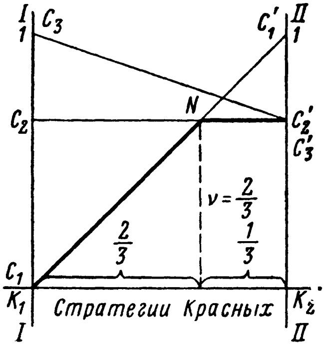


Рис. 82.4.

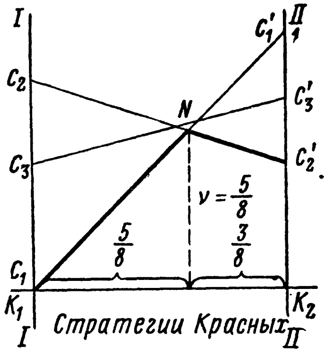


Рис. 82.5.

У Синих пять возможных стратегий:

$C_1(1+1+1+1)$ — ставить по одному орудию на каждое направление;

$C_2(2+2)$ — ставить по два орудия на два разных направления и оставлять незащищенными два остальных;

$C_3(2+1+1)$ — ставить два орудия на одно направление, по одному — на два других и одно оставлять незащищенным;

$C_4(3+1)$ — ставить три орудия на одно направление, одно — на другое и два оставлять незащищенным;

$C_5(4)$ — ставить все четыре орудия на одно направление.

Стратегии C_4 и C_5 отбросим как заведомо невыгодные. Рассуждая аналогично предыдущему примеру, строим матрицу игры:

	C_1	C_2	C_3	Минимумы строк
K_1	0	5/6	1/2	1/2*
K_2	1	1/2	3/4	1/2*
Максимумы столбцов	1	5/6	3/4*	

Нижняя цена игры $1/2$; верхняя $3/4$. Игра не имеет седловой точки; решение лежит в области смешанных стратегий. Пользуясь геометрической интерпретацией (рис. 82.5), выделим активные стратегии Синих C_1 и C_2. Решая полученную игру 2×2, найдем

$$p_1 = 3/8, \quad p_2 = 5/8, \quad \nu = 5/8.$$

Оптимальная стратегия Красных:

$$S_\text{к}^* = \begin{pmatrix} C_1, & C_2 \\ 3/8, & 5/8 \end{pmatrix}$$

состоит в том, чтобы в $^3/_8$ всех случаев посылать бомбардировщики порознь, а в $^5/_8$ случаев — вместе.

Оптимальная стратегия Синих:

$$S_\text{с}^* = \begin{pmatrix} C_1, & C_2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

т. е. в одной четверти всех случаев расставлять все четыре орудия на разных направлениях, а в остальных трех четвертях случаев ставить по два орудия на два разных направления.

§ 83. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ИГР ПРИ $m>2$, $n>2$

В общем случае решение игры $m\times n$ представляет довольно трудную задачу, причем ее сложность резко возрастает с увеличением m и n.

Геометрическая интерпретация, так помогающая нам при решении игр $2\times n$, может быть применена и для решения игр $3\times n$, но становится значительно менее наглядной и мало чем помогает; если же $m \geqslant 4$, $n \geqslant 4$, то она вообще неприменима.

Однако часто удается с помощью некоторых приемов уменьшить число фигурирующих в задаче стратегий, объединяя некоторые из них в смешанные, например из соображений симметрии.

Пример 1. Решить игру, условия которой и матрица приведены в примере 1 § 78 (распределение сил в наступлении и обороне).

Решение. Матрица игры 3×4 имеет вид:

	C_1 •—•—•— I ———— II	C_2 ———— I —•—•—•— II	C_3 —•— I —•— II	C_4 —•—•— I —•— II	Минимумы строк
K_1 —·—·— I ——— II	0	1	1	P_2	0
K_2 ——— I —·—·— II	1	0	P_2	1	0
K_3 —·— I —·— II	1	1	P_1	P_1	P_1
Максимумы столбцов	1	1	1	1	

Нижняя цена игры $\alpha = P_1$; верхняя $\beta = 1$. Игра имеет решение в области смешанных стратегий. Из соображений симметрии задачи видно, что в оптимальную смешанную стратегию Красных, какова бы она ни была, стратегии K_1 и K_2 должны входить с одинаковыми частотами:

$$p_1 = p_2.$$

Объединим эти две стратегии K_1, K_2 в одну, смешанную, которую обозначим K_{12}. Стратегия K_{12} будет состоять в том, что с вероятностью $1/2$ мы будем применять K_1, а с вероятностью $1/2$ — K_2. Выигрыш при этой стратегии найдется как среднее арифметическое из соответствующих строк матрицы. Новая матрица будет иметь вид.

	C_1	C_2	C_3	C_4
K_{12}	0,5	0,5	$\frac{1}{2}(1+P_2)$	$\frac{1}{2}(1+P_2)$
K_3	1	1	P_1	P_1

Поступим аналогично со стратегиями Синих, объединяя (смешивая с вероятностями $1/2$) стратегии C_1 и C_2; C_3 и C_4.

Получим матрицу 2×2:

	C_{12}	C_{34}
K_{12}	0,5	$\frac{1}{2}(1+P_2)$
K_3	1	P_1

Эта игра 2×2 может быть решена при любых конкретных значениях P_1 и P_2. Предположим, например, что $P_1=0{,}5$; $P_2=0{,}75$. Тогда матрица примет вид:

	C_{12}	C_{34}
K_{12}	0,5	0,875
K_3	1	0,5

Решение игры будет

$$p_{12} = \frac{0{,}5 - 1}{0{,}5 + 0{,}5 - 1 - 0{,}875} \approx 0{,}572,$$

$$p_3 = 1 - p_{12} \approx 0{,}428,$$

$$\nu = 0{,}5 \cdot 0{,}572 + 1 \cdot 0{,}428 \approx 0{,}714.$$

Оптимальная стратегия Красных будет

$$S_{\text{К}}^* = \begin{pmatrix} \text{К}_{12} & \text{К}_3 \\ 0{,}57 & 0{,}43 \end{pmatrix},$$

т. е. примерно в 57% случаев нужно посылать наступающие батальоны по одной и той же дороге, выбирая ее случайно, с вероятностью $1/2$; в остальных 43% случаев посылать батальоны порознь.

Аналогично найдем оптимальную стратегию Синих:

$$q_{12} = \frac{0{,}714 - 0{,}875}{0{,}5 - 0{,}875} \approx 0{,}43, \quad q_{34} \approx 1 - 0{,}43 = 0{,}57,$$

$$S_{\text{С}}^* \approx \begin{pmatrix} \text{С}_{12} & \text{С}_{34} \\ 0{,}43 & 0{,}57 \end{pmatrix},$$

т. е. Синие должны в 43% случаев посылать все три батальона на защиту одной из дорог, выбирая ее случайно (с вероятностью $1/2$); в остальных 57% случаев посылать на одну из дорог (опять-таки выбранную случайно) два батальона, а на другую — один.

Очевидно, при других значениях P_1 и P_2 решение будет другое. Например, если $1/2(1+P_2) < P_1$, то игра будет иметь седловую точку (стратегия К_3 для Красных и стратегия С_{34} для Синих).

Если решается игра $m \times m$ (с одинаковым числом стратегий с той и другой стороны), всегда имеет смысл проверить, не является ли она полностью усредненной. Для этого надо, предполагая все стратегии обеих сторон активными, попытаться решить систему из $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными: для m вероятностей

$$p_1, p_2, \ldots, p_m \quad (p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1)$$

и цены игры v. Если эта система имеет осмысленное решение (вероятности не отрицательны и не превышают единицы), то решение игры найдено.

Пример 2. Игроки К и С одновременно и независимо друг от друга записывают каждый одно из трех чисел: 1, 2 и 3. Если сумма написанных чисел четная, то С платит К эту сумму в рублях; если нечетная, то, наоборот, К выплачивает эту сумму. Найти решение игры.

Решение. У каждого из игроков по 3 чистых стратегии: 1, 2 или 3. Матрица игры 3×3 имеет вид:

	С_1	С_2	С_3	Минимумы строк
К_1	2	−3	4	−3*
К_2	−3	4	−5	−5
К_3	4	−5	6	−5
Максимумы столбцов	4*	4	6	

Нижняя цена игры $\alpha=-3$; верхняя $\beta=4$; решение ищем в смешанных стратегиях. Считая (условно) все стратегии активными, пишем систему уравнений:

$$2p_1 - 3p_2 + 4p_3 = \nu,$$

$$-3p_1 + 4p_2 - 5p_3 = \nu,$$

$$4p_1 - 5p_2 + 6p_3 = \nu,$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Решая эту систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, находим

$$p_1 = 1/4, \quad p_2 = 1/2, \quad p_3 = 1/4, \quad \nu = 0.$$

Оптимальная стратегия Красных:

$$S_{\text{к}}^* = \begin{pmatrix} \text{К}_1 & \text{К}_2 & \text{К}_3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Такой же будет оптимальная стратегия Синих:

$$S_{\text{с}}^* = \begin{pmatrix} \text{С}_1 & \text{С}_2 & \text{С}_3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix},$$

т. е. каждый из игроков должен записывать в половине всех случаев число 2, в одной четверти — число 1 и в остальной четверти случаев — число 3. При этом игра будет в одинаковой мере выгодна или невыгодна каждому из игроков; средний выигрыш каждого из них будет равен нулю.

В общем случае решения игры $m \times n$ наиболее трудной задачей является выделение активных стратегий. Если они тем или другим способом выделены, задача сильно упрощается.

Существует универсальный метод, позволяющий решить любую игру $m \times n$. Это так называемый «метод линейного программирования». Поскольку задачи линейного программирования встречаются в исследовании операций не только при решении игр, понятие об этом методе будет дано в специальном параграфе книги (§ 102 гл. 15).

§ 84. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИГР

Часто в практических задачах нет необходимости находить точное решение игры; достаточно найти приближенное решение, дающее средний выигрыш, близкий к цене игры ν.

Ориентировочное знание цены игры ν может дать простой анализ игровой матрицы и определение нижней (α) и верхней (β) цены игры. Если α и β близки, практически нет надобности заниматься поисками точного решения, а достаточно будет выбрать чистые минимаксные стратегии.

Пример. Игра 3×4 имеет матрицу:

	C_1	C_2	C_3	C_4	Минимумы строк
K_1	0,81	0,60	0,42	0,12	0,12
K_2	0,22	0,41	0,90	0,35	0,22
K_3	0,58	0,59	0,61	0,81	0,58*
Максимумы столбцов	0,81	0,60*	0,90	0,81	

Указать приближенно ее решение.

Решение. $\alpha=0{,}58$; $\beta=0{,}60$. Разница между ними невелика; приближенное решение игры дадут чистые стратегии K_3, C_2.

Для нахождения приближенного решения игр в области смешанных стратегий может быть применен так называемый «метод итераций».

Идея метода сводится к следующему. Разыгрывается «мысленный эксперимент», в котором противники К и С применяют друг против друга свои стратегии. Эксперимент состоит из последовательности партий (под «партией» разумеется однократное осуществление игры). Начинается с того, что один из игроков (например, Красные) выбирает произвольно одну из своих стратегий (скажем, K_i). Синие на это отвечают той своей стратегией C_j, которая наименее выгодна для Красных, применяющих стратегию K_i. На это Красные отвечают своей стратегией K_l, которая наименее выгодна для Синих, применяющих C_j. Дальше снова очередь Синих. Они выбирают ту стратегию, которая наименее выгодна для Красных, если они будут применять половинную смесь стратегий K_i и K_l и т. д. В каждой партии, когда наступает его очередь выбирать стратегию, игрок отвечает своему противнику той своей чистой стратегией, которая является наихудшей для противника мерой против всех его предыдущих выборов. Эти предыдущие выборы рассматриваются как своеобразная «смешанная стратегия», где чистые стратегии смешаны в пропорциях, соответствующих частоте их применения в прошлом.

Такой способ представляет собой как бы модель реального практического «взаимного обучения» игроков, когда каждый из них на опыте прощупывает способ поведения противника и учится на его и своих ошибках.

Доказано, что если такой процесс продолжать достаточно долго, то средний выигрыш, приходящийся на одну партию, будет стремиться к цене игры, а частоты применения стратегий — к опти-

Таблица 5

N	i	C_1	C_2	C_3	j	K_1	K_2	K_3	$\underline{\nu}$	$\bar{\nu}$	ν^*
1	3	9	$\underline{0}$	11	2	2	$\overline{9}$	0	0	9	4,50
2	2	11	$\underline{9}$	11	2	4	$\overline{18}$	0	4,50	9,00	6,75
3	2	13	18	$\underline{11}$	3	13	$\overline{18}$	11	3,67	6,00	4,84
4	2	15	27	$\underline{11}$	3	$\overline{22}$	18	22	2,75	5,50	4,13
5	1	22	29	$\underline{20}$	3	31	18	$\overline{33}$	4,00	6,61	5,30
6	3	31	$\underline{29}$	31	2	$\overline{33}$	27	33	4,83	5,50	5,16
7	1	38	$\underline{31}$	40	2	35	$\overline{36}$	33	4,43	5,14	4,79
8	2	40	$\underline{40}$	40	2	37	$\overline{45}$	33	5,00	5,62	5,31
9	2	42	49	$\underline{40}$	3	$\overline{46}$	45	44	4,44	5,11	4,78
10	1	$\underline{49}$	51	49	1	53	47	$\overline{53}$	4,90	5,30	5,10
11	3	58	$\underline{51}$	60	2	55	$\overline{56}$	53	4,63	5,09	4,86
12	2	60	$\underline{60}$	60	2	57	$\overline{65}$	53	5,00	5,41	5,20
13	2	62	69	$\underline{60}$	3	$\overline{66}$	65	64	4,62	5,08	4,85
14	1	$\underline{69}$	71	69	1	73	67	$\overline{73}$	4,93	5,21	5,07
15	3	78	$\underline{71}$	80	2	75	$\overline{76}$	73	4,74	5,07	4,91
16	2	80	$\underline{80}$	80	2	77	$\overline{85}$	73	5,00	5,31	5,15
17	2	82	89	$\underline{80}$	3	$\overline{86}$	85	84	4,71	5,07	4,89
18	1	$\underline{89}$	91	89	1	93	87	$\overline{93}$	4,94	5,16	5,05
19	3	98	$\underline{91}$	100	2	95	$\overline{96}$	93	4,79	5,05	4,92
20	2	100	$\underline{100}$	100	2	97	$\overline{105}$	93	5,00	5,25	5,12
21	2	102	109	$\underline{100}$	3	$\overline{106}$	105	104	4,77	5,05	4,91
22	1	$\underline{109}$	111	109	1	113	107	$\overline{113}$	4,95	5,14	5,05
23	3	118	$\underline{111}$	120	2	115	$\overline{116}$	112	4,83	5,04	4,94
24	2	120	$\underline{120}$	120	2	117	$\overline{125}$	113	5,00	5,20	5,10
25	2	122	129	$\underline{120}$	3	$\overline{126}$	125	124	4,80	5,04	4,92
26	1	$\underline{129}$	131	129	1	133	127	$\overline{133}$	4,97	5,12	5,05
27	3	138	$\underline{131}$	140	2	135	$\overline{136}$	133	4,85	5,04	4,95
28	2	140	$\underline{140}$	140	2	137	$\overline{145}$	133	5,00	5,18	5,09
29	2	142	149	$\underline{140}$	3	$\overline{146}$	145	144	5,83	5,04	4,94
30	1	$\underline{149}$	151	149	1	153	147	$\overline{153}$	4,98	5,10	5,04

мальным частотам. Расчеты показывают, что сходимость метода очень медленная, однако приемлемое для практики решение получается довольно скоро.

Пример 2. Решить приближенно, методом итераций, игру 3×3, приведенную в примере 2 § 83.

Решение. Матрица игры имеет вид:

	C_1	C_2	C_3
K_1	2	—3	4
K_2	—3	4	—5
K_3	4	—5	6

Чтобы не иметь дела с отрицательными числами, прибавим ко всем членам матрицы +5; при этом цена игры увеличится на 5, а оптимальные стратегии не изменятся. Матрица примет вид:

	C_1	C_2	C_3
K_1	7	2	9
K_2	2	9	0
K_3	2	0	11

В табл. 5 приведены первые 30 шагов процесса итераций. В первом столбце дан номер партии (пары выборов) N; во втором — номер выбранной в данной партии стратегии Красных i, в последующих трех — «накопленный выигрыш» за первые N партий при стратегиях Синих C_1, C_2, C_3. Минимальное из этих значений подчеркнуто. Далее идет номер j-й стратегии Синих, которая выгоднее всего (соответствует подчеркнутому минимальному выигрышу) [1]; затем — накопленный выигрыш при стратегиях K_1, K_2, K_3; из этих значений надчеркнуто максимальное; этому числу соответствует оптимальная стратегия Красных, номер которой и помещается в следующей строке.

В следующих графах последовательно приводятся:

$\underline{\nu}$ — минимальный накопленный выигрыш, деленный на число партий N;

[1] Если среди накопленных выигрышей имеется два одинаковых минимальных, то подчеркивается любой из них.

$\bar{\nu}$ — максимальный накопленный выигрыш, деленный на число партий N;

$\nu^* = \frac{\nu + \bar{\nu}}{2}$ — приближенное значение цены игры.

Подсчитывая число применений каждой стратегии и деля его на число партий N, получаем приближенные значения частот, с которыми применяются стратегии в оптимальной смеси.

Как видно из табл. 5, приближенное значение цены игры ν^* незначительно колеблется вокруг истинного значения $\nu=5$ (цена исходной игры 0; мы прибавили к каждому элементу матрицы по 5). Подсчитывая частоты применения стратегий K_1, K_2, K_3, получаем

$$p_1^* = \frac{8}{30} \approx 0,267, \quad p_2^* = \frac{15}{30} \approx 0,500, \quad p_3^* = \frac{7}{30} \approx 0,233.$$

Они весьма близки к известным нам из решения игры частотам

$$p_1 = 1/4 = 0,25, \quad p_2 = 1\ 2 = 0,50, \quad p_3 = 1/4 = 0,25.$$

Аналогично для Синих имеем

$$q_1^* = \frac{6}{30} = 0,200, \quad q_2^* = \frac{15}{30} = 0,500, \quad q_3^* = \frac{9}{30} = 0,300.$$

Из приведенного примера ясно, что приближенное решение игры довольно легко найти даже путем несложных вычислений.

§ 85. ФИЗИЧЕСКАЯ СМЕСЬ СТРАТЕГИЙ

В предшествующих параграфах было введено понятие смешанной стратегии. Здесь будет рассмотрен вопрос о фактическом осуществлении смешанных стратегий на практике.

В начале книги мы ввели условное деление задач исследования операций на «технические» и «тактические». В «технических» задачах речь идет о выборе рациональных конструктивных параметров вооружения, т. е. о таких решениях, которые принимаются заблаговременно, в расчете на применение в неопределенном будущем. В «тактических» задачах речь идет о методах боевого применения уже имеющегося вооружения с известными данными. Это — более подвижные, более «злободневные» решения. Значительная часть из них будет приниматься и обосновываться в ходе самих боевых действий.

Рассмотрим вопрос о применении смешанных стратегий в тех и других задачах. Что касается «тактических» задач, то здесь применимость смешанных стратегий сомнений не вызывает. Они означают гибкую, подвижную, всегда неожиданную для противника тактику. Целесообразность такой тактики была очевидна всегда; игровыми методами можно только обосновать пропорции разных вариантов.

В технических задачах дело обстоит несколько иначе. Пусть, например, речь идет о том, чтобы заказать промышленности какой-то образец вооружения. Вряд ли будет целесообразно предоставить выбор варианта случайности, например, бросить монету и, если выпадет герб, заказать первый вариант, а если цифра — второй.

В подобных задачах игровые принципы могут применяться иначе: в виде так называемой *физической смеси* стратегий. Физической смесью стратегий называется такая, при которой одновременно применяется несколько стратегий в определенных пропорциях; например, когда одновременно применяется несколько видов вооружения, обладающих разными характеристиками. Если применяемые варианты резко различны по своим характеристикам, то одновременное применение как тех, так и других ставит противника в затруднительное положение при выборе контрмер. Пропорции, в которых должны смешиваться разные образцы, могут быть обоснованы исходя из принципов теории игр.

В качестве примеров физической смеси стратегий можно указать:

— применение в авиационных пушках патронной ленты, укомплектованной снарядами различных типов (бронебойные, зажигательные, фугасные);

— применение боевых частей, дробящихся не на однородные, а на разнородные осколки,

— расстановка в полосе ПВО зенитных комплексов с различными характеристиками;

— применение самолетов-истребителей с различным вооружением

и т. д.

При выборе смешиваемых вариантов нужно стремиться к тому, чтобы число их было по возможности небольшим, т. е. число активных стратегий было минимальным. При выборе активных стратегий также может оказаться полезной теория игр.

Пример 1. Комплектуется патронная лента авиационной пушки снарядами двух типов: K_1 и K_2. У противника имеются четыре типа самолетов, против которых может применяться наше оружие: C_1, C_2, C_3 и C_4. Вероятность поражения каждого из них снарядами типа K_1 и K_2 приведена в матрице:

	C_1	C_2	C_3	C_4
K_1	0,2	0,9	0,6	0,3
K_2	0,8	0,3	0,7	0,5

Обосновать пропорции, в которых следует комплектовать патронную ленту снарядами K_1, K_2.

Решение. На основе рис. 85.1 определяем активные стратегии Синих: C_2 и C_4.

Игра сводится к игре 2×2 с матрицей:

	C_1	C_2
K_1	0,9	0,3
K_2	0,3	0,5

Решение игры:

$$S_к^* = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix},$$

т. е. Красные должны комплектовать ленту снарядами K_1 и K_2 в пропорции 1 : 3 (на один снаряд типа K_1 три снаряда типа K_2)

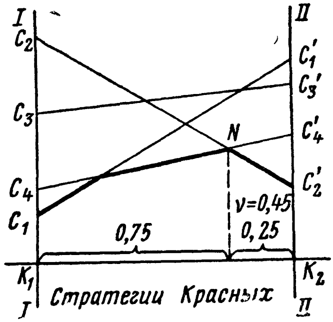


Рис. 85.1.

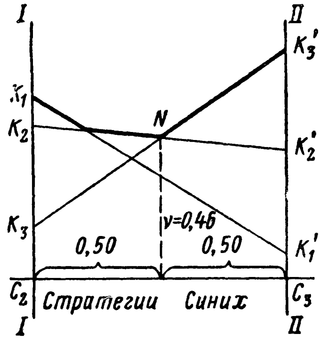


Рис. 85.2.

Цена игры

$$\nu = 0{,}9 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}75 = 0{,}45.$$

Попутно находим оптимальную стратегию Синих:

$$S_c^* = \begin{pmatrix} C_2 & C_4 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. При дроблении корпуса боевой части на осколки могут образовываться осколки трех весов: крупные (K_1), средние (K_2) и мелкие (K_3). Крупные осколки поражают цель с большей вероятностью, зато их общее число меньше.

Воздушные цели, на которые рассчитано вооружение Красных, могут быть трех типов: C_1, C_2, C_3.

Вероятности поражения самолетов снарядом данного веса при условии дробления боевой части на крупные, средние и мелкие осколки даны в матрице:

	C_1	C_2	C_3
K_1	0,8	0,7	0,1
K_2	0,6	0,6	0,5
K_3	0,2	0,2	0,9

Предполагается спроектировать боевую часть с разнородным дроблением на осколки, раздробив часть металла корпуса на крупные, часть — на средние и часть — на мелкие осколки. Какую долю металла надо отвести на осколки разных весов?

Решение. Из матрицы видно, что стратегия C_1 для Синих заведомо невыгодна. Вычеркивая ее, приведем матрицу к виду 3×2:

	C_2	C_3
K_1	0,7	0,1
K_2	0,6	0,5
K_3	0,2	0,9

Ищем активные стратегии Красных (рис. 85.2), Это K_2 и K_3 (средние и мелкие осколки). Игра сводится к игре 2×2 с матрицей:

	C_2	C_3
K_2	0,6	0,5
K_3	0,2	0,9

Решая игру, получаем:

$$S_к^* = \begin{pmatrix} K_2 & K_3 \\ 0{,}875 & 0{,}125 \end{pmatrix},$$

т. е. корпус боевой части целесообразно раздробить только на средние и мелкие осколки; на средние осколки отвести 0,875 металла корпуса, а на мелкие — оставшиеся 0,125. Попутно определяем оптимальную стратегию Синих:

$$S_с^* = \begin{pmatrix} C_2 & C_3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 13

МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ НА ЭВМ

§ 86. МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ НА АНАЛОГОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

В гл. 9 были изложены некоторые способы математического описания динамики боя многочисленных групп с помощью дифференциальных уравнений. При сколько-нибудь сложной модели боя эти уравнения, как правило, в аналитическом виде не решаются и допускают лишь приближенное, численное решение.

Для интегрирования подобных уравнений хорошо приспособлены так называемые «аналоговые вычислительные машины» или, иначе, «вычислительные машины непрерывного действия».

Эти вычислительные устройства дают возможность «набирать» из отдельных элементов и готовых блоков схемы, работа которых описывается заданного вида дифференциальными уравнениями. Легче всего на таких машинах набираются системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, однако с помощью дополнительных устройств и приспособлений в уравнения могут вводиться переменные коэффициенты и нелинейности. Точность работы аналоговых устройств сравнительно невысока, ошибка достигает 5—10%. Однако в виду того, что самые модели боевых действий, приводящие к дифференциальным уравнениям, довольно грубы и основаны на ряде допущений, такая точность обычно оказывается приемлемой.

В принципе решение дифференциальных уравнений, описывающих боевые действия, может быть осуществлено и на электронной цифровой вычислительной машине (ЭЦВМ). Однако моделирование на машинах непрерывного действия имеет ряд преимуществ, в частности:

— не требует большого времени на программирование и отладку программы;

— позволяет быстро менять расчетную схему;

— позволяет по шкалам приборов непосредственно наблюдать за ходом решения задачи;

— позволяет в случае надобности отображать процесс развития боя на демонстрационном табло и непосредственно наблюдать на нем эффективность принимаемых решений.

Для наглядного изображения хода боевых действий на демонстрационном табло можно применять различные условные значки, например, разноцветные лампочки, часть которых с течением времени гасится, изображая поражение той или другой доли единиц.

Кроме того, результаты моделирования могут записываться на осциллографе или специальном печатающем устройстве.

С помощью моделирования боевых действий на аналоговых машинах можно решать следующие практические задачи:

— определять соотношение сил, преимущества той или другой стороны и потребность в резервах;

— определять рациональные темпы и сроки ввода резервов, позволяющие данной стороне выиграть бой;

— выяснять сравнительную важность и влияние на развитие боевых действий таких факторов, как упреждающий удар, темп мобилизации сил, скорость прохождения информации по различным звеньям системы, боевая готовность технических средств и т. п.

Заметим, что моделировать на аналоговых устройствах можно не только боевые действия, как таковые, но и целый ряд вспомогательных процессов, например деятельность органов снабжения, эксплуатационной службы, ремонтных бригад, линий связи и т. п.

§ 87. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ (МОНТЕ-КАРЛО)

Метод описания динамики боевых действий с помощью дифференциальных уравнений и их моделирование на вычислительных машинах непрерывного действия, несмотря на ряд преимуществ, не является универсальным. Этот метод по существу своему может дать только грубо приближенную картину явления. Кроме того, оперируя средними характеристиками численностей участвующих в бою средств, он не дает представления о тех конкретных реализациях боевого процесса, с которыми можно столкнуться в действительности.

Этими недостатками не обладает другой метод моделирования — так называемый метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).

Метод статистических испытаний получил особенно широкое распространение после появления быстродействующих вычислительных машин дискретного счета (ЭЦВМ). Однако этот метод в принципе может применяться не только на машинах, но и вручную.

В данном параграфе мы изложим существо метода безотносительно к способам его осуществления.

Начнем с того, что метод Монте-Карло по существу приспособлен для решения не простых, а *сложных* задач, аналитическое решение которых затруднительно, а иногда и невозможно. При исследовании операций постоянно приходится встречаться с такими сложными задачами, где аналитический аппарат оказывается непригодным.

Однако даже в тех задачах, где удается применить аналитические методы, часто возникает вопрос об оценке их точности. Действительно, аналитический метод всегда требует каких-то допущений (например, о пуассоновском характере потоков событий, о независимости или слабой зависимости случайных величин; о простой конфигурации целей и зон поражения; об отсутствии накопления ущерба и т. п.).

Часто возникает вопрос, насколько сильно эти допущения искажают истинную картину явления. Для ответа на этот вопрос тоже применяется, в качестве контрольного, метод Монте-Карло.

Идея метода чрезвычайно проста: вместо того чтобы в ы ч и с л я т ь показатель эффективности, сложным образом зависящий от ряда случайных факторов, можно определить его с помощью так называемого «розыгрыша».

Идею розыгрыша можно пояснить на следующем элементарном примере.

Пусть решается такая задача. По цели производится четыре независимых выстрела, каждый из которых попадает в нее с вероятностью $p=0,5$. Для поражения цели достаточно двух попаданий. Требуется найти вероятность поражения цели W.

Поставленную задачу можно решить двумя способами: а) вычислением и б) розыгрышем.

Решим задачу вычислением. Вероятность поражения цели найдем через вероятность противоположного события (непоражения цели). Получим:

$$W = 1 - (0,5^4 + 4 \cdot 0,5^4) \approx 0,688.$$

Теперь решим ту же задачу розыгрышем. Изобразим наши четыре выстрела бросанием четырех монет; появление герба на монете будет означать «попадание», а цифры — «промах» при данном выстреле. Если из брошенных четырех монет не менее двух упадут гербом, будем считать, что цель поражена; если менее двух — не поражена. Повторим такой опыт, состоящий в бросании четырех монет, много раз подряд. Тогда согласно теореме Бернулли частота «поражения» цели будет приближаться к вероятности этого события; бросив четыре монеты очень много раз, мы получим число, близкое к 0,688.

В данном примере определение вероятности W розыгрышем несравненно труднее, чем расчетом. Однако далеко не всегда это бывает так. Часто оказывается, что получение вероятности события расчетным путем настолько сложно и громоздко, что проще оказывается розыгрыш.

Рассмотрим пример. Производится стрельба по самолету снарядами фугасного действия, такими, что одного попадания снаряда в планер, фюзеляж, плоскость или оперение самолета недостаточно для его поражения, а нескольких попаданий может оказаться достаточно, если точки попадания расположатся достаточно близко друг к другу. При любом конкретном расположении точек попаданий снарядов можно решить вопрос, поражен самолет или нет. Требуется найти закон поражения самолета, т. е. вероятность $G(m)$ того, что самолет будет поражен, если в него попало m снарядов.

Такую задачу оказывается уже легче решить розыгрышем, чем расчетом.

Покажем, как это можно сделать. Пусть, например, $m=5$, т. е. нужно найти вероятность поражения самолета при попадании в него пяти снарядов.

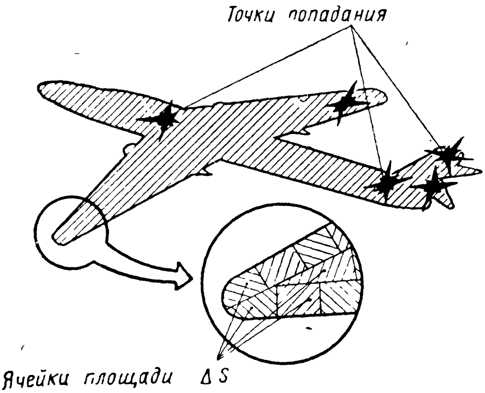


Рис. 87.1.

Разделим всю проекцию самолета на k элементарных ячеек одинаковой площади (рис. 87.1) и разыграем на ней конкретное расположение пяти точек попадания. Для этого изготовим, например, k перенумерованных жетонов и заложим их во вращающийся барабан. «Опыт» будет состоять в том, что мы вынем из барабана пять раз подряд по одному жетону, вкладывая его каждый раз обратно и перемешивая жетоны вращением барабана. Пусть в результате одного такого «опыта» — розыгрыша пяти точек попадания — мы получили их конкретное расположение на проекции самолета (звездочки на рис. 87.1). При этом конкретном расположении точек попадания можно решить вопрос, поражен самолет или нет. Условимся, если он поражен, поставить в регистрационном бланке плюс, если нет — минус.

Предположим, что таких «опытов» (реализаций), каждый из которых состоит в розыгрыше пяти точек попадания, произведено достаточно много. Вычислим частоту поражения цели при пяти попаданиях, которую мы в отличие от закона поражения $G(5)$ обозначим $G^*(5)$.

Очевидно,

$$G^*(5)=\frac{\bar{m}}{N}, \tag{87.1}$$

где $\bar{m}$ — число поражений (плюсов) в регистрационном бланке;
N — число осуществленных реализаций.

При достаточно большом N частота поражения цели будет близка к искомой вероятности и можно будет положить

$$G(5)\approx G^*(5)=\frac{\bar{m}}{N}. \tag{87.2}$$

Аналогично тому, как определяется розыгрышем вероятность события, можно определять и среднее значение (математическое ожидание) $\bar{x}$ любой случайной величины X. Здесь результатом одного «опыта» (реализации) будет значение случайной величины X. Среднее значение $\bar{x}$ может быть приближенно вычислено, как среднее арифметическое наблюденных значений величины X при большом числе «опытов».

Рассмотрим пример. Пусть на плоскости xoy с неравномерной плотностью расположены какие-то малоразмерные цели (рис. 87.2) и на плоскость сбрасывается бомба, которая при попадании в точку O_1 поражает эти цели в пределах какой-то зоны поражения $S_п$. Требуется найти среднее число пораженных целей $M_п$. Эту задачу можно решить розыгрышем, например, так: покрыть всю плоскость xoy прямоугольными ячейками, вероятности попадания в которые одинаковы, разыграть, в какую из ячеек попала бомба; вокруг полученной точки попадания построить зону поражения $S_п$ и подсчитать, сколько целей поражено. Повторив такой «опыт» много раз, вычислить среднее арифметическое из всех полученных значений; эта величина будет близка к среднему числу пораженных целей $M_п$.

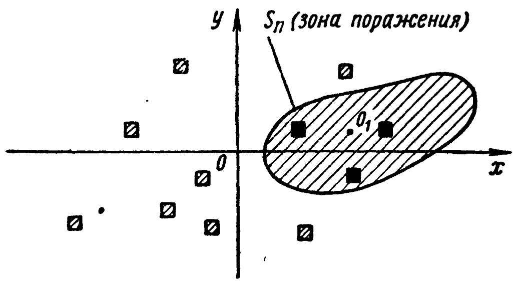


Рис. 87.2.

Таким образом, метод Монте-Карло в исследовании операций есть метод математического моделирования случайных явлений, в котором случайность фигурирует в непосредственном виде и включается в самый процесс моделирования. Каждая отдельная реализация задачи, полученная методом Монте-Карло, является случайной. Средние характеристики процесса (вероятности событий, средние значения случайных величин) получаются как *средние из многих реализаций*.

Моделирование случайных явлений методом Монте-Карло имеет много общего с процессом набора опыта отдельными людьми и человеческими коллективами. И тут и там каждая отдельная реализация случайна; устойчивые сведения о закономерностях, свойственных явлению, появляются в результате обобщения большого опыта — многих реализаций.

С помощью метода Монте-Карло в принципе можно определять вероятности любых событий и средние значения любых случайных величин; однако его имеет смысл применять только в случае, если получение этих данных расчетом сложнее розыгрыша. Прежде чем применять метод Монте-Карло, всегда имеет смысл попытаться решить задачу аналитически, хотя бы для того, чтобы выявить основные факторы, от которых зависит результат, и наметить план дальнейшей работы.

При исследовании операций метод Монте-Карло применяется по преимуществу тогда, когда исследуемый процесс очень сложен по структуре и различные факторы, влияющие на успех операции, сложным образом взаимодействуют между собой. В настоящее время все более расширяется класс задач исследования операций, которые можно решать аналитически, однако в некоторых случаях метод Монте-Карло оказывается единственно возможным.

Основным элементом, из совокупности которых складывается моделирование методом Монте-Карло, является одна случайная реализация моделируемого явления, например:

— один перехват воздушной цели;

— один налет бомбардировочной авиации на объект;

— один вылет группы разведчиков и т. д.

Эта реализация осуществляется моделированием с помощью случайного розыгрыша. Каждый раз, когда в ход моделируемого процесса вмешивается влияние случайности, оно учитывается не расчетом, а «бросанием жребия».

Пусть, например, в ходе реализации моделируемого процесса наступает момент, когда дальнейшее развитие процесса зависит от того, произошло или не произошло некоторое событие A, например:

— обнаружение цели;

— поражение объекта;

— вывод перехватчика в зону возможных атак и т. п.

Тогда нужно «бросанием жребия» решить, появилось событие A или нет. Если, например, вероятность события A равна $^1/_2$, можно бросить монету и, если выпадет герб, считать, что событие произошло, если цифра — не произошло. Ниже мы увидим, что жребий всегда может быть организован так, чтобы он обеспечивал любую вероятность события, а не только $p={}^1/_2$.

Кроме событий, появляющихся случайным образом в ходе реализации, на нее могут влиять и разные случайные величины (например, координаты точки попадания снаряда; момент обнаружения цели; время занятости канала наведения и т. д.). С помощью жребия можно разыграть значение любой случайной величины или системы случайных величин. Как это делается, будет рассказано в следующих параграфах.

§ 88. ЕДИНИЧНЫЙ ЖРЕБИЙ

Условимся называть «единичным жребием» любой элементарный опыт, в котором с помощью розыгрыша решается один из вопросов:

— произошло или не произошло событие A;

— какое из нескольких возможных событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ произошло;

— какое значение приняла случайная величина X;

— какую совокупность значений приняла система случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Каждая реализация случайного явления методом Монте-Карло состоит из цепочки единичных жребиев, перемежающихся с обычными расчетами.

Приведем элементарный пример.

Пусть рассматривается одна воздушная цель, летящая над территорией, обороняемой средствами ПВО (рис. 88.1), на которой

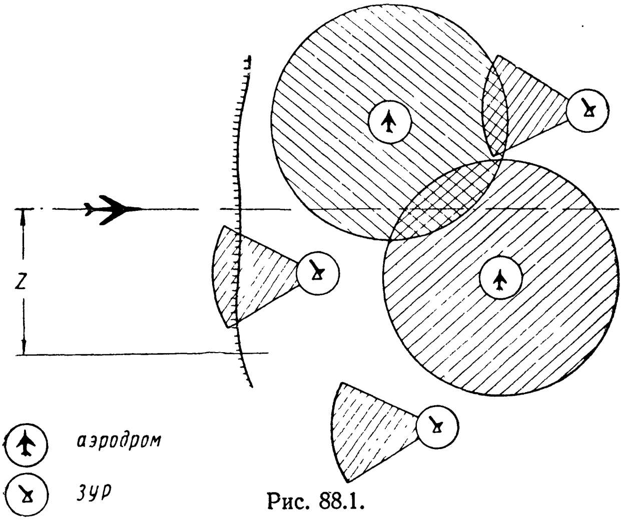


Рис. 88.1.

имеются аэродромы и группировки ЗУР. Нас интересует, на какую в среднем глубину может проникнуть цель.

Реализация такого налета методом Монте-Карло состоит из отдельных элементов, а именно:

1) единичный жребий, в котором определяется случайная величина Z, характеризующая положение траектории цели относительно системы средств ПВО;

2) расчеты, относящиеся к прокладке курса цели и выяснению, в зону действия какого средства и в какой момент она попадает;

3) единичный жребий, определяющий момент обнаружения цели;

4) единичный жребий, определяющий момент подъема по цели первого средства ПВО (ЗУР или истребителя);

5) единичный жребий, определяющий, поражена цель или не поражена первым поднятым по ней средством ПВО;

6) определение расчетом момента времени, к которому относится поражение (или непоражение) цели, и местонахождения цели в этот момент и т. д.

При любой организации единичного жребия должен быть пущен в ход какой-то **механизм случайного выбора** (например, бросание монеты, игральной кости, вынимание жетона из вращающегося барабана, выбор числа из таблицы случайных чисел, вычисление случайного числа машиной и т. д.). Такие механизмы могут быть самыми разнообразными, однако любой из них может быть заменен стандартным механизмом, позволяющим решить одну-единственную задачу: получить случайную величину, распределенную с равномерной плотностью от 0 до 1. Условимся для краткости называть такую случайную величину: «случайное число от 0 до 1».

Покажем, что любая задача единичного жребия может быть решена с помощью такого стандартного механизма.

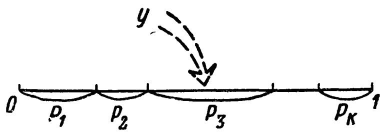


Рис. 88.2.

Пусть, например, единичный жребий должен решить, появилось ли на данном этапе реализации событие A, вероятность которого равна p.

Выберем с помощью стандартного механизма случайное число между 0 и 1; если оно меньше p, будем считать, что событие A произошло; если оно больше p — не произошло[1].

Часто в процессе розыгрыша реализации бывает нужно решить другой вопрос: какое из нескольких возможных событий произошло.

Пусть имеется несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$, составляющими в сумме единицу, и единичный жребий должен решить, какое из этих событий произошло на данном этапе реализации.

Для этого разделим весь участок чисел от 0 до 1 на k участков длиной $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (рис. 88.2). Если случайное число y, выданное стандартным механизмом, попало, например, на третий участок, это означает, что появилось событие A_3.

Предположим теперь, что единичный жребий должен выдать значение случайной величины X, закон распределения которой известен. Если величина X прерывная, т. е. имеет k значений с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то задача сводится к предыдущей.

Рассмотрим случай, когда величина X непрерывна и имеет функцию распределения (интегральный закон распределения) $F(x)$ (рис. 88.3).

Можно доказать следующее: *если взять на оси ординат случайное число Y от 0 до 1 и найти то значение аргумента X, при котором $F(X)=Y$* (см стрелки на рисунке), *то полученная случайная абсцисса X будет распределена по закону $F(x)$.*

---

[1] Получение случайного числа, в точности равного p, будем считать практически невозможным событием.

Таким образом, розыгрыш случайной величины с заданной функцией распределения $F(x)$ опять-таки сводится к применению стандартного механизма, дающего случайное число от 0 до 1.

Эту задачу можно решить и не графически, а аналитически, если написать

$$X = G(Y),$$

где G — функция, обратная функции F.

Пример 1. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{при } x > 0,$$
$$= 0 \quad \text{при } x < 0.$$

Указать, как с помощью стандартного механизма, производящего случайные числа от 0 до 1, разыграть единичный жребий, дающий значение величины X?

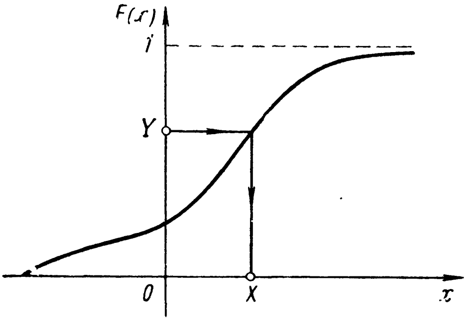


Рис. 88.3.

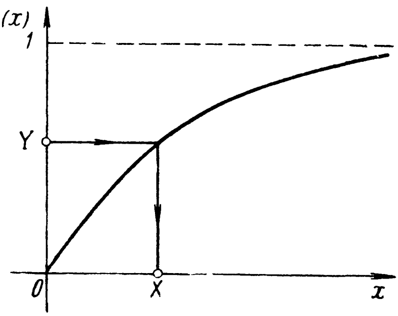


Рис. 88.4.

Решение.

Находим функцию распределения величины X:

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

График функции $F(x)$ приведен на рис. 88.4. Процедура жребия сводится к следующему: разыгрывается случайное число Y от 0 до 1 и находится соответствующее значение абсциссы X (см. стрелки на рис. 88.4).

Это же можно сделать не графически, а расчетом, если написать

$$Y = 1 - e^{-\lambda X} \tag{88.1}$$

и решить уравнение (88.1) относительно X:

$$e^{-\lambda X} = 1 - Y, \quad -\lambda X = \ln(1 - Y),$$

откуда

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y)\,[1]. \tag{88.2}$$

[1] Если Y — случайное число от 0 до 1, то, очевидно, $1 - Y$ — также случайное число от 0 до 1. Поэтому можно взять

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln Y.$$

Совершенно аналогично может быть организован единичный жребий и для системы случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ Если величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы, нужно разыграть каждую из них отдельно, т. е. организовать несколько единичных жребиев типа, описанного выше. Если величины зависимы, то, получив жребием значение первой из них, нужно второй жребий организовывать уже так, чтобы в нем фигурировал **условный закон распределения** величины X_2 при условии, что X_1 приняла определенное значение, и т. д.

Пример 2. Имеется система зависимых случайных величин: X_1 и X_2. Случайная величина X_1 распределена с равномерной плотностью на участке от -1 до $+1$. Случайная величина X_2 распределена по нормальному закону с центром рассеивания, равным значению величины X_1, и со средним квадратическим отклонением σ. Организовать единичный жребий для пары случайных величин X_1, X_2.

Решение. Разыгрываем сначала значение величины X_1; для этого строим ее функцию распределения $F_1(x_1)$ (рис. 88.5).

Имеем

$$F_1(x_1) = \frac{1}{2}(1 + x_1).$$

Положим

$$Y = F_1(X_1) = \frac{1}{2}(1 + X_1), \text{ отсюда } X_1 = 2Y - 1.$$

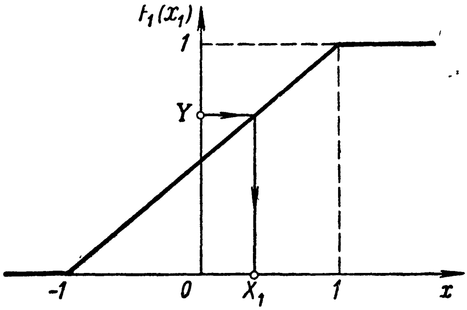


Рис. 88.5.

Таким образом, первая случайная величина разыгрывается так: берется случайное число Y между 0 и 1, удваивается, и из него вычитается 1.

После того как величина X_1 разыграна и получено ее конкретное значение x_1 (теперь оно уже не случайно), можно разыграть вторую величину X_2. Действительно, ее плотность распределения будет

$$f_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x_2 - x_1)^2}{2\sigma^2}},$$

а функция распределения

$$F_2(x_2) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_2 - x_1}{\sigma\sqrt{2}}\right) + 1\right],$$

где

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du \text{ —}$$

функция Лапласа.

График функции $F_2(x_2)$ показан на рис. 88.6. Там же показана стрелками процедура получения значения случайной величины X_2. Аналитическая формула для X_2 будет иметь вид

$$X_2 = \sigma\sqrt{2}\,\Psi(2Y' - 1) + x_1,$$

где Ψ — функция, обратная функции Лапласа Φ;

Y' — случайное число от 0 до 1.

Таким образом, мы показали, что любой единичный жребий сводится к получению случайного числа от 0 до 1. Остается дать способы получения такого случайного числа.

Если метод Монте-Карло осуществляется вручную (без помощи машин), то для получения случайного числа от 0 до 1 обычно применяются специальные таблицы — так называемые «т а б л и ц ы с л у ч а й н ы х ч и с е л». Таблицы составлены из случайным образом сгруппированных десятичных знаков 0, 1, 2, ..., 9, каждый из которых встречается в среднем одинаково часто. Пользуясь такой таблицей, можно легко разыграть случайное число от 0 до 1 с любым числом знаков после запятой.

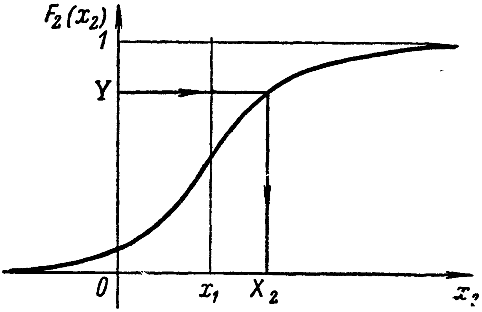


Рис. 88.6.

Пусть, например, требуется получить такое число с четырьмя знаками. Обратимся к таблице случайных чисел и возьмем оттуда любую группу из четырех рядом стоящих знаков, например 7812. Будем считать, что наше случайное число от 0 до 1 приняло значение 0,7812. Следующий раз, когда придется бросить единичный жребий, возьмем следующие четыре цифры, например 3483 (число примет значение 0,3483), и т. д. Можно брать цифры, стоящие не рядом, а через одну, или в начале и конце столбца, или через строку — любым способом, лишь бы принцип выбора не был никак связан с самими цифрами.

Если метод Монте-Карло осуществляется не вручную, а с помощью электронной цифровой вычислительной машины (ЭЦВМ), то выбор случайного числа от 0 до 1 обеспечивается тем или другим д а т ч и к о м с л у ч а й н ы х ч и с е л. Датчик основывается либо на преобразовании случайных шумов, либо на вычислении так называемых «псевдослучайных чисел», в основу которого кладется определенное правило (алгоритм). В настоящее время существует много таких алгоритмов, обеспечивающих достаточно быстрое и надежное получение требуемого случайного числа. В качестве примера приведем хотя бы такой алгоритм. Берется из памяти машины любое двоичное число, например двадцатизначное число

$$1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1.$$

Это число сдвигается относительно самого себя на несколько разрядов, и производится суммирование. После этого из полученного числа выделяют средние двадцать знаков, с ними проделывают ту же операцию и т. д. Можно доказать, что после достаточного числа повторений полученное число, если его рассмотреть как двоичную дробь, будет практически равномерно распределено от 0 до 1; несколько таких значений, взятых подряд, будут практически независимы.

Описанный способ получения псевдослучайных чисел на ЭЦВМ является далеко не единственным.

§ 89. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ СХЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

В данном параграфе будут рассмотрены два примера задач, которые в силу своей сложности требуют моделирования методом Монте-Карло. В каждом примере мы составим схему моделирования, т. е. последовательность расчетов и единичных жребиев, а также способ обработки реализаций.

Пример 1. Производится стрельба n ракетами по площадной цели сложной конфигурации (рис. 89.1). Зона разрушений от одной ракеты представляет собой круг радиуса $R_п$. В результате n выстрелов будет поражена какая-то часть $S_п$ площади цели (см. заштрихованную область на рис. 89.1), составляющая какую-то долю полной площади цели:

$$U = \frac{S_п}{S_ц}.$$

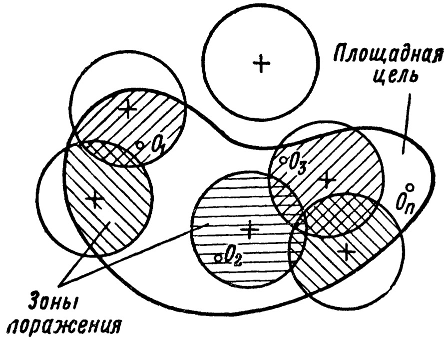


Рис. 89.1.

Чтобы избежать ненужных перекрытий зон поражения, прицеливание n ракетами производится не по одной точке, а по n различным точкам $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Заданы характеристики рассеивания ракет, одинаковые для всех и равные E_x, E_y. Выстрелы считаются независимыми. Требуется при заданном расположении точек прицеливания вычислить два показателя эффективности стрельбы:

1) среднюю долю поражения при n выстрелах

$$M_n = M[U];$$

2) вероятность того, что будет поражено не менее заданной доли u площади цели:

$$R_{u,n} = P(U \geqslant u).$$

Решение. Если не делать упрощающих предположений о форме цели и зоны поражения (не заменять их прямоугольниками), то аналитическое решение поставленной задачи чрезвычайно сложно. Более простое решение задачи может быть получено методом Монте-Карло.

Построим схему такого решения. Каждая реализация будет представлять собой моделированный «обстрел» цели n ракетами, в котором точки попадания ракет будут разыграны по жребию. Таким образом, каждая реализация будет состоять из n единичных жребиев плюс расчет общей пораженной площади $S_п$.

В каждом единичном жребии разыгрывается точка попадания одной ракеты, т. е. две случайные величины (X_i, Y_i), распределенные по нормальному закону с вероятными отклонениями E_x, E_y и с центром рассеивания $\overline{x_i}$, $\overline{y_i}$ (координаты точки прицеливания O_i). Если выбрать координатные оси параллельно главным осям рассеивания, то эти величины будут независимы.

Согласно общей методике, изложенной в предыдущем параграфе, для получения точки (X_i, Y_i) нужно было бы:

— построить функцию распределения $F_i(x)$ для абсциссы точки попадания i-й ракеты и найти для нее обратную функцию;

— сделать то же для ординаты точки попадания;

— разыграть два случайных числа от 0 до 1 и, найдя от них вышеупомянутые обратные функции, взять первое число за абсциссу, а второе — за ординату точки попадания.

Однако этот способ нецелесообразен, так как он требует построения $2n$ различных функций распределения и обратных им. Гораздо проще будет поступить иначе: построить только одну нормальную функцию распределения $F_н(x_н)$ для «нормированной» случайной величины $X_н$, имеющей центр рассеивания, равный нулю, и среднее квадратическое отклонение, равное единице.

Разыграв, как описано выше, значение $x_н$ такой случайной величины, можно легко перейти от нее к любой другой нормально распределенной величине X, имеющей центр рассеивания $\bar{x}$ и среднее квадратическое отклонение σ_x[1]. Для этого достаточно полученное розыгрышем значение $x_н$ умножить на σ_x и прибавить $\bar{x}$. Таким образом, с помощью одного-единственного графика (или одной-единственной обратной функции) может быть разыграно любое число точек попадания.

При моделировании боевых действий на ЭЦВМ часто применяют другой, еще более простой способ розыгрыша случайной величины, распределенной по нормальному закону. Он основан на центральной предельной теореме, согласно которой *сумма достаточно большого числа независимых случайных величин* подчиняется закону, близкому к нормальному. Поэтому достаточно сложить несколько случайных чисел, распределенных равномерно от нуля до единицы, чтобы получить случайную величину, распределенную приблизительно по нормальному закону. Практически для этого достаточно сложить шесть случайных чисел от нуля до единицы. Чтобы полученная величина имела среднее значение, равное нулю, из нее вычитают сумму средних значений слагаемых, равную трем. Чтобы сделать среднее квадратическое отклонение равным единице, результат делят на его среднее квадратическое отклонение суммы, равное

$$\sigma = \sqrt{6 \cdot \frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

или, что равносильно, множат на $\frac{1}{\sigma} = \sqrt{2}.$

Таким образом, для получения случайной величины, распределенной по нормальному закону, достаточно сложить шесть случайных чисел от нуля до единицы, из суммы вычесть три и результат умножить на $\sqrt{2}$. От такой случайной величины (как описано выше) легко перейти к случайной величине, распределенной по нормальному закону с любыми характеристиками.

После того как все n точек попадания разыграны, уже сравнительно нетрудно окружить каждую из них зоной поражения и определить на цели суммарную пораженную площадь $S_п$. Если розыгрыш осуществляется вручную, то суммарную пораженную площадь можно просто измерить планиметром. Если розыгрыш осуществляется на машине, то применяется такой прием: вся цель разделяется на большое число элементарных площадок dS (рис. 89.2) и относительно каждой из них решается вопрос: каково ее расстояние от точки попадания i-й ракеты (X_i, Y_i). Если хотя бы для одной из точек попадания это расстояние меньше $R_п$ (радиуса поражения), то площадка dS считается пораженной.

---

[1] Если задано не σ_x, а E_x, переходят от E_x к σ_x по формуле

$$\sigma_x = \frac{E_x}{\rho\sqrt{2}} = \frac{E_x}{0{,}675}.$$

Затем производится суммирование (интегрирование) пораженных площадок $dS_п$ по всей цели:

$$S_п = \sum_ц dS_п. \tag{89.1}$$

Деля полученное значение пораженной площади на площадь цели $S_ц$, мы получим конкретное значение величины U — долю поражения в данной реализации.

Приближенное значение средней доли поражения M найдем как среднее арифметическое из значений величины U, полученных во всех реализациях:

$$M \approx \frac{\sum_{k=1}^{N} U_k}{N}, \tag{89.2}$$

где U_k — доля поражений в k-й реализации,
N — общее число реализаций.

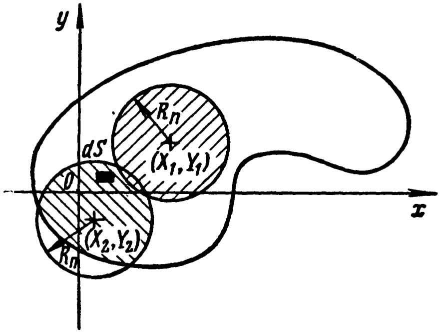


Рис. 89.2.

Вероятность $R_{u,n}$ того, что будет поражено не менее данной доли u площади цели, найдем приближенно как частоту этого события. Для этого подсчитаем число m реализаций, в которых поражено не менее доли u площади цели и разделим на общее число реализаций N:

$$R_{u,n} \approx \frac{m}{N}.$$

Таким образом, схема определения величин M и $R_{u,n}$ методом Монте-Карло построена.

Отметим попутно одну характерную особенность метода. В примере 1 мы поставили задачу определения только двух величин: M и $R_{u,n}$. Однако объем расчетов почти не увеличился бы, если бы кроме этих двух показателей эффективности мы задались целью вычислить еще некоторые характеристики, например:

$M^{(2)}$ — среднюю долю площади, накрытой зоной поражения не менее двух раз;

D_u — дисперсию величины U и т. д.

Действительно, поскольку в каждой реализации все равно производится розыгрыш n точек попадания, определяется пораженная площадь $S_п$ и доля поражения U, объем расчетов мало увеличится, если мы дополнительно вычислим еще некоторые характеристики, указанные выше.

Поэтому, организуя моделирование на ЭЦВМ методом Монте-Карло, всегда имеет смысл позаботиться о том, чтобы «вывести» из машины в каждой реализации побольше сведений о ее результатах, не ограничиваясь расчетом одного-единственного показателя.

Пример 2. Рассматривается воздушный налет, в процессе которого группа из k самолетов входит в зону действия средств ПВО (истребительной авиации или ЗУР). Предположим, что средства поражения наводятся на воздушные цели с помощью одной станции наведения, имеющей n каналов ($n<k$). При этом каждый из каналов может одновременно наводить только одно средство поражения по одной цели. Средняя вероятность поражения одной обстрелянной (атакованной) цели, с учетом всех этапов боевой деятельности средства поражения и его надежности, равна p.

Воздушные цели входят в зону действия средств в какие-то случайные моменты:

$$T_1, T_2, \ldots, T_k.$$

Для i-й цели истинный момент входа распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $\bar{t}_i$ и средним квадратическим отклонением σ_{t_i}.

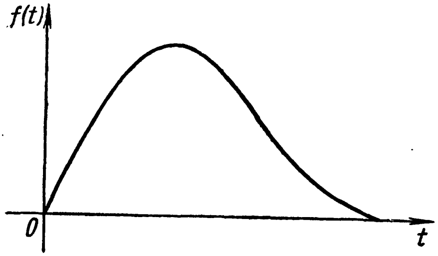


Рис. 89.3.

Время занятости канала наведения (т. е. время полета средства поражения до перехода на самонаведение) зависит от дальности до цели D в момент начала наведения, а эта последняя определяется временем τ_i, прошедшим от момента входа цели в зону действия до момента начала наведения по этой цели. Закон распределения фактического времени наведения $T_н$ (рис. 89.3) имеет вид

$$f(t) = \frac{t}{\alpha^2} e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}} \quad \text{при } t > 0, \qquad (89.3)$$

где параметр α зависит от дальности D заданным образом: $\alpha=\alpha(D)$. Соответственно функция распределения величины $T_н$ равна

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}} \quad \text{при } t > 0. \qquad (89.4)$$

Общее время пребывания каждой цели в зоне действия равно t_0.

Целераспределение осуществляется по следующему простейшему правилу (алгоритму):

— при входе очередной цели в зону действия ее обстрел берет на себя любой из свободных в данный момент каналов наведения;

— одновременное наведение двух или более средств поражения по одной и той же цели исключено (на обстреливаемую цель ставится «маркер запрета»);

— каждая цель не может быть атакована более двух раз; после поражения цели обстрел прекращается; поражение цели обнаруживается мгновенно;

— если в момент входа какой-то цели в зону действия средств ПВО все каналы наведения заняты, то наведение по этой цели начинается тогда, когда освободится один из каналов; если за время пребывания в зоне ни один из каналов не освободится, цель остается необстрелянной;

— если в результате первой атаки данная цель не поражена, она продолжает обстреливаться с помощью того же канала.

Требуется определить показатели эффективности операции по отражению налета:

$M_п$ — среднее число пораженных целей;
$M_н$ — среднее число необстрелянных целей;
Q — вероятность того, что хотя бы одна цель пройдет зону непораженной.

Построить схему определения этих показателей методом Монте-Карло на ЭЦВМ.

Решение. Схема реализации налета методом Монте-Карло состоит в следующем.

Прежде всего разыгрывается k единичных жребиев (по числу целей) и определяется момент входа каждой цели в зону действия. После этого целям присваиваются в памяти машины новые номера (в порядке входа в зону).

Затем разыгрывается, какому каналу будет назначена какая цель. Согласно принятому алгоритму целераспределения каждая цель назначается любому свободному в данный момент каналу. В момент t_1 входа первой цели все n каналов свободны. Разыгрывается единичный жребий, указывающий, какому из n каналов назначить первую цель, т. е. какое из n равновероятных событий A_1, $A_2, \ldots, A_n$ произойдет.

Затем канал, на который пал жребий, привязывается к данной цели и отмечается в памяти машины как занятый. После этого разыгрывается следующий единичный жребий, отвечающий на вопрос, сколько времени будет продолжаться наведение, т. е. какое значение примет случайная величина $T_{\text{н}}$.

Для этого нужно вычислить параметр α закона распределения времени наведения первого средства; это значение определяется для дальности $D_{\text{р}}$, соответствующей рубежу, на котором принимаются к обстрелу входящие в зону цели. Когда закон $F_1(t)$ (89.4) найден, единичный жребий осуществляется обычным порядком через обратную (89.4) функцию:

$$T_{\text{н}} = \sqrt{-2\alpha^2 \ln(1-Y)},$$

где Y — случайное число между 0 и 1.

Заметим, что если Y есть случайное число от 0 до 1, то $1-Y$ также случайное число от 0 до 1, и поэтому можно время наведения (занятости канала) разыгрывать по более простой формуле

$$T_{\text{н}} = \sqrt{-2\alpha^2 \ln Y},$$

где Y — случайное число от 0 до 1.

Полученное время наведения (оно же время занятости данного канала первой целью) сравнивается с полным временем t_0, которое осталось цели находиться в зоне. Если оказалось, что $T_{\text{н}} > t_0$, то цель не успеет быть атакована, а канал освободится в момент, когда цель покинет зону. Если оказалось, что $T_{\text{н}} < t_0$, разыгрывается единичный жребий, отвечающий на вопрос, поражена цель или нет. Сведения об этом сообщаются в память машины.

Если цель поражена, она отмечается как пораженная и в дальнейшем процессе моделирования не участвует. Если она не поражена, обстрел продолжается; снова разыгрывается время наведения (параметр закона распределения берется уже другим значением с учетом дальности до цели в тот момент, когда кончился первый обстрел и начался второй). Если новое время наведения оказалось таким, что в сумме с прежним оно превосходит t_0, то второе наведение не успеет состояться и цель пройдет зону непораженной; если оно успеет состояться, снова разыгрывается единичный жребий, решающий, поражена она или нет. В обоих случаях цель исключается из дальнейшего процесса розыгрыша.

Совершенно так же разыгрывается «судьба» второй, третьей и так далее целей вплоть до k-й цели с той разницей, что в процессе розыгрыша участвуют не все n каналов, а только те из них, которые в момент входа данной цели в зону оказались не занятыми (не были заняты вовсе или успели освободиться). Если в момент входа какой-либо цели в зону были заняты все каналы, цель углубляется в зону необстрелянной до тех пор, пока не освободится какой-нибудь канал, который сразу же и привязывается к этой цели.

В результате одной (i-й) реализации, которая продолжается, пока все k целей не прошли зону действия, в память машины заносится:

— число пораженных целей $k_i^{(\text{п})}$;

— число необстрелянных целей $k_i^{(\text{н})}$;

— число X_i, равное нулю, если все цели поражены, и равное единице, если хотя бы одна из них не поражена.

В результате N реализаций среднее число пораженных целей $M_п$ и среднее число необстрелянных целей $M_н$ определяются как средние арифметические чисел $k^{(п)}$ и $k^{(н)}$ в отдельных реализациях:

$$M_п = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i^{(п)},$$

$$M_н = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i^{(н)},$$

а вероятность Q — как среднее арифметическое значений величины X:

$$Q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Рассмотренные примеры 1 и 2 могут служить крайне упрощенными образчиками схемы моделирования боевых действий методом Монте-Карло.

§ 90. НЕОБХОДИМОЕ ЧИСЛО РЕАЛИЗАЦИЙ

В данном параграфе мы рассмотрим вопрос о том, каково должно быть число реализаций процесса методом Монте-Карло для того, чтобы его характеристики были определены с заданной точностью.

Приведем без доказательства несколько элементарных правил, относящихся к этому вопросу.

1. Если в результате N реализаций частота события A получилась равной p^*, то истинное значение вероятности события A практически будет лежать в пределах:

$$p^* \pm 2 \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{N}}. \tag{90.1}$$

2. Для того чтобы максимальная практически возможная ошибка в определении вероятности события A была не больше Δ, нужно осуществить не меньше, чем

$$N = \frac{4p(1-p)}{\Delta^2} \tag{90.2}$$

реализаций, где p — искомая вероятность события A.

Величину p можно взять ориентировочным значением, например, по частоте события в первой серии реализаций, уточняя ее в дальнейшем, по мере увеличения их числа.

3. Если в результате серии из N реализаций определено среднее значение $\bar{x}^*$ некоторой случайной величины X, то истинное среднее практически будет лежать в пределах

$$\bar{x}^* \pm \frac{2}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\bar{x}^*)^2}, \tag{90.3}$$

где x_i — значение, принятое случайной величиной X в i-й реализации;

$\overline{x}^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ — среднее арифметическое результатов реализаций.

4. Если требуется получить среднее значение $\overline{x}$ случайной величины X с ошибкой, не превышающей заданного Δ, то следует сделать реализаций не меньше, чем

$$N = \frac{4D_x}{\Delta^2}, \tag{90.4}$$

где D_x дисперсия величины X. Ее можно определить сначала ориентировочно, по результатам первой серии из N_1 реализаций, по формуле

$$D_x \approx \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 - (\overline{x}^*)^2, \tag{90.5}$$

постепенно уточняя ее по мере накопления данных.

Пример 1. В результате 1000 реализаций получена частота события A:

$$p^* = 0{,}28.$$

Найти, с какой ошибкой определяется вероятность p, если положить ее равной p^*.

Решение. Максимальная ошибка по формуле (90.1) будет равна

$$\Delta = 2\sqrt{\frac{0{,}28 \cdot 0{,}72}{1000}} \approx 0{,}028.$$

Следовательно, истинное значение вероятности будет заключено в пределах

$$p^* \pm \Delta \text{ или от } 0{,}252 \text{ до } 0{,}308.$$

Пример 2. Сколько нужно сделать реализаций, чтобы с максимальной ошибкой не больше 0,05 определить вероятность p, которая имеет ориентировочное значение 0,6?

Решение. По формуле (90.2) имеем

$$N = \frac{4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}{0{,}05^2} \approx 384,$$

т. е. ориентировочно около 400 реализаций.

Пример 3. Произведено $N=400$ реализаций, в каждой из которых получено значение x_i случайной величины X. Среднее арифметическое наблюденных значений равно

$$\overline{x}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i = 2{,}20;$$

среднее арифметическое их квадратов

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 5{,}02.$$

Требуется: а) определить максимальную практически возможную ошибку, которую мы сделаем, если примем математическое ожидание величины X равным 2,20; б) определить, сколько нужно реализаций, чтобы эта ошибка не превосходила 0,01?

Решение. а) Максимальная ошибка согласно формуле (90.3) равна

$$\Delta = \frac{2}{\sqrt{400}}\sqrt{5{,}02 - 4{,}84} = 0{,}1\sqrt{0{,}18} \approx 0{,}043.$$

б) Чтобы довести эту ошибку до 0,01, нужно сделать согласно формуле (90.4)

$$N = \frac{4\cdot 0{,}18}{(0{,}01)^2} \approx 7200 \text{ (реализаций)}.$$

§ 91. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ РЕШЕНИЙ

Оба примера § 89 относятся к так называемым «прямым задачам исследования операций». Схема такой задачи: даны условия выполнения операции; определить показатель эффективности.

Более важными для практики являются не прямые, а *обратные* задачи; в обратных задачах требуется найти такой способ организации операции, при котором показатель эффективности обращается в максимум.

Примеры обратных задач:

— как распределить на плоскости n точек прицеливания, чтобы поразить в среднем максимальную площадь?

— какой следует выбрать алгоритм целераспределения, чтобы поразить в среднем наибольшее число целей или с наибольшей вероятностью не пропустить за определенный рубеж ни одной цели?

Если прямая задача исследования операций решается аналитическим методом, то для решения обратной задачи также может быть применен аналитический метод, хотя, как правило, он оказывается значительно более громоздким.

Для решения обратных задач методом Монте-Карло обычно просто решают большое количество прямых задач и смотрят, при каких значениях параметров эффективность обращается в максимум.

Например, для решения первого из приведенных выше вопросов (о распределении n точек прицеливания) можно, варьируя различные возможные расположения этих точек и вычисляя для каждого из них среднюю долю поражения, «нащупать» то расположение, при котором эта доля максимальна.

Для решения второго вопроса можно выбрать несколько вариантов алгоритма целераспределения и оценить эффективность каждого из них. Область значений, в которой следует делать «пробы», может быть ориентировочно определена заранее, с помощью приближенного аналитического расчета.

В некоторых случаях расчет на ЭЦВМ может не только дать нам показатель эффективности для данного решения, но и подсказать, в какую сторону нужно изменять это решение, чтобы увеличить эффективность. Это позволяет существенно уменьшить объем расчетов.

Заметим, что в подобных задачах нет смысла искать всегда решение, обращающее показатель эффективности в *точный максимум*. Напротив, нужно стремиться выявить *область приемлемых решений*, где достигается может быть не максимальная, но удовлетворительная эффективность.

Так или иначе, решение обратной задачи всегда связано с *перебором вариантов*; нужно стремиться к тому, чтобы приемлемое решение было найдено при минимальном переборе.

Моделирование боевых действий на ЭЦВМ бывает двух типов: одностороннее и двухстороннее.

При одностороннем моделировании поведение противника (его средства и способы их боевого применения) считается заданными, а ищется только разумный образ действий одной стороны.

При двухстороннем моделировании ищутся сразу рациональные решения как для одной, так и для другой стороны. В этом случае для выработки решения часто применяется игровой подход.

Моделирование боевых действий на ЭЦВМ, кроме научно-исследовательских целей, имеет большое значение и для тренировки командных кадров. Наряду с маневрами и учениями, которые представляют собой «физическое» моделирование боевых действий, должно применяться и «математическое» их моделирование на ЭЦВМ, т. е. розыгрыш боевого процесса методом Монте-Карло. Командир, в обязанности которого входит руководство боем или операцией, дает распоряжения, результаты которых разыгрываются машиной с учетом как случайных факторов, сопровождающих их выполнение, так и контрмер противника.

При таком «тренировочном» моделировании боевых действий целесообразно, чтобы человек (командир) получал информацию от машины не в виде средних характеристик, осредненных по множеству реализаций, а в виде *одной-единственной конкретной реализации*, в зависимости от типа которой и принимается решение. В процессе моделирования командиру сообщается конкретная боевая обстановка:

— количество, состояние и боеготовность всех находящихся в его распоряжении средств с учетом потерь, нанесенных противником;

— количество, дислокация и состояние средств противника (в той мере, в какой данные о них могут быть получены разведкой);

— данные о состоянии и деятельности органов снабжения, боепитания, связи и т. п.

Все эти сведения доводятся до командира с помощью специальной системы отображения (световое табло, карта с условными значками и т. д.). На основе этих сведений (и, в случае надобности, дополнительных расчетов) командир принимает решение.

Очень важно, чтобы ни командиру, ни его штабу для принятия решения не нужно было производить трудоемких расчетов. Если расчеты не сводятся к применению простейших вспомогательных средств (графики, таблицы, специальные линейки, номограммы), то они должны выполняться машиной. Расчеты ни в коем случае не должны задерживать принятие решения.

В результате такой тренировки на ЭЦВМ происходит н а б о р о п ы т а, крайне необходимый для формирования сознательного, волевого командира, не теряющегося в неожиданных обстоятельствах и способного в любых условиях принять правильное решение.

Большое значение имеет применение ЭЦВМ в командно-штабных учениях. Они могут применяться для:

— планирования операций (расчета наряда средств, решения задач целераспределения, задач перевозок, снабжения и т. п.);

— обработки различного рода информации и отображения обстановки:

— моделирования боевых действий с сопровождающими их случайностями;

— подготовки наиболее эффективных вариантов решений и т. п.

В перспективе моделирование боевых действий на ЭЦВМ может найти еще одно применение — для выработки рациональных алгоритмов управления боевыми действиями путем с а м о о б у ч е н и я управляющих машин.

Чтобы пояснить идею самообучения, предположим, что нам требуется выработать эффективный алгоритм управления боем, хотя бы алгоритм целераспределения при отражении воздушного налета.

Процесс самообучения строится как процесс постепенного нащупывания правильного образа действий.

Начнем с какого-нибудь (может быть, и не вполне удачного) алгоритма целераспределения (скажем, элементарнейшего алгоритма, описанного в примере 2 § 89). Этот алгоритм закладывается в машину. Способ организации налета (порядок следования летательных аппаратов, их эшелонирование по высоте, размещение носителей, постановщиков помех, маневрирование и т. п.) продумывается и выбирается коллективом военных специалистов. Затем производится «проигрывание» на ЭЦВМ ряда реализаций налета и его отражения методом Монте-Карло. После того как некоторое количество реализаций получено, объявляется перерыв «на анализ результатов».

Коллектив, обдумав свои действия и познакомившись в какой-то мере с приемами управления «противника» (машины), находит в них слабые места и меняет свою тактику согласно набранному опыту. Например, он может изменить построение налета, взаимное расположение постановщиков помех и носителей; может заставить воздушные цели совершать «обманный маневр» и т. д.

Машина за время перерыва тоже обрабатывает полученные результаты, знакомится с тактикой «противника» и меняет алгоритм управления так, чтобы в максимальной степени воспользоваться слабостями противника и исправить недостатки прежнего алгоритма.

После этого снова «проигрывается» цикл реализаций, которые снова «обдумываются» обеими сторонами, и т. д.

В результате процесса такой «тренировки» (или самообучения) может быть получен достаточно приемлемый алгоритм управления, в котором будет обобщен «боевой опыт», набранный в борьбе с разумным и изобретательным «противником».

ГЛАВА 14

ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ОРГАНИЗАЦИЕЙ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

§ 92. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

При анализе боевых действий часто приходится встречаться с обстановкой, когда эффективность боевого применения технических устройств лимитируется их пропускной способностью. Например, при отражении воздушного налета может оказаться, что некоторые воздушные цели пройдут зону действия необстрелянными, так как все каналы наведения будут заняты. Аналогичные вопросы, связанные с пропускной способностью технических устройств, возникают при передаче информации по линиям связи, при анализе работы ремонтных организаций, эксплуатационной службы и т. п.

При решении всех задач такого рода пользуются специальным разделом теории вероятностей — так называемой «теорией массового обслуживания».

Эта теория изучает процессы, связанные с работой различных обслуживающих организаций, таких, например, как:

— телефонные станции;
— ремонтные мастерские;
— билетные кассы;
— торговые точки;
— парикмахерские;
— линии связи;

и т. п.

Каждая из таких организаций предназначена для обслуживания заявок (или требований), поступающих в какие-то заранее неизвестные моменты времени. Пропускная способность системы массового обслуживания зависит от:

— числа входящих в ее состав обслуживающих единиц (каналов);
— работоспособности каждого канала;
— характера потока заявок.

Абсолютной пропускной способностью системы массового обслуживания называется среднее количество заявок, которое она способна обслужить в единицу времени.

Относительной пропускной способностью называется среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поданных в единицу времени.

Как абсолютная, так и относительная пропускная способность зависит не только от качеств системы, но и от характера потока заявок. Если заявки следуют друг за другом более или менее регулярно, то система лучше справляется с их обслуживанием. Если же поток заявок нерегулярный и образует местные сгущения или разрежения, то работа системы затрудняется: на одних участках времени возникают простои, а на других — наблюдается перегрузка системы, когда некоторые заявки получают отказ или же скапливаются большие очереди заявок.

Поэтому необходимо различать номинальную и фактическую пропускную способность системы. Номинальная зависит только от числа каналов и работоспособности каждого из них. Фактическая зависит еще и от характера потока заявок. Фактическая пропускная способность системы всегда ниже номинальной.

Помимо абсолютной и относительной пропускной способности теория массового обслуживания рассматривает еще и другие характеристики обслуживающих систем, например:

— средний процент «отказов»;

— среднее относительное время «простоя» системы из-за отсутствия заявок;

— средняя длина очереди;

— среднее время ожидания;

— вероятность того, что в данный момент будет занято 0, 1, 2... каналов и т. д.

Задача теории массового обслуживания — установление зависимости между этими характеристиками, числом каналов системы, быстротой обслуживания и видом потока заявок.

Различают два основных типа систем массового обслуживания:

1. **Системы с отказами.** В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает «отказ», покидает систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует.

2. **Системы с ожиданием.** В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из каналов. Как только освободится канал, принимается к обслуживанию одна из заявок, стоящих в очереди.

Обслуживание в системе с ожиданием может быть «упорядоченным» (заявки обслуживаются в порядке поступления) и «неупорядоченным» (заявки обслуживаются в случайном порядке).

Время ожидания в очереди может быть как ограниченным, так и неограниченным. Системы с ограниченным временем ожидания называются иногда «системами смешанного типа». Если в системе смешанного типа максимальное время ожидания мало́ по сравнению со временем обслуживания одной заявки, то такая система может приближенно рассматриваться как система с отказами.

При исследовании операций часто приходится встречаться с процессами, близкими по типу к процессам массового обслуживания. Таков, например, процесс работы системы ПВО, которая может рассматриваться как своеобразная система массового обслуживания, где «заявками» являются налетающие цели, а «каналами» — каналы наведения средств ПВО на цели. Таковы процессы функционирования ремонтных органов, одно- и многоканальных линий связи и т. д. Поэтому знакомство с основами теории массового обслуживания обязательно для каждого специалиста по исследованию операций.

§ 93. ПОТОК ЗАЯВОК. ВРЕМЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрим систему массового обслуживания, на которую поступает поток заявок. Так как моменты поступления заявок заранее неизвестны (случайны), то поток заявок можно рассматривать как случайный поток событий (см. § 58) и описывать его такими же характеристиками.

Важнейшей характеристикой потока заявок является его **плотность**, или **интенсивность** λ — среднее число заявок, поступающих в единицу времени. Если интенсивность потока постоянна, он называется **стационарным**, если она меняется в зависимости от времени, поток называется **нестационарным**.

При заданной интенсивности λ поток может быть более или менее регулярным, закономерным. Наиболее регулярным является поток заявок, идущих одна после другой через определенные, строго фиксированные промежутки времени.

Несмотря на кажущуюся простоту регулярного потока, задачи теории массового обслуживания при таком потоке оказываются сложнее и решаются труднее, чем если предположить, что заявки поступают в случайные моменты, независимо друг от друга и образуют пуассоновский поток (см. § 58).

Напомним, что характерными чертами пуассоновского потока заявок являются **ординарность** и **отсутствие последействия** (т. е. заявки поступают поодиночке и независимо друг от друга).

Задачи теории массового обслуживания имеют простое аналитическое решение только в случае, когда поток заявок является пуассоновским. Если это не так, математический аппарат становится очень сложным и приходится, как правило, прибегать к моделированию работы системы методом Монте-Карло.

Для приближенного решения задач массового обслуживания обычно заменяют случайный, но не пуассоновский поток заявок пуассоновским. Расчеты показывают, что такая замена, как правило, мало сказывается на пропускной способности системы.

Наиболее простым пуассоновским потоком является такой, у которого интенсивность не зависит от времени:

$$\lambda = \text{const}.$$

Такой поток называется простейшим. Наиболее важные результаты в теории массового обслуживания получены для простейшего потока заявок.

Кроме характера потока заявок работа системы массового обслуживания существенно зависит от ее собственных характеристик: числа каналов n и работоспособности каждого канала.

Работоспособность канала характеризуется временем обслуживания одной заявки. Это время $T_{об}$ есть вообще случайная величина и от заявки к заявке меняется. Поэтому, чтобы охарактеризовать работоспособность канала, нужно задать закон распределения $\varphi(t)$ времени обслуживания.

Математические задачи теории массового обслуживания решаются особенно просто, если предположить, что время обслуживания $T_{об}$ распределено по показательному закону:

$$\varphi(t)=\mu e^{-\mu t} \quad \text{при} \quad t>0, \tag{93.1}$$

где $\mu=\frac{1}{\bar{t}_{об}}$ — величина, обратная среднему времени обслуживания одной заявки $\bar{t}_{об}$.

Расчеты показывают, что пропускная способность системы массового обслуживания зависит главным образом от среднего времени обслуживания одной заявки $\bar{t}_{об}$ и мало зависит от закона распределения $\varphi(t)$. Поэтому в теории массового обслуживания обычно делают допущение, что время обслуживания распределено по показательному закону (короче: «время обслуживания — показательное»).

При пуассоновском потоке заявок и показательном времени обслуживания процесс функционирования системы массового обслуживания будет так называемым марковским случайным процессом, т. е. таким процессом, в котором вероятность любого будущего состояния системы зависит только от ее состояния в данный момент и не зависит от того, каким образом и когда система пришла в это состояние.

Ниже рассмотрим простейшие задачи теории массового обслуживания, относящиеся к системе с отказами. Поток заявок будем принимать пуассоновским, а время обслуживания показательным.

§ 94. ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА С ОТКАЗАМИ

Рассмотрим простейшую из всех возможных задач теории массового обслуживания — оценку пропускной способности одноканальной системы с отказами.

Пусть система состоит только из одного канала ($n=1$) и на нее поступает пуассоновский поток заявок с плотностью λ, зависящей в общем случае от времени:

$$\lambda=\lambda(t).$$

Заявка, заставшая канал занятым, получает отказ и покидает систему.

Требуется определить:

— абсолютную пропускную способность системы Q;

— относительную пропускную способность системы q

и их изменение с течением времени.

Рассмотрим единственный канал обслуживания как физическую систему, которая может находиться в двух состояниях (рис. 94.1):

A_0 — свободен;

A_1 — занят.

Стрелки указывают возможные переходы системы из состояния в состояние.

Введем обозначения:

$P_0(t)$ — вероятность того, что в момент t система будет в состоянии A_0 (канал свободен);

$P_1(t)$ — вероятность того, что в момент t система будет в состоянии A_1 (канал занят).

Очевидно, для любого момента t

$$P_0(t) + P_1(t) = 1.$$

Зафиксируем момент времени t и придадим ему приращение Δt. Найдем вероятность $P_0(t+\Delta t)$ того, что в момент $t+\Delta t$ система будет в состоянии A_0 (канал свободен).

Как это может произойти? Двумя способами:

— в момент t канал был свободен и за время Δt не стал занятым (не пришло ни одной заявки);

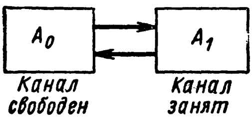


Рис. 94.1.

— в момент t канал был занят, а за время Δt освободился.

Найдем вероятности обоих вариантов и сложим их.

Вероятность первого варианта равна произведению вероятностей:

— того, что в момент t канал был свободен; она у нас обозначена $P_0(t)$;

— того, что за время Δt не придет ни одной заявки; она равна

$$e^{-\lambda\Delta t}.$$

Последняя вероятность при малом Δt приближенно равна $1-\lambda\Delta t$ [1]. Следовательно, вероятность первого варианта равна

$$P_0(t)(1-\lambda\Delta t). \tag{94.1}$$

---

[1] В этом можно убедиться, разлагая $e^{-\lambda\Delta t}$ в ряд по степеням Δt.

Найдем вероятность второго варианта: в момент t канал был занят, а за время Δt освободился. Она равна произведению вероятностей:

— того, что в момент t канал был занят; она равна $P_1(t)$;

— того, что за время Δt канал освободился, т. е. кончилось время обслуживания; при показательном времени обслуживания эта вероятность равна

$$1-e^{-\mu\Delta t}\approx\mu\Delta t.$$

Таким образом, вероятность второго варианта равна

$$P_1(t)\mu\Delta t. \tag{94.2}$$

Складывая (94.1) и (94.2), получаем

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t.$$

Раскроем скобки в правой части, перенесем $P_0(t)$ в левую и разделим на Δt:

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получаем дифференциальное уравнение для $P_0(t)$:

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t). \tag{94.3}$$

Напишем теперь дифференциальное уравнение для $P_1(t)$. Рассуждая точно так же, как раньше, вычислим вероятность $P_1(t+\Delta t)$:

$$P_1(t+\Delta t)=P_1(t)(1-\mu\Delta t)+P_0(t)\lambda\Delta t,$$

откуда

$$\frac{dP_1(t)}{dt}=-\mu P_1(t)+\lambda P_0(t). \tag{94.4}$$

Перепишем два уравнения (94.3) и (94.4), для простоты опуская зависимость от t в обозначении функций (т. е. записывая их просто P_0 и P_1):

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP_0}{dt}&=-\lambda P_0+\mu P_1,\\ \frac{dP_1}{dt}&=-\mu P_1+\lambda P_0.\end{aligned}\right\} \tag{94.5}$$

Так как в начальный момент $t=0$ канал свободен, то должны выполняться начальные условия:

$$P_0(0)=1;\quad P_1(0)=0.$$

Эта система двух уравнений может быть упрощена и сведена к одному, если вспомнить, что для любого момента времени

$$P_0+P_1=1; \tag{94.6}$$

следовательно,

$$P_1 = 1 - P_0. \qquad (94.7)$$

Подставляя (94.7) в первое из уравнений (94.5), получаем

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu(1 - P_0)$$

или

$$\frac{dP_0}{dt} = -(\mu + \lambda) P_0 + \mu. \qquad (94.8)$$

Линейное дифференциальное уравнение (94.8) с одной неизвестной функцией P_0 легко может быть проинтегрировано не только для простейшего потока заявок ($\lambda = \text{const}$), но и для случая, когда плотность потока зависит от времени ($\lambda = \lambda(t)$). Не останавливаясь на последнем случае, приведем решение этого уравнения только для $\lambda = \text{const}$:

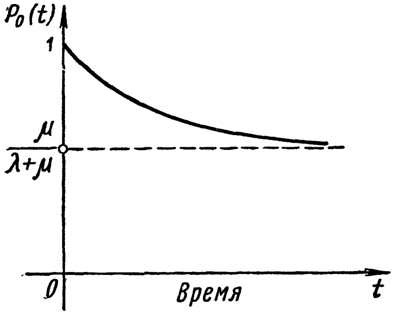


Рис. 94.2.

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu) t}. \qquad (94.9)$$

Зависимость величины P_0 от времени имеет вид, изображенный на рис. 94.2. В начальный момент (при $t = 0$) система заведомо свободна; с увеличением времени вероятность P_0 уменьшается и при $t \to \infty$ стремится к постоянному значению $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Нетрудно убедиться, что для одноканальной системы с отказами вероятность P_0 есть не что иное, как о т н о с и т е л ь н а я п р о п у с к н а я с п о с о б н о с т ь q.

Действительно, если P_0 есть вероятность того, что в момент t_0 канал свободен, то вероятность того, что заявка, пришедшая в момент t, будет обслужена, тоже равна P_0. А значит, для данного момента t среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших тоже равно P_0:

$$q = P_0. \qquad (94.10)$$

В пределе при $t \to \infty$, когда процесс обслуживания уже установится, относительная пропускная способность системы будет равна

$$q^* = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \qquad (94.11)$$

Зная относительную пропускную способность q, легко найти абсолютную Q. Они связаны очевидным соотношением:

$$Q = \lambda q. \qquad (94.12)$$

В пределе, при $t \to \infty$, абсолютная пропускная способность тоже стабилизируется и будет равна

$$Q^* = \lambda q^* = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \qquad (94.13)$$

Зная относительную пропускную способность системы q (вероятность того, что пришедшая в момент t заявка будет обслужена), легко найти вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = 1 - q. \qquad (94.14)$$

Вероятность отказа $P_{\text{отк}}$ есть не что иное как средняя доля необслуженных заявок (отношение числа необслуженных заявок к числу поданных в единицу времени).

В пределе, при $t \to \infty$, получим

$$P^*_{\text{отк}} = 1 - \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \qquad (94.15)$$

Пример. Одноканальная система массового обслуживания представляет собой одну телефонную линию. Заявка (вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Плотность потока вызовов $\lambda = 0{,}8$ (вызовов в минуту). Средняя продолжительность разговора 1,5 *мин*. Определить предельные (при $t \to \infty$) значения: 1) относительной пропускной способности канала q^*; 2) абсолютной пропускной способности Q^*; 3) вероятности отказа $P^*_{\text{отк}}$. Сравнить фактическую пропускную способность с номинальной.

Решение. Определяем параметр μ для времени обслуживания

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}667.$$

По формуле (94.11) имеем

$$q^* = \frac{0{,}667}{0{,}8 + 0{,}667} \approx 0{,}455.$$

Следовательно, система будет обслуживать около 45% поступивших вызовов.

По формуле (94.13) находим абсолютную пропускную способность

$$Q^* = 0{,}8 \cdot 0{,}455 \approx 0{,}364,$$

т. е. канал способен осуществить в среднем 0,364 разговора в минуту или около 22 разговоров в час.

Вероятность отказа будет

$$P^*_{\text{отк}} = 1 - q^* = 0{,}545,$$

т. е. около 55% поступивших вызовов будет получать отказ.

Номинальная пропускная способность канала:

$$Q_{\text{ном}} = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = 0{,}667 \text{ разговора в минуту}$$

или около 40 разговоров в час.

Отсюда видно большое влияние случайности потока заявок на пропускную способность системы. Если бы заявки шли бесперебойно, через 1,5 одна после другой, система могла бы обслужить почти в два раза больше разговоров, чем если они идут несогласованно, в случайные моменты времени.

§ 95. МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА С ОТКАЗАМИ

Рассмотрим n-канальную систему массового обслуживания с отказами. Эта система может находиться в следующих состояниях:

A_0 — все каналы свободны;
A_1 — занят ровно один канал, остальные свободны;
. . . .
A_k — занято ровно k каналов, остальные свободны;
. . . .
A_n — заняты все n каналов.

Схема возможных состояний системы со стрелками, обозначающими возможные переходы, показана на рис. 95.1.

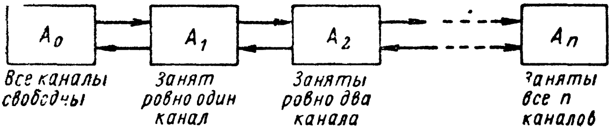


Рис. 95.1.

Пользуясь тем же приемом, который был применен в предыдущем параграфе для одноканальной системы, можно написать систему дифференциальных уравнений для вероятностей $P_0, P_1, \ldots, P_k, \ldots, P_n$ того, что будут заняты $0, 1, \ldots, k, \ldots, n$ каналов:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP_0}{dt} &= -\lambda P_0 + \mu P_1, \\
\frac{dP_1}{dt} &= \lambda P_0 + (\lambda + \mu) P_1 + 2\mu P_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dP_k}{dt} &= \lambda P_{k-1} - (\lambda + k\mu) P_k + (k+1)\mu P_{k+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dP_n}{dt} &= \lambda P_{n-1} - n\mu P_n.
\end{aligned}\right\} \tag{95.1}$$

Уравнения (95.1) называются **уравнениями Эрланга**. Они определяют вероятности состояний $P_0, P_1, \ldots, P_k, \ldots, P_n$. Очевидно, для любого момента t эти вероятности дают в сумме единицу:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1. \tag{95.2}$$

Интегрирование системы (95.1) при начальных условиях

$$P_0(0) = 1; \quad P_1(0) = \ldots = P_n(0) = 0$$

(в начальный момент все каналы свободны) дает все вероятности $P_0, P_1, \ldots, P_n$ как функции времени. В общем случае (при большом числе каналов) уравнения (95.1) приходится интегрировать на машине, так как аналитические формулы слишком сложны.

Заметим, что в данном случае (при n-канальной системе с отказами) вероятность отказа есть не что иное как вероятность того, что все n каналов заняты:

$$P_{\text{отк}} = P_n, \tag{95.3}$$

а относительная пропускная способность равна

$$q = 1 - P_n \tag{95.4}$$

— вероятности того, что хотя бы один канал свободен.

Для практики представляет интерес установившийся режим обслуживания (при $t \to \infty$) [1].

При этом все вероятности P_i становятся постоянными и все производные в левых частях уравнений Эрланга обращаются в нуль. Для предельных вероятностей $P_0^*, P_1^*, \ldots, P_n^*$ получается система уже не дифференциальных, а обычных линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{c}
-\lambda P_0^* + \mu P_1^* = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda P_{k-1}^* - (\lambda + k\mu) P_k^* + (k+1)\mu P_{k+1}^* = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda P_{n-1}^* - n\mu P_n^* = 0.
\end{array}\right\} \tag{95.5}$$

Решая эту систему уравнений относительно $P_0^*, P_1^* \ldots P_n^*$ и учитывая, что сумма их равна единице, получаем следующие формулы (так называемые **формулы Эрланга**):

$$\left.\begin{array}{l}
P_0^* = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\alpha}{1!} + \dfrac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\alpha^n}{n!}}, \\
P_1^* = \dfrac{\alpha}{1!} P_0^*, \\
P_2^* = \dfrac{\alpha^2}{2!} P_0^*, \\
P_k^* = \dfrac{\alpha^k}{k!} P_0^*, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_n^* = \dfrac{\alpha^n}{n!} P_0^*,
\end{array}\right\} \tag{95.6}$$

где $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{t}_{\text{об}}$ — среднее число заявок, поступающих в систему за среднее время обслуживания одной заявки.

---

[1] Естественно, такой установившийся режим существует только в случае простейшего потока ($\lambda = \text{const}$).

Пример. Допустим, что станция наведения истребителей имеет три канала. Каждый канал одновременно может наводить один истребитель на одну цель. Среднее время наведения (обслуживания) равно $\overline{t}_{об}=4$ *мин*. Поток воздушных целей имеет плотность $\lambda=0{,}75$ самолета в минуту. Цель, не принятая к обстрелу в момент ее вступления в зону действия истребительной авиации, вообще не обстреливается (получает отказ).

Определить для предельного, установившегося режима обслуживания:

—среднее относительное время простоя системы $t^*_{пр}$;

— относительную пропускную способность q^*;

— абсолютную пропускную способность Q^*;

—вероятность отказа $P^*_{отк}$.

Решение. Определяем α:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}75 \cdot 4 = 3$$

(т. е. в систему поступает три цели за время обслуживания одной заявки).

Среднее относительное время простоя есть не что иное, как вероятность P^*_0 того, что все каналы будут свободны. По первой формуле (95.6) имеем

$$P^*_0 = \frac{1}{1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}} = \frac{1}{13} \approx 0{,}077.$$

Относительная пропускная способность:

$$q^* = 1 - P^*_3.$$

Величину P^*_3 находим по формулам (95.6):

$$P^*_3 = \frac{3^3}{3!} P^*_0 = \frac{4{,}5}{13} \approx 0{,}346,$$

откуда

$$q^* = 1 - 0{,}346 = 0{,}654,$$

т. е. система ПВО будет «обслуживать» (атаковать) около 65% целей, входящих в зону ее действия.

Абсолютная пропускная способность равна $Q^* = \lambda q^* \approx 0{,}49$ самолета в минуту или около 30 самолетов в час.

Вероятность отказа $P^*_{отк}$ есть не что иное как вероятность того, что все три канала заняты, или $1 - q^*$:

$$P^*_{отк} = P^*_3 \approx 0{,}346.$$

§ 96. ЗАДАЧА ЦЕЛЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Целераспределением называется операция, состоящая в назначении определенной цели определенному огневому средству. Если имеется несколько целей, которые нужно подвергнуть огневому воздействию, а в нашем распоряжении имеется несколько боевых единиц (самолетов, орудий, ракет), то, решая задачу целераспределения, мы должны точно указать, какие средства, в каком количестве и когда направляются на каждую из целей, подлежащую обстрелу.

Решение по целераспределению представляет собой типичный пример тактического решения.

В условиях прошлых войн, когда боевые действия не были такими быстротечными, решение по целераспределению обычно принималось командиром на основе боевого опыта и здравого смысла. В настоящее время такой способ не всегда может нас удовлетворить. Нередко встречаются условия боя, когда на это просто не хватает времени (например, при отражении воздушного налета). В таких условиях решение задачи целераспределения приходится передавать автоматическому устройству — вычислительной машине. В других случаях боевая обстановка так сложна, а число возможных вариантов так велико, что принятие решения без специальных расчетов оказывается не под силу даже опытному командиру. Чтобы задача целераспределения могла быть передана машине, должен быть создан **алгоритм** решения этой задачи (алгоритм целераспределения).

Различают два варианта задачи целераспределения:

— для средств обороны;

— для средств нападения.

Отличие их в том, что целераспределение средств обороны осуществляется в ходе самой операции (например, при отражении воздушного налета), условия которой заранее неизвестны и зависят от противника. Целераспределение средств нападения обычно производится заранее **при планировании** налета или обстрела. Если речь идет о неполностью разведанных или быстро меняющих дислокацию целях, четкая разница между той или другой задачей пропадает.

Задача целераспределения в полном своем объеме очень сложна и требует учета многих факторов, таких, например, как:

— дислокация распределяемых средств, их боевая готовность;

— пропускная способность каналов наведения и каналов связи;

— глубина зоны, просматриваемой радиолокационными станциями;

— возможность применения противником маневра, помех и т. д.

Все эти обстоятельства так или иначе учитываются при составлении алгоритма целераспределения, который предварительно просматривается на ряде моделей боя, чтобы выбрать наиболее подходящий вариант. Как обычно при решении сложных задач исследования операций, здесь не удается ограничиться оценкой по одному-единственному критерию (показателю) эффективности, а ищется компромиссное решение, удовлетворительное по целому ряду критериев.

Для уяснения принципиальной стороны вопроса полезно рассмотреть несколько самых простых, схематизированных задач целераспределения, из которых будет ясно, какие существуют способы выбора решения и какой выигрыш в эффективности дает правильное решение задачи.

§ 97. ЦЕЛЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИ СТРЕЛЬБЕ ПО ГРУППОВОЙ ЦЕЛИ

Пусть в нашем распоряжении имеется n орудий и нам нужно обстрелять рассредоточенную группу, состоящую из N целей (рис. 97.1). Каждое орудие делает только один выстрел и может в принципе стрелять по каждой цели, но с неодинаковой эффек-

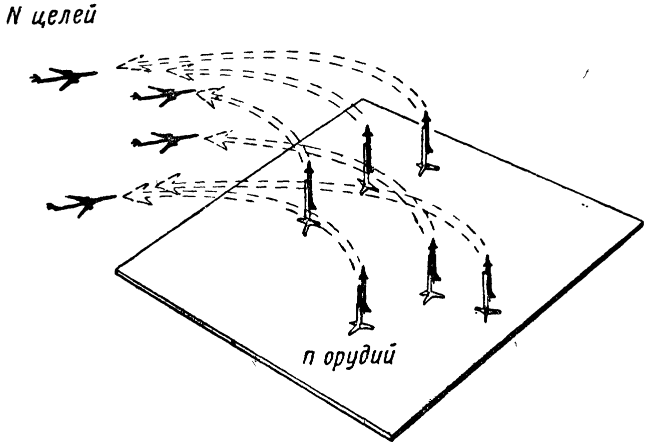


Рис. 97.1.

тивностью. Вероятность поражения i-м орудием j-й цели задана и равна p_{ij}. Значения p_{ij} записаны в таблице (матрице):

Номер орудия i	Номер цели j			
	1	2	...	N
1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1N}
2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2N}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	p_{n1}	p_{n2}		p_{nN}

Требуется найти оптимальное (наилучшее) целераспределение, назначив каждому орудию определенную цель, по которой оно должно стрелять (при этом возможно, что одна и та же цель будет обстреляна несколькими орудиями). Назовем поставленную задачу задачей целераспределения $n \times N$.

Чтобы решить задачу целераспределения, нужно прежде всего выбрать показатель эффективности.

Таким показателем в зависимости от условий стрельбы может быть:

— математическое ожидание числа пораженных целей;

— вероятность того, что в составе группы будет поражено не менее заданного числа целей;

— вероятность того, что будут поражены все без исключения цели,

и т. п.

Например, если производится распределение средств ПВО по группе воздушных целей, налетающих на территорию, естественно предположить, что ущерб, наносимый территории, пропорционален числу прорвавшихся целей; значит, нам нужно стремиться к тому, чтобы поразить в среднем побольше целей, и показателем эффективности будет математическое ожидание числа пораженных целей:

$$W = M_{\text{п}}. \tag{97.1}$$

Если же средства ПВО обороняют один объект большой важности и каждая из целей в принципе может быть носителем мощности ядерного заряда, в качестве показателя эффективности лучше выбрать **вероятность поражения всех без исключения целей**:

$$W = P_N. \tag{97.2}$$

В соответствии с этими двумя основными критериями мы будем различать:

— целераспределение «по математическому ожиданию»;

— целераспределение «по вероятности».

Рассмотрим сначала более простую задачу: целераспределение по математическому ожиданию. Показателем эффективности будет

$$M_{\text{п}} = M[X_{\text{п}}],$$

где случайная величина $X_{\text{п}}$ — число пораженных целей.

Из гл. 5 мы знаем, что при стрельбе по групповой цели среднее число пораженных целей равно сумме вероятностей поражения отдельных элементарных целей (единиц):

$$M_{\text{п}} = W_1 + W_2 + \ldots + W_N,$$

где W_1 — вероятность поражения первой цели;

W_2 — вероятность поражения второй цели;

W_N — вероятность поражения N-й цели

или короче

$$M_{\text{п}} = \sum_{i=1}^{N} W_i. \tag{97.3}$$

Значит, при целераспределении по математическому ожиданию нужно так распределить орудия цо целям, чтобы **сумма вероятностей поражения достигала максимума**.

Как это сделать? Самый элементарный способ — это **способ перебора**: перебираются все возможные варианты распределения орудий по целям и выбирается тот из них, при котором сумма вероятностей достигает максимума. Если число возможных вариантов не слишком велико, этот перебор легко осуществить.

Пример 1. Задача церераспределения 2×2 задана матрицей:

Номер орудия i	Номер цели j	
	1	2
1	0,8	0,6
2	0,7	0,1

Требуется решить ее, т. е. указать, какое орудие, по какой цели направить.

Решение. С первого взгляда может показаться, что, поскольку максимальное число в матрице $p_{11}=0,8$, нужно закрепить первое орудие за первой целью. В том, что это неверно, легко убедиться, перебрав все варианты целераспределения; в данном случае их всего возможно $2^2=4$. Будем каждый вариант записывать в виде столбца, где слева (i) дан номер орудия; справа (j) — номер цели. Возможно четыре варианта:

$$\overset{\text{I}}{\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \quad \overset{\text{II}}{\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} \quad \overset{\text{III}}{\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} \quad \overset{\text{IV}}{\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Определяем для каждого из вариантов среднее число пораженных целей (математическое ожидание) $M_{\text{п}}$. В первом варианте оба орудия стреляют по первой цели; вероятность ее поражения

$$W_1^{(\text{I})} = 1-(1-0,8)(1-0,7)=0,94;$$

вероятность поражения второй цели (по ней стрельба не ведется)

$$W_2^{(\text{I})}=0,$$

$$M_{\text{п}}^{(\text{I})} = W_1^{(\text{I})} + W_2^{(\text{I})} = 0,94.$$

Для второго варианта

$$M_{\text{п}}^{(\text{II})} = W_1^{(\text{II})} + W_2^{(\text{II})} = 0,8+0,1=0,9.$$

Для третьего варианта

$$M_{\text{п}}^{(\text{III})} = 1-(1-0,6)(1-0,1)=0,64.$$

Для четвертого варианта

$$M_{\text{п}}^{(\text{IV})} = 0,6+0,7=1,3.$$

Итак, оптимальным является вариант IV — направить первое орудие по второй цели, а второе — по первой.

Пример 2. Решить простым перебором задачу целераспределения 2×2:

Номер орудия i	Номер цели j	
	1	2
1	0,6	0,1
2	0,8	0,2

Решение. Составляя те же четыре варианта целераспределения, что в примере 1, находим:

$$M_{\text{п}}^{(\text{I})} = 1 - (1 - 0{,}6)(1 - 0{,}8) = 0{,}92,$$

$$M_{\text{п}}^{(\text{II})} = 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8,$$

$$M_{\text{п}}^{(\text{III})} = 1 - (1 - 0{,}1)(1 - 0{,}2) = 0{,}28,$$

$$M_{\text{п}}^{(\text{IV})} = 0{,}1 + 0{,}8 = 0{,}9.$$

Оптимальным вариантом является вариант I — направить оба орудия по одной первой цели, а вторую оставить вообще необстрелянной.

В некоторых случаях задача целераспределения решается по математическому ожиданию, но при условии обстрела максимально возможного числа целей. Это условие может быть сформулировано так: ни одна цель не обстреливается дважды, пока еще есть необстрелянные цели. Такое условие накладывается исходя из следующих соображений. Если противнику станет известной наша стратегия, он может нарочно посылать наименее важные цели (цели-ловушки) так, чтобы отвлекать на них наши средства, а свои наиболее важные цели (носители) посылать в таких условиях, чтобы они оставались необстрелянными.

Если наложить условие обязательного обстрела всех целей, то задача целераспределения упрощается за счет сокращения числа вариантов. Например, для задачи целераспределения 2×2 (примеры 1 и 2) остаются только два варианта решения (II и IV). Для примера 1 по-прежнему наивыгоднейшим остается вариант IV; для примера 2 таким становится вариант IV, а не I.

В случае, когда целей и орудий много, простой перебор всех возможных вариантов становится сложным, даже при машинной реализации. Возникает задача решить задачу целераспределения, не перебирая всех возможных вариантов. Предложено много способов решения задачи целераспределения, сокращающих число проб и попыток (в частности, уже упоминавшийся нами метод линейного программирования). Существуют и другие способы. Оригинальным способом решения задачи целераспределения является метод Монте-Карло, когда орудия случайным образом распределяются по целям, и из всех распределений выбирается наивыгоднейшее.

До сих пор, решая задачу целераспределения, мы считали, что все цели в составе группы равноценны. Однако на практике может оказаться, что некоторые отдельные цели (например, постановщики помех или носители ядерных средств, если их удастся обнаружить) важнее для нас, чем остальные. Если цели неравноценны, то им могут быть приписаны различные «веса».

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_N,$$

а показателем эффективности будет не просто среднее число пораженных целей, а «взвешенное» среднее:

$$M_{\text{п}} = k_1 W_1 + k_2 W_2 + \ldots + k_N W_N = \sum_{j=1}^{N} k_j W_j. \qquad (97.4)$$

Пример 3. Решить задачу целераспределения 3×3, если цели 1, 2, 3 неравноценны: первая вдвое более важна, чем вторая и третья ($k_1=2$; $k_2=1$; $k_3=1$), матрица вероятностей поражения имеет вид

Номер орудия i	Номер цели j		
	1	2	3
1	0,6	0,1	0,05
2	0,7	0,6	0,10
3	0,4	0,3	0,05

и поставлено условие обстрела максимально возможного числа (в данном случае всех трех) целей.

Решение. Всего имеется $3! = 6$ вариантов целераспределения (число способов, которым можно распределить три орудия по трем целям). Эти варианты:

$$\begin{array}{cccccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \\ \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M_{\text{п}}^{(\text{I})} = 2\cdot 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}05 = 1{,}85,$$

$$M_{\text{п}}^{(\text{II})} = 2\cdot 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 = 1{,}00,$$

$$M_{\text{п}}^{(\text{III})} = 2{,}07 + 0{,}05 + 0{,}3 = 1{,}75,$$

$$M_{\text{п}}^{(\text{IV})} = 2\cdot 0{,}4 + 0{,}05 + 0{,}6 = 1{,}45,$$

$$M_{\text{п}}^{(\text{V})} = 2\cdot 0{,}7 + 0{,}1 + 0{,}05 = 1{,}55,$$

$$M_{\text{п}}^{(\text{VI})} = 2\cdot 0{,}6 + 0{,}1 + 0{,}3 = 1{,}60.$$

Наивыгоднейшим является первый вариант целераспределения.

Рассмотрим второй принцип целераспределения «по вероятности», когда показателем эффективности является вероятность поразить все без исключения цели P_N. Естественно, что, когда число орудий n меньше числа целей N, $P_N=0$.

Чтобы P_N не было равно нулю, очевидно, нужно иметь возможность обстрелять все цели, т. е. должно соблюдаться условие $n \geqslant N$.

Вероятность поражения всех целей выражается произведением вероятность поражения отдельных целей:

$$P_N = W_1 \cdot W_2 \ldots W_N. \tag{97.5}$$

Требуется так распределить орудия по целям, чтобы вероятность P_N была максимальна.

Пример. Решить по «вероятности» задачу целераспределения:

Номер орудия i	Номер цели j	
	1	2
1	0,8	0,7
2	0,6	0,2
3	0,1	0,5

Решение. Подсчитаем общее количество возможных вариантов целераспределения. Мы должны три орудия распределить по двум целям; значит, на одну цель должно приходиться два орудия, на другую — одно. Сколькими способами можно произвести разделение трех орудий на такие группы? Тремя способами (C_3'). Каждая из групп может быть направлена по любой из целей, всего получается $3\times2=6$ вариантов:

$$\overset{\text{I}}{\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} \quad \overset{\text{II}}{\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \quad \overset{\text{III}}{\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} \quad \overset{\text{IV}}{\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \quad \overset{\text{V}}{\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} \quad \overset{\text{VI}}{\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Вычислим для каждого варианта вероятность P_2 поражения обеих целей:

$$P_2^{(\text{I})} = 0{,}8 \cdot [1 - (1 - 0{,}2)(1 - 0{,}5)] = 0{,}480,$$

$$P_2^{(\text{II})} = 0{,}7 \cdot [1 - (1 - 0{,}6)(1 - 0{,}1)] = 0{,}448,$$

$$P_2^{(\text{III})} = [1 - (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}5)] \cdot 0{,}6 = 0{,}510,$$

$$P_2^{(\text{IV})} = [1 - (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}5)] \cdot 0{,}2 = 0{,}180,$$

$$P_2^{(\text{V})} = [1 - (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}6)] \cdot 0{,}5 = 0{,}460,$$

$$P_2^{(\text{VI})} = [1 - (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}2)] \cdot 0{,}1 = 0{,}076.$$

Наилучшим является вариант III (второе орудие стреляет по первой цели, а третье и первое — по второй).

Читателю рекомендуется самостоятельно решить вопрос, является ли третий вариант лучшим и по математическому ожиданию.

§ 98. ЦЕЛЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ГРУППОВОЙ ЦЕЛИ ПРИ ОДИНАКОВЫХ ВЕРОЯТНОСТЯХ ПОРАЖЕНИЯ

На практике часто встречается случай, когда каждая из целей поражается каждым из средств приблизительно с одинаковой вероятностью p.

При таком условии задача целераспределения, естественно, упрощается. Вопрос стоит не о том, какое орудие направить по какой цели, а сколько орудий по какой из целей?

Можно доказать, что максимальное математическое ожидание числа пораженных целей $M_п$, так же как и максимальная вероятность поражения всех целей P_N, достигается в том случае, если орудия распределить между целями наиболее равномерно. Например, если десять орудий обстреливают пять целей, то нужно на каждую цель выделить по два орудия; если двенадцать орудий обстреливают пять целей, то нужно на каждую цель выделить два орудия, а оставшиеся два назначить любым образом на какие-либо две цели.

Такое целераспределение, при котором орудия распределяются по целям с максимальной равномерностью, называется *полностью организованным*.

Определим среднее число пораженных целей в составе группы при полностью организованном целераспределении.

Пусть производится целераспределение n орудий по N целям $(n \geqslant N)$. Каждое орудие поражает цель с вероятностью p. Разделим n на N и найдем, по сколько орудий приходится на каждую цель:

$$\frac{n}{N} = k + \theta,$$

где k — целое число, а θ — правильная дробь $(0 \leqslant \theta < 1)$.

Например, при $n = 90$, $N = 40$

$$\frac{n}{N} = 2 + 0{,}25, \quad k = 2, \quad \theta = 0{,}25.$$

Очевидно, фактическое число орудий, направляемых на каждую цель, будет не дробным, а целым: на некоторые цели придется по k орудий, а на некоторые по $k+1$. Подсчитаем количество целей, по которым будет направлено $k+1$ орудий. После того как на каждую цель будет направлено k орудий, останется лишь $N\theta$ «лишних», следовательно, из N целей $N\theta$ будут обстреляны $k+1$ орудиями, а остальные $N - N\theta$ — только k орудиями. Первые цели будут поражаться с вероятностью $1-(1-p)^{k+1}$, вторые — с вероятностью $1-(1-p)^k$. Складывая вероятности поражения всех целей, найдем среднее число пораженных целей при полностью организованном целераспределении:

$$M_{\text{п}} = N\{[1-(1-p)^k](1-\theta)+[1-(1-p)^{k+1}]\theta\}. \quad (98.1)$$

График $M_{\text{п}}$ в зависимости от n имеет вид ломаной линии, изображенной на рис. 98.1.

Пример 1. Найти среднее число пораженных целей $M_{\text{п}}$ при полностью организованном целераспределении, если имеется 230 орудий и 70 целей и каждое орудие поражает цель с вероятностью $p = 0{,}2$.

Решение. Имеем

$$\frac{n}{N} = \frac{230}{70} = 3 + 0{,}286,$$

$$k = 3, \quad \theta = 0{,}286, \quad 1-\theta = 0{,}714.$$

По формуле (98.1) находим

$$M_{\text{п}} = 70\{(1-0{,}8^3)\cdot 0{,}714 + (1-0{,}8^4)\cdot 0{,}286\} \approx 36{,}2.$$

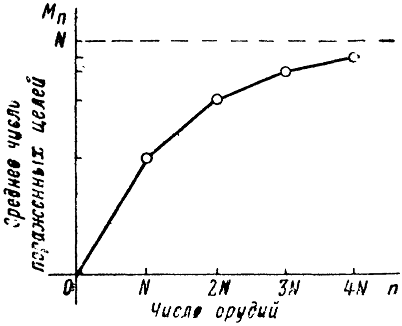


Рис. 98.1.

Возникает естественный вопрос: какое преимущество дает «полностью организованное» целераспределение по сравнению с «неорганизованным», когда каждое орудие выбирает себе цель независимо от других и выбор каждой цели равновероятен?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим стрельбу при неорганизованном (случайном) целераспределении и подсчитаем для этого случая среднее число пораженных целей $M_{\text{п}}^{(\text{н})}$ (значок (н) указывает, что речь идет о неорганизованном целераспределении).

Мы знаем, что среднее число пораженных целей равно сумме вероятностей поражения всех целей. Выделим мысленно одну из них. Вероятность того, что эта цель будет поражена первым орудием, равна $p\cdot\frac{1}{N}=\frac{p}{N}$ (орудие должно *выбрать* данную цель и *поразить* ее). Для второго, третьего и так далее орудий вероятность будет та же. Вероятность поражения данной цели всей группой орудий будет равна

$$W = 1-\left(1-\frac{p}{N}\right)^n.$$

Умножая эту величину на число целей N, получаем среднее число пораженных целей при неорганизованном (случайном) целераспределении:

$$M_{\text{п}}^{(\text{н})} = N\left\{1-\left(1-\frac{p}{N}\right)^n\right\}. \quad (98.2)$$

Сравнивая эту величину с той, которая дается формулой (98.1), можно определить выигрыш, который дает организованное целераспределение по сравнению с неорганизованным.

Пример 2. В условиях примера 1 вычислить среднее число пораженных целей $M_п^{(н)}$ при неорганизованном целераспределении и подсчитать, на сколько процентов повышается это среднее число, если обеспечить полностью организованное целераспределение.

Решение. По формуле (98.2) получим

$$M_п^{(н)} = 70\left\{1 - \left(1 - \frac{0,2}{70}\right)^{230}\right\} \approx 33,6.$$

При переходе к организованному целераспределению мы выиграем 36,2 — — 33,6=2,6 (пораженных самолета), или, в процентах,

$$\frac{2,6}{33,6} \cdot 100\% \approx 8\%.$$

Наибольший выигрыш от полностью организованного целераспределения получается тогда, когда каждое орудие поражает цель с вероятностью, близкой к единице, а число орудий близко к числу целей ($k \approx 1$). В этом случае организация целераспределения может повысить эффективность на 50% и более.

Пример 3. Производится стрельба пятью орудиями по группе из пяти целей; каждое орудие поражает цель с вероятностью 0,9. Вычислить среднее число пораженных целей при неорганизованном и полностью организованном целераспределении и определить, на сколько процентов повышается это число при переходе от неорганизованного к организованному целераспределению.

Решение. $N=5$, $n=5$, $k=1$, $p=0,9$,

$$M_п^{(н)} = 5\left\{1 - \left(1 - \frac{0,9}{5}\right)^{5}\right\} \approx 3,15.$$

При организованном целераспределении

$$M_п = 5 \cdot 0,9 = 4,5,$$

$$\frac{4,50 - 3,15}{3,15} \cdot 100\% = 43\%.$$

§ 99. ЦЕЛЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ С УЧЕТОМ МАНЕВРА

Выше мы рассматривали только самые простые, так называемые «статические» задачи целераспределения. В этих задачах каждое орудие делало только один выстрел; цели не маневрировали, не применяли помех; глубина проникновения целей на территорию не учитывалась и т. д.

В действительности задачи целераспределения значительно сложнее и должны решаться с учетом всех этих факторов, т. е. с учетом динамики развития боевого процесса.

Для иллюстрации рассмотрим в упрощенном виде только одну из перечисленных задач — задачу учета маневра целей при целераспределении. Речь будет идти о так называемом «маневре против управления». Это прием противника, сознательно применяемый для того, чтобы, изменив направление движения, уклониться от обстрела теми средствами, которые были для этого выделены. Задача учета такого маневра может решаться только в игровой постановке.

Чтобы качественно проиллюстрировать методику такого игрового решения, рассмотрим один простейший пример.

Пример 1. Сторона К — средства ПВО, обороняющие участок территории, — располагает двумя орудиями № 1 и № 2, зоны действия которых S_1 и S_2 не перекрываются (рис. 99.1). Каждое орудие может поражать только самолет, проходящий через зону его действия, но для этого оно должно заранее (до входа цели в зону) следить за ней и вырабатывать прицельные данные. Если цель обстреляна, она поражается с вероятностью $p=1$.

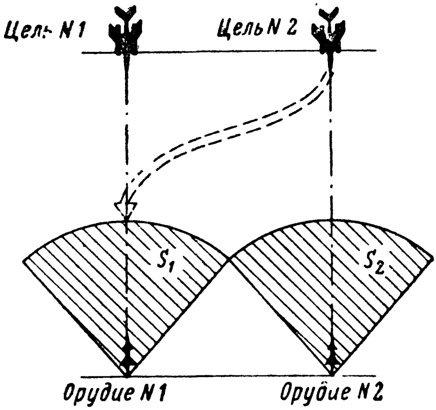


Рис. 99.1.

В момент времени, когда должно быть выполнено целераспределение, движение цели № 1 направлено в зону действия орудия № 1, а движение цели № 2 — в зону действия орудия № 2. Однако после принятия решения по целераспределению каждая цель может сманеврировать, применив «обманный маневр» (см. стрелку на рис. 99.1). Задача Красных (оборона) — обратить в максимум математическое ожидание числа пораженных целей; задача Синих (самолеты) — обратить его в минимум. Найти оптимальные стратегии сторон.

Решение. У Красных четыре стратегии:

$К_1$ — каждое орудие следит за направляющейся в его зону целью;

$К_2$ — орудия следят за целями «крест-накрест» (каждое — за целью, направляющейся к соседу);

$К_3$ — оба орудия следят за целью № 1;

$К_4$ — оба орудия следят за целью № 2.

У Синих тоже четыре стратегии:

$С_1$ — обе цели не меняют направления;

$С_2$ — обе цели применяют обманный маневр;

$С_3$ — первая цель применяет обманный маневр, а вторая нет;

$С_4$ — вторая цель применяет обманный маневр, а первая нет.

Матрица игры 4×4 имеет вид

	$С_1$ ↓↓	$С_2$ ↙↘	$С_3$ ↘↓	$С_4$ ↓↙
$К_1$ ↑↑	2	0	1	1
$К_2$ ↖↗	0	2	1	1
$К_3$ ↑↖	1	1	1	1
$К_4$ ↗↑	1	1	1	1

Для этой игры нижняя цена равна верхней:

$$\alpha = \beta = 1,$$

следовательно, игра имеет седловую точку (в данном случае седловых точек 12), и любая пара стратегий, пересекающихся в седловой точке, дает решение игры. Цена игры $\nu=1$ означает, что при оптимальном поведении сторон Синие будут систематически терять один самолет и никакие ухищрения не помогут им терять меньше.

Решению данной игры можно придать более удобную форму, если заранее объединить некоторые стратегии, пользуясь симметрией задачи. Объединяя K_1 и K_2 в одну смешанную стратегию:

$$K_{12}=\begin{pmatrix}K_1 & K_2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix},\quad K_3 \text{ и } K_4 \text{ в } K_{34}=\begin{pmatrix}K_3 & K_4\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix},$$

$$C_1 \text{ и } C_2 \text{ в } C_{12}=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix},\quad C_3 \text{ и } C_4 \text{ в } C_{34}=\begin{pmatrix}C_3 & C_4\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix},$$

приведем матрицу к оригинальному виду:

	C_{12}	C_{34}
K_{12}	1	1
K_{34}	1	1

т. е. выигрыш совсем не зависит от того, какими стратегиями пользуются Красные и Синие. Другими словами, Красные могут производить целераспределение любым способом, лишь бы при этом K_1 и K_2, K_3 и K_4 применялись одинаково часто. Например, можно положить $p_1=p_2=0{,}1$, $p_3=p_4=0{,}4$ а можно и $p_1=p_2=0{,}3$, $p_3=p_4=0{,}2$. Синие могут также применять любую смесь своих стратегий, лишь бы C_1 и C_2, C_3 и C_4 применялись одинаково часто Легко убедиться, что такая оптимальная смесь с той и другой стороны осуществляется, например, если каждое орудие выбирает себе цель случайно (с одинаковой вероятностью ту и другую), а каждый самолет случайно выбирает себе зону (первую или вторую), через которую он пройдет. Мы видим на данном примере, что бывают условия, когда случайное «неорганизованное» целераспределение оказывается не менее выгодным, чем строго организованное.

§ 100. ЦЕЛЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИ СТРЕЛЬБЕ ПО ГРУППЕ ПЛОЩАДНЫХ ЦЕЛЕЙ

До сих пор мы рассматривали задачу целераспределения по группе одиночных целей; теперь рассмотрим задачу целераспределения по группе площадных целей.

Пусть боевая задача состоит в стрельбе ракетами (или бомбометании) по рассредоточенной группе площадных целей (рис. 100.1). В нашем распоряжении имеется какое-то количество средств (ракет, бомб) в общем случае неодинакового разрушительного действия. Эти средства нужно распределить по N целям, т. е. указать, какие из средств по каким целям направить.

Чтобы решить эту задачу, нужно прежде всего выбрать показатель эффективности; он выбирается в зависимости от боевой задачи, ради которой ведется стрельба по группе площадных целей.

Если, например, стрельба ведется для того, чтобы поразить максимально возможную суммарную площадь на всей совокупности целей, то показателем эффективности будет средняя пораженная площадь $\overline{S}_{п}$ всех целей или средняя доля поражения всех целей, равная

$$M_{\Sigma}=\frac{\overline{S}_{п}}{S_{\Sigma}}, \tag{100.1}$$

где S_{Σ} — суммарная площадь всех целей.

Если стрельба ведется для того, чтобы на каждой j-й цели получить не менее заданной доли разрушенной площади u, то показателем эффективности будет вероятность того, что на каждой цели будет поражено не менее доли u_j ее площади, т. е.

$$W=R_{1}^{(1)}\cdot R_{u_2}^{(2)}\ \ldots\ R_{u_N}^{(N)}, \tag{100.2}$$

где $R_{1}^{(1)}$ — вероятность того, что на цели № 1 будет достигнут ущерб не менее u_1,

и так далее.

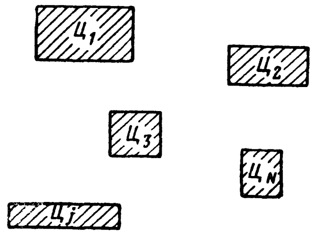


Рис. 100.1.

Нетрудно видеть, что в первой постановке задача смыкается с уже знакомым нам «целераспределением по математическому ожиданию», а во второй — с «целераспределением по вероятности». Ввиду того, что вычисление вероятности поражения не менее заданной доли площади цели даже при стрельбе по одной цели достаточно сложно, мы на второй постановке не будем останавливаться; ограничимся только рассмотрением первой, более простой.

Предположим, что целераспределение уже произведено и по каждой цели выделено какое-то количество средств. Тогда, пользуясь изложенными в гл. 6 методами, мы можем для каждой цели вычислить среднюю долю поражения:

$$M^{(1)},\ M^{(2)},\ \ldots,\ M^{(N)}$$

и найти среднюю пораженную площадь каждой цели, умножая каждую долю поражения на площадь соответствующей цели:

$$M^{(1)}S^{(1)},\ M^{(2)}S^{(2)},\ \ldots,\ M^{(N)}S^{(N)}.$$

Складывая все эти величины, получаем среднюю суммарную пораженную площадь всех целей:

$$\overline{S}_{п}=M^{(1)}S^{(1)}+M^{(2)}S^{(2)}+\ldots+M^{(N)}S^{(N)}. \tag{100.3}$$

Теперь определим среднюю долю поражения по всем целям:

$$M_{\Sigma}=\frac{M^{(1)}S^{(1)}+M^{(2)}S^{(2)}+\ldots+M^{(N)}S^{(N)}}{S_{\Sigma}}=$$

$$=M^{(1)}\frac{S^{(1)}}{S_{\Sigma}}=M^{(2)}\frac{S^{(2)}}{S_{\Sigma}}+\ldots+M^{(N)}\frac{S^{(N)}}{S_{\Sigma}}.$$

Обозначим

$$\frac{S^{(1)}}{S_\Sigma}=k_1;\quad \frac{S^{(2)}}{S_\Sigma}=k_2;\ \ldots;\ \frac{S^{(N)}}{S_\Sigma}=k_N.$$

Величины k_1, k_2, ..., характеризуют относительную долю суммарной площади S_Σ, приходящуюся на первую, вторую и так далее цель.

Таким образом, показатель эффективности целераспределения выражается формулой

$$M_\Sigma=k_1M^{(1)}+k_2M^{(2)}+\ldots+k_NM^{(N)}, \tag{100.4}$$

которая по своему строению совершенно такова же, как формула (97.4), примененная нами для оценки эффективности стрельбы по групповой цели с неравноценными единицами.

Так как при увеличении числа выстрелов n средняя доля поражения площадной цели растет приближенно по тому же показательному закону, как и вероятность поражения, т. е. по формуле

$$M(n)=1-(1-M)^n, \tag{100.5}$$

то задача ничем не отличается от ранее рассмотренной задачи целераспределения по групповой цели.

Пример 1. Имеется три цели с размерами:

1) $Ц_{x_1}^{(м)}=400\ м,\quad Ц_{y_1}^{(м)}=200\ м;$

2) $Ц_{x_2}^{(м)}=900\ м,\quad Ц_{y_2}^{(м)}=120\ м;$

3) $Ц_{x_3}^{(м)}=300\ м,\quad Ц_{y_3}^{(м)}=250\ м.$

В нашем распоряжении имеется три снаряда с зонами разрушительного действия:

1) $L_{x_1}^{(м)}=L_{y_1}^{(м)}=800\ м,$

2) $L_{x_2}^{(м)}=L_{y_2}^{(м)}=400\ м,$

3) $L_{x_3}^{(м)}=L_{y_3}^{(м)}=200\ м.$

Главные вероятные отклонения $E_x=E_y=100\ м.$

Требуется распределить снаряды рациональным образом по трем целям так, чтобы:

1) все цели были обстреляны;

2) средняя суммарная пораженная площадь всех целей достигала максимума.

Решение. Площади целей равны:

$$S^{(1)}=400\times200=8\cdot10^4\ м^2,$$

$$S^{(2)}=900\times120=10{,}8\cdot10^4\ м^2,$$

$$S^{(3)}=300\times350=7{,}5\cdot10^4\ м^2.$$

Суммарная площадь всех целей

$$S_\Sigma=(8+10{,}8+7{,}5)\,10^4\ м^2=26{,}3\cdot10^4\ м^2.$$

«Веса» отдельных целей равны:

$$k_1 = \frac{S^{(1)}}{S_\Sigma} = 0{,}307, \quad k_2 = \frac{S^{(2)}}{S_\Sigma} = 0{,}411; \quad k_3 = \frac{S^{(3)}}{S_\Sigma} = 0{,}285.$$

Показатель эффективности (общая доля поражения):

$$M_\Sigma = 0{,}304 \cdot M^{(1)} + 0{,}411 M^{(2)} + 0{,}285 M^{(3)},$$

где $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$ — доли поражения отдельных целей.

Составим матрицу значений доли поражения M (относительного ущерба, нанесенного цели, для каждой комбинации, «снаряд—цель»:

Номер снаряда i	Номер цели j		
	1	2	3
1	0,89	0,78	0,90
2	0,55	0,36	0,58
3	0,23	0,12	0,21

Умножая столбцы матрицы на k_1, k_2, k_3, получим новую матрицу «взвешенных ущербов»:

Номер снаряда i	Номер цели j		
	1	2	3
1	0,270	0,321	0,256
2	0,167	0,147	0,165
3	0,070	0,049	0,060

Шесть вариантов целераспределения будут:

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{II} \\ \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{III} \\ \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{IV} \\ \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{V} \\ \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{VI} \\ \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Соответствующие значения суммарного относительного ущерба будут:

$$M_{\Sigma}^{(\mathrm{I})} = 0{,}270 + 0{,}147 + 0{,}060 = 0{,}477,$$

$$M_{\Sigma}^{(\mathrm{II})} = 0{,}321 + 0{,}165 + 0{,}070 = 0{,}556,$$

$$M_{\Sigma}^{(\mathrm{III})} = 0{,}256 + 0{,}161 + 0{,}049 = 0{,}466,$$

$$M_{\Sigma}^{(\mathrm{IV})} = 0{,}265 + 0{,}147 + 0{,}070 = 0{,}470,$$

$$M_{\Sigma}^{(\mathrm{V})} = 0{,}321 + 0{,}167 + 0{,}060 = 0{,}548,$$

$$M_{\Sigma}^{(\mathrm{VI})} = 0{,}270 + 0{,}165 + 0{,}049 = 0{,}484.$$

Наиболее выгодным вариантом целераспределения будет вариант II (первый снаряд направить по второй цели, второй снаряд — по третьей, а третий — по первой).

В случаè, когда число средств превышает число целей, задача подсчета ущерба усложняется, так как приходится по некоторым целям направлять более чем один снаряд. Если это m снарядов разной мощности, то можно приближенно подсчитывать долю поражения по формуле

$$M(m) = 1 - (1 - M^{(1)})(1 - M^{(2)}) \ldots (1 - M^{(m)}),$$

где $M^{(1)}$ — доля поражения для первого снаряда и т. д.

Пример 2. Решить задачу целераспределения примера 1 с той разницей, что третью цель решено не обстреливать, а все три снаряда распределить по первой и второй целям.

Решение. Определяем новые значения «весов» целей:

$$k_1 = \frac{S^{(1)}}{S^{(1)} + S^{(2)}} = 0{,}425, \quad k_2 = \frac{S^{(2)}}{S^{(1)} + S^{(2)}} = 0{,}575.$$

Матрица (2×3) эффективности при одном выстреле будет

Номер снаряда i	Номер цели j	
	1	2
1	0,89	0,78
2	0,55	0,36
3	0,23	0,12

Возможные варианты целераспределения:

$$\begin{array}{cccccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \\ \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M_\Sigma^{(\text{I})} = 0{,}425 \cdot [1 - (1 - 0{,}89)(1 - 0{,}55)] + 0{,}575 \cdot 0{,}12 \approx 0{,}471,$$

$$M_\Sigma^{(\text{II})} = 0{,}575 \cdot [1 - (1 - 0{,}78)(1 - 0{,}36)] + 0{,}425 \cdot 0{,}23 \approx 0{,}66,$$

$$M_\Sigma^{(\text{III})} = 0{,}575 \cdot [1 - (1 - 0{,}78)(1 - 0{,}12)] + 0{,}425 \cdot 0{,}55 \approx 0{,}70,$$

$$M_\Sigma^{(\text{IV})} = 0{,}425 \cdot [1 - (1 - 0{,}89)(1 - 0{,}23)] + 0{,}575 \cdot 0{,}36 \approx 0{,}59,$$

$$M_\Sigma^{(\text{V})} = 0{,}575 \cdot [1 - (1 - 0{,}36)(1 - 0{,}12)] + 0{,}425 \cdot 0{,}89 \approx 0{,}63,$$

$$M_\Sigma^{(\text{VI})} = 0{,}425 \cdot [1 - (1 - 0{,}55)(1 - 0{,}23)] + 0{,}575 \cdot 0{,}78 \approx 0{,}73.$$

Наилучшим вариантом целераспределения оказывается VI: снаряд № 1 направляется по цели № 2, а снаряды № 2 и 3 — по цели № 1.

§ 101. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При решении ряда задач, связанных с планированием операций, приходится пользоваться специальным математическим аппаратом **линейного программирования** (или, как его иногда называют, линейного планирования).

Рассмотрим несколько примеров подобных задач и дадим каждому из них математическую формулировку.

1. *Задача перевозок.* Имеется три склада C_1, C_2, C_3 (рис. 101.1), на которых находятся определенные запасы k_1, k_2, k_3 каких-то материалов (например, горючего или боеприпасов). Имеется два пункта потребления этих материалов $П_1$, $П_2$. Склады и пункты потребления связаны сетью дорог; кратчайшее расстояние от первого склада до первого пункта равно d_{11}; от первого склада до второго пункта d_{12} и т. д.; всего задано шесть расстояний:

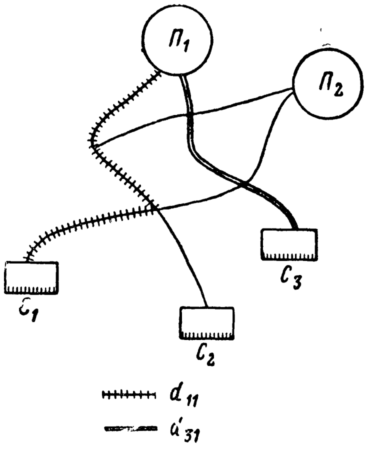


Рис. 101.1.

$$\begin{array}{ll} d_{11}, & d_{12}, \\ d_{21}, & d_{22}, \\ d_{31}, & d_{32}, \end{array}$$

где d_{ij} — кратчайшее расстояние от i-го склада до j-го пункта ($i = 1, 2, 3.$; $j = 1, 2$).

Каждый пункт подал заявку на определенное количество материалов; заявки первого и второго пунктов обозначим l_1 и l_2. Материалы должны быть переброшены автомашинами, каждая из которых может везти a единиц материалов.

Спрашивается, как нужно организовать перевозки для того, чтобы общий (суммарный) пробег автомашин (а следовательно, и стоимость перевозок) был минимальным?

Математическая формулировка задачи. Обозначим x_{ij} — количество груза, направляемого с i-го склада в j-й пункт; и рассмотрим ряд чисел:

$$x_{11},\ x_{12},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{31},\ x_{32}.$$

Все они неотрицательны, но некоторые из них могут быть равны нулю (если из данного склада в данный пункт перевозок не производится).

Эти величины должны удовлетворять следующим условиям.

1. Общее количество материалов, берущихся с каждого склада, не должно быть больше, чем запас данного склада:

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{12} &\leqslant k_1,\\ x_{21}+x_{22} &\leqslant k_2,\\ x_{31}+x_{32} &\leqslant k_3. \end{aligned}\right\} \tag{101.1}$$

2. Общее количество материалов, доставляемых на каждый пункт, не должно быть меньше, чем поданная данным пунктом заявка:

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31} &\geqslant l_1,\\ x_{12}+x_{22}+x_{32} &\geqslant l_2. \end{aligned}\right\} \tag{101.2}$$

3. Общий автопробег (количество машино-километров, затраченных на перевозку грузов) должен быть минимален.

Вычислим этот пробег. На переброску груза x_{11} со склада C_1 в пункт Π_1, понадобится $\frac{x_{11}}{a}$ автомашин и $\frac{d_{11}x_{11}}{a}$ машино-километров и т. д.; суммарный пробег будет равен:

$$\frac{d_{11}}{a}x_{11}+\frac{d_{12}}{a}x_{12}+\frac{d_{21}}{a}x_{21}+\frac{d_{22}}{a}x_{22}+\frac{d_{31}}{a}x_{31}+\frac{d_{32}}{a}x_{32}.$$

Этот пробег должен быть минимальным. Обозначая $\frac{d_{ij}}{a}=b_{ij}$, запишем это условие в виде

$$b_{11}x_{11}+b_{12}x_{12}+b_{21}x_{21}+b_{22}x_{22}+b_{31}x_{31}+b_{32}x_{32}=\min. \tag{101.3}$$

Итак, в математической постановке задача перевозок сводится к следующему.

Найти такие неотрицательные величины x_{ij} ($i=1, 2, 3$; $j=1, 2$), чтобы:

1) данная линейная функция этих величин (101.3) обращалась в минимум;

2) выполнялись условия (101.1) и (101.2), в левых частях которых тоже стоят линейные функции величин x_{ij}.

2. *Задача экономного обстрела.* В нашем распоряжении имеется три типа поражающих средств (например, бомбардировщики, ракеты, крылатые ракеты): C_1, C_2, C_3, а у противника — три объекта: O_1, O_2, O_3, каждый из которых имеет определенную стоимость S_1, S_2, S_3.

Нужно подвергнуть каждый из объектов одному удару с помощью одного типа средств (применить, например, налет бомбардировщиков, залп ракет и т. п.). При боевом применении i-го средства по j-му объекту расходуется стоимость S_{ij}; эти стоимости заданы:

$$\begin{gathered} S_{11},\ S_{12},\ S_{13}; \\ S_{21},\ S_{22},\ S_{23}; \\ S_{31},\ S_{32},\ S_{33} \end{gathered}$$

или, короче,

$$S_{ij} \text{ при } \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ 3 \\ j=1,\ 2,\ 3 \end{pmatrix}.$$

Если i-е средство применяется по j-му объекту, то ему наносится относительный ущерб u_{ij}; эти ущербы тоже заданы:

$$\left.\begin{matrix} u_{11},\ u_{12},\ u_{13}; \\ u_{21},\ u_{22},\ u_{23}; \\ u_{31},\ u_{32},\ u_{33}. \end{matrix}\right\}$$

или, короче, u_{ij} при $\begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ 3 \\ j=1,\ 2,\ 3 \end{pmatrix}$.

Требуется нанести противнику общий денежный ущерб не менее заданного S^* минимальными средствами.

Математическая формулировка задачи. Обозначим x_{ij} величину, которая обращается в единицу, если i-е средство применяется по j-й цели, и в нуль — если не применяется.

1. Так как каждое средство применяется только по одной цели, то из всех величин x_{ij}, относящихся к одному средству, равна единице только одна, а остальные равны нулю. Это мы запишем в виде условий:

$$\begin{gathered} x_{11}+x_{12}+x_{13}=1, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=1, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=1 \end{gathered}$$

или, короче,

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij}=1 \quad (i=1,\ 2,\ 3). \qquad (101.4)$$

2. Так как в свою очередь каждый объект обстреливается только одним средством, то и для него сумма величин должна быть равна единице:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij}=1 \quad (j=1,\ 2,\ 3). \qquad (101.5)$$

3. Нам нужно обеспечить, чтобы общий материальный ущерб, нанесенный противнику, был не меньше заданного S^*. При применении i-го средства по j-й цели противнику наносится материальный ущерб

$$a_{ij}=u_{ij}S_j.$$

Чтобы суммарный материальный ущерб, наносимый всем объектам, был не меньше заданного S^*, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+a_{13}x_{13}+a_{21}x_{21}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{23}+$$
$$+a_{31}x_{31}+x_{32}a_{32}+a_{33}x_{33}\geqslant S^*. \qquad (101.6)$$

Условие (101.6) можно записать проще, если применить знак двойной суммы (по всем средствам i, по всем объектам j):

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_{ij}\geqslant S^*. \qquad (101.7)$$

4. Мы должны организовать обстрел так, чтобы общая затраченная нами стоимость была минимальной:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} S_{ij}x_{ij}=\min. \qquad (101.8)$$

Итак, математическая формулировка «задачи экономичного обстрела» будет следующая.

Найти такие неотрицательные числа x_{ij} $(i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3)$, чтобы:

1) линейная функция этих величин (101.8) обращалась в минимум;

2) выполнялись линейные условия (101.4), (101.5), (101.7).

Как видно, задача формулируется вполне сходно с предыдущей. Как та, так и другая являются частными случаями одной общей задачи — так называемой **задачи линейного программирования**.

Сформулируем ее теперь в общем виде.

Дана некоторая линейная функция величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$;

$$\Phi = \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i. \tag{101.9}$$

Требуется найти такие значения величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, чтобы:

1) функция Φ обращалась в минимум [1];

2) выполнялись дополнительные условия, наложенные на величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} a_{i1}\xi_i = b_1, \\ &\sum_{i=1}^{k} a_{i2}\xi_i = b_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\sum_{i=1}^{k} a_{in}\xi_i = b_n, \end{aligned}\right\} \tag{101.10}$$

где $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — заданные постоянные коэффициенты.

Как сама функция (101.9), которую требуется обратить в минимум, так и условия (101.10) являются **линейными**; отсюда и название — линейное программирование.

Сравнивая поставленную сейчас общую задачу линейного программирования с ранее сформулированными частными задачами (перевозок, экономичного обстрела), мы замечаем между ними некоторую разницу. В общей задаче все наложенные условия имеют вид **равенств**, а в двух частных задачах, поставленных раньше, некоторые имеют вид **неравенств**. Но, оказывается, неравенствам можно придать форму равенств, если ввести некоторые дополнительные **фиктивные неотрицательные переменные**. Например, условие (101.7)

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_{ij} \geqslant S^*$$

можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_{ij} - z = S^*, \tag{101.11}$$

где z — новая неотрицательная неизвестная величина. Таким образом, задача 2, приведенная к задаче линейного программирования, будет выглядеть следующим образом: найти неотрицательные величины x_{ij} ($i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$) и z, такие, чтобы линейная функ-

---

[1] Очевидно, если Φ требуется обратить не в минимум, а в максимум, достаточно изменить знаки коэффициентов c_i.

ция (101.8) обращалась в минимум и одновременно выполнялись линейные равенства (101.4), (101.5), (101.11).

К поставленной общей задаче линейного программирования сводится, как уже упоминалось выше, задача решения конечных игр, а также некоторые задачи целераспределения (когда суммарный ущерб, нанесенный совокупностью средств, равен сумме ущербов, нанесенных каждым отдельным средством).

§ 102. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящее время существует целый ряд методов решения задачи линейного программирования, по преимуществу приспособленных для машинной реализации. Не останавливаясь на подробностях этих методов, продемонстрируем их принципиальную сторону на решении одного очень простого примера.

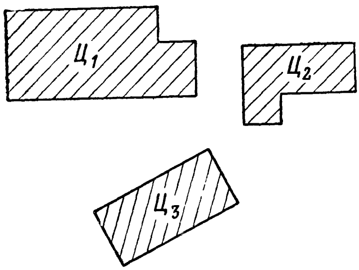


Рис. 102.1.

Рассмотрим компактную группу целей, состоящую из трех элементарных целей $Ц_1$, $Ц_2$, $Ц_3$ (рис. 102.1). Прицеливание производится по всей группе как по единому целому. В нашем распоряжении имеется три типа снарядов C_1, C_2, C_3 в неограниченном количестве. При стрельбе по группе снарядом типа C_i цели $Ц_j$ причиняется ущерб, равный a_{ij}. Значения этого ущерба в условных единицах заданы таблицей (матрицей):

Цель	Снаряд		
	C_1	C_2	C_3
$Ц_1$	8	2	4
$Ц_2$	4	5	6
$Ц_3$	1	7	3

При увеличении числа выстрелов ущерб, нанесенный каждой цели, растет пропорционально числу выстрелов.

Требуется нанести каждой цели определенный ущерб не менее 100 единиц, израсходовав при этом минимум снарядов. Какими снарядами и в каком количестве нужно для этого стрелять по группе целей?

Обозначим x_i — число снарядов i-го типа, примененных при стрельбе по группе. В минимум требуется обратить сумму этих чисел:

$$\Phi = x_1 + x_2 + x_3 = \min. \tag{102.1}$$

Каждой цели нужно нанести ущерб не менее 100 единиц; запишем это в виде условий:

$$\left.\begin{aligned} 8x_1 + 4x_2 + x_3 &\geqslant 100, \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &\geqslant 100, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\geqslant 100. \end{aligned}\right\} \tag{102.2}$$

Чтобы сделать эти условия равенствами, введем новые неотрицательные фиктивные переменные z_1, z_2, z_3 и запишем их в виде:

$$\left.\begin{aligned} 8x_1 + 4x_2 + x_3 - z_1 &= 100, \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 - z_2 &= 100, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - z_3 &= 100. \end{aligned}\right\} \tag{102.3}$$

Прежде всего проверяем, нельзя ли выполнить условия (102.2) так, чтобы во всех трех случаях стояли знаки *равенства* (т. е. чтобы ущерб был в точности равен 100). Для этого разрешим систему уравнений (102.3) относительно x_1, x_2, x_3, выразив их через фиктивные переменные z_1, z_2, z_3:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1000}{136} + \frac{27}{136} z_1 + \frac{6}{136} z_2 - \frac{23}{136} z_3, \\ x_2 &= \frac{1200}{136} - \frac{22}{136} z_1 - \frac{20}{136} z_2 + \frac{54}{136} z_3, \\ x_3 &= \frac{800}{136} + \frac{8}{136} z_1 + \frac{32}{136} z_2 - \frac{32}{136} z_3. \end{aligned}\right\} \tag{102.4}$$

Подставим эти значения в линейную функцию (102.1); получим:

$$\Phi = \frac{3000}{136} + \frac{13}{136} z_1 + \frac{18}{136} z_2 - \frac{51}{136} z_3. \tag{102.5}$$

Теперь посмотрим, достигает ли величина Φ минимума, если положить z_1, z_2, z_3 равными нулю? Очевидно, нет. Если увеличивать z_1 или z_2, то действительно Φ может только увеличиться; если же увеличить z_3, она может уменьшиться; значит, положив $z_3=0$, мы не делаем функцию (102.5) минимальной. Попробуем увеличить z_3. Однако это нужно делать осторожно, чтобы величины x_1, x_2, x_3, зависящие от z_3 [формула (102.4)], не стали отрицательными. Величину z_3 можно увеличивать только до тех пор, пока какая-нибудь из них (x_1, или x_2, или x_3) не обратится в нуль. Из второго равенства (102.4) видно, что увеличение z_3 «безопасно» для x_2: она от этого отрицательной не будет. Что касается x_1 и x_3, то при увеличении z_3 они могут стать отрицательными; x_1 обращается в нуль при

$z_3 = \frac{1000}{23}$, а x_3 еще раньше — при $z_3 = \frac{800}{32} = 25$. Следовательно, давая z_3 его наибольшее значение $z_3 = \frac{800}{32}$, мы обратим в нуль величину x_3.

Теперь проверим, обращается ли в минимум величина Ф при $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $x_3 = 0$. Выразим через z_1, z_2, x_3 остальные переменные: x_1, x_2, z_3. Решая уравнения (102.4) относительно x_1, x_2, z_3 получаем:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{100}{32} + \frac{5}{32} z_1 - \frac{4}{32} z_2 + \frac{23}{32} x_3, \\ x_2 &= \frac{600}{32} - \frac{2}{32} z_1 + \frac{8}{32} z_2 - \frac{54}{32} x_3, \\ z_3 &= \frac{800}{32} + \frac{8}{32} z_1 + z_2 - \frac{136}{32} x_3. \end{aligned}\right\} \tag{102.6}$$

Подставляя x_1 и x_2 из (102.6) и $x_3 = 0$ в формулу (102.1), получаем:

$$Ф = \frac{700}{32} + \frac{3}{32} z_1 + \frac{4}{32} z_2 + x_3. \tag{102.7}$$

Из формулы (102.7) видно, что при $z_1 = z_2 = x_3 = 0$ величина Ф достигает минимума; следовательно, наша задача решена.

Подставив значения $z_1 = z_2 = x_3 = 0$ в формулу (102.6), найдем:

$$x_1 = \frac{100}{32} = 3{,}13,$$

$$x_2 = \frac{600}{32} = 18{,}7,$$

$$x_3 = \frac{800}{32} = 25,$$

т. е. для того, чтобы израсходовать по данной совокупности целей минимальное число снарядов, причинив каждой из целей ущерб не менее 100 единиц, нужно взять (округляя число снарядов до целого):

— 3 снаряда первого типа;

— 19 снарядов второго типа;

— ни одного снаряда третьего типа.

При этом условия нанесения каждой цели ущерба «100» будут не только выполнены, но и перевыполнены: третьей цели будет нанесен ущерб в 125 единиц.

§ 103. ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Во многих задачах исследования операций может быть применен еще один специальный математический аппарат, известный под названием динамического программирования (динамического планирования).

Этот аппарат применяется, когда исследуемая операция является многоэтапной, т. е. распадается на ряд последовательных «шагов» или «этапов», и нужно принять такое решение на каждом этапе, чтобы эффективность всей операции обращалась в максимум.

Предположим, что эффективность многоэтапной операции характеризуется показателем эффективности W. Тогда задача динамического программирования ставится следующим образом: как следует выбрать решение на каждом шаге для того, чтобы показатель эффективности всей операции W обращался в максимум?

В принципе такую задачу можно решить и без аппарата динамического программирования. А именно, можно выразить величину W как функцию от некоторых параметров:

$$W = f(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \ldots, \alpha_n, \beta_n \ldots), \tag{103.1}$$

где $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ характеризуют решение при первом шаге; $\alpha_2, \beta_2, \ldots$ — решение при втором шаге и так далее, а потом известными математическими методами определить совокупность значений α_1, β_1, α_2, $\beta_2, \ldots$, при которых величина (103.1) обращается в максимум. Для этого, например, можно продифференцировать величину W по всем параметрам, приравнять производные нулю и решить полученную систему уравнений. Однако в случае, когда шагов много, такой способ становится непомерно громоздким. К тому же он неприменим, если W — разрывная функция или параметры $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ меняются не непрерывно, а скачками. В подобных случаях может оказаться полезным метод динамического программирования, который позволяет развернуть планирование операции поэтапно, последовательно выбирая оптимальное решение на каждом шаге.

Не следует думать, что, осуществляя поэтапное планирование, можно на каждом шаге выбирать решение, забыв обо всех остальных. Напротив, решение на каждом шаге должно приниматься так, чтобы оно вело к максимальному успеху операции с учетом всех последующих шагов. Динамическое программирование — это планирование дальновидное, с учетом будущего.

Проиллюстрируем это таким примером. Пусть нам нужно добраться на машине из пункта A в пункт B в кратчайшее время. Имеется несколько возможных путей из A в B (рис. 103.1). Эти пути различны по качеству: среди них имеются участки первоклассных асфальтированных шоссе, а также менее благоустроенные и просто проселочные дороги; встречаются переезды, на которых движение задерживается, так что задача не сводится к отысканию просто кратчайшего пути; должен быть найден путь наискорейший.

Каков же разумный путь из множества возможных?

На этот вопрос можно ответить, пользуясь методом динамического программирования.

Поясним идею этого метода на данном примере.

Прежде всего представим весь процесс выбора пути в виде n последовательных шагов (этапов). Разделим отрезок AB на n равных частей и проведем через полученные точки прямые (*0*), (*1*), (*2*) ..., (*n*—*2*), (*n*—*1*), (*n*). За «шаг» процесса будем считать перемещение с одной прямой на другую, т. е. преодоление $\frac{1}{n}$ расстояния AB, считая по прямой. В каждом шаге мы будем выбирать элементарный участок дороги, по которой нужно перебираться с одной

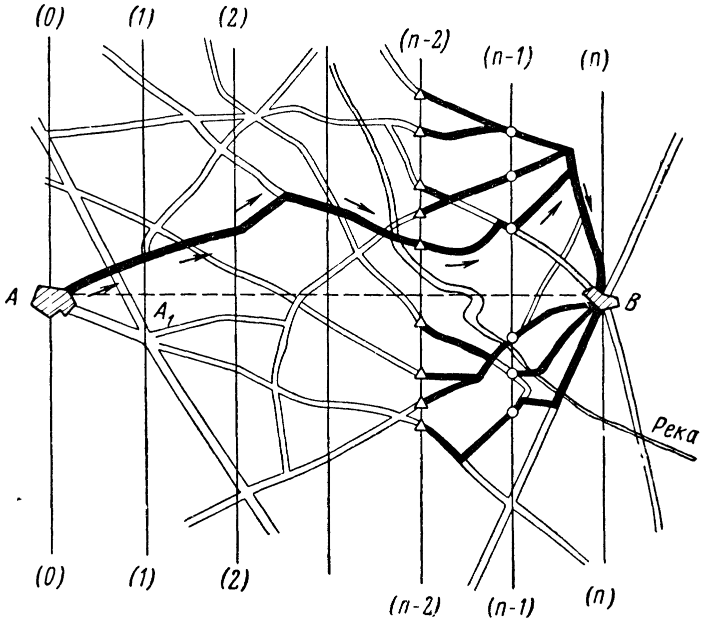


Рис. 103.1.

прямой на следующую по порядку прямую так, чтобы на все перемещение из A в B ушло минимальное время.

Правильно ли будет, если мы, переходя с прямой (*0*) на прямую (*1*), выберем тот участок пути, который проходится за минимальное время? Очевидно, нет. Действительно, предположим, что из всех участков пути, ведущих из точки A на прямую (*1*), мы выбрали тот участок AA_1, который проходится за кратчайшее время (рис. 103.1). Кто поручится, что в дальнейшем этот путь не приведет нас на какой-нибудь трудно проходимый участок или переезд, где пропадет весь выигрыш во времени, полученный на первом участке?

Очевидно, наше решение на первом шаге должно выбираться не из узких интересов именно этого шага, а из более широких интересов операции в целом, и далеко не всегда эти две точки зрения совпадают.

Как же выбирать решение?

Мы уже указали, что в процессе поэтапного планирования решение на каждом шаге должно приниматься с учетом будущего. Единственный шаг, который можно планировать без оглядки на будущее, — это последний шаг: после него никаких следующих шагов уже не будет. Последний шаг должен выбираться попросту: так, чтобы он как таковой был наиболее выгоден. Поэтому процесс динамического программирования всегда разворачивается не от начала к концу, а от конца к началу.

Раньше всего планируется последний шаг. А как его можно спланировать, если мы не знаем, чем кончился предпоследний? Очевидно, *нужно сделать разные предположения о том, чем кончился предпоследний шаг, и для каждого из них принять оптимальное решение на последний.*

В условиях нашего примера предпоследний шаг выводит нас на прямую $(n-1)$, а последний состоит в перемещении с этой прямой в точку B на прямой (n). На рис. 103.1 имеется шесть возможных положений в конце предпоследнего шага; они отмечены кружками на прямой $(n-1)$. Для каждого из этих положений существует вполне определенный кратчайший по времени путь в точку B. Отметим этот путь на рис. 103.1 черной линией. Таким образом, для любого результата предпоследнего шага решение на последнем шаге выбрано.

Перейдем к выбору решения на предпоследнем $(n-1)$-м шаге. Отметим все возможные положения на линии $(n-2)$ треугольниками (см. рис. 103.1). Из каждой такой точки существует какое-то количество (один или больше) возможных путей на прямую $(n-1)$. Если мы выберем какой-то из них, он приведет нас в одну из точек на прямой $(n-1)$, для которой оптимальный следующий шаг уже выбран.

Время перехода $t_{n-2,\,n}$ от прямой $(n-2)$ до точки B будет состоять из:

— времени $t_{n-2,\,n-1}$, потребного на выход с прямой $(n-2)$ на прямую $(n-1)$;

— минимального времени t^*_{n-1}, потребного для выхода с прямой $(n-1)$ в точку B по оптимальному пути (жирной линии).

Таким образом,

$$t_{n-2,\,n} = t_{n-2,\,n-1} + t^*_{n-1,\,n}. \tag{103.2}$$

Для каждой из точек (треугольников) на прямой $(n-2)$ выберем тот путь на прямую $(n-1)$, для которого время выхода в точку B (103.2) будет минимально. Снова отметим этот путь на рис. 103.1 черной линией. Это будет решение на $(n-1)$-м шаге.

Продолжая такой процесс дальше, можно отметить все точки на прямой $(n-3)$ и для каждой из них провести черной линией тот путь на линию (n—2), для которого обращается в минимум время

$$t_{n-3,\, n} = t_{n-3,\, n-2} + t^*_{n-2,\, n-1} + t^*_{n-1,\, n}, \qquad (103.3)$$

причем все возможные варианты берутся только на этапе (n—3) → → (n—2); остальные этапы берутся согласно ранее принятому оптимальному решению.

В результате такой цепочки последовательных решений, состоящих из ряда шагов (с конца к началу процесса), и находится оптимальное решение (черная линия со стрелками от точки A к B на рис. 103.1).

§ 104. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

С помощью метода динамического программирования можно решать разнообразные практические задачи. Общая постановка их такая.

Имеется некоторая физическая система X, которую требуется перевести из какого-то исходного состояния A в конечное состояние B. Этот переход можно осуществить разными способами. Требуется найти такой способ перехода, чтобы некоторая величина W обращалась в максимум (минимум).

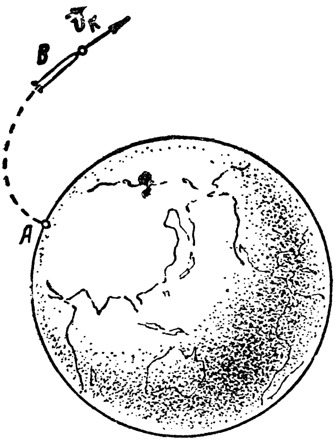


Рис. 104.1.

Приведем несколько примеров таких задач.

1. Ракету определенного веса нужно вывести из исходной точки A на Земле (рис. 104.1) в заданную точку B при условии, чтобы вектор скорости ракеты $\vec{V}_k$ в точке B имел заданную величину и направление. Требуется выбрать такую траекторию ракеты, чтобы расход горючего на участке A, B был минимальным.

2. Имеется техническое устройство, состоящее из n элементов (узлов). Элементы выходят из строя независимо друг от друга, так что надежность системы равна произведению надежностей всех элементов:

$$p = p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Для повышения надежности системы можно некоторые элементы продублировать; для этого может быть использовано некоторое количество k резервных элементов, обладающих надежностями

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_k.$$

Как следует подключить эти резервные элементы для того, чтобы надежность резервированной системы обратилась в максимум?

3. Проектируется многоступенчатая космическая ракета, состоящая из $(n+1)$ ступеней, последняя из которых имеет заданный вес G_0 и несет полезный груз, а остальные нужны для придания заданной скорости v_k последней ступени. Выбрать веса отдельных ступеней и конечные скорости v_i, достигаемые при отделении i-й ступени, так, чтобы стартовый вес ракеты был минимальным.

4. На самолете-бомбардировщике имеется ограниченный запас пассивных помех (дипольных отражателей), которые могут сбрасы-

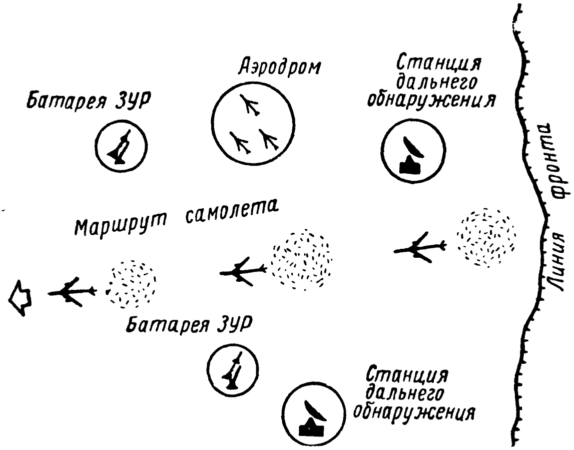


Рис. 104.2.

ваться в процессе выполнения боевого задания (рис. 104.2). В какие моменты времени и какими «порциями» нужно сбрасывать помехи для того, чтобы обеспечить максимальную вероятность выполнения боевого задания?

5. Проводится некоторая операция, состоящая из определенной совокупности боевых действий (выстрелов, ударов, передислокаций и т. д.). Для обеспечения этой операции может быть выделено k самолетов-разведчиков. В какие моменты следует их посылать для того, чтобы обеспечить максимальную эффективность операции?

Каждая из сформулированных выше задач, несмотря на все их различие, построена по вполне определенной схеме:

— имеется начальное состояние системы A и конечное B, в которую ее требуется перевести;

— перевод из A в B можно осуществить разными способами;

— требуется выбрать такой способ, при котором какая-то величина (показатель или критерий) обращается в максимум (минимум).

Начальное и конечное состояния A и B необязательно представляют собой какие-то точки на плоскости. В общем случае они характеризуются какой-то группой параметров: геометрическими координатами, скоростью, числом израсходованных средств и т. д. Однако для общности терминологии о начальном и конечном состояниях A и B удобно говорить, как о двух «точках» в некотором условном так называемом «фазовом пространстве».

Чтобы пояснить понятие фазового пространства, рассмотрим пример.

Летательный аппарат (самолет, ракета) должен быть поднят на некоторую высоту H_k и в то же время разогнан до некоторой скорости v_k. Начальное состояние самолета (состояние A):

$$H = 0; \quad v = 0.$$

Конечное состояние самолета (состояние B):

$$H = H_k; \quad v = v_k.$$

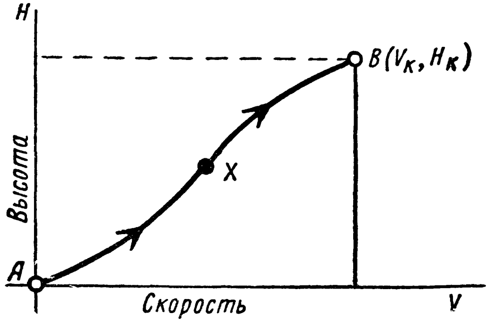


Рис. 104.3.

Оба состояния могут быть изображены двумя точками A и B на плоскости (v, H) (рис. 104.3), где по оси абсцисс откладывается скорость аппарата v, а по оси ординат — высота H. Такая плоскость называется **фазовой плоскостью**. Процесс перехода системы X — летательного аппарата — из состояния A в B (из точки A фазовой плоскости в точку B) изображается некоторой **траекторией** на фазовой плоскости.

Мы рассмотрели случай, когда состояние системы описывается всего двумя параметрами («координатами») и изображается точкой на фазовой плоскости. Если этих параметров не два, а три (например, высота H, скорость v и вес G ракеты переменной массы), то состояние системы будет изображаться точкой уже не на фазовой плоскости, а в трехмерном **фазовом пространстве** (рис. 104.4), а перемещение из A в B будет происходить по какой-то пространственной кривой.

А как быть, если параметров, описывающих состояние системы, не три, а больше? Геометрическая интерпретация, очевидно, теряет наглядность, но геометрическая терминология остается удобной. Если состояние системы X описывается какими-то k параметрами, то начальное и конечное состояния системы A и B будут двумя точками в k-**мерном фазовом пространстве**, а перемещение из A в B будет происходить по какой-то «кривой» или «траектории» в этом пространстве. Нужно будет найти такую траекторию или такой «закон движения» точки в фазовом пространстве, чтобы интересующая нас величина W, зависящая от способа перехода из A в B, обратилась в максимум (минимум).

Метод динамического программирования состоит в том, чтобы, рассматривая процесс перемещения из A в B как состоящий из n последовательных «шагов» или «этапов», построить оптимальное решение «по шагам», начиная с конца процесса и передвигаясь постепенно к началу.

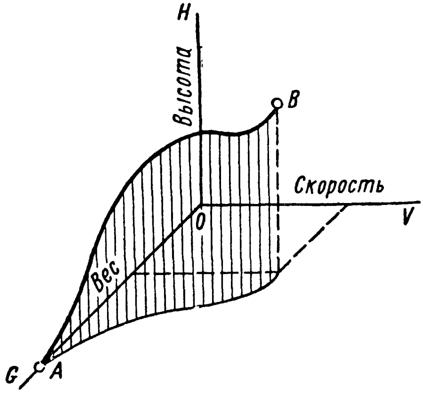


Рис. 104.4.

Заметим, что в некоторых задачах динамического программирования начальное и конечное состояния характеризуются не одной определенной точкой, а целой областью точек в фазовом пространстве. Тогда приходится находить оптимальную траекторию, переводящую систему из одной области фазового пространства $\widetilde{A}$ в другую область $\widetilde{B}$.

§ 105. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В качестве примера задачи динамического программирования, которую мы решим до конца, рассмотрим уже упомянутую выше задачу набора высоты и скорости летательным аппаратом.

Задача состоит в следующем.

Самолет, находящийся на высоте H_0 и имеющий скорость v_0, должен быть поднят на заданную высоту H_k, а скорость его доведена до заданного значения v_k. Известно, сколько условных единиц горючего требуется на переход с одной высоты H_1 на другую H_2 при постоянной скорости v и сколько их требуется на увеличение скорости от v_1 до v_2 на данной высоте H. Требуется найти оптимальный режим набора высоты и скорости, при котором общий расход горючего будет минимальным.

Решение будем строить следующим образом. Для простоты предположим, что за один шаг многоэтапного процесса набора высоты и скорости самолет увеличивает т о л ь к о в ы с о т у или т о л ь к о с к о р о с т ь. При этом точка X, изображающая состояние самолета с двумя координатами v и H, перемещается только по горизонтальным или вертикальным участкам фазовой плоскости (двумерного фазового пространства) (рис. 105.1). Мы должны найти наивыгоднейшую ступенчатую кривую, идущую из A в B, такую, чтобы сумма всех расходов горючего на ее отдельных участках была минимальна. Построим вспомогательный график. Разделим высоту $H_k - H_0$, которую нужно набрать, на несколько равных частей (например, на пять) и скорость $v_k - v_0$ тоже на несколько равных частей (например, на восемь) и изобразим кружками возможные состояния системы (рис. 105.2). Требуется наметить такой путь на фазовой плоскости (от кружка к кружку по горизонталям и вертикалям), чтобы общий расход горючего на этот путь был минимальным. Для этого вычислим и запишем на каждом отрезке (от кружка к кружку) число условных единиц горючего, которое требуется для того, чтобы перевести систему (самолет) по этому отрезку, т. е. увеличить скорость на данной высоте или увеличить высоту на данной скорости [1].

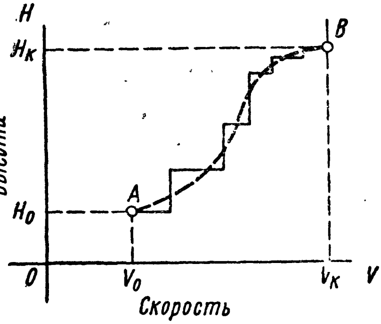


Рис. 105.1.

Точка A с координатами (v_0, H_0) и точка B с координатами (v_k, H_k) представляют начальное и конечное состояния самолета. Перемещаясь из точки A в B по любой траектории, мы расходуем

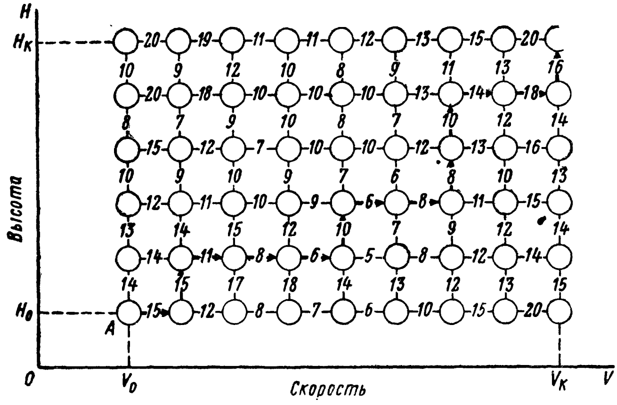


Рис. 105.2.

запас горючего, равный сумме чисел, записанных на пройденных нами отрезках. Например, для траектории, показанной стрелками на рис. 105.2, перемещение из A в B обходится в $15+15+11+$ $+8+6+10+6+8+8+10+14+18+16=145$ единиц горючего. Нетрудно догадаться, что любой путь из A в B будет состоять из

[1] Приведенные на рис. 105.2 цифры выбраны из методических соображений и ничего общего с реальным расходом горючего не имеют.

$5+8=13$ шагов. Нужно найти тот путь, для которого расход горючего будет минимальным.

Можно было бы, конечно, перепробовать все возможные пути из A в B, но таких путей слишком много. Будем решать задачу методом динамического программирования.

Конечное состояние системы — точка B — нам задано. В эту точку (рис. 105.3) можно переместиться из двух соседних точек B_1 и B_2, из каждой только одним способом. Запишем в кружке, отвечающем каждой точке, минимальный расход горючего, переводящий ее в точку B. Для самой точки B это, разумеется, будет нуль. Для точки B_1 это будет 20; горизонтальный отрезок, соответствующий этому расходу горючего, выделим жирной линией. Для точки B_2 это будет 16; вертикальный отрезок, соответствующий этому расходу горючего, тоже выделим жирной линией. Таким образом, решение на последнем (тринадцатом) шаге принято: если на предпоследнем (двенадцатом) мы попадем в точку B_1, то пойдем по горизонтали и истратим 20 единиц горючего; если в точку B_2, то пойдем по вертикали и истратим 16 единиц. В данном случае выбора у нас не было, так как из каждой точки в B можно было прийти только одним путем, но уже на следующем шаге это будет не так.

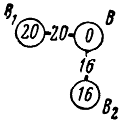


Рис. 105.3.

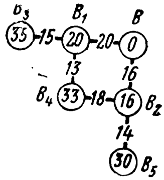


Рис. 105.4.

Рассмотрим возможные положения точки после пред-предпоследнего (одиннадцатого) шага. Это будут точки B_3, B_4, B_5, (рис. 105.4). Из каждой такой точки мы должны найти оптимальный путь в точку B. Для точки B_3 выбора нет: мы должны перемещаться по горизонтали и расходовать $15+20=35$ единиц горючего; пометим этот оптимальный путь жирной линией. Для точки B_4 выбор есть: из нее можно перейти в B через B_1 или через B_2. В первом случае мы израсходуем $13+20=33$ единицы горючего, во втором $18+16=34$ единицы. Значит, оптимальный путь из B_4 в B идет через B_1; отметим его жирной линией, а соответствующий минимальный расход 33 проставим в кружке при точке B_4. Наконец, для точки B_5 путь в B снова единственный и обходится он в $16+14=30$ единиц (величину 30 проставим в кружке при точке B_5).

Таким образом, идя справа налево и сверху вниз, можно заполнить все кружки нашей схемы (рис. 105.4), проставив в каждом кружке минимальный расход горючего, необходимый для перемещения из данной точки в точку B, и выделяя жирной линией тот отрезок (горизонтальный или вертикальный), по которому нужно для этого перемещаться на следующем шаге. Чтобы найти оптимальный путь и минимальный расход горючего для каждой точки, нужно проследить два возможных пути из этой точки — вправо и вверх — и выбрать тот путь, для которого сумма расхода, записанного на отрезке, и минимального расхода, записанного в соседнем кружке, будет меньше. Этот путь и выделяется жирной линией (в случае, когда расход на обоих путях одинаков, выделяется любой из них). Таким образом, из каждого кружка проводится жирная линия, указывающая оптимальный дальнейший путь. На рис. 105.5 показаны окончательные результаты такого процесса, доведенного до начальной точки A. Так как в кружке при точке A стоит число 135, мы заключаем, что минимальный расход для перехода из A в B равен 135 условным единицам горючего. Соответствующую этому расходу оптимальную траекторию можно найти, перемещаясь из A все время по жирным линиям. На

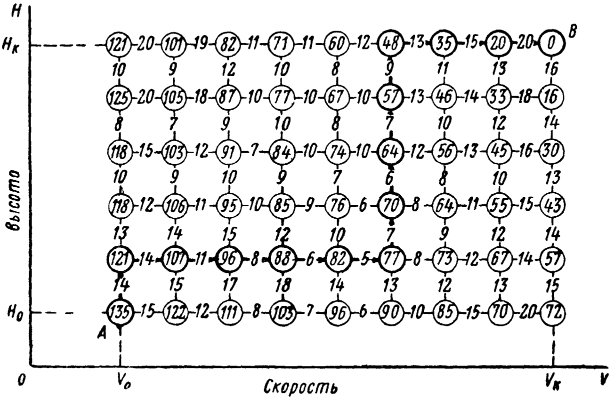


Рис. 105.5.

рис. 105.5 точки, через которые проходит оптимальная траектория, отмечены жирными кружками, а отрезки пути — стрелками.

Таким образом, оптимальный режим набора высоты и скорости состоит в следующем:

— на первом шаге увеличить высоту от H_0 до $H_0 + \Delta H$, где $\Delta H = \frac{H_k - H_0}{5}$;

— на втором, третьем, четвертом, пятом и шестом шагах увеличивать только скорость, доведя ее от v_0 до $v_0 + 5\Delta v$, где $\Delta v = \frac{v_k - v_0}{8}$;

— на седьмом, восьмом, девятом, и десятом шагах набирать только высоту, доведя ее до заданной H_k;

— на последних трех шагах набирать только скорость, доводя ее до заданной v_k.

При этом расход горючего будет минимально возможным: 135 единиц.

Нетрудно на любом числе примеров убедиться, что найденная траектория действительно является оптимальной и на любой другой расход горючего будет больше.

ГЛАВА 15

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗВЕДЫВАТЕЛЬНЫХ ДЕЙСТВИЙ И ОБРАБОТКА РАЗВЕДЫВАТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

§ 106. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗВЕДКИ

Разведка является одним из существенных элементов, обеспечивающих эффективное выполнение боевых действий. Назначением разведки может быть:

— выявление факта наличия сил и средств противника в определенном районе;

— распознание объектов, находящихся в данном районе; определение численностей и координат целей как подвижных, так и неподвижных;

— определение состояния объектов противника после нанесения по ним удара («поражен», «не поражен», «поражен на такую-то долю» и т. д.);

— выявление на основе полученных данных замысла противника и способов его осуществления.

Разведка может производиться при помощи как самолетов, так и других средств. Нас главным образом будет интересовать оценка разведывательной деятельности летательных аппаратов (самолетов, аэростатов и т. п.).

Любая разведка имеет целью получение какой-то *информации* о противнике. Однако эта информация может использоваться по-разному, как-то:

— для уточнения обстановки, чтобы затем могло быть принято решение — предпринимать ли какую-то совокупность мероприятий (наступательных, оборонительных), каких именно, или воздержаться от них;

— для уточнения конкретного плана операции, решение о которой уже принято.

Для краткости эти два типа разведки условимся называть «разведка на принятие решения» и «разведка на уточнение решения».

Если речь идет о разведке на принятие решения, то модель разведывательной операции, которая строится для оценки ее эффективности, может не включать последующих боевых действий. Для оценки эффективности разведки можно выбрать какой-либо показатель, оценивающий качество *разведки как таковой* безотносительно к тем боевым действиям, которые могут за ней последовать.

Если речь идет о разведке на уточнение решения, предпринимаемой в интересах вполне определенной операции, то здесь, как правило, эффективность разведки должна оцениваться косвенно, по ее влиянию на эффективность обеспечиваемых ею боевых действий. Показателем эффективности разведки в этом случае может служить абсолютное или относительное увеличение показателя эффективности операции.

Пусть, например, без разведки операция имеет эффективность $W^{(0)}$; при разведке — эффективность $W^{(р)}$. Полезность разведки можно оценить величиной:

$$V = W^{(р)} - W^{(0)} \tag{106.1}$$

или

$$v = \frac{W^{(р)} - W^{(0)}}{W^{(0)}}. \tag{106.2}$$

Во многих случаях может оказаться удобным другой показатель эффективности разведки. Он представляет собой относительное приращение эффективности, измеренное не в долях самого показателя эффективности, а в долях того приращения, которое дала бы разведка, если бы она была «идеальной» (т. е. доставляла бы требуемые от нее данные идеально точно):

$$u = \frac{W^{(р)} - W^{(0)}}{W^{*} - W^{(0)}}, \tag{106.3}$$

где W^{*} — показатель эффективности операции в идеальном случае, когда все требуемые от разведки сведения получены и точность их безупречна.

Рассмотрим несколько примеров, в каждом из которых требуется выбрать показатель эффективности разведки.

1. Группа самолетов-разведчиков посылается в определенный район морского театра военных действий с заданием: выяснить, имеются ли в этом районе суда противника, какие и в каком количестве. Каждый разведчик имеет на борту оборудование, позволяющее обнаруживать суда, находящиеся в пределах круга радиуса $R_{обн}$. Требуется выбрать показатель эффективности операции.

Так как наличие или отсутствие судов в районе предварительно не выяснено и решение на операцию не принято, то здесь предпринимается разведка на принятие решения. В качестве показателя эффективности можно принять среднюю разведанную площадь района. Под разведанной площадью понимается та площадь (успешно сфотографированная или просмотренная с помощью какой-либо аппаратуры), наличие или отсутствие на которой данного вида объектов — судов — выяснено с полной достоверностью, и эти сведения переданы заинтересованной стороне к заданному моменту времени [1].

2. Для обстрела одиночной цели выделено n ракет. После некоторого количества выстрелов производится контрольная разведка, устанавливающая, поражена цель или нет. Если цель поражена, стрельба прекращается; если не поражена — продолжается до израсходования всех n ракет. Задача разведки — воспрепятствовать излишнему расходу боеприпасов на уже пораженную цель. Требуется выбрать показатель эффективности разведки.

Перед нами типичный пример разведки на уточнение решения. В соответствии с целевым назначением контрольной разведки в качестве показателя эффективности можно взять среднее число сэкономленных ракет.

3. Самолет-разведчик посылается для уточнения координат важного объекта — одиночной неподвижной цели (атомного завода, электростанции и т. д.), по которой предполагается произвести стрельбу. Требуется выбрать показатель эффективности.

Здесь снова мы имеем дело со случаем разведки на уточнение решения. В качестве показателя эффективности может быть выбрано увеличение вероятности поражения цели

$$V = W^{(\text{р})} - W^{(0)},$$

где $W^{(0)}$ — вероятность поражения цели без разведки;

$W^{(\text{р})}$ — вероятность поражения цели с учетом данных разведки.

Можно также, пользуясь формулой (106.3), выбрать в качестве показателя эффективности разведки величину

$$u = \frac{W^{(\text{р})} - W^{(0)}}{W^{*} - W^{(0)}},$$

где W^{*} — вероятность поражения цели, координаты которой определены совершенно точно.

4. Допустим, создается система разведывательных средств для обнаружения возможных в данном районе ядерных взрывов. Задача системы — обеспечить обнаружение любого взрыва, произведенного в пределах района.

За показатель эффективности здесь естественно взять величину, характеризующую разведку как таковую, безотносительно к следующим за ней мероприятиям, например: вероятность того, что любой взрыв, осуществленный в данном районе, будет обнаружен хотя бы одним из разведывательных средств.

В следующих параграфах рассмотрим несколько конкретных задач, связанных с оценкой эффективности разведки, планированием разведывательных действий и обработкой их результатов.

---

[1] Если в пределах просмотренной или сфотографированной площади наличие или отсутствие объектов устанавливается не с полной достоверностью, а с какой-то вероятностью p, то в расчет вводится некоторая «фиктивная» или «приведенная» разведанная площадь, равная просмотренной площади, умноженной на p.

§ 107. РАЗВЕДКА РАЙОНА ПРЕДПОЛАГАЕМОГО СОСРЕДОТОЧЕНИЯ СИЛ ПРОТИВНИКА

Пусть имеется район D (рис. 107.1), в пределах которого могут предположительно находиться те или другие объекты, силы и средства противника.

Один самолет-разведчик пересекает этот район по некоторой траектории T. Задача полета — узнать как можно больше о противнике в данном районе, т. е. разведать максимально возможную площадь. В качестве показателя эффективности естественно выбрать среднюю разведанную площадь $M[S_р]$. Однако удобнее будет рассматривать (аналогично случаю стрельбы по площадной цели) не абсолютную, а *относительную среднюю разведанную площадь* (долю разведанной площади)

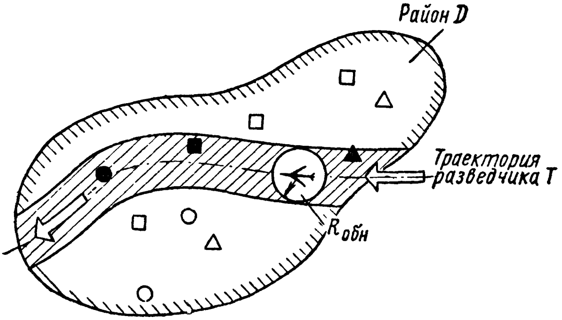


Рис. 107.1.

$$M_р = \frac{M[S_р]}{S_D}, \quad (107.1)$$

где $S_р$ — разведанная площадь;

S_D — полная площадь района D.

Предположим, что самолет-разведчик оборудован аппаратурой, которая позволяет ему обнаруживать искомые объекты, короче, «просматривать» территорию района в пределах круга радиуса $R_{обн}$, перемещающегося вместе с разведчиком вдоль траектории T. Предположим, что эта траектория нигде не пересекается сама с собой и никакой участок района не просматривается дважды. Тогда разведчик просмотрит полосу шириной $2R_{обн}$ (заштрихована на рис. 107.1). Однако каждый объект, расположенный в этой полосе, будет обнаружен не с полной достоверностью, а с некоторой вероятностью p. Эта вероятность зависит от технических свойств аппаратуры, состояния атмосферы и т. п. Будем считать вероятность p заданной.

Средняя доля площади района, разведанная одним самолетом, будет равна

$$M_р = \frac{S_{пр}}{S_D} p, \quad (107.2)$$

где $S_{пр}$ — просматриваемая разведчиком площадь.

Нужно иметь в виду, что в общем случае как $R_{обн}$, так и вероятность p зависят от типа объекта, о котором идет речь. Например, для крупных объектов, обладающих заметным контрастом, $R_{обн}$ и p будут больше, чем для мелких неконтрастных объектов. Если речь идет об обнаружении в пределах района объектов, заранее неизвестных по типу, можно провести оценку эффективности разведки для наименее благоприятных условий, имея в виду наиболее трудно обнаруживаемые объекты.

Пример 1. Самолет-разведчик пересекает прямоугольный район D размером 250×100 *км* (рис. 107.2), в котором предполагается возможным наличие объектов противника (танков, мотопехоты). Станция обзора самолета дает возможность обнаружить такого типа объекты на расстоянии до 50 *км* с вероятностью $p=0{,}8$. Найти среднюю долю разведанной площади.

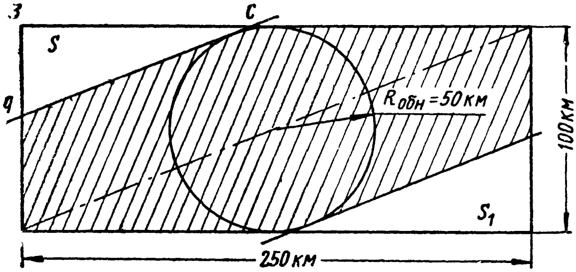


Рис. 107.2.

Решение. Строим около траектории самолета (диагонали T) зону шириной 100 *км*. Площадь этой зоны можно вычислить, вычитая из площади прямоугольника

$$S_D = 250 \times 125 = 3{,}22 \cdot 10^4 \text{ км}^2$$

удвоенную площадь треугольника ABC:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 56{,}7 \approx 0{,}424 \cdot 10^4 \text{ км}^2.$$

Следовательно,

$$S_{пр} = 3{,}22 \cdot 10^4 - 0{,}85 \cdot 10^4 \approx 2{,}37 \cdot 10^4 \text{ км}^2.$$

По формуле (107.1) находим долю разведанной площади:

$$M_р = \frac{2{,}37}{3{,}22} \cdot 0{,}8 \approx 0{,}59,$$

т. е. один самолет обнаружит в среднем 59% объектов, предположительно находящихся в районе D.

Рассмотрим случай, когда район D обследуется несколькими разведчиками (или, что равносильно, один и тот же разведчик пересекает район несколько раз).

Пусть над районом D пролетают два разведчика (с одинаковыми $R_{обн}$ и p) по траекториям T_1, T_2 (рис. 107.3). Если зоны, просматриваемые разведчиками, не перекрываются (как показано на рисунке), то суммарная средняя доля разведанной площади M равна сумме долей площади, разведанных обоими самолетами:

$$M_р = M_{р_1} + M_{р_2}, \tag{107.3}$$

где $M_{\text{р}_1}$, $M_{\text{р}_2}$ — средние доли площади, разведанные первым и вторым самолетами в отдельности.

Иначе будет, если просматриваемые зоны перекрываются (рис. 107.4). Тогда просматриваемая зона будет состоять из двух частей:

$S_{\text{пр}}^{(1)}$ — зона, просматриваемая только одним самолетом;

$S_{\text{пр}}^{(2)}$ — зона, просматриваемая двумя самолетами сразу.

В пределах зоны $S_{\text{пр}}^{(1)}$ все будет, как раньше. В пределах зоны $S_{\text{пр}}^{(2)}$ вероятность обнаружения объекта (если бы он там нахо-

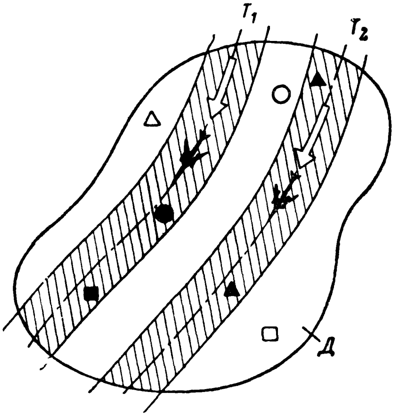


Рис. 107.3.

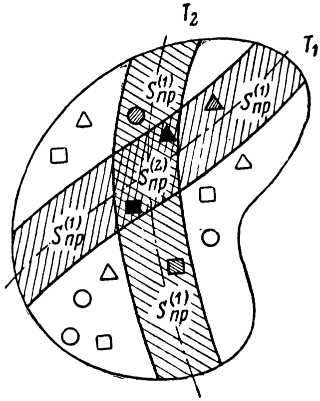


Рис. 107.4.

дился) будет уже больше: его могут обнаружить не с одного, так с другого самолета. Если считать, что самолеты обнаруживают объекты независимо друг от друга, то в пределах дважды просматриваемой зоны вероятность обнаружения объекта равна

$$p_2 = 1 - (1-p)^2. \tag{107.4}$$

Общая средняя доля разведанной площади будет

$$M_{\text{р}} = \frac{S_{\text{пр}}^{(1)}}{S_D} p + \frac{S_{\text{пр}}^{(2)}}{S_D} [1-(1-p)^2]. \tag{107.5}$$

Очевидно, в общем случае, когда район «прочесывают» n самолетов, средняя доля разведанной площади будет равна

$$M_{\text{р}} = \frac{S_{\text{пр}}^{(1)}}{S_D} p + \frac{S_{\text{пр}}^{(2)}}{S_D} [1-(1-p)^2] + \ldots + \frac{S_{\text{пр}}^{(n)}}{S_D} [1-(1-p)^n] = \\ = \frac{1}{S_D} \sum_{k=1}^{n} S_{\text{пр}}^{(k)} [1-(1-p)^k], \tag{107.6}$$

где $S_{\text{пр}}^{(1)}$, $S_{\text{пр}}^{(2)}$, ..., $S_{\text{пр}}^{(n)}$ — площадь, просматриваемая одним, двумя, ..., всеми n самолетами.

Пример 2. Группа из трех самолетов-разведчиков обследует район D предполагаемого сосредоточения сил противника. Площадь всего района $S_D = 10 \cdot 10^4$ *км²*; площадь зоны, просматриваемой только одним самолетом, $S_{\text{пр}}^{(1)} = 5 \cdot 10^4$ *км²*; площадь зоны, просматриваемой двумя самолетами, $S_{\text{пр}}^{(2)} = 3 \cdot 10^4$ *км²*; площадь зоны, просматриваемой тремя самолетами, $S_{\text{пр}}^{(3)} = 1{,}5 \cdot 10^4$ *км²*.

Вероятность обнаружения одним самолетом объекта в просматриваемой им зоне $p=0{,}7$. Найти среднюю долю разведанной площади $M_{\text{р}}$.

Решение. По формуле (107.6) имеем

$$M_{\text{р}} = \frac{5}{10} \cdot 0{,}7 + \frac{3}{10} \cdot 0{,}81 + \frac{1{,}5}{10} \cdot 0{,}973 \approx 0{,}74,$$

т. е. в результате деятельности трех самолетов-разведчиков будет разведано около 74% площади цели.

Если самолеты-разведчики обследуют район, перемещаясь по случайным несогласованным между собой траекториям, то среднюю долю разведанной площади для всех n разведчиков можно приближенно определить по формуле

$$M_{\text{р}}(n) = 1 - (1 - M_{\text{р}})^n, \tag{107.7}$$

где $M_{\text{р}}$ — средняя доля разведанной площади, приходящаяся на один посланный самолет.

Пример 3. Группа из пяти самолетов-разведчиков осуществляет свободный поиск в районе предполагаемого местонахождения противника общей площадью $24 \cdot 10^4$ *км²*. Каждый самолет описывает в пределах района общий путь протяженностью 1000 *км* и просматривает объекты в пределах радиуса 100 *км*, причем обнаруживает их с вероятностью $p=0{,}85$. Траектории самолетов не согласованы. Определить приближенно среднюю долю разведанной площади.

Решение. Один самолет просматривает площадь около $1000 \cdot 100 = 10 \cdot 10^4$ *км²* и разведывает в среднем долю площади, равную

$$M_{\text{р}} = \frac{10}{24} \cdot 0{,}85 = 0{,}35.$$

По формуле (107.7) для пяти самолетов получим

$$M_{\text{р}}(5) = 1 - (1 - 0{,}35)^5 \approx 0{,}88,$$

т. е. пять самолетов разведают около 88% площади района, т. е. обнаружат 88% находящихся там объектов.

При оценке эффективности разведки и при планировании разведывательных действий в ряде случаев приходится учитывать противодействие противника. Часто бывает, что на пути к разведываемому району (или обратно) разведчик может быть поражен средствами ПВО противника.

Если разведчик, для того чтобы сообщить свои данные, должен вернуться на базу, то нужно учитывать противодействие ПВО на пути как «туда», так и «обратно». Если же разведчик передает свои данные по радио, то при оценке его эффективности (при однократном применении) достаточно учитывать противодействие ПВО только на пути «туда».

Пример 4. Группа из трех самолетов-разведчиков, передающих свои данные по радио, перед выполнением задания проходит зону ПВО, в которой каждый из них поражается с вероятностью 0,3. Если разведчик не поражен, он, действуя самостоятельно, разведывает в среднем 60% площади района. Найти среднюю долю разведанной площади.

Решение. Согласно принципам учета противодействия, изложенным в гл. 8, средняя доля площади, разведанной тремя разведчиками, с учетом противодействия будет

$$\widetilde{M}_\text{р}(3) = 1 - (1 - QM_\text{р})^3,$$

где Q — вероятность того, что разведчик не будет поражен в зоне ПВО;
$M_\text{р}$ — средняя доля разведанной площади для одного разведчика.

Отсюда

$$\widetilde{M}_\text{р}(3) = 1 - (1 - 0{,}7 \cdot 0{,}6)^3 \approx 0{,}80.$$

Пример 5. Сколько разведчиков нужно послать в условиях предыдущего примера, чтобы разведать в среднем 90% площади района?

Решение. По формуле (73.5) гл. 10

$$n = \frac{\lg(1 - 0{,}9)}{\lg(1 - 0{,}7 \cdot 0{,}6)}$$

(или по табл. 3 прилож. 1) находим наряд разведчиков $n \approx 5$.

Пример 6. В условиях примера 4 найти среднюю долю разведанной площади, если самолеты не могут транслировать свои данные по радио, а должны возвратиться на базу.

Решение. Вероятность Q того, что сведения будут доставлены (разведчик не поражен), равна

$$Q = 0{,}7^2 = 0{,}49,$$

откуда

$$\widetilde{M}_\text{р}(3) = 1 - (1 - 0{,}49 \cdot 0{,}6)^3 \approx 0{,}65.$$

Сравнение результатов 4 и 6 показывает, что разведчик, передающий свои данные по радио, при прочих равных условиях ($R_\text{обн}$, p) имеет значительное преимущество перед разведчиком, не имеющим такой возможности.

§ 108. РАЗВЕДКА, УТОЧНЯЮЩАЯ КООРДИНАТЫ ЦЕЛЕЙ

Пусть планируется стрельба, состоящая из n обобщенных выстрелов по одиночной малоразмерной цели $Ц$ (рис. 108.1). Координаты цели известны с какими-то средними квадратическими ошибками σ_{x0}, σ_{y0}. Перед стрельбой производится разведка, задача которой — уточнить координаты цели. После разведки координаты цели становятся известны уже с меньшими ошибками $\sigma_{x\text{р}}$, $\sigma_{y\text{р}}$. Требуется оценить эффективность разведки.

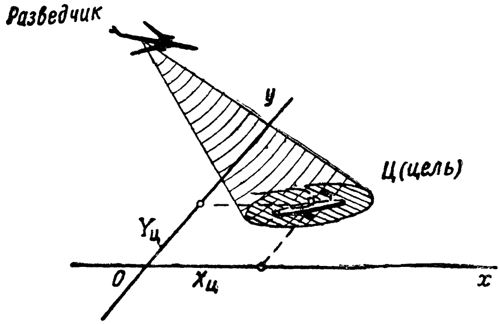


Рис. 108.1.

Выберем в качестве показателя эффективности разведки относительное увеличение вероятности поражения цели [см. формулу (106.3)]:

$$u = \frac{W^{(\text{р})} - W^{(0)}}{W^{*} - W^{(0)}}, \quad (108.1)$$

где $W^{(0)}$ — вероятность поражения цели, вычисленная при неуточненных координатах цели, имеющих ошибки σ_{x0}, σ_{y0};

$W^{(p)}$ — вероятность поражения цели, вычисленная при уточненных координатах, имеющих ошибки σ_{xp}, σ_{yp};

W^* — вероятность поражения цели при идеально точном измерении ее координат.

Вероятность поражения цели как для неуточненных, так и для уточненных координат вычисляется обычными методами, изложенными в гл. 3. При этом нужно иметь в виду, что уточнение координат цели сказывается не только на вероятности попадания в цель при одном выстреле, но и на коэффициенте корреляции выстрелов μ.

Действительно, ошибки в определении координат цели для нескольких выстрелов, как правило, являются групповыми и их уменьшение всегда уменьшает коэффициент корреляции.

Пример 1. Производится сосредоточенная стрельба группой из пяти ракет по одиночной цели (подземной стартовой позиции), которая поражается, если ракета попадает не дальше 500 *м* от цели. Рассеивание круговое; главные вероятные отклонения ошибок, вызванных всеми причинами, кроме неточности определения координат цели, равны

$$E_{xи} = E_{yи} = 400 \text{ м}.$$

Зависимость между выстрелами обусловлена только неточностью определения координат цели. Ошибки определения координат цели:

— до разведки $E_{x0} = E_{y0} = 1000$ *м*;

— после разведки $E_{xp} = E_{yp} = 200$ *м*.

Определить показатель эффективности разведки u (формула 108.1).

Решение. Находим «идеальную» вероятность поражения W^*, достигаемую, когда координаты цели определяются безошибочно. При этом выстрелы независимы. Вероятность попадания в круг при одном выстреле находим по табл. 2 прилож. 1 (функция $P(a, R)$). Имеем

$$a = 0; \quad R = \frac{500}{400} = 1{,}25, \quad p \approx 0{,}3.$$

Вероятность поражения цели пятью ракетами будет равна

$$W^* = 1 - (1 - 0{,}3)^5 \approx 0{,}83.$$

Далее находим $W^{(0)}$ — вероятность поражения цели при недоразведанных координатах. Имеем при отсутствии разведки

$$E_x^{(0)} = \sqrt{E_{xи}^2 + E_{x0}^2} = \sqrt{400^2 + 1000^2} = 1080 \text{ м}.$$

Вероятность попадания в круг при одном выстреле $p = 0{,}048$.

Коэффициент корреляции

$$\mu^{(0)} = \frac{1000^2}{400^2 + 1000^2} \approx 0{,}86.$$

Полагая $M = np = 5 \cdot 0{,}048 = 0{,}24$ при $\mu = 0{,}86$, по приближенному методу (см. стр. 81) находим $W^{(0)} \approx 0{,}15$.

Найдем $W^{(р)}$. Имеем после разведки

$$E_x^{(р)} = \sqrt{400^2 + 200^2} \approx 565.$$

Вероятность попадания в цель при одном выстреле после разведки

$$p^{(р)} \approx 0{,}20.$$

Коэффициент корреляции выстрелов после разведки

$$\mu^{(р)} = \frac{400^2}{400^2 + 400^2} = 0{,}5.$$

По приближенной методике, описанной на стр. 81, находим

$$W^{(р)} \approx 0{,}62.$$

Показатель эффективности разведки

$$u = \frac{W^{(р)} - W^{(0)}}{W^{*} - W^{(0)}} = \frac{0{,}62 - 0{,}15}{0{,}83 - 0{,}15} \approx 0{,}69,$$

т. е. разведка повышает эффективность стрельбы ракетами на 69% от того повышения, которое имело бы место, если бы координаты цели были измерены совершенно точно.

§ 109. КОНТРОЛЬНАЯ РАЗВЕДКА

Пусть планируется обстрел некоторой одиночной цели *Ц*, для чего выделено n снарядов. Каждый снаряд поражает цель с вероятностью p. После m выстрелов производится контрольная разведка для того, чтобы установить состояние цели: поражена она или нет (рис. 109.1). Если самолет-разведчик приносит донесение «цель поражена», то стрельба прекращается и $n - m$ снарядов остаются неизрасходованными. Если разведчик приносит донесение «цель не поражена», то стрельба продолжается вплоть до израсходования всего боезапаса. Требуется оценить эффективность разведки.

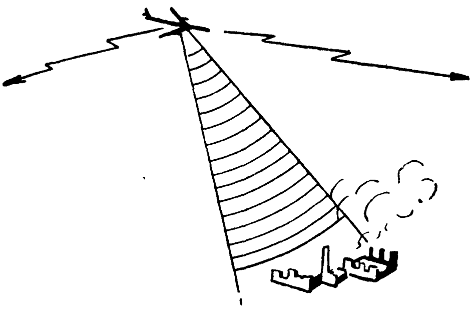


Рис. 109.1.

Для простоты не будем учитывать противодействие средств ПВО и допустим, что разведчик не ошибается, т. е. его сообщение всегда соответствует истине.

В соответствии с изложенным выше (см. § 106) выберем в качестве показателя эффективности среднее число снарядов $M_э$, сэкономленных благодаря разведке.

Допустим для простоты, что выстрелы независимы, и рассмотрим случайную величину X — число сэкономленных снарядов. Эта величина имеет только два возможных значения: 0 и $n - m$. Значение 0 она принимает, если разведка приносит донесение «цель не поражена»; значение $n - m$, если приносит донесение «цель поражена». Так как оба донесения всегда правильны (разведчик не ошибается), то их вероятности равны соответственно вероятности непоражения цели m выстрелами:

$$(1-p)^m,$$

и вероятности поражения:

$$1-(1-p)^m.$$

Ряд распределения величины X имеет вид

Возможные значения	0	$n-m$
Вероятности	$(1-p)^m$	$1-(1-p)^m$

Среднее число сэкономленных боеприпасов равно сумме произведений возможных значений X на их вероятности:

$$M_э = M[X] = 0 \cdot (1-p)^m + (n-m)[1-(1-p)^m]$$

или, окончательно,

$$M_э = (n-m)[1-(1-p)^m]. \tag{109.1}$$

Пример 1. Производится 5 выстрелов ракетами по одиночной цели, вероятность поражения которой при одном выстреле равна $p=0{,}6$. После второго выстрела производится контрольная разведка. Оценить ее эффективность.

Решение. По формуле (109.1) получим среднее число сэкономленных благодаря разведке снарядов

$$M_э = 3 \cdot (1-0{,}4^2) \approx 2{,}5,$$

т. е. выполнение контрольной разведки дает возможность в среднем уменьшить вдвое расход снарядов на поражение цели.

Пользуясь формулой (109.1), можно наиболее разумным способом спланировать контрольную разведку, т. е. определить, после какого числа выстрелов ее выгоднее всего выполнять.

Для решения этой задачи можно построить график $M_э$ в зависимости от момента контрольной разведки (номера выстрела m, после которого она выполняется) и найти на этом графике точку с максимальной ординатой. Можно применить и такой прием: продифференцировать выражение (109.1) по m и найти то значение m, для которого производная обращается в нуль, и округлить до целого числа. Так как уравнение для m получается трансцендентным, решать его приходится численно, поэтому удобнее воспользоваться для этой цели специальными заранее составленными графиками.

Остановимся отдельно на вопросе о контрольной разведке при стрельбе по групповой цели.

Пусть производится стрельба по рассредоточенной групповой цели, состоящей из N единиц, для чего выделено n снарядов (обобщенных выстрелов). Вероятность поражения одной единицы направленным по ней выстрелом равна p. После m-го выстрела производится контрольная разведка, в результате которой выясняется, какие цели поражены, а какие нет. Дальнейшая стрельба производится только по тем целям, которые не были поражены при первых m выстрелах. Требуется оценить эффективность контрольной разведки.

Прежде всего отметим, что контрольную разведку не имеет смысла производить, пока не обстреляны все цели $(m \geqslant N)$, так как ее назначение — воспрепятствовать вторичному обстрелу уже пораженных целей.

Что выбрать в качестве показателя эффективности контрольной разведки? Снова среднее число сэкономленных снарядов? В данном случае это было бы неправильно: снаряды, сэкономленные на одной из единиц, могут быть в той же операции применены по другой, еще не пораженной, в результате чего возрастет среднее число пораженных единиц $M_п$. Увеличение среднего числа пораженных единиц $M_п$ и явится в данном случае основным показателем эффективности разведки. Что же касается экономии средств, то она в чистом виде будет достигнута только в случае, если при первых m выстрелах будут поражены все без исключения цели. Величина $M_э$ — среднее число сэкономленных снарядов — будет в данном случае не основным показателем эффективности операции, а дополнительным критерием.

Вычислим увеличение среднего числа пораженных единиц:

$$V = M_п^{(р)} - M_п^{(0)}, \tag{109.2}$$

где $M_п^{(р)}$ — среднее число пораженных единиц при применении контрольной разведки;

$M_п^{(0)}$ — среднее число пораженных единиц без применения разведки.

Среднее число пораженных единиц без применения разведки $M_п^{(0)}$ можно вычислить по формуле (98.1) (см. § 98 гл. 14)

$$M_п^{(0)} = N\{[1-(1-p)^k](1-\theta) + [1-(1-p)^{k+1}]\theta\}, \tag{109.3}$$

где k — целая часть,

θ — дробная часть отношения $\frac{n}{N}$.

Величину $M_п^{(р)}$ — среднее число пораженных единиц при наличии разведки — вычислим другим способом. Сделаем несколько гипотез о том, чем кончились первые m выстрелов:

H_0 — не поражено ни одной цели;

H_1 — поражена ровно одна цель из N;

. . . .

H_s — поражено ровно s целей из N;

. . . .

H_N — поражены все N целей.

Вероятности этих гипотез можно найти, зная, какое количество выстрелов из m произведено по какой из целей. Для этого мы будем пользоваться обыкновенной теоремой о повторении опытов Обозначим вычисленные таким образом вероятности гипотез

$$P(H_0),\ P(H_1),\ \ldots,\ P(H_N).$$

Найдем теперь среднее число пораженных единиц при каждой гипотезе. Возьмем гипотезу H_s (первыми m выстрелами поражено s единиц, значит, осталось $N-s$ непораженных единиц). Между этими $N-s$ целями нужно распределить наиболее равномерным образом оставшиеся $n-m$ выстрелов. При этом среднее число пораженных единиц сложится из s единиц, пораженных первыми m выстрелами, плюс среднее число единиц, пораженных оставшимися $n-m$ выстрелами:

$$M_{\text{п}}(H_s) = s + (N-s)\left\{[1-(1-p)^k](1-\theta') + \right.$$
$$\left. + [1-(1-p)^{k'+1}]\,\theta'\right\}, \qquad (109.4)$$

где k' — целая часть,

θ' — дробная часть отношения $\dfrac{n-m}{N-s}$.

При последней гипотезе H_N (первыми m выстрелами поражены все N целей), очевидно, среднее число пораженных целей будет просто равно N.

Умножая вероятность каждой гипотезы на среднее число пораженных единиц при этой гипотезе и складывая все такие произведения, получаем среднее число пораженных единиц с учетом разведки

$$M_{\text{п}}^{(\text{р})} = P(H_0)\,M_{\text{п}}(H_0) + P(H_1)\,M_{\text{п}}(H_1) + \ldots +$$
$$+ P(H_s)\,M_{\text{п}}(H_s) + \ldots + P(H_N)\,N. \qquad (109.5)$$

Вычитая из $M_{\text{п}}^{(\text{р})}$ величину $M_{\text{п}}^{(0)}$, получаем показатель эффективности разведки V — абсолютное увеличение среднего числа пораженных единиц в результате деятельности разведки

$$V = M_{\text{п}}^{(\text{р})} - M_{\text{п}}^{(0)}. \qquad (109.6)$$

В случае надобности можно перейти от него к относительному показателю

$$u = \frac{M_{\text{п}}^{(\text{р})} - M_{\text{п}}^{(0)}}{M_{\text{п}}^{*} - M_{\text{п}}^{(0)}}, \qquad (109.7)$$

где $M_{\text{п}}^{*}$ — среднее число единиц, которое было бы поражено, если бы мы все время имели полную информацию о состоянии целей (стрельба с переносом огня).

Пример 2. Производится стрельба двенадцатью ракетами по групповой цели, состоящей из трех единиц. Каждый выстрел поражает цель, по которой он направлен, с вероятностью $p=0{,}4$. После того как осуществлена половина всех выстрелов ($m=6$), стрельба временно приостанавливается и производится контрольная разведка, устанавливающая, какие именно цели поражены. При наличии пораженных целей стрельба по ним прекращается и переносится на другие, еще не пораженные. Определить, насколько разведка повышает средне число пораженных целей.

Решение. Сделаем гипотезы о результатах первых шести выстрелов:

H_0 — ни одна единица не поражена;

H_1 — поражена ровно одна единица;

H_2 — поражены ровно две единицы;

H_3 — поражены все три единицы.

Из первых шести выстрелов на каждую единицу приходится два, и она поражается с вероятностью

$$P = 1-(1-p)^2 = 1-0{,}6^2 = 0{,}64.$$

По теореме о повторении опытов имеем:

$$P(H_0) = (1-P)^3 = 0{,}36^3 \approx 0{,}046,$$

$$P(H_1) = C_3^1 P^1 (1-P)^2 \approx 0{,}248,$$

$$P(H_2) = C_3^2 P^2 (1-P) \approx 0{,}444,$$

$$P(H_3) = P^3 \approx 0{,}262.$$

Определим теперь при каждой гипотезе среднее число пораженных целей. По формуле (109.4) имеем:

$$M_{\text{п}}(H_0) = 0+3\,[1-0{,}6^2] = 1{,}92,$$

$$M_{\text{п}}(H_1) = 1+2\,[1-0{,}6^3] = 2{,}57;$$

$$M_{\text{п}}(H_2) = 2+1\,[1-0{,}6^6] = 2{,}95,$$

$$M_{\text{п}}(H_3) = 3.$$

По формуле (109.5) получим

$$M_{\text{п}}^{(\text{р})} = 0{,}046\cdot 1{,}92 + 0{,}218\cdot 2{,}57 + 0{,}444\cdot 2{,}95 + 0{,}262\cdot 3 \approx 2{,}82.$$

При отсутствии разведки по формуле (109.3) получим

$$M_{\text{п}}^{(0)} = 3\,[1-0{,}6^4] = 2{,}51.$$

Увеличение числа пораженных целей за счет разведки будет

$$V = M_{\text{п}}^{(\text{р})} - M_{\text{п}}^{(0)} = 0{,}31.$$

Определим относительный показатель эффективности разведки u [см. формулу (109.7). Величину $M_{\text{п}}^{*}$ для «идеального» случая полной информации о состоянии целей определим по формуле (36.8) гл. 5:

$$M_{\text{п}}^{*} = C_{12}^1 p^1 (1-p)^{11} + 2\cdot C_{12}^2 p^2 (1-p)^{10} + 3\,\{1-[(1-p)^{12} +$$

$$+ C_{12}^3 p^1 (1-p)^{11} + C_{12}^2 p^2 (1-p)^{10}]\} \approx 3$$

(при «идеальной» информации будут поражены практически все три цели).

$$u = \frac{2{,}82 - 2{,}51}{3{,}00 - 2{,}51} \approx 0{,}63,$$

т. е. одна контрольная разведка после шести выстрелов из двенадцати обеспечивает на 63% тот выигрыш в эффективности, который получился бы, если бы в нашем распоряжении были полные сведения о результатах каждого выстрела.

В данном параграфе рассмотрели простейший случай, когда предпринимается одна контрольная разведка. Если их производится несколько, то можно определить наивыгоднейшие моменты выполнения разведок, пользуясь методом динамического программирования.

§ 110. ОБРАБОТКА РАЗВЕДЫВАТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

Одним из существенных элементов управления боевыми действиями является сбор и обработка информации. Эта информация может включать, например, следующие данные:

— наличие сил и средств противника в определенном районе;

— типы объектов;

— численности соединений;

— координаты и скорости перемещения как отдельных объектов, так и группировок;

— состояние объектов (поражен, не поражен)

и т. д.

Информация, необходимая для руководства военными действиями, относится не только к противнику, но и к собственным войскам. Сведения о противнике поступают:

— в виде сообщений разведчиков;

— в виде координат и скоростей отдельных объектов, измеряемых теми или иными техническими устройствами, например: радиолокационные станции, счетно-решающие машины и т. п.

Сведения о своих войсках поступают в виде системы донесений и оповещают о численности, дислокации, перемещениях и потерях подразделений.

В результате сбора и обработки всех этих данных создается представление об обстановке, на основе которого и принимается соответствующее решение.

Чем сложнее обстановка, чем быстрее меняется и чем больше автоматизировано управление боевыми действиями, тем выше становятся требования к обработке информации. Она должна выполняться быстро и доброкачественно, а для этого она должна быть в максимальной степени автоматизирована.

Здесь мы не будем рассматривать методы сбора и обработки информации о координатах и скоростях объектов (например, воздушных целей); эта задача решается специальными техническими устройствами, включаемыми в управляющую систему. В данном параграфе речь будет идти об обработке «разведывательных данных» в обычном смысле слова, т. е. сообщений, полученных из различных источников:

— о замыслах противника;

— о наличии или отсутствии в заданном районе сил и средств противника;

— об их типе, численности, организации;

— о результатах нанесенных ударов и т. д.

Источниками таких сообщений могут быть:

— специальные самолеты-разведчики;

— аэростаты;

— разведывательные группы и т. д.

Каждый разведчик оснащен какой-либо аппаратурой; чем совершеннее эта аппаратура, тем большего доверия заслуживает его сообщение. Кроме совершенства аппаратуры при обработке информации должно учитываться еще и правдоподобие сообщений. Ниже излагаются основы методики обработки разведывательных данных, учитывающей как ту, так и другую стороны сообщений.

Будем рассматривать разведываемый район или систему объектов как некоторую физическую систему X, которая может находиться в различных состояниях:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_k.$$

Например:

x_1 — противника в районе нет;

x_2 — силы противника в районе есть, но они еще не готовы к бою;

x_3 — силы противника в районе есть и они готовы к бою.

Разведчик (или группа разведчиков) посылается для выяснения того, в каком из возможных состояний находится система X.

Каждый из разведчиков может принести о состоянии системы X какое-то сообщение. Обозначим через $\tilde{x}_1$ сообщение о том, что система находится в состоянии x_1; $\tilde{x}_2$ сообщение о том, что система находится в состоянии x_2 и т. д.

Кроме того, возможен случай, когда разведчик не принесет никакого сообщения. Это мы обозначим символом $\tilde{x}_0$.

Задача обработки разведывательных данных в общем виде ставится так: группа разведчиков приносит о состоянии системы X какую-то совокупность сообщений (в общем случае разноречивых); определить наиболее вероятное состояние системы и распределение вероятностей остальных состояний.

Очевидно, при прочих равных условиях большего доверия заслуживают сообщения, передаваемые:

— бо́льшим числом разведчиков;

— разведчиками с более совершенной аппаратурой.

Кроме того, при обработке разведывательных данных должно приниматься во внимание правдоподобие сообщений, т. е. предварительно оцененные тем или другим способом вероятности состояний $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Обозначим эти вероятности

$$P_0(x_1),\ P_0(x_2),\ \ldots,\ P_0(x_k) \qquad (110.1)$$

и будем их называть предварительными, в отличие от окончательных, которые будут получены в результате разведки. Очевидно, эти окончательные вероятности состояний зависят от того, какую совокупность сообщений принесли разведчики. Обозначим эту совокупность через $\tilde{S}$, а окончательные вероятности состояний, подсчитанные на основе этой совокупности, через

$$P_{\text{р}}(x_1/\tilde{S}); \quad P_{\text{р}}(x_2/\tilde{S}); \ldots; P_{\text{р}}(x_k/\tilde{S}). \tag{110.2}$$

Эти вероятности представляют собой не что иное, как условные вероятности состояний $x_1, \ldots, x_k$, вычисленные при условии, что разведка доставила совокупность сообщений $\tilde{S}$.

В теории вероятностей имеется формула Бейеса, дающая возможность уточнить вероятность любой гипотезы с учетом поступивших новых сведений. Согласно этой формуле вероятность любого состояния x_i после получения совокупности сообщений $\tilde{S}$ будет

$$P_{\text{р}}(x_i/\tilde{S}) =$$

$$= \frac{P_0(x_i)\,P(\tilde{S}/x_i)}{P_0(x_1)\,P(\tilde{S}/x_1) + \ldots + P_0(x_i)\,P(\tilde{S}/x_i) + \ldots + P_0(x_k)P(\tilde{S}/x_k)}, \tag{110.3}$$

где $P(\tilde{S}/x_1)$ — вероятность совокупности сообщений $\tilde{S}$, если система была в состоянии x_1;

$P(\tilde{S}/x_2)$ — вероятность той же совокупности сообщений, если система была в состоянии x_2,

и т. д.

Вероятности $P(\tilde{S}/x_1)$, $P(\tilde{S}/x_2)$, ... могут быть вычислены, если известны характеристики разведчиков. Возникает вопрос: откуда могут быть взяты предварительные вероятности (110.1)? Они могут быть взяты из разных источников, например:

— на основании опыта боевых действий;

— на основании данных предшествующих разведок;

— на основании расчетов по исследованию операций.

Допустим, например, что система X — объект, который предварительно был обстрелян n ракетами, а цель разведки — выяснить, поражен он или нет, т. е. какое из двух состояний:

x_1 — поражен,

x_2 — не поражен,

имеет место. Тогда предварительные вероятности состояний легко вычислить, а именно:

$$P_0(x_1) = 1 - (1-p)^n,$$
$$P_0(x_2) = (1-p)^n,$$

где p — вероятность поражения объекта одной ракетой.

Если у нас нет никаких предварительных соображений, позволяющих считать состояния $x_1, x_2, \ldots, x_k$ неравновероятными, то можно положить предварительные вероятности одинаковыми:

$$P_0(x_1) = P_0(x_2) = \ldots = P_0(x_k) = \frac{1}{k}.$$

Рассмотрим сначала самый простой случай, когда система имеет только два возможных состояния:

$$x_1, \; x_2$$

с предварительными вероятностями

$$P_0(x_1), \; P_0(x_2),$$

и для уточнения состояния системы посылается только один разведчик. Разведчик приносит определенное сообщение: $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ или $\tilde{x}_0$. Требуется найти новые (после разведки) вероятности состояний:

$$P_p(x_1/\tilde{S}), \quad P_p(x_2/\tilde{S}), \tag{110.4}$$

где под $\tilde{S}$ может подразумеваться любое из сообщений $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_0$. Например,

$$P_p(x_1/\tilde{x}_2)$$

есть вероятность того, что система находится в состоянии x_1, если разведчик принес сообщение $\tilde{x}_2$.

Заметим, что если состояний всего два, то достаточно определить только одну из вероятностей (110.4); другая найдется вычитанием ее из единицы.

Чтобы решить поставленную задачу, необходимо ввести характеристики «достоверности» сообщений разведчика. Обозначим через:

$P(\tilde{x}_1/x_1)$ — вероятность того, что разведчик принесет сообщение $\tilde{x}_1$, если система находится в состоянии x_1;

$P(\tilde{x}_2/x_1)$ — вероятность того, что разведчик принесет сообщение $\tilde{x}_2$, если система находится в состоянии x_1;

$P(\tilde{x}_0/x_1)$ — вероятность того, что разведчик не принесет сообщения, если система находится в состоянии x_1.

Очевидно,

$$P(\tilde{x}_1/x_1) + P(\tilde{x}_2/x_1) + P(\tilde{x}_0/x_1) = 1. \tag{110.5}$$

Аналогичные вероятности, но при условии, что система находится в состоянии x_2, обозначим

$$P(\widetilde{x}_1/x_2), \quad P(\widetilde{x}_2/x_2), \quad P(\widetilde{x}_0/x_2),$$

причем

$$P(\widetilde{x}_1/x_2) + P(\widetilde{x}_2/x_2) + P(\widetilde{x}_0/x_2) = 1. \qquad (110.6)$$

Указанные вероятности — правильного сообщения, ошибки и отсутствия сообщения — в общем случае зависят от того, в каком состоянии (x_1 или x_2) находится система. Например: работающую радиостанцию легче обнаружить с самолета, чем выведенную из строя; точно сообщить численность сил и средств труднее, когда их много, и т. д.

Предположим, что разведчик принес сообщение $\widetilde{x}_1$. Какова вероятность того, что это сообщение правильное?

Для ответа на этот вопрос воспользуемся формулой Бейеса (110.3). Согласно этой формуле новая (с учетом разведки) вероятность состояния x_1 будет равна

$$P_p(x_1/\widetilde{x}_1) = \frac{P_0(x_1)\,P(\widetilde{x}_1/x_1)}{P_0(x_1)\,P(\widetilde{x}_1/x_1) + P_0(x_2)\,P(\widetilde{x}_1/x_2)}. \qquad (110.7)$$

Очевидно,

$$P_p(x_2/\widetilde{x}_1) = 1 - P_p(x_1/\widetilde{x}_1). \qquad (110.8)$$

Предположим, что разведчик принес другое сообщение — $\widetilde{x}_2$. Каковы будут вероятности состояний? По той же формуле (110.3)

$$P_p(x_1/\widetilde{x}_2) = \frac{P_0(x_1)\,P(\widetilde{x}_2/x_1)}{P_0(x_1)\,P(\widetilde{x}_2/x_1) + P_0(x_2)\,P(\widetilde{x}_2/x_2)}. \qquad (110.9)$$

Если разведчик не принес сообщения, то

$$P_p(x_1/\widetilde{x}_0) = \frac{P_0(x_1)\,P(\widetilde{x}_0/x_1)}{P_0(x_1)P(\widetilde{x}_0/x_1) + P_0(x_2)\,P(\widetilde{x}_0/x_2)}. \qquad (110.10)$$

Пример 1. Система X может находиться в двух состояниях:

x_1 — противник есть;

x_2 — противника нет.

Предварительные вероятности состояний:

$$P_0(x_1) = 0{,}4, \quad P_0(x_2) = 0{,}6.$$

Качество сообщений самолета-разведчика характеризуется данными:

$$P(\widetilde{x}_1/x_1) = 0{,}9, \; P(\widetilde{x}_2/x_1) = 0{,}05, \quad P(\widetilde{x}_0/x_1) = 0{,}05,$$

$$P(\widetilde{x}_1/x_2) = 0{,}1, \quad P(\widetilde{x}_2/x_2) = 0{,}8, \; P(\widetilde{x}_0/x_2) = 0{,}1.$$

Разведчик принес сообщение $\tilde{x}_1$: противник в районе есть. Найти вероятность того, что это сообщение соответствует действительности.

Решение. По формуле (110.7) имеем:

$$P_{\text{р}}(x_1/\tilde{x}_1) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}9}{0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}1} \approx 0{,}86,$$

т. е. с вероятностью 0,86 можно утверждать, что сообщение $\tilde{x}_1$ истинно, а с вероятностью 0,14 — что оно ложно (несмотря на то, что предварительная вероятность состояния x_2 была больше!).

Пример 2. Те же условия, но предварительные вероятности состояний одинаковы:

$$P_0(x_1) = P_0(x_2) = 0{,}5.$$

Решение.

$$P_{\text{р}}(x_1/\tilde{x}_1) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}9}{0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}1} = 0{,}9.$$

Из сравнения с результатами примера 1 можно сделать вывод, что результат оценки показаний разведчика (при хорошем качестве его аппаратуры) не очень сильно зависит от предварительных вероятностей состояний. Это облегчает задачу и позволяет ограничиться грубой оценкой предварительных вероятностей $P_0(x_1)$, $P_0(x_2)$.

Пример 3. По одиночной цели X производилась стрельба четырьмя ракетами Вероятность поражения цели при стрельбе одной ракетой равна $p=0{,}3$. После стрельбы в район цели посылается разведчик с задачей выяснить, в каком из двух состояний:

x_1 — поражена;

x_2 — не поражена,

находится цель.

Если цель поражена, то она труднее обнаруживается разведчиком и он с большей вероятностью приносит неверные сведения; если она не поражена, разведчик легче обнаруживает ее и точнее определяет ее состояние. Характеристики качества сообщений заданы:

$$P(\tilde{x}_1/x_1) = 0{,}6, \quad P(\tilde{x}_2/x_1) = 0{,}2, \quad P(\tilde{x}_0/x_1) = 0{,}2,$$

$$P(\tilde{x}_1/x_2) = 0{,}08, \quad P(\tilde{x}_2/x_2) = 0{,}9, \quad P(\tilde{x}_0/x_2) = 0{,}02.$$

Эти данные удобно записать в виде матрицы:

Состояние системы	Сообщение		
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_0$
x_1	0,6	0,2	0,2
x_2	0,08	0,9	0,02

Разведчик не принес никакого сообщения о состоянии цели. Определить вероятности состояний x_1 и x_2 с учетом разведки.

Решение. Находим предварительные вероятности состояний:

$$P_0(x_1) = 1 - (1 - 0{,}3)^4 = 0{,}76,$$

$$P_0(x_2) = (1 - 0{,}3)^4 = 0{,}24.$$

По формуле (110.10) найдем

$$P_p(x_1/\tilde{x}_0) = \frac{0{,}76 \cdot 0{,}2}{0{,}76 \cdot 0{,}2 + 0{,}24 \cdot 0{,}02} \approx 0{,}97,$$

т. е., несмотря на то, что разведчик не принес сообщения, вероятность того, что цель поражена, повысилась от 0,76 до 0,97.

Совершенно аналогичным способом по формуле (110.3) может быть решена задача оценки вероятностей состояний системы, если возможных состояний не два, а любое число k.

Пример 4. Посылается разведчик с заданием выяснить состояние системы X, имеющей три возможных состояния x_1, x_2, x_3, которые до разведки равновероятны:

$$P_0(x_1) = P_0(x_2) = P_0(x_3) = 1/3.$$

Вероятности $p(\tilde{x}_j/x_i)$ различных сообщений при разных состояниях системы заданы матрицей:

Состояние системы	Сообщение			
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_0$
x_1	0,8	0,1	0,05	0,05
x_2	0,05	0,9	0,02	0,03
x_3	0,1	0,1	0,7	0,1

Разведчик принес сообщение $\tilde{x}_1$. Найти вероятности того, что:
1) сообщение соответствует истине;
2) сообщение ложно, а система находится в состоянии x_2;
3) сообщение ложно, а система находится в состоянии x_3.

Решение. По формуле (110.3) получаем:

$$1)\ P_p(x_1/\tilde{x}_1) = \frac{1/3P(\tilde{x}_1/x_1)}{1/3P(\tilde{x}_1/x_1) + 1/3P(\tilde{x}_1/x_2) + 1/3P\left(\frac{\tilde{x}_1}{x_3}\right)} =$$

$$= \frac{0{,}8}{0{,}8 + 0{,}05 + 0{,}1} = 0{,}842,$$

$$2)\ P_p(x_2/\tilde{x}_1) = \frac{0{,}05}{0{,}8 + 0{,}05 + 0{,}1} = 0{,}053,$$

$$3)\ P_p(x_3/\tilde{x}_1) = 1 - (0{,}843 + 0{,}052) = 0{,}105.$$

Итак, сообщение x_1 верно с вероятностью около 0,84; с вероятностью около 0,16 оно является ложным, причем при ложности сообщения более вероятно состояние x_3, а менее вероятно состояние x_2.

Выше мы занимались оценкой достоверности сообщения одного разведчика. Перейдем к более сложному случаю, когда для выяснения состояния системы X посылается n разведчиков.

Для простоты снова возьмем случай, когда система имеет всего два возможных состояния x_1 и x_2, предварительные вероятности которых $P_0(x_1)$, $P_0(x_2)$, и, кроме того, предположим, что все разведчики обладают одинаковыми качествами, т. е. вероятности $P(x_j/x_i)$ для них одинаковы и заданы матрицей:

Состояние системы	Сообщение		
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_0$
x_1	$P(\tilde{x}_1/x_1)$	$P(\tilde{x}_3/x_1)$	$P(\tilde{x}_0/x_1)$
x_2	$P(\tilde{x}_1/x_2)$	$P(\tilde{x}_3/x_2)$	$P(\tilde{x}_0/x_2)$

Совокупность сообщений $\tilde{S}$, принесенная разведчиками, состоит в том, что поступило определенное число сообщений каждого типа, т. е. из n разведчиков:

$$\left.\begin{aligned} n_1 &\text{ принесли сообщение } \tilde{x}_1 \\ n_2 &\text{ принесли сообщение } \tilde{x}_2 \\ n-(n_1+n_2) &\text{ принесли сообщение } \tilde{x}_0 \end{aligned}\right\} \tilde{S}$$

Требуется определить окончательные вероятности состояний:

$$P_{\text{р}}(x_1/\tilde{S}); \quad P_{\text{р}}(x_2/\tilde{S}).$$

Для того чтобы воспользоваться формулой (110.3), нужно найти условные вероятности совокупности сообщений $\tilde{S}$ при каждом из этих состояний x_1 и x_2. Обозначим их

$$P(\tilde{S}/x_1), \quad P(\tilde{S}/x_2).$$

Вычислим эти вероятности. Представим событие $\tilde{S}$ (пришла совокупность сообщений $\tilde{S}$) в виде суммы несовместных вариантов, например:

A_1 — разведчики с номерами от 1 до n_1 принесли сообщение $\tilde{x}_1$; разведчики с номерами от n_1+1 до n_1+n_2 — сообщение $\tilde{x}_2$; остальные — сообщение $\tilde{x}_0$;

A_2 — разведчики с номерами от 1 до n_2 принесли сообщение $\tilde{x}_2$; разведчики с номерами от n_2+1 до n_2+n_1 — сообщение $\tilde{x}_1$; остальные — сообщение x_0 и т. д.

Число таких вариантов равно:

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2}, \tag{110.11}$$

а вероятность каждого варианта будет равна

1) при условии, что система находится в состоянии x_1:

$$[P(\tilde{x}_1/x_1)]^{n_1} \cdot [P(\tilde{x}_2/x_1)]^{n_2} \cdot [P(\tilde{x}_0/x_1)]^{n-(n_1+n_2)};$$

2) при условии, что система находится в состоянии x_2,

$$[P(\tilde{x}_1/x_2)]^{n_1} [P(\tilde{x}_2/x_2)]^{n_2} [P(\tilde{x}_0/x_2)]^{n-(n_1+n_2)}.$$

При подстановке в формулу (110.3) множитель (110.11), входящий во все вероятности, сократится; окончательные формулы будут иметь вид

$$P_{\text{р}}(x_1/\tilde{S}) = \frac{[P(\tilde{x}_1/x_1)]^{n_1} [P(\tilde{x}_2/x_1)]^{n_2} [P(\tilde{x}_0/x_1)]^{n-(n_1+n_2)}}{[P(\tilde{x}_1/x_1)]^{n_1} [P(\tilde{x}_2/x_1)]^{n_2} [P(\tilde{x}_0/x_1)]^{n-(n_1+n_2)} + [P(\tilde{x}_1/x_2)]^{n_1} [P(\tilde{x}_2/x_2)]^{n_2} [P(\tilde{x}_0/x_2)]^{n-(n_1+n_2)}},$$

$$P_{\text{р}}(x_2/\tilde{S}) = \frac{[P(\tilde{x}_1/x_1)]^{n_1} [P(\tilde{x}_2/x_1)]^{n_2} [P(\tilde{x}_0/x_1)]^{n-(n_1+n_2)}}{[P(\tilde{x}_1/x_1)]^{n_1} [P(\tilde{x}_2/x_1)]^{n_2} [P(\tilde{x}_0/x_1)]^{n-(n_1+n_2)} + [P(\tilde{x}_1/x_2)]^{n_1} [P(\tilde{x}_2/x_2)]^{n_2} [P(\tilde{x}_0/x_2)]^{n-(n_1+n_2)}}. \tag{110.12}$$

Пример 5. Для выяснения состояния района, в котором предположительно могут находиться войска противника, посылается четыре самолета-разведчика. Возможные состояния системы:

x_1 — противник есть

x_2 — противника нет

имеют предварительные вероятности

$$P_0(x_1) = 0{,}75, \quad P_0(x_2) = 0{,}25.$$

Качества разведчиков одинаковы и характеризуются матрицей

Состояние	Сообщение		
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_0$
x_1	0,7	0,1	0,2
x_2	0,1	0,7	0,2

Из четырех разведчиков два сообщили: «противник есть»; один сообщил: «противника нет», и один не принес никакого сообщения. Найти вероятность того, что противник находится в районе.

Решение. В данном случае сообщение $\widetilde{S}$ состоит в следующем:

—два разведчика принесли сообщение $\widetilde{x_1}$ $(n_1 = 2)$;

—один разведчик принес сообщение $\widetilde{x_2}$ $(n_2 = 1)$;

—один разведчик не принес сообщения, т. е. сообщил $\widetilde{x_0}$ $(n-(n_1 + n_2)=1)$.

По формуле (110.13) имеем

$$P_p(x_1/\widetilde{S}) = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}75 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}25 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2} \approx 0{,}95,$$

т. е., несмотря на противоречивость и недостаточность полученных сведений, пребывание противника в районе установлено с достаточно высокой вероятностью 95%.

Пример 6. Те же условия, но предварительных сведений нет и состояния x_1, x_2 до разведки равновероятны:

$$P_0(x_1) = P_0(x_2) = 0{,}5.$$

Решение.

$$P_p(x_1/\widetilde{S}) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}5 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2} \approx 0{,}88,$$

т. е. снова, несмотря на отсутствие предварительных данных, налицо высокая вероятность пребывания противника в разведанном районе.

Пример 7. Характеристики разведчиков те же, что в примере 5, но все четыре разведчика принесли согласованные показания: «противника в районе нет» $(\widetilde{x_2})$. Предварительных данных не имеется:

$$P_0(x_1) = P_0(x_2) = 0{,}5.$$

Найти вероятность того, что сообщение $\widetilde{x_2}$, подтвержденное четырьмя разведчиками, правильно.

Решение. По формуле (110.13) находим

$$P_p(x_2/\widetilde{S}) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}7^4}{0{,}5 \cdot 0{,}7^4 + 0{,}5 \cdot 0{,}1^4} \approx 0{,}9998 \approx 1,$$

т. е. утверждать отсутствие в районе противника можно практически с полной достоверностью.

До сих пор мы рассматривали только случай, когда характеристики всех разведчиков одинаковы. Рассмотрим более общий случай, когда качество разведчиков и достоверность приносимых ими сведений различны. Здесь мы не будем приводить общих формул (они слишком сложны), а ограничимся рассмотрением двух примеров.

Пример 8. Для выяснения состояния противника послано три разведчика. Один из них, № 1, имеет более совершенную аппаратуру, и для него матрица, характеризующая достоверность сообщений, имеет вид

Состояние	Сообщение		
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_0$
x_1	0,95	0,02	0,03
x_2	0,02	0,95	0,03

(1)

Два других разведчика, № 2 и 3, оборудованы хуже; для них матрица имеет вид

Состояние	Сообщение		
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_0$
x_1	0,7	0,2	0,1
x_2	0,2	0,7	0,1

(2)

Донесения разведчиков противоречат друг другу; разведчик № 1 принес сообщение $\tilde{x}_1$; разведчики № 2 и 3 — сообщение $\tilde{x}_2$. Предварительные (до разведки) вероятности состояний равны

$$P_0(x_1) = 0{,}3, \quad P_0(x_2) = 0{,}7.$$

Определить, какое из сообщений заслуживает большего доверия.

Решение. Сообщение $\tilde{S}$ состоит в следующем:

$$\left.\begin{array}{l}\text{— разведчик № 1 передал сообщение } \tilde{x}_1;\\ \text{— разведчики № 2 и 3 передали сообщение } \tilde{x}_2.\end{array}\right\} \tilde{S}$$

Найдем условные вероятности сообщения $\tilde{S}$ при состояниях x_1 и x_2:

$$P(\tilde{S}/x_1) = 0{,}95 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}0380,$$

$$P(\tilde{S}/x_2) = 0{,}02 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}0098.$$

По формуле Бейеса находим

$$P_p(x_1/\tilde{S}) = \frac{P_0(x_1)\,P(\tilde{S}/x_1)}{P_0(x_1)\,P(\tilde{S}/x_1) + P_0(x_2)\,P(\tilde{S}/x_2)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}0380}{0{,}3 \cdot 0{,}0380 + 0{,}7 \cdot 0{,}0098} \approx 0{,}63,$$

т. е., несмотря на то, что сообщение $\tilde{x}_2$ принесли два разведчика, а $\tilde{x}_1$ — только один, и на то, что до разведки состояние x_2 представлялось более вероятным, все же после разведки более вероятным оказывается состояние x_1.

Пример 9. В условиях примера 8 посылается не три, а пять разведчиков: три разведчика типа 1 [с более совершенной аппаратурой и матрицей (1)] и два разведчика типа 2 [с менее совершенной аппаратурой и матрицей (2)]. Сообщение $\tilde{S}$, переданное группой разведчиков, состоит в следующем:

— два из трех разведчиков типа 1 передали сообщение $\tilde{x}_1$; третий — сообщение $\tilde{x}_2$;

— один из разведчиков типа 2 передал сообщение $\tilde{x}_2$, а другой — сообщение $\tilde{x}_0$ (не принес сведений).

Определить, какое из сообщений является наиболее правдоподобным.

Решение. Находим условные вероятности сообщения $\tilde{S}$ при состояниях x_1 и x_2. Если система находится в состоянии x_1, то вероятность того, что два из трех разведчиков типа 1 передали сообщение $\tilde{x}_1$, а один — сообщение $\tilde{x}_2$, равна

$$3 \cdot 0{,}95^2 \cdot 0{,}02.$$

Вероятность того, что один из разведчиков типа 2 передал сообщение $\tilde{x}_2$, а другой $\tilde{x}_0$, равна

$$2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1.$$

Перемножая эти вероятности, находим

$$P(\tilde{S}/x_1) = 6 \cdot 0{,}95^2 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1,$$

аналогично

$$P(\tilde{S}/x_2) = 6 \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1.$$

По формуле Бейеса

$$P_p(x_1/\tilde{S}) = \frac{6 \cdot 0{,}95^2 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1}{6 \cdot 0{,}95^2 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1} = 0{,}86,$$

т. е. с вероятностью 86% можно утверждать, что правильно сообщение $\tilde{x}_1$.

Таким образом, пользуясь формулами Бейеса, можно оценить вероятность любого состояния системы при любом сообщении $\tilde{S}$, переданном группой разведчиков, какими бы качествами ни обладали отдельные разведчики и какое бы количество совпадающих или противоречивых сообщений не входило в $\tilde{S}$.

В заключение скажем несколько слов о том, как могут быть получены характеристики качества разведчиков: вероятности различных сообщений при заданном состоянии системы. Эти данные могут быть получены из опыта путем сбора статистических материалов по выполнению заданий разведчиками. В отличие от опытов, требующих непосредственного применения боевой техники, такие опыты вполне могут проводиться и в мирное время. Другим способом получения вероятностей $P(\widetilde{x}_j / x_i)$ является теоретический расчет или моделирование действий разведчиков на ЭЦВМ.

Таблица 1

Значения приведенной функции Лапласа $\widehat{\Phi}(x) = \Phi(\rho x)$

x	$\widehat{\Phi}(x)$	Δ	x	$\widehat{\Phi}(x)$	Δ	x	$\widehat{\Phi}(x)$	Δ
0,00	0,0000	54	0,40	0,2127	52	0,80	0,4105	47
0,01	0,0054	54	0,41	0,2179	51	0,81	0,4152	46
0,02	0,0108	53	0,42	0,2230	52	0,82	0,4198	46
0,03	0,0161	54	0,43	0,2282	52	0,83	0,4244	46
0,04	0,0215	54	0,44	0,2334	51	0,84	0,4290	46
0,05	0,0269	54	0,45	0,2385	51	0,85	0,4336	45
0,06	0,0323	54	0,46	0,2436	52	0,86	0,4381	46
0,07	0,0377	53	0,47	0,2488	51	0,87	0,4427	45
0,08	0,0430	54	0,48	0,2539	51	0,88	0,4472	45
0,09	0,0484	54	0,49	0,2590	51	0,89	0,4517	45
0,10	0,0538	53	0,50	0,2641	51	0,90	0,4562	44
0,11	0,0591	54	0,51	0,2692	50	0,91	0,4606	45
0,12	0,0645	54	0,52	0,2742	51	0,92	0,4651	44
0,13	0,0699	53	0,53	0,2793	50	0,93	0,4695	44
0,14	0,0752	54	0,54	0,2843	50	0,94	0,4739	44
0,15	0,0806	53	0,55	0,2893	51	0,95	0,4783	44
0,16	0,0859	54	0,56	0,2944	50	0,96	0,4827	43
0,17	0,0913	53	0,57	0,2994	50	0,97	0,4870	44
0,18	0,0966	54	0,58	0,3044	49	0,98	0,4914	43
0,19	0,1020	53	0,59	0,3093	50	0,99	0,4957	43
0,20	0,1073	53	0,60	0,3143	49	1,00	0,5000	43
0,21	0,1126	54	0,61	0,3192	50	1,01	0,5043	42
0,22	0,1180	53	0,62	0,3242	49	1,02	0,5085	43
0,23	0,1233	53	0,63	0,3291	49	1,03	0,5128	42
0,24	0,1286	53	0,64	0,3340	49	1,04	0,5170	42
0,25	0,1339	53	0,65	0,3389	49	1,05	0,5212	42
0,26	0,1392	53	0,66	0,3438	49	1,06	0,5254	41
0,27	0,1445	53	0,67	0,3487	48	1,07	0,5295	42
0,28	0,1498	53	0,68	0,3535	49	1,08	0,5337	41
0,29	0,1551	53	0,69	0,3584	48	1,09	0,5378	41
0,30	0,1604	52	0,70	0,3632	48	1,10	0,5419	41
0,31	0,1656	53	0,71	0,3680	48	1,11	0,5460	40
0,32	0,1709	52	0,72	0,3728	48	1,12	0,5500	40
0,33	0,1761	53	0,73	0,3776	47	1,13	0,5540	40
0,34	0,1814	52	0,74	0,3823	47	1,14	0,5580	40
0,35	0,1866	52	0,75	0,3870	48	1,15	0,5620	40
0,36	0,1918	53	0,76	0,3918	47	1,16	0,5660	40
0,37	0,1971	52	0,77	0,3965	47	1,17	0,5700	39
0,38	0,2023	52	0,78	0,4012	47	1,18	0,5739	39
0,39	0,2075	52	0,79	0,4059	46	1,19	0,5778	39
0,40	0,2127		0,80	0,4105		1,20	0,5817	

x	$\widehat{\Phi}(x)$	Δ	x	$\widehat{\Phi}(x)$	Δ	x	$\widehat{\Phi}(x)$	Δ
1,20	0,5817	39	1,60	0,7195	30	2,00	0,8227	21
1,21	0,5856	38	1,61	0,7225	30	2,01	0,8248	21
1,22	0,5894	38	1,62	0,7255	29	2,02	0,8269	22
1,23	0,5932	38	1,63	0,7284	29	2,03	0,8291	21
1,24	0,5970	38	1,64	0,7313	29	2,04	0,8312	20
1,25	0,6008	38	1,65	0,7342	29	2,05	0,8332	21
1,26	0,6046	37	1,66	0,7371	29	2,06	0,8353	20
1,27	0,6083	37	1,67	0,7400	29	2,07	0,8373	21
1,28	0,6120	37	1,68	0,7429	28	2,08	0,8394	20
1,29	0,6157	37	1,69	0,7457	28	2,09	0,8414	20
1,30	0,6194	37	1,70	0,7485	27	2,10	0,8434	19
1,31	0,6231	36	1,71	0,7512	28	2,11	0,8453	20
1,32	0,6267	36	1,72	0,7540	27	2,12	0,8473	19
1,33	0,6303	36	1,73	0,7567	27	2,13	0,8492	19
1,34	0,6339	36	1,74	0,7594	27	2,14	0,8511	19
1,35	0,6375	35	1,75	0,7621	27	2,15	0,8530	19
1,36	0,6410	35	1,76	0,7648	27	2,16	0,8549	18
1,37	0,6445	35	1,77	0,7675	26	2,17	0,8567	18
1,38	0,6480	35	1,78	0,7701	26	2,18	0,8585	19
1,39	0,6515	35	1,79	0,7727	26	2,19	0,8604	18
1,40	0,6550	34	1,80	0,7753	26	2,20	0,8622	17
1,41	0,6584	34	1,81	0,7779	25	2,21	0,8639	18
1,42	0,6618	34	1,82	0,7804	25	2,22	0,8657	18
1,43	0,6652	34	1,83	0,7829	25	2,23	0,8675	17
1,44	0,6686	33	1,84	0,7854	25	2,24	0,8692	17
1,45	0,6719	34	1,85	0,7879	25	2,25	0,8709	16
1,46	0,6753	33	1,86	0,7904	24	2,26	0,8725	17
1,47	0,6786	33	1,87	0,7928	24	2,27	0,8742	17
1,48	0,6819	32	1,88	0,7952	24	2,28	0,8759	17
1,49	0,6851	32	1,89	0,7976	24	2,29	0,8776	16
1,50	0,6883	32	1,90	0,8000	24	2,30	0,8792	16
1,51	0,6915	32	1,91	0,8024	23	2,31	0,8808	16
1,52	0,6947	32	1,92	0,8047	23	2,32	0,8824	16
1,53	0,6979	32	1,93	0,8070	23	2,33	0,8840	15
1,54	0,7011	31	1,94	0,8093	23	2,34	0,8855	16
1,55	0,7042	31	1,95	0,8116	22	2,35	0,8871	15
1,56	0,7073	31	1,96	0,8138	23	2,36	0,8886	15
1,57	0,7104	30	1,97	0,8161	22	2,37	0,8901	15
1,58	0,7134	31	1,98	0,8183	22	2,38	0,8916	14
1,59	0,7165	30	1,99	0,8205	22	2,39	0,8930	15
1,60	0,7195		2,00	0,8227		2,40	0,8945	

x	$\widehat{\ }(x)$	Δ	x	$\widehat{\Phi}(x)$	Δ	x	$\widehat{\Phi}(x)$	Δ
2,40	0,8945	15	2,80	0,9410	9	3,20	0,9691	5
2,41	0,8960	14	2,81	0,9419	9	3,21	0,9696	5
2,42	0,8974	14	2,82	0,9428	9	3,22	0,9701	5
2,43	0,8988	14	2,83	0,9437	9	3,23	0,9706	5
2,44	0,9002	14	2,84	0,9446	8	3,24	0,9711	5
2,45	0,9016	13	2,85	0,9454	9	3,25	0,9716	5
2,46	0,9029	14	2,86	0,9463	8	3,26	0,9721	5
2,47	0,9043	13	2,87	0,9471	8	3,27	0,9726	5
2,48	0,9056	13	2,88	0,9479	8	3,28	0,9731	4
2,49	0,9069	13	2,89	0,9487	8	3,29	0,9735	5
2,50	0,9082	13	2,90	0,9495	8	3,30	0,9740	4
2,51	0,9095	13	2,91	0,9503	8	3,31	0,9744	5
2,52	0,9108	13	2,92	0,9511	8	3,32	0,9749	4
2,53	0,9121	12	2,93	0,9519	7	3,33	0,9753	4
2,54	0,9133	13	2,94	0,9526	8	3,34	0,9757	4
2,55	0,9146	12	2,95	0,9534	7	3,35	0,9761	5
2,56	0,9158	12	2,96	0,9541	7	3,36	0,9766	4
2,57	0,9170	12	2,97	0,9548	8	3,37	0,9770	4
2,58	0,9182	11	2,98	0,9556	7	3,38	0,9774	4
2,59	0,9193	12	2,99	0,9563	7	3,39	0,9778	4
2,60	0,9205	12	3,00	0,9570	7	3,40	0,9782	36
2,61	0,9217	11	3,01	0,9577	7	3,50	0,9818	30
2,62	0,9228	11	3,02	0,9584	6	3,60	0,9848	26
2,63	0,9239	11	3,03	0,9590	7	3,70	0,9874	22
2,64	0,9250	11	3,04	0,9597	6	3,80	0,9896	19
2,65	0,9261	11	3,05	0,9603	7	3,90	0,9915	15
2,66	0,9272	11	3,06	0,9610	6	4,00	0,9930	13
2,67	0,9283	10	3,07	0,9616	6	4,10	0,9943	11
2,68	0,9293	11	3,08	0,9622	7	4,20	0,9954	9
2,69	0,9304	10	3,09	0,9629	6	4,30	0,9963	7
2,70	0,9314	10	3,10	0,9635	6	4,40	0,9970	6
2,71	0,9324	10	3,11	0,9641	6	4,50	0,9976	5
2,72	0,9334	10	3,12	0,9647	5	4,60	0,9981	4
2,73	0,9344	10	3,13	0,9652	6	4,70	0,9985	3
2,74	0,9354	10	3,14	0,9658	6	4,80	0,9988	3
2,75	0,9364	9	3,15	0,9664	5	4,90	0,9991	2
2,76	0,9373	10	3,16	0,9669	6	5,00	0,9993	1
2,77	0,9383	9	3,17	0,9675	5	5,10	0,9994	2
2,78	0,9392	9	3,18	0,9680	6	5,20	0,9996	1
2,79	0,9401	9	3,19	0,9686	5	5,30	0,9997	0
2,80	0,9410		3,20	0,9691		5,40	0,9997	

Таблица 2

Значения функции $P(a, R)$ — вероятности попадания в круг радиуса R при смещении центра рассеивания на величину a ($E_x = E_y = 1$)

R	a								
	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0,1	0,0022	0,0021	0,0018	0,0014	0,0009	0,0005	0,0003	0,0001	0,0000
0,2	0,0090	0,0086	0,0072	0,0055	0,0037	0,0022	0,0012	0,0006	0,0002
0,3	0,020	0,019	0,016	0,012	0,0082	0,0050	0,0027	0,0013	0,0006
0,4	36	34	28	22	0,015	0,0088	0,0048	0,0023	0,0010
0,5	55	52	44	34	23	0,014	0,0076	0,0037	0,0016
0,6	79	74	63	48	33	20	0,011	0,0054	0,0024
0,7	0,105	0,100	0,085	65	45	27	15	0,0075	0,0034
0,8	135	128	0,110	0,084	58	36	20	0,010	0,0046
0,9	168	160	137	0,106	73	46	26	13	0,0061
1,0	0,204	0,193	0,166	0,129	0,090	0,057	0,033	0,017	0,0078
1,1	241	229	197	154	0,109	70	40	21	0,0099
1,2	279	266	230	181	129	83	49	26	0,012
1,3	319	304	265	210	151	0,098	58	31	15
1,4	360	344	300	239	174	0,115	69	38	19
1,5	401	384	335	270	198	133	81	45	23
1,6	441	423	373	302	224	152	0,094	53	27
1,7	482	463	410	335	251	172	0,108	62	32
1,8	521	502	447	368	279	194	124	72	38
1,9	560	540	483	401	307	217	141	83	45
2,0	0,597	0,577	0,519	0,434	0,337	0,241	0,158	0,096	0,052
2,1	633	612	554	468	367	266	178	0,109	61
2,2	667	647	588	501	397	292	198	123	70
2,3	700	679	621	533	428	319	220	139	81
2,4	730	711	653	565	459	346	242	156	92
2,5	759	739	683	596	490	375	266	174	0,105
2,6	785	766	712	627	520	403	291	194	118
2,7	809	792	739	656	550	432	317	214	133
2,8	832	815	765	684	580	462	343	236	150
2,9	852	836	788	711	609	491	370	259	167
3,0	0,871	0,856	0,811	0,734	0,638	0,520	0,398	0,283	0,185
3,1	888	873	831	761	665	549	426	307	205
3,2	903	889	850	784	691	578	454	333	226
3,3	916	904	867	805	717	606	483	359	247
3,4	928	917	883	825	741	633	512	386	270
3,5	938	928	898	844	764	660	540	414	294
3,6	947	938	911	861	786	686	568	441	319
3,7	955	947	922	876	806	711	596	469	344
3,8	962	955	933	891	826	735	623	497	370
3,9	968	962	942	904	844	758	649	525	397
4,0	0,974	0,968	0,951	0,916	0,860	0,780	0,675	0,554	0,424

p	n							
	2	3	4	5	6	7	8	9
0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,002	4	6	8	0,010	0,012	0,014	0,016	0,018
0,003	6	9	0,012	15	18	21	24	27
0,004	8	0,012	16	20	24	28	32	36
0,005	0,010	15	20	25	30	34	39	44
0,006	12	18	24	30	36	41	47	53
0,007	14	21	28	34	41	48	55	61
0,008	16	24	32	39	47	55	62	70
0,009	18	27	36	44	53	61	70	78
0,01	20	30	39	49	58	68	77	86
0,02	40	59	78	96	0,114	0,132	0,149	0,166
0,03	59	87	0,115	0,141	167	192	216	240
0,04	78	0,115	151	185	217	249	279	307
0,05	97	143	185	226	265	302	337	370
0,06	0,116	169	219	266	310	352	390	427
0,07	135	196	252	304	353	398	440	480
0,08	154	221	284	341	394	442	486	528
0,09	172	246	314	376	432	483	530	572
0,10	190	271	344	410	469	522	570	613
0,11	208	295	373	442	503	558	606	650
0,12	226	319	400	472	536	591	640	684
0,13	243	342	427	502	566	623	672	714
0,14	260	364	453	530	595	652	701	743
0,15	278	386	478	556	623	679	728	769
0,16	295	407	502	582	649	705	752	792
0,17	311	428	525	606	673	729	775	813
0,18	328	449	548	629	696	751	796	832
0,19	344	469	570	651	718	771	815	850
0,20	360	488	590	672	738	790	832	866
0,21	376	507	610	692	757	808	848	880
0,22	392	525	630	711	775	824	863	893
0,23	407	543	648	729	792	840	876	905
0,24	422	561	666	746	807	854	889	915
0,25	438	578	684	763	822	867	900	925
0,26	453	595	700	778	836	878	910	933
0,27	467	611	716	793	849	890	919	941
0,28	482	627	731	807	861	900	928	948
0,29	496	642	746	820	872	909	935	954
0,30	510	657	710	832	882	918	942	960
0,30	0,510	0,657	0,760	0,832	0,882	0,918	0,942	0,960
0,31	524	671	773	844	892	926	949	965
0,32	538	686	786	855	901	933	954	969

Таблица

$W = 1 - (1 - p)^n$

n: 10	12	14	16	18	20	25	30	35	40	45	50
0,010	0,012	0,014	0,016	0,018	0,020	0,025	0,030	0,034	0,039	0,044	0,049
0,020	0,024	0,028	0,032	0,036	0,040	0,049	0,059	0,068	0,077	0,086	0,096
30	35	41	47	53	58	72	86	0,100	0,113	0,127	0,140
39	47	55	62	70	77	96	0,114	131	148	165	182
49	58	68	77	86	95	0,118	140	161	182	202	222
58	70	81	92	0,103	0,114	140	166	190	214	238	260
68	81	94	0,106	119	131	161	190	218	245	271	296
77	92	0,106	120	134	148	182	214	245	274	303	330
86	0,103	119	134	150	165	202	238	271	304	334	364
96	114	131	148	165	182	222	260	296	331	364	395
0,183	215	246	276	305	332	397	455	507	554	597	636
263	306	347	386	422	456	533	599	656	704	746	782
335	387	435	480	520	558	640	706	760	804	841	870
401	460	512	560	603	642	723	785	834	871	901	923
461	524	579	628	672	710	787	844	885	916	938	955
516	581	638	687	729	766	837	887	921	945	962	973
566	632	689	737	777	811	876	918	946	964	977	988
611	678	733	779	817	848	905	941	963	977	986	991
651	718	771	815	850	878	928	958	975	985	991	996
688	753	804	845	877	903	946	970	983	991	995	997
722	784	833	871	900	922	959	978	989	994	997	998
752	812	858	892	918	938	969	985	992	996	998	999
779	836	879	910	934	951	977	989	995	998	999	999
803	858	897	926	946	961	983	992	997	998	999	1,000
825	877	913	939	957	969	987	995	998	999	1,000	
845	893	926	949	966	976	991	996	999	999	1,000	
863	908	938	958	972	981	993	997	999	1,000		
879	920	948	966	977	985	995	998	999	1,000		
893	931	956	972	982	988	996	999	1,000			
905	941	963	977	986	991	997	999	1,000			
917	949	969	982	989	993	998	999	1,000			
927	957	974	985	991	995	999	1,000				
936	963	979	988	993	996	999	1,000				
944	968	982	990	994	997	999	1,000				
951	973	985	992	996	998	999	1,000				
957	977	988	994	997	998	1,000					
963	981	990	995	997	999	1,000					
968	984	992	996	998	999	1,000					
972	986	993	997	998	999	1,000					
0,972	0,986	0,993	0,997	0,998	0,999	1,000					
976	988	994	997	999	999	1,000					
979	990	995	998	999	1,000						

p	n							
	2	3	4	5	6	7	8	9
0,33	551	699	798	865	910	939	959	973
0,34	564	712	810	875	917	945	964	976
0,35	578	725	821	884	925	951	968	979
0,36	591	738	832	893	931	956	972	982
0,37	603	750	842	901	937	961	975	985
0,38	616	762	852	908	943	965	978	986
0,39	628	773	862	916	948	969	981	988
0,40	640	784	870	922	953	972	983	990
0,41	652	795	879	929	958	975	985	991
0,42	664	805	887	934	962	978	987	993
0,43	675	815	894	940	966	980	989	994
0,44	686	824	902	945	969	983	990	995
0,45	697	834	908	950	972	985	992	995
0,46	708	843	915	954	975	987	993	996
0,47	719	851	921	958	978	988	994	997
0,48	730	859	927	962	980	990	995	997
0,49	740	867	932	966	982	991	995	998
0,50	750	875	938	969	984	992	996	998
0,52	770	889	947	975	988	994	997	999
0,54	788	903	955	979	991	996	998	999
0,56	806	915	963	984	993	997	999	999
0,58	824	926	969	987	995	998	999	1,000
0,60	840	936	974	990	996	998	999	1,000
0,62	856	945	979	992	997	999	1,000	
0,64	870	953	983	994	998	999	1,000	
0,66	884	961	987	995	998	999	1,000	
0,68	898	967	990	997	999	1,000		
0,70	910	973	992	998	999	1,000		
0,72	922	978	994	998	1,000			
0,74	932	982	995	999	1,000			
0,76	942	986	997	999	1,000			
0,78	952	989	998	999	1,000			
0,80	960	992	998	1,000				
0,82	968	994	999	1,000				
0,84	974	996	999	1,000				
0,86	980	997	1,000					
0,88	986	998	1,000					
0,90	990	999	1,000					
0,95	998	1,000						
1,00	1,000							

n											
10	12	14	16	18	20	25	30	35	40	45	50
982	992	996	998	999	1,000						
984	993	997	999	999	1,000						
986	994	998	999	1,000							
988	995	998	999	1,000							
990	996	998	999	1,000							
992	997	999	1,000								
993	997	999	1,000								
994	998	999	1,000								
995	998	999	1,000								
996	999	1,000									
996	999	1,000									
997	999	1,000									
997	999	1,000									
998	999	1,000									
998	1,000										
999	1,000										
999	1,000										
999	1,000										
999	1,000										
1,000											
1,000											

Таблица 4

Значения коэффициента k для вычисления вероятности поражения цели при зависимых выстрелах

M	μ									
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
0,02	1,00	1,00	0,99	0,99	0,98	0,96	0,94	0,91	0,87	0,82
0,04	1,00	0,99	0,99	0,98	0,96	0,93	0,90	0,86	0,83	0,78
0,06	0,99	0,99	0,98	0,96	0,94	0,91	0,87	0,84	0,79	0,75
0,08	0,98	0,97	0,96	0,94	0,91	0,87	0,84	0,80	0,76	0,72
0,10	0,98	0,97	0,95	0,92	0,89	0,85	0,81	0,77	0,73	0,69
0,20	0,97	0,95	0,93	0,90	0,87	0,82	0,77	0,71	0,65	0,58
0,40	0,95	0,93	0,90	0,87	0,83	0,78	0,72	0,64	0,54	0,43
0,60	0,93	0,91	0,88	0,85	0,80	0,75	0,68	0,59	0,49	0,35
0,80	0,92	0,90	0,87	0,83	0,78	0,74	0,66	0,58	0,47	0,34
1,00	0,91	0,88	0,85	0,81	0,77	0,72	0,65	0,57	0,46	0,32
1,50	0,89	0,86	0,83	0,79	0,74	0,69	0,63	0,55	0,45	0,32
2,00	0,88	0,85	0,82	0,78	0,73	0,68	0,62	0,54	0,45	0,32
2,50	0,88	0,85	0,82	0,78	0,73	0,68	0,62	0,55	0,45	0,32
3,00	0,88	0,86	0,82	0,78	0,74	0,69	0,62	0,56	0,46	0,33
4,00	0,90	0,87	0,84	0,80	0,76	0,71	0,64	0,57	0,47	0,34
5,00	0,92	0,89	0,86	0,82	0,78	0,73	0,67	0,59	0,49	0,36
6,00	0,93	0,91	0,88	0,84	0,80	0,75	0,69	0,61	0,51	0,37
7,00	0,94	0,92	0,89	0,86	0,82	0,77	0,71	0,63	0,53	0,38
8,00	0,95	0,93	0,90	0,87	0,83	0,78	0,72	0,64	0,54	0,39
9,00	0,96	0,94	0,91	0,88	0,84	0,80	0,74	0,66	0,56	0,41
10,00	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,67	0,57	0,42

Таблица 5

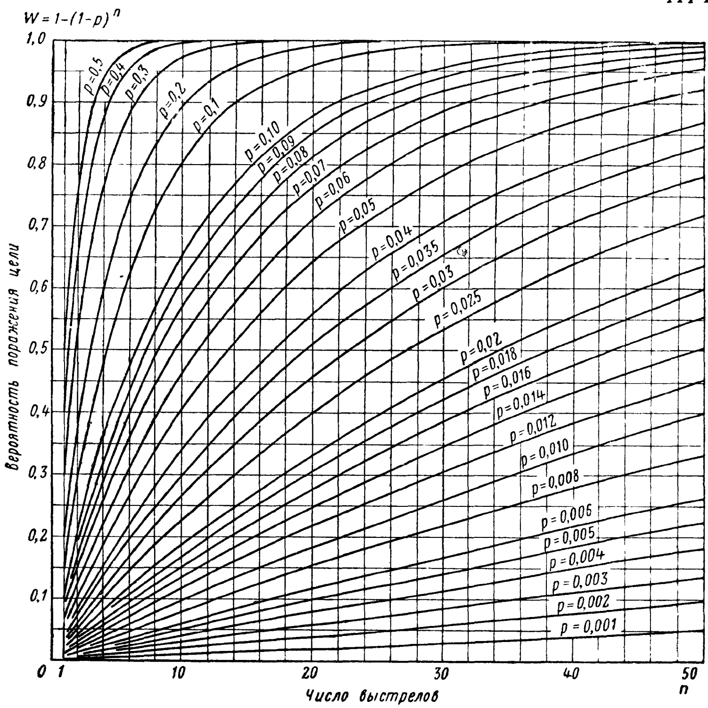
Число выстрелов n, гарантирующее с вероятностью P поражение не менее 30% площади цели

M	C	Гарантийная вероятность P				
		0,60	0,70	0,80	0,90	0,95
0,20	0,04	2	2	2	2	2
	0,08	2	3	4	4	6
	0,12	3	3	4	6	9
	0,16	3	4	5	9	12
	0,20	3	4	6	10	15
0,24	0,08	2	2	3	3	4
	0,12	2	3	3	4	6
	0,16	2	3	4	6	8
	0,20	2	3	4	7	10
	0,24	2	3	5	8	12
0,28	0,08	2	2	2	2	2
	0,12	2	2	2	3	4
	0,16	2	2	3	4	5
	0,20	2	2	3	5	7
	0,24	2	3	4	6	8
	0,28	2	3	4	7	10
0,30	0,10	2	2	2	2	2
	0,12	2	2	2	3	3
	0,16	2	2	3	3	4
	0,20	2	2	3	4	6
	0,24	2	2	3	5	7
	0,28	2	3	4	6	8
	0,30	2	3	4	6	9
0,32	0,12	1	2	2	2	2
	0,16	2	2	2	3	4
	0,20	2	2	3	4	5
	0,24	2	2	3	4	6
	0,28	2	2	3	5	7
	0,32	2	2	4	6	8
0,36	0,14	1	1	2	2	2
	0,16	1	2	2	2	2
	0,20	1	2	2	3	3
	0,24	2	2	2	3	4
	0,28	2	2	3	4	5
	0,32	2	2	3	4	6
	0,36	2	2	3	5	7
0,40	0,16	1	1	1	1	1
	0,20	1	1	2	2	2
	0,24	1	2	2	2	3
	0,28	1	2	2	3	4
	0,32	1	2	2	3	5
	0,36	1	2	3	4	5
	0,40	2	2	3	4	6

Таблица 6

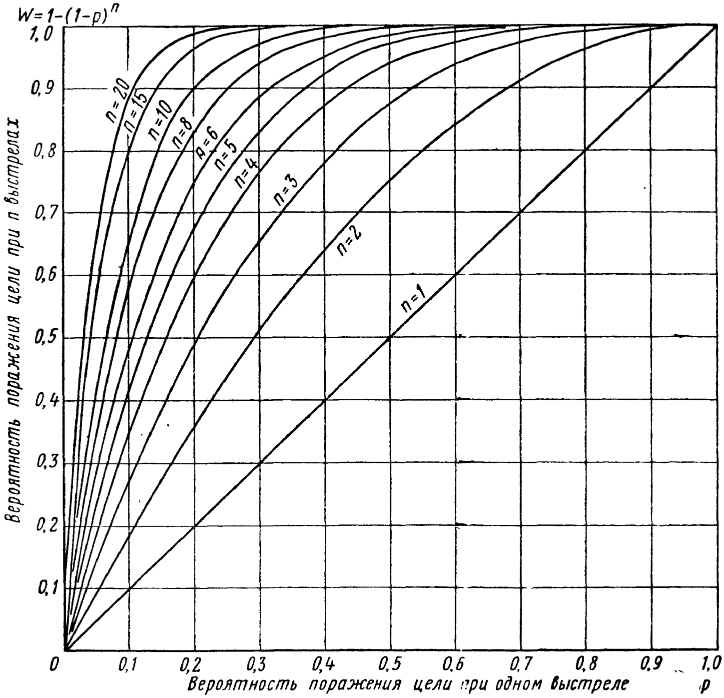
Число выстрелов *n*, гарантирующее с вероятностью *P* поражение не менее 70% площади цели

M	*C*	Гарантийная вероятность *P* 0,60	0,70	0,80	0,90	0,95
0,20	0,04	6	6	6	6	6
	0,08	7	8	9	11	13
	0,12	7	8	11	14	18
	0,16	7	9	12	17	22
	0,20	8	10	13	20	27
0,24	0,08	5	6	6	7	8
	0,12	6	6	8	10	12
	0,16	6	7	9	12	15
	0,20	6	8	10	14	18
	0,24	6	8	11	16	21
0,28	0,08	4	4	4	5	5
	0,12	5	5	6	7	8
	0,16	5	6	7	9	11
	0,20	5	6	7	10	13
	0,24	5	6	8	12	15
	0,28	5	7	9	13	17
0,30	0,10	4	4	5	5	5
	0,12	4	5	5	6	7
	0,16	4	5	6	7	9
	0,20	5	5	7	9	11
	0,24	5	6	7	10	13
	0,28	5	6	8	11	15
	0,30	5	6	8	12	16
0,32	0,12	4	4	4	5	5
	0,16	4	5	5	6	7
	0,20	4	5	6	8	9
	0,24	4	5	6	9	11
	0,28	4	5	7	10	13
	0,32	4	6	7	11	14
0,36	0,14	3	3	4	4	4
	0,16	3	4	4	5	5
	0,20	4	4	5	6	7
	0,24	4	4	5	7	8
	0,28	4	4	6	7	9
	0,32	4	5	6	8	11
	0,36	4	5	6	9	12
0,40	0,16	3	3	3	3	3
	0,20	3	3	4	4	5
	0,24	3	4	4	5	6
	0,28	3	4	5	6	7
	0,32	3	4	5	6	8
	0,36	3	4	5	7	9
	0,40	3	4	5	8	10



W = 1-(1-p)^n
Вероятность поражения цели
Число выстрелов
n
p=0,5
p=0,4
p=0,3
p=0,2
p=0,1
p=0,10
p=0,09
p=0,08
p=0,07
p=0,06
p=0,05
p=0,04
p=0,035
p=0,03
p=0,025
p=0,02
p=0,018
p=0,016
p=0,014
p=0,012
p=0,010
p=0,008
p=0,006
p=0,005
p=0,004
p=0,003
p=0,002
p=0,001

Рис. 1.



W=1-(1-p)^n
Вероятность поражения цели при n выстрелах
Вероятность поражения цели при одном выстреле
p
n=20
n=15
n=10
n=8
n=6
n=5
n=4
n=3
n=2
n=1

Рис. 2.

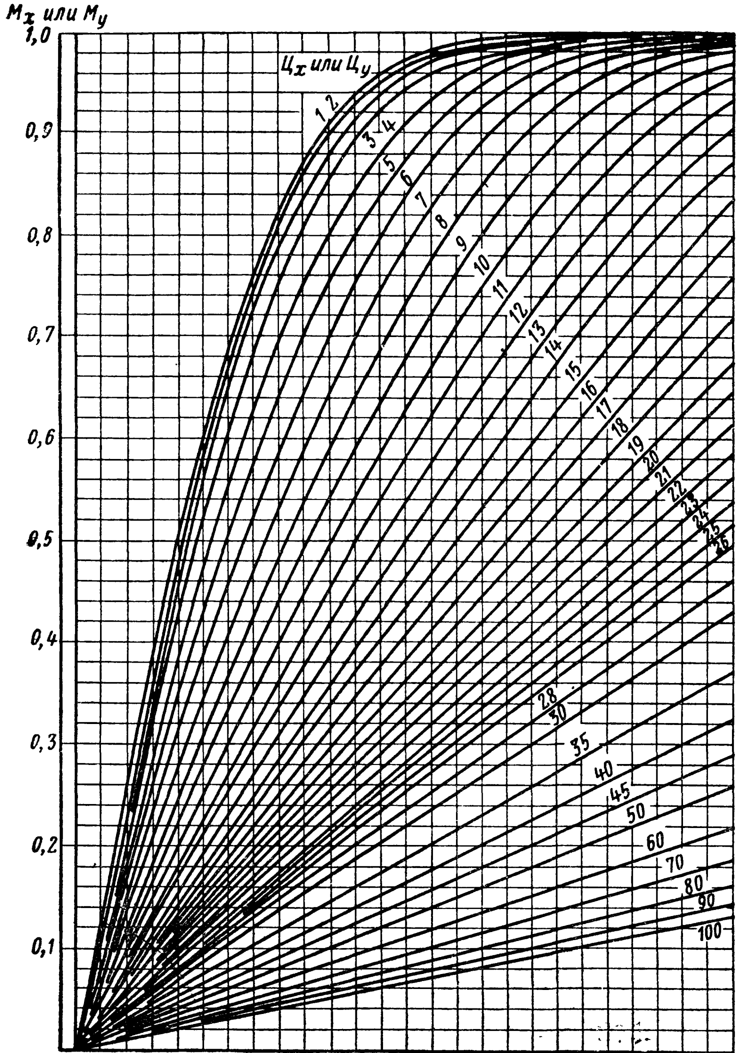


Рис. 3. Зависимость средней доли накрытия M_x (M_y) от размеров зоны поражения L_x (L_y) и размеров цели $Ц_x$ ($Ц_y$).

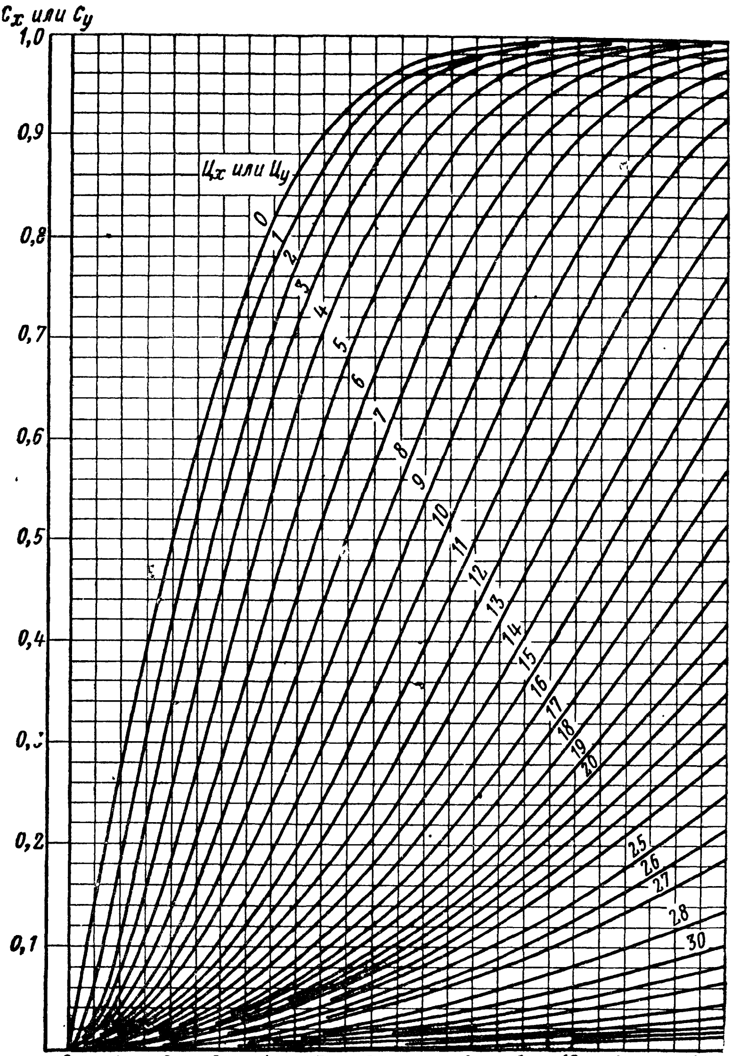


Рис. 4. Зависимость среднего квадрата доли накрытия C_x (C_y) от размеров зоны поражения L_x (L_y) и размеров цели $Ц_x$ ($Ц_y$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Морз Ф. М., Кимбелл Д. К. Методы исследования операций. Изд-во «Советское радио», 1956.

2. Гуд Г. Х., Макол Р. Э. Системотехника, введение в проектирование больших систем. Изд-во «Советское радио», 1962.

3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, 1962.

4. Вильямс Дж. Д. Совершенный стратег или букварь по теории стратегических игр. Изд-во «Советское радио», 1960.

5. Ромакин М. И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. Изд-во «Высшая школа», 1963.

6. Дж. Мак-Кинси. Введение в теорию игр. Физматгиз, 1960.

7. Р. Д. Льюс, Х. Райфа. Игры и решения. Изд-во иностранной литературы, 1961.

8. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. Физматгиз, 1960.

9. Беллман Р. Динамическое программирование. Изд-во иностранной литературы, 1960.

10. Розенберг В. Я., Прохоров А. И. Что такое теория массового обслуживания. Изд-во «Советское радио», 1962.

11. Применение теории игр в военном деле. Сборник переводов под ред. В. О. Ашкеназы. Изд-во «Советское радио», 1961.

12. Дрешер М. Стратегические игры. Теория и применение. Пер. с англ. под ред. и с дополнением Ю. С. Голубева-Новожилова. Изд-во «Советское радио», 1964.

СОДЕРЖАНИЕ

Елена Сергеевна ВЕНТЦЕЛЬ

Введение в исследование операций

Редактор *Н. Я. Гутчина*. Техн. редактор *В. В. Беляева*

Обложка художника *В. И. Шаповалова*

Сдано в набор 19/XI 1963 г. Подписано в печать 23/V 1964 г. Формат $60 \times 90^1/_{16}$.
Уч.-изд. л. 25,28. Г-14610. Объем 24,25 п. л. Тираж 11 600 экз.
Зак. 3/883. Цена в пер. № 7 — 1 р. 46 к., в пер. № 5 — 1 р. 36 к. Темплан 1964 г. № 1.

Ленинградская типография № 15 Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по печати
Ленинград, ул. Салтыкова-Щедрина, 54

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
62	2-я сверху	в одни цели	в одни цель
80	20-я сверху	см. § 25	см. § 26
82	10-я снизу	$2bx = 15$ *м*, $2by = 2$ *м*	$2b_x = 15$ *м*, $2b_y = 2$ *м*
103	19-я снизу	**Решение.** Составляем...	**Решение.** $M = 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}6 = 1{,}5$. Составляем ...
121	18-я снизу	$F_x(u_x) = P(U < u_x)$.	$F_x(u_x) = P(U_x < u_x)$.
139	20-я снизу	$p \approx 0{,}211$	$P \approx 0{,}211$
166	18-я снизу	с вероятностью 0,35	с вероятностью 0,45
166	12-я снизу	Имеем: $P(H_1) = 0{,}35$	Имеем: $P(H_1) = 0{,}45$
181	уравнение (60.6)	$\frac{d\mu_1}{dt} = -u_2\mu_1$ $\frac{d\mu_2}{dt} = -u_1\mu_2$	$\frac{d\mu_1}{dt} = -u_2\mu_2$ $\frac{d\mu_2}{dt} = -u_1\mu_1$
264	Табл., колонка 5-я слева, строка 3-я снизу	1/2*	0
265	5-я сверху	$S_к^* = \begin{pmatrix} С_1 & С_2 \\ 3\ 8 & 5\ 8 \end{pmatrix}$	$S_к^* = \begin{pmatrix} К_1 & К_2 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$

Зак. 3/883.

Сетка рассеивания по нормальному закону

Числа в квадратах дают вероятности в сороковых долях процента

4,0E 3,6E 3,2E 2,8E 2,4E 2,0E 1,6E 1,2E 0,8E 0,4E 0 0,4E 0,8E 1,2E 1,6E 2,0E 2,4E 2,8E 3,2E 3,6E 4,0E

	2	5	7	9	12	15	20	26	32	39	47	55	64	73	81	89	96	101	105	106	106	105	101	96	89	81	73	64	55	47	39	32	26	20	15	12	9	7	5	2	
2						0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0						2
5						1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1						5
7						0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0						7
9						0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0						9
12						0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0						12
15	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	15
20	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	20
26	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	26
32	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	32
39	0	0	1	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	5	5	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	1	0	0	39
47	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	47
55	1	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	6	5	5	5	4	4	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	1	55
64	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	3	5	6	6	6	7	7	7	7	6	6	6	5	5	4	4	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	64
73	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	6	6	6	7	7	8	8	8	8	7	7	6	6	6	5	4	4	3	2	2	2	1	1	0	0	0	0	73
81	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9	9	8	8	7	7	6	5	5	4	3	3	2	2	1	1	1	1	0	0	81
89	0	1	0	1	1	1	2	2	3	3	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	9	9	8	8	7	6	6	5	4	3	3	2	2	1	1	1	0	1	0	89
96	1	0	1	1	1	1	2	2	3	4	5	5	6	7	8	8	10	10	10	10	10	10	10	10	8	8	7	5	5	5	4	3	2	2	1	2	1	1	0	1	96
101	0	1	0	1	1	2	2	2	3	4	5	6	6	7	8	9	10	10	11	11	11	11	10	10	9	8	7	6	6	5	4	3	2	2	2	1	1	0	1	0	101
105	0	0	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6	7	8	9	9	10	11	11	11	11	11	11	10	9	9	8	7	6	5	4	3	3	2	2	2	1	1	0	0	105
106	1	1	1	2	2	2	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	10	11	11	12	12	11	11	10	10	9	8	7	6	5	5	4	3	2	2	2	2	1	1	1	106
106	1	1	1	2	2	2	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	10	11	11	12	12	11	11	10	10	9	8	7	6	5	5	4	3	2	2	2	2	1	1	1	106
105	0	0	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6	7	8	9	9	10	11	11	11	11	11	11	10	9	9	8	7	6	5	4	3	3	2	2	2	1	1	0	0	105
101	0	1	0	1	1	2	2	2	3	4	5	6	6	7	8	9	10	10	11	11	11	11	10	10	9	8	7	6	6	6	4	3	2	2	2	1	1	0	1	0	101
96	1	0	1	1	1	1	2	2	3	4	5	5	6	7	8	8	10	10	10	10	10	10	10	10	8	8	7	6	5	5	4	3	2	2	1	1	1	1	0	1	96
89	0	1	0	1	1	1	2	2	3	3	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	9	9	8	8	7	6	6	5	4	3	3	2	2	1	1	1	0	1	0	89
81	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9	9	8	8	7	7	6	5	5	4	3	3	2	2	1	1	1	1	0	0	81
73	0	0	0	0	1	1	2	2	2	3	4	4	5	6	6	6	7	7	8	8	8	8	7	7	6	6	6	5	4	4	3	2	2	2	1	1	0	0	0	0	73
64	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	7	6	6	6	5	5	4	4	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	64
55	1	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	6	5	5	5	4	4	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	1	55
47	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	47
39	0	0	1	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	5	5	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	1	0	0	39
32	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	32
26	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	26
20	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	20
15	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	15
12						0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0						12
9						0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0						9
7						0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0						7
5						1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1						5
2						0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0						2
	2	5	7	9	12	15	20	26	32	39	47	55	64	73	81	89	96	101	105	106	106	105	101	96	89	81	73	64	55	47	39	32	26	20	15	12	9	7	5	2	

4,0E 3,6E 3,2E 2,8E 2,4E 2,0E 1,6E 1,2E 0,8E 0,4E 0 0,4E 0,8E 1,2E 1,6E 2,0E 2,4E 2,8E 3,2E 3,6E 4,0E

Вертикальная шкала (слева и справа): 4,0E 3,6E 3,2E 2,8E 2,4E 2,0E 1,6E 1,2E 0,8E 0,4E 0 0,4E 0,8E 1,2E 1,6E 2,0E 2,4E 2,8E 3,2E 3,6E 4,0E