

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
АКУСТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

И. А. Викторов

Физические  
основы применения  
ультразвуковых  
волн Рэлея и Лэмба  
в технике



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

*Москва 1966*

В настоящей монографии дано краткое систематизированное описание основных физических свойств ультразвуковых волн Рэля и Лэмба и их практических применений. В монографии освещены также результаты соответствующих исследований автора, проводившихся в Акустическом институте АН СССР.

ОТВЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

*доктор техн. наук Л. Д. РОЗЕНБЕРГ*

## Предисловие

В 1885 г. английский ученый лорд Рэлей (Дж. Стрэтт) теоретически показал [1], что вдоль плоской границы твердого упругого полупространства с вакуумом или достаточно разреженной средой (например, с воздухом) могут распространяться волны, амплитуда которых быстро спадает с глубиной. Эти волны, названные впоследствии рэлеевскими или поверхностными, являются основным типом волн, наблюдающихся при землетрясениях. Поэтому они подробно изучались в сейсмологии (см., например, [2]).

За последние десять лет широкое применение нашли рэлеевские волны ультразвукового диапазона. При их помощи можно контролировать состояние поверхностного слоя образца (выявление поверхностных и околоповерхностных дефектов в образцах из металла, стекла, пластмассы и других материалов — ультразвуковая поверхностная дефектоскопия). Влияние свойств поверхностного слоя образца на скорость и затухание рэлеевских волн позволяет использовать последние для определения остаточных напряжений поверхностного слоя металла, термических и механических свойств поверхностного слоя образца.

Другим типом упругих волн, нашедшим с развитием ультразвука обширнейшую область применения, являются нормальные волны в твердых пластинках — волны Лэмба, названные так по имени ученого, впервые их описавшего в 1917 г. [3]. Как и ультразвуковые рэлеевские волны, волны Лэмба используются в ультразвуковой дефектоскопии для определения упругих и термоупругих характеристик пластинчатых образцов.

Кроме того, рэлеевские и лэмбовские ультразвуковые волны используются в линиях задержки.

Применение в технике ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба позволяет решить ряд принципиально важных задач. Так, например, стало возможным сделать ультразвуковой контроль универсальным, т. е. применимым для деталей любой формы и размера. До сих пор применявшиеся для ультразвукового контроля объемные (продольные и поперечные) волны, распространяющиеся в твердых телах, размер которых вдоль волнового фронта составляет много длин волн, не позволяли контролировать тонкостенные образцы, а также поверхностный слой образца (поскольку отражение от дефекта маскировалось отражением от поверхности). Ультразвуковые волны Рэлея и Лэмба как раз позволяют устранить эти ограничения. Применение волн Лэмба в линиях задержки позволило создать новый тип таких устройств — дисперсионные линии задержки с плавной регулировкой времени задержки.

В первой главе настоящей монографии описаны физические свойства ультразвуковых волн Рэлея, во второй главе — физические свойства ультразвуковых волн Лэмба, в третьей главе кратко охарактеризованы основные направления их практического использования.

Исследования по ультразвуковым волнам Рэлея в Акустическом институте АН СССР проводились по инициативе доктора техн. наук Ю. М. Сухаревского. Большинство теоретических исследований автора по волнам Рэлея и Лэмба проводилось под руководством доктора физико-математических наук Г. Д. Малюжинца. Им обоим автор приносит глубокую благодарность. Автор выражает искреннюю признательность доктору техн. наук Л. Д. Розенбергу за обсуждение результатов работы с младшим научным сотрудником Акустического института О. М. Зубовой и Т. М. Каёкиной, проводившим вместе с ним исследования по указанной теме.

## ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН РЭЛЕЯ

### § 1. Понятие о волнах Рэлея, их структура и скорость

Как уже отмечалось во введении, волнами Рэлея называют упругие возмущения, распространяющиеся вблизи свободной границы твердого тела и затухающие с глубиной. Общие свойства таких волн описаны в монографии [4].

Рассмотрим плоскую гармоническую рэлеевскую волну на границе твердого изотропного идеально упругого полупространства с вакуумом. Пусть полупространство занимает область  $z > 0$  (см. рис. 1, а), а направление распространения волны совпадает с осью  $x$ . Введем для области, занятой полупространством, скалярный  $\varphi$  и векторный  $\Psi$  потенциалы смещений, так что вектор смещения частиц  $\mathbf{v}$  запишется в виде

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi. \quad (\text{I.1})$$

Поскольку волна плоская и движение не зависит от координаты  $y$ , у векторного потенциала будет отлична от нуля только компонента по оси  $y$ ; эту компоненту обозначим просто через  $\psi$ . Потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  называются соответственно потенциалами продольных и сдвиговых волн и удовлетворяют (для гармонических процессов) следующим волновым уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_l^2 \varphi &= 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_t^2 \psi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Здесь  $k_l = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}$ ,  $k_t = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$  — волновые числа соответственно продольных и поперечных волн;  $\omega$  — круговая

частота;  $\lambda$  и  $\mu$  — упругие постоянные Ламе;  $\rho$  — плотность среды. Компоненты смещения частиц  $U$  и  $W$  по осям  $x$  и  $z$  соответственно и компоненты напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$  можно представить через  $\varphi$  и  $\psi$  по формулам

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ W &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right), \\ \sigma_{xz} &= \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Будем искать решения уравнений (1.2), соответствующие плоской гармонической волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ . Для этого положим

$$\begin{aligned} \varphi &= F(z) e^{i(kx - \omega t)}, \\ \psi &= G(z) e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1.2), получим два дифференциальных уравнения для функций  $F(z)$  и  $G(z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F(z)}{dz^2} - (k^2 - k_l^2) F(z) &= 0; \\ \frac{d^2 G(z)}{dz^2} - (k^2 - k_t^2) G(z) &= 0. \end{aligned}$$

Двумя линейно независимыми решениями каждого из написанных уравнений будут являться функции  $e^{\pm \sqrt{k^2 - k_l^2} z}$  и  $e^{\pm \sqrt{k^2 - k_t^2} z}$ . Априорно предположим (как мы увидим в дальнейшем, это предположение подтвердится), что  $k^2 > k_t^2 > k_l^2$ . Тогда решения с положительными радикалами в экспоненте будут соответствовать нарастающему с глубиной движению, а решения с отрицательными радикалами — экспоненциально

убывающему, т. е. поверхностной волне. Таким образом, выражения для  $\varphi$  и  $\psi$  приобретают вид:

$$\begin{aligned}\varphi &= Ae^{-qz} e^{i(kx - \omega t)}, \\ \psi &= Be^{-sz} e^{i(kx - \omega t)},\end{aligned}$$

где  $q^2 = k^2 - k_i^2$ ;  $s^2 = k^2 - k_t^2$ ;  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Условия задачи требуют еще обращения в нуль напряжений  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{xz}$  на границе полупространства (плоскость  $z=0$ ). Подставляя выражения для  $\varphi$  и  $\psi$  в эти условия, получим соотношения, связывающие  $A$ ,  $B$  и волновое число  $k$ . В результате для  $\varphi$  и  $\psi$  окончательно получим:

$$\begin{aligned}\varphi &= -Ae^{i(kx - \omega t) - qz}; \\ \psi &= iA \frac{2kq}{k^2 + s^2} e^{i(kx - \omega t) - sz}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Уравнение для определения  $k$  (характеристическое уравнение) будет иметь вид

$$4k^2qs - (k^2 + s^2)^2 = 0.\tag{1.6}$$

После простых преобразований оно приводится к форме

$$\eta^6 - 8\eta^4 + 8(3 - 2\xi^2)\eta^2 - 16(1 - \xi^2) = 0,\tag{1.7}$$

где введены обозначения  $\eta = \frac{k}{k_t} = \frac{c_t}{c}$ ;  $\xi = \frac{k_l}{k_t} = \frac{c_l}{c_l}$

( $c_l$ ,  $c_t$  — фазовые скорости продольных и поперечных волн). Это уравнение иногда называют уравнением Рэлея. Оно имеет шесть корней, значения которых зависят только от коэффициента Пуассона  $\nu$  рассматриваемой упругой среды. Рэлеевской волне соответствует корень  $\eta_R$ , лежащий между нулем и единицей (в дальнейшем индексом  $R$  мы будем отмечать все величины, относящиеся к рэлеевской волне). Можно показать, что для любых значений  $\nu$ , соответствующих реальным средам ( $0 \leq \nu \leq 0,5$ ), уравнение (1.7) имеет один и только один такой корень. Это подтверждает справедливость нашего априорного предположения и вместе с тем доказывает возможность существования рэлеевской волны

на свободной границе упругого полупространства. Приближенное выражение для этого корня следующее: [5]

$$\eta_R = \frac{0,87 + 1,12\nu}{1 + \nu}. \quad (1.8)$$

При изменении  $\nu$  от 0 до 0,5 фазовая скорость рэлеевской волны монотонно изменяется от  $0,87 c_t$  до  $0,96 c_t$ . Нетрудно видеть, что рэлеевская волна не имеет дисперсии фазовой скорости, поскольку  $\eta_R$  и  $c_t$  не зависят от частоты.

Выражения (1.5), описывающие рэлеевскую волну, показывают, что она состоит из двух неоднородных волн — продольной и поперечной, которые распространяются вдоль границы полупространства с одинаковыми скоростями и затухают с глубиной по законам

$e^{-\sqrt{k_R^2 - k_t^2} z}$  (продольная волна) и  $e^{-\sqrt{k_R^2 - k_t^2} z}$  (поперечная волна). На границе ( $z = 0$ ) эти волны взаимно компенсируют создаваемые ими напряжения.

Вычисляя из формул (1.5) компоненты смещений по осям  $x$  и  $z$  при помощи соотношений (1.3), получим (после взятия вещественных частей):

$$U_R = Ak_R \left( e^{-qRz} - \frac{2q_R s_R}{k_R^2 + s_R^2} e^{-s_R z} \right) \sin(k_R x - \omega t);$$

$$W_R = Aq_R \left( e^{-qRz} - \frac{2k_R^2}{k_R^2 + s_R^2} e^{-s_R z} \right) \cos(k_R x - \omega t). \quad (1.9)$$

Компоненты напряжений в рэлеевской волне можно вычислить, воспользовавшись соотношениями (1.4) и (1.5).

На рис. 1, б изображена картина смещений в рэлеевской волне. Точками обозначены частицы среды, которые в отсутствие волны расположены на равных расстояниях (по вертикали и горизонтали одна от другой). На рис. 2 и 3 представлены рассчитанные нами зависимости амплитуд смещений  $\hat{U}_R$ ,  $\hat{W}_R$  и амплитуд напряжений  $\hat{\sigma}_{zz}$ ,  $\hat{\sigma}_{xx}$ ,  $\hat{\sigma}_{xz}$  в рэлеевской волне от глубины. Кривые даны в безразмерной форме: амплитуды смещений отнесены к амплитуде нормального смещения на поверхности  $\hat{W}_{OR}$ , а амплитуды напряжений — к амплитуде  $\hat{\sigma}_{xz}|_{x=0}$  на поверхности. Глубина отложена в долях длины волны. Кривые рассчитаны для двух значений коэффициента Пуассона:  $\nu = 0,25$  (пунктирные кривые) и  $\nu = 0,34$



(сплошные кривые); между этими значениями заключены значения коэффициента Пуассона для большинства металлов. Из графиков видно, что смещение, нормальное к поверхности, сначала возрастает, а затем монотонно убывает с глубиной, смещение, параллельное поверхности, меняет знак на глубине примерно  $0,2 \lambda_R$ . Из графиков видно

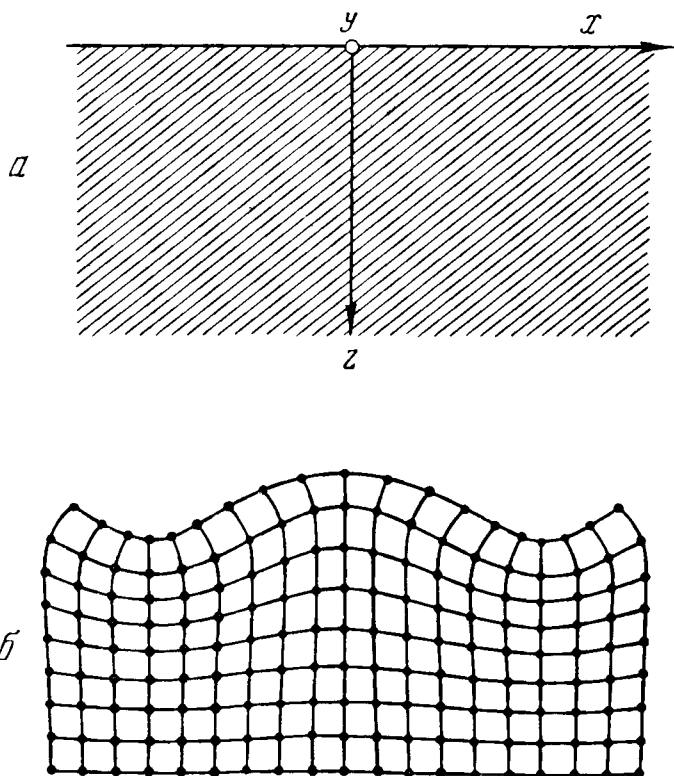


Рис. 1

также, что  $\sigma_{xx}$  меняет знак, тогда как  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{xz}$  достигают максимума приблизительно при  $z/\lambda_R = 0,3$  и затем экспоненциально убывают с глубиной. Приведенная на рис. 2—3 совокупность кривых иллюстрирует, что рэлеевская волна локализована в тонком поверхностном слое толщиной  $\lambda_R - 2\lambda_R$ .

Поскольку компоненты смещения в рэлеевской волне  $U_R$  и  $W_R$  по осям  $x$  и  $z$  сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ , траекториями движения частиц в волне являются эллипсы. При распространении волны в положительном направлении оси  $x$  при выбранной нами системе координат вращение частиц по эллипсу у поверхности происходит по часовой стрелке, на глубине  $z > 0,2 \lambda_R$  (когда смещение  $U_R$  меняет знак) направ-

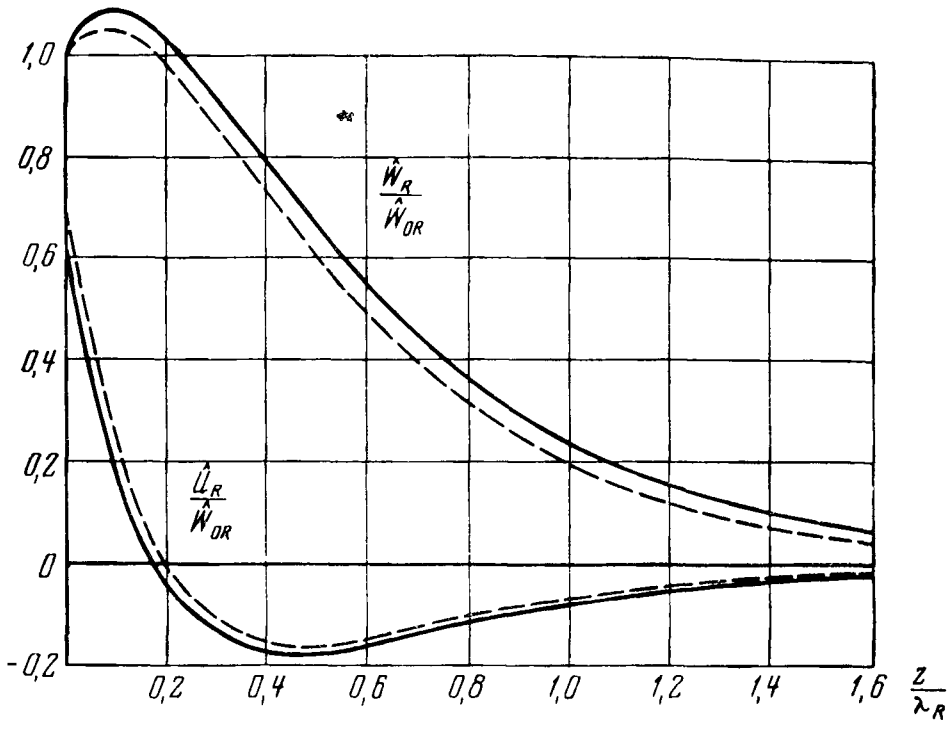


Рис. 2

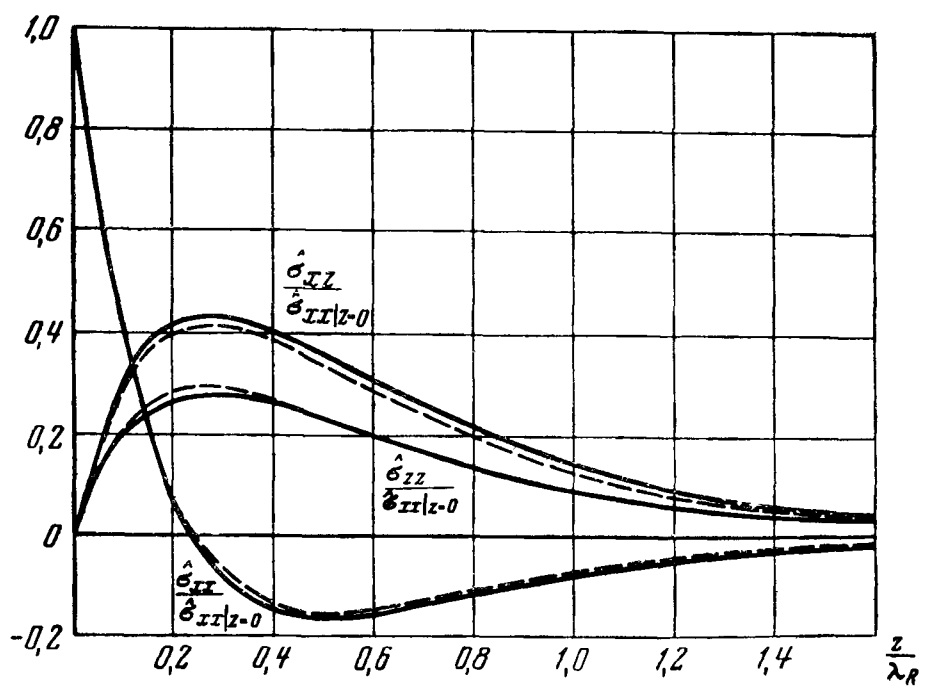


Рис. 3

ление вращения меняется на обратное. Большая полуось эллипсов перпендикулярна границе полупространства, малая параллельна направлению распространения волны. Эксцентриситет эллипсов зависит от расстояния до поверхности и от коэффициента Пуассона упругой среды. В табл. 1, взятой из работы [6], приведены относительные размеры полуосей эллипсов на разной глубине для четырех значений коэффициента Пуассона  $\nu$ . В числителе написаны размеры большой полуоси (амплитуда  $\hat{W}_R$ ), в знаменателе — малой (амплитуда  $\hat{U}_R$ ).

Таблица 1

$\frac{z}{\lambda_R}$	$\nu=0$	$\nu=0,250$	$\nu=0,333$	$\nu=0,500$
0	1,000	1,000	1,000	1,000
	0,772	0,676	0,626	0,540
0,250	0,745	0,910	0,968	1,120
	-0,007	-0,076	-0,101	-0,158
0,500	0,432	0,587	0,643	0,812
	-0,104	-0,157	-0,177	-0,206
1,000	0,109	0,192	0,219	0,339
	-0,044	-0,071	-0,077	-0,099

Мы рассмотрели на простейшем примере плоских гармонических рэлеевских волн в идеально упругом изотропном и однородном полупространствах наиболее общие свойства этих волн (скорость, характер движения в волне и т. д.). В неоднородных и анизотропных средах структура и свойства рэлеевских волн значительно сложнее, причем имеются такие анизотропные среды (например, кристаллы триклинной системы), в которых рэлеевские волны вообще не могут существовать. Иногда под волнами Рэлея понимают волны не только на свободной границе твердого тела, но также поверхностные волны более общего типа, возникающие на границе твердого тела с жидкостью и на границе системы твердых или жидких слоев с твердым полупространством. На границе твердого и жидкого полупространств рэлеевские волны существуют всегда; в остальных случаях они существ-

вуют только при определенных соотношениях упругих и геометрических параметров слоев и твердого полупространства.

В рамках данной книги мы будем рассматривать только ультразвуковые рэлеевские волны на свободной границе твердого тела или на границе твердого тела с жидкостью малой плотности. Поверхностные рэлеевские волны более сложного типа на ультразвуковых частотах не имеют практического применения. Для простоты будем рассматривать плоские гармонические ультразвуковые рэлеевские волны. Термин «ультраузвуковые» для краткости будем опускать, тем более, что большинство свойств ультразвуковых рэлеевских волн присуще рэлеевским волнам любых частот.

## § 2. Методы возбуждения и приема волн Рэля

Для возбуждения ультразвуковых рэлеевских волн существует несколько методов. Так, в работе [7] указывается, что пластинка кварца X-среза, опирающаяся на ребро прямоугольного упругого клина (рис. 4, а), возбуждает на его гранях «слабые поверхностные волны». Наилучшее возбуждение получается, если пластинка наклонена к граням под углом  $45^\circ$ .

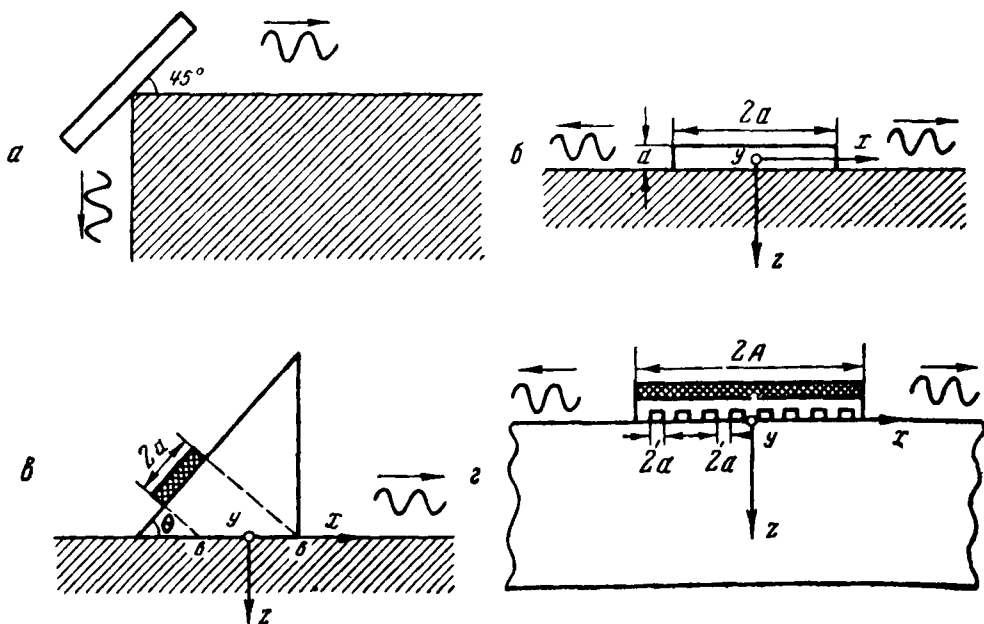


Рис. 4

В работе [8] описан метод возбуждения рэлеевских волн кварцевой пластинкой  $Y$ -среза, имеющей акустический контакт с поверхностью твердого тела посредством тонкого слоя масла (рис. 4, б). Такая пластинка возбуждает две рэлеевские волны, бегущие в отрицательном и положительном направлениях оси  $x$  с одинаковыми амплитудами. Как утверждают авторы, амплитуды максимальны при отношении ширины  $2a$  пластинки к толщине  $d$ , равном 7:1. Основная доля механической энергии пластинки расходуется в этом методе возбуждения на излучение поперечных ультразвуковых волн в глубь твердого тела.

В работе [9] для приема рэлеевских волн с поверхности металлических образцов использовался бесконтактный магнитный метод приема, основанный на магнитоакустическом эффекте, согласно которому при колебании поверхности образца (под действием рэлеевской волны) в постоянном магнитном поле в образце возникают вихревые токи. Вихревые токи создают магнитное поле, меняющееся с частотой ультразвука. Последнее и используется для наведения э. д. с. в катушке приемника, помещаемой в непосредственной близости от поверхности образца. В принципе этот метод может быть использован и для возбуждения рэлеевских волн, так же как все описываемые в данном параграфе методы возбуждения (со всеми их особенностями) можно обратить и на случай приема.

Наиболее распространенным методом возбуждения рэлеевских волн является так называемый метод клина [6, 7], основанный на преобразовании продольных волн в рэлеевские. В этом методе (рис. 4, в) пластмассовая призма вдоль одной своей грани имеет акустический контакт с поверхностью твердого тела. На наклонной грани призмы располагается пьезопластинка, излучающая плоскую продольную волну, которая падает под углом  $\theta$  на границу твердого тела с призмой. Угол  $\theta$  выбирается из условия оптимального возбуждения  $\sin \theta_R = c_{\text{кл}}/c_R$ , где  $c_{\text{кл}}$  — скорость продольных волн в материале клина,  $c_R$  — скорость рэлеевских волн в образце (ясно, что материал призмы должен быть таким, что  $c_{\text{кл}} < c_R$ ; поэтому призма делается обычно из пластмассы). При этом на границе твердого тела и призмы создается периодическое возмущение с пространственным периодом, равным длине

рэлеевской волны в образце. Поскольку  $\theta_R = \arcsin c_{\text{кл}}/c_R$  больше угла полного внутреннего отражения как для продольной, так и для поперечной волн, прошедшие в образец волны являются неоднородными и возмущение затухает с глубиной. Это возмущение возбуждает рэлеевскую волну, распространяющуюся по поверхности образца в направлении положительной оси  $x$ . Наилучшее возбуждение получается, когда проекция ребра призмы на наклонную грань совпадает с передним краем пьезопластины, как показано на рис. 4, в. В методе клина возбуждается практически только одна рэлеевская волна, уровень возбуждаемых объемных волн лежит на 20—30 дБ ниже.

В работе [10] предложен несколько видоизмененный метод клина с трансформацией поперечной волны в рэлеевскую. Благодаря меньшей (по сравнению с продольной волной) скорости поперечной волны клин в этом случае может быть сделан не из пластмассы, а из металла, например, латуни. Это имеет ряд преимуществ: более простая технология изготовления, меньшая изнашиваемость, лучшая возможность согласования материала клина и образца (последнее может повысить эффективность излучения и приема рэлеевских волн в несколько раз по сравнению со случаем пластмассового клина). Применения этого метода описаны в работе [11].

В 1958 г. А. Г. Соколинским был предложен [12] метод возбуждения рэлеевских волн гребенчатой структурой, создающей на поверхности твердого тела (подобно клину) периодическую совокупность нормальных возмущений с пространственным периодом  $\lambda_R$  (при отличии пространственного периода от  $\lambda_R$  возбуждение менее эффективно). Такая структура проще всего может быть выполнена в виде мегаллической пластинки гребенчатого профиля с периодическим чередованием выступов и пазов шириной  $\lambda_R/2$  (рис. 4, г) и пластинки кварца X-среза, лежащей на ней. Гребенчатой структурой можно весьма эффективно возбуждать рэлеевские волны в образце из любого материала, достаточно только сделать ее пространственный период равным  $\lambda_R$ . В этом ее большое преимущество перед методом клина. Недостатком метода гребенчатой структуры является высокий уровень паразитных сигналов, связанных с излучением структурой объемных волн.

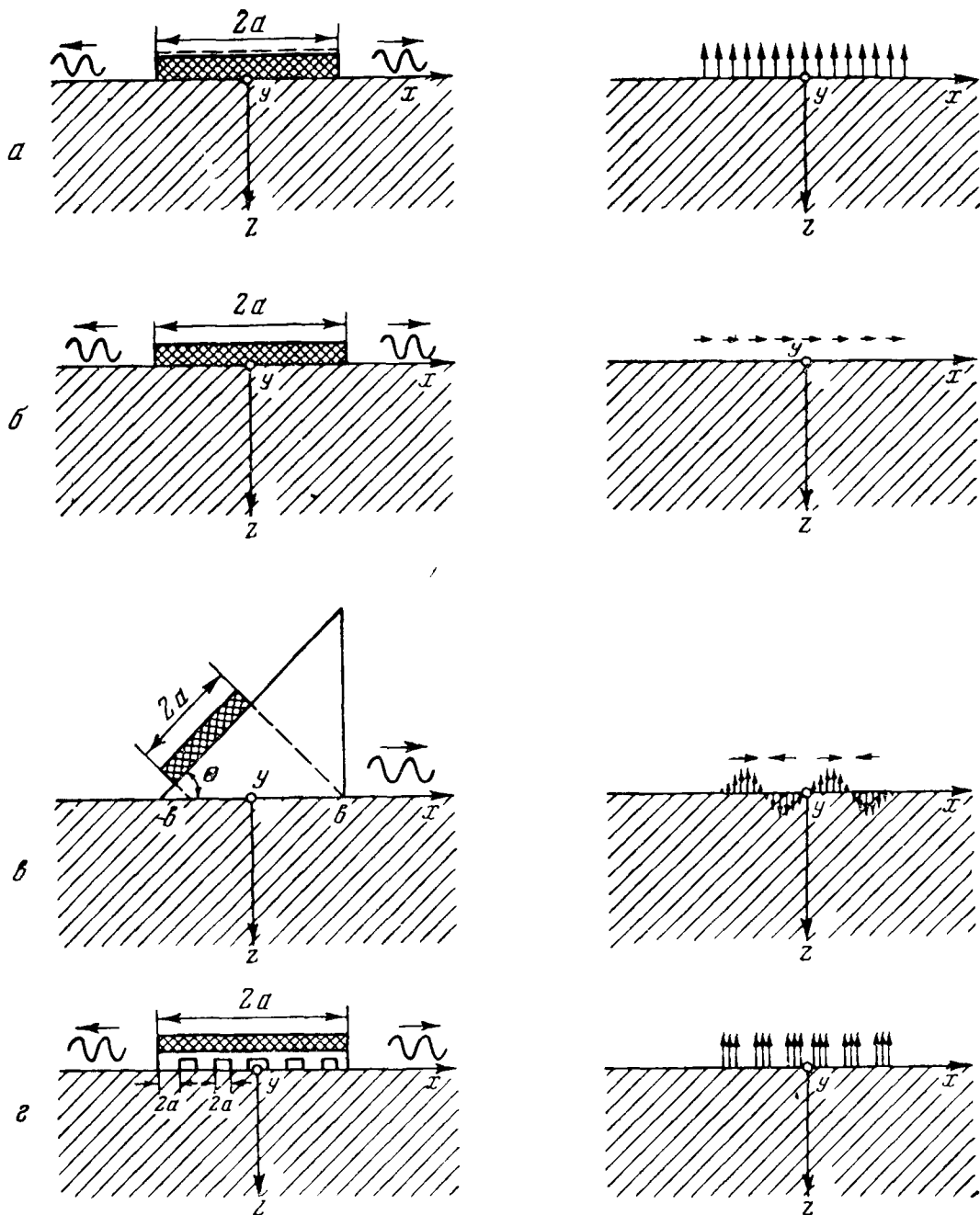


Рис. 5

Нами [13] проведено детальное теоретическое и экспериментальное исследование четырех методов возбуждения рэлеевских волн — клина, гребенчатой структуры, кварцевой пластинки Y- и X-среза. Последний метод введен нами по аналогии с методом кварцевой пластинки Y-среза. Изложим здесь основное содержание этой работы.

Будем считать твердое тело, на поверхности которого возбуждаются рэлеевские волны, однородным изотропным идеально упругим полупространством с плоской свободной границей. Размеры излучателей по оси  $y$  (рис. 5) будем предполагать бесконечными и будем считать, что действие излучателя рэлеевских волн на поверхность твердого тела эквивалентно действию напряжений, приложенных к свободной поверхности твердого тела на том участке, где находится излучатель. При возбуждении кварцевыми пластинками  $X$ -среза (рис. 5, *а*) и  $Y$ -среза (рис. 5, *б*) имеем соответственно нормальные и касательные напряжения единичной амплитуды, распределенные равномерно в области поверхности  $|x| \leq a$ , при гребенчатой структуре (рис. 5, *г*) — периодическую совокупность единичных нормальных напряжений, в методе клина (рис. 5, *в*) — систему нормальных и касательных напряжений, приложенных к свободной поверхности твердого тела в области  $|x| \leq a/\cos \theta = b$ , определяемой геометрическими границами пучка продольных волн, распространяющихся в клине. Напряжения здесь будем считать равными напряжениям, возникающим при падении плоской продольной волны под углом  $\theta$  на границу двух полупространств, одно из которых состоит из материала клина, а второе — из материала твердого тела (продольная волна падает в первом полупространстве, а ее амплитуда предполагается такой, что нормальные напряжения на площадке, перпендикулярной направлению ее распространения, равны единице).

Строго говоря, «замена» излучателей рэлеевских волн напряжениями допустима только при условии малости волновых сопротивлений материалов излучателей (т. е. кварца, материала гребенчатой структуры и материала клина) по сравнению с материалом твердого тела, что в большинстве практических случаев выполняется только приближенно, однако другой предельный случай (малость волнового сопротивления твердого тела), когда излучатели рэлеевских волн можно было бы «заменить» смещениями, заданными на поверхности твердого тела, еще более далек от практики. Заметим также, что в методе клина мы будем пренебрегать расхождением пучка продольных волн в клине и смещением отраженного пучка на границе клин — твердое тело.



Зависимость напряжений от времени будем предполагать сперва гармонической, затем полученные результаты обобщим на случай импульсного режима.

При сделанных предположениях исследование четырех методов возбуждения рэлеевских волн сводится к исследованию колебаний полупространства при следующих напряжениях на его границе.

В случае возбуждения кварцевой пластинкой X-среза:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}|_{z=0} &= 0 && \text{при } |x| < \infty, \\ \sigma_{zz}|_{z=0} &= \begin{cases} \sigma(t) = e^{-i\omega t} & \text{при } |x| \leq a, \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

В случае возбуждения кварцевой пластинкой Y-среза:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=0} &= 0 && \text{при } |x| < \infty, \\ \sigma_{xz}|_{z=0} &= \begin{cases} \sigma(t) = e^{-i\omega t} & \text{при } |x| \leq a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

В случае возбуждения гребенчатой структурой:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}|_{z=0} &= 0 && \text{при } |x| < \infty, \\ \sigma_{zz}|_{z=0} &= \begin{cases} \sigma(t) = e^{-i\omega t} & \text{при } |x| \in G, \\ 0 & \text{при } |x| \notin G, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

где  $G = \sum_{i=0}^{\pm n} g_i$  — область, состоящая из  $2n + 1$  элементарных

областей  $g_i$ , границы которых определяются на плоскости  $z = 0$  прямыми  $x_{\text{нач}} = (4i + 1)a$ ,  $x_{\text{кон}} = (4i - 1)a$ .

В случае возбуждения клином:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=0} &= \begin{cases} \sigma_z e^{ik_0 x} \sigma(t) & \text{при } |x| \leq b, \\ 0 & \text{при } |x| > b; \end{cases} \\ \sigma_{xz}|_{z=0} &= \begin{cases} \sigma_x e^{ik_0 x} \sigma(t) & \text{при } |x| \leq b; \\ 0 & \text{при } |x| > b, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

где  $k_0 = k_{\text{кл}} \sin \theta$ ;  $\sigma(t) = e^{-i\omega t}$ ;  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$  — безразмерные комплексные амплитуды напряжений.

Методика теоретического расчета одинакова для всех методов возбуждения. Поэтому мы ограничимся приведением

краткой схемы расчета для метода возбуждения кварцевой пластинкой X-среза, а для остальных методов выпишем только окончательные результаты. Введем для области, занятой упругим полупространством, потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  продольных и сдвиговых волн, удовлетворяющие волновым уравнениям (1.2). Будем искать  $\varphi$  и  $\psi$  в форме интегралов Фурье:

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{i(kx + \sqrt{k_l^2 - k^2}z - \omega t)} dk; \\ \psi &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(k) e^{i(kx + \sqrt{k_l^2 - k^2}z - \omega t)} dk.\end{aligned}\tag{I.14}$$

Функции  $\varphi(k)$  и  $\psi(k)$  определим из граничных условий (I.10), записывая выражения для напряжений тоже в форме интегралов Фурье и выражая напряжения  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{xz}$  через  $\varphi$  и  $\psi$ . С учетом найденных таким образом  $\varphi(k)$  и  $\psi(k)$  из (I.14) можно вычислить смещения и напряжения в любой точке полупространства, т. е. определить полное поле. Поскольку нас интересуют главным образом рэлеевские волны, т. е. та часть поля, которая локализована у поверхности, будем вычислять поверхностные смещения.

Анализ поверхностных смещений вместе с тем дает представление и о совокупности объемных волн, возбуждаемых в каждом случае наряду с рэлеевскими. Для нормального и касательного поверхностных смещений имеем:

$$\begin{aligned}W_0 &= -\frac{ik_l^2}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k_l^2 - k^2} \sin ka e^{ikx} dk}{kF(k)}; \\ U_0 &= \frac{i}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2k^2 - k_l^2 + 2\sqrt{k_l^2 - k^2} \sqrt{k_l^2 - k^2}) \sin ka e^{ikx} dk}{F(k)}.\end{aligned}\tag{I.15}$$

где

$$F(k) = 4k^2 \sqrt{k_l^2 - k^2} \sqrt{k_l^2 - k^2} + (k_l^2 - 2k^2)^2.$$

Для вычисления интегралов (I.15) рассмотрим эти интегралы в комплексной плоскости  $k$ . В этой плоскости у подынтегральных функций есть следующие особенности: точки

Ветвления  $k = \pm k_{l,t}$  радикалов  $\sqrt{k_{l,t}^2 - k^2}$  и простые полюса  $k = \pm k_R$ , соответствующие простым корням функции  $F(k)$  (по поводу последних смотри, например, [14]). Чтобы сделать функции  $\sqrt{k_{l,t}^2 - k^2}$  однозначными, образуем из двух

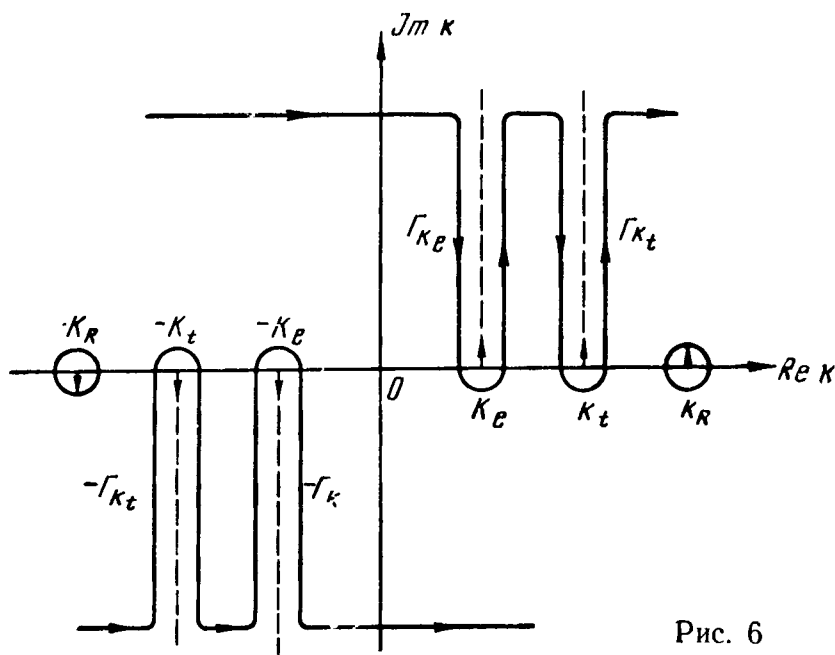


Рис. 6

листов плоскости  $k$  двухлистую поверхность Римана, проведя разрезы, как показано на рис. 6. Назовем верхним листом поверхности Римана тот, на котором знаки радикала  $\sqrt{k_{l,t}^2 - k^2}$  соответствуют удовлетворению принципа погашаемости [15] для решения (I.14). Пути интегрирования в (I.14), (I.15) проходят по вещественной оси верхнего листа. Будем вычислять поверхностные смещения для области вне пластинки ( $|x| > a$ ). Перемещая пути интегрирования интегралов (I.15) с вещественной оси верхнего листа в положительную или отрицательную (в зависимости от знака  $x$ ) мнимые бесконечности, сведем интегралы (I.15) к вычетам в точках  $k = \pm k_R$  и интегралам по берегам разрезов (см. рис. 6) (направление обхода полюсов  $k = \pm k_R$ , лежащих на вещественной оси, определится введением в упругое полупространство бесконечно малого затухания, при котором полюса сместятся с вещественной оси (см. стрелки на рис. 6). Для больших  $x$  ( $k_{l,t}(x - a) \gg 1$ ) интегралы по берегам разрезов можно вычислить приближенно методом наискорейшего спуска, и

тогда для  $W_0$  и  $U_0$  будем иметь выражения (I.16). Ниже приведены соответствующие формулы для всех методов возбуждения.

В случае возбуждения пластинкой X-среза кварца ( $k_{l,t}(x-a) \gg 1$ ):

$$W_0 = -iA \frac{q_R}{k_R} \frac{\sin k_R a}{k_R} e^{ik_R x} + B_1 \frac{\sin k_l a}{k_l} \frac{e^{ik_l x}}{k_l^{3/2} x^{3/2}} + C_1 \frac{\sin k_t a}{k_t} \frac{e^{ik_t x}}{k_t^{3/2} x^{3/2}} + 0 \left[ \frac{1}{k_{l,t}^2 x^2} \right]; \quad (\text{I.16})$$

$$U_0 = A \frac{k_R^2 + s_R^2}{2k_R^2} \frac{\sin k_R a}{k_R} e^{ik_R x} + B_2 \frac{\sin k_l a}{k_l} \frac{e^{ik_l x}}{k_l^{3/2} x^{3/2}} + C_2 \frac{\sin k_t a}{k_t} \frac{e^{ik_t x}}{k_t^{3/2} x^{3/2}} + 0 \left[ \frac{1}{k_{l,t}^2 x^2} \right].$$

В случае возбуждения пластинкой Y-среза кварца ( $k_{l,t}(x-a) \gg 1$ ):

$$W_0 = -A \frac{k_R^2 + s_R^2}{2k_R^2} \frac{\sin k_R a}{k_R} e^{ik_R x} + B_3 \frac{\sin k_l a}{k_l} \frac{e^{ik_l x}}{k_l^{3/2} x^{3/2}} + C_3 \frac{\sin k_t a}{k_t} \frac{e^{ik_t x}}{k_t^{3/2} x^{3/2}} + 0 \left[ \frac{1}{k_{l,t}^2 x^2} \right]; \quad (\text{I.17})$$

$$U_0 = -iA \frac{s_R}{k_R} \frac{\sin k_R a}{k_R} e^{ik_R x} + B_4 \frac{\sin k_l a}{k_l} \frac{e^{ik_l x}}{k_l^{3/2} x^{3/2}} + C_4 \frac{\sin k_t a}{k_t} \frac{e^{ik_t x}}{k_t^{3/2} x^{3/2}} + 0 \left[ \frac{1}{k_{l,t}^2 x^2} \right].$$

В случае возбуждения гребенчатой структурой ( $k_{l,t}x - (4n+1)k_{l,t}a \gg 1$ ):

$$W_0 = -iA \frac{q_R}{k_R} \sum k_R a_n e^{ik_R x} + B_5 \sum k_l a_n \frac{e^{ik_l x}}{k_l^{3/2} x^{3/2}} + C_5 \sum k_t a_n \frac{e^{ik_t x}}{k_t^{3/2} x^{3/2}} + 0 \left[ \frac{1}{k_{l,t}^2 x^2} \right]; \quad (\text{I.18})$$

$$U_0 = A \frac{k_R^2 + s_R^2}{2k_R^2} \sum k_R a_n e^{ik_R x} + B_6 \sum k_l a_n \frac{e^{ik_l x}}{k_l^{3/2} x^{3/2}} + \\ + C_6 \sum k_t a_n \frac{e^{ik_t x}}{k_t^{3/2} x^{3/2}} + 0 \left[ \frac{1}{k_{l,t}^2 x^2} \right].$$

В случае возбуждения клином ( $k_{l,t}(b-x) \gg 1$ ):

$$W_0 = -A \left( i \frac{q_R}{k_R} \sigma_z + \frac{k_R^2 + s_R^2}{2k_R^2} \sigma_x \right) \frac{\sin(k_0 - k_R) b}{k_0 - k_R} e^{ik_R x} + \\ + (B_7 \sigma_z + B_8 \sigma_x) \frac{\sin(k_0 - k_l) b}{k_0 - k_l} \cdot \frac{e^{ik_l x}}{k_l^{3/2} x^{3/2}} + \\ + (C_7 \sigma_z + C_8 \sigma_x) \frac{\sin(k_0 - k_t) b}{k_0 - k_t} \frac{e^{ik_t x}}{k_t^{3/2} x^{3/2}} + 0 \left[ \frac{1}{k_{l,t}^2 x^2} \right]; \quad (\text{I.19})$$

$$U_0 = A \left( \frac{k_R^2 + s_R^2}{2k_R^2} \sigma_z - i \frac{s_R}{k_R} \sigma_x \right) \frac{\sin(k_0 - k_R) b}{k_0 - k_R} e^{ik_R x} + \\ + (B_9 \sigma_z + B_{10} \sigma_x) \frac{\sin(k_0 - k_l) b}{k_0 - k_l} \cdot \frac{e^{ik_l x}}{k_l^{3/2} x^{3/2}} + \\ + (C_9 \sigma_z + C_{10} \sigma_x) \frac{\sin(k_0 - k_t) b}{k_0 - k_t} \frac{e^{ik_t x}}{k_t^{3/2} x^{3/2}} + 0 \left[ \frac{1}{k_{l,t}^2 x^2} \right].$$

Здесь введены обозначения:

$$\sum k_{l,t,R} a_n = \frac{1}{k_{l,t,R}} [\sin(4n+1) k_{l,t,R} a - \\ - \sin(4n-1) k_{l,t,R} a + \sin(4n-3) k_{l,t,R} a - \sin(4n-5) k_{l,t,R} a + \\ + \dots + \sin k_{l,t,R} a];$$

$$A = \frac{k_t^2 q_R s_R}{2\mu_l [k_R^2 (q_R^2 + s_R^2) - 2q_R s_R (k_R^2 + s_R^2 - q_R s_R)]};$$

$B_1 \dots B_{10}, C_1 \dots C_{10}$  — комплексные константы, зависящие от коэффициента Пуассона  $\nu$  и постоянной Ламе  $\mu$  упругой среды.

Из приведенных формул видно, что при каждом методе возбуждения выражения поверхностных смещений вдали от области, где приложены напряжения, состоят из суммы ряда членов, каждый из которых, как это следует из их фазовых множителей, соответствует определенному типу волн. Первые слагаемые формул (I.16) — (I.19) соответствуют рэлеевским, вторые и третьи — продольным и поперечным волнам, распространяющимся вправо от областей приложения напряжений. Амплитуды поверхностных смещений в объемных волнах существенно меньше (в  $k_{l,t}^{3/2} x^{3/2}$  раз) соответствующих амплитуд в рэлеевской волне и убывают с расстоянием вдоль поверхности полупространства по закону  $(k_{l,t} x)^{-3/2}$ . Такое быстрое убывание амплитуд объясняется тем, что основная часть энергии продольных и поперечных волн излучается в глубь полупространства, а не вдоль его свободной границы. Укажем, что при больших отрицательных  $x$  амплитуды  $W_0$  и  $U_0$  отличаются от амплитуд (I.16) — (I.19) лишь знаками. Исключение составляет случай клина, где излучение в направлении  $-x$  меньше, чем в направлении  $+x$ . В частности, при  $k_0 \simeq k_R$  амплитуда рэлеевской волны, бегущей в направлении  $-x$ , ничтожно мала (в  $2 k_R b$  раз меньше амплитуды в направлении  $+x$ ). Анализируя выражения амплитуд поверхностных смещений  $\hat{W}_{0R}$  и  $\hat{U}_{0R}$  в рэлеевской волне, возбуждаемой в каждом методе, можно сделать следующие выводы: 1) при возбуждении пластинками  $X$ - и  $Y$ -срезов кварца амплитуда рэлеевской волны зависит синусоидально от ширины  $2a$  пластинки [см. первые слагаемые в (I.16) и (I.17) и рис. 7, на котором приведены теоретические (1) и экспериментальные (2) кривые]. Упругое полупространство предполагается здесь и в дальнейшем «алюминиевым»; 2) при возбуждении рэлеевских волн гребенчатой структурой и клином, когда на поверхности полупространства имеется область с периодическими возмущениями, амплитуда рэлеевской волны очень сильно зависит от длины пространственного периода этих возмущений, т. е. от угла  $\theta$  и размера  $4a$  соответственно [см. рис. 8, на котором приведены теоретические (1) и экспериментальные (2) кривые]; теоретические кривые рассчитаны по формулам (I.18) и (I.19) для случая гребенчатой структуры с числом элементарных ячеек, равным

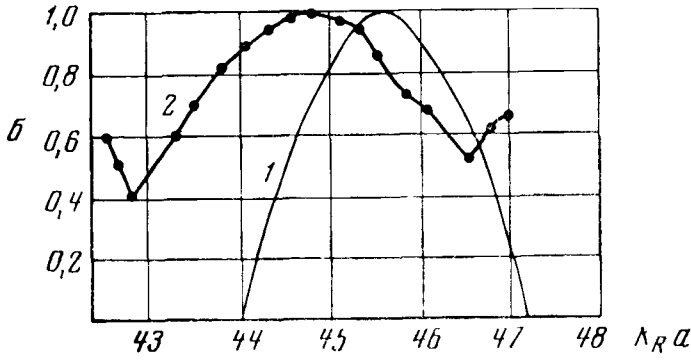
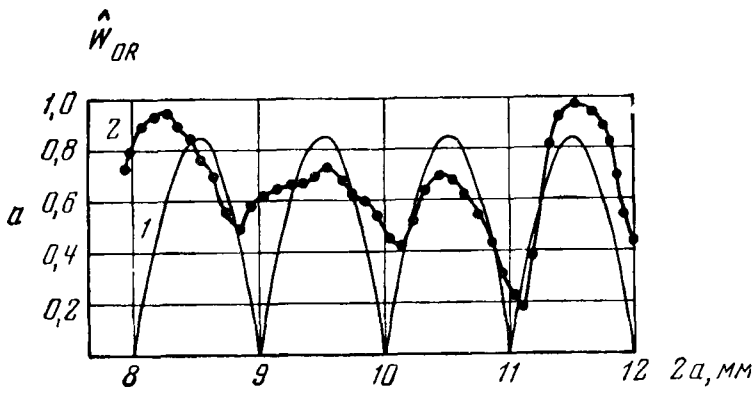


Рис. 7

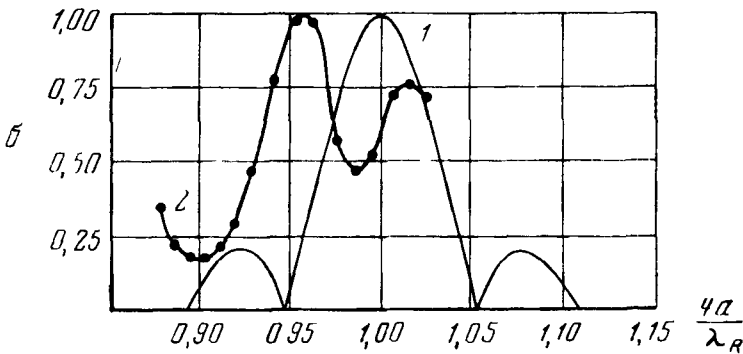
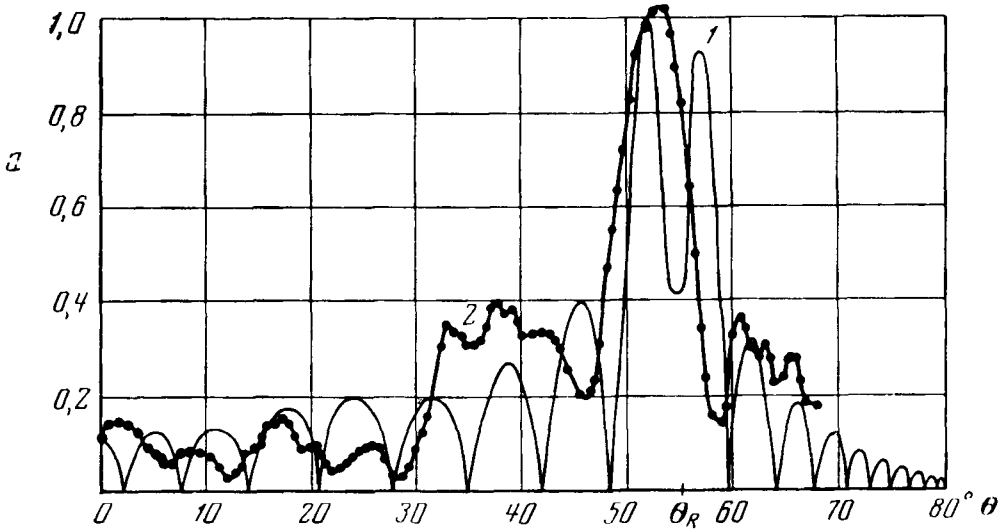


Рис. 8

19 ( $n = 9$ ), и полистиролового клина с кварцевой пластинкой шириной  $2a = 7,66\lambda_{\text{кл}}$ . Анализируя выражение (I.18) и (I.19), легко убедиться, что острота максимумов кривых рис. 8 пропорциональна размеру области возмущения, т. е. числу ячеек  $m$  и величине  $2b$ ; 3) при возбуждении рэлеевских волн пластинками  $X$ - и  $Y$ -срезов кварца максимальная эффективность возбуждения, получающаяся при  $2a = \lambda_R/2, 3\lambda_R/2, 5\lambda_R/2$ , не зависит от ширины  $2a$  пластинки. При возбуждении гребенчатой структурой и клином максимальная амплитуда рэлеевской волны, соответствующая случаям  $4a = \lambda_R$  и  $\theta \simeq \simeq \arcsin k_R/k_{\text{кл}}$  ( $k_0 \simeq k_R$ ), как следует из (I.18) и (I.19), прямо пропорциональна размеру излучателей в направлении распространения рэлеевской волны и теоретически может быть неограниченной.

На основании полученных результатов можно сделать выводы и относительно импульсного режима возбуждения. Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда импульс механических напряжений, которыми мы «заменяем» излучатель, имеет прямоугольную форму и синусоидальное заполнение, т. е. функция  $\sigma(t)$  [см. (I.10) — (I.13)] равна

$$\sigma(t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t} & \text{при } |t| \leq \tau \\ 0 & \text{при } |t| > \tau \end{cases}$$

( $2\tau$  — длительность;  $\omega_0$  — частота заполнения импульса), причем в начальный и конечный моменты времени напряжения равны нулю ( $\text{Re} e^{\pm i\omega_0 \tau} = \cos \omega_0 \tau = 0$ ). Представляя  $\sigma(t)$  в форме интеграла Фурье, можно после несложных вычислений получить решение для импульсного режима из суперпозиции решений (I.16) — (I.19) для непрерывного режима. На рис. 9 изображены осциллограммы механического напряжения  $\sigma_{zz}$  или  $\sigma_{xz}$  (рис. 9, *a*) и нормального поверхностного смещения в рэлеевской волне (для всех методов возбуждения: *b* и *в* —  $X$ - и  $Y$ -срезами кварца, *г* — гребенчатой структурой, *д* — клином), рассчитанные для возбуждения пластинками  $X$ - и  $Y$ -срезов кварца в предположении  $\sin k_R a = 1$  для возбуждения гребенчатой структурой при  $m = 3$  и для метода клина при  $k_0 = = k_R$  ( $\theta = \theta_R$ ). Как видно из рис. 9, во всех методах возбуждения, кроме метода клина, импульс рэлеевских волн имеет большую (по сравнению с импульсом напряжений) длительность и измененную форму (ступенчатую при возбуждении пластинками  $X$ - и  $Y$ -срезов (см. рис. 9, *б*, *в*) и трапециевидальную при возбуждении гребенчатой структурой (см. рис. 9, *г*).



Это изменение формы и длительности связано с процессом установления колебаний в области приложения напряжений, для чего необходимо время  $2L/c_R$ , где  $L$  — размер излучателя

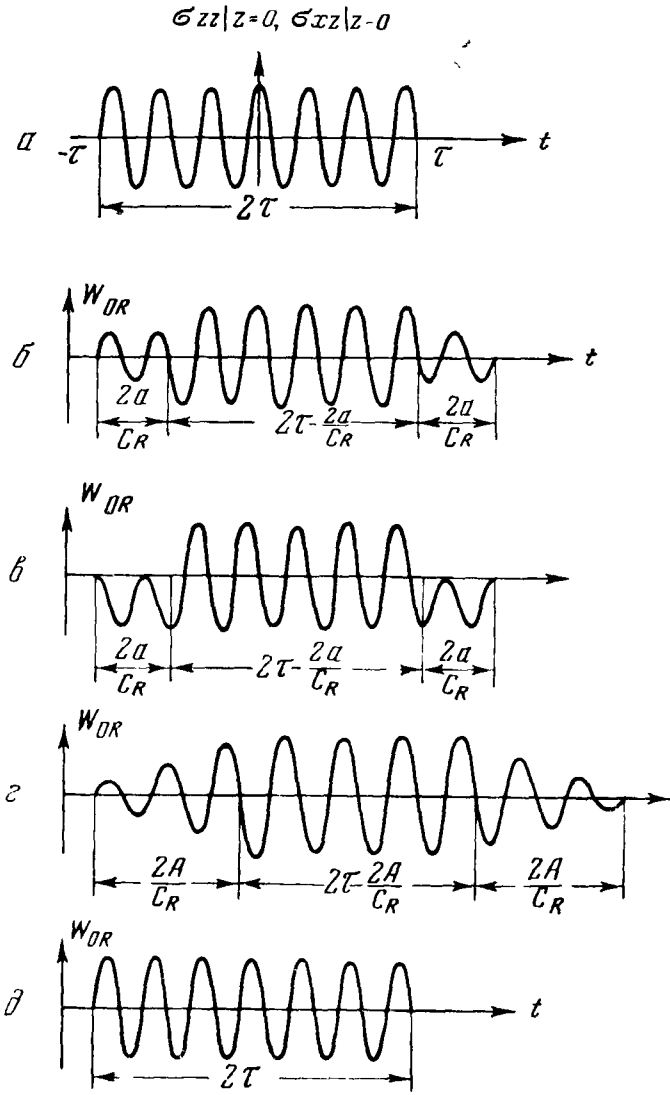


Рис. 9

в направлении распространения рэлеевских волн. В методе клина при  $k_0 = k_R$  установление происходит вместе с постепенным появлением напряжений в области  $|x| \leq b$ . Соответственный импульс напряжений, созданный продольными волнами в клине, в начальный момент времени появляется на левой границе области  $|x| \leq b$  и распространяется затем к правой со скоростью  $c_R$ . К моменту появления напряжений

во всей области  $|x| \leq b$  колебания устанавливаются также во всей области. Поэтому импульс рэлеевских волн повторяет форму импульса напряжений.

Экспериментальная проверка результатов теоретического расчета проводилась на импульсной установке, состоящей из генератора прямоугольных электрических импульсов с частотой заполнения 2,5—3,5 МГц, резонансного усилителя и индикатора (синхроскоп 25-И). Звукпроводом для рэлеевских волн служили алюминиевые стержни прямоугольного сечения размером  $25 \times 65 \times 500$  мм. Прием рэлеевских волн при всех экспериментах осуществлялся методом клина. Измерения проводились при длительности электрического импульса 2—20 мксек. Отсчеты амплитуд импульсов на индикаторе производились по средней части импульса, соответствующей установившемуся режиму колебаний, к которому применимы формулы (I.16)—(I.19).

Для определения зависимости амплитуды нормального поверхностного смещения в рэлеевской волне  $\hat{W}_{0R}$  от ширины кварцевой пластинки  $X$ -среза изменялась длина площадки, вдоль которой осуществлялся (при помощи касторового масла) акустический контакт кварцевой пластинки  $X$ -среза и стержня. Для снятия аналогичной зависимости при  $Y$ -срезе кварцевая пластинка приклеивалась церезином к поверхности стержня и изменялась частота заполнения электрического импульса, подаваемого на пластинку, т. е. размер пластинки в длинах  $\lambda_R$ . Полученные кривые  $\hat{W}_{0R}(2a)$  и  $\hat{W}_{0R}(k_R a)$  отмечены точками на рис. 7. Кривые нормированы: средняя высота максимумов экспериментальной кривой  $\hat{W}_{0R}(2a)$  взята равной высоте максимумов теоретической, а у экспериментальной и теоретической кривых  $\hat{W}_{0R}(k_R a)$  высоты приняты одинаковыми. Как видно из рис. 7, экспериментальные кривые обнаруживают качественно тот же периодический характер зависимости амплитуды от ширины пластинок, что и теоретические. Однако количественно кривые заметно отличаются.

Для исследования зависимости амплитуды рэлеевской волны при методе клина от длины пространственного периода возмущений, создаваемых излучателем, т. е. от угла  $\theta$ , использовался круговой полистироловый сектор раствора  $90^\circ$ , контактирующий со стержнем и перемещаемый по сектору, ползунок с кварцевой пластинкой  $X$ -среза, укрепленной на нем. Ползунок можно было закреплять в любом положении на

секторе, что позволяло направлять пучок продольных волн на поверхность стержня под углами в пределах  $0 - 80^\circ$ . При снятии аналогичной зависимости  $\hat{W}_{0R}(4a/\lambda_R)$  для гребенчатой структуры использовалась алюминиевая пластинка гребенчатого профиля с кварцевой пластинкой X-среза, лежащей на ней. Параметр  $4a/\lambda_R$  изменялся посредством изменения частоты заполнения электрического импульса, подаваемого на излучатель. Акустический контакт полистиролового сектора и стержня обеспечивался твердой пленкой клея БФ-4, остальные акустические контакты осуществлялись касторовым маслом. Экспериментальные кривые  $\hat{W}_{0R}(\theta)$  (рис. 8, а) и  $\hat{W}_{0R}(4a/\lambda_R)$  (рис. 8, б) «приведены» к теоретическим: средняя высота первых трех максимумов экспериментальной кривой  $\hat{W}_{0R}(\theta)$  взята равной средней высоте теоретической, а у кривых  $\hat{W}_{0R}(4a/\lambda_R)$  высоты главных максимумов сделаны одинаковыми. Из рисунков видно, что качественный характер экспериментальных и теоретических кривых одинаков. Характерной особенностью экспериментальной кривой на рис. 8, а (по сравнению с теоретической) является более ярко выраженный главный максимум, положение которого удовлетворяет (в пределах ошибки измерений) условию  $k_0 = k_R (\theta = \theta_R = \text{Arcsin } k_R/k_{\text{кл}})$ , что находится в согласии с данными работы [6].

Нами изучались также зависимости амплитуды рэлеевской волны в резонансных методах возбуждения от размера излучателей в направлении распространения волны при пространственном резонансе, т. е. при  $4a = \lambda_R$  и  $\theta = \theta_R$ . Для снятия зависимости  $\hat{W}_{0R}(m)$  менялось число выступов пластинки гребенчатого профиля, вдоль которых осуществлялся акустический контакт ее со стержнем. Зависимость  $W_{0R|_{\theta=\theta_R}}(\hat{2b}/\lambda_R)$  изучалась путем изменения ширины  $2a$  площадки акустического контакта кварцевой пластинки, укрепленной на наклонной грани клина, с клином. Описанные зависимости показаны на рис. 10. Здесь же тонкими линиями отмечены соответствующие теоретические кривые, построенные на основании (I.18) и (I.19) с учетом экспериментально измеренного затухания рэлеевской волны, при распространении под излучателем, которое не учитывалось в (I.18) и (I.19). При построении теоретических кривых их амплитудный множитель выбирался из условия совпадения наклона экспериментальных и теоретических кривых вблизи начала координат. Как видно из рис. 10, теоретическая и экспериментальная кри-

вые  $\hat{W}_{0R}|_{\theta=\theta_R}(2b/\lambda_R)$  удовлетворительно совпадают одна с другой, а экспериментальная кривая  $\hat{W}_{0R}(m)$  стремится к «насыщению» быстрее теоретической.

Описанные эксперименты подтверждают, что амплитуда рэлеевской волны при всех методах возбуждения сильно зависит от размера излучателя в направлении распространения волны, а в резонансных методах еще и от пространственной структуры излучателя.

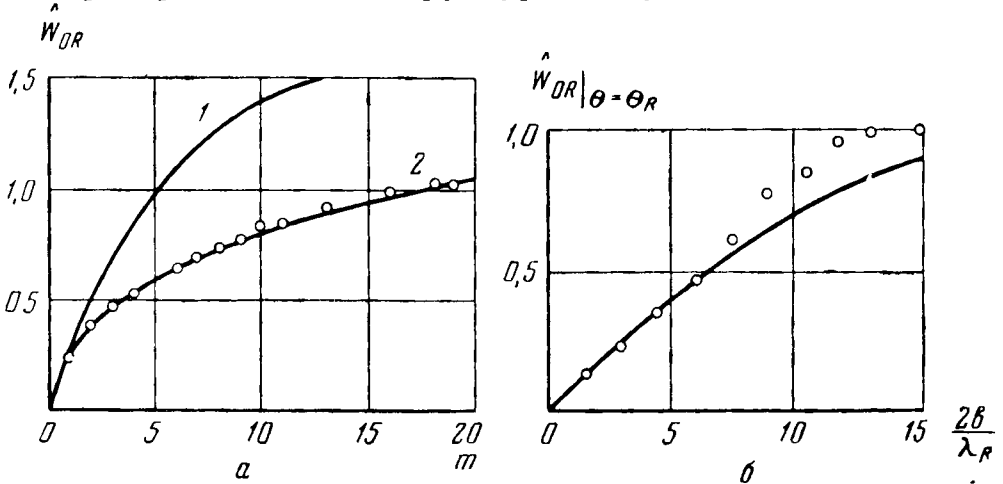


Рис. 10

Нами измерялись коэффициенты преобразования  $K$  электрического импульса в акустический и обратно для всех методов возбуждения<sup>1</sup>. Приемником служил полистироловый клин. В табл. 2 приведены значения  $K$ , соответствующие максимальным (в каждом случае) амплитудам рэлеевских волн (т. е. измеренные при  $\sin k_R a = 1$ ,  $4a = \lambda_R$ ,  $\theta = \theta_R$ ). Для сравнения значения  $K$  приведены и для объемных волн. Все измерения сделаны на частоте  $\simeq 2,7$  Мгц.

Из таблицы видно, что наиболее эффективен метод гребенчатой структуры, однако даже для него эффективность заметно ниже, чем при возбуждении и приеме объемных волн. Укажем, что данные таблицы, рис. 7, б и формула (I.17), как нам представляется, опровергают утверждение авторов [8] о том, что амплитуда рэлеевской

<sup>1</sup> Под  $K$  понимается, как обычно, отношение амплитуды электрического напряжения на излучателе к амплитуде э. д. с., развиваемой приемником.

Таблица 2

Метод возбуждения	К дб
Возбуждение рэлеевских волн кварцевой пластинкой X-среза с контактным переходным слоем касторового масла . . . . .	56,8
Возбуждение рэлеевских волн кварцевой пластинкой Y-среза с контактным переходным слоем церезина . . . . .	56,4
Возбуждение рэлеевских волн кварцевой пластинкой Y-среза с отношением ширины $2a$ к толщине $d$ , равной 7 : 1 ( $\sin k_R a \neq 1$ ). Контактный переходный слой — церезин . . . . .	57,5
Возбуждение рэлеевских волн алюминиевой пластинкой гребенчатого профиля ( $m = 19$ , $2A = 18,5 \lambda_R$ ) с кварцевой пластинкой X-среза, укрепленной на ней Контактные переходные слои—пленки касторового масла . . . . .	41,1
Возбуждение рэлеевских волн полистироловым клином ( $2b = 17 \lambda_R$ ) с контактным переходным слоем клея БФ-4 . . . . .	51,4
Возбуждение и прием продольных волн кварцевыми пластинками X-среза с контактными переходными слоями касторового масла . . . . .	35,3
Возбуждение и прием поперечных волн кварцевыми пластинками Y-среза с контактными переходными слоями церезина . . . . .	35,7

волны, излучаемой кварцевой пластинкой Y-среза, максимальна при отношении ширины  $2a$  пластинки к толщине  $d$ , равном 7 : 1.

На рис. 11 приведены фотографии импульсов рэлеевских волн при возбуждении пластинками кварца X-среза (б) и Y-среза (в), гребенчатой структурой (г) и клином (д). Левые снимки сделаны при длительности электрического импульса  $2\tau = 5$  мксек, правые — при  $2\tau = 10$  мксек. Фотографии получены при следующих размерах излучателей в направлении распространения рэлеевской волны:  $2a = 15$ ,  $2A = 18$ ,  $2b = 16$  мм, причем амплитуда рэлеевской волны в каждом случае была максимальна, т. е. соответствовала условиям  $\sin k_R a = 1$ ,  $4a = \lambda_R$ ,  $\theta = \theta_R$ . Для оценки искажений, вносимых в импульс рэлеевских волн кварцевой пластинкой и усилителем, импульс рэлеевских волн сравнивался не с импульсом электрического напряжения, а с импульсом продольных волн, излученных и принятых кварцевой пластинкой X-среза (см. рис. 11, а, где по-прежнему слева  $2\tau = 5$  мксек и справа  $2\tau = 10$  мксек).

Как видно из рис. 11, в соответствии с теоретическими данными (см. рис. 10) импульс рэлеевских волн во всех методах возбуждения удлиняется и изменяет форму (по сравнению с импульсом электрического напряжения), кроме метода клина, где и длительность, и форма сохраняются.

Как отмечалось выше, большинство приведенных экспериментальных данных совпадает с соответствующими

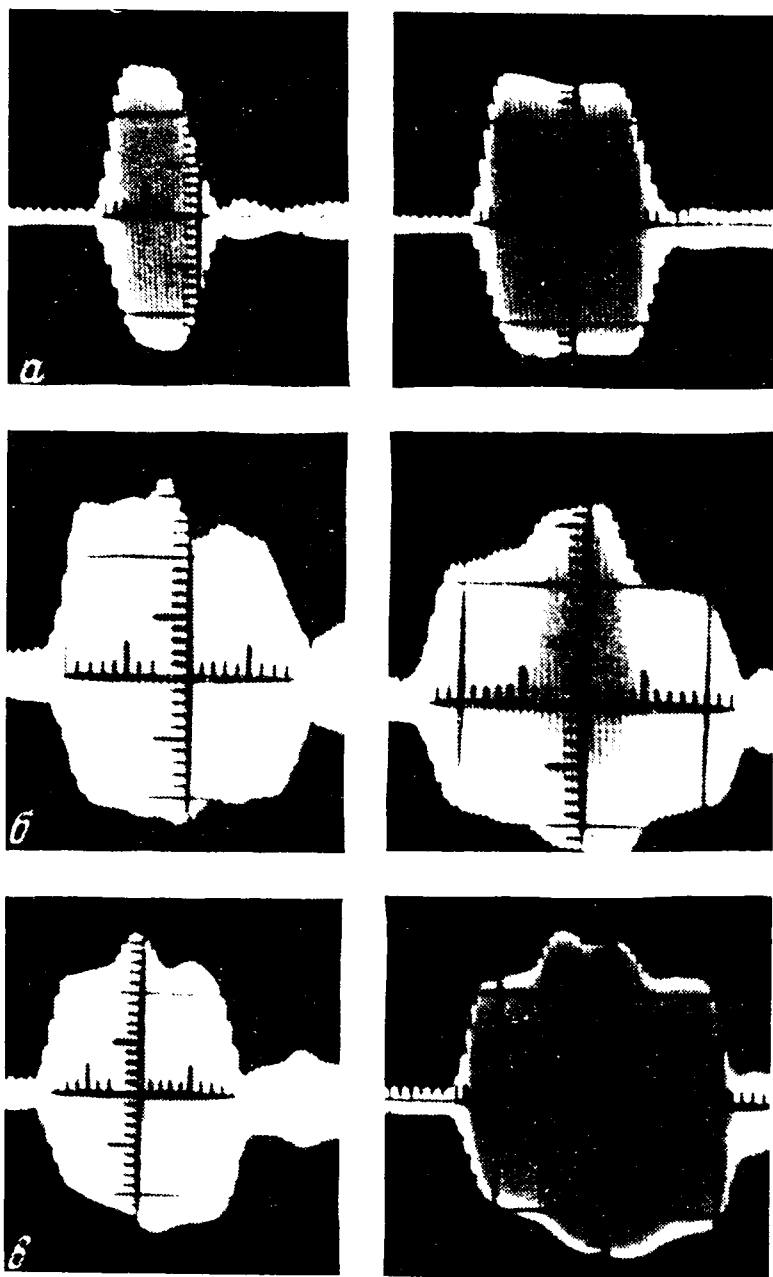


Рис. 11, а, б, в

теоретическими только качественно. Это обусловлено, по-видимому, в основном несоответствием теоретических идеализаций реальному положению вещей, заключающемуся в следующем:

- 1) действие излучателя на поверхность твердого тела не эквивалентно действию поверхностных напряжений;
- 2) распределения напряжений, создаваемых рассматриваемыми реальными излучателями рэлеевских волн, отличны от идеализированных (см. рис. 5) вследствие непоршнеобразных колебаний вырезанных прямоугольно кварцевых пластинок (см. [5]), неоднородности контактного переходного слоя, расхождения и затухания пучка продольных волн в материале клина (для метода клина) и несовершенств в изготовлении алюминиевой пластинки гребенчатого профиля (неодинаковая ширина пазов и выступов и прочее) для метода гребенчатой структуры;

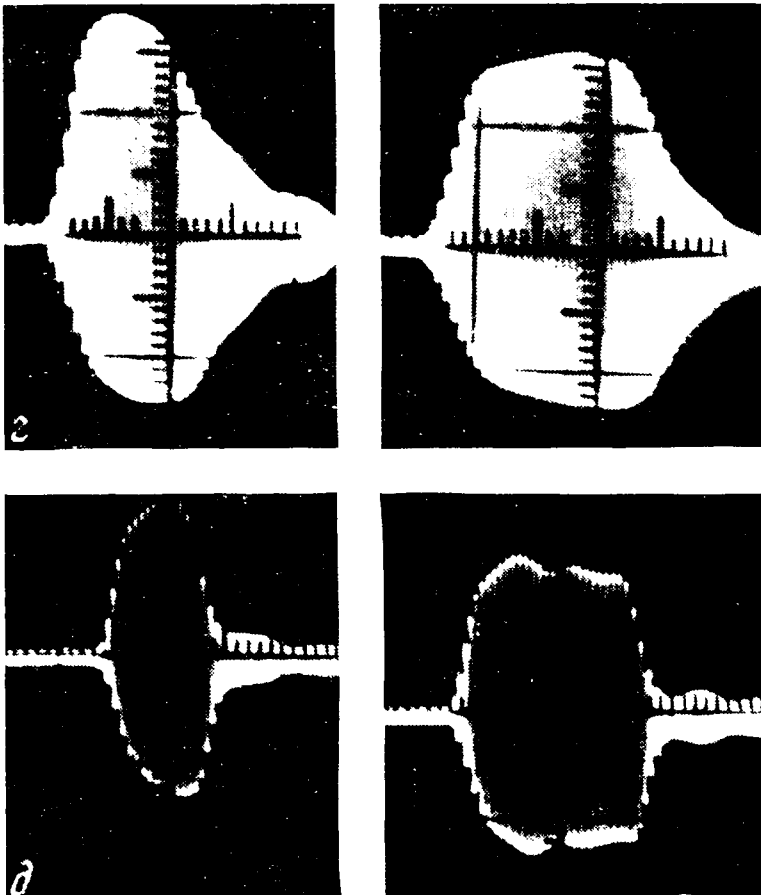


Рис. 11, г, д

3) при распространении вдоль поверхности акустического контакта излучателя и стержня рэлеевские волны затухают (что учитывалось лишь при построении теоретических кривых на рис. 10) вследствие чего вклад разных участков контактной поверхности излучателя в образование рэлеевской волны неодинаков. Кроме того, на различие экспериментальных и теоретических кривых могли сказаться ошибки эксперимента, в особенности ошибка измерения частоты  $\omega_0$ , влияющая на положение максимумов и минимумов экспериментальных кривых  $\hat{W}_{OR}(k_R a)$  и  $\hat{W}_{OR}(4a/\lambda_R)$  на рис. 7 и 8.

Из приведенного исследования ясно, что при возбуждении рэлеевских волн зависимость амплитуды этих волн от параметров излучателя имеет ряд характерных дополнительных особенностей по сравнению со случаем излучения объемных волн. Эти особенности описываются формулами (I.16) — (I.19), и при выборе того или иного метода возбуждения, а также при конструировании соответствующего излучателя их нужно учитывать.

### § 3. Затухание волн Рэля

Поскольку рэлеевские волны не проникают в глубь твердого тела, их амплитуда убывает с расстоянием как  $1/\sqrt{k_R R}$  ( $R$  — расстояние до источника), вследствие расхождения волнового пучка, излучаемого источником. Это убывание, — как у цилиндрических волн, т. е. оно происходит медленнее, чем у объемных волн, где аналогичная зависимость описывается законом  $1/k_{l,t} R$ . Именно благодаря этому рэлеевские волны являются основным типом волн, регистрируемых при землетрясениях.

Убыванию амплитуды рэлеевских волн вследствие поглощения и рассеяния звуковой энергии должны быть присущи особенности, характерные для продольных и поперечных волн, поскольку рэлеевская волна, как уже отмечалось, является комбинацией этих волн.

Поглощение и рассеяние рэлеевских волн на ультразвуковых частотах исследовано очень слабо. Затухание же объемных (продольных и поперечных) ультразвуковых волн изучено довольно подробно (см, например, монографию [5]). Поэтому немногочисленные работы по исследованию затухания рэлеевских волн посвящены в основном установлению связи между затуханием поверх-



ностных и объемных волн. В работах [16, 17] получена формула, связывающая коэффициенты затухания указанных волн. Приведем кратко ее вывод.

Рассмотрим упругую среду с потерями, где

$$\bar{k}_l = k_l' + ik_l'';$$

$$\bar{k}_t = k_t' + ik_t'';$$

$$\bar{k}_R = k_R' + ik_R''.$$

Пусть затухание продольных и поперечных волн мало ( $k_l' \gg k_l''$ ,  $k_t' \gg k_t''$ ) и одинаково во всех точках среды. Как будет видно из дальнейшего, затухание рэлеевских волн при этом так же мало и одинаково во всех точках среды. Запишем комплексные волновые числа продольной, поперечной и рэлеевской волн в виде

$$\bar{k}_l = k_l'(1 + i\alpha);$$

$$\bar{k}_t = k_t'(1 + i\beta); \quad (I. 20)$$

$$\bar{k}_R = k_R'(1 + i\gamma).$$

Здесь  $\alpha = k_l''/k_l'$ ;  $\beta = k_t''/k_t'$ ;  $\gamma = k_R''/k_R'$  — малые вещественные поправки, численно равные отнесенным к  $2\pi$  коэффициентам затухания продольной, поперечной и рэлеевской волн на длину соответствующей волны.

Для определения  $\bar{k}_R$  обратимся к характеристическому уравнению, которое при комплексных волновых числах имеет вид

$$\bar{\eta}^6 - 8\bar{\eta}^4 + 8\bar{\eta}^2(3 - 2\bar{\xi}^2) - 16(1 - \bar{\xi}^2) = 0, \quad (I. 21)$$

где

$$\bar{\eta}^2 = \bar{k}_t^2 / \bar{k}_R^2; \quad \bar{\xi}^2 = \bar{k}_l^2 / \bar{k}_t^2.$$

Данное уравнение получается из уравнения (1.7) заменой вещественных  $\eta$  и  $\xi$  соответствующими комплексными значениями. Подставим волновые числа (1.20) в выражения  $\bar{\eta}$  и  $\bar{\xi}$ , а полученные таким путем  $\bar{\eta}$  и  $\bar{\xi}$  — в уравнение (I.21). Сохраним в последнем члены порядка величины 1 и  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , отбросив члены порядка величины  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\gamma^2$  и выше. Приравнявая после этого нулю вещественную и мнимую части укороченного уравнения, получим два уравнения. Первое из них определяет вещественную часть волнового числа рэлеевской волны в рассматри-

ваемой среде через вещественные части волновых чисел продольной и поперечной волн, из второго имеем

$$\gamma = A\alpha + (1 - A)\beta. \quad (1.22)$$

Здесь

$$A = \frac{16\xi'^2(1 - \eta'^2)}{\eta'^2(3\eta'^4 - 16\eta'^2 - 16\xi'^2 + 24)},$$

$$\xi' = \frac{k'_t}{\bar{k}'_t}, \quad \eta' = \frac{k'_t}{k'_R}.$$

Таким образом, коэффициент затухания рэлеевской волны на длину волны есть линейная комбинация из аналогичных коэффициентов затухания продольных и поперечных волн. Величина  $A$  зависит только от коэффициента Пуассона  $\nu$ . На рис. 12 изображены рассчитанные

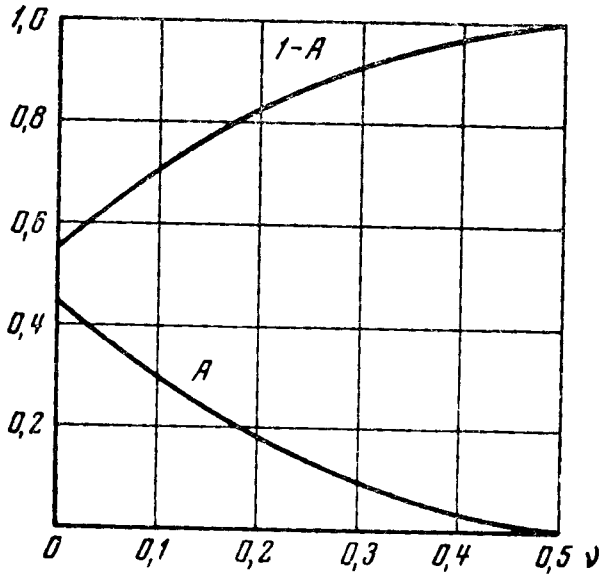


Рис. 12

нами кривые зависимостей  $A$  и  $1 - A$  [коэффициент при  $\beta$  в (1.22)] от  $\nu$ . Из графика видно, что для всех материалов удельный вес  $\beta$  в формуле (1.22) больше  $\alpha$ , т. е. при примерно одинаковых значениях величин  $\alpha$  и  $\beta$  коэффициент затухания рэлеевских волн  $\gamma$  определяется в основном коэффициентом затухания поперечных волн  $\beta$ . Так, например, для стали  $\gamma = 0,89\beta + 0,11\alpha$ , для алюминия  $\gamma = 0,93\beta + 0,07\alpha$ , для резины ( $\nu = 0,5$ )  $\gamma = \beta$ .

В [16] приведены результаты опытов по проверке формулы (I.22), проводившихся на плексигласовых образцах импульсным методом в диапазоне частот 20—180 кГц. Эти опыты хорошо подтверждают зависимость между коэффициентами затухания продольных (точки на рис. 13), поперечных (кружки) и рэлеевских (треугольники) волн, даваемую (I.22) (на рис. 13 сплошные прямые — линейные приближения экспериментальных зависимостей, полученные по методу наименьших квадратов; пунктирная прямая — расчетная зависимость коэффициента затухания рэлеевских волн).

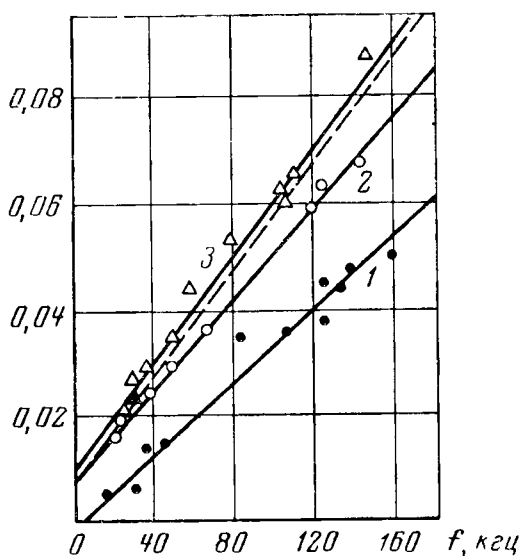


Рис. 13

В работе [9] измерялись коэффициенты затухания поверхностных рэлеевских и продольных ультразвуковых волн в дюрали, сплаве МА-3 и плавленом кварце на частотах 2,5—8 МГц. Коэффициенты затухания рэлеевских и продольных волн получились одного порядка, что в некоторой мере подтверждает формулу (I.22).

В работе [18] проведена проверка соотношения (I.22) в мегагерцевом диапазоне частот для трех твердых материалов различного типа: металла (дюраль), стекла (зеркальное стекло) и пластмассы (полистирол). Измерение затухания в этих материалах производилось импульсным методом на частотах 1 и 3 МГц (наиболее употребительных в ультразвуковой дефектоскопии) при длительности импульса 10 мксек. Образцами служили прямоугольные бруски и плиты. Продольные и поперечные волны возбуждались и принимались кварцевыми пластинками X- и Y-срезов, расположенными на параллельных плоскостях бруска и плиты. Рэлеевские волны в дюрали и стекле возбуждались и принимались методом клина, а в полистироле — методом пластинки гребенчатого профиля. Акустические контакты кварцевых пластинок Y-среза с поверхностями образцов осуществлялись

Материал	$c_l$ , $10^5 \frac{см}{сек}$	$c_t$ , $10^5 \frac{см}{сек}$	$c_R$ , $10^5 \frac{см}{сек}$	$\nu$	При частоте			
					$\delta_l$ , $\frac{непер}{см}$	$\delta_t$ , $\frac{непер}{см}$	$\delta_R$ , $\frac{непер}{см}$	$\alpha \cdot 10^3$
Дюраль . . .	6,02	3,00	2,90	0,335	0,0034	0,0055	0,0049	2,05
Стекло . . .	5,31	2,60	2,43	0,342	0,0050	0,020	0,023	2,65
Политириол	2,28	1,05	0,984	0,365	0,028	0,15	0,14	6,46

тонким слоем эпоксидной смолы, во всех остальных случаях акустические контакты осуществлялись при помощи касторового масла. При расчете всех коэффициентов затухания по экспериментальным данным учитывалось убывание с расстоянием амплитуды сигнала на приемнике из-за расхождения волнового пучка. При расчете коэффициентов затухания объемных волн по амплитудам последующих сигналов на приемнике, которые соответствовали однократному, трехкратному и т. д. пробегам импульсов длины образца, учитывалось также уменьшение амплитуды сигнала из-за наличия на отражающих поверхностях излучающей и приемной кварцевых пластинок. Относительная ошибка определения коэффициентов затухания по описанной методике составляет  $\approx 20\%$ .

Параллельно с измерением затухания измерялись также скорости  $c_l$ ,  $c_t$  в исследуемых материалах. Скорости измерялись импульсным методом при помощи жидкостной линии задержки с плавной регулировкой времени задержки, служащей для отсчета времени распространения импульса в образце. По скоростям  $c_l$ ,  $c_t$  рассчитывался коэффициент Пуассона  $\nu$ , а затем вычислялась скорость поверхностных волн  $c_R$ .

В табл. 3 приведены результаты измерений. Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  вычислялись по измеренным на опыте значениям коэффициентов затухания продольных ( $\delta_l$ ), поперечных ( $\delta_t$ ) и рэлеевских ( $\delta_R$ ) волн согласно соотношениям  $\alpha = \delta_l \lambda_l$ ,  $\beta = \delta_t \lambda_t$ ,  $\gamma = \delta_R \lambda_R$ . Коэффициент  $\gamma_{теор}$  рассчитывался на основании значений  $\alpha$  и  $\beta$  по формуле (I.22). Как видно из таблицы, относительное различие экспериментальных и теоретических значений  $\gamma$  составляет в среднем 15—20%, что хорошо подтверждает зависимость между коэффициентами затухания объемных и поверхностных рэлеевских волн, описываемую формулой (I.22).

Таблица 3

1 Мгц			При частоте 3 Мгц						
$\beta \cdot 10^3$	$\gamma \cdot 10^3$	$\gamma_{\text{теор}} \cdot 10^3$	$\delta_l \cdot \frac{\text{непер}}{\text{см}}$	$\delta_t \cdot \frac{\text{непер}}{\text{см}}$	$\delta_R \cdot \frac{\text{непер}}{\text{см}}$	$\alpha \cdot 10^3$	$\beta \cdot 10^3$	$\gamma \cdot 10^3$	$\gamma_{\text{теор}} \cdot 10^3$
1,65	1,42	1,67	0,0061	0,014	0,018	1,22	1,40	1,77	1,40
5,10	5,70	4,90	0,023	0,043	0,046	4,02	3,70	3,73	3,72
15,5	13,3	14,9	0,077	0,28	0,22	5,80	9,77	12,8	9,50

#### § 4. Рэлеевские волны на цилиндрических и сферических поверхностях

Рэлеевские волны могут распространяться не только по плоской, но и по цилиндрической поверхности. В монографии [19] рассматривался вопрос о влиянии цилиндрической кривизны поверхности на фазовую скорость плоской гармонической рэлеевской волны. Получено характеристическое уравнение и приведены кривые зависимости фазовой скорости от кривизны поверхности для двух значений коэффициента Пуассона. В работе [20] подробно исследовалось распространение рэлеевских волн на выпуклой и вогнутой цилиндрических поверхностях. Приведем здесь схему расчета и основные результаты этого исследования.

Под выпуклой и вогнутой цилиндрическими поверхностями будем понимать поверхности бесконечного круглого цилиндра и цилиндрической полости кругового сечения в бесконечной упругой среде. В обоих случаях ограничимся плоской задачей, когда в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  поле в упругой среде не зависит от  $z$ , причем будем рассматривать установившиеся гармонические колебания, когда зависимость поля от времени дается множителем  $e^{-i\omega t}$ . Аналогом рэлеевских волн в этом случае можно считать такое решение уравнений теории упругости, которое имеет следующие свойства:

1) удовлетворяет условию отсутствия напряжений на цилиндрической поверхности;

2) зависит от угловой координаты  $\theta$  по закону  $e^{+ip\theta}$ , где  $p$  — некоторая безразмерная величина, которую можно назвать угловым волновым числом;

3) при стремлении радиуса кривизны цилиндрической поверхности  $R$  к бесконечности и конечном отношении

$p/R$  переходит в обычную рэлеевскую волну, бегущую вдоль плоской границы упругого полупространства с вакуумом.

Чтобы избежать искусственного ограничения задачи случаем целых значений  $p$ , мы, пользуясь методом Малюжинца [15], будем рассматривать решение в бесконечном угловом интервале  $-\infty < \theta < +\infty$ , считая ось  $r=0$  линией разветвления бесконечного порядка. При этом в задаче для сплошного цилиндра мы налагаем на решение дополнительное требование ограниченности при  $r=0$ . При таком подходе различные значения решения в интервалах  $n < \theta/2\pi < n+1$  для различных целых  $n$  естественно интерпретируются как поля, соответствующие последовательным пробегам волны вокруг цилиндра.

Решения обеих задач мы выразим через потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  продольных и сдвиговых волн, удовлетворяющих уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k_i^2 \varphi &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k_i^2 \psi &= 0. \end{aligned} \quad (I.23)$$

Компоненты смещения  $U_r$ ,  $U_\theta$  и напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  можно представить через  $\varphi$  и  $\psi$  по формулам:

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ U_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}; \end{aligned} \quad (I.24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) + \\ &+ \lambda \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \quad (I.25) \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

### *Выпуклая цилиндрическая поверхность*

Единственными решениями уравнений (I.23), зависящими от  $\theta$  только через множитель  $e^{ip\theta}$  и ограниченными при  $r=0$ , являются:

$$\begin{aligned} \varphi &= Ae^{ip\theta} I_p(k_i r); \\ \psi &= Be^{ip\theta} I_p(k_i r), \end{aligned} \quad (I.26)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные,  $I_p(k_l r)$ ,  $I_p(k_t r)$  — функции Бесселя порядка  $p$ . Угловое волновое число  $p$  равно  $2\pi R/\lambda$ ,  $R$  — радиус цилиндра,  $\lambda$  — длина пространственной периодичности на поверхности цилиндра (ее не следует смешивать с упругой постоянной Ламе). В дальнейшем мы будем называть решение поверхностной волной (в отличие от рэлеевской волны, которая распространяется по плоской поверхности),  $\lambda$  — длиной поверхностной волны,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновым числом, а  $c = \omega/k$  — фазовой скоростью этой волны. Так как мы рассматриваем волну, бегущую по  $\theta$ , то  $p$  может быть и целым, и дробным.

Условие равенства нулю напряжений  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{r\theta}$  при  $r = R$  дает нам с учетом (I.26) два уравнения. Используя тождественные соотношения между бесселевыми функциями, мы можем записать эти уравнения так:

$$\frac{B}{A} = \frac{I_{p-2}(x) - I_{p+2}(x)}{I_{p-2}(y) + I_{p+2}(y)} \cdot \frac{k_l^2}{k_t^2} i; \quad (I.27)$$

$$\frac{I_{p+2}(x) + I_{p-2}(x) - 2 \left( \frac{k_l^2}{k_t^2} - 1 \right) I_p(x)}{I_{p+2}(x) - I_{p-2}(x)} = \frac{I_{p+2}(y) - I_{p-2}(y)}{I_{p+2}(y) + I_{p-2}(y)}, \quad (I.28)$$

где  $x = k_l R$ ,  $y = k_t R$ .

Первое из этих уравнений дает амплитудное соотношение между  $\varphi$  и  $\psi$  при известном  $p$ . Второе уравнение есть характеристическое уравнение для данного случая, определяющее связь  $p$  с  $x$  и  $y$ , т. е. определяющее волновое число  $k$  при заданном радиусе цилиндра  $R$ . Можно легко убедиться, что при заданном радиусе цилиндра  $R$ , т. е. при заданных  $x$  и  $y$ , существует много значений  $p$ , удовлетворяющих уравнению (I.28). Каждое из этих значений  $p$  определяет фазовую скорость соответствующей волны. Мы исследуем волну, которая локализована вблизи поверхности и которая переходит в волну рэлеевскую при бесконечном увеличении радиуса кривизны поверхности. Такой волне соответствует только один корень уравнения (I.28), т. е. одно значение  $p$  при заданном  $R$ , и наоборот. Мы будем проводить решение уравнения (I.28) только для этого корня.

Это уравнение удобно решать графически, задавая значение  $p$  и находя точку пересечения кривых, соответ-

ствующих левой и правой частям уравнения. Результаты решения приведены на рис. 14 для сред с коэффициентом Пуассона  $\nu=0,25$  (кривая 1) и  $\nu=0,34$  (кривая 2). По оси ординат отложены отношения фазовых скоростей поверхностных волн к фазовым скоростям рэлеевских

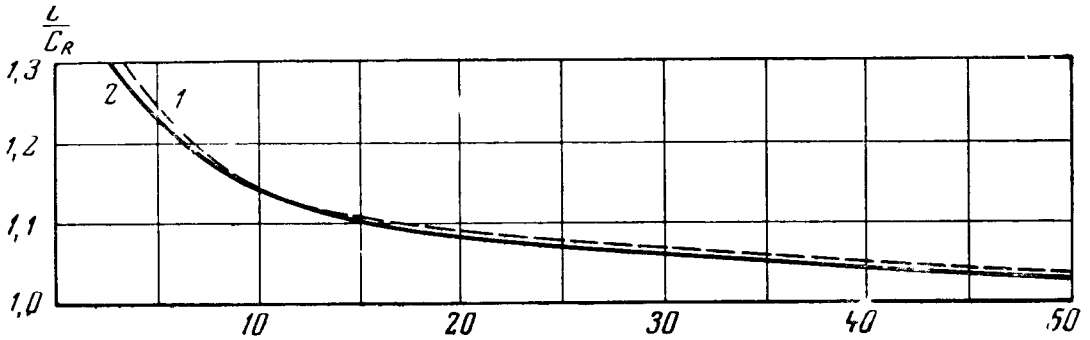


Рис. 14

волн в соответствующих средах, по оси абсцисс —  $p = 2\pi R/\lambda$ . Как видно из графика, отношения  $c/c_R$  для этих сред при одном и том же значении  $p$  практически одинаковы. Кроме того, из графика видно, что  $c > c_R$  и  $c \rightarrow c_R$  при  $p \rightarrow \infty$ . Последнее обстоятельство отражает тот факт, что поверхностная волна переходит в рэлеевскую при  $p \rightarrow \infty$ . Это можно легко проверить, взяв асимптотические представления  $I_p(k_t r)$ ,  $I_p(k_t R)$ ,  $I_p(k_t R)$ ,  $I_p(k_t R)$  при  $p \rightarrow \infty$  и  $(R-h)/r \rightarrow 0$  [22]. Уравнение (I.28) переходит тогда в обычное уравнение Рэля, а выражения (I.26) — в аналогичные выражения для плоской рэлеевской волны, бегущей на границе упругого полупространства с вакуумом.

Исследуемая поверхностная волна похожа на рэлеевскую: ее фазовая скорость  $c$  близка к  $c_R$ , а смещения сосредоточены в тонком поверхностном слое порядка длины волны. Смещения вычисляются по формулам (I.24) с учетом (I.27) и (I.28). На рис. 15 приведены зависимости амплитуд смещений от глубины для среды с коэффициентом Пуассона 0,25 для трех значений  $p$ :  $p=5$ ,  $p=41$ ,  $p=\infty$  (последний случай соответствует, конечно, рэлеевской волне, на рисунке  $\hat{U}_{r0}$  означает амплитуду радиального смещения в поверхностной волне при  $r=R$ ). Приведенные зависимости показывают, что в поверхностной волне смещения убывают несколько быстрее с удалением от поверхности, чем в рэлеевской волне, при-



чем тем быстрее, чем меньше  $\rho = kR$ . При  $r=0$  смещения в поверхностной волне равны нулю, в то время как в рэлеевской волне смещения не исчезают ни при какой глубине. Качественно приведенные зависимости смещений от глубины сохраняются для любой упругой среды.

При больших значениях  $\rho$  (порядка 100 и больше) для фазовой скорости поверхностной волны справедливо выражение

$$c = c_R(1 + \delta), \quad (I.29)$$

где  $\delta$  — малая поправка, зависящая от упругих свойств

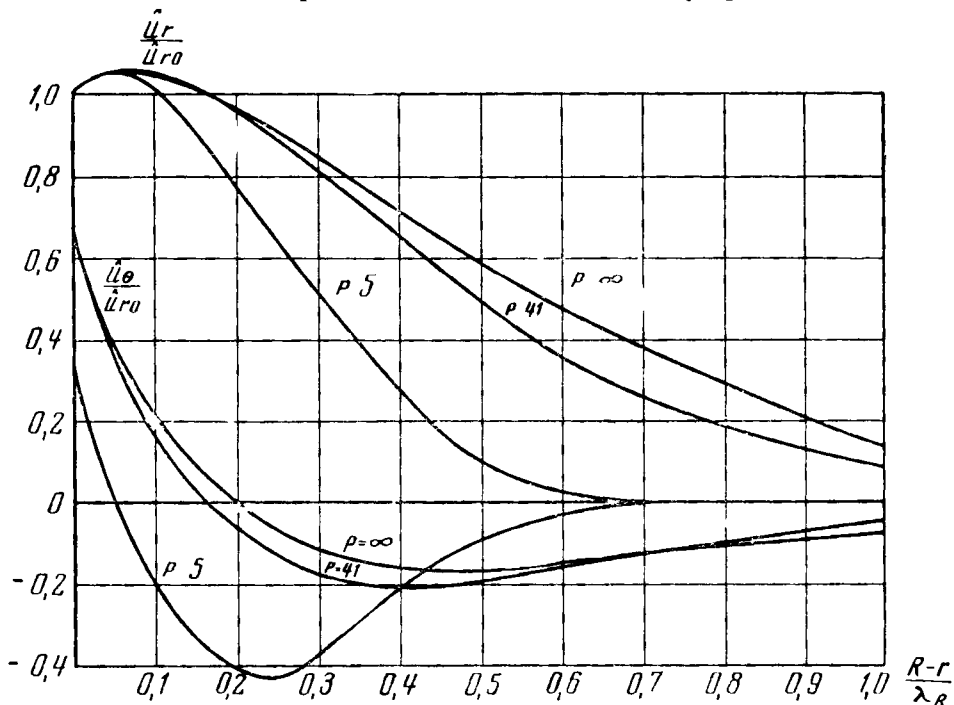


Рис 15

среды и  $\rho$ , причем  $\delta \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow \infty$ . Для ее нахождения удобно переписать уравнение (I.28) в виде

$$\frac{I_{\rho-2}(x)}{I_\rho(y)} \cdot \frac{I_{\rho+2}(y)}{I_\rho(y)} + \frac{I_{\rho+2}(x)}{I_\rho(x)} \cdot \frac{I_{\rho-2}(y)}{I_\rho(y)} - \left( \frac{k_t^2}{k_l^2} - 1 \right) \left[ \frac{I_{\rho+2}(y)}{I_\rho(y)} + \frac{I_{\rho-2}(y)}{I_\rho(y)} \right] = 0. \quad (I.30)$$

При больших значениях аргумента ( $x$  и  $y$ ), а также индекса ( $\rho$ ) и при условии, что аргумент меньше индекса ( $k_l R, k_t R < kR$ ), что в данном случае всегда выполняется, поскольку  $c_R < c_t < c_l$ , для функций Бесселя справедливо следующее

асимптотическое представление через полусходящиеся ряды Дебая [22]

$$I_p(\gamma) = \frac{e^{p(\text{th } \alpha - \alpha)}}{\sqrt{2\pi p \text{th } \alpha}} \left[ 1 + \frac{1}{p} \left( \frac{1}{8} \text{cth } \alpha - \frac{5}{24} \text{cth}^3 \alpha \right) + \dots \right], \quad (1.31)$$

где  $p/\gamma = \text{ch } \alpha$ . Воспользовавшись этим представлением, найдем приближенное выражение для левой части уравнения (1.30) с точностью до членов порядка  $1/p^2$ . Приравнявая его к нулю, получим приближенное частотное уравнение. Старшие члены в нем — порядка единицы; они образуют уравнение для определения  $c_R$ . Оставшиеся члены дают уравнение для нахождения  $\delta$ , из которого получаем

$$\delta = \frac{\left[ 1 + \frac{s_R}{q_R} + \frac{k_R}{2s_R} \left( 1 - \frac{s_R^2}{q_R^2} \right) \right] e^{2\text{arcth } \frac{q_R}{k_R} - 2\text{arcth } \frac{s_R}{k_R}}}{D} +$$

$$+ \frac{\left[ 1 + \frac{s_R}{q_R} - \frac{k_R}{2s_R} \left( 1 - \frac{s_R^2}{q_R^2} \right) \right] e^{-2\text{arcth } \frac{q_R}{k_R} + 2\text{arcth } \frac{s_R}{k_R} - \frac{2s_R^2}{k_t^2} \left( \frac{k_t^2}{k_l^2} - 1 \right)}}{D},$$

$$D = k_R R \left[ \left( 1 - \frac{s_R}{q_R} \right) \left( e^{2\text{arcth } \frac{q_R}{k_R} - 2\text{arcth } \frac{s_R}{k_R}} - e^{-2\text{arcth } \frac{q_R}{k_R} + 2\text{arcth } \frac{s_R}{k_R}} \right) + \frac{4k_R s_R}{k_t^2} \left( \frac{k_t^2}{k_l^2} - 1 \right) \right]. \quad (1.32)$$

Таким образом, фазовая скорость  $c = c_R (1 + \delta)$  поверхностной волны на выпуклой цилиндрической поверхности имеет поправку  $\delta$  (по сравнению с  $c_R$ ), пропорциональную  $1/k_R R$ . Легко убедиться, что  $\delta > 0$  для любой упругой среды.

Групповую скорость можно найти по известному соотношению между фазовой и групповой скоростями. Оказывается, что при данном приближении для фазовой скорости  $c^{\text{FP}} = c_R$ , т. е. групповая скорость имеет поправку порядка  $(1/k_R R)^2$ .

#### Вогнутая цилиндрическая поверхность

В данном случае единственными решениями (1.23), зависящими от  $\theta$  по закону  $e^{i p \theta}$  и удовлетворяющими принципу погашаемости [15] во всей области  $r \geq R$ , будут

$$\begin{aligned}\varphi &= Ae^{ip\theta} H_p^{(1)}(k_l r); \\ \psi &= Be^{ip\theta} H_p^{(1)}(k_l r).\end{aligned}\tag{I.33}$$

Здесь  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные;  $H_p^{(1)}(k_l r)$ ,  $H_p^{(1)}(k_l r)$  — функции Ганкеля первого рода порядка  $p$ . Уравнения (I.27) и (I.28) заменяются аналогичными:

$$\frac{B}{A} = \frac{H_{p-2}^{(1)}(x) - H_{p+2}^{(1)}(x)}{H_{p-2}^{(1)}(y) + H_{p+2}^{(1)}(y)} \cdot \frac{k_l^2}{k_t^2} i,\tag{I.34}$$

$$\frac{H_{p+2}^{(1)}(x) + H_{p-2}^{(1)}(x) - 2\left(\frac{k_l^2}{k_t^2} - 1\right)H_p^{(1)}(x)}{H_{p+2}^{(1)}(x) - H_{p-2}^{(1)}(x)} = \frac{H_{p+2}^{(1)}(y) - H_{p-2}^{(1)}(y)}{H_{p+2}^{(1)}(y) + H_{p-2}^{(1)}(y)}.\tag{I.35}$$

Последнее уравнение есть частотное уравнение для данного случая. Будем исследовать его решение, соответствующее волне, локализованной у поверхности. Очевидно, что даже при вещественных  $x$  и  $y$  это уравнение удовлетворяется только для комплексного  $p = p_1 + ip_2$ . Волновое число  $k$  при этом тоже является комплексным:

$$k = k_1 + ik_2.\tag{I.36}$$

Поскольку  $p = kR$ , то

$$p_1 = k_1 R, \quad p_2 = k_2 R.\tag{I.37}$$

Таким образом, поверхностная волна на вогнутой цилиндрической поверхности будет распространяться с затуханием. Это затухание связано с радиальным излучением энергии в среду, которое производится поверхностной волной в данном случае. В самом деле при  $r \gg R$  функции  $H_p^{(1)}(k_l r)$  и  $H_p^{(1)}(k_t r)$  из (I.33) представляют собой цилиндрические волны, уходящие по радиусу.

Заменим функции Ганкеля в уравнении (I.35) их выражениями через функции Бесселя  $I_p(x)$ ,  $I_p(y)$  и Неймана  $N_p(x)$ ,  $N_p(y)$  того же порядка.

Используем для функций Бесселя  $I_p(x)$  и  $I_p(y)$  при больших значениях  $p$  ( $p > 100$ ) асимптотическое представление (I.31), для функций Неймана возьмем аналогичное представление [22]. Тогда можно показать, что при  $k_1 R \rightarrow \infty$  уравнение (I.35) переходит в уравнение Рэлея, а выражения (I.33) — в соответствующие выра-

жения для рэлеевской волны, т. е. поверхностная волна переходит в рэлеевскую при  $k_1 R \rightarrow \infty$ , как и в случае выпуклой поверхности при  $kR \rightarrow \infty$ .

При больших, но конечных  $k_1 R$ , для волнового числа поверхностной волны справедливо следующее представление:

$$k = k_R(1 - \zeta) + ik_2. \quad (I.38)$$

Здесь  $k_2$  — мнимая часть волнового числа;  $k_2 \rightarrow 0$  при  $k_1 R \rightarrow \infty$ ;  $\zeta$  — малая поправка, зависящая от упругих свойств среды и значения  $k_1 R$  и исчезающая при  $k_1 R \rightarrow \infty$ . Для фазовой скорости волны соответственно получим выражение

$$c = c_R(1 + \zeta). \quad (I.39)$$

Пользуясь асимптотическими представлениями для функций Бесселя и Неймана и предполагая, что  $k_1 R$  по порядку величины не больше единицы (как увидим ниже, это предположение справедливо), получим из вещественной и мнимой частей уравнения (I.35) после ряда преобразований следующие выражения для  $\zeta$  и  $k_2$ :

$$\zeta^3 = -\delta, \quad (I.40)$$

$$k_2 = \frac{q_R s_R (k_R^2 + s_R^2)^2}{4k_R (q_R - s_R) [k_R^2 (q_R - s_R) + 2q_R s_R^2]} e^{-2k_1 R} \left( \operatorname{arctg} \frac{s_1}{k_1} - \frac{s_1}{k_1} \right), \quad (I.41)$$

где  $s_1 = \sqrt{k_1^2 - k_t^2}$ .

Сравнивая (I.40) и (I.32), замечаем, что поправки к фазовым скоростям поверхностных волн на выпуклой и вогнутой цилиндрических поверхностях одного и того же радиуса  $R$  отличаются только знаками (следовательно, всегда  $\zeta < 0$ ). Групповая скорость волн на вогнутой цилиндрической поверхности, как и в случае выпуклой цилиндрической поверхности, равна  $c_R$  с точностью до членов порядка  $(1/k_R R)^2$ . Из выражения (I.41) следует, что предположение о малости  $k_2 R$  оправдано — мнимая часть волнового числа  $k_2$  при больших значениях  $k_1 R$  мала ( $k_2 \sim e^{-2k_1 R}$ ).

Используя формулу (I.41), нетрудно вычислить коэффициент  $\gamma$  дополнительного затухания из-за излучения в глубь поверхностной волны на длину рэлеевской волны на вогнутой цилиндрической поверхности по соотношению  $\gamma = k_2 \lambda_R = \frac{k_2}{k_R} 2\pi$ . При  $k_R R \simeq 100$  ( $R/\lambda_R \simeq 20$ ) относительная погрешность

вычисления  $\gamma$  и  $k_2$  ничтожна; она порядка величины  $1/(k_R R)^2$ . При  $k_R R \simeq 30$  ( $R/\lambda_R \simeq 5$ ) относительная погрешность не превышает 30%. Поэтому формулу (I.41) можно использовать для приближенных расчетов  $\gamma$  и  $k_2$  и при сравнительно небольших значениях  $k_R R$ . На рис. 16 изображены зависимости  $\ln \gamma$  от  $R/\lambda_R$ . Как видно из рис. 16, дополнительное затухание поверхностных волн на вогнутой цилиндрической поверхности сильно зависит от кривизны поверхности. При  $R/\lambda_R \simeq$

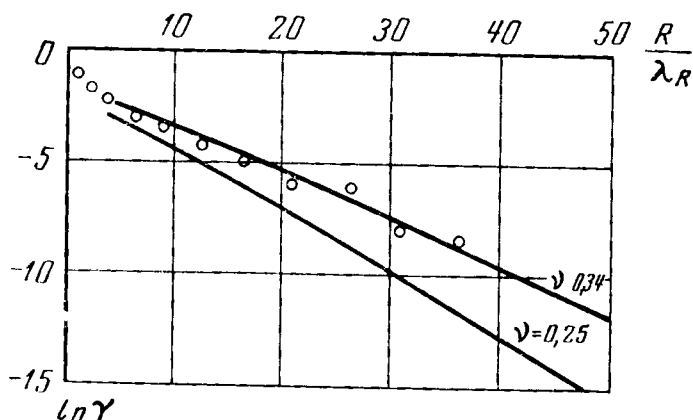


Рис. 16

$\simeq 5$  ( $k_R R \simeq 30$ ) затухание весьма значительно, а при  $R/\lambda_R \simeq \simeq 50$  ( $k_R R \simeq 300$ ) оно ничтожно мало. Для наглядности ниже

приведены значения величины  $e^{\frac{\pi R}{\lambda_R} \gamma}$  для некоторых радиусов кривизны цилиндрической поверхности, характеризующие затухание поверхностной волны на вогнутой цилиндрической поверхности на пути, равном длине полуокружности радиуса  $R$  (в начале пути амплитуда волны предполагается равной единице):

$R/\lambda_R^*$	5	10	15	20	30	50
$e^{-\frac{\pi R}{\lambda_R} \gamma}$	0,280	0,340	0,555	0,751	0,948	0,999

\* Приведенные данные относятся к случаю  $\nu=0,34$ .

В работах [23, 24], на которых мы более подробно остановимся в дальнейшем, описаны эксперименты, позволяющие определить значения фазовых скоростей поверхностных волн на выпуклой и вогнутой цилиндрических поверхностях при сравнительно небольших радиу-

сах кривизны поверхности ( $R/\lambda_R \sim 1 \div 2$ ). Полученные экспериментальные значения фазовых скоростей хорошо согласуются с теоретическими.

Экспериментальное исследование распространения поверхностных волн рэлеевского типа на цилиндрических поверхностях описано в работе [21], целью которой являлась опытная проверка изложенных выше теоретических выводов о затухании таких волн на выпуклой и вогнутой цилиндрических поверхностях. Опыты проводились в импульсном режиме на частоте  $2,65 \text{ МГц}$  при длительности импульса  $10 \text{ мксек}$  (вогнутая цилиндрическая поверхность) и  $5 \text{ мксек}$  (выпуклая цилиндрическая поверхность). В качестве выпуклых и вогнутых цилиндрических поверхностей, на которых исследовалось затухание, использовались боковые поверхности дюралевых дисков с радиусами  $R=5-85 \text{ мм}$  и толщиной  $25 \text{ мм}$  и поверхности полуцилиндрических выемок радиусом  $1-50 \text{ мм}$ , прорезанных в боковых поверхностях дюралевых стержней с прямоугольным сечением  $25 \times 70 \text{ мм}$  (см. рис. 18). В качестве плоской поверхности, на которой измерялось затухание, служила боковая поверхность дюралевого стержня такого же прямоугольного сечения (контрольный стержень). Торцы контрольного стержня (рис. 17) были срезаны не под прямыми углами к оси и представляли двугранную поверхность (об этом см. ниже). Поскольку величина коэффициента затухания рэлеевских волн сильно зависит от структуры материала и степени обработки поверхности, то, с целью устранения этих факторов, все диски и стержни изготовлялись из одного листа дюрала Д16, а плоские и цилиндрические исследуемые поверхности были обработаны строго одинаково.

Определение затухания волн на вогнутой цилиндрической поверхности производилось следующим образом (см. рис. 17). Сравнивались амплитуды импульсов на индикаторе при положении клиновых излучателя и приемника у краев полуцилиндрической выемки радиуса  $R$  (амплитуда  $A_1$ ) и на поверхности контрольного стержня на расстоянии  $\pi R$  (амплитуда  $A_2$ ). Отношение  $A_2/A_1$ , деленное на произведение коэффициентов прохождения рэлеевских волн с плоской поверхности стержня на цилиндрическую поверхность выемки  $K'$  и с цилиндрической поверхности выемки на поверхность стержня  $K''$ ,

равно  $e^{-\frac{\pi R}{\lambda_R} \gamma}$ , где  $\gamma$  — коэффициент того дополнительного затухания на пути  $\lambda_R$ , которое существует на цилиндрической поверхности по сравнению с плоской. При расчете  $\gamma$  предполагалось, что  $K' = K''$ . Коэффициент  $K'$  определялся экспериментально как коэффициент прохождения рэлеевской волны с одной грани упругого

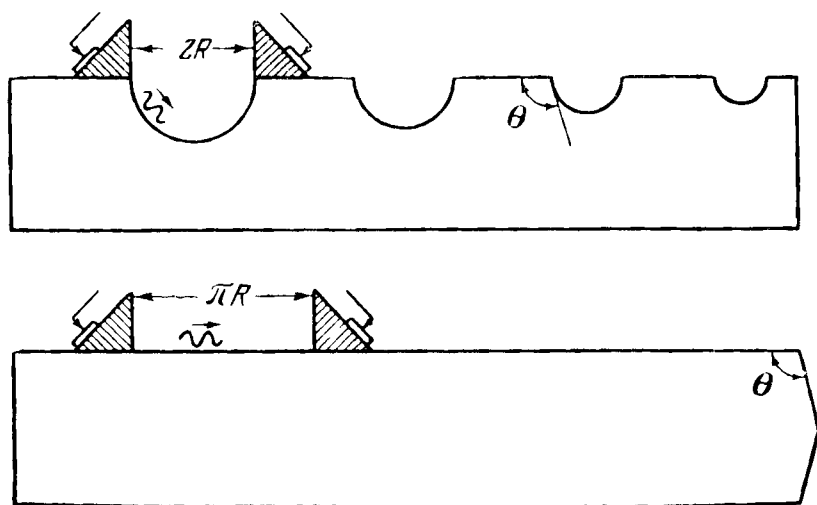


Рис. 17

клина раствора  $\theta$  на другую, где  $\theta \sim 90^\circ$  — двугранный угол между плоской поверхностью стержня и касательной плоскостью, проведенной к поверхности выемки на глубине половины слоя локализации рэлеевской волны (см. рис. 17). Соответствующие измерения проводились на боковых и торцовых поверхностях контрольного стержня. Для малых  $R$  ( $R \sim \lambda_R$ ) в коэффициент  $K'$ , на основе данных из [24], вводилась поправка, учитывающая преобразование рэлеевских волн на плоской поверхности в поверхностные рэлеевские волны на цилиндрической поверхности, заметно отличающиеся от первых при  $R \sim \lambda_R$ . Для устранения нестабильного влияния переходного слоя масла между поверхностями излучающей, приемной призмы и стержня на результаты измерений  $A_1$  и  $A_2$  эти измерения повторялись 20 раз, после чего производилось усреднение. В результате максимальная случайная ошибка измерения амплитуд  $A_1$  и  $A_2$ , вносимая нестабильностью акустического контакта,

уменьшалась от 40% (при одиночном измерении) до 2%, что было вполне приемлемо. Напряжение на излучателе при этом контролировалось и поддерживалось постоянным. Такое же усреднение применялось и в опытах с выпуклыми цилиндрическими поверхностями. Суммарная ошибка определения  $\gamma$  по описанной методике не превышала 15% при  $R/\lambda_R \sim 10$  и составляла  $\simeq 30\%$  при  $R/\lambda_R \sim 40$ , когда абсолютная величина  $\gamma$  становилась весьма малой. Эта ошибка вызывалась погрешностью аппаратуры, случайной ошибкой измерений. Кроме того, причиной ошибки могло быть некоторое возможное изменение поглощения и рассеяния поверхностных рэлеевских волн на вогнутой цилиндрической поверхности (по сравнению с плоской), вызванное не геометрией поверхности, а некоторым различием в скорости и структуре рэлеевских волн на плоской и цилиндрической поверхностях. Отметим, что подобный источник ошибки мог быть также и в опытах с выпуклыми цилиндрическими поверхностями, описанных ниже.

Экспериментальные значения  $\gamma$  показаны на рис. 16 точками. Как видно из рисунка, эти значения удовлетворительно совпадают с соответствующими теоретическими (кривая для  $\nu=0,34$ ). Указанное совпадение подтверждает правильность приближенной расчетной формулы (1.41) в широком интервале  $k_R R$  ( $k_R R \gtrsim 30$ ,  $R/\lambda_R \gtrsim 5$ ).

Экспериментальные исследования затухания поверхностных волн на выпуклых цилиндрических поверхностях имели целью показать отсутствие дополнительного затухания поверхностных рэлеевских волн на этих поверхностях по сравнению с плоской поверхностью. Для этого измерялось ослабление амплитуды импульса поверхностных волн с расстоянием от излучателя при распространении по выпуклым цилиндрическим поверхностям различного радиуса, включая и  $R = \infty$  (плоская поверхность). Излучателем волн в этих опытах служила квадратная титанатовая пластинка размером  $9 \times 9$  мм с собственной резонансной частотой  $2,5$  МГц, закрепленная неподвижно на указанных поверхностях и имеющая с ними акустический контакт посредством слоя касторового масла. При малых  $R$  ( $R \sim 5 \div 10 \lambda_R$ ) эта пластинка служила и приемником поверхностных волн, измерявшим ряд последовательных значений амплитуд импульса поверхностных волн, соответствующих последовательным



пробегам импульса по окружности диска. Из указанного ряда значений амплитуд с учетом коэффициента ослабления импульса в результате его прохождения через участок контакта пластинки и диска легко можно было вычислить искомое спадание амплитуды импульса при удалении от излучателя.

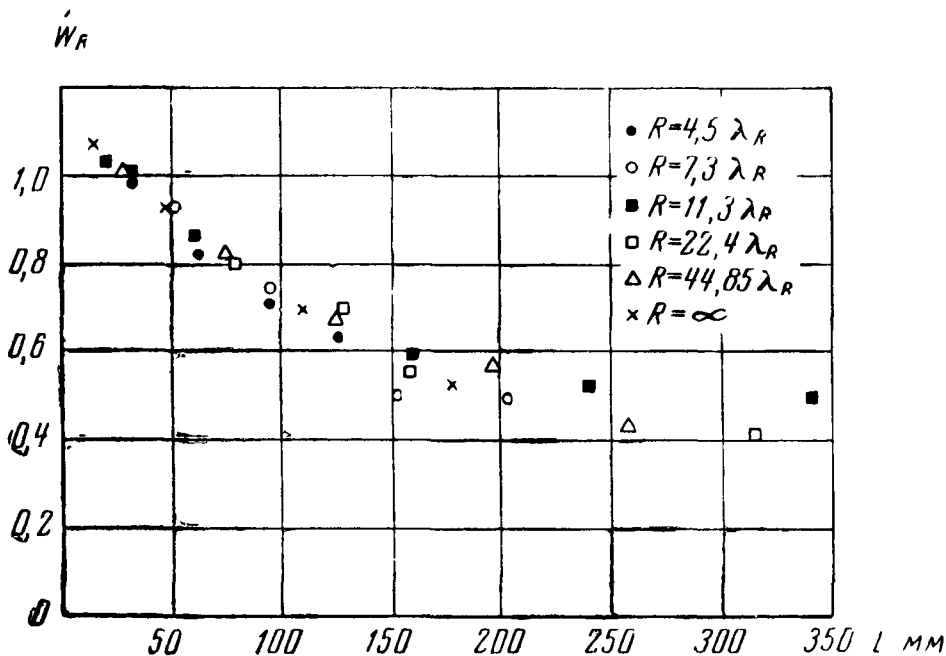


Рис. 18

Коэффициент ослабления определялся экспериментально. Для этого на цилиндрическую поверхность диска по обе стороны от титанатовой пластинки помещались «клиновые» излучатель и приемник поверхностных волн и сравнивалась амплитуда импульса на приемнике при наличии титанатовой пластинки между ними и без нее. При больших  $R$  ( $R \sim 40 \lambda$ ) и в случае плоской поверхности ослабление амплитуды импульса поверхностных волн с расстоянием от излучателя измерялось непосредственно «клиновым» приемником, помещаемым на различные расстояния от излучающей титанатовой пластинки. При средних  $R$  ( $R \sim 20 \lambda$ ) измерение ослабления амплитуды производилось обоими описанными способами. Суммарная ошибка измерений в опытах с выпуклыми цилиндрическими поверхностями при всех  $R$  не превышала 10—15%.

На рис. 18 приведены результаты измерений. По оси абсцисс отложено в миллиметрах расстояние  $L$  от излучателя, отсчитываемое по цилиндрической поверхности в направлении, перпендикулярном образующей; по оси ординат отложена в условных единицах амплитуда импульса поверхностных рэлеевских волн на цилиндрических поверхностях разного радиуса (включая и  $R = \infty$ ). Амплитуды, относящиеся к поверхности одного и того же радиуса, отмечены одинаковыми значками. Все амплитуды нормированы: их значения при  $L = 30$  мм приняты равными единице (значения амплитуд в точке  $L = 30$  мм до нормировки вычислялись по двум соседним значениям соответствующих амплитуд при помощи линейной интерполяции). Из рис. 18 видно, что в пределах погрешности измерений все экспериментальные точки лежат на одной кривой. Это и доказывает независимость коэффициента затухания поверхностных рэлеевских волн на выпуклой цилиндрической поверхности от величины радиуса кривизны.

### *Сферическая поверхность*

Волны рэлеевского типа могут существовать и на сферической поверхности. Задача о гармонических волнах такого типа на поверхности идеально упругой сферы радиуса  $R$  рассматривалась в работе [25]. Под волнами рэлеевского типа понималось точное решение уравнений теории упругости, удовлетворяющее условию отсутствия напряжений на поверхности сферы и имеющее характер установившихся монохроматических поверхностных волн. В полюсах сферы  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  ( $r, \varphi, \theta$  — сферические координаты) располагались «источник» и «сток» волн, соответствующие особым точкам решений уравнений. Предполагалось, что «источник» и «сток» вполне эквивалентны один другому и волны распространяются от полюсов с равными амплитудами в  $+\theta$  и  $-\theta$  направлениях, так что наложение их позволяет образовать стоячие волны, регулярные во всех точках сферы.

При такой постановке задачи асимптотическое выражение для вектора смещения  $\mathbf{u}$  частиц в волне при радиусе сферы  $R$ , много большим длины поверхностной волны, при  $R - r \ll R$  (вблизи поверхности сферы) и при

$0 < \theta < \pi$ , имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} = \sqrt{\frac{1}{\sin \theta}} \left[ e^{-\frac{m}{R} \sqrt{1 - k_i^2/k_R^2} (R-r)} \left( -\mathbf{r}_0 \sqrt{1 - k_i^2/k_R^2} \cos \Phi + \right. \right. \\
 \left. \left. + \theta_0 \sin \Phi \right) + \frac{2 \sqrt{1 - k_i^2/k_R^2}}{2 - k_i^2/k_R^2} e^{-\frac{m}{R} \sqrt{1 - k_i^2/k_R^2} (R-r)} \left( \mathbf{r}_0 \cos \Phi - \right. \right. \\
 \left. \left. - \theta_0 \sqrt{1 - k_i^2/k_R^2} \sin \Phi \right) \right]. \quad (I.42)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{r}_0, \theta_0$  — единичные векторы сферической системы координат;  $m$  — любое целое число, много большее единицы;  $\Phi = m/R(\theta R \pm c_R t)$  — фазовый множитель.

Из формулы (I.42) нетрудно заметить, что как и для плоской поверхности амплитуда вектора смещения экспоненциально убывает с глубиной, а фазовая скорость совпадает со скоростью на плоской поверхности. Влияние малой сферической кривизны ( $R \gg \lambda_R$ ) приводит лишь к дискретному спектру частот установившихся волн. Действительно, для волн на сфере роль волнового числа  $k_R = \omega/c_R$  играет величина  $m/R$ , принимающая лишь дискретные значения (что является следствием принятого при постановке задачи условия об эквивалентности «источника» и «стока»). При  $R \rightarrow \infty$  спектр частот переходит в непрерывный.

## § 5. Рэлеевские волны на двугранных поверхностях

Если две плоские поверхности образуют двугранный угол, то рэлеевская волна, распространяющаяся по одной из них, дойдя до ребра, частично отразится, а частично перейдет на вторую поверхность. Экспериментальное исследование этого явления на дюралевых образцах в форме брусков с двугранными углами раствора в пределах  $12-170^\circ$  описано в работе [23].

Импульс рэлеевских волн прямоугольной формы длительности  $10 \text{ мксек}$  и с частотой заполнения  $2,70 \text{ Мгц}$  распространялся по одной из граней двугранного угла (клина) перпендикулярно ребру (рис. 19). Измерялись коэффициенты отражения от ребра и прохождения импульса на другую грань. Отсчеты коэффициентов про-

изводились по амплитудам соответствующих импульсов. Измерение коэффициента отражения  $K_0$  производилось следующим образом. На расстоянии  $l_1$  перед ребром клина измерялась амплитуда  $A_1$  импульса, идущего от излучателя. Затем в этой же точке тем же приемником измерялась амплитуда  $A_2$  импульса, отраженного от

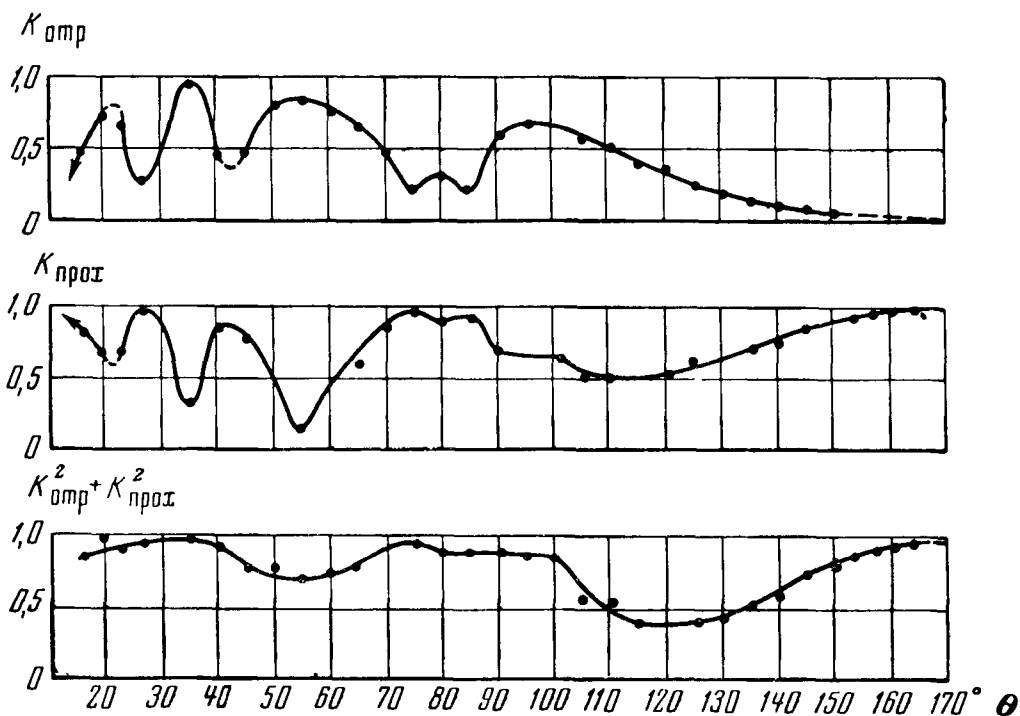
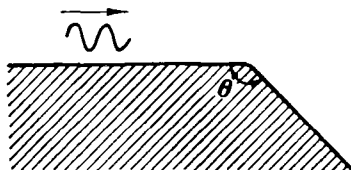


Рис. 19

ребра. Отношение  $A_2/A_1$ , умноженное на коэффициент, учитывающий ослабление первого импульса в результате его прохождения через участок поверхности, занятый приемником, а также вследствие расхождения и поглощения волнового пучка на пути  $2l_1$ , есть искомый коэффициент отражения. Коэффициент прохождения  $K_{\text{прох}}$  определялся как отношение амплитуды импульса на расстоянии  $l_2$  после ребра клина (на другой грани) к амплитуде  $A_1$  импульса на расстоянии  $l_1$  перед ребром клина, умноженное на коэффициент, учитывающий ослабление амплитуды волнового пучка на пути  $l_1 + l_2$ .

На рис. 19 приведены результаты измерений. По оси абсцисс отложен угол раствора клина в градусах, по оси ординат — коэффициенты  $K_{\text{отр}}$ ,  $K_{\text{прох}}$  и сумма их квадратов, представляющая отношение суммарной энергии прошедшей и отраженной рэлеевских волн к энергии падающей волны. Как видно из графика, величина  $K_{\text{отр}}^2 + K_{\text{прох}}^2$  всегда меньше единицы. Это свидетельствует о постоянном превращении части энергии падающей рэлеевской волны в энергию продольных и поперечных волн, рассеиваемых гранями и ребром клина в глубь среды. Преобразование волн объясняется тем, что совокупность падающей, отраженной и прошедшей рэлеевских волн не удовлетворяет условию отсутствия напряжений на гранях клина. Из графиков далее видно, что отражающая и пропускающая способности клина сильно зависят от угла раствора  $\theta$ : кривые  $K_{\text{отр}}(\theta)$  и  $K_{\text{прох}}(\theta)$  имеют ярко выраженные максимумы и минимумы, причем максимумы коэффициента отражения, как правило, соответствуют минимумам коэффициента прохождения, и наоборот (за исключением случая  $\theta = 115^\circ$ ). При приближении  $\theta$  к  $180^\circ$   $K_{\text{отр}} \rightarrow 0$ , а  $K_{\text{прох}} \rightarrow 1$ . Коэффициенты прохождения и отражения нигде не достигают значений единицы и нуля. В работе [17] приведены кривые  $K_{\text{отр}}(\theta)$ ,  $K_{\text{прох}}(\theta)$ ,  $K_{\text{отр}}^2(\theta) + K_{\text{прох}}^2(\theta)$  для стального клина. Кривые аналогичны описанным выше. Это позволяет предполагать, что для любой упругой среды качественный характер кривых будет таким же.

Экспериментальное исследование прохождения и отражения рэлеевских волн на гранях клина проводилось также в работе [26], где получены результаты, аналогичные приведенным здесь. Однако в [26] исследование проводилось применительно к задачам сейсмологии, а не к ультразвуковым измерениям.

Если между гранями клина сделано закругление, то прохождение рэлеевских волн с одной грани на другую существенно улучшается. В работе [24] описаны результаты экспериментов по прохождению и отражению рэлеевских волн на цилиндрических закруглениях радиуса  $0-1,7 \lambda_R$ , сделанных между боковыми и торцовыми поверхностями прямоугольных алюминиевых стержней (рис. 20). Рассматривался случай нормального падения рэлеевской волны на закругление. Измерения проводились по такой же схеме, как в работе [23].

На рис. 20 приведены результаты измерений. Как видно из рисунка, при увеличении радиуса закругления коэффи-

циент  $K_{\text{прох}}$  возрастает, стремясь к единице, а коэффициент  $K_{\text{отр}}$  уменьшается, стремясь к нулю. Однако увеличение и уменьшение коэффициентов  $K_{\text{прох}}$  и  $K_{\text{отр}}$  происходит не монотонно, а с сильными осцилляциями. Можно предположить, по аналогии с прохождением и отражением волн в плоских

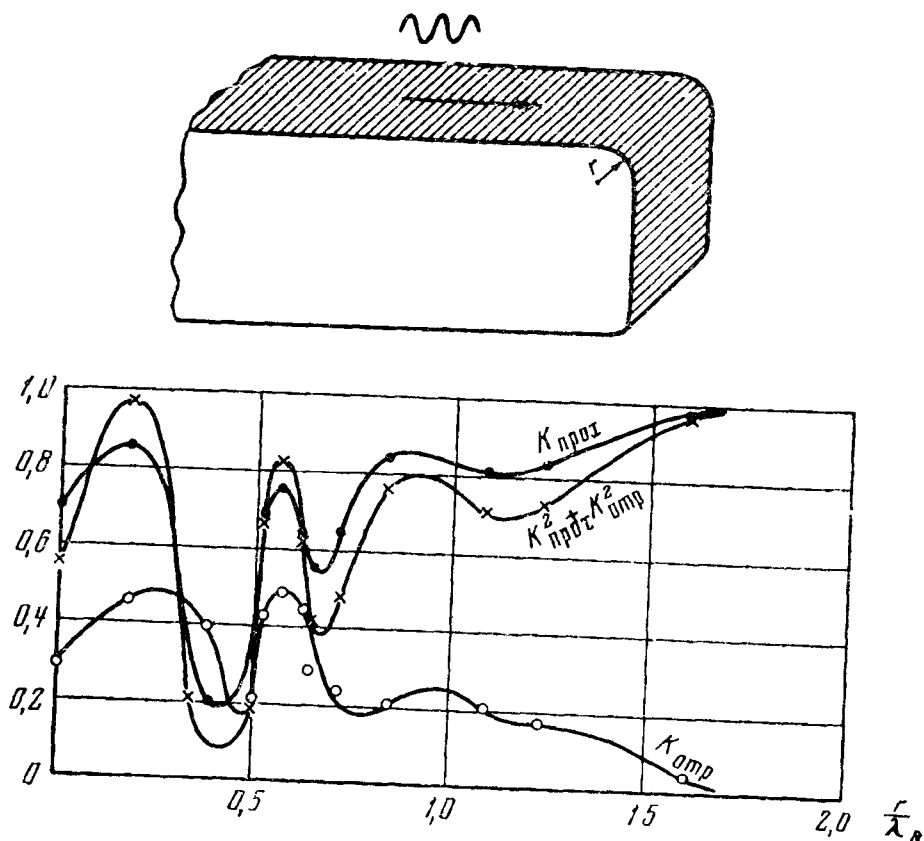


Рис. 20

слоях, что осцилляции обусловлены интерференционным механизмом образования прошедшей и отраженной рэлеевских волн. Отраженная волна образуется в результате интерференции отражений от переднего и заднего краев закругления. Аналогичным образом возникает и прошедшая рэлеевская волна. Разность фаз между указанными отражениями определяется числом полуволн, укладывающихся по дуге закругления. Эти волны являются аналогом рэлеевских волн на выпуклой цилиндрической поверхности закругления. Их фазовая скорость  $c_{\text{вып}}$ , как показано в [20], всегда больше  $c_R$  и зависит от  $r/\lambda_R$ . По расстоянию между максимумами и минимумами кривых  $K_{\text{прох}}(r/\lambda_R)$  и  $K_{\text{отр}}(r/\lambda_R)$  в области  $0,20 < r/\lambda_R <$

$< 1,15$  можно определить экспериментальное значение средней (в указанной области) скорости  $c_{\text{вып}}$  для алюминия, которое составляет  $1,29 c_R$ . Соответствующее теоретическое значение  $c_{\text{вып}}$ , согласно [20], равно  $1,27 c_R$  и, таким образом, хорошо согласуется с экспериментальным, подтверждая интерференционный механизм прохождения и отражения рэлеевских волн на закруглении. Кривая  $K_{\text{прох}}^2 + K_{\text{отр}}^2$ , как и в случае клина, проходит ниже единицы, свидетельствуя опять о превращении части энергии падающей рэлеевской волны в энергию продольных и поперечных волн, рассеиваемых закруглением.

Описанные результаты позволяют сделать вывод, что при  $r/\lambda_R < 1,7$  прохождение и отражение рэлеевских волн на закруглении определяется отношением  $r/\lambda_R$ , а при  $r/\lambda_R > 1,7$  коэффициенты прохождения и отражения становятся практически равными соответственно единице и нулю, т. е. наступает «полное» прохождение рэлеевских волн через закругление. В заключение укажем, что, учитывая механизм образования отраженной и прошедшей рэлеевских волн, следует ожидать, что качественный характер рассмотренных зависимостей  $K_{\text{прох}}(r/\lambda_R)$  и  $K_{\text{отр}}(r/\lambda_R)$  сохранится для любой упругой среды и для любых углов раствора клина, между гранями которого сделано закругление.

## § 6. Распространение в контакте с жидкостью

На границе твердого полупространства с жидким слоем конечной или бесконечной толщины могут существовать поверхностные волны, аналогичные рэлеевским.

Рассмотрим вначале задачу о распространении плоских гармонических поверхностных волн на границе двух полупространств — твердого и жидкого. Будем считать направлением распространения ось  $x$ , а ось  $z$  направим перпендикулярно границе в глубь твердого полупространства (см. рис. 1). Твердое полупространство будем считать однородным изотропным абсолютно упругим, а жидкость идеальной. Выражения для потенциалов  $\varphi$ ,  $\psi$  продольных и поперечных волн в твердом полупространстве должны (как и для рэлеевских волн) удовлетворять волновым уравнениям (I.2), а выражения для потенциа-

ла в жидкости  $\varphi_{ж}$  должны удовлетворять аналогичному уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_{ж}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{ж}}{\partial z^2} + k_{ж}^2 \varphi_{ж} = 0, \quad (I.43)$$

где  $k_{ж} = \frac{\omega}{c_{ж}}$  — волновое число для волн в жидкости (в дальнейшем все величины, относящиеся к жидкости, мы будем отмечать индексом «ж», величины, относящиеся к твердому телу, обозначать так же, как в § 1). Поскольку мы ищем решение для поверхностной волны, потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  в твердом теле должны описывать (как в случае рэлеевской волны) продольную и поперечную неоднородные волны, распространяющиеся в направлении оси  $x$  и затухающие по  $z$ . Потенциал  $\varphi_{ж}$  должен соответствовать волне в жидкости, «припасовывающейся» к двум названным волнам. Это означает, что след этой волны должен бежать вдоль оси  $x$  со скоростью, равной фазовой скорости продольной и поперечной неоднородных волн. Три указанные волны должны удовлетворять на плоскости  $z=0$  граничным условиям равенства нормальных смещений  $W$  в жидкости и твердом теле, равенства давления в жидкости напряжению  $\sigma_{zz}$  в твердом теле и отсутствия касательного напряжения  $\sigma_{xz}$ .

Продельвая несложные вычисления (аналогичные приведенным в § 1), получим следующие формулы для компонент смещений по осям  $x$  и  $z$  в жидкости и твердом теле:

$$\left. \begin{aligned} U_{ж} &= -Ak \frac{qk_t^2}{\sqrt{k_{ж}^2 - k^2 (k^2 + s^2)}} e^{i(kx - \sqrt{k_{ж}^2 - k^2} z - \omega t)} \\ W_{ж} &= Ak_t \frac{qk_t}{k^2 + s^2} e^{i(kx - \sqrt{k_{ж}^2 - k^2} z - \omega t)}; \end{aligned} \right\} (I.44)$$

$$\left. \begin{aligned} U &= Ak \left[ e^{-qz} - \frac{2qs}{k^2 + s^2} e^{-sz} \right] e^{i(kx - \omega t + \frac{\pi}{2})}, \\ W &= -Aq \left[ e^{-qz} - \frac{2k^2}{k^2 + s^2} e^{-sz} \right] e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned} \right\} (I.45)$$

Здесь  $k$  — волновое число поверхностной волны;  $A$  — произвольная постоянная. Характеристическое уравне-



ние для определения волнового числа  $k$  имеет вид

$$4k^2qs - (k^2 + s^2)^2 = i \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho} \cdot \frac{qk_t^4}{\sqrt{k_{\text{ж}}^2 - k^2}}. \quad (\text{I.46})$$

Нетрудно видеть, что оно отличается от уравнения (I.6) для рэлеевской волны наличием в правой части дополнительного члена, учитывающего влияние жидкости.

В работе [27] показано, что при любом соотношении параметров твердой и жидкой сред уравнение (I.46) имеет один вещественный корень, соответствующий поверхностной волне, бегущей вдоль границы с фазовой скоростью, меньшей скорости  $c_{\text{ж}}$  волны в жидкости и скоростей  $c_{l,t}$  продольных и поперечных волн в твердом теле. Указанная волна состоит из неоднородной волны в жидкости и двух неоднородных волн в твердом теле. Все три волны экспотенциально затухают при удалении (в обе стороны) от границы  $z=0$ . Как показано в монографии [28], эта поверхностная волна имеет совершенно другую структуру и скорость, чем рэлеевская волна (даже при малости плотности жидкости по сравнению с плотностью твердого тела). Энергия волны и движение частиц локализованы в основном в жидкости, а не в твердом теле. Поэтому в ультразвуковой практике подобный тип волны не используется, и мы ее не будем здесь рассматривать.

В монографии [28] показано, что при условии  $c < c_R$ , которое выполняется почти для всех реальных сред, уравнение (I.46) имеет (наряду с вещественным) комплексный корень  $k$ , соответствующий системе трех волн (одна в жидкости и две в твердом теле), переходящих при стремлении плотности жидкости к нулю в рэлеевскую волну в твердом теле. Комплексность этого корня имеет простой физический смысл: поверхностная волна в этом случае непрерывно излучает энергию в жидкость, образуя в ней отходящую от границы неоднородную волну. Именно этот тип поверхностной волны, аналогичной волне Рэлея, представляет большой интерес в иммерсионной ультразвуковой дефектоскопии и других областях ультразвуковой практики. Исследование названного типа поверхностных волн производилось рядом авторов, но всегда делалось в предположении малости влияния жидкости на твердое тело.

В работе [29] описаны расчеты и экспериментальные исследования этого вопроса, свободные от ограничения о малости влияния жидкости. Расчет основной константы распространения — комплексного волнового числа  $k = k_1 + ik_2$ , по которому можно затем вычислить затухание, фазовую скорость волны, а также распределение амплитуд смещений в жидкости и твердом теле [формулы (I.44), (I.45)], — производился на электронно-счетной машине «Урал» для различных параметров твердой и жидкой сред. Результаты приведены на рис. 21—24. Кривые построены для значений  $r = c_l/c_{ж}$  в пределах 1,5—10. Используемой совокупностью значений  $\rho_{ж}/\rho$ ,  $\nu$  и  $r$  исчерпываются все практические случаи. Из рис. 21, а, б видно, что наличие жидкости на границе упругого полупространства увеличивает скорость поверхностной волны в полупространстве, причем тем больше, чем больше отношение  $\rho_{ж}/\rho$ . Зависимость приращения скорости от  $r$  и  $\nu$  тоже монотонная: с ростом  $r$  и  $\nu$  приращение уменьшается. Следует отметить, что увеличение скорости поверхностной волны, вызванное влиянием жидкости, невелико: при средних значениях параметров, когда  $\rho_{ж}/\rho = 0,5$ ,  $\nu = 0,25$  и  $r = 5$ , относительное увеличение составляет 0,0012, т. е. примерно 0,1%. Из рис. 22, а, б следует, что коэффициент затухания поверхностной волны монотонно возрастает при увеличении  $\rho_{ж}/\rho$  и уменьшении  $r$  и  $\nu$ . Влияние жидкости на затухание поверхностных волн (в противоположность влиянию на скорость) весьма существенное: при тех же средних значениях параметров  $\rho_{ж}/\rho$ ,  $r$  и  $\nu$  коэффициент дополнительного затухания из-за излучения в жидкость на пути  $\lambda_R$  составляет 0,11, т. е. на пути примерно в десять длин волн волна затухает в  $e$  раз.

Экспериментальные исследования по распространению ультразвуковых поверхностных волн на границе с жидкостью производились на импульсной установке, состоящей из генератора импульсов прямоугольной формы с синусоидальным заполнением, усилителя и индикатора. Измерения проводились на частотах 1, 2, 3 Мгц при длительностях импульсов 10—50 мксек. Ультразвуковые поверхностные волны возбуждались «клиновым» методом и распространялись по поверхностям прямоугольных алюминевых и стальных стержней. Условия распространения поверхностных волн на границе двух полупро-

странств имитировались погружением одного конца стержня в ванну с жидкостью. При этом поверхностные волны, переходя с одной грани стержня через торец на другую грань, часть пути проделывали в контакте с жидкостью. Изменением глубины погружения стержня определялось затухание и изменение фазовой скорости поверхностной волны, вызванные влиянием жидкости. Затухание измерялось импульсным методом, а скорость

Таблица 4

Граничные среды	$\left(\frac{c-c_R}{c_R}\right)$ теор.	$\left(\frac{c-c_R}{c_R}\right)$ эксп.			$k_2\lambda_R$ теор.	$(k_2\lambda_R)_{\text{эксп.}}$		
		$f=$ 1 Мгц	$f=$ 2 Мгц	$f=$ 3 Мгц		$f=$ 1 Мгц	$f=$ 2 Мгц	$f=$ 3 Мгц
		Сталь—вода . . . . .	0,054	0,062		0,062	0,061	0,070
Сталь—трансформаторное масло . . . . .	0,042	0,046	0,051	0,046	0,057	0,061	0,061	0,059
Сталь—глицерин . . . . .	0,190	0,13	0,14	0,13	0,124	0,11	0,12	0,11
Алюминий—вода . . . . .	0,480	0,49	0,52	0,50	0,189	0,20	0,19	0,20
Алюминий—трансформаторное масло . . . . .	0,350	0,38	0,35	0,35	0,157	0,17	0,16	0,16
Алюминий—глицерин . . . . .	1,550	1,05	1,00	1,15	0,352	0,30	0,29	0,25

импульсно-фазовым. В табл. 4 приведены экспериментальные и расчетные данные по затуханию и скорости для двух стержней (алюминиевого и стального) и трех жидкостей (вода, трансформаторное масло, глицерин). Как видно из таблицы, имеется совпадение экспериментальных и расчетных данных: для скорости в среднем с точностью до 15%, для затухания — до 10%.

Перейдем теперь к рассмотрению плоских гармонических поверхностных волн на границе твердого полупространства и плоского жидкого слоя толщины  $h$ , вторая граница которого свободна. По-прежнему нас будут интересовать волны, переходящие при стремлении плотности жидкости к нулю в рэлеевские волны в твердом теле. Теоретическое и экспериментальное исследования таких волн описаны в работе [29]. Изложим ее результаты. Введем систему координат с началом на поверхности полупространства с осью  $x$ , по-прежнему совпадающей с направлением распространения волны и осью  $z$ , направленной в глубь полупространства. Повторяя рас-

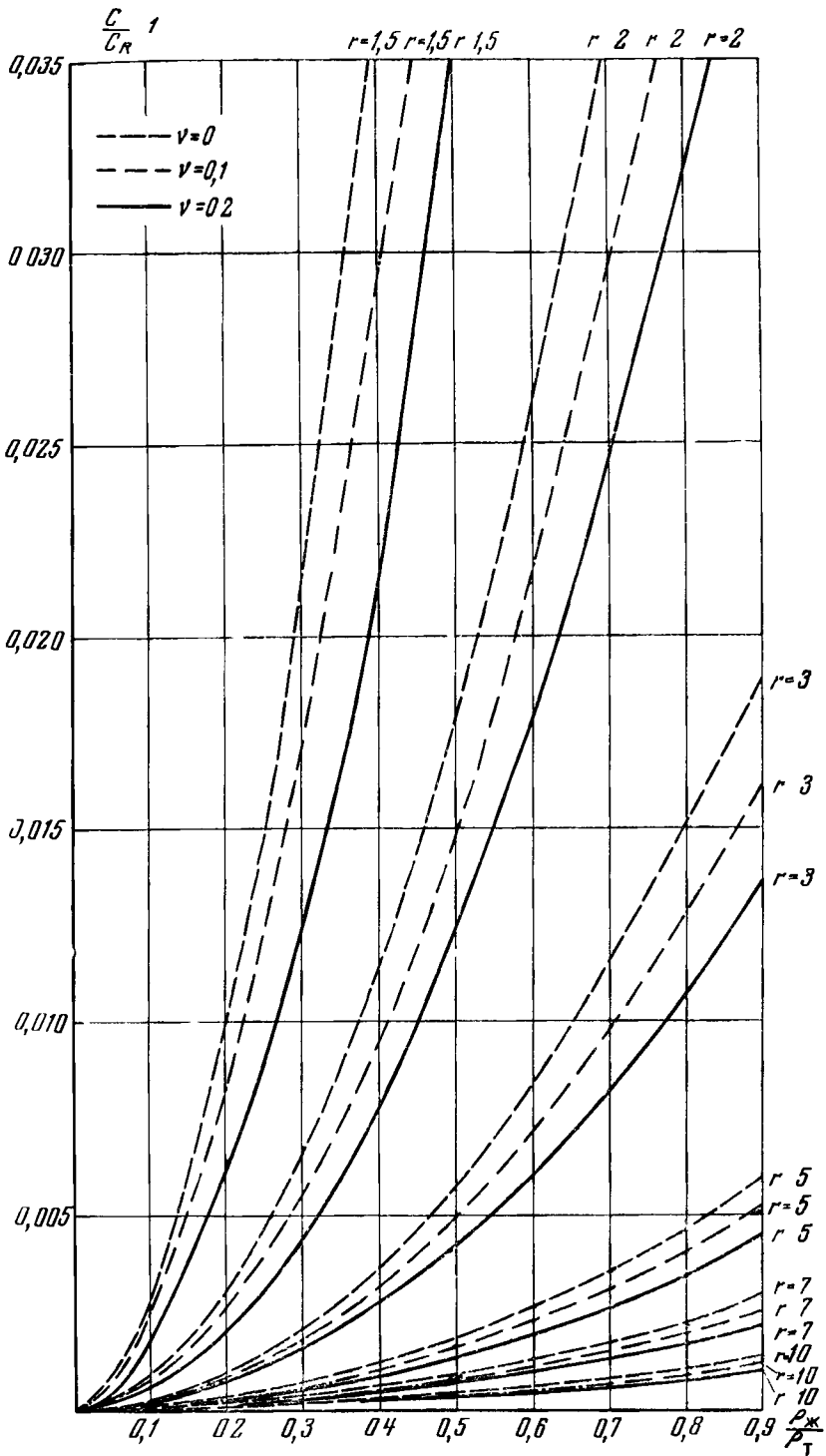


Рис. 21а

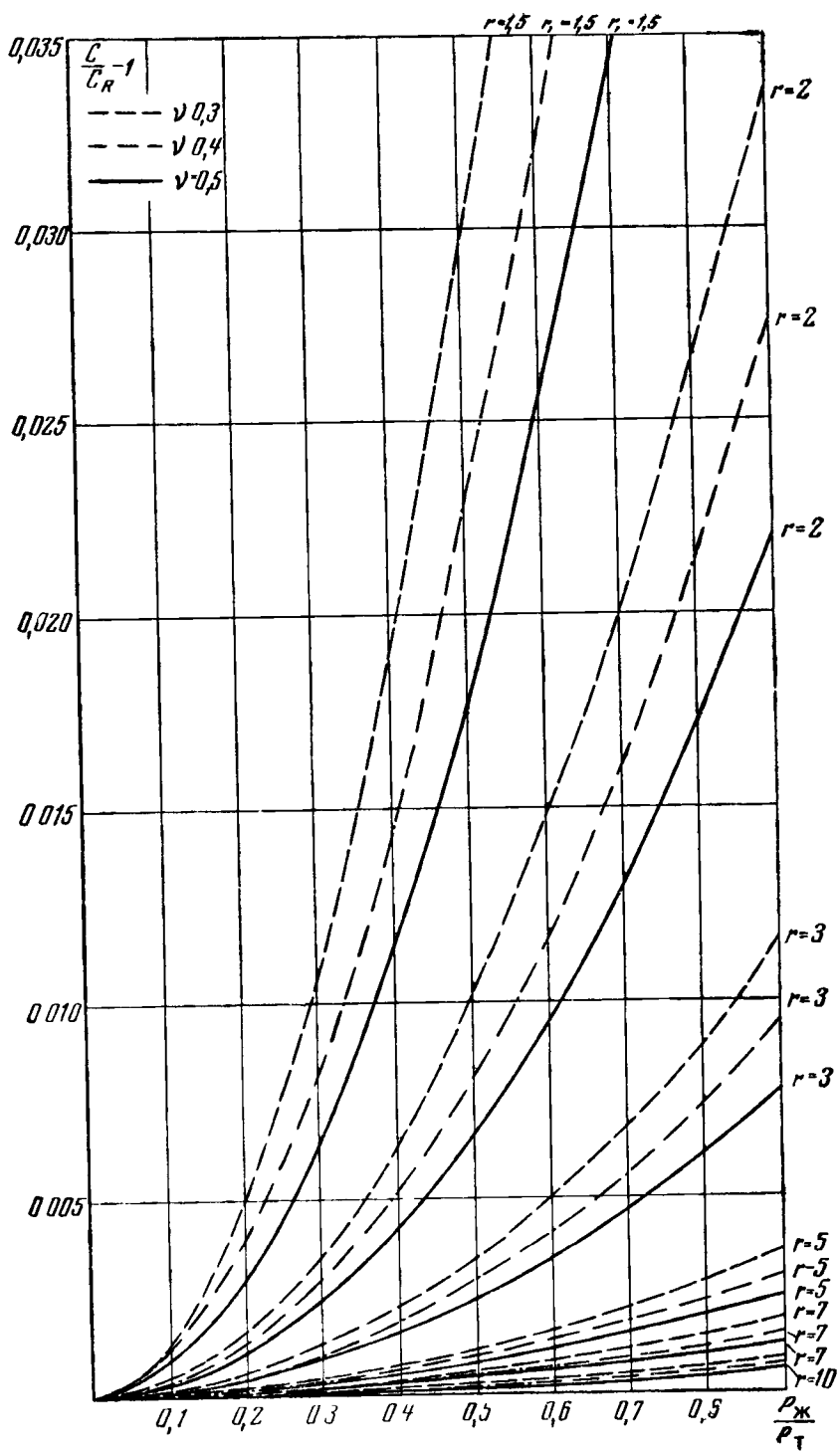


Рис 216

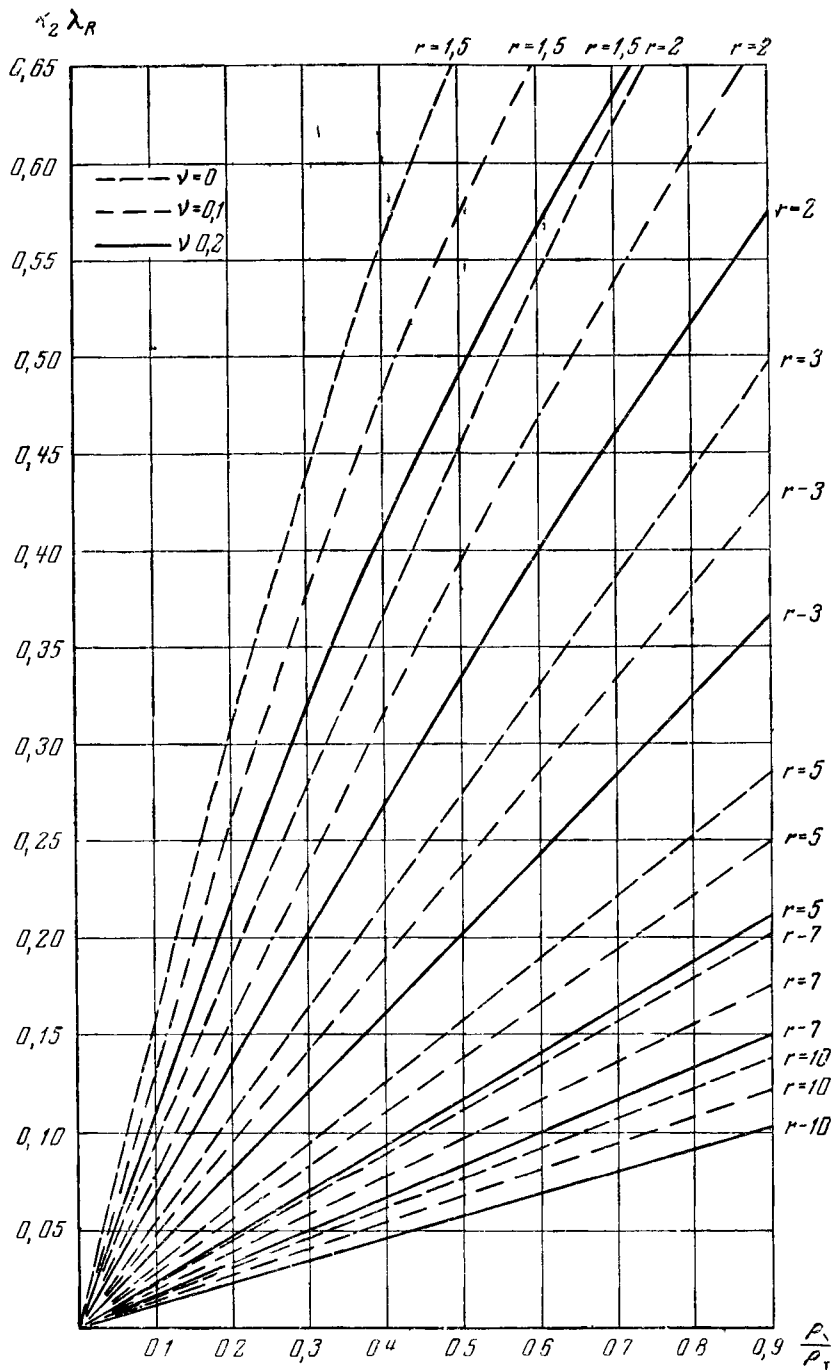


Рис. 22а

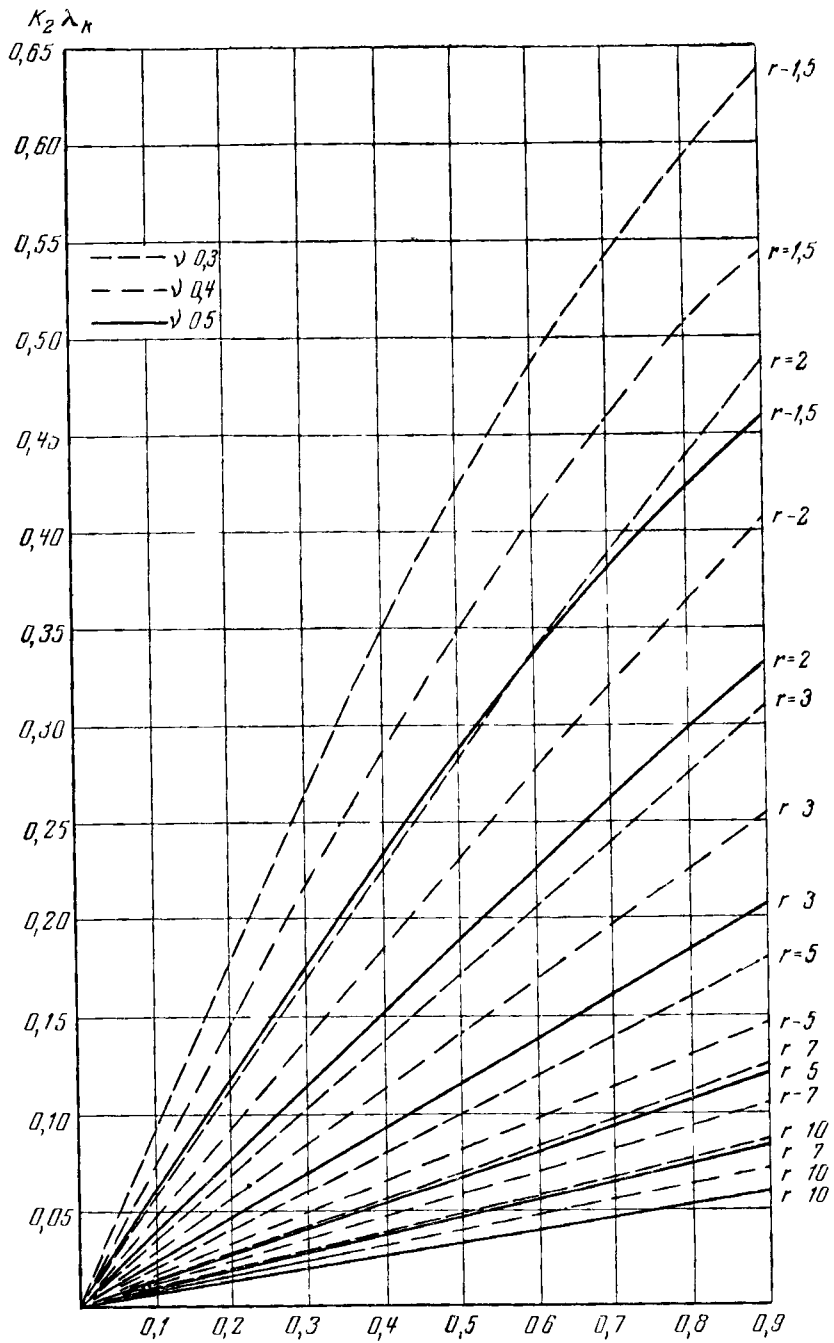


Рис. 226

суждения первой части этого параграфа и проделывая несложные выкладки, получим вместо формул (I.44) следующие выражения:

$$U_{\text{ж}} = Ak \frac{qk_t^2}{\sqrt{k_{\text{ж}}^2 - k^2} (k^2 + s^2)} \cdot \frac{\sin \left[ \sqrt{k_{\text{ж}}^2 - k^2} (h + z) \right]}{\cos \sqrt{k_{\text{ж}}^2 - k^2} h} \times \\ \times e^{i \left( kx - \omega t + \frac{\pi}{2} \right)}; \\ W_{\text{ж}} = Ak_t \frac{qk_t}{(k^2 + s^2)^2} \cdot \frac{\cos \left[ \sqrt{k_{\text{ж}}^2 - k^2} (h + z) \right]}{\cos \sqrt{k_{\text{ж}}^2 - k^2} h} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (\text{I.47})$$

Выражения для смещений в твердом теле описываются теми же формулами (I.45). Характеристическое уравнение для данного случая имеет вид

$$(k^2 + s^2)^2 - 4k^2qs = \frac{\rho_{\text{ж}}q}{\rho \sqrt{k_{\text{ж}}^2 - k^2}} \operatorname{tg} \sqrt{k_{\text{ж}}^2 - k^2} h. \quad (\text{I.48})$$

На рис. 23 приведены результаты строгого численного решения этого уравнения. По оси абсцисс отложено отношение толщины слоя к длине волны в жидкости, по оси ординат — относительное различие в скоростях поверхностной и рэлеевской волн. Одна из расчетных кривых (1) соответствует слою трансформаторного масла на стали, другая (2) — случаю жидкой и твердой сред с некоторыми «средними» параметрами  $v = 0,25$ ,  $r = 3$ ,  $\rho_{\text{ж}}/\rho = 0,40$ . На рис. 23 имеется также экспериментальная кривая (1'), снятая для слоя трансформаторного масла на стали. Как видно из графиков, при увеличении толщины слоя от нуля до  $h \approx \frac{1}{4} \lambda_{\text{ж}}$  скорость поверхностной волны возрастает от  $c_R$  до  $c_t$ . В окрестности  $h = \frac{1}{4} \lambda_{\text{ж}}$ , соответствующей максимальному влиянию жидкости на поверхностную волну, вещественных значений скорости не существует, т. е. распространяющаяся поверхностная волна невозможна (кривая терпит разрыв). Правее области разрыва кривая фазовой скорости поверхностной волны имеет две ветви, плавно переходящие одна в другую, что соответствует двум видам поверхностных волн. Нижняя ветвь кривой асимпт-



тотически стремится к значению  $(c_{ж} - c_R)/c_R$ . При  $\frac{\lambda}{\lambda_{ж}} =$   
 $= \frac{1}{2 \sqrt{1 - k_R^2/k_{ж}^2}}$  скорость поверхностной волны становится

равной  $c_R$ , т. е. жидкость «перестает влиять» на поверхностную волну в твердом теле. Можно показать, что при дальнейшем увеличении  $h/\lambda_{ж}$  верхняя ветвь кривой идет аналогично ветви в промежутке  $h/\lambda_{ж} \in 0 \div 0,25$ , затем опять наступает разрыв кривой и т. д. Множество кривых, которое

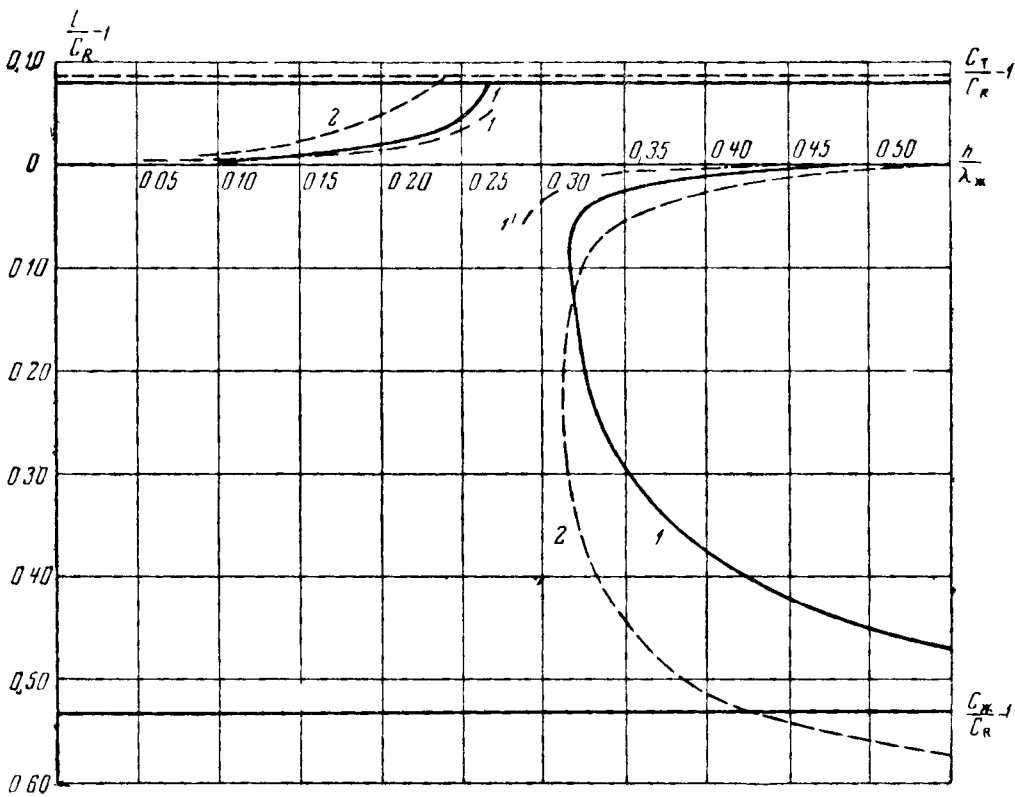


Рис 23

получится при изменении  $h/\lambda_{ж}$  от 0 до  $\infty$ , соответствует множеству нормальных волн различных порядков, возможных в слое. При  $\frac{h}{\lambda_{ж}} = \frac{n}{2 \sqrt{1 - k_R^2/k_{ж}^2}}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) кривые пересекают ось абсцисс ( $c = c_R$ ).

Для экспериментального исследования распространения поверхностных волн на границе твердого тела с жидким слоем (проводившегося на той же установке, что и исследование для случая твердого и жидкого полупро-

странств) на участок боковой поверхности стального стержня наносился слой жидкости толщины  $0—0,7$  мм и измерялось изменение фазы рэлеевской волны, прошедшей через этот участок. Опыты проводились при частоте  $1$  Мгц при длительности импульса  $50$  мксек. По изменению фазы рассчитывалось изменение скорости (см. кривую  $I'$  на рис. 23). Кривая  $I'$  является результатом усреднения 30 отдельных кривых, полученных при измерениях. Как видно из сопоставления ее с соответствующей теоретической кривой, качественный характер обеих кривых одинаков, но количественные различия довольно существенны. Последнее объясняется ошибками эксперимента и, в первую очередь, по-видимому, невозможностью получения жидкого слоя постоянной толщины (чтобы масло не растекалось по поверхности стержня, участок с масляным слоем приходилось ограждать проволочным каркасом, из-за него на границах получались сильные мениски). Следует отметить, что поверхностная волна, соответствующая нижней ветви кривой фазовой скорости (см. рис. 23), не наблюдалась в наших опытах. Это обстоятельство следует, по-видимому, объяснить большим отличием этой волны от рэлеевской (по скорости и другим характеристикам), благодаря чему рэлеевская волна, возбуждаемая нашим излучателем, достигнув участка с масляным слоем, слабо трансформировалась в указанную поверхностную волну.

Если жидкий слой занимает не всю поверхность твердого тела, а лишь отдельный ее участок длины  $l$ , то рэлеевская волна, распространяясь вдоль свободной поверхности и проходя через этот участок, трансформируется в поверхностную волну на границе твердого тела и жидкого слоя, вследствие чего энергия рэлеевской волны уменьшается (этим объясняется ослабляющее действие жидких пленок и загрязнений поверхности на рэлеевскую волну). Нами были исследованы потери такого рода. Оказалось, что при достаточно большой длине слоя ( $l \approx 5 \div 10 \lambda_R$ ), когда на его границе с твердым телом успевает установиться бегущая поверхностная волна, потери не зависят от длины слоя и длительности импульса. Это показывает, что основным механизмом потерь, по-видимому, являются потери на трансформацию волн и образование в жидком слое нормальной волны, а не вязкие потери. Зависимость потерь от толщины слоя

очень сильная. На рис 24 изображено ослабляющее действие слоя трансформаторного масла длиной  $l=7\lambda_R$  на стали для разных толщин  $h$  ( $A_0$  — амплитуда рэлеевской волны без слоя масла,  $A$  — со слоем). Кривая является результатом усреднений 30 измерений, выполненных на

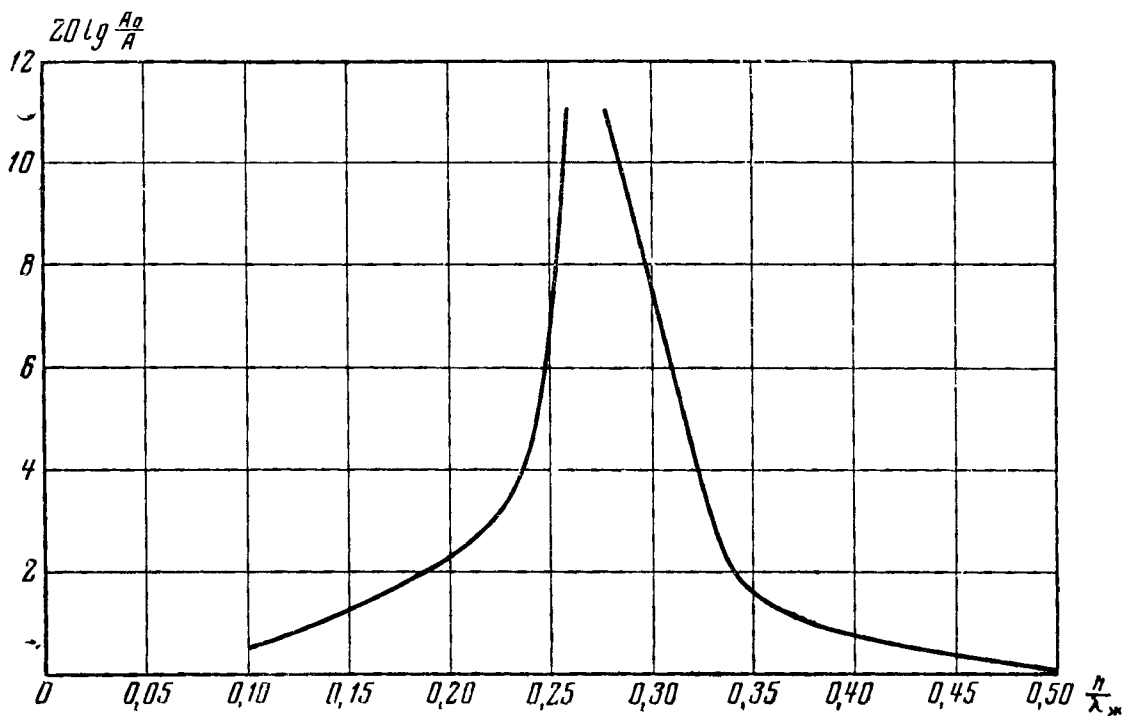


Рис 24

частоте 1 Мгц при длительности импульса 50 мксек. Как видно из кривой, максимальное затухание рэлеевской волны, создаваемое слоем жидкости, имеем место при  $h=\lambda_{ж}/4$ , т. е. в той же области, где терпит разрыв кривая фазовой скорости поверхностной волны.

## § 7. Влияние дефектов поверхности на распространение рэлеевских волн

При наличии на поверхности, вдоль которой распространяется рэлеевская волна, всякого рода дефектов (трещины, царапины, неровности и прочее) возникает рассеянная рэлеевская волна, а также продольные и поперечные (сдвиговые) волны, распространяющиеся в глубь среды. Исходная рэлеевская волна будет вслед-

ствии этих рассеяний ослабляться. Вопрос о влиянии дефектов поверхности на распространение рэлеевских волн очень важен для практического использования этих волн, особенно применительно к ультразвуковой поверхностной дефектоскопии. Данный вопрос исследовался в ряде работ.

В работе [30] теоретически рассмотрено затухание рэлеевских волн при распространении вдоль неровной поверхности, уравнение которой задано в виде  $z = \zeta(x, y)$ . Изложим основные результаты этой работы. Пусть твердое тело занимает полупространство  $z > \zeta$ . Предположим, что глубина неровностей мала по сравнению с  $\lambda_R$  и малы наклоны поверхности по отношению к средней плоскости. Будем решать задачу методом последовательных приближений с точностью до первого приближения включительно, считая, что в нулевом приближении вдоль плоской границы в положительном направлении оси  $x$  распространяется гармоническая плоская рэлеевская волна. В первом приближении необходимо учитывать, что волна распространяется вдоль неровной поверхности, благодаря чему граничными условиями задачи будет отсутствие напряжений на поверхности  $z = \zeta(x, y)$ , а не на плоскости  $z = 0$ . Напряжения  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zz}$  в точках поверхности  $z = \zeta(x, y)$  будут отличны от нуля, причем их можно выразить через напряжения  $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{yy}^0$ ,  $\sigma_{zz}^0$ ,  $\sigma_{xz}^0$  в исходной рэлеевской волне нулевого приближения следующим образом:

$$\sigma_{xz} = \left( \frac{\partial \sigma_{xz}^0}{\partial z} \right)_{z=0} \zeta - (\sigma_{xx}^0)_{z=0} \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad (1.49)$$

$$\sigma_{yz} = - (\sigma_{yy}^0)_{z=0} \frac{\partial \zeta}{\partial y};$$

$$\sigma_{zz} = - \left( \frac{\partial \sigma_{zz}^0}{\partial z} \right)_{z=0} \zeta.$$

«Перенесем» теперь эти напряжения с точек неровной поверхности  $z = \zeta(x, y)$  на плоскость  $z = 0$ , считая, что действие неровностей поверхности на образование рассеянных волн эквивалентно действию указанных напряжений на плоскости  $z = 0$ . После этого задача о рассеянных неровностями поверхности волнах сводится к задаче о колебании твердого полупространства с плоской границей, на которой заданы напряжения (1.49).

Допустим, что функция  $\zeta(x, y)$  может быть представлена двойным рядом Фурье:

$$\zeta = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \zeta_{mn} e^{i(mg_x x + ng_y y)}, \quad (I.50)$$

где  $g_x = 2\pi/\Lambda_x$ ;  $g_y = 2\pi/\Lambda_y$ ;  $\Lambda_x$  и  $\Lambda_y$  — периоды неровностей в направлениях  $x$  и  $y$ . Каждой паре чисел  $m, n$ , т. е. каждому члену ряда (I.50), будет соответствовать пара рассеянных волн ( $mn$ ), одна из которых — продольная — описывается скалярным потенциалом

$$\varphi_{mn} = A_{mn} e^{i(k_m x + k_n y + \sqrt{k_l^2 - k_m^2 - k_n^2} z - \omega t)}, \quad (I.51)$$

а другая — поперечная — описывается векторным потенциалом

$$\Psi_{mn} = \mathbf{B}_{mn} e^{i(k_m x + k_n y + \sqrt{k_l^2 - k_m^2 - k_n^2} z - \omega t)}, \quad (I.52)$$

где  $k_m = k_R + mg_x$ ;  $k_n = ng_y$ . При вещественных  $\sqrt{k_l^2 - k_m^2 - k_n^2}$  и  $\sqrt{k_l^2 - k_m^2 - k_n^2}$  эти волны бегут в направлении от границы и уносят часть энергии основной рэлеевской волны. При мнимых радикалах соответствующие волны будут поверхностными, распространяющимися вдоль границы со скоростью, отличной от скорости  $c_R$  основной рэлеевской волны. Амплитуды волн  $A_{mn}$  и  $B_{mn}$  можно определить, приравнявая напряжения, созданные совокупностью волн ( $mn$ ), напряжениям (I.49).

Каждая пара волн ( $mn$ ), унося энергию основной рэлеевской волны от границы, будет вносить свой вклад в затухание основной волны. Предположим, что затухание рэлеевской волны, вызванное рассеянием, достаточно мало, так что на некотором отрезке  $l \gg \lambda_R$  в направлении распространения волны, содержащем большое число неровностей, изменение амплитуды основной волны сравнительно мало. В этом случае можно ввести понятие «парциального коэффициента затухания»  $\delta_{mn}$ , равного отношению энергии, унесенной по оси  $z$  за единицу времени через единичную площадку волной ( $mn$ ), к плотности потока энергии в рэлеевской волне. Суммарный коэффициент затухания  $\delta$  рэлеевской волны (по энергии) будет равен:

$$\delta = \sum_{mn} \delta_{mn}. \quad (I.53)$$

Формула для  $\delta_{mn}$  очень громоздка, и мы ее приводить не будем. На рис. 25 показаны результаты расчета коэффициента затухания для алюминия (кривая 1), земного грунта (кривая 2) и стали (кривая 3) при простейшем типе неровности поверхности — синусоидальной неровности, когда  $\zeta = \zeta_0 \cos gx$ . По оси ординат на рис. 25 отложена безразмерная величина  $\gamma = \delta/k_t^3 \zeta_0^2$ . Каждая из кривых при пространственных периодах неровностей  $\Lambda = \frac{\lambda_R}{1 \pm c_R/c_t}$  имеет очень

острые максимумы, вблизи которых затухание весьма велико (в  $e$  раз на пути  $5-10\lambda_R$ ). При этих значениях  $\Lambda$  рассеянные продольные волны распространяются в том же направлении, что и первичная рэлеевская волна (левые пики), или в противоположном направлении (правые пики). Резкое возрастание рассеяния при этих значениях  $\Lambda$  обусловлено оттоком энергии от границы в рассеянную поперечную волну. При  $\Lambda$ , большем некоторого  $\Lambda_{\text{макс}}$  (для алюминия  $\Lambda_{\text{макс}} = 12,740\lambda_t$ , для земного грунта —  $10,26\lambda_t$  и для стали —  $4,895\lambda_t$ ), затухание рэлеевской волны вообще отсутствует.

В работе [31] экспериментально исследовано влияние способа обработки поверхности металла (строгание, фрезерование, притирка и полирование) на затухание рэлеевских волн. Показано, что затухание весьма существенно зависит от способа обработки, поскольку при различных способах обработки получается различная структура поверхности и поверхностного слоя: появляется наклеп, обработочные штрихи, различная ориентация структурных элементов поверхностного слоя металла, поверхностные пленки (при химическом полировании).

В работе [32] произведено экспериментальное исследование влияния единичных дефектов поверхности на распространение плоских рэлеевских волн. Исследование выполнено на двух моделях линейных поверхностных дефектов: щели, прорезанной на поверхности распространения волны, и полуцилиндрической выемки на поверхности. И щель, и выемка располагались перпендикулярно направлению распространения рэлеевской волны. К двум данным моделям дефектов можно свести большинство протяженных поверхностных дефектов (трещины, вмятины, царапины поверхности). При исследовании измерялся коэффициент отражения  $K_{\text{отр}}$  рэлеевской волны от модели, коэффициент прохождения  $K_{\text{прох}}$  через нее, а также сумма их квадратов  $K_{\text{отр}}^2 + K_{\text{прох}}^2$ , характеризующая пре-

образование рэлеевской волны в объемные волны, рассеиваемые моделью. Измерения проводились по такой же схеме, как в опытах по распространению на двугранных поверхностях, описанных в § 5. Щели и выемки были прорезаны на плоских поверхностях диоралевых стержней.

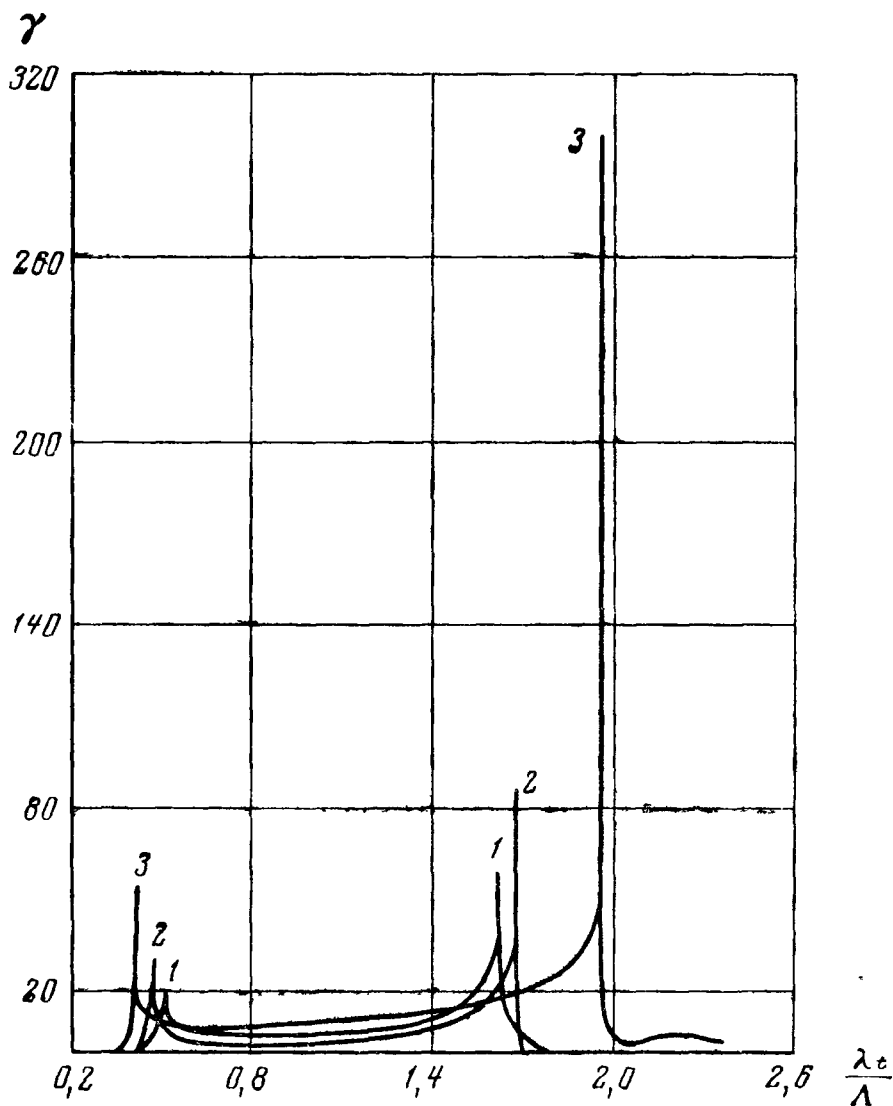


Рис. 25

Результаты измерений для щели приведены на рис. 26, а, а для выемки — на рис. 26, б. По осям абсцисс отложены глубина щели в длинах рэлеевских волн  $h/\lambda_R$  и отношение радиуса полуцилиндрической выемки к длине рэлеевской волны  $R/\lambda_R$ . Как видно из этих рисунков, сумма  $K_{отр}^2 + K_{прох}^2$  и для щели, и для выемки заметно меньше единицы, что

Свидетельствует о значительной трансформации энергии падающей рэлеевской волны в энергию рассеиваемых щелью и выемкой объемных волн. При возрастании глубины щели и радиуса выемки коэффициенты отражения рэлеевской волны от этих моделей дефектов, осциллируя, возрастают, а коэффициенты прохождения, осциллируя, уменьшаются (отметим

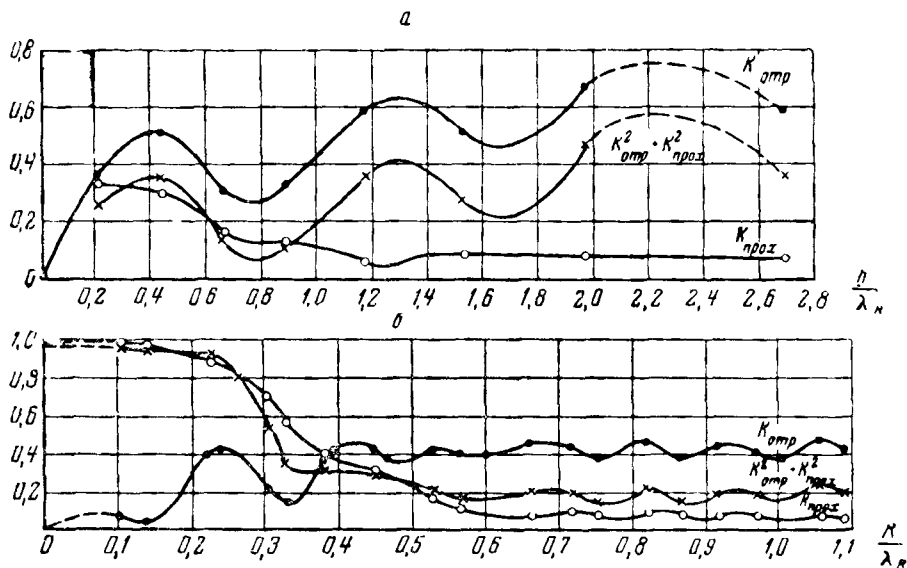


Рис. 26

что амплитуды осцилляций существенно больше ошибки измерения коэффициентов отражения и прохождения). Среднее значение  $K_{отр}$  для щели стремится с увеличением  $h/\lambda_R$  к значению коэффициента отражения рэлеевской волны на клине раствора  $\theta = 90^\circ$  (см. рис. 19). Коэффициент прохождения рэлеевской волны через щель при  $h/\lambda_R > 1,5$  уже не зависит от глубины и примерно равен 0,08; следовательно, рэлеевская волна может проходить через трещины любой глубины, что важно для ультразвуковой поверхностной дефектоскопии. При одинаковых глубинах щели и выемки, при условии  $h, R < 0,4\lambda_R$ , экранирующая и отражательная способности щели больше, чем выемки, следовательно, неглубокую поверхностную трещину обнаружить дефектоскопом легче, чем вмятину. Осцилляции  $K_{отр}$  и  $K_{проз}$  для щели и выемки объясняются интерференционными механизмами образования отраженных и прошедших рэлеевских волн. В случае щели отраженная волна складывается из отражения от передней (обращенной к излучателю) грани щели и из рассеяния на «дне» щели той «части» рэлеевской волны, которая «спустилась» туда



по передней грани (поэтому чередование максимумов и минимумов  $K_{отр}$  для щели происходит примерно через  $\Delta h \simeq \lambda_R$ ). Прошедшая волна складывается из сквозного прохождения под щелью нижней «части» падающей рэлеевской волны, которая не отсекается щелью, и из огибания щели второй (верхней) частью рэлеевской волны, которая проходит через щель, «спустившись» по одной грани и «поднявшись» по другой (благодаря этому период осцилляции  $K_{прох}$  вдвое меньше, чем  $K_{отр}$ ). В случае выемки отраженная и прошедшая волны возникают из интерференции отражений от двух ребер выемки — переднего и заднего. При неглубокой выемке ( $R \ll \lambda_R$ ) разность этих отражений равна  $8\pi R/\lambda_R$ , так как падающая рэлеевская волна проходит через выемку, не изменяя направления своего распространения. Поэтому мы имеем минимум отражения при  $R/\lambda_R \simeq 0,125$  и максимум при  $R/\lambda_R \simeq 0,250$ . Заметим, что механизм отражения, аналогичный указанному, возможен при неглубоких выемках любой формы, например для прямоугольной канавки.

При глубине выемки порядка  $\lambda_R$  и больше падающая и отраженная от заднего ребра выемки рэлеевские волны огибают выемку, распространяясь по ее периметру. В этом случае прохождение и отражение волн становятся совершенно аналогичным прохождению и отражению на закруглениях, сделанных между гранями прямоугольного клина (см. § 5). Поскольку поверхностные волны рэлеевского типа на вогнутой цилиндрической поверхности  $R \sim \lambda_R$  сильно затухают, коэффициент прохождения рэлеевских волн через выемку при  $R/\lambda_R > 0,6$  весьма мал. Отметим, что характер изменения кривых коэффициентов отражения и прохождения для щели и выемки, как следует из описанных механизмов образования отраженной и прошедшей рэлеевских волн, должен быть одинаков для любой упругой среды.

В работе [33] описывается экспериментальное исследование рассеяния ультразвуковых рэлеевских волн еще на двух типах моделей поверхностных дефектов: полусферической выемке разного диаметра и цилиндрическом канале разного диаметра и глубины, прорезанном перпендикулярно от поверхности распространения рэлеевской волны. Этими моделями, являющимися естественным дополнением к двум первым, можно представить локализованные поверхностные дефекты типа ямок, вертикальных трещин, уходящих от поверхности, и т. д.

Вместе с моделями протяженных дефектов эти модели характеризуют в какой-то степени все многообразие поверхностных дефектов. Измерения проводились в импульсном режиме при длительности импульса 10 мксек и частоте заполнения 2,75 Мгц. Модели дефектов разных размеров были сделаны на хорошо обработанных поверхностях прямоугольных дюралевых листов размером  $450 \times 300 \times 7$  мм. Излучение и прием рэлеевских волн осуществлялись методом клина. Излучающий клин располагался на расстоянии 225 мм от модели дефекта и посылал на нее направленный пучок рэлеевских волн. Приемный клин последовательно помещался в точки окружности радиуса 50 мм, описанной вокруг модели, причем каждое измерение амплитуды рассеянной волны тотчас же относилось к соответствующему измерению амплитуды падающей волны в некоторой точке между излучателем и моделью дефекта. По последнему измерению путем пересчета определялась амплитуда падающей рэлеевской волны непосредственно у модели. Приемный

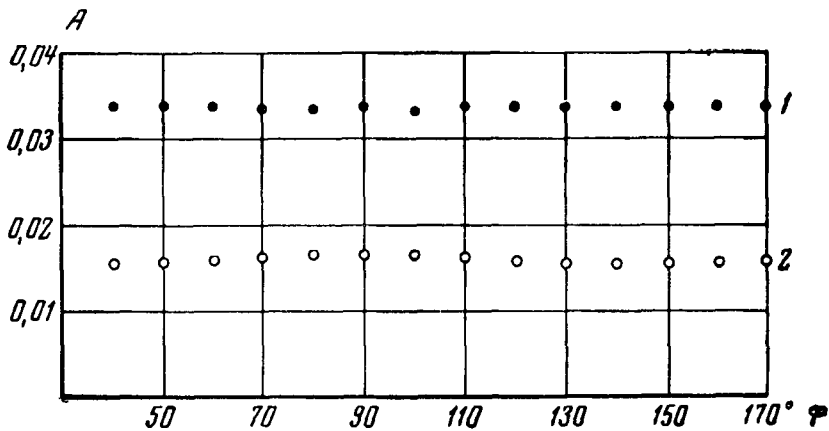


Рис. 27

клин имел акустический контакт с поверхностью дюралевого листа только по кругу диаметром 3 мм, что позволяло измерять амплитуду колебаний поверхности листа в малой области (локально). Акустический контакт осуществлялся пленкой касторового масла.

На рис. 27, 28, а, б приведены результаты измерений. Рис. 27 изображает зависимость амплитуд  $A$  рэлеевских волн, рассеянных цилиндрическим каналом (1) диаметра  $d=1,8$  мм и глубины  $h=3$  мм и полусферической выемкой (2) диаметра  $d=1,6$  мм, от угла  $\varphi$ , отсчитываемо-

го от направления волнового вектора падающей на модель рэлеевской волны по часовой стрелке. Для других размеров моделей зависимость амплитуд рассеянных волн от угла  $\varphi$  была точно такая же, поэтому соответствующих данных не приводится. На рис. 28, а представлены зависимости амплитуд рэлеевских волн, рассеянных цилиндрическим каналом (1) и полусферической выемкой (2) от отношения  $d/\lambda_R$  (амплитуды измерялись при  $40^\circ < \varphi < 170^\circ$ , где они не зависят от  $\varphi$ ). Безразмерная амплитуда  $A$  представляет умноженное на фактор затухания отношение амплитуды поверхностного смещения в рассеянной модели рэлеевской волне на расстоянии  $r=50$  мм от модели к амплитуде поверхностного

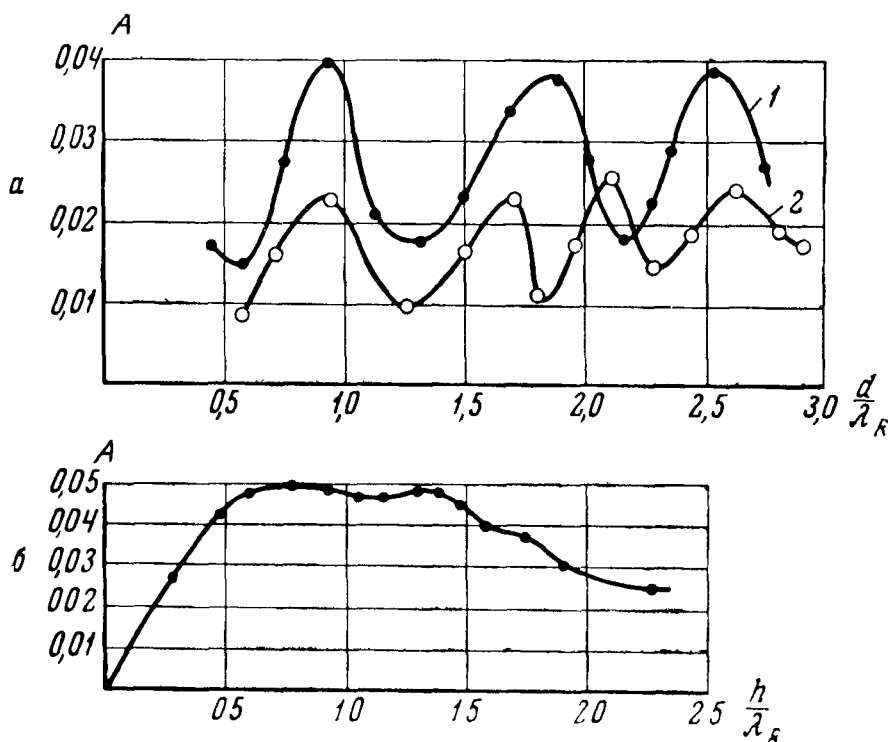


Рис 28

смещения в падающей рэлеевской волне у модели. Фактор затухания исключает уменьшение амплитуды рассеянной волны на пути от модели до точки приема (50 мм) из-за поглощения и рассеяния в дюрали. На рис. 28, б изображена зависимость амплитуды  $A$  от отношения глубины цилиндрического канала к длине волны.

Отметим прежде всего, что, как видно из рис 27, в угловом интервале  $40^\circ < \varphi < 170^\circ$  рассеяние цилиндриче-

ского канала и полусферической выемки по всем направлениям одинаково (при углах  $\varphi \sim 180^\circ$ ,  $\varphi < 40^\circ$  измерения не производились, поскольку отраженный импульс маскировался падающим импульсом). То же самое справедливо, конечно, и при отрицательных значениях  $\varphi$ . Данный результат является весьма неожиданным и связан, по-видимому, со спецификой рэлеевской волны, поскольку обычно при рассеянии волн на препятствиях в жидкости и твердом теле, сравнимых с длиной волны, интенсивность рассеяния существенно зависит от угла  $\varphi$ .

Из рис. 28, а следует, что зависимости амплитуд рассеянных на моделях рэлеевских волн от  $d/\lambda_R$  не монотонные, а сильно осциллирующие, причем для цилиндрического канала и полусферической выемки диаметров  $d < 1,7 \lambda_R$  период этих осцилляций составляет примерно 0,80, а для полусферической выемки с диаметром  $d > 1,7 \lambda_R$  период равен примерно 0,45. Можно предположить, по аналогии с рассеянием продольных волн на цилиндрической полости в твердой среде, что максимумы рассеяния в нашем случае соответствуют резонансам цилиндрической и полусферической полостей (канала и выемки). Цилиндрическая и полусферическая полости малого диаметра ( $d < 1,7 \lambda_R$ ) резонируют при одинаковых значениях  $d$ , что свидетельствует, по-видимому, о резонансах периметра размером  $\pi d$  в этих случаях. При  $d > 1,7 \lambda_R$  у полусферической выемки наблюдаются новые резонансы, связанные со спецификой ее геометрии по сравнению с цилиндрическим каналом. Сравнивая кривые 1 и 2 на рис. 28, а, можно заметить, что цилиндрическая полость рассеивает рэлеевские волны существенно сильнее, чем полусферическая. При рассеянии на цилиндрическом канале амплитуда рассеянной рэлеевской волны сначала возрастает с увеличением глубины канала, а затем, слегка осциллируя, уменьшается (см. рис. 28, б).

Такой характер зависимости  $A(h/\lambda_R)$  позволяет предположить, что в данном случае рассеянная волна образуется в результате излучения двух синфазных рассеивающих центров, один из которых занимает область вблизи верхней кромки канала, другой — около «дна». При глубине канала, большей толщины слоя локализации рэлеевской волны ( $h > 2\lambda_R$ ), «донный» источник «выключается», поэтому амплитуда рассеянной волны па-

дает. Волнистость кривой, по-видимому, связана с взаимодействием между рассеивающими центрами, которое осуществляется через стоячую рэлеевскую волну, возникающую на стенке канала между его верхней кромкой и дном. Такое предположение подтверждает длина пространственного периода волнистости, равная примерно  $\lambda_R/2$ .

Рассеяние рэлеевских волн моделями локализованных поверхностных дефектов удобно оценивать путем введения эффективного размера рассеивателя. Будем понимать под эффективным размером  $D$  для обеих моделей ширину той части пучка рэлеевских волн, падающих на модель (ширина берется непосредственно у модели), в которой сосредоточена энергия, равная суммарной энергии рассеянных рэлеевских волн. Таким образом, под  $D$  понимается размер (в направлении, перпендикулярном волновому вектору падающей волны) некоторого идеального отражателя рэлеевских волн. При таком определении  $D$ , предполагая дополнительно, что амплитуда рассеянных волн при всех углах  $\varphi$  одна и та же, будем иметь для  $D$  следующее выражение:

$$D = 2\pi r A^2,$$

где  $r$  — расстояние от центра модели, на котором измерялась амплитуда рассеянной рэлеевской волны (в описанных опытах  $r = 50$  мм). Вычисляя по этой формуле эффективные размеры рассеяния моделей, получим, например, что максимальное значение  $D = 0,85$  мм соответствует цилиндрическому каналу диаметра  $0,5$  мм и глубины  $h = 0,83$  мм, а минимальное, равное  $0,025$  мм, — полусферической выемке диаметра  $d = 0,7$  мм. Параметр  $D$  является универсальной внутренней характеристикой дефекта, определяемой только его формой и отношением линейных размеров к длине падающей рэлеевской волны. Зная величину  $D$  и амплитуду  $B$  падающей на дефект волны, можно рассчитать амплитуду  $b$  рассеянной волны на любом расстоянии  $R$  от дефекта по формуле

$$b = \sqrt{D/2\pi R} B$$

(формула применима, конечно, при условии независимости амплитуды рассеяния от угла  $\varphi$ ).

## ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН ЛЭМБА

### § 1. Понятие о волнах Лэмба

Волнами Лэмба называют упругие возмущения, распространяющиеся в твердой пластинке (слое) со свободными границами, у которых имеется смещение как в направлении распространения волны, так и перпендикулярно плоскости пластинки. Волны Лэмба представляют

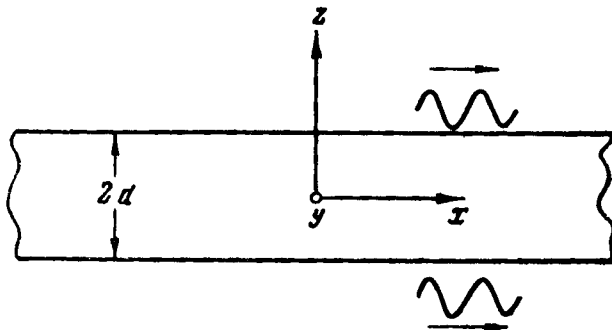


Рис. 29

собой один из типов нормальных волн в упругом волноводе, в данном случае — пластинке со свободными границами. Поэтому иногда волны Лэмба называют просто нормальными волнами в пластинке. Но это определение не строго, так как в пластинке со свободными границами может существовать еще и второй тип нормальных волн — поперечные нормальные волны, в которых движение происходит перпендикулярно направлению распространения и параллельно границам пластинки.

Рассмотрим, следуя [3], плоскую гармоническую волну Лэмба, распространяющуюся в пластинке толщины  $2d$  в положительном направлении оси  $x$  (рис. 29). Введем для области, занятой пластинкой, скалярный  $\varphi$  и

векторный  $\psi$  потенциалы смещений, связанные с вектором смещения частиц соотношением (I.1). Как и в плоской рэлеевской волне (см. § 1 гл. I), у векторного потенциала будет отлична от нуля только компонента по оси  $y$ , которую мы обозначим просто  $\psi$ . Потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$ , описывающие соответственно продольные и поперечные волны, должны удовлетворять волновым уравнениям (I.2). Связь этих потенциалов с компонентами смещений  $U$  и  $W$  по осям  $x$  и  $z$  и с компонентами тензора напряжений дается формулами (I.3) и (I.4).

Представим  $\varphi$  и  $\psi$  в следующей форме:

$$\begin{aligned}\varphi &= A_s \operatorname{ch} qze^{ikx} + B_a \operatorname{sh} qze^{ikx}, \\ \psi &= D_s \operatorname{sh} sze^{ikx} + C_a \operatorname{ch} sze^{ikx},\end{aligned}\tag{II.1}$$

где  $A_s, B_a, C_a, D_s$  — произвольные постоянные;  $k$  — волновое число волн Лэмба;  $q = \sqrt{k^2 - k_l^2}$ ;  $s = \sqrt{k^2 - k_t^2}$ ; множитель  $e^{-i\omega t}$  для краткости опущен. Нетрудно видеть, что эти выражения удовлетворяют волновым уравнениям (I.2). Кроме того, они должны обращать напряжения  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{zz}$  на плоскостях  $z = \pm d$  в нуль. Подставляя выражения (II.1) в формулы (I.4) и приравнявая указанные напряжения к нулю, получим следующую систему линейных однородных уравнений для нахождения амплитуд  $A_s, B_a, C_a, D_s$ :

$$\begin{aligned}(k^2 + s^2) \operatorname{ch} qdA_s + (k^2 + s^2) \operatorname{sh} qdB_a + 2iks \operatorname{sh} sdC_a + \\ + 2iks \operatorname{ch} sdD_s = 0; \\ (k^2 + s^2) \operatorname{ch} qdA_s - (k^2 + s^2) \operatorname{sh} qdB_a - 2iks \operatorname{sh} sdC_a + \\ + 2iks \operatorname{ch} sdD_s = 0; \\ 2ikq \operatorname{sh} qdA_s + 2ikq \operatorname{ch} qdB_a - (k^2 + s^2) \operatorname{ch} sdC_a - \\ - (k^2 + s^2) \operatorname{sh} sdD_s = 0; \\ -2ikq \operatorname{sh} qdA_s + 2ikq \operatorname{ch} qdB_a - (k^2 + s^2) \operatorname{ch} sdC_a + \\ + (k^2 + s^2) \operatorname{sh} sdD_s = 0.\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что написанная система удовлетворяется, если удовлетворяются две подсистемы:

$$\begin{aligned}(k^2 + s^2) \operatorname{ch} qdA_s + 2iks \operatorname{ch} sdD_s = 0, \\ 2ikq \operatorname{sh} qdA_s - (k^2 + s^2) \operatorname{sh} sdD_s = 0;\end{aligned}\tag{II.2}$$

$$\begin{aligned}(k^2 + s^2) \operatorname{sh} qdB_a + 2iks \operatorname{sh} sdC_a = 0, \\ 2ikq \operatorname{ch} qdB_a - (k^2 + s^2) \operatorname{ch} sdC_a = 0.\end{aligned}\tag{II.3}$$

Подсистемы имеют нетривиальные решения только при равенствах нулю их определителей. Это приводит к двум характеристическим уравнениям, определяющим собственные значения волнового числа  $k$ :

$$(k^2 + s^2)^2 \operatorname{ch} qd \operatorname{sh} sd - 4k^2qs \operatorname{sh} qd \operatorname{ch} sd = 0, \quad (\text{II.4})$$

$$(k^2 + s^2)^2 \operatorname{sh} qd \operatorname{ch} sd - 4k^2qs \operatorname{ch} qd \operatorname{sh} sd = 0. \quad (\text{II.5})$$

Используя эти уравнения, получим из подсистемы (II.2) выражение для  $D_s$  через  $A_s$ , а из подсистемы (II.3) — выражение для  $C_a$  через  $B_a$ . Вставляя их в (II.1), будем иметь для искомых потенциалов формулы:

$$\varphi = A_s \operatorname{ch} q_s z e^{ik_s x} + B_a \operatorname{sh} q_a z e^{ik_a x};$$

$$\psi = \frac{2ik_s q_s \operatorname{sh} q_s d}{(k_s^2 + s_s^2) \operatorname{sh} s_s d} A_s \operatorname{sh} s_s z e^{ik_s x} + \frac{2ik_a q_a \operatorname{ch} q_a d}{(k_a^2 + s_a^2) \operatorname{ch} s_a d} B_a \operatorname{ch} s_a z e^{ik_a x}. \quad (\text{II.6})$$

Здесь  $k_s$  — значения  $k$ , удовлетворяющие уравнению (II.4), а  $k_a$  — уравнению (II.5);  $q_{s,a} = \sqrt{k_{s,a}^2 - k_l^2}$ ;  $s_{s,a} = \sqrt{k_{s,a}^2 - k_t^2}$ . Из формул (II.6) при помощи соотношений (I.3) можно вычислить компоненты смещений  $U$  и  $W$ :

$$\begin{aligned} U &= U_s + U_a; \\ W &= W_s + W_a, \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

где

$$U_s = Ak_s \left( \frac{\operatorname{ch} q_s z}{\operatorname{sh} q_s d} - \frac{2q_s s_s}{k_s^2 + s_s^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} s_s z}{\operatorname{sh} s_s d} \right) e^{i(k_s x - \omega t - \frac{\pi}{2})}, \quad (\text{II.8})$$

$$W_s = -Aq_s \left( \frac{\operatorname{sh} q_s z}{\operatorname{sh} q_s d} - \frac{2k_s^2}{k_s^2 + s_s^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} s_s z}{\operatorname{sh} s_s d} \right) e^{i(k_s x - \omega t)};$$

$$U_a = Bk_a \left( \frac{\operatorname{sh} q_a z}{\operatorname{ch} q_a d} - \frac{2q_a s_a}{k_a^2 + s_a^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} s_a z}{\operatorname{ch} s_a d} \right) e^{i(k_a x - \omega t - \frac{\pi}{2})}, \quad (\text{II.9})$$

$$W_a = -Bq_a \left( \frac{\operatorname{ch} q_a z}{\operatorname{ch} q_a d} - \frac{2k_a^2}{k_a^2 + s_a^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} s_a z}{\operatorname{ch} s_a d} \right) e^{i(k_a x - \omega t)};$$

здесь  $A$  и  $B$  новые произвольные постоянные.



Выражения (II.6) — (II.9) и уравнения (II.4), (II.5) описывают две группы волн, каждая из которых удовлетворяет волновым уравнениям движения и граничным условиям, т. е. может распространяться в пластинке независимо от другой. Анализируя выражения (II.8) и (II.9), нетрудно заметить, что первая группа волн, отмеченная

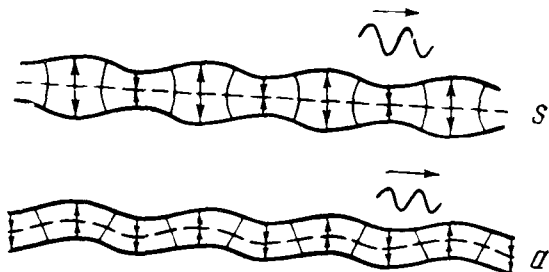


Рис. 30

индексом  $s$ , описывает волны, в которых движение происходит симметрично относительно плоскости  $z=0$  (т. е. в верхней и нижней половинах пластинки смещение  $U$  имеет одинаковые знаки, а смещение  $W$  — противоположные). Вторая группа, отмеченная индексом  $a$ , описывает волны, в которых движение происходит антисимметрично относительно  $z=0$  (т. е. в верхней и нижней половинах пластинки смещение  $U$  имеет противоположные знаки, а смещение  $W$  — одинаковые). Волны первой группы называются симметричными волнами Лэмба, волны второй группы — антисимметричными. На рис. 30 схематично изображена деформация пластинки в  $z$ -направлении при распространении в ней симметричных ( $s$ ) и антисимметричных ( $a$ ) волн.

## § 2. Число волн Лэмба, критические частоты

В пластинке толщины  $2d$  при частоте  $\omega$  может существовать определенное конечное число симметричных и антисимметричных волн Лэмба, отличающихся одна от другой фазовыми и групповыми скоростями и распределением смещений и напряжений по толщине пластинки. Число симметричных волн определяется числом вещественных корней уравнения (II.4), а число антисимметричных — уравнения (II.5). Каждый корень определяет волновое число  $k_{s,a}$ , или фазовую скорость  $c_{s,a}$  соответствующую

щей волны. Можно показать, что, помимо конечного числа вещественных корней  $k_{s,a}$ , оба названных уравнения при любых  $\omega$  и  $d$  имеют бесконечное множество чисто мнимых корней, соответствующих синфазным экспоненциально затухающим или нарастающим по оси  $x$  движениям пластинки. Поскольку нас интересуют распространяющиеся волны, мы в дальнейшем будем учитывать только вещественные корни характеристических уравнений (II.4) и (II.5).

При  $\omega d \rightarrow 0$  уравнения (II.4) и (II.5), как легко убедиться, имеют только по одному корню. Корень уравнения (II.4) соответствует так называемой нулевой симметричной нормальной волне, которую мы будем обозначать  $s_0$ , а корень уравнения (II.5) — нулевой антисимметричной волне  $a_0$ . При увеличении  $\omega d$  корни  $k_s$  и  $k_a$  меняются по величине и наряду с этим при определенных соотношениях между  $\omega$  и  $d$  появляются новые корни, соответствующие первой, второй и т. п. симметричным ( $s_1, s_2, \dots, s_n$ ) и антисимметричным ( $a_1, a_2, \dots, a_n$ ) волнам Лэмба. Значения  $\omega$  и  $d$ , при которых появляются новые корни, называются «критическими» толщинами и частотами. Соотношения между критическими толщинами и длинами поперечных и продольных волн следующие:

$$\left. \begin{aligned} 2d &= \frac{\lambda_l}{2}, \frac{3\lambda_l}{2}, \frac{5\lambda_l}{2}, \dots \\ 2d &= \lambda_t, 2\lambda_t, 3\lambda_t, \dots \end{aligned} \right\} \text{— для симметричных волн;} \quad (\text{II.10})$$

$$\left. \begin{aligned} 2d &= \lambda_l, 2\lambda_l, 3\lambda_l, \dots \\ 2d &= \frac{\lambda_t}{2}, \frac{3\lambda_t}{2}, \frac{5\lambda_t}{2}, \dots \end{aligned} \right\} \text{— для антисимметричных волн.} \quad (\text{II.11})$$

При критических частотах волновые числа  $k_{s,a} \rightarrow 0$  (фазовые скорости  $c_{s,a} \rightarrow \infty$ ), и появляющаяся симметричная или антисимметричная волны представляют собой стоячую продольную (верхний ряд значений в равенствах (II.10) и (II.11) или поперечную (нижний ряд значений в (II.10), (II.11)) волну в пластинке.

Полное число симметричных волн  $N_s$ , возможных в пластинке заданной толщины  $2d$  на частоте  $\omega$ , равно:

$$N_s = 1 + \left[ \frac{2d}{\lambda_t} \right] + \left[ \frac{2d}{\lambda_l} + \frac{1}{2} \right], \quad (\text{II.12})$$

а антисимметричных —

$$N_a = 1 + \left[ \frac{2d}{\lambda_l} \right] + \left[ \frac{2d}{\lambda_t} + \frac{1}{2} \right]. \quad (\text{II.13})$$

Квадратные скобки означают здесь целую часть числа, заключенного в них. На рис. 31 изображена заимствованная нами из работы [34] номограмма для определения

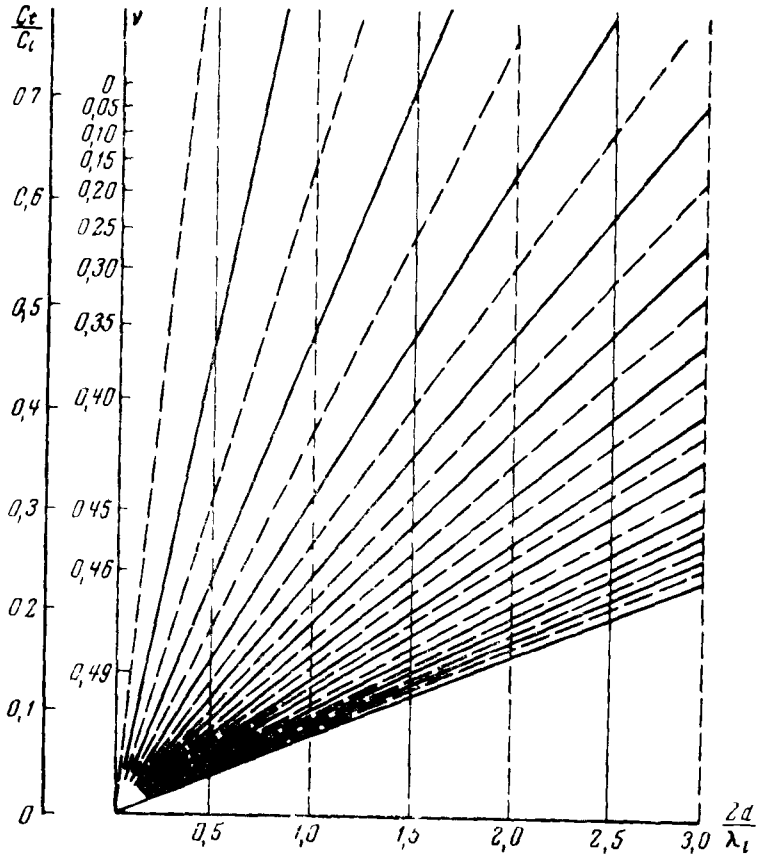


Рис 31

числа волн Лэмба в пластинке. По оси абсцисс отложено отношение толщины пластинки к длине продольной волны, по оси ординат — отношение скоростей  $c_t/c_l = \xi$  (равномерная шкала) и коэффициент Пуассона  $\nu$  (неравномерная шкала). Вертикальные прямые соответствуют критическим частотам волн, появляющихся как продольные, наклонные линии соответствуют критическим частотам волн, появляющихся как поперечные (в обоих случаях сплошные линии — симметричные волны, пунктир-

ные — антисимметричные волны). Чтобы определить число распространяющихся волн, отвечающих данному значению  $2d/\lambda_i$ , следует подсчитать число линий, соответствующих тому или иному типу волн, проходящих слева от точки, отвечающей данному отношению  $2d/\lambda_i$  и коэффициенту Пуассона  $\nu$  рассматриваемого материала. Из графика видно, что при увеличении коэффициента Пуассона число волн, появляющихся как поперечные, возрастает относительно числа волн, появляющихся как продольные.

### § 3. Фазовые и групповые скорости волн Лэмба

Фазовая скорость  $c$  является основной характеристикой волны Лэмба. Зная ее, мы можем определить волновое число и рассчитать напряжения и смещения в волне Лэмба в любой точке пластинки. Кроме того, по формуле

$c_{гр} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$  можно вычислить групповую скорость  $c_{гр}$

волны. Фазовая скорость находится путем численного решения характеристических уравнений (II.4) и (II.5), которые для этих расчетов удобно переписать в следующей безразмерной форме:

для симметричных волн

$$\frac{\operatorname{tg} \sqrt{1 - \zeta^2} \bar{d}}{\operatorname{tg} \sqrt{\xi^2 - \zeta^2} \bar{d}} = - \frac{4\zeta^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \sqrt{\xi^2 - \zeta^2}}{(2\xi^2 - 1)^2},$$

для антисимметричных

$$\frac{\operatorname{tg} \sqrt{1 - \zeta^2} \bar{d}}{\operatorname{tg} \sqrt{\xi^2 - \zeta^2} \bar{d}} = - \frac{(2\xi^2 - 1)^2}{4\zeta^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \sqrt{\xi^2 - \zeta^2}};$$

здесь

$$\bar{d} = k_t d; \quad \zeta^2 = \frac{c_t^2}{c^2}; \quad \xi^2 = \frac{c_l^2}{c_t^2}.$$

Расчеты зависимостей фазовых и групповых скоростей от толщины пластинки и частоты (дисперсионные кривые) производились многими авторами. В Акустическом институте АН СССР при помощи машины «Урал» был произведен подробный расчет дисперсионных кривых двадцати пяти низших номеров волн Лэмба [35]. На

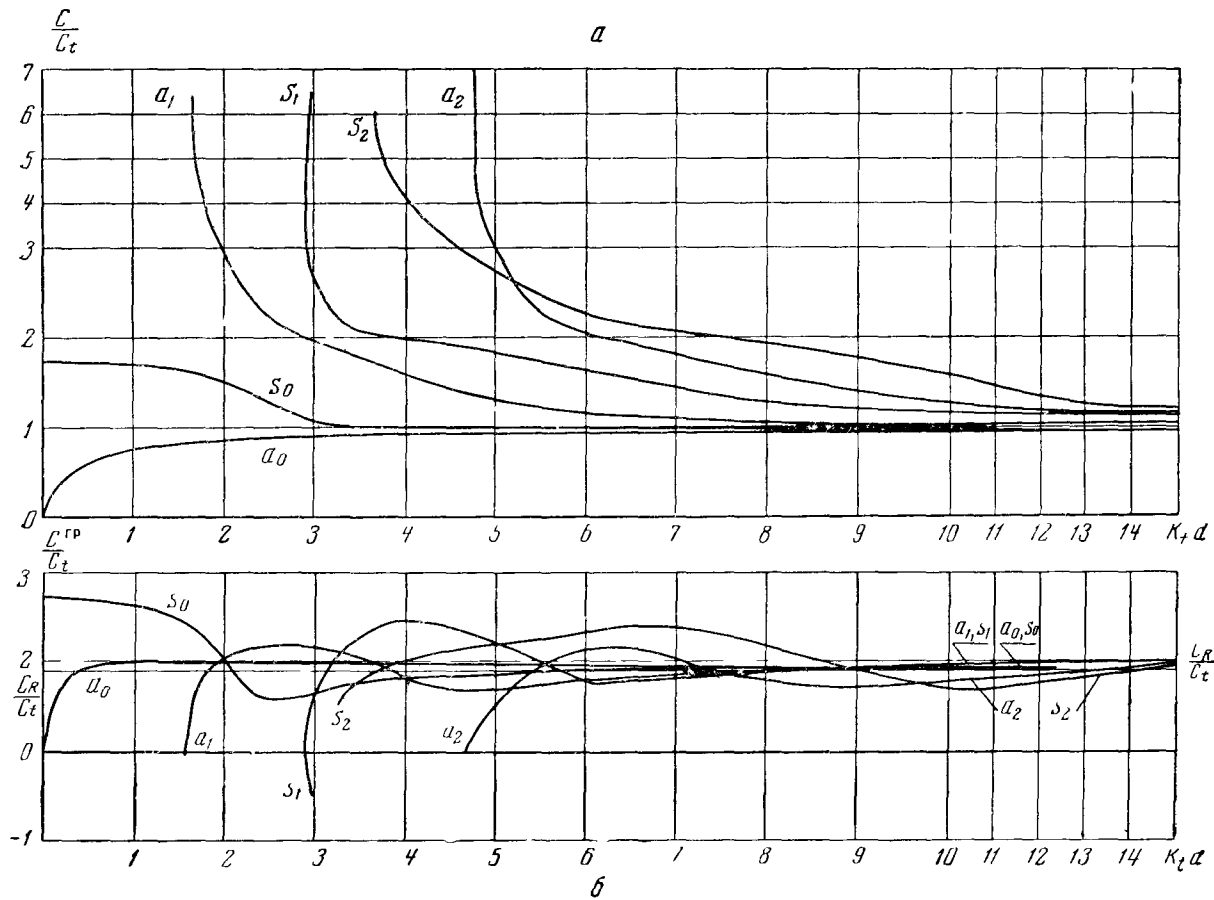


Рис. 32

рис. 32, а мы воспроизводим эти кривые для фазовых скоростей волн  $s_0, s_1, s_2, a_0, a_1, a_2$ , а на рис. 32, б — для групповых скоростей этих же волн. Кривые соответствуют коэффициенту Пуассона  $\nu = 0,34$ .

Как видно из рис. 32, а, б, для волн всех номеров характерна сильная дисперсия скоростей. При изменении  $\bar{d}$  от нуля до бесконечности фазовые скорости волн  $s_0$  и  $a_0$  меняются соответственно от

$$\sqrt{E/\rho(1-\nu^2)} \text{ и } \sqrt[4]{E/3\rho(1-\nu^2)} \sqrt{\omega\bar{d}}$$

( $E$  — модуль Юнга) до  $c_R$ . Групповые скорости этих волн меняются при этом от

$$\sqrt{E/\rho(1-\nu^2)} \text{ и } 2\sqrt[4]{E/3\rho(1-\nu^2)} \sqrt{\omega\bar{d}}$$

до  $c_R$ . Фазовые скорости ненулевых волн меняются от бесконечности (в момент возникновения волны) до  $c \rightarrow c_t$  при  $\bar{d} \rightarrow \infty$ . Групповые скорости ненулевых нормальных волн меняются от нуля и даже отрицательных (иногда) значений до величин, близких к  $c_t$ , при  $\bar{d} \rightarrow \infty$ . Отрицательность групповой скорости означает, что фазовая и групповая скорости данной волны направлены в противоположные стороны. Из графиков видно, что каждая волна порядка выше нулевого имеет максимум фазовой скорости. В работе [34] показано, что для некоторых волн может быть несколько максимумов групповой скорости, причем с ростом номера волны значение наибольшего максимума возрастает, приближаясь к значению  $c_t$ . Кроме того, с ростом номера, вблизи наибольшего максимума у симметричных волн появляются интервалы  $\bar{d}$ , на которых групповая скорость остается почти постоянной. Так, например, для волны  $s_{10}$  относительный интервал  $\bar{d}$ , на котором групповая скорость меняется не более, чем на 3%, составляет около 10%. В указанных интервалах фазовая скорость меняется также крайне слабо. За интервалами квазипостоянных значений групповых скоростей следуют характерные резкие спады  $c^{rp}$ .

При критических значениях  $k_t \bar{d}$ , которые мы будем обозначать  $\bar{d}_k$ , для фазовых скоростей появляющихся волн справедливы следующие асимптотические выражения [36]:

1) симметричная и антисимметричная волны, рождающиеся как продольные волны:

$$c_s = \frac{c_l}{\sqrt{\bar{d} - \bar{d}_k}} \sqrt{\frac{\bar{d}_l}{2} + 4\xi^2 \operatorname{ctg} \bar{J}_k}, \quad (\text{II.14})$$

$$c_a = \frac{c_l}{\sqrt{\bar{d} - \bar{d}_k}} \sqrt{\frac{\bar{d}_l}{2} - 4\xi^2 \operatorname{tg} d_k}; \quad (\text{II.15})$$

2) симметричная и антисимметричная волны, рождающиеся как поперечные волны:

$$c_s = \frac{c_t}{\sqrt{\bar{d} - \bar{d}_k}} \sqrt{\frac{\bar{d}_k}{2} - 4\xi \operatorname{tg} \xi \bar{J}_k}, \quad (\text{II.16})$$

$$c_a = \frac{c_t}{\sqrt{\bar{d} - \bar{d}_k}} \sqrt{\frac{\bar{d}_k}{2} + 4\xi \operatorname{ctg} \xi d_k}. \quad (\text{II.17})$$

Асимптотические выражения для фазовых скоростей симметричных и антисимметричных волн номера  $n$  нетрудно получить и для очень толстой пластинки при  $k_t d \rightarrow \infty$ . Они имеют вид [36].

$$c_s = c_t \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{n\pi}{\bar{d}} \right)^2 \right]; \quad (\text{II.18})$$

$$c_a = c_t \left[ 1 + \frac{1}{8} \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{\bar{d}^2} \right], \quad (\text{II.19})$$

где  $n$  — номер (порядок) волны.

#### § 4. Движение в волнах Лэмба

Зная дисперсионные кривые фазовых и групповых скоростей волн Лэмба, можно перейти к рассмотрению движения в волнах разных номеров. Для характеристики движения достаточно знать смещения по осям  $x$  и  $z$  в различных точках пластинки. По смещениям можно вычислить напряжения в волне, пользуясь следующими со-

отношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_{rx} &= \lambda \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x}; \\ \sigma_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right); \\ \sigma_{zz} &= \lambda \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial W}{\partial z}.\end{aligned}\tag{II.20}$$

Начнем рассмотрение с волн  $s_0$  и  $a_0$ , которые качественно отличаются от всех остальных дисперсионными кривыми скоростей и тем, что существуют при любых частотах и толщинах пластинок. При малых толщинах пластинки, когда  $k_{s_0, a_0} d \rightarrow 0$  эти волны представляют собой продольную ( $s_0$ ) и изгибную ( $a_0$ ) волны в тонкой пластинке. При этом смещения их описываются следующими выражениями, получаемыми в результате предельных переходов из формул (II. 8), (II. 9):

$$U_{s_0} = Ak_t \frac{k_s^2 - s_s^2}{k_s^2 + s_s^2} \frac{1}{k_t d} \sin(k_s x - \omega t),\tag{II.21}$$

$$W_{s_0} = Ak_t \frac{q_s (k_s^2 - s_s^2)}{k_t (k_s^2 + s_s^2)} \frac{z}{d} \cos(k_s x - \omega t);$$

$$U_{a_0} = Bk_t \frac{k_t z}{2} \sin(k_a x - \omega t),\tag{II.22}$$

$$W_{a_0} = Bk_t \frac{k_t}{2k_a} \cos(k_a x - \omega t).$$

Из формул видно, что в продольной волне преобладает смещение по оси  $x$ , амплитуда которого одинакова во всех точках пластинки. Смещение в поперечном направлении, происходящее за счет эффекта Пуассона, меньше продольного смещения примерно в  $1/k_t d$  раз. Оно максимально на поверхности и равно нулю в средней плоскости пластинки. В изгибной волне, напротив, преобладает поперечное смещение  $W$ , амплитуда которого одинакова во всех точках пластинки. Продольное смещение равно нулю на средней плоскости, максимально на поверхности пластинки и в среднем в  $1/k_a d$  раз меньше поперечного смещения. Более подробные сведения о продольной и изгибной волнах в тонких пластинках можно найти в монографии [4].



При увеличении толщины пластинки свойства волн  $s_0$  и  $a_0$  меняются: они становятся все более «похожи» одна на другую. При  $k_t d \gg 1$  их фазовые скорости стремятся к фазовой скорости рэлеевской волны  $c_R$  (см рис. 32, а), смещения становятся локализованными вблизи свободных границ пластинки и их распределения с глубиной

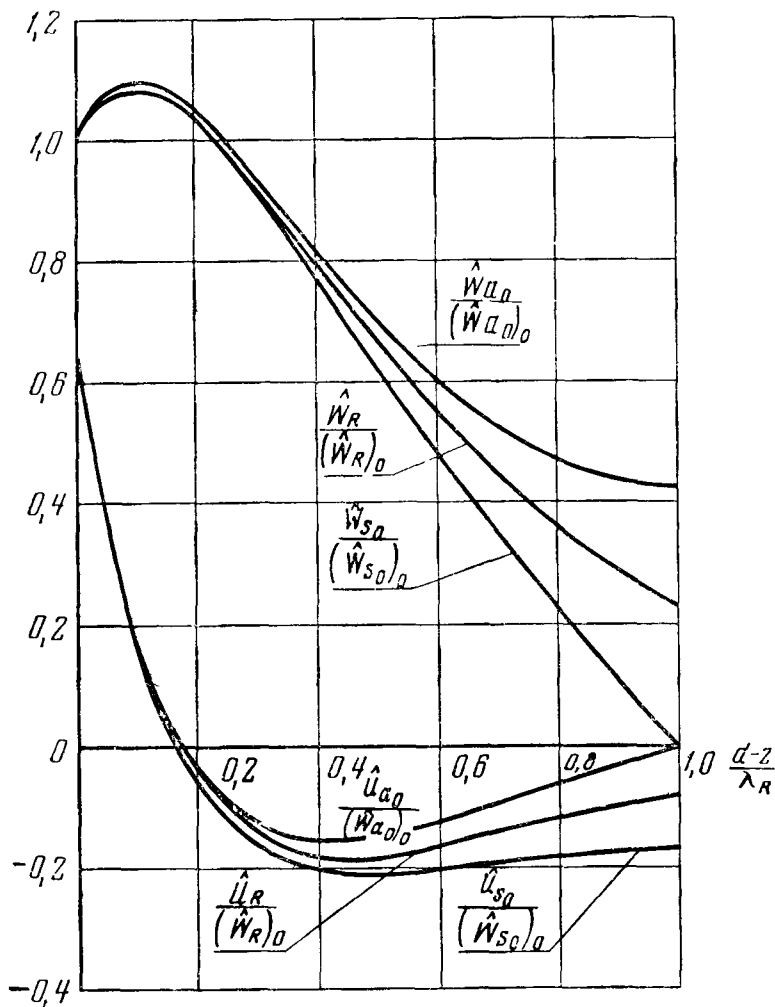


Рис 33

стремятся к распределению смещений по глубине в рэлеевской волне. На рис. 33 приведены зависимости амплитуд нормального и касательного смещений в волнах  $s_0$  и  $a_0$  от относительной глубины  $(d-z)/\lambda_R$  для половины пластинки, рассчитанные нами для случая  $\nu=0,34, d/\lambda_R=1$  ( $k_t d \approx 6$ ). Построение кривых выполнено по образцу рис. 2: амплитуды смещений отнесены к амплитудам нор-

мальных смещений в соответствующих волнах на поверхности ( $z=d$ ). На этом же графике нанесена зависимость амплитуд смещений от глубины в рэлеевской волне (кривые с индексом  $R$ ) для среды с  $\nu=0,34$ . Как видно из графика, наибольшие отличия в распределениях смещений с глубиной в симметричной, антисимметричной и рэлеевской волнах наблюдаются в середине пластинки ( $z \simeq 0$ ). Вблизи каждой из свободных поверхностей пластинки все распределения очень близки между собой. При  $k_l d \rightarrow \infty$  каждая из волн  $s_0$  и  $a_0$  переходит в две рэлеевские волны, распространяющиеся синфазно по обеим свободным поверхностям пластинки. Этот вопрос будет еще рассматриваться в § 6 настоящей главы.

Перейдем к рассмотрению движения в волнах порядка выше нулевого, которые, как уже отмечалось, появляются только при некоторых критических значениях  $\bar{d}_{кр}$ . При докритических толщинах и частотах фазовые скорости и волновые числа этих волн чисто мнимые. Это означает, что волнового распространения нет, а есть только синфазное движение частиц всей пластинки, экспоненциально затухающее в направлении оси  $x$ . При критических значениях  $k_l d$ , когда по толщине пластинки укладывается четное или нечетное число продольных или поперечных полуволн [см. (II.10), (II.11)], рождающаяся волна Лэмба представляет собой чисто продольную или чисто поперечную стоячую волну, образованную двумя волнами соответствующих поляризации, распространяющимися с равными амплитудами в положительном и отрицательном направлениях оси  $z$ . Выражения для смещений в этих случаях, получаемые из формул (II.8), (II.9) при  $k_{a,s} \rightarrow 0$  и с учетом соотношений (II.10), (II.11), имеют вид:

симметричная и антисимметричная волны, рождающиеся как продольные волны:

$$\begin{aligned}
 U_s &= 0 \left( \sqrt{\bar{d} - \bar{d}_k} \right), \\
 W_s &= Ak_l \sin k_l z \sin (kx - \omega t); \quad (II.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_a &= 0 \left( \sqrt{\bar{d} - \bar{d}_k} \right), \\
 W_a &= Bk_l \cos k_l z \sin (kx - \omega t); \quad (II.24)
 \end{aligned}$$

симметричная и антисимметричная волны, рождающиеся как поперечные волны:

$$U_s = \frac{Ak_t}{\sqrt{\bar{d}_k/2 - 4\xi \operatorname{tg} \xi \bar{d}_k}} \cos k_t z \cos(kx - \omega t),$$

$$W_s = 0 \left( \sqrt{\bar{d} - \bar{d}_k} \right), \quad (\text{II.25})$$

$$U_a = \frac{Bk_b}{\sqrt{\bar{d}_k/2 + 4\xi \operatorname{ctg} \xi \bar{d}_k}} \sin k_t z \cos(kx - \omega t),$$

$$W_a = 0 \left( \sqrt{\bar{d} - \bar{d}_k} \right). \quad (\text{II.26})$$

При значениях  $k_t d$ , больших критических, волновые числа волн Лэмба становятся отличными от нуля. Это можно интерпретировать как поворот направлений распространения двух продольных или поперечных волн, образующих стоячую волну в критической области, от оси  $z$  в сторону положительной оси  $x$ . При этом из-за отражения от границ пластинки возникают волны другой поляризации, и волна Лэмба оказывается «составленной» из четырех компонент [рис. 34]: двух продольных волн (описываемых потенциалом  $\varphi$ ) и двух поперечных (описываемых потенциалом  $\psi$ ), «припасованных» одна к другой таким образом, что проекции всех волновых чисел на ось  $x$  одинаковы, а напряжения, создаваемые четырьмя волнами на граничных плоскостях  $z = \pm d$ , равны нулю. В этом случае распределение смещений по толщине пластинки становится сложным и его нужно рассчитывать по общим формулам (II.8), (II.9). Траекториями частиц становятся эллипсы, эксцентриситет которых зависит от типа и номера волны, глубины и коэффициента Пуассона материала пластинки.

При некоторых  $k_t d$  волновые векторы «продольных» компонент оказываются направленными точно по оси  $x$ . Волновые векторы «поперечных» компонент образуют при этом с осью  $x$  некоторый угол ( $k_l < k_t$  всегда). При дальнейшем увеличении  $k_t d$  продольные компоненты превращаются в неоднородные волны, экспоненциально затухающие при удалении от границ  $z = \pm d$  (благодаря этому проекции их волновых чисел на ось  $x$  «получают возможность» дальше возрастать), а у поперечных компонент волновые векторы все больше приближаются к

оси  $x$ . Смещения, создаваемые продольными компонентами, становятся локализованными в поверхностных слоях толщины  $\lambda_t - 2\lambda_t$ . В остальной толще пластинки смещения создаются только поперечными компонентами. При

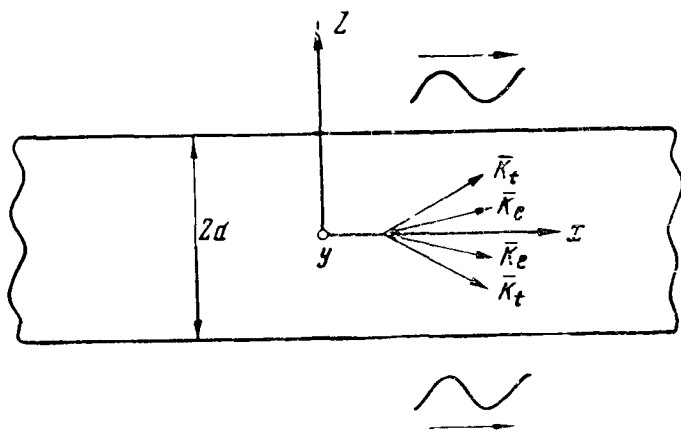


Рис. 34

$k_t d \rightarrow \infty$  для составляющих этих смещений (в толще пластинки) по оси  $z$  можно получить из (II.8), (II.9) следующие простые выражения:

$$W_s = A' k_t \sin\left(n\pi \frac{z}{d}\right) \cos(k_s x - \omega t),$$

$$W_a = B' k_t \cos\left(\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\pi z}{d}\right) \cos(k_a x - \omega t); \quad (\text{II.27})$$

здесь  $A', B'$  — произвольные постоянные;  $n$  — номер волны. Составляющие по оси  $x$  смещений  $U_s$  и  $U_a$  при  $k_t d \rightarrow \infty$  в  $k_t d$  раз меньше составляющих по оси  $z$  и, следовательно, ими можно пренебречь. Таким образом, при  $k_t d \rightarrow \infty$  в пластинке (за исключением поверхностных слоев) смещения во всех волнах Лэмба направлены по оси  $z$  и распределены синусоидально с пространственным периодом  $2d/n$  (для симметричных волн) и  $2d/(n - 1/2)$  (для антисимметричных волн).

На рис. 35—38 изображены рассчитанные нами распределения амплитуд касательного  $U$  (пунктирные кривые) и нормального  $\hat{W}$  (сплошные кривые) смещений с глубиной в четырех первых волнах  $s_1, s_2, a_1, a_3$  соответственно. Две из этих волн — симметричные, две — антисимметричные, причем  $s_1, a_1$  рождаются как поперечные

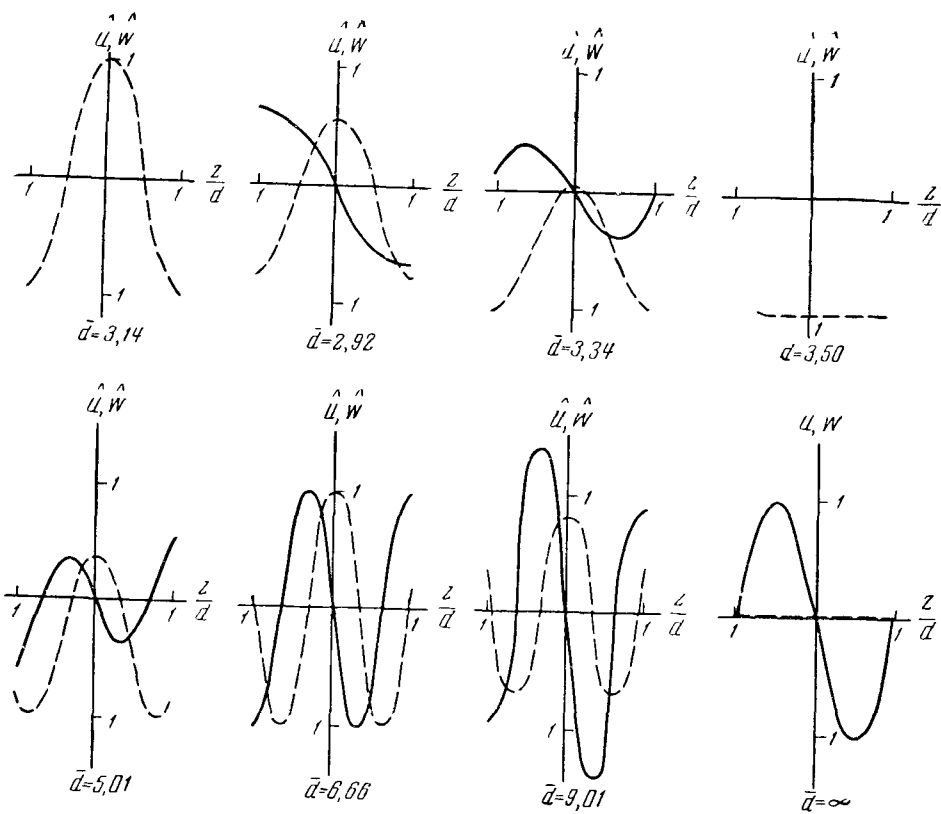


Рис. 35

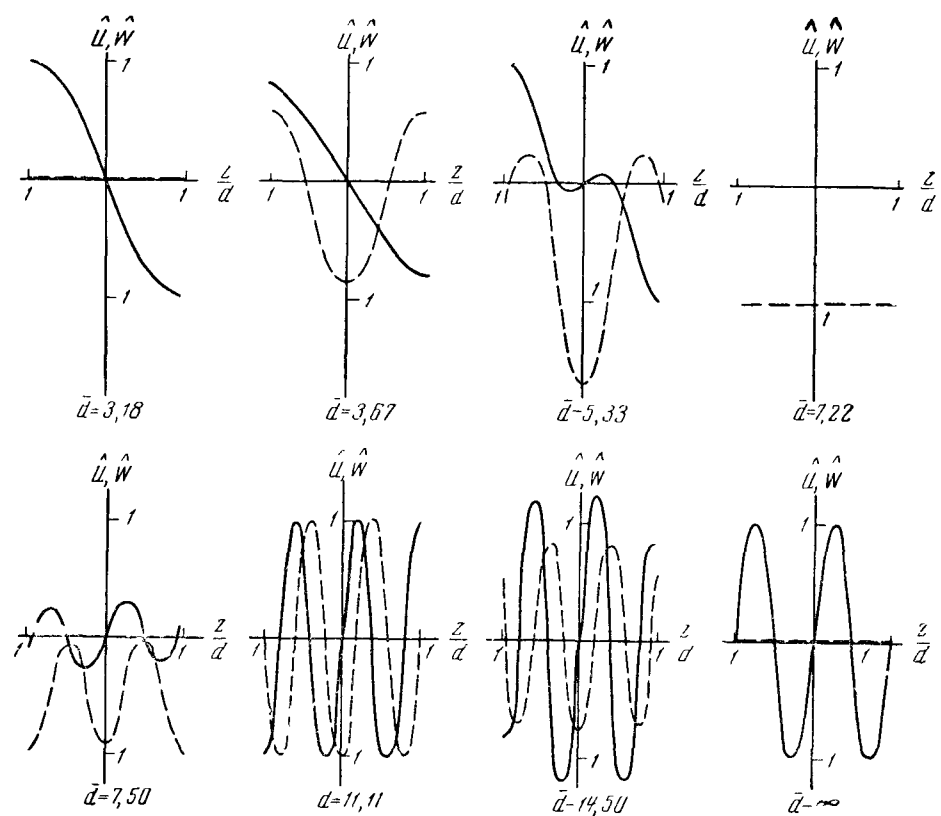


Рис. 36

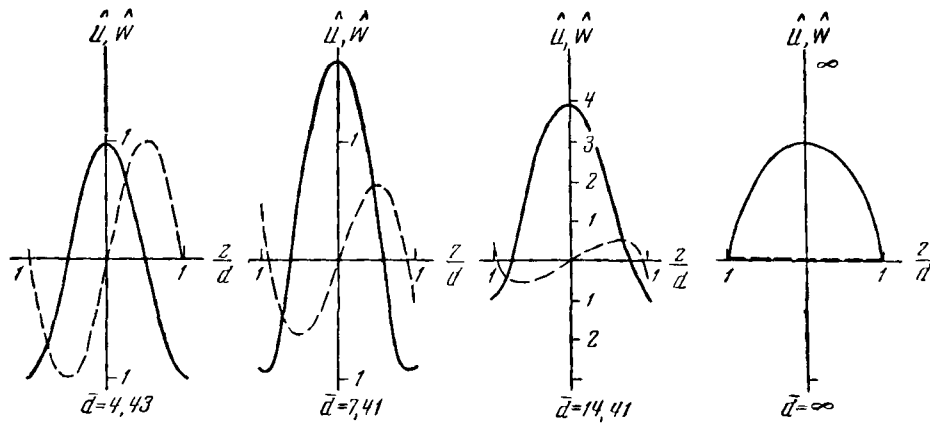
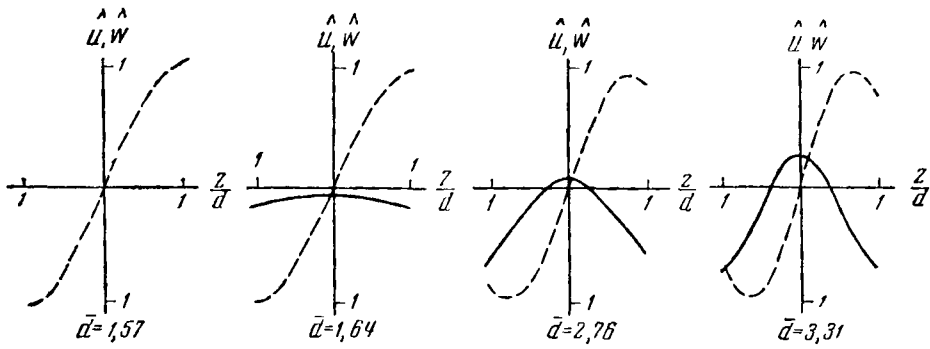


Рис. 37

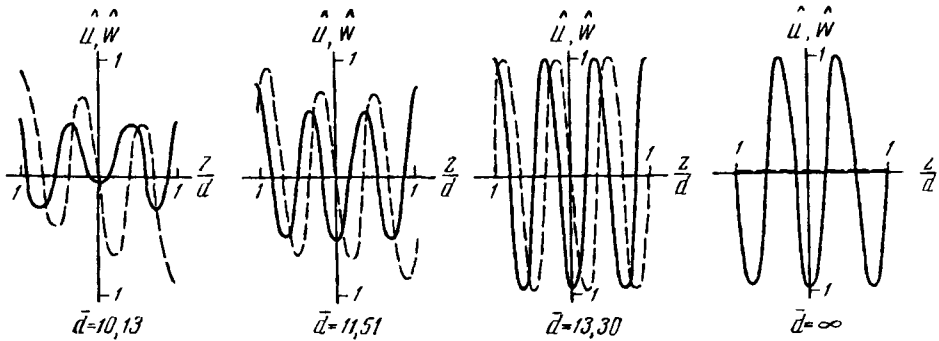
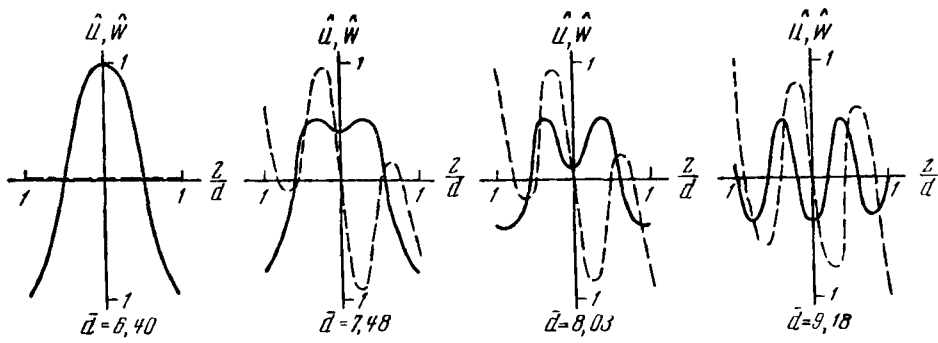


Рис. 38

волны, а  $s_2$ ,  $a_3$  — как продольные. Волна  $a_2$ , рождающаяся, как и  $a_1$ , в виде поперечной волны, нами пропущена. Для каждой из волн распределения построены при восьми значениях относительной толщины пластинки  $\bar{d}$ , начиная от критических значений, соответствующих моменту появления волны, до  $\bar{d} \rightarrow \infty$ . Значения  $\bar{d}$  указаны на каждом графике. Кривые распределений построены в безразмерной форме: глубина  $z$ , отсчитываемая от средней плоскости пластинки и отложенная на всех графиках по осям абсцисс, отнесена к половине толщины пластинки  $d$ , а амплитуды  $\hat{U}$  и  $\hat{W}$  смещений по осям  $x$  и  $z$ , отложенные по осям ординат, отнесены к некоторой средней амплитуде поверхностного смещения, равной квадратному корню из суммы квадратов амплитуд поверхностных смещений по осям  $x$  и  $z$ . Расчет кривых производился по формулам (II.8), (II.9), для значения коэффициента Пуассона  $\nu = 0,34$ .

Из рис. 33—38 видно, что для каждой из волн распределения смещений по сечению пластинки представляют довольно сложные осциллирующие функции. В соответствии со сказанным выше, простой вид распределения имеют только в момент появления волны и при  $\bar{d} \rightarrow \infty$ . В этих случаях амплитуды смещений распределены по синусу или косинусу, причем имеется только одна компонента смещения. В момент появления волны это будет компонента по  $z$ , если волна появляется как продольная, и по  $x$ , если волна появляется как поперечная. При  $\bar{d} \rightarrow \infty$  у всех волн имеется только смещение по оси  $z$ , причем амплитуда этого смещения на поверхности стремится к нулю по сравнению с амплитудой в толще пластинки. Это означает, что при достаточно больших толщинах пластинки движение в каждой волне Лэмба, кроме  $s_0$  и  $a_0$ , становится локализованным в толще и не «выходит» на поверхность. Для волн  $s_0$  и  $a_0$ , как уже отмечалось, напротив, имеет место своеобразный скин-эффект.

При увеличении толщины пластинки от критических значений число осцилляций у функций распределения смещений по сечению увеличивается, достигая максимума при толщинах, определяемых из условия  $k^2_{s_2a} + s^2_{s_2a} = 0$ , после чего число осцилляций уменьшается и функции распределения упрощаются, приближаясь к своему пре-

делу при  $\bar{d} \rightarrow \infty$ . С ростом номера волны число осцилляций у функций распределения увеличивается, а сами распределения усложняются.

## § 5. Методы возбуждения и приема волн Лэмба

Для возбуждения волн Лэмба существуют две принципиально различные возможности: создание возмущений на поверхности пластинки и создание возмущений внутри пластинки или на торцовой поверхности. На практике, как правило, используется первая возможность, поскольку ее удобнее и проще реализовать. Соответственно мы будем рассматривать только первую группу методов возбуждения. В этой группе известны четыре основных метода возбуждения, полностью аналогичных соответствующим методам возбуждения рэлеевских волн (см. § 2 главы I и рис. 5):

1) возбуждение сдвиговыми возмущениями, распределенными равномерно на поверхности пластинки в полосе ширины  $2a$  [37]. Возмущения создаются кварцевой пластинкой  $Y$ -среза или титанатовой пластинкой соответствующей поляризации;

2) возбуждение аналогичными нормальными возмущениями, созданными кварцевой или титанатовой пластинками, имеющими акустический контакт с поверхностью исследуемой пластинки (так называемый контактный вариант данного метода возбуждения), или ультразвуковым пучком, нормально падающим на пластинку, помещенную в жидкость (иммерсионный вариант, см. [38]);

3) возбуждение совокупностью нормальных возмущений, распределенных периодически по поверхности пластинки с пространственным периодом, равным длине возбуждаемой волны Лэмба. Этот метод, названный методом гребенчатой структуры, был предложен для возбуждения ультразвуковых рэлеевских волн, но он успешно может быть использован и для волн Лэмба.

4) возбуждение нормальными возмущениями, распределенными по закону синусоидальной бегущей волны на поверхности пластинки в некоторой области ширины  $2b$ . В контактном варианте этот метод широко известен как «метод клина» (см. [39], [40]). В иммерсионном варианте



[41] этот метод осуществляется заданием ультразвукового пучка, наклонно падающего из жидкости, окружающей пластинку, на пластинку.

Первый и второй из указанных методов возбуждения — нерезонансные: при их применении в пластинке примерно в равной степени возбуждаются все возможные при данной частоте нормальные волны. При практических применениях это обычно неудобно (так, в дефектоскопии при этом получается целая серия отраженных от дефекта сигналов, благодаря чему трудно определить локализацию дефекта). Методы гребенчатой структуры и клина — резонансные: изменяя расстояние между выступами пластинки гребенчатого профиля или угол клина, мы можем возбудить селективно какую-либо одну из возможных волн. В методе клина «перестройка» с волны на волну осуществляется крайне просто: достаточно только предусмотреть в конструкции излучателя возможность изменения угла  $\theta$ . Благодаря этому метод клина чрезвычайно широко применяется в ультразвуковой дефектоскопии и других практических приложениях волн Лэмба. Метод гребенчатой структуры удобен для возбуждения волн Лэмба в пластинках из материала с малой скоростью звука (например, из пластмассы), поскольку использование метода клина здесь крайне затруднено выбором подходящего материала клина, который, как известно, должен быть таким, что скорость продольных волн в нем меньше скорости волны Лэмба в пластинке. Отметим, что все указанные методы (вместе с их особенностями) обратимы и на случай приема волн Лэмба.

Первый метод возбуждения подробно рассматривался в работе [37], второй и третий методы исследовались теоретически в работе [36]. Как уже отмечалось, все перечисленные методы возбуждения аналогичны соответствующим методам возбуждения рэлеевских волн (в частности, зависимость амплитуд возбужденных волн Лэмба от ширины области возбуждения такая же, как для рэлеевских волн, только вместо  $k_R$  нужно подставить в соответствующих формулах волновые числа  $k_{s_n}$  или  $k_{an}$ , такие же, как для рэлеевских волн, и искажение формы импульса в разных методах и т. д.). Поэтому мы не будем здесь рассматривать подробно все эти методы возбуждения волн Лэмба, а ограничимся лишь наиболее

употребительным — методом клина. Этот метод теоретически и экспериментально исследовался в работе [42], основное содержание которой изложим ниже.

При теоретическом рассмотрении мы будем считать материал пластинки однородным и идеально упругим,

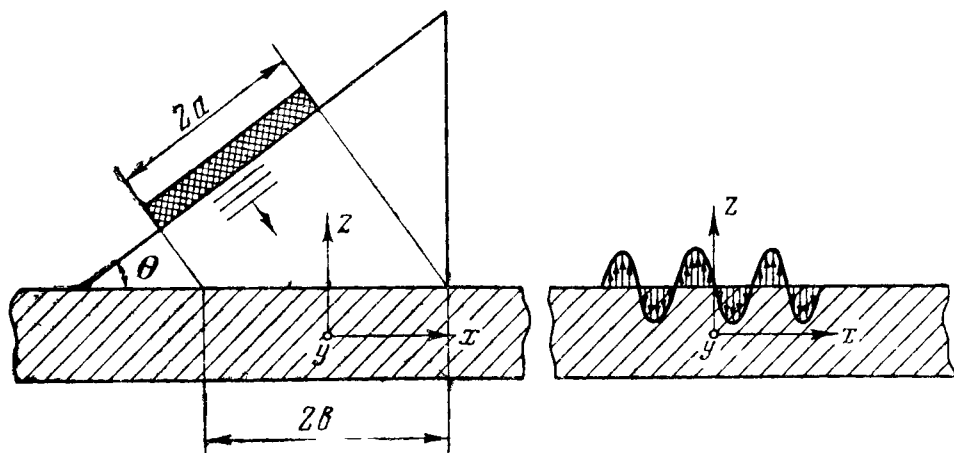


Рис. 39

размер излучателя по оси  $y$  предполагать бесконечным и считать его действие на пластинку эквивалентным действию системы нормальных напряжений, приложенных к верхней свободной поверхности пластинки в области  $|x| \leq a/\cos \theta = b$ , определяемой геометрическими границами пучка гармонических продольных волн частоты  $\omega$ , распространяющихся в клине (рис. 39). Нормальные напряжения будем считать равными напряжениям, возникающим при падении плоской волны под углом  $\theta$  на границу твердого полупространства, состоящего из материала клина, с твердым слоем (пластинкой), за которым находится вакуум. На границе осуществляется скользящий акустический контакт, т. е. граничные нормальные напряжения и смещения в слое и полупространстве одинаковы, а касательные напряжения равны нулю. Скользящий контакт реализуется в большинстве практических случаев, поскольку обычно акустический контакт излучающего клина и пластинки осуществляется при помощи тонкого слоя жидкости. Иммерсионный вариант метода клина также удовлетворяет этим условиям, так как в нем касательные напряжения на границе отсутствуют. Замена клинового излучателя совокупностью нормальных на-

пряжений, строго говоря, допустима при условии малости удельного волнового сопротивления материала излучателя по сравнению с удельным волновым сопротивлением материала пластинки. В большинстве практических случаев (пластмассовый клин на металлической пластинке) это приближенно выполняется. Заметим также, что при сделанных идеализациях мы пренебрегаем расхождением пучка продольных волн в клине и смещением отраженного пучка на границе клин — пластинка.

При сделанных предположениях задача сводится к исследованию колебаний бесконечного плоского твердого слоя, нижняя поверхность ( $z = -d$ ) которого свободна, а на верхней ( $z = d$ ) следующим образом заданы напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \begin{cases} \sigma_0 |\Phi| e^{i(k_0 x - \omega t)} & \text{при } |x| \leq b, \\ 0 & \text{при } |x| > b, \end{cases} \\ \sigma_{xz} &= 0 \quad \text{при } |x| < \infty; \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

здесь  $k_0 = k_{\text{кл}} \sin \theta$ ;  $k_{\text{кл}}$  — волновое число продольных волн в клине;  $\sigma_0$  — амплитуда нормального напряжения в продольной волне в клине на площадке, перпендикулярной направлению ее распространения (численно эта амплитуда равна амплитуде напряжения, создаваемого пьезопластинкой, находящейся на наклонной грани клина);  $|\Phi|$  — модуль отношения амплитуды напряжения  $\sigma_{zz}$  при  $z = d$  к  $\sigma_0$ .

Используемая здесь методика расчета аналогична примененной при исследовании возбуждения рэлеевских волн. Поэтому мы остановимся на ней очень кратко. Введем для слоя потенциалы  $\phi$  и  $\Psi$  продольных и поперечных волн, удовлетворяющие волновым уравнениям (I.2). Компоненты смещения  $U$  и  $W$  по осям  $x$  и  $z$  выразятся через  $\phi$  и  $\psi$  по формулам (I.3).

Представим  $\phi$  и  $\psi$  интегралами Фурье, причем каждый из потенциалов разобьем на симметричную и антисимметричную части, такие, что симметричные части потенциалов дадут в слое движение, симметричное относительно плоскости  $z = 0$ , а антисимметричные — антисимметричное движение:

$$\varphi = \varphi_s + \varphi_a = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \operatorname{ch} qze^{ikx} dk + \int_{-\infty}^{\infty} B(k) \operatorname{sh} qze^{ikx} dk; \quad (\text{II.29})$$

$$\psi = \psi_s + \psi_a = \int_{-\infty}^{\infty} D(k) \operatorname{sh} sze^{ikx} dk + \int_{-\infty}^{\infty} C(k) \operatorname{ch} sze^{ikx} dk.$$

Здесь  $A(k)$ ,  $B(k)$ ,  $C(k)$ ,  $D(k)$  — некоторые неизвестные функции;  $q = \sqrt{k^2 - k_t^2}$ ;  $s = \sqrt{k^2 - k_s^2}$ ; множитель  $e^{-i\omega t}$  здесь и в дальнейшем для краткости опущен. Функции  $A(k)$ ,  $B(k)$ ,  $C(k)$ ,  $D(k)$  определим из граничных условий (II.28), записывая выражения для напряжений тоже в форме интегралов Фурье и выражая напряжения  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{xz}$  через  $\varphi$  и  $\psi$ . После этого по формулам (I.3) можно вычислить смещения в любой точке слоя:

$$U = \frac{\varepsilon_0 |\Phi|}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} k \left\{ \frac{(k^2 + s^2) \operatorname{sh} sd \operatorname{ch} qz - 2qs \operatorname{sh} qd \operatorname{ch} sz}{\Delta_s} + \right. \\ \left. + \frac{(k^2 + s^2) \operatorname{ch} sd \operatorname{sh} qz - 2qs \operatorname{ch} qd \operatorname{sh} sz}{\Delta_a} \right\} \frac{\sin(k_0 - k) b}{k_0 - k} e^{ikx} dk, \quad (\text{II.30})$$

$$W = \frac{\sigma_0 |\Phi|}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} q \left\{ \frac{(k^2 + s^2) \operatorname{sh} sd \operatorname{sh} qz - 2k^2 \operatorname{sh} qd \operatorname{sh} sz}{\Delta_s} + \right. \\ \left. + \frac{(k^2 + s^2) \operatorname{ch} sd \operatorname{ch} qz - 2k^2 \operatorname{ch} qd \operatorname{ch} sz}{\Delta_a} \right\} \frac{\sin(k_0 - k) b}{k_0 - k} e^{ikx} dk;$$

здесь

$$\Delta_s = (k^2 + s^2)^2 \operatorname{ch} qd \operatorname{sh} sd - 4k^2 qs \operatorname{ch} sd \operatorname{sh} qd;$$

$$\Delta_a = (k^2 + s^2)^2 \operatorname{ch} sd \operatorname{sh} qd - 4k^2 qs \operatorname{ch} qd \operatorname{sh} sd.$$

Для вычисления написанных интегралов рассмотрим их в комплексной плоскости  $k$ . Особенности подынтегральных функций в плоскости  $k$  являются простые полюса, определяемые условиями равенства нулю определителей  $\Delta_s$  и  $\Delta_a$ . Каждый из вещественных корней уравнений  $\Delta_s = 0$ ,  $\Delta_a = 0$  определяет волновое число возбуждаемой симметричной или антисимметричной волны Лэмба. Поскольку приемники ультразвуковых волн Лэмба реагируют обычно на поверхностные смещения слоя (пластинки), ограничимся нахождением выражений только для поверхностных ( $z = d$ ) смещений  $U_0$ ,  $W_0$ .

при  $x > b$ , т. е. справа от области возбуждения. Добавляя к пути интегрирования по вещественной оси полуокружность бесконечно большого радиуса, расположенную в верхней полуплоскости  $k$ , сведем интегралы к сумме вычетов относительно полюсов. После этого получим

$$U_0 = \frac{\sigma_0}{\mu k_t} |\Phi| \left\{ \sum_{k_s} \frac{k_t \sin(k_0 - k) b}{k_0 - k} \cdot \frac{(s^4 - k^4) \operatorname{sh} sd \operatorname{ch} qd e^{tkx}}{2k\Delta'_s} + \right. \\ \left. + \sum_{k_a} \frac{k_t \sin(k_0 - k) b}{k_0 - k} \cdot \frac{(s^4 - k^4) \operatorname{sh} qd \operatorname{ch} sde^{tkx}}{2k\Delta'_a} \right\}, \quad (\text{II.31})$$

$$W_0 = \frac{i\sigma_0}{\mu k_t} |\Phi| \left\{ \sum_{k_s} \frac{k_t \sin(k_0 - k) b}{k_0 - k} \cdot \frac{q(s^2 - k^2) \operatorname{sh} sd \operatorname{sh} qde^{tkx}}{\Delta'_s} + \right. \\ \left. + \sum_{k_a} \frac{k_t \sin(k_0 - k) b}{k_0 - k} \cdot \frac{q(s^2 - k^2) \operatorname{ch} sd \operatorname{ch} qde^{tkx}}{\Delta'_a} \right\};$$

здесь  $\Delta'_s$  и  $\Delta'_a$  — производные от  $\Delta_s$ ,  $\Delta_a$  по  $k$ ;  $\sum_{k_s}$ ,  $\sum_{k_a}$  обозначают суммирование по всем волновым числам симметричных и антисимметричных нормальных волн, возможных в слое данной толщины.

Анализируя полученные выражения, нетрудно видеть, что они состоят из трех безразмерных множителей (не считая  $\sigma_0/\mu k_t$  и  $e^{tkx}$ ). Первый множитель ( $|\Phi|$ ) представляет зависимость амплитуд нормальных напряжений в области возбуждения от угла  $\theta$ . Расчет показывает, что при изменении  $\theta$  от  $0$  до  $90^\circ$  амплитуда нормальных напряжений, созданных продольной волной в клине на его границе со слоем, в среднем уменьшается, обращаясь при  $\theta = 90^\circ$  в нуль. Однако это уменьшение происходит не монотонно, а с резкими осцилляциями, число которых тем больше, чем толще слой. Второй множитель связан с периодическим синусоидальным распределением возбуждающих напряжений на поверхности слоя. Он представляет собой быстро осциллирующую с изменениями  $\theta$  функцию с чередованием максимумов и минимумов. Главный максимум определяется из условия  $\theta_{s,a} = \arcsin k_{s,a}/k_{\text{кл}}$ . Его острота, как и соседних макси-

мумов, тем больше, чем больше размер области возбуждения  $\bar{b} = k_t b$ . Высота главного максимума прямо пропорциональна  $\bar{b}$ . Третьи сомножители, которые мы обозначим,  $f_{U_0}$ ,  $f_{W_0}$ , определяются относительной толщиной слоя  $\bar{d} = k_t d$ , коэффициентом  $\nu$  Пуассона, типом и номером  $n$  волны, которая возбуждается. Зависимости амплитуд возбуждаемых волн от  $\bar{d}$ ,  $\nu$ ,  $n$  очень сложные. Мы проанализируем их только для предельных случаев. При тонком слое ( $\bar{d} \rightarrow 0$ ) для нулевой симметричной волны  $s_0$  функция  $f_{U_0}$  стремится к константе, а функция  $f_{W_0} \rightarrow 0$  ( $\bar{d}$ ). Это означает, что при малых толщинах слоя нулевая симметричная волна возбуждается с амплитудой, не зависящей от толщины слоя. Для антисимметричной нулевой волны  $a_0$  при этом  $f_{U_0} \rightarrow (\bar{d})^{-1/2}$ ,  $f_{W_0} \rightarrow (\bar{d})^{-3/2}$ , т. е. амплитуда стремится к бесконечности. При толстом слое, когда  $\bar{d} \rightarrow \infty$ , функции  $f_{U_0}$ ,  $f_{W_0}$  для  $s_0$  и  $a_0$  стремятся к константам. Это означает, что при толстом слое, когда волны  $s_0$  и  $a_0$  переходят в поверхностные рэлеевские, их амплитуды перестают зависеть от толщины  $\bar{d}$ . При критических толщинах слоя в момент появления симметричной или антисимметричной волн, когда  $k_{\alpha} \rightarrow 0$ , имеем следующее: если волна появляется как продольная  $f_{W_0} \rightarrow k_t/k$ ,  $f_{U_0} \rightarrow \text{const}$ , если волна появляется как поперечная  $f_{U_0} \rightarrow \text{const}$ ,  $f_{W_0} \rightarrow 0$ . Таким образом, при критических толщинах слоя амплитуды возбуждаемых продольных волн стремятся к бесконечности, а поперечных — к постоянной величине. При больших толщинах слоя, когда  $\bar{d} \rightarrow \infty$ , для всех волн, кроме  $s_0$  и  $a_0$ ,  $f_{W_0} \rightarrow 1/\bar{d}^3$ ,  $f_{U_0} \rightarrow 1/\bar{d}^4$ , что означает, что амплитуды возбуждаемых волн быстро убывают с увеличением толщины слоя.

При  $x < -b$  (влево от области возбуждения) выражения для поверхностных смещений будут отличаться от формул (II.31) знаками перед  $U_0$ , перед  $ikx$  в экспонентах и во втором сомножителе  $k_0 - k$  заменится на  $k_0 + k$ . Из-за такого изменения знаков амплитуда волны, излучаемой в  $-x$ -направлении, будет существенно меньше амплитуды волны в  $+x$ -направлении. При  $k_0 = k$  (в главном максимуме) их отношение является величиной порядка  $1/k_{\alpha} ab$ , так что при этом можно считать излучение практически односторонним.

На рис. 40 в качестве примера приведены теоретические (1) и экспериментальные (2) зависимости амплитуд

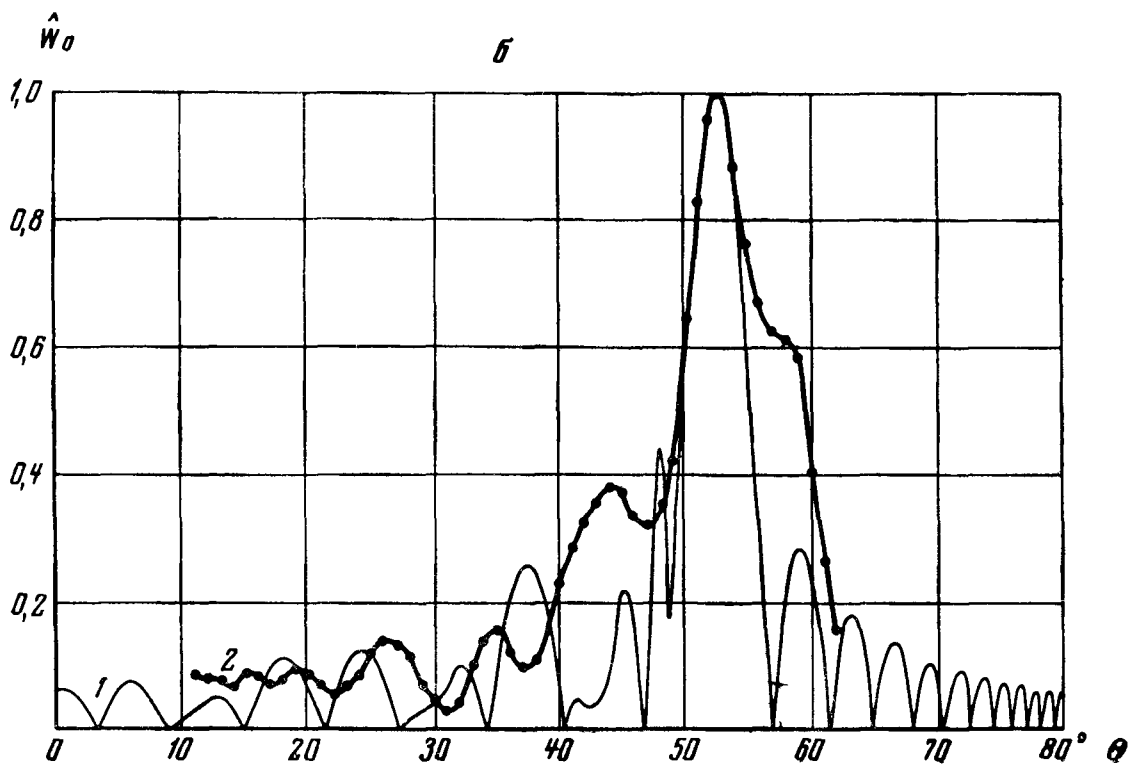
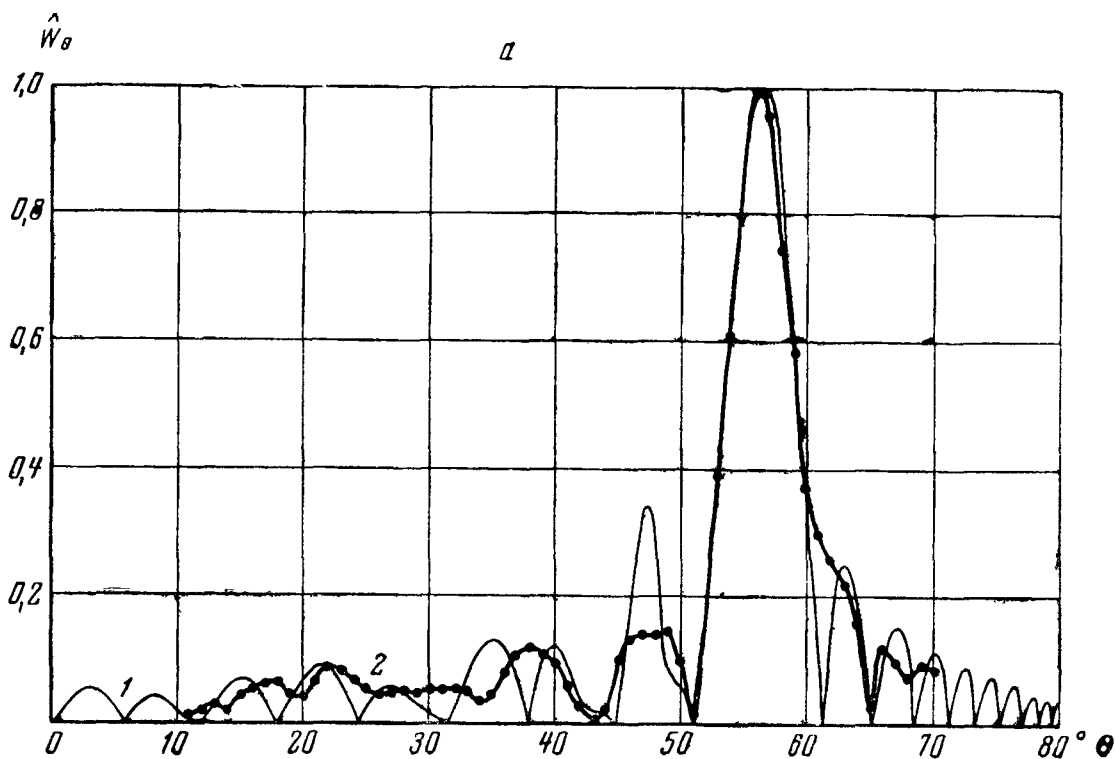


Рис 40 а, б

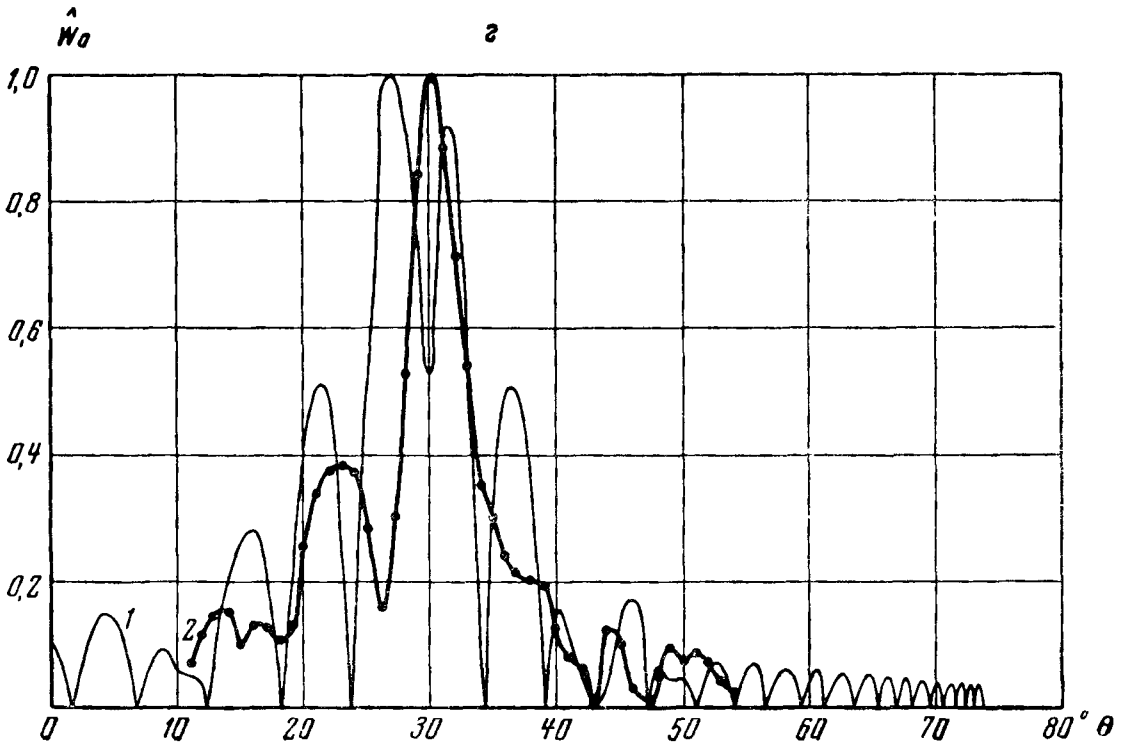
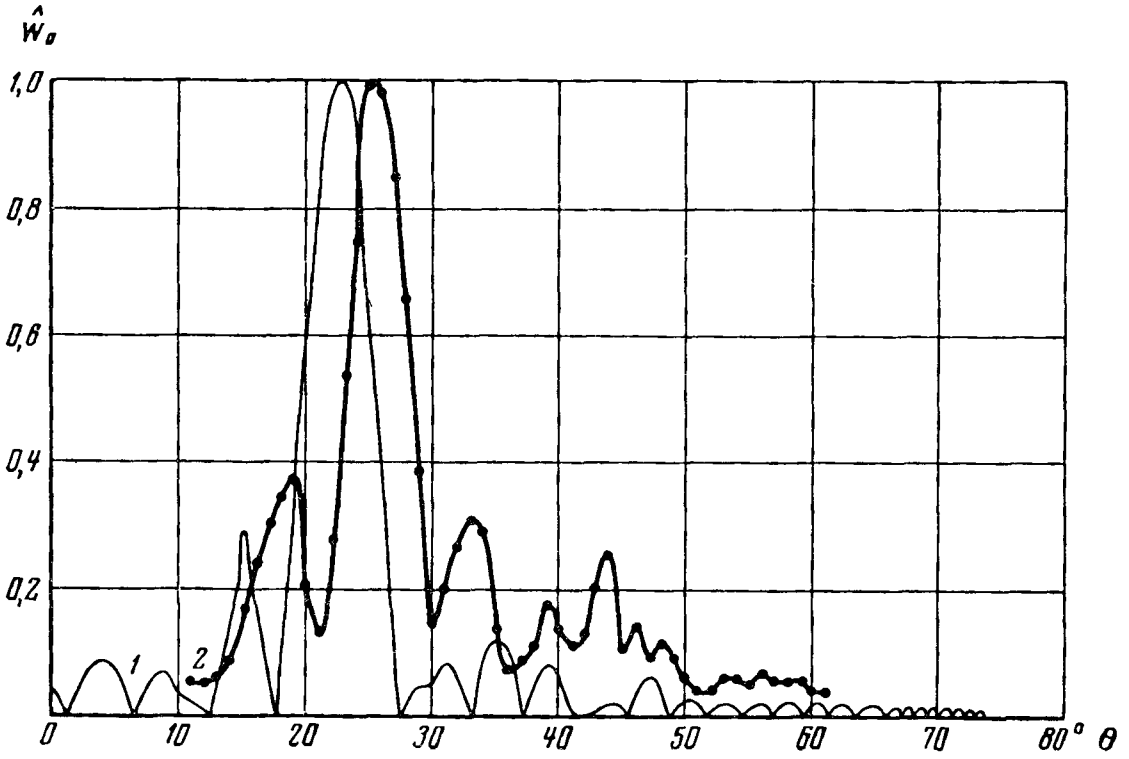


Рис. 40 в, г



$W_0$  в волнах  $s_0, a_0, s_1, a_1$  соответственно от угла  $\theta$  для полистиролового клина на дюралевом слое. Теоретические кривые рассчитаны по формулам (II.31). Все амплитуды отнесены к амплитудам главных максимумов. Ниже приведены соотношения между амплитудами главных максимумов и аналогичное соотношение для экспериментальных кривых:

Тип волны . . . . .	$s_0$	$a_0$	$s_1$	$a_1$
Высота главного максимума				
теоретической кривой . . . . .	1,00	0,87	0,044	0,60
экспериментальной кривой . . . . .	1,0	1,5	0,34	0,58

Относительная толщина слоя  $\bar{d}$  предполагалась равной 4,00, размер  $b$  области возбуждения при  $\theta=0$  составлял 26,1. Для других толщин слоя характер приведенных зависимостей такой же, т. е. кривые для каждой волны состоят из ряда максимумов различной высоты, между которыми расположены нули, ширина максимумов уменьшается с увеличением  $\theta$ , главные максимумы кривых находятся поблизости от углов  $\theta = \arcsin k_{s,a}/k_{кл}$ .

Эксперименты по снятию угловой зависимости амплитуд волн Лэмба и зависимости от размера  $2\bar{b}$  области возбуждения, а также по оценке эффективности преобразования при излучении и приеме волн Лэмба методом клина проводились в импульсном режиме на частоте  $\approx 3$  Мгц. Средой для распространения волн Лэмба служили полоски из дюрала толщиной 0,9—3,0 мм. Возбуждение и прием волн осуществлялись клиновыми преобразователями с переменным углом. Конструкция этих преобразователей такая же, как для рэлеевских волн (см. § 2 гл. I).

Пьезоэлементами служили пластинки титаната бария размером  $9 \times 9$  мм. Все акустические контакты осуществлялись пленками касторового масла. При работе с какой-либо волной Лэмба приемник настраивался на соответствующий угол и закреплялся неподвижно. В остальном методика эксперимента и оборудование были такими же, как при работе с рэлеевскими волнами (см. § 2 гл. I).

На рис. 40, а, б, в, г точками изображены экспериментальные зависимости  $\hat{W}_0(\theta)$ , соответствующие аналогичным теоретическим. Нетрудно видеть, что качественный характер экспериментальных и теоретических зависимостей одинаков. На рис. 41 приведены эксперимен-

тальные кривые зависимостей амплитуд волн  $s_0$ ,  $a_0$ ,  $s_1$ ,  $a_1$  от размера областей возбуждения  $\bar{b}$  при оптимальном возбуждении (в главных максимумах). Теоретически эти зависимости, как следует из формул (II.31), описываются прямыми. У экспериментальных кривых явно заметны

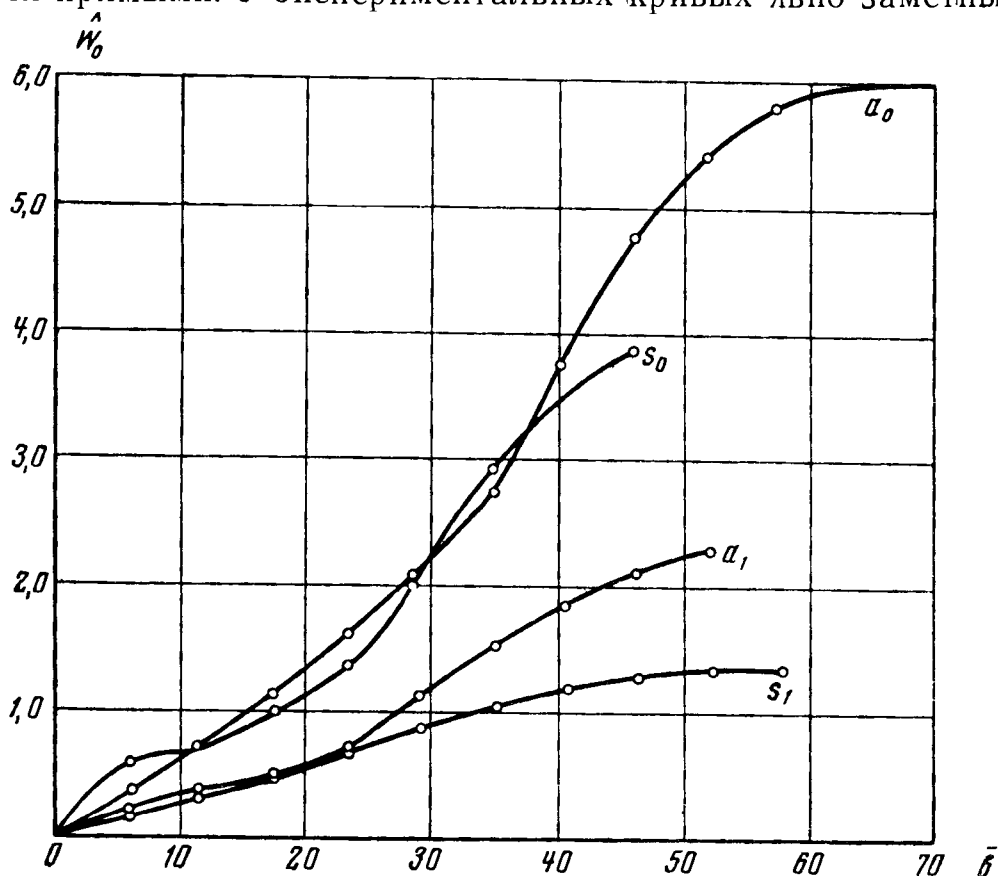


Рис. 41

области «насыщения», в которых увеличение размера  $\bar{b}$  перестает изменять амплитуду волны. Количественные отличия экспериментальных зависимостей рис. 40—41 от теоретических объясняются, по-видимому, неполным соответствием теоретических идеализаций, сделанных при постановке задачи, реальному положению вещей. Аналогичное положение имело место при рассмотрении возбуждения рэлеевских волн методом клина, поэтому здесь мы не будем на этом подробно останавливаться. В заключение приведем табл. 5 коэффициентов  $K$  двойного преобразования электрического сигнала в ультразвуковой и обратно для волн  $s_0$ ,  $a_0$ ,  $s_1$ ,  $a_1$  при различных

Таблица 5

Тип волны	$\bar{d}$	$\bar{b}$	К, дб
$s_0$	0,92	19,7	60,2
$a_0$		38,6	78,1
$s_0$		39,8	64,7
$a_0$		42,4	60,3
$s_1$	4,00	28,0	78,3
$a_1$		29,0	61,5
$s_0$		40,6	67,9
$a_0$		42,4	67,9
$s_1$	5,43	28,2	61,2
$a_1$		31,1	60,4
$s_0$		38,3	74,9
$a_0$		38,3	74,9
$s_1$	8,70	32,3	64,4
$a_1$		35,1	66,9

толщинах  $\bar{d}$  пластинки. Укажем, что потери на затухание и расхождение ультразвуковых пучков в излучающем и приемном клиновых преобразователях, составляющие часть общих потерь на преобразование, «заключенных» в К, равняются 15 дб.

## § 6. Связь между волнами Лэмба и Рэлея

Волны Лэмба распространяются в пластинках. Волны Рэлея, строго говоря, могут распространяться только по поверхности полупространства. Между тем, на практике твердое полупространство создать, конечно, нельзя. Поэтому возникает вопрос о возможности существования рэлеевских волн на поверхности твердых тел конечных размеров. Этот вопрос рассматривался в работе [43], где исследовалась структура волн, которые возбуждаются излучателем синусоидальных рэлеевских волн, расположенным на одной из свободных поверхностей плоской бесконечной пластинки (твердого слоя). Поскольку исследовалась только качественная картина явления, тип излучателя не конкретизировался, считалось только, что

излучатель приспособлен для возбуждения рэлеевских волн, т. е. представляет, например, гребенчатую пластинку с периодом чередования пазов и выступов, равным  $\lambda_R$ .

Показано, что при достаточной толщине слоя  $2d$  ( $d \sim \lambda_R$  и больше) излучатель рэлеевских волн возбуждает в нем главным образом две нормальные волны — нулевую симметричную и нулевую антисимметричную, что обусловлено сходством этих волн с рэлеевской волной при  $d > \lambda_R$ : их фазовые и групповые скорости при этом близки к фазовой скорости рэлеевской волны, а распределение смещений с глубиной в каждой из волн для верхней и нижней половин слоя подобно распределению смещений в рэлеевской волне (см. § 4 данной главы). Остальные нормальные волны возбуждаются в незначительной степени вследствие их несходства с рэлеевской волной. Волны  $s_0$  и  $a_0$  возбуждаются излучателем приблизительно с равными амплитудами и фазами, поскольку условия для их возбуждения одинаковы. При этом в той половине слоя, где расположен излучатель (верхней), смещения в волнах  $s_0$  и  $a_0$  направлены одинаково, а в другой половине слоя (нижней) — противоположно, так как движение в волне  $s_0$  симметрично относительно средней плоскости, а в волне  $a_0$  — антисимметрично.

Распространяясь, волны  $s_0$  и  $a_0$  интерферируют одна с другой. Вблизи от излучателя, где разность фаз между ними близка к нулю, их суммарное акустическое поле подобно акустическому полю рэлеевской волны, поэтому описанную совокупность волн  $s_0$  и  $a_0$  можно назвать квазирэлеевской волной. На рис. 42 приведено суммарное распределение смещений с глубиной  $\frac{(d-z)}{\lambda_R}$  (отсчитываемой от верхней границы слоя) в совокупности волн  $s_0$  и  $a_0$ , находящихся в фазе, и в рэлеевской волне.

Кривые построены в безразмерной форме по образцу кривых на рис. 2 и 33;  $\hat{W}_{s_0}$ ,  $\hat{W}_{a_0}$ ,  $\hat{W}_R$ ,  $\hat{U}_{s_0}$ ,  $\hat{U}_{a_0}$ ,  $\hat{U}_R$  — амплитуды смещений по осям  $z$  и  $x$  в волнах  $s_0$ ,  $a_0$  и рэлеевской;  $(\hat{W}_{s_0, a_0})_0$ ,  $(\hat{U}_R)_0$  — соответствующие амплитуды у верхней поверхности. Кривые рассчитаны для коэффициента Пуассона  $\nu = 0,34$ , толщины слоя  $2d = 2\lambda_R$  и в предположении, что  $(\hat{W}_{s_0})_0 = (\hat{W}_{a_0})_0$ .

По мере удаления от излучателя разность фаз между волнами  $s_0$  и  $a_0$  возрастает и достигает на некотором расстоянии

величины  $\pi$ . Обозначим это расстояние, отнесенное к  $\lambda_R$ , через  $L$ . Тогда область вблизи излучателя, где квазирэлеевская волна похожа на рэлеевскую, определится условием  $x \ll L\lambda_R$  ( $x$  — расстояние от излучателя). На расстоянии  $L\lambda_R$  квазирэлеевская волна, локализованная первоначально около той поверхности слоя, где расположен излучатель, «переходит» на

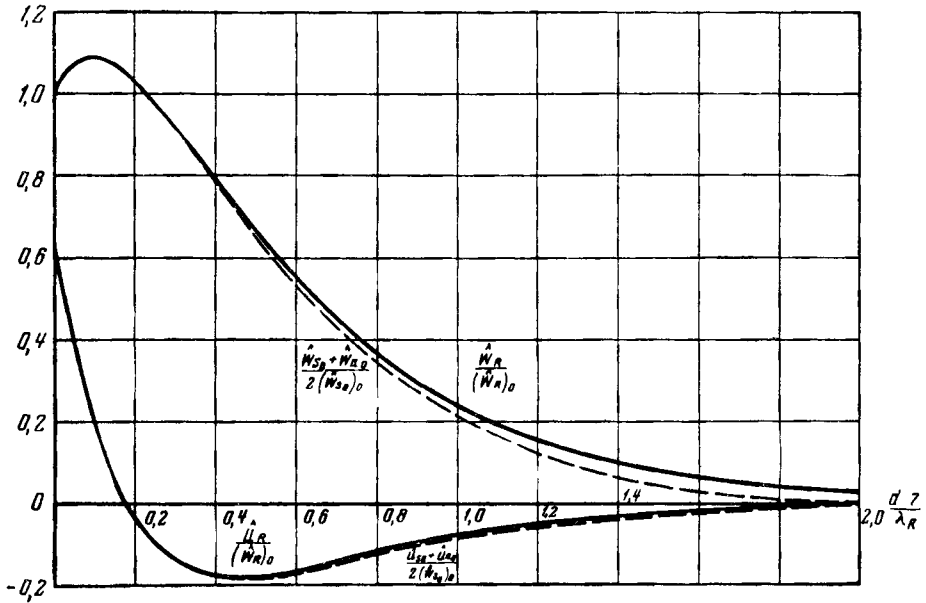


Рис. 42

противоположную поверхность. На расстоянии  $2L\lambda_R$  осуществляется обратный «переход» и т. д.

Величина  $L$  возрастает с увеличением толщины слоя, при  $d/\lambda_R \rightarrow \infty$   $L \rightarrow \infty$ , т. е. квазирэлеевская волна превращается в рэлеевскую. На рис. 43 приведена зависимость  $L$  от  $2d/\lambda_R$ . При  $2d/\lambda_R > 2,5$  величина  $L$  с точностью не менее 10% дается формулой

$$L = \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{8(1-\eta_R^2)} + \frac{1}{8(1-\eta_R^2\xi^2)} - \frac{1}{2-\eta_R^2} \right] e^{2k_R d} \sqrt{1-\eta_R^2}, \quad (\text{II.32})$$

из которой видно, что величина  $L$  экспоненциально возрастает с увеличением толщины слоя  $2d$ . При  $2d \simeq 2\lambda_R$   $L \simeq 40$ , а при  $2d \simeq 5\lambda_R$   $L \simeq 60\,000$ . Это означает, что в металле на частоте 3 Мгц квазирэлеевская волна «перей-

дет» с верхней поверхности слоя на нижнюю, пройдя расстояние  $\approx 60$  м. На расстояниях от излучателя, много меньших 60 м (т. е. по крайней мере на порядок меньше), квазирэлеевская волна будет практически неотличима от рэлеевской.

Образование и распространение квазирэлеевской волны в слое изучалось и экспериментально [43] на импульсной установке, состоящей из генератора прямоугольных

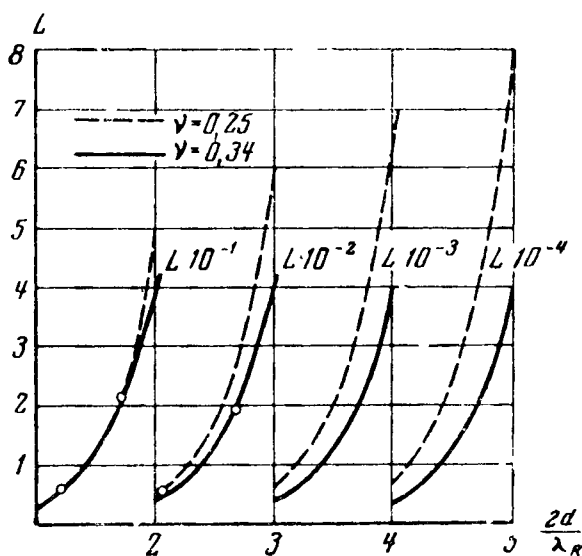


Рис. 43

импульсов длительности 2—10 мксек с частотой заполнения 2,7 Мгц, клиновых излучателя и приемника рэлеевских волн, усилителя и индикатора. Опыты проводились с дюралевыми полосками толщиной 0,9—5 мм и полностью подтвердили изложенное выше. Рэлеевская волна в таких полосках не наблюдалась, в полосках возбуждались две нулевые волны  $s_0$  и  $a_0$ . При больших расстояниях между приемником и излучателем импульсы, соответствующие этим волнам, разделялись, а их групповые скорости хорошо совпадали с расчетными значениями. При малых расстояниях импульсы перекрывались и интерферировали, образуя квазирэлеевскую волну, которая «переходила» с одной поверхности полоски на другую. Экспериментально измеренные периоды этих переходов отмечены точками на рис. 43. Точки хорошо ложатся на соответствующие ( $\nu = 0,34$ ) теоретические кривые зависимости  $L$  от  $2d/\lambda_R$ .

Отметим в заключение, что описанная квазирэлеевская волна, состоящая из двух равноамплитудных волн  $s_0$  и  $a_0$ , будет возбуждаться не только излучателем рэлеевских волн, помещенным на одну из поверхностей твердого слоя (пластинки) достаточно большой толщины, но вообще любым распределением напряжений или смещений, заданным на одной из поверхностей слоя. Только наряду с квазирэлеевской волной при этом будут возбуждаться и другие волны Лэмба.

## § 7. Диаграммы направленности излучателей волн Лэмба и Рэля

До сих пор при рассмотрении волн Лэмба и Рэля и, в частности, методов возбуждения этих волн предполагалось, что размеры излучателей вдоль фронта волны

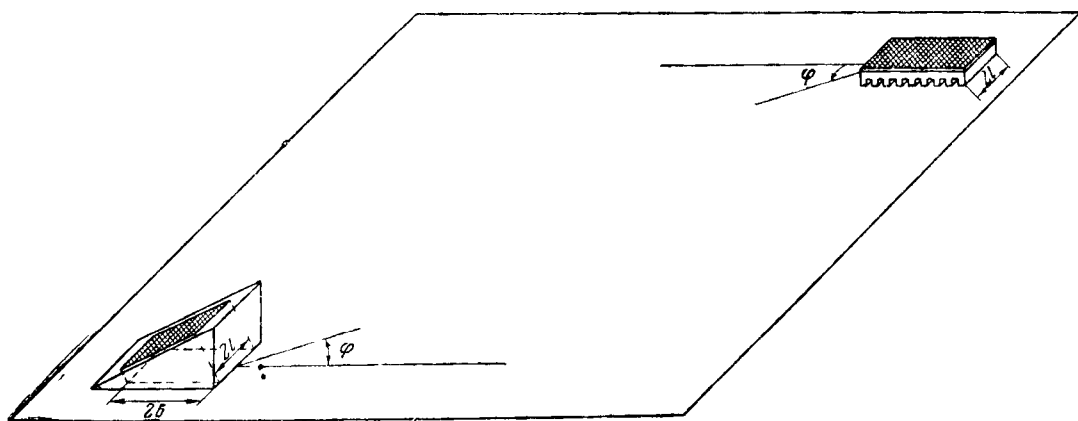


Рис. 44

(ось  $y$ ) бесконечны и соответственно в твердом теле распространяются плоские волны Лэмба или Рэля. Между тем на практике размеры излучателей вдоль фронта волны составляют обычно примерно десять длин волн. Естественно, что в таких случаях интересно знать диаграммы направленности этих излучателей.

В настоящем параграфе, написанном на основе работы [44], мы рассмотрим этот вопрос для двух наиболее распространенных методов возбуждения волн Лэмба и Рэля: метода гребенчатой структуры и метода клина. В обоих методах излучатели, расположенные на поверхности пластинки (см. рис. 44) или твердого тела доста-

точно больших размеров (которое можно считать полупространством), создают на поверхности возмущение с пространственным периодом, равным длине волны Лэмба нужного номера или длине рэлеевской волны соответственно.

Для расчета диаграмм мы сделаем ряд упрощающих предположений: 1) будем считать твердую среду, где происходит распространение, изотропной, однородной и идеально упругой;

2) поскольку энергия волнового пучка волн Лэмба и Рэлея расходуется в двух измерениях, структура волн по третьему измерению совершенно не существенна для диаграмм (волны Лэмба разных порядков, но с одинаковой длиной волны будут иметь одинаковые диаграммы направленности), и мы будем рассматривать плоскую задачу, считая, что волновое распространение происходит в плоскости  $r, \varphi$  (рис. 44);

3) заменим реальный излучатель волн Лэмба или Рэлея совокупностью элементарных излучателей, распределенных по соответствующему закону в той области плоскости  $r, \varphi$ , где находился реальный излучатель. В случае пластинки гребенчатого профиля такой областью будет ряд полосок на плоскости  $r, \varphi$ , соответствующих выступам пластинки, в случае клина — сечение пучка продольных волн в клине (без учета расхождения) плоскостью  $r, \varphi$ ;

4) амплитуду смещения, создаваемого на плоскости  $r, \varphi$  элементарным излучателем, будем считать пропорциональной  $H_0^{(1)}(kr)e^{-i\omega t - \delta \rho}$ , где  $k=2\pi/\lambda$  — волновое число волны Лэмба или Рэлея. Множитель  $e^{-\delta \rho}$  учитывает затухание волны от элементарного излучателя при распространении на пути  $\rho$  через область, занимаемую другими элементарными излучателями;  $\delta$  — коэффициент затухания на единичном пути. Такое затухание является экспериментально установленным фактом и объясняется трансформацией волны Лэмба и Рэлея в другие типы волн (в том числе в волны Лэмба иных номеров), когда отдельные участки поверхности слоя или полупространства перестают быть свободными. Для используемых нами излучателей коэффициент  $\delta$ , найденный экспериментально, равнялся  $0,19 \text{ мм}^{-1}$  для пластинки гребенчатого профиля и  $0,20 \text{ мм}^{-1}$  — для клина.



Интегрируя по всем элементарным излучателям и производя необходимые вычисления, мы получим для диаграмм направленности пластинки гребенчатого профиля и клина следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 N_{\Gamma\Pi} = & \frac{\sin(kl \sin \varphi)}{kl \sin \varphi} \cdot \frac{\sin \pi \cos \varphi / 2}{\cos \varphi} e^{\bar{\delta}(1 - \cos \varphi)} \times \\
 & \times \frac{\sqrt{1 - e^{-4\bar{\delta} \cos \varphi} - 2e^{-2\bar{\delta} \cos \varphi} \cos(\pi n \cos \varphi)}}{\sqrt{1 - e^{-4\bar{\delta} \cos \varphi} - 2e^{-2\bar{\delta} \cos \varphi} \cos(2\pi \cos \varphi)}} \times \\
 & \times \frac{1 - e^{-2\bar{\delta}}}{1 - e^{-2n\bar{\delta}}} \quad \text{при } \varphi \sim 0, \quad (II.33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{\Gamma\Pi} = & \frac{\sin \pi \cos \varphi}{kl \cos \varphi} \times \\
 & \times \frac{\sqrt{\sin^2(kl \sin \varphi) \operatorname{ch}^2 4\bar{\delta} / \sin \varphi + \cos^2(kl \sin \varphi) \operatorname{sh}^2 4\bar{\delta} / \lambda \sin \varphi}}{\sin \varphi} \times \\
 & \times \frac{\sin(n\pi \cos \varphi)}{\sin(\pi \cos \varphi)} \cdot \frac{1 - e^{-2\bar{\delta}}}{1 - e^{-2n\bar{\delta}}} e^{-(1-4/\lambda \sin \varphi)\bar{\delta}} \quad \text{при } \varphi \sim \pi/2, \quad (II.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{\text{кл}} = & \frac{2\bar{\delta}}{\pi} (1 + \operatorname{cth} \bar{\delta}) \frac{\sin(kl \sin \varphi)}{kl \sin \varphi} e^{-\bar{\delta} b |\cos \varphi|} \times \\
 & \times \frac{\sqrt{\sin^2[kb(1 - \cos \varphi)] \operatorname{ch}^2 \frac{\partial \sigma}{\cos \varphi} + \cos^2[kb(1 - \cos \varphi)] \operatorname{sh}^2 \frac{\partial b}{\cos \varphi}}}{\sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \frac{4\bar{\delta}^2}{\pi^2 \cos^2 \varphi}}}. \quad (II.35)
 \end{aligned}$$

Здесь  $N_{\Gamma\Pi}$  и  $N_{\text{кл}}$  — отношения амплитуд смещений, создаваемых пластинкой гребенчатого профиля и клином по направлению  $\varphi$  в зоне Фраунгофера (т. е. при расстояниях  $r \gg D^2/2\lambda$ , где  $D$  — максимальный линейный размер излучателя вдоль волнового фронта (см. [45]), к соответственным амплитудам при  $\varphi=0$ ,  $2l$  и  $2b$  — линейные размеры областей возбуждения на плоскости  $r, \varphi$  (рис. 14),  $n$  — число выступов пластинки гребенчатого профиля,  $\bar{\delta} = \delta\lambda/4$ .

Формулы (II.33)—(II.35) являются приближенными вследствие не строгого учета затухания волн, создаваемых элементарными излучателями. Формула (II.33) дает хорошее приближение при  $0 < \varphi < l/2b$ , формула (II.34) — при  $\pi/2 - \lambda/l < \varphi < \pi/2$ , а формула (II.35) — в диапазонах  $0 < \varphi < l/2b$  и  $\pi - l/2b < \varphi < \pi$ . При остальных углах относительная ошибка при расчете по указанным формулам составляет 20—30%, однако это не существенно, поскольку при этих углах излучение пластинки, гребенчатого профиля и клина мало.

Экспериментальное исследование диаграмм направленности проводилось в импульсном режиме на установке, состоящей из генератора электрических импульсов прямоугольной формы с синусоидальным заполнением частотой 2,5—3,5 Мгц, усилителя и индикатора (осциллоскоп 25И). Длительность импульсов составляла 10 и 2 мксек. В качестве излучателей волн использовались дюралевая пластинка гребенчатого профиля с 19 выступами и лежащей на ней титанатовой пластинкой размером  $9 \times 9$  мм, а также полистироловый клин с углом наклона  $55^\circ$  и титанатовой пластинкой размером  $9 \times 9$  мм расположенной на наклонной грани. Приемником волн в обоих случаях служил аналогичный полистироловый клин, имеющий очень малую площадь акустического контакта (круг с диаметром 3 мм) с поверхностью образца, в котором распространялись волны. Последнее позволяло измерять амплитуду колебаний поверхности образца в малой области (локально). Все акустические контакты осуществлялись при помощи касторового масла. Для снятия диаграмм направленности излучатель и приемник помещались на хорошо обработанные поверхности дюралевых листов размеров  $45 \times 30$  см и толщиной 6 мм. Излучатель закреплялся неподвижно, а приемник последовательно помещался в точки окружности радиуса 25 см, описанной вокруг излучателя, причем каждое измерение амплитуды в точке тотчас же относилось к соответствующему измерению на оси излучателя ( $\varphi = 0$ , см рис 56). Для исключения влияния изменений акустического контакта между приемником и дюралевым листом на результаты измерения каждая пара измерений (по направлению  $\varphi$  и  $\varphi = 0$ ) повторялась 20 раз с последующим усреднением. Угол наклона клина и расстояние между центрами выступов пластинки гребенчатого про-

филя были выбраны так, чтобы пространственный период возмущений на поверхности дюралевого листа равнялся длине волны Рэлея в дюрале. Тогда при используемой толщине листа каждый излучатель возбуждал совокупность двух нулевых волн Лэмба, которые, интерферируя между собой, создавали во всех точках листа поле, подобное полю волны Рэлея (см. § 6).

На рис. 45 изображены диаграммы направленности пластинки гребенчатой структуры (с  $n=1$  и 12, соответственно), а на рис. 59 — диаграмма направленности клина. Для снятия диаграммы направленности пластинки гребенчатого профиля с одним выступом использовалась пластинка с 19 выступами, только акустический контакт пластинки с дюралевым листом осуществлялся лишь под одним выступом. Кружки на рис. 45 соответствуют длительности импульса 10 мксек, крестики — 2 мксек. Теоретические кривые (сплошные линии) рассчитывались по формулам (II.33) — (II.35). Диаграммы для пластинки гребенчатого профиля построены при  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ , для клина — при  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . При остальных углах диаграммы можно получить соответствующим симметричным продолжением (симметрия экспериментальных диаграмм проверялась и подтвердилась на опыте). Анализируя рис. 45, можно сделать следующие выводы.

1. Экспериментально измеренные диаграммы направленности лишь качественно совпадают с расчетными, причем основное различие состоит в почти полном отсутствии тонкой структуры у экспериментальных диаграмм. Для пластинки гребенчатого профиля с  $n=19$  и клина вторичные максимумы в экспериментальных диаграммах вообще отсутствуют (кроме слабых максимумов при  $\varphi=\pi/2$  для пластинки и  $\varphi=\pi$  — для клина), а для одного выступа пластинки гребенчатого профиля они выражены слабо. Экспериментальные диаграммы напоминают огибающие соответствующих теоретических. По-видимому, основной причиной различия экспериментальных и расчетных диаграмм является несоответствие идеализированного теоретического распределения смещений в областях возбуждения на плоскости  $r, \varphi$  реальному вследствие непоршнеобразных колебаний титанатовых пластинок, неоднородности контактного переходного слоя, расхождения и затухания пучка продольных волн в материале клина и несовершенств в изготовлении пластинки

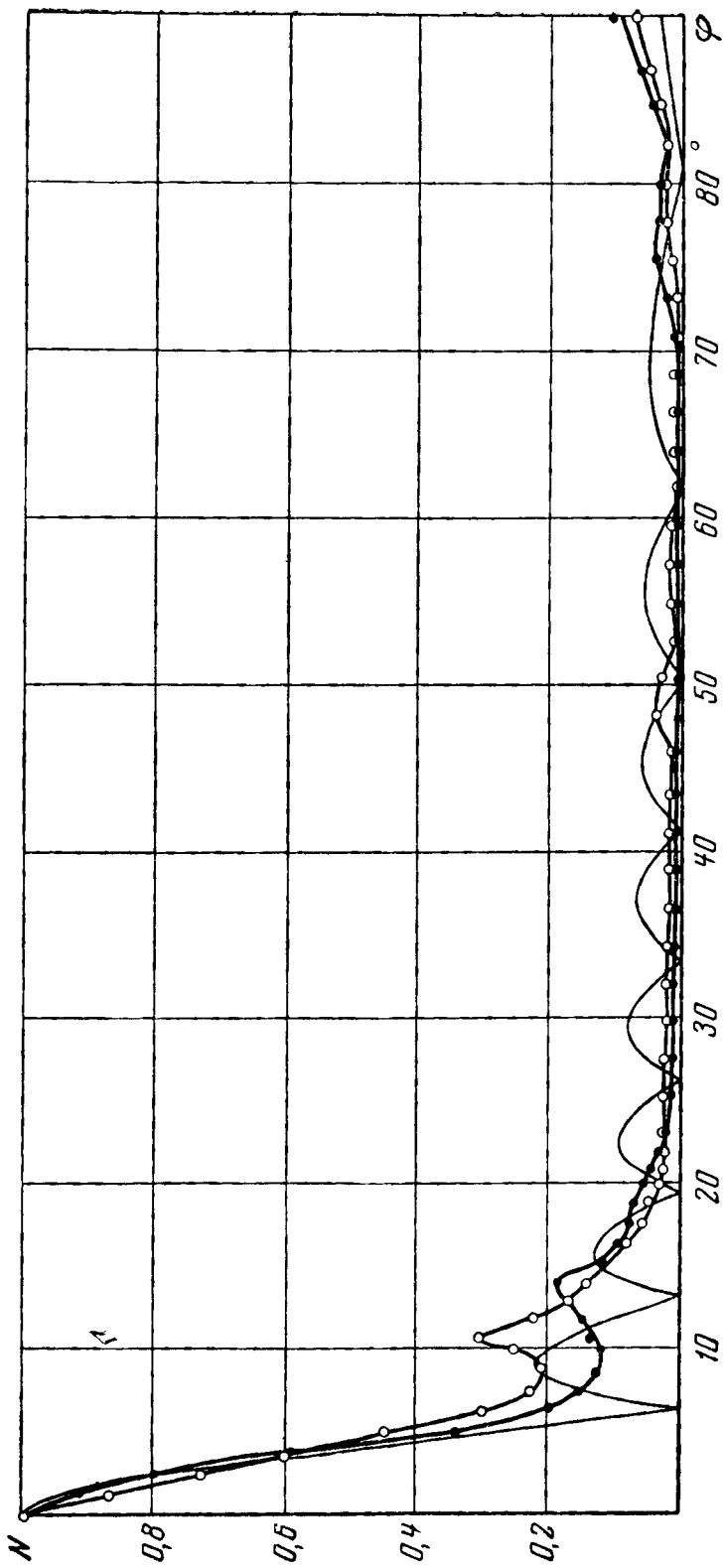


Рис 45а

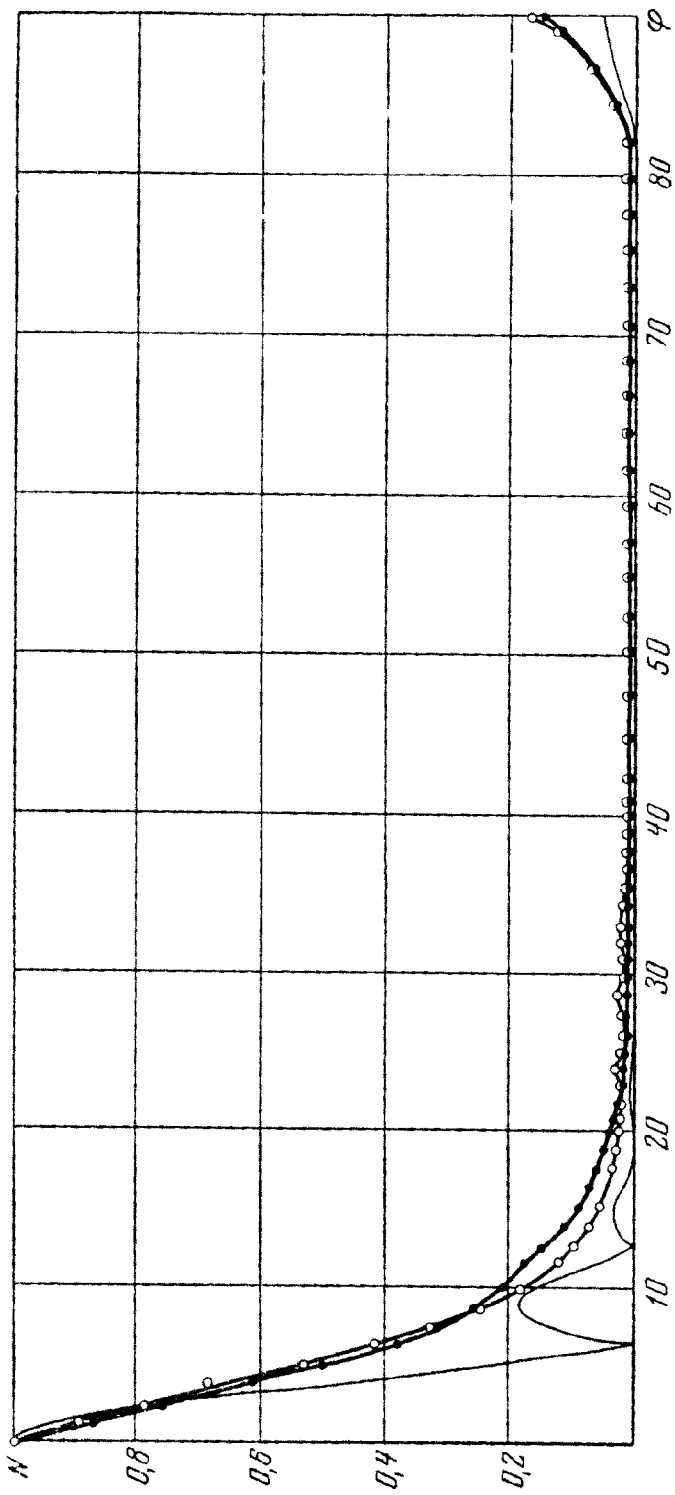


Рис 456

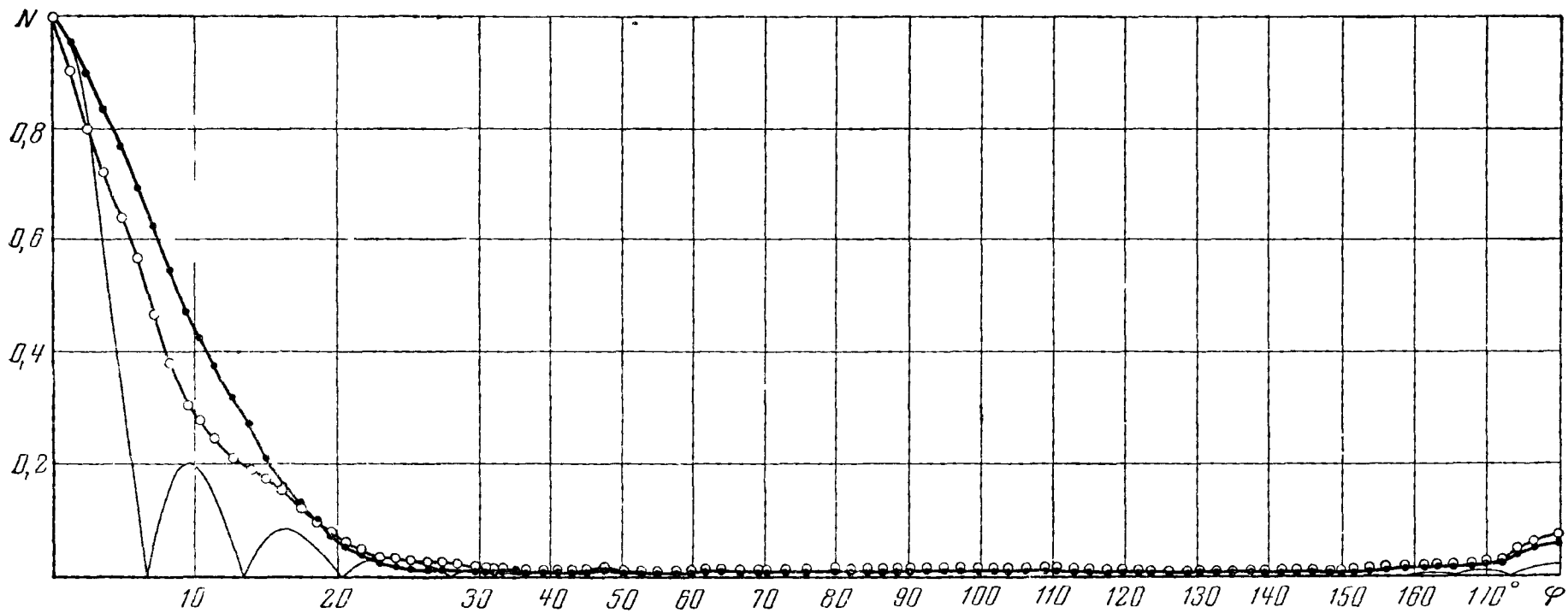


Рис 45в

гребенчатого профиля (неодинаковая ширина выступов и пазов и прочее).

2. Угловая ширина главного максимума излучения как для пластинки гребенчатого профиля с любым числом выступов, так и для клина равна примерно  $\lambda/l$ , т. е. определяется поперечным размером излучателя в плоскости  $r$ ,  $\varphi$  и не зависит от второго размера ( $2b$ ) (экспериментальная ширина главного максимума для клинового излучателя несколько больше, по-видимому, из-за расхождения пучка продольных волн в клине). Отметим, что в случае  $b \gg l$ , которого мы не касались, такое положение будет нарушаться.

3. Вследствие практически полного отсутствия вторичных максимумов излучения пластинку гребенчатого профиля можно считать двунаправленным излучателем, а клин — однонаправленным.

4. Поведение экспериментальных диаграмм направленности при импульсном режиме излучения зависит от длительности импульса, однако эта зависимость слабо выражена (случай очень коротких импульсов с пространственной длиной, много меньшей размеров излучателя, конечно, исключается). Поэтому замена импульсного режима непрерывным, сделанная нами при расчете, по-видимому, вполне оправдана.

## § 8. Затухание волн Лэмба в зависимости от частоты

Наличие дисперсии фазовой и групповой скоростей у волн Лэмба существенным образом влияет на поведение коэффициента затухания этих волн. Если для волн, не обладающих дисперсией фазовой скорости, затухание не зависит от размера образца, по которому они распространяются, и довольно плавно зависит от частоты, то для волн Лэмба картина будет совершенно иной. В областях сильной дисперсии фазовой скорости будет наблюдаться довольно резкая зависимость коэффициента затухания от частоты и толщины слоя (пластинки), т. е. от  $k_f d$ . Аномальное поведение коэффициента затухания при сильной дисперсии скорости нормальной волны — явление чрезвычайно общее и присущее нормальным волнам любой природы (звуковым, электромагнитным и т. д.) [46] За-

зависимость коэффициента затухания волн Лэмба от относительной толщины  $k_t d$  слоя, в котором они распространяются, исследовалась в работах [36, 47]. Изложим в этом параграфе основные результаты этих исследований.

Для расчета указанных зависимостей используем метод, применявшийся нами при расчете коэффициента затухания рэлеевских волн (см. § 3 гл. I): зададим затухание продольных и поперечных волн в твердой среде в виде мнимых частей соответственных волновых чисел и получим из характеристических уравнений выражения для мнимых частей волновых чисел волн Лэмба через мнимые части волновых чисел продольных и поперечных волн. Рассмотрим твердый слой с потерями, где

$$\begin{aligned}\bar{k}_l &= k'_l + ik''_l; \\ \bar{k}_t &= k'_t + ik''_t; \\ \bar{k}_{s_n, a_n} &= k'_{s_n, a_n} + ik''_{s_n, a_n}.\end{aligned}$$

Пусть затухание продольных и поперечных волн мало ( $k'_l \gg k''_l$ ,  $k'_t \gg k''_t$ ). Затухание всех волн Лэмба при этом (как будет видно из изложенного ниже) также мало, за исключением окрестностей критических точек. Запишем комплексные волновые числа продольной, поперечной и симметричной (или антисимметричной) волн Лэмба номера  $n$  в виде:

$$\begin{aligned}\bar{k}_l &= k'_l(1 + i\alpha); \\ \bar{k}_t &= k'_t(1 + i\beta); \\ \bar{k}_{s_n, a_n} &= k'_{s_n, a_n}(1 + i\gamma_{s_n, a_n}),\end{aligned}\tag{II.36}$$

где  $\alpha = k''_l/k'_l$ ,  $\beta = k''_t/k'_t$ ,  $\gamma = k''_{s_n, a_n}/k'_{s_n, a_n}$  — малые вещественные поправки, численно равные отнесенным к  $2\pi$  коэффициентам затухания продольной, поперечной и лэмбовской волн на длину соответствующей волны. Подставим комплексные волновые числа (II.36) в характеристические уравнения (II.4), (II.5). Отбрасывая в них члены порядка  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\gamma^2$  и выше, разделим уравнения на вещественные и мнимые части. При этом вещественные части дадут уравнения [по форме совпадающие с (II.4), (II.5)] для определения фазовых ско-



ростей волн Лэмба, а мнимые — для определения  $\gamma_{s_n, a_n}$ . Из последних получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\gamma_{s_n} &= A_{s_n}\alpha + B_{s_n}\beta; \\ \gamma_{a_n} &= A_{a_n}\alpha + B_{a_n}\beta,\end{aligned}\tag{II.37}$$

где

$$A_{s_n} = \frac{\frac{\eta_n^2 \xi^2}{1 - \xi^2 \eta_n^2} + \frac{2\eta_n \bar{d}}{\sqrt{1 - \eta_n^2} \operatorname{sh} 2\bar{d} \sqrt{1/\eta_n^2 - \xi^2}}}{C};$$

$$B_{s_n} = \frac{-\frac{2\eta_n \bar{d}}{\sqrt{1 - \eta_n^2} \operatorname{sh} 2\bar{d} \sqrt{1/\eta_n^2 - 1}} - \frac{4\eta_n^2}{2 - \eta_n^2} + \frac{\eta_n^2}{1 - \eta_n^2}}{C};$$

здесь  $C = \left[ -\frac{1}{\sqrt{1 - \eta_n^2} \operatorname{sh} 2\bar{d} \sqrt{\frac{1}{\eta_n^2} - 1}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2 \eta_n^2} \operatorname{sh} 2\bar{d} \sqrt{\frac{1}{\eta_n^2} - \xi^2}} \right] \frac{2\bar{d}}{\eta_n} - \frac{8}{2 - \eta_n^2} + \frac{1}{1 - \eta_n^2} + \frac{1}{1 - \eta_n^2 \xi^2} + 2;$

$$A_{a_n} = \frac{\frac{\xi^2 \eta_n^2}{1 - \xi^2 \eta_n^2} - \frac{2\eta_n \bar{d}}{\sqrt{1 - \eta_n^2} \operatorname{sh} 2\bar{d} \sqrt{1/\eta_n^2 - \xi^2}}}{C_1};$$

$$B_{a_n} = \frac{\frac{2\eta_n \bar{d}}{\sqrt{1 - \eta_n^2} \operatorname{sh} 2\bar{d} \sqrt{1/\eta_n^2 - 1}} - \frac{4\eta_n^2}{2 - \eta_n^2} + \frac{\eta_n^2}{1 - \eta_n^2}}{C_1};$$

$$\text{здесь } C_1 = \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\eta_n^2} \operatorname{sh} 2\bar{d} \sqrt{1/\eta_n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2\eta_n^2} \operatorname{sh} 2\bar{d} \sqrt{1/\eta_n^2-\xi^2}} \right] \frac{2\bar{d}}{\eta_n} - \frac{8}{2-\eta_n^2} + \frac{1}{1-\eta_n^2} + \frac{1}{1-\eta_n^2\xi^2} + 2;$$

$$\bar{d} = k'_t d; \quad \xi^2 = \frac{c_t^2}{c_l^2} = \frac{k'_l{}^2}{k'_t{}^2}; \quad \eta_n = \frac{c_{s_n, a_n}}{c_t} = \frac{k'_t}{k'_{s_n, a_n}}.$$

Таким образом, коэффициент затухания волны Лэмба на длину волны есть линейная комбинация из аналогичных коэффициентов затухания продольных и поперечных волн.

Анализируя формулы (II.37), можно убедиться, что численные значения коэффициентов  $A_{s_n, a_n}$ ,  $B_{s_n, a_n}$  определяются типом и номером волны Лэмба, относительной толщиной слоя  $\bar{d}$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Для нулевых волн в общем случае ( $0 < \nu < 0,5$ ) коэффициенты затухания  $\gamma_s$  и  $\gamma_{a_0}$  при любых толщинах  $\bar{d}$  зависят как от  $\alpha$ , так и от  $\beta$ . При  $\nu \rightarrow 0$  «удельный вес»  $\beta$  в формулах (II.37) стремится к нулю, а при  $\nu \rightarrow 0,5$  стремится к нулю «удельный вес»  $\alpha$ . При  $\bar{d} \rightarrow \infty$  коэффициенты затухания нулевых волн Лэмба стремятся к коэффициентам затухания рэлеевских волн [см. формулу (I.22)].

Для волн Лэмба порядка выше нулевого при их появлении (в критических областях) коэффициенты  $\gamma_{s_n, a_n}$  определяются  $\alpha$  или  $\beta$ , в зависимости от того, появляется волна Лэмба как продольная или как поперечная. При  $\bar{d} \rightarrow \infty$  коэффициенты  $\gamma_{s_n, a_n} \rightarrow \beta$ .

Все отмеченные особенности относительно роли  $\alpha$  и  $\beta$  в формулах (II.37) объясняются простым физическим фактом: если волна Лэмба состоит преимущественно из продольных компонент (описываемых скалярным потенциалом  $\varphi$ ), то  $\gamma_{s_n, a_n}$  определяется величиной  $\alpha$ ; если же волна состоит преимущественно из поперечных компонент (описываемых векторным потенциалом  $\psi$ ), то  $\gamma_{s_n, a_n}$  определяется только коэффициентом  $\beta$ .

На рис. 46—47 приведены зависимости коэффициентов  $A_{s_n, a_n}$  и  $B_{s_n, a_n}$  от относительной толщины слоя, рассчитанные при  $\nu = 0,34$ . Для наглядности на этих же рисунках

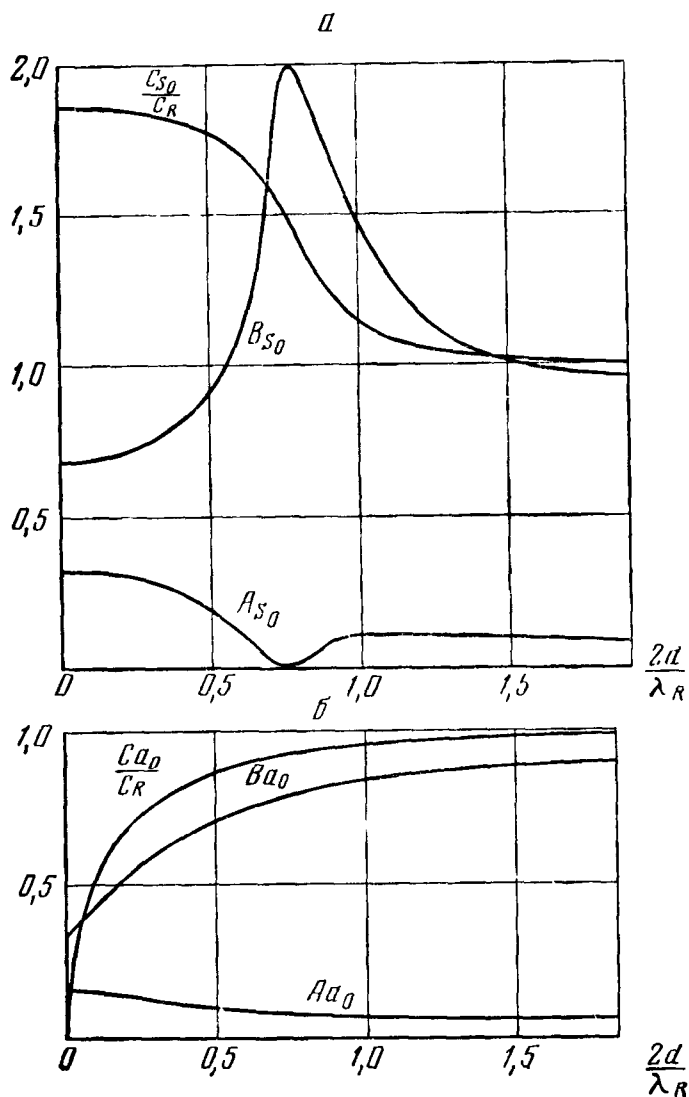


Рис. 46

нанесены дисперсионные кривые фазовых скоростей соответственных нормальных волн. Из графиков видно, что, как и предполагалось выше, коэффициенты  $A_{s_n, a_n}$ ,  $B_{s_n, a_n}$  очень сильно зависят от относительной толщины слоя, что означает, что при независимости от частоты и толщины слоя коэффициентов затухания  $\alpha$  и  $\beta$  продольных и поперечных волн коэффициент затухания  $\gamma$  волн Лэмба очень сильно зависит от этих параметров.

Как правило, затухание волн Лэмба максимально при максимальной дисперсии фазовой скорости. Так, например, в критических областях, когда фазовые скорости и длины волн стремятся к бесконечности, коэффициенты затухания  $\gamma_{s_n, a_n}$  тоже стремятся к бесконечности. Для волны  $s_0$  в области максимальной дисперсии максимально значение  $B_{s_0}$ , а значение  $A_{s_0}$  минимально. Максимум  $B_{s_0}$  имеет довольно большую амплитуду, поэтому при одинаковых порядках величин  $\alpha$  и  $\beta$  области максимальной дисперсии будет соответствовать максимум коэффициента затухания  $\gamma_{s_0}$ . Численно порядки изменения коэффициентов  $\gamma_{s_n, a_n}$  при изменении  $\bar{d}$  такие же, как порядки изменения фазовых скоростей.

Иногда коэффициенты  $A_{s_n, a_n}$  и  $B_{s_n, a_n}$  становятся отрицательными, как, например, при  $k_t d \simeq 3,0$  для волны  $s_1$  (рис. 47, а). Это означает, что на данном участке у волны Лэмба групповая скорость отрицательна. В работе [47] приведены результаты опытов по проверке зависимостей, описываемых формулами (II.37). Опыты проводились на частотах 1—2 Мгц с образцами из малоуглеродистой стали, в которых измерялись коэффициенты  $\gamma_{s_0}$ ,  $\gamma_s$ ,  $\gamma_{a_0}$ ,  $\gamma_a$ . По этим коэффициентам при помощи формул (II.37) рассчитывались значения коэффициентов  $\alpha$  в образцах и сопоставлялись с результатами непосредственных измерений коэффициентов  $\alpha$ . Получено теплое согласие расчетных и измеренных значений  $\alpha$ , подтверждающее формулу (II.37).

## § 9. Распространение в цилиндрическом слое

Во многих практических задачах (ультразвуковая дефектоскопия, линии задержки) волны Лэмба возбуждают не в плоском, а в цилиндрически искривленном твердом слое, причем направление распространения волн обычно перпендикулярно образующей цилиндрической поверхности. Теоретическое исследование распространения волн в таком слое было выполнено в работе [48] методом, аналогичным примененному нами для рассмотрения рэлеевских волн на цилиндрических поверхностях.

Будем рассматривать плоские гармонические (зависимость от времени согласно множителю  $e^{-i\omega t}$ , который для краткости опустим) волны в твердом цилиндриче-

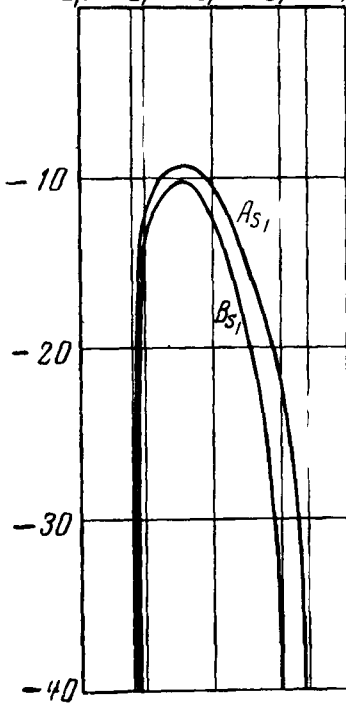
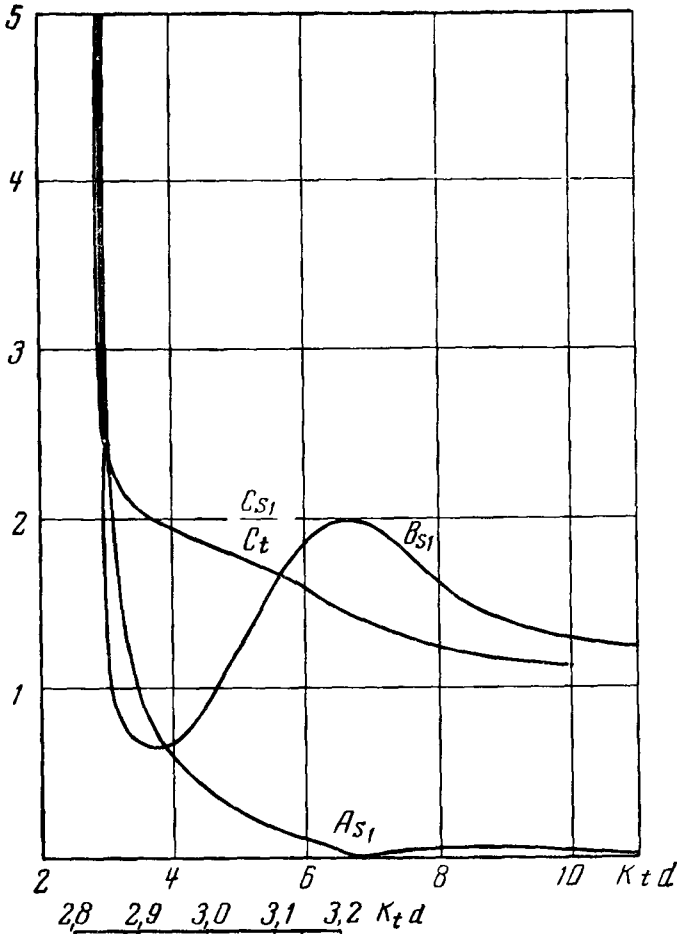


Рис. 47а

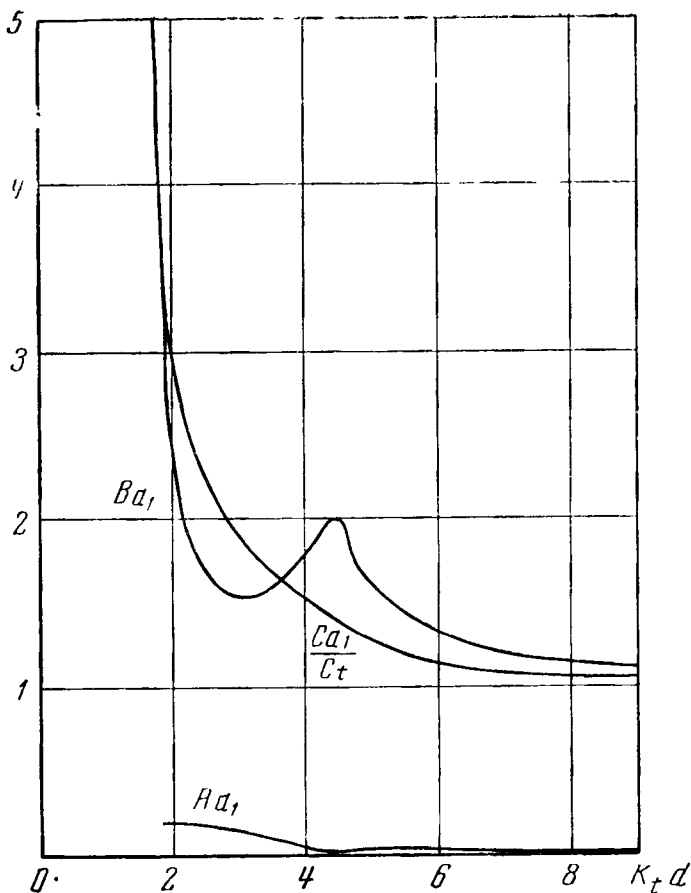


Рис. 476

ском слое толщины  $2d$ , распространяющиеся в направлении, перпендикулярном образующей, когда в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  упругое поле не зависит от  $z$ . Аналогом волн Лэмба в плоском слое в этом случае можно считать решение уравнений упругости, которое имеет следующие свойства:

1) удовлетворяет условию отсутствия напряжений на внешней и внутренней поверхностях цилиндрического слоя;

2) зависит от угловой координаты  $\theta$  по закону  $e^{\pm i p \theta}$ , где  $p$  — некоторая безразмерная величина, которую можно называть угловым волновым числом;

3) при стремлении радиуса кривизны цилиндрической поверхности к бесконечности и конечных  $d$  и  $\omega$  переходит в волны Лэмба в плоском слое.

При таких условиях фронтами распространяющихся в слое волн будут являться плоскости, проходящие через ось  $z$ . Угловое волновое число  $p$  будет характеризовать набег фазы волны при прохождении единичного углового

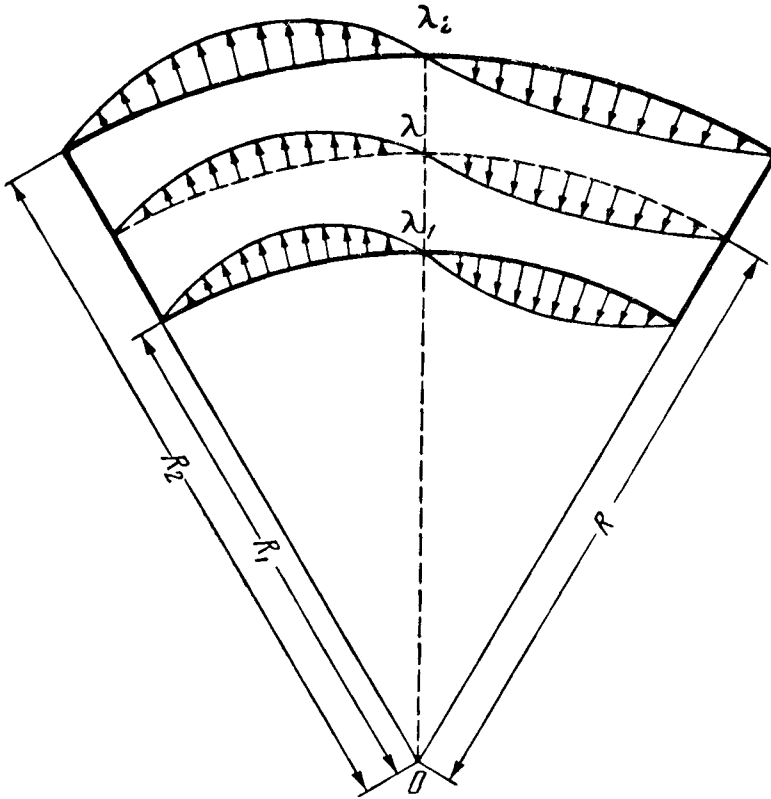


Рис. 48

промежутка. Связь между пространственной периодичностью в волне при разных радиусах и числом  $p$  определится соотношением  $p = \frac{2\pi}{\lambda_1} R_1 = \frac{2\pi}{\lambda_2} R_2 = \frac{2\pi}{\lambda} R$  (обозначения см. на рис. 48). Будем называть длиной волны  $\lambda$  в цилиндрическом слое длину пространственной периодичности на средней поверхности, волновым числом  $k$  — величину  $2\pi/\lambda$ , а фазовой скоростью  $c$  — величину  $\omega/k$ . Аналогичные величины, относящиеся к плоскому слою, будем обозначать индексом 0 ( $p_0, k_0, \lambda_0$  и т. д.). Чтобы избежать необходимости искусственного ограничения задачи случаем целых значений  $p$ , мы, пользуясь методом Малю-

жинца [15], будем рассматривать решение в бесконечном угловом интервале  $-\infty < \theta < \infty$ , считая ось  $z$  линией разветвления бесконечного порядка. При таком подходе различные значения решения в интервалах  $n < \theta/2\pi < n + 1$  для различных целых  $n$ , естественно, интерпретируются как поля, соответствующие последовательным пробегам волн по слою.

Выразим решение задачи через потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  продольных и поперечных волн, описываемых уравнениями (I.23). Связь  $\varphi$  и  $\psi$  с компонентами смещений и напряжений в слое дается соотношениями (I.24) и (I.25). Общие решения волновых уравнений (I.23) имеют вид

$$\begin{cases} \varphi = [AI_p(k_l r) + CN_p(k_l r)] e^{i p \theta}; \\ \psi = [BI_p(k_t r) + DN_p(k_t r)] e^{i p \theta}, \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

где  $A, B, C, D$  — произвольные постоянные;  $I_p(k_{l,t} r)$ ,  $N_p(k_{l,t} r)$  — функции Бесселя и Неймана порядка  $p$ . Условия равенства нулю напряжений  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\theta r}$  при  $r = R_{1,2}$  дают нам четыре уравнения для определения  $A, B, C, D$ . Используя тождественные соотношения между цилиндрическими функциями, мы можем записать эти уравнения так:

$$\begin{aligned} iaI^-(x_1)A - I^+(y_1)B + iaN^-(x_1)C - N^+(y_1)D &= 0; \\ iaI^-(x_2)A - I^+(y_2)B + iaN^-(x_2)C - N^+(y_2)D &= 0; \\ a[I^+(x_1) - 2bI_p(x_1)]A + iI^-(y_1)B + a[N^+(x_1) - \\ &\quad - 2bN_p(x_1)]C + iN^-(y_1)D = 0; \\ a[I^+(x_2) - 2bI_p(x_2)]A + iI^-(y_2)B + a[N^+(x_2) - \\ &\quad - 2bN_p(x_2)]C + iN^-(y_2)D = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

где

$$\begin{aligned} I^+(z) &= I_{p-2}(z) + I_{p+2}(z); & I^-(z) &= I_{p-2}(z) - I_{p+2}(z); \\ N^+(z) &= N_{p-2}(z) + N_{p+2}(z); & N^-(z) &= N_{p-2}(z) - N_{p+2}(z); \\ a &= k_l^2/k_t^2 = \xi^2; & b &= \frac{k_t^2}{k_l^2} - 1; & x_{1,2} &= k_l R_{1,2}; & y_{1,2} &= k_t R_{1,2}. \end{aligned}$$

Написанная система имеет не тривиальное решение при равенстве нулю ее определителя. Это условие после простых преобразований может быть записано следующим образом:



$$\begin{vmatrix} [bI_p(x_1) - I_{p+2}(x_1)] & I_{p+2}(y_1) & [bN_p(x_1) - N_{p+2}(x_1)] & N_{p+2}(y_1) \\ [bI_p(x_1) - I_{p-2}(x_1)] & -I_{p-2}(y_1) & [bN_p(x_1) - N_{p-2}(x_1)] & -N_{p-2}(y_1) \\ [bI_p(x_2) - I_{p+2}(x_2)] & I_{p+2}(y_2) & [bN_p(x_2) - N_{p+2}(x_2)] & N_{p+2}(y_2) \\ [bI_p(x_2) - I_{p-2}(x_2)] & -I_{p-2}(y_2) & [bN_p(x_2) - N_{p-2}(x_2)] & -N_{p-2}(y_2) \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{II.40})$$

Уравнение (II.40) является характеристическим уравнением, определяющим связь неизвестного волнового числа  $k = p/R$  с волновыми числами  $k_{l,t}$  и геометрией слоя ( $R$  и  $d$ ). После определения  $k$  три из четырех констант  $A, B, C, D$  можно выразить через четвертую при помощи системы (II.39). Тогда выражения (II.38) для потенциалов становятся, с точностью до общего амплитудного множителя, полностью определенными.

Для проведения количественных оценок влияния кривизны слоя на характеристики волн Лэмба в нем рассмотрим случай слабо искривленного слоя, когда  $d/R = = k_0 d/p_0 \ll 1$ ,  $\lambda_0/R = 2\pi/p_0 \ll 1$ . В этом случае, считая  $1/p_0$  параметром малости, можно представить волновые числа волн Лэмба в цилиндрическом слое в виде

$$k = k_0 \left[ 1 + \frac{q(v, k_0 d)}{p_0} + \frac{f(v, k_0 d)}{p_0^2} + \dots \right], \quad (\text{II.41})$$

где  $q$  и  $f$  — некоторые функции коэффициента Пуассона и  $k_0 d$ , а цилиндрические функции, входящие в формулы (II.38) — (II.40), можно заменить асимптотическими представлениями через полусходящиеся ряды Дебая [22]. Эти представления будут различны в зависимости от того, является ли аргумент функции большим, чем индекс, или меньшим, что в свою очередь определяется толщиной плоского слоя, соответствующего рассматриваемому цилиндрическому, и номером волны Лэмба, которая нас интересует.

Выполнив вычисления, можно показать, что  $q(v, k_0, d) \equiv 0$ , т. е. в первом приближении цилиндрическая кривизна не влияет на скорость и другие характеристики волн Лэмба в твердом слое.

Вычисление квадратичной поправки к  $k_0$  связано с очень громоздкими выкладками и было проделано нами только для наиболее часто встречающихся на практике двух волн Лэмба—нулевой симметричной и нулевой антисимметричной. Установлено, что при малых толщинах слоя, когда эти волны представляют собой соответственно продольную и изгибную волны в тонком слое, порядок величины  $f(\nu, k_0 d)$  равен единице и  $k \sim k_0 (1 - 1/\rho_0^2)$ . При толстом слое ( $d \sim \lambda_0$  и больше), когда обе нулевые волны становятся похожими на рэлеевские волны, распространяющиеся вдоль границ слоя, порядок  $f(\nu, k_0 d)$  равен  $(k_0 d)^2 e^{k_0 d}$ , так что  $k \sim k_0 (1 - d^2/R^2 e^{k_0 d})$ . Точный численный расчет показал, что при  $d/\lambda_0 = 2$ ,  $k = k_0 \left(1 - \frac{1,61 \cdot 10^6}{\rho_0^2}\right)$

для  $\nu = 0,25$  и  $k = k_0 \left(1 - \frac{0,98 \cdot 10^6}{\rho_0^2}\right)$  для  $\nu = 0,35$ .

Таким образом, поправка к волновому числу в цилиндрическом слое (по сравнению с  $k_0$ ) является квадратичной по  $1/\rho_0$  величиной и существенно зависит от толщины слоя, типа и номера волны Лэмба.

Из выражения (II.41) можно найти фазовую скорость  $c$  волны Лэмба в твердом цилиндрическом слое; она оказывается равной

$$c = c_0 \left[ 1 - \frac{f(\nu, k_0 d)}{\rho_0^2} + \dots \right].$$

По известному соотношению между фазовой и групповой скоростями можно найти групповую скорость волны Лэмба в цилиндрическом слое и показать, что

$$c_{гр} = \left( c_0 - \lambda_0 \frac{dc_0}{d\lambda_0} \right) \left[ + \frac{f(\nu, k_0 d) - \frac{\partial f(\nu, k_0 d)}{\partial (k_0 d)} k_0 d}{\rho_0^2} + \dots \right]. \quad (\text{II.42})$$

Таким образом, поправка к групповой скорости, обусловленная кривизной слоя, является также квадратичной по  $1/\rho_0$  величиной, зависящей от толщины слоя, типа и номера волны Лэмба.

## § 10. Распространение в контакте с жидкостью

Вопрос о распространении волн Лэмба в пластинке, погруженной в жидкость, представляет большой практический интерес для иммерсионного способа контроля изделий ультразвуковыми волнами Лэмба, когда контролируемое изделие погружается в ванну с жидкостью. Этот вопрос рассматривался в ряде работ [49—52]. Наиболее подробное, хотя далеко не полное, исследование его проведено в работах [49, 52], основные результаты которых мы сейчас изложим. Во многом задача о волнах Лэмба в пластинке, окруженной жидкостью, аналогична задаче о волнах Рэлея на границе твердого и жидкого полупространств, подробно рассмотренной в § 6, гл. I, поэтому мы проведем изложение по возможности кратко.

Итак, пусть в твердой абсолютно упругой пластинке толщины  $2d$  (см. рис. 29), погруженной в идеальную жидкость, в положительном направлении оси  $x$  распространяется плоская гармоническая волна частоты  $\omega$ . Выражения (II.1) для волновых потенциалов  $\phi$  и  $\psi$ , описывающих движение пластинки, должны удовлетворять уравнениям (1.2), а выражения для потенциала  $\phi_{\text{ж}}$  — аналогичному уравнению (I.43). В соответствии с принципом погашаемости [15], потенциал  $\phi_{\text{ж}}$  должен соответствовать волнам, уходящим от пластинки, или неоднородным волнам, распространяющимся вдоль граней пластинки и экспоненциально убывающим при удалении от них. Кроме того, на плоскостях  $z = \pm d$  должны выполняться граничные условия равенства нормальных смещений в жидкости и пластинке, равенства давления в жидкости и пластинке, равенства давления в жидкости напряжению  $\sigma_{zz}$  в пластинке и отсутствия касательного напряжения  $\sigma_{xz}$ .

Продельвая необходимые вычисления, во многом аналогичные приведенным в § 1 настоящей главы, получим те же формулы (II.8) и (II.9) для компонент смещений пластинки в симметричной и антисимметричной волнах, только под  $k_s$  и  $k^a$  в них следует понимать волновые числа симметричных и антисимметричных волн Лэмба в пластинке с учетом влияния жидкости. Эти волновые числа определяются теперь из следующих характеристических уравнений:

$$(k_s^2 + s_s^2)^2 \operatorname{cth} q_s d - 4k_s^2 q_s s_s \operatorname{cth} s_s d = i \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho} \frac{q_s k_t^4}{\sqrt{k_{\text{ж}}^2 - k_s^2}}; \quad (\text{II.43})$$

$$(k_a^2 + s_a^2)^2 \operatorname{th} q_a d - 4k_a^2 q_a s_a \operatorname{ths} a d = i \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho} \frac{q_a k_t^4}{\sqrt{k_{\text{ж}}^2 - k_s^2}}. \quad (\text{II.44})$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения отличаются от уравнений (II.4), (II.5) для свободной пластинки только наличием членов в правых частях, учитывающих влияние жидкости.

Исследуя эти уравнения, можно показать, что помимо корней, переходящих при стремлении отношения  $\rho_{\text{ж}}/\rho$  к нулю в корни уравнений (II.4), (II.5) и соответствующих, таким образом, «обычным» волнам Лэмба в пластинке, но с учетом влияния на их характеристики жидкости, уравнения (II.43), (II.44) имеют еще по одному дополнительному вещественному корню. Один из них соответствует симметричной волне, состоящей из двух неоднородных волн в жидкости, распространяющихся вдоль обеих граней пластинки и экспоненциально убывающих при удалении от них, и из четырех неоднородных волн (двух продольных и двух поперечных) в пластинке. Другой корень соответствует аналогичной антисимметричной волне. Фазовые скорости этих двух волн меньше скорости волн в жидкости. Указанные волны аналогичны поверхностной волне, распространяющейся на границе жидкого и твердого полупространств и состоящей из двух неоднородных волн в твердом полупространстве и одной неоднородной волны в жидкости (см. § 6 гл. I).

Влияние жидкости на волны Лэмба существенным образом зависит от соотношения фазовых скоростей этих волн и скорости волн в жидкости. Практически во всех случаях и для всех волн, кроме волны  $a_0$ , выполняется условие  $c_{\text{ж}} < c_{s,a}$ . Из физических соображений ясно, что при этом распространение волны в пластинке будет связано с излучением ее энергии в жидкость и соответственно с затуханием вдоль направления распространения. Это полностью аналогично случаю рэлеевской волны на границе твердого и жидкого полупространств. Для оценки затухания и изменения фазовой скорости волн Лэмба в работе [52], а также нами из уравнения (II.43), (II.44) были сделаны расчеты комплексных волновых чисел  $k_{s,a} = k_1 + ik_2$  симметричных и антисимметричных волн Лэмба.

Расчеты проделаны в предположении малости отношения  $\rho_{ж}/\rho$ . Для коэффициента затухания волн Лэмба на длину поперечной волны  $k_2\lambda_t$  и относительного изменения фазовой скорости (из-за влияния жидкости)  $\Delta c_{s,a}/c_{s,a}$  получены следующие формулы:

$$k_2\lambda_t = -i \frac{\rho_{ж}}{\rho} k_1\lambda_t A_{s,a}; \quad (\text{II.45})$$

$$\frac{\Delta c_{s,a}}{c_{s,a}} = -B_{s,a} \left( \frac{\rho_{ж}}{\rho} \right)^2. \quad (\text{II.46})$$

Здесь

$$A_s = - \frac{ik_t^4 \text{th } s_s d}{8k_s^2 s_s \sqrt{k_{ж}^2 - k_s^2}} \left[ 1 + \frac{k_s^2}{2s_s^2} + \frac{k_s^2}{2q_s^2} - \frac{4k_s^2}{k_s^2 + s_s^2} + \right. \\ \left. + \frac{k_s^2 d}{2s_s} (\text{th } s_s d - \text{cth } s_s d) - \frac{k_s^2 d}{2q_s} (\text{th } q_s d - \text{cth } q_s d) \right]^{-1};$$

$$A_a = - \frac{ik_t^4 \text{cth } s_a d}{8k_a^2 s_a \sqrt{k_{ж}^2 - k_a^2}} \left[ 1 + \frac{k_a^2}{2s_a^2} + \frac{k_a^2}{2q_a^2} - \frac{4k_a^2}{k_a^2 + s_a^2} + \right. \\ \left. + \frac{k_a^2 d}{2s_a} (\text{cth } s_a d - \text{th } s_a d) - \frac{k_a^2 d}{2q_a} (\text{cth } q_a d - \text{th } q_a d) \right]^{-1};$$

$$B_s = A_s^2 \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{k_s^2}{k_{ж}^2 - k_s^2} + \frac{4i A_s k_s^2 s_s \sqrt{k_{ж}^2 - k_s^2}}{k_t^4 \text{th } s_s d} \left[ \frac{2k_s^2}{s_s^2} - \frac{k_s^4}{2s_s^4} - \frac{3k_s^4}{2q_s^4} - \frac{16k_s^4}{(k_s^2 + s_s^2)^2} + \frac{8k_s^4}{q_s^2 (k_s^2 + s_s^2)} + \frac{k_s^4 d^2}{s_s^2 \text{sh}^2 s_s d} - \frac{k_s^4 d^2}{q_s^2 \text{sh}^2 q_s d} + \left( \frac{k_s^4 d}{2s_s^3} + \frac{2k_s^2 d}{s_s} \right) (\text{th } s_s d - \text{cth } s_s d) + \left( \frac{3k_s^4 d}{2q_s^3} - \frac{k_s^4 d}{q_s (k_s^2 + s_s^2)} \right) (\text{th } q_s d - \text{cth } q_s d) \right] \right\};$$

$$\begin{aligned}
B_a = A_a^2 \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{k_a^2}{k_{ж}^2 - k_a^2} + \frac{4iA_a k_a^2 s_a \sqrt{k_{ж}^2 - k_a^2}}{k_t^4 \operatorname{cth} s_a d} \left[ \frac{2k_a^2}{s_a^2} - \right. \right. \\
-\frac{k_a^4}{2s_a^4} - \frac{3k_a^4}{2q_a^4} - \frac{16k_a^4}{(k_a^2 + s_a^2)^2} + \frac{8k_a^4}{q_a^2 (k_a^2 + s_a^2)} - \frac{k_a^4 d^2}{s_a^2 \operatorname{ch}^2 s_a d} + \\
+ \frac{k_a^4 d^2}{q_a^2 \operatorname{ch}^2 q_a d} + \left. \left( \frac{k_a^4 d}{2s_a^3} + \frac{2k_a^2 d}{s_a} \right) (\operatorname{cth} s_a d - \operatorname{th} s_a d) + \right. \\
\left. + \left( \frac{3k_a^4 d}{2q_a^3} - \frac{k_a^4 d}{q_a (k_a^2 + s_a^2)} \right) (\operatorname{cth} q_a d - \operatorname{th} q_a d) \right\};
\end{aligned}$$

под  $k_{s,a}$ ,  $s_{s,a}$ ,  $q_{s,a}$  в этих формулах подразумеваются соответствующие величины для пластинки со свободными гранями.

Для алюминиевой пластинки, погруженной в воду, нами были выполнены по этим формулам численные оценки коэффициента затухания  $k_2 \lambda_t$  и относительного изменения скорости для волн  $s_0$  и  $a_1$ . Для волны  $s_0$  при малых толщинах пластинки, когда  $\bar{d} \rightarrow 0$ , затухание и изменение скорости ничтожно малы и стремятся к нулю, а именно:  $k_2 \lambda_t = -0,028\bar{d}$ ,  $\Delta c/c = -0,0005\bar{d}^2$ . При толщине пластинки  $\bar{d} = 2,05$  коэффициент затухания для волны  $s_0$  сильно возрастает и становится равным  $-0,232$  (волна затухает в  $e$  раз на пути  $\simeq 5\lambda_t$ ), а относительное изменение скорости составляет  $-0,0162$ , т. е. примерно  $1,5\%$ . При толщине  $\bar{d} \gg 1$  коэффициенты затухания и изменение скорости для волн  $s_0$  и  $a_0$  стремятся к соответствующим величинам для рэлеевской волны (см. § 6 гл. I). Для волны  $a_1$  вблизи критического значения  $\bar{d}$ , когда фазовая скорость еще довольно велика и в 4 раза превосходит  $c_t$ , коэффициент  $k_2 \lambda_t$  равен  $-0,047$  (волна затухает в  $e$  раз на пути  $\simeq 20\lambda_t$ ), а относительное изменение скорости составляет  $0,00011$ , т. е.  $\simeq 0,01\%$ . Для стальной пластинки, погруженной в воду, значения коэффициента затухания при тех же величинах  $\bar{d}$  примерно в 3 раза меньше [52].

Влияние жидкости на волну  $a_0$ , фазовая скорость которой (в отличие от всех других волн) стремится к нулю при  $\omega \rightarrow 0$  (т. е. для тонкой пластинки) и к  $c_R$  при  $\omega \rightarrow \infty$ , подробно рассмотрено в работе [50] и сводится к следующему. При частотах ниже некоторой критической частоты  $\omega_k$  (величина  $\omega_k$  несколько больше величины той частоты, при которой скорость изгибных волн в свободной пластинке равна  $c_{ж}$ ) влияние жидкости сводится к эффекту присоединенной

массы, и скорость изгибных волн при этом несколько меньше скорости изгибных волн в свободной пластинке. При  $\omega > \omega_k$  в пластинке может существовать вторая изгибная волна, распространение которой связано с излучением пластинки в жидкость. При  $\omega = \omega_k$  фазовая скорость излучающей изгибной волны больше скорости  $c_{ж}$  и скорости изгибной волны в свободной пластинке, а при  $\omega \rightarrow \infty$  стремится к последней. Неизлучающая изгибная волна тоже может существовать при  $\omega > \omega_k$ , причем ее фазовая скорость с увеличением частоты асимптотически стремится к скорости  $c_{ж}$  волны в жидкости, оставаясь меньше последней. При  $\omega = \omega_k$  граничные импедансы излучающей и неизлучающей изгибных волн равны, а при  $\omega > \omega_k$  импеданс излучающей волны становится существенно меньше импеданса неизлучающей, поэтому при  $\omega > \omega_k$  излучающая волна должна возбуждаться сильнее неизлучающей.

Отметим в заключение, что затухание волн Лэмба разных номеров из-за излучения в жидкость существенным образом зависит от отношения вертикальной компоненты поверхностного смещения к горизонтальной в волне рассматриваемого номера [51]. Затухание максимально, когда максимальна вертикальная компонента поверхностного смещения, и вообще отсутствует, когда вертикальное поверхностное смещение равно нулю, т. е., например, при  $c \rightarrow c_l$ ,  $q \rightarrow 0$  для симметричных волн. Это означает, что если волна Лэмба появляется как продольная, то в критической области она затухает очень сильно, если же волна появляется как поперечная, то затухание, напротив, очень мало. При больших толщинах пластинок, когда поверхностные смещения в волнах Лэмба по сравнению с объемными стремятся к нулю (см. § 4 настоящей главы), затухание из-за излучения в жидкость также стремится к нулю. Поэтому на практике для достижения дальнего распространения волн Лэмба в пластинках, окруженных жидкостью, нужно выбирать толщины, частоты и номера волн Лэмба так, чтобы отношение  $\hat{W}_{s,a} / \hat{U}_{s,a}$  на поверхности пластинки было по возможности минимальным.

ПРИМЕНЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ  
ВОЛН РЭЛЕЯ И ЛЭМБА

---

§ 1. Новые технические возможности,  
открываемые ультразвуковыми  
волнами Рэля и Лэмба

Использование ультразвуковых волн Рэля и Лэмба в технике позволило решить ряд важных практических задач. Прежде всего это относится к ультразвуковой дефектоскопии. Раньше ультразвуковой контроль материалов и изделий осуществлялся только двумя типами волн — продольными и поперечными. Однако условием применимости этих волн является условие, что все размеры исследуемых тел намного больше длины волны. Это ограничение не позволяло производить ультразвуковой контроль тонкостенных материалов и конструкций, а также контроль поверхностного слоя образца. Последнее было связано с тем, что в самом распространенном методе ультразвуковой дефектоскопии — импульсном — отражения от дефектов поверхностного слоя образца неизбежно маскировались отражениями от поверхности из-за ограниченной разрешающей способности дефектоскопа. Поэтому тонкостенные детали, поверхности и поверхностные слои образцов приходилось испытывать другими методами неразрушающего контроля: магнитным, рентгеновским, люминесцентным.

С внедрением в ультразвуковую дефектоскопию рэлеевских волн, распространяющихся в поверхностном слое образца, и волн Лэмба, распространяющихся в тонкостенных деталях, указанные ограничения ультразвукового метода контроля отпали, и он стал универсальным, т. е. применимым к деталям и образцам любой формы и



из любого материала. Это позволило занять ультразвуковой дефектоскопии первое место среди методов неразрушающего контроля.

Большие перспективы открыло применение волн Рэлея и Лэмба для ультразвуковых линий задержки. Раньше, когда в таких линиях использовались только объемные (продольные и поперечные) волны, конструкции линий были довольно громоздки и представляли собой стержни или многоугольные параллелепипеды из металла, плавленого кварца или монокристалла. Электрический сигнал поступал на вход линии, преобразовывался в ультразвуковой, распространяющийся в звукопроводе (стержне или параллелепипеде), а затем (на выходе) снова в электрический. Возможность плавного изменения задержки сигнала отсутствовала.

Ультразвуковые волны Рэлея и Лэмба позволили создать линии задержки с плавной регулировкой задержки сигнала, что осуществляется помещением приемника на поверхности звукопровода и перемещением его по ней. Кроме того, вследствие локализации волн Рэлея и Лэмба в тонком слое твердого тела стало возможным существенно сократить габариты ультразвуковых линий задержки; например, звукопроводы стали изготавливать в виде металлических лент. И, наконец, что самое главное, использование волн Лэмба, обладающих дисперсией групповых скоростей, позволило создать принципиально новый тип ультразвуковой линии задержки — линию с зависимостью времени задержки от частоты (так называемую дисперсионную). Такая линия, как будет описано в § 3 настоящей главы, позволила, например, увеличить дальность действия радарных установок.

Третьей технически перспективной областью применения является использование ультразвуковых волн Рэлея для всестороннего неразрушающего контроля поверхностного слоя образца (определение степени и глубины термической закалки, остаточных механических напряжений, качества обработки поверхности и т. д.). Дело в том, что скорость, затухание и структура рэлеевской волны неразрывно связаны с механическими, термическими и прочими характеристиками поверхностного слоя образца, в котором она распространяется. Поэтому по скорости и затуханию рэлеевской волны можно получать информацию о состоянии поверхностного слоя образца.

Об этих трех основных областях применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба и будет несколько подробнее рассказано в последующих параграфах.

## § 2. Применение в ультразвуковой дефектоскопии

### *а) Обнаружение поверхностных и околоповерхностных дефектов*

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, рэлеевские волны открыли новую возможность ультразвуковой дефектоскопии — контроль дефектов поверхности и поверхностного слоя материала и готовых изделий. Как известно, глубина слоя локализации рэлеевской волны составляет  $\lambda_R \rightarrow 2\lambda_R$ , где  $\lambda_R$  — длина рэлеевской волны поэтому для контроля ультразвуковыми рэлеевскими волнами доступен околоповерхностный слой этой толщины. При используемых в ультразвуковой дефектоскопии частотах 0,5—10 Мгц примерные значения контролируемых толщин поверхностного слоя составляют 0,3—6 мм.

В § 3 гл. I было показано, что коэффициент затухания рэлеевских волн из-за поглощения и рассеяния в материале является линейной комбинацией из соответствующих коэффициентов продольных и поперечных волн, т. е. затухание поверхностных рэлеевских волн не больше, чем затухание объемных (продольных и поперечных) волн. Но рэлеевские волны, в отличие от объемных, распространяются не в толще материала, а по его поверхности, поэтому амплитуда ультразвуковых рэлеевских волн убывает с расстоянием  $R$  из-за расхождения пучка как  $1/\sqrt{R}$ , а не как  $1/R$ , что имеет место для объемных волн. Вследствие этого ультразвуковые рэлеевские волны могут распространяться на существенно большие расстояния, чем продольные и поперечные волны в тех же материалах. Поэтому для контроля ультразвуковыми рэлеевскими волнами доступны практически твердые материалы как с малым, так и с большим затуханием ультразвука.

При контроле образцов рэлеевскими волнами обычно применяется контактный вариант импульсного эхо-метода [6, 7, 52—56], при котором дефекты обнаруживаются

по отраженному от них импульсу (эхо). Благодаря отмеченной способности рэлеевских волн распространяться на большие расстояния, при таком методе контроля излучаемый источником пучок рэлеевских волн «прозвучивает» (в пределах своей диаграммы направленности) сразу большой участок поверхностного слоя контролируемого изделия. В работе [7], например, отмечается, что в металлической балке дефект размером 0,025 мм был уверенно обнаружен при помощи рэлеевских волн, когда он находился на расстоянии 4 м от излучателя.

Импульсный эхо-метод контроля возможно осуществить еще в иммерсионном варианте, т. е. при погружении контролируемой детали в ванну с жидкостью и излучении ультразвуковых волн в жидкость с последующим преобразованием их в рэлеевские волны в детали. При таком способе контроля устраняется трудность создания стабильного и надежного акустического контакта между излучателем рэлеевских волн (который в процессе контроля должен помещаться в разные участки детали) и самой деталью. Поэтому иммерсионный вариант контроля очень удобен для автоматического контроля деталей. Однако, как было показано в § 6 гл. I, рэлеевские волны на границе жидкости и твердого тела затухают из-за излучения энергии в жидкость и эффективный радиус их распространения составляет в среднем десять длин волн. Вследствие этого при иммерсионном варианте контроля рэлеевскими волнами необходимо осуществлять контроль детали «по частям», последовательно перемещая излучатель в ванне над всеми участками детали. По-видимому, из-за этого иммерсионный вариант контроля рэлеевскими волнами не получил широкого распространения.

Для возбуждения рэлеевских волн при контроле контактным вариантом эхо-метода, как правило, используется метод клина. На рис. 49 изображены образцы клиновых головок (щупов) для излучения и приема ультразвуковых рэлеевских волн. Головки в случае *a* и *б*, фотографии которых взяты из монографии [55], имеют постоянный угол наклона и пригодны для контроля образцов из какого-либо одного материала или из разных материалов, но с одинаковой скоростью  $c_R$  рэлеевских волн в них. Головка в случае *a* имеет две рифленые грани для рассеяния энергии пучков волн, отраженных от границы щуп — образец (т. е. той части ультразвуковой

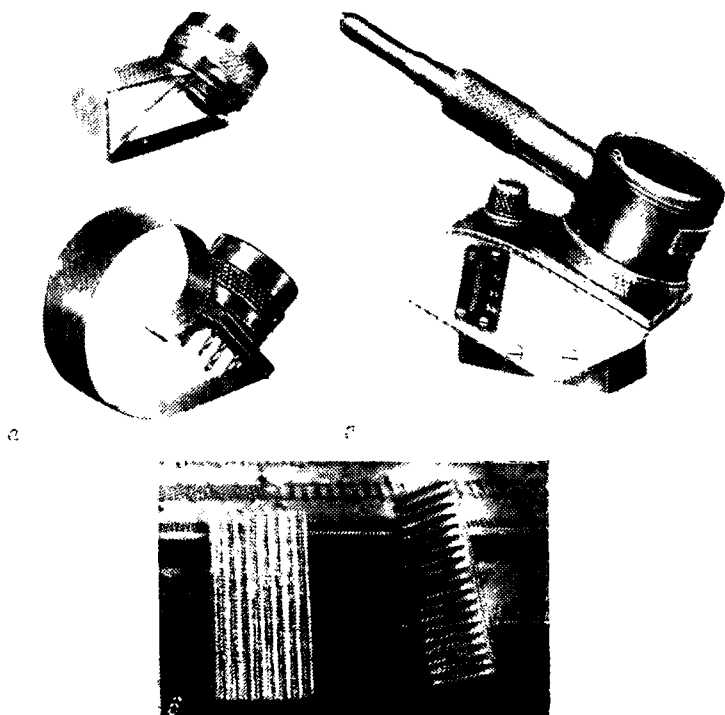


Рис 49

энергии, излученной пьезопластинкой, которая не преобразовалась в энергию поверхностных рэлеевских волн). Головка в случае *б* имеет специальную «улиточную» ловушку для отраженных от поверхности щуп — образец волн, в которой ультразвуковые пучки многократно отражаются и затухают. В головке в случае *в* фирмы «Лефельд» [56] предусмотрена возможность изменения угла наклона клина в пределах  $25\text{—}55^\circ$ , что позволяет использовать ее для контроля широкого класса материалов, каждый раз производя настройку на угол оптимального излучения и приема рэлеевских волн в испытуемом материале

В § 2 гл I было показано, что амплитуда возбужденной рэлеевской волны очень сильно зависит от угла наклона клинового излучателя, поэтому возможность плавного изменения угла клинового преобразователя существенно повышает эффективность его работы как при излучении, так и при приеме. Изменение угла наклона клина можно достигнуть, помещая излучающую пьезопластинку *1* на специальный ползун, который имеет акустический контакт с круговым сектором (рис 50, *а*), мо-

жет перемещаться по нему и закрепляться в любом положении на нем. Такая конструкция была использована нами при исследовании методов возбуждения рэлеевских волн (см. § 2 гл. I). Кроме того, можно поместить излучающую пьезопластинку на цилиндр или на цилиндрический сегмент (рис 50, б), которые вставлены в клин и имеют с ним акустический контакт. Вращая цилиндр или

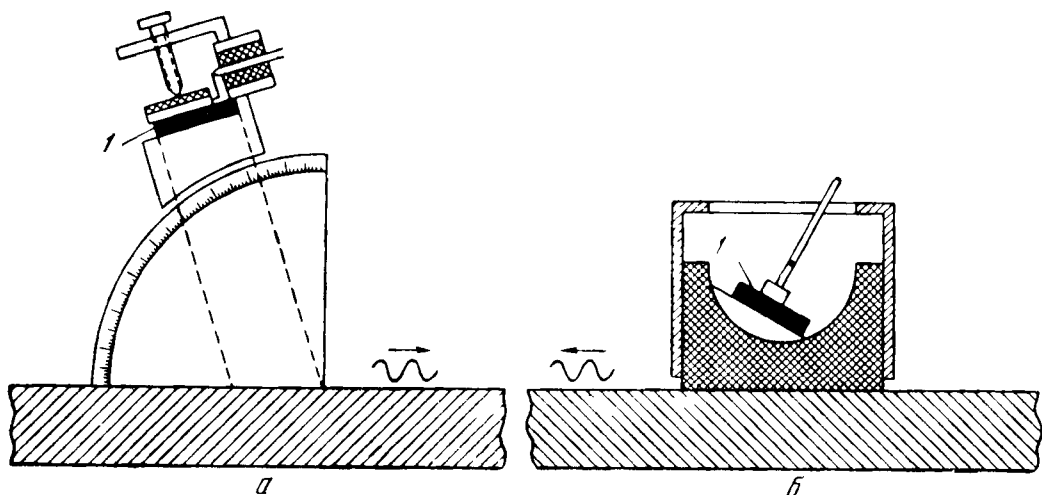


Рис 50

сегмент вокруг оси, можно изменять угол наклона пучка продольных волн, падающих на границу клин — образец, в широких пределах. Возможны и другие конструкции клиновых преобразователей с переменным углом.

При контроле рэлеевскими волнами дефектов поверхностного слоя в изделиях и материалах с малой скоростью звука (пластмассы, резины и т. д.) для излучения и приема рэлеевских волн удобно использовать метод гребенчатой структуры, подробно описанный в § 2 гл. I. Гребенчатая структура проще всего может быть реализована в виде пластинки гребенчатого профиля с периодическим чередованием пазов и выступов, расстояние между которыми равно половине длины рэлеевской волны в испытуемом материале, и излучающей (приемной) пьезопластинки, контактирующей акустически с пластинкой гребенчатого профиля. Пластинка гребенчатого профиля изготавливается обычно из металла. На рис. 49, г приведены фотографии двух таких пластинок, сделанных из дюрала.

В гл. I было показано, что на сферической и выпуклой цилиндрической поверхностях рэлеевские волны распространяются с тем же затуханием, что и на плоских поверхностях. Кривизна поверхности лишь изменяет фазовую скорость волны. На вогнутой цилиндрической поверхности рэлеевские волны затухают сильнее, чем на плоской, из-за дополнительного излучения энергии волны в глубь твердого тела. Затухание существенно при малых радиусах кривизны:  $R \approx \lambda_R$ . При  $R > 30\lambda_R$  это затухание практически отсутствует.

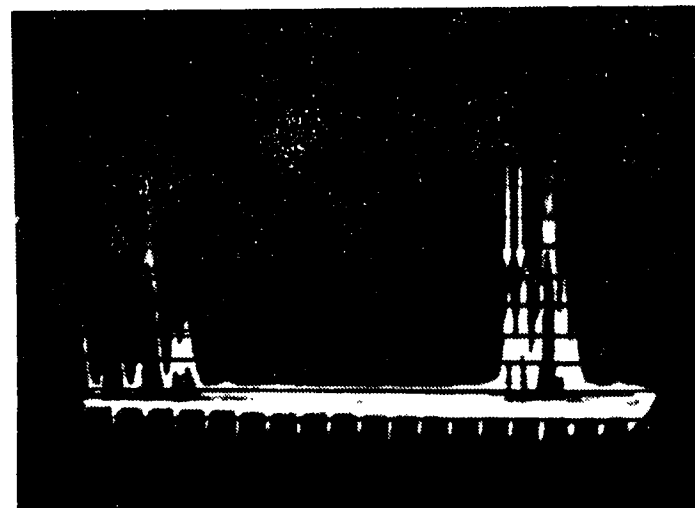
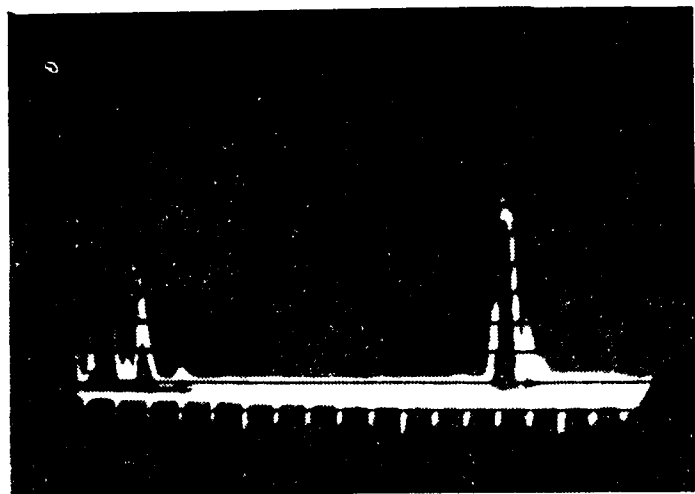
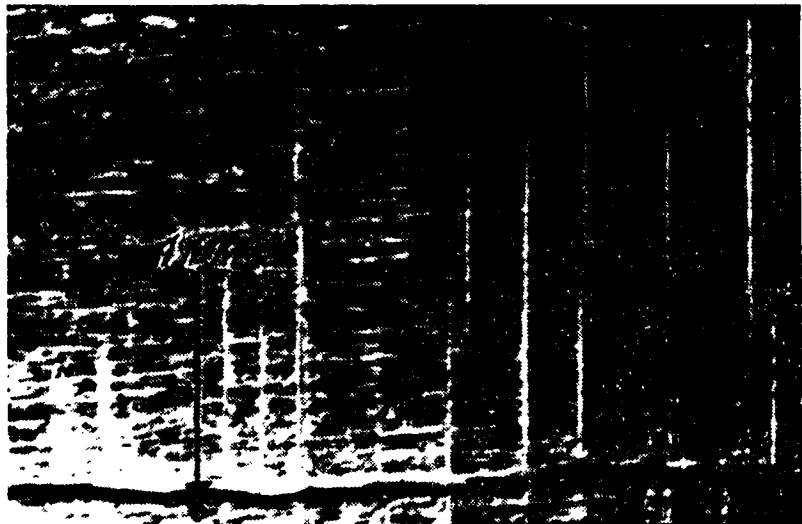
Если две плоские поверхности образуют двугранный угол с острой кромкой, то при любом растворе угла  $\theta$  рэлеевская волна, распространяющаяся по одной грани, проходит на вторую грань, частично отражаясь от кромки. Коэффициент прохождения волны, характеризующий экранирующую способность кромки, зависит от угла  $\theta$  и материала твердого тела. Если между гранями сделано закругление, то прохождение рэлеевских волн с одной грани на другую существенно улучшается. При увеличении радиуса закругления от нуля до  $2\lambda_R$  коэффициент прохождения, осциллируя, возрастает до единицы, а коэффициент отражения, осциллируя, уменьшается до нуля. При радиусе закругления  $r > 2\lambda_R$  наступает полное прохождение рэлеевских волн через закругление.

Перечисленные результаты исследований позволяют сделать вывод, что рэлеевская волна может распространяться практически по поверхности любой формы, поскольку любую сложную поверхность можно «разложить» на отдельные элементы, состоящие из плоских участков поверхности, из участков с цилиндрической и сферической кривизной и из двугранных поверхностей с острой или скругленной кромкой между ними.

Эти результаты физических исследований полностью используются и подтверждаются на практике. Рэлеевские волны применяются для контроля дефектов поверхности и поверхностного слоя образцов и деталей всевозможной формы: стержней, балок, пружин, проволок [7, 10], колеччатых валов тракторов [55], сплошных и полых круглых изделий [58, 59] и т. д. Такая универсальность формы контролируемых образцов — одно из важных преимуществ поверхностных рэлеевских волн по сравнению с объемными волнами.

При помощи рэлеевских волн выявляются все виды дефектов поверхности и поверхностного слоя: трещины, царапины поверхности, пустотные полости, расслоения, инородные включения и т. д. В § 7 гл. I были рассмотрены отражательные способности моделей основных поверхностных дефектов. Из этого рассмотрения можно сделать вывод, что в среднем дефект отражает рэлеевские волны, как идеальный отражатель половинного (по отношению к дефекту) среднего размера, т. е. весьма интенсивно. Отражательная способность околоповерхностных дефектов падает примерно экспоненциально по мере удаления дефекта от поверхности [6]. Укажем, что отражение рэлеевских волн от поверхностных дефектов гораздо больше, чем отражение продольных и поперечных волн от объемных дефектов того же размера. Данное обстоятельство объясняется тем, что пучок ультразвуковых рэлеевских волн всегда имеет «толщину»  $\lambda_R - 2\lambda_R$  и, таким образом, околоповерхностный дефект размера  $\lambda_R$  по глубине (например, трещина) перекроет пучок по всей толщине, создавая сильное отражение. Пучок объемных волн в любом направлении всегда шире  $\lambda - 2\lambda_R$  и поэтому отражается от дефекта такого же размера значительно слабее.

Из-за большой отражательной способности рэлеевских волн их часто используют для прецизионного контроля мелких дефектов, например, усталостных трещин и микротрещин в металлах [60—62]. Очень часто этот контроль осуществляется непрерывно и позволяет проследить за трещиной с момента ее зарождения до полного развития. На рис. 51 изображены взятые из работы [62] фотографии усталостных микротрещин на поверхности стальной пластинки и осциллограммы. Верхняя фотография — вид сверху (под микроскопом при увеличении в 60 раз), нижняя — поперечный разрез трещины (увеличение в 300 раз). Верхняя осциллограмма относится к пластинке без трещин (они еще не появились): начальные пики — это запускающий импульс, конечный пик — отражение от кромки пластинки. Нижняя осциллограмма соответствует той же пластинке, у кромки которой образовались усталостные трещины, изображенные на фотографиях. Отражения от них показаны стрелками.





## б) Обнаружение дефектов в листах и трубах

Если применение рэлеевских волн в ультразвуковой дефектоскопии позволило осуществить ультразвуковой контроль поверхности и поверхностного слоя материалов и образцов, то применение ультразвуковых волн Лэмба обогатило ультразвуковую дефектоскопию возможностью контролировать листовые материалы и конструкции. Обычно волны Лэмба используются для контроля металлических листов, но, вообще говоря, на материал листа не накладывается никаких ограничений, поскольку, как было указано в § 5 гл. II, волны Лэмба легко возбудить в пластинке из любого материала, а дальность их распространения существенно больше дальности распространения объемных волн (как и рэлеевские, волны Лэмба расходятся в двух измерениях, благодаря чему их амплитуда убывает из-за расхождения пропорционально  $1/\sqrt{R}$ , где  $R$  — расстояние от излучателя, а не как  $1/R$ , что имеет место для объемных волн). Единственным ограничением является примерное постоянство толщины контролируемого листа.

При используемых в практике ультразвуковой дефектоскопии частотах в диапазоне 0,5—10 Мгц примерный диапазон толщин контролируемых металлических листов составляет 0,3—25 мм. Для контроля листов толщиной меньше 1,5 мм, как правило, применяются волны  $s_0$  и  $a_0$  [40, 63, 64], а для контроля более толстых листов — волны  $s_1$ ,  $a_1$ ,  $s_2$ ,  $a_2$  и т. д. [65, 66].

Обнаружение дефектов в листах волнами Лэмба производится с использованием обоих методов ультразвуковой дефектоскопии — эхо-метода и теневого. При контроле дефектов эхо-методом излучатель (он же приемник; 1 на схеме рис. 52) волн Лэмба перемещается вдоль одной кромки листа (2). Если между этой кромкой и противоположной на пути ультразвукового пучка нет дефектов, то на экране индикатора видны только два пика (в начале и конце развертки), соответствующие затухающему импульсу и отражению от противоположной кромки. Если же на пути пучка между кромками имеется дефект (3), то между двумя указанными пиками появляется третий, обусловленный отражением от него (рис. 52).

При контроле теневым методом излучатель и приемник располагаются у противоположных кромок листа друг против друга и перемещаются синхронно (вручную или автоматически) параллельно кромкам. Когда на пути между излучателем и приемником появляется дефект, амплитуда сигнала на индикаторе уменьшается. Теневой метод более удобен для автоматического контроля, чем

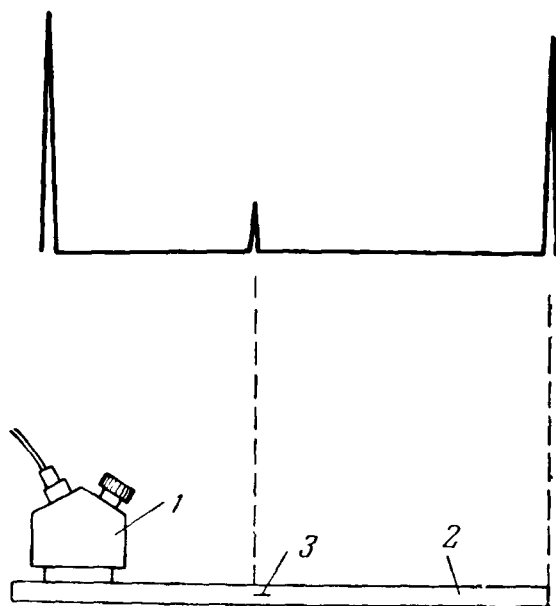


Рис 52

эхо-метод, но чувствительность его меньше чувствительности эхо-метода; поэтому им можно обнаруживать только протяженные дефекты, например расслоения в листе.

И теневой, и эхо-метод обнаружения дефектов в листах волнами Лэмба применяется как в контактном, так и в иммерсионном вариантах. При контактном варианте контроля лист находится в воздухе, а при иммерсионном варианте он погружается в ванну с водой (или другой жидкостью), и излучение ультразвуковых волн происходит сначала в воду с последующим преобразованием этих волн в волны Лэмба в листе.

На рис 53 показана автоматическая установка фирмы «Лефельд» для испытания листового материала, из которого изготавливаются кузова легковых автомобилей. При помощи этой установки стальные листы толщиной 0,8 мм испытываются волнами Лэмба с целью обнаружения складок и посторонних вкраплений. Контроль про-

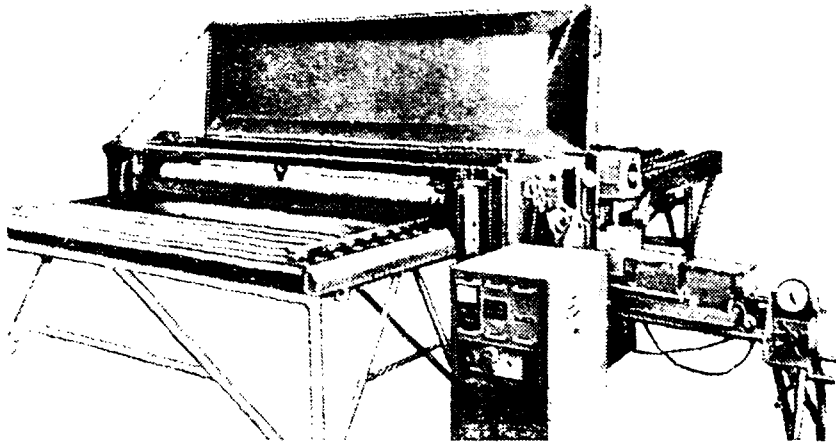
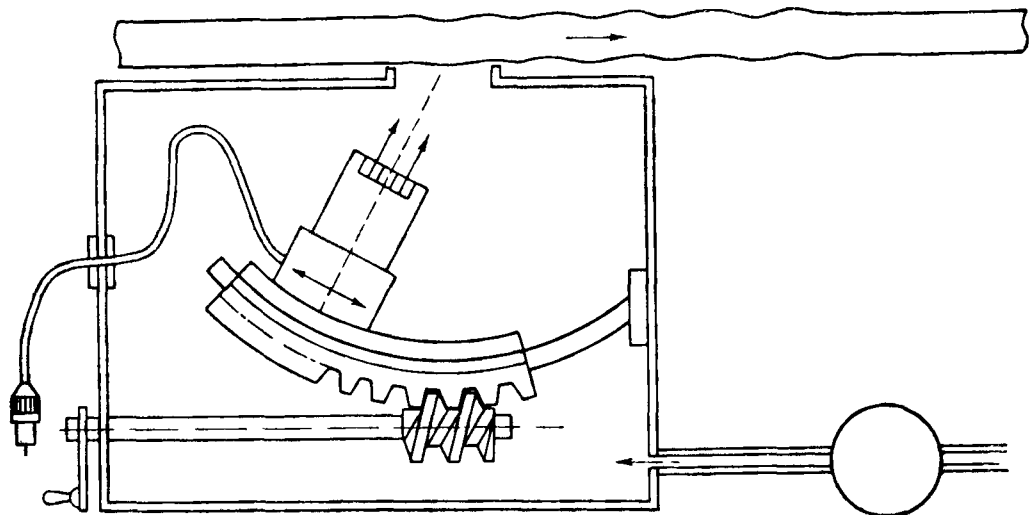


Рис 53

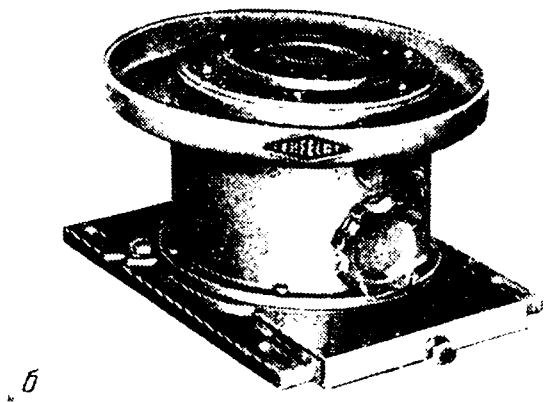
изводится контактным вариантом эхо-метода со скоростью 1 м/сек Управление сортировочным устройством осуществляется автоматически, причем бездефектный материал автоматически отделяется от дефектного.

Для излучения и приема волн Лэмба при промышленном контроле материалов применяется метод клина. Клиновые излучатели (щупы) имеют такие же конструкции, как для контроля рэлеевскими волнами (рис 49). Обычно используется щуп с переменным углом. Изменением угла достигается возможность преимущественного возбуждения в контролируемом образце только одной волны Лэмба, что упрощает контроль. Часто и в иммерсионном, и в контактном вариантах автоматического контроля применяется модификация клинового щупа с переменным углом, в которой клин заменяется столбом жидкости между излучающей пьезопластинкой и контролируемым изделием. Схема и фотография одного такого щупа, взятые из работы [56], изображены на рис. 54. Щуп накладывается снизу на испытываемый образец, причем жидкость имеет два назначения: во-первых, она служит в качестве среды для распространения продольных волн, излучаемых пьезопластинкой, во-вторых, создает акустический контакт этой среды с образцом. В целях обеспечения надежного акустического контакта щуп снабжен насосом, подающим такое количество жидкости, чтобы она непрерывно протекала и смачивала испытываемый образец в месте его соприкосновения со щупом.

Протекающую жидкость можно снова улавливать в круглую ванну, смонтированную вокруг щупа, и опять использовать.



*a*



*б*

Рис. 54

Ультразвуковыми волнами Лэмба можно выявлять самые разнообразные дефекты листового материала: трещины, пустотные полости, инородные включения, дефекты сварного шва, расслоения и т. д. Для контроля поверхности и поверхностного слоя следует использовать волны  $s_0$  и  $a_0$ , в которых, как было показано в § 4 гл. II, движение локализовано у поверхностей листа, а для контроля толщи — волны высших номеров,

Мелкие трещины и полости, инородные включения, дефекты сварного шва обнаруживаются эхо-методом [40, 56, 64]. В работе [64] описано выявление неметаллических включений в стальных листах толщиной 4 мм — включения размером 1 мм<sup>2</sup> и более надежно выявлялись

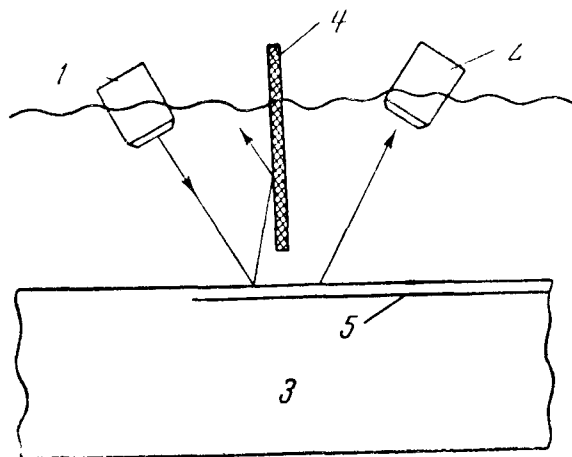


Рис. 55

в радиусе 1 м от излучателя. Протяженные трещины вызывают значительное ослабление амплитуды волны Лэмба, прошедшей через них, поэтому иногда их обнаруживают теневым методом. Возможность обнаружения трещин теневым методом определяется размером трещины и чувствительностью аппаратуры. В работе [67] исследовано ослабляющее действие трещин различных глубин на поверхностях металлической пластинки. Расслоения, как правило, контролируются теневым методом.

Интересно отметить, что волнами Лэмба можно контролировать расслоения и зоны нарушения сцепления в материале не только в листах, но и в поверхностном слое всевозможных толстых образцов [41]. На рис. 55 показана схема контроля качества сцепления поверхностного слоя с толщей металла. Излучатель (1) и приемник (2) помещаются в жидкости по одну сторону контролируемого изделия (3) и разделяются звуконепропускаемым экраном (4), препятствующим прохождению ультразвуковых волн непосредственно через жидкость. Если в изделии имеются зоны неприставания поверхностного слоя, то в отставшем слое (5), в результате попадания на него из жидкости продольных ультразвуковых волн, возникают

волны Лэмба, которые, распространяясь по слою, создают новую серию продольных волн, излучаемых в жидкость и улавливаемых приемником. В случае плотного сцепления поверхностного слоя с основным металлом волны Лэмба не возбуждаются и сигнал на приемник не попадает. Таким образом, в отличие от обычных применений теневого метода, дефект вызывает не уменьшение, а появление сигнала. Подобным же способом выявляются зоны нарушения сцепления между тонкой ( $\approx 1$  мм) алюминиевой оболочкой и урановым стержнем в топливных элементах атомных реакторов [41].

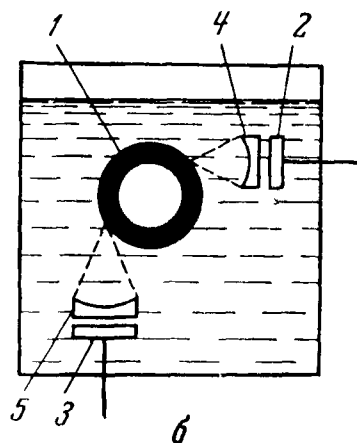
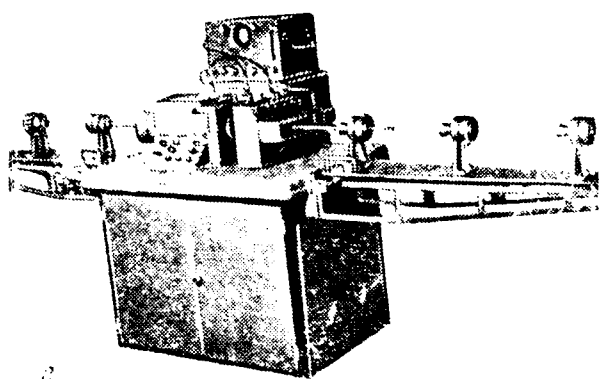


Рис. 56

Как было показано в § 9 гл. II, волны Лэмба могут возникать и распространяться в цилиндрическом слое любого радиуса кривизны. При этом их затухание с расстоянием такое же, как в плоском слое. Поэтому волнами Лэмба можно контролировать не только листы и листовые конструкции, но и трубы, причем все основные особенности и методики контроля листов переносятся и на контроль труб. Контроль труб волнами Лэмба очень широко используется на практике [38, 68, 69]. Чаще всего контроль осуществляется иммерсионными вариантами теневого и эхо-методов. Волны Лэмба распространяются по окружности трубы перпендикулярно образующей цилиндрической поверхности трубы. Перемещая приемник и излучатель вдоль трубы, можно участок за участком «прозвучить» всю трубу.

На рис. 56 изображен общий вид (а) и схема (б)

ультразвуковой части установки для непрерывного заводского контроля труб, выполненной в ЦНИИТМАШ [69]. Установка позволяет производить автоматический контроль труб из широкого класса материалов и сплавов диаметром от 8 до 60 мм и длиной 3 м и более. Скорость контроля 1 м в минуту. Выявляются дефекты (трещины, риски, закаты, расслоения, включения и т. д.), расположенные на наружной и внутренней поверхности и в толще стенки трубы. Контролируемый участок трубы (1, на рис. 56) находится в ванне с жидкостью, в которую погружены щупы (2, 3) с фокусирующими насадками (4, 5). Пучки ультразвуковых импульсов, создаваемые пьезопластинками щупов, пройдя слой жидкости, фокусируются на поверхности трубы и возбуждают в ней волны Лэмба. Эти волны, отражаясь от дефектов, возвращаются обратно в щупы, которые в паузах между посылками служат приемниками. В конструкции установки предусмотрена простая возможность увеличения скорости контроля в 3—5 раз.

### *в) Обнаружение дефектов в тонкостенных изделиях сложной формы*

Ультразвуковыми волнами Лэмба и Рэлея можно обнаружить дефекты не только в листах и трубах, но и в тонкостенных изделиях и конструкциях более сложной формы [70]. К их числу относятся корпуса судов (в которых особенно важно бывает проконтролировать сварные швы), прессованные профили различных судовых, самолетных и автомобильных конструкций. Методики контроля этих сложных деталей остаются такими же, как при контроле листов и труб. Если толщина детали примерно постоянна, то для контроля можно применять оба типа волн, если же толщина меняется от точки к точке, то можно контролировать лишь поверхностные слои детали с помощью рэлеевских волн.

Особенно широкое распространение получил контроль волнами Лэмба и Рэлея лопаток газовых турбин, кожухов камер сгорания и других тонкостенных самолетных деталей [39, 71, 72]. Этот контроль производят без разборки двигателя, непосредственно на аэродромах, что дает значительный экономический эффект и повышает надежность работы двигателей. В работах [71, 72]

описывается методика такого контроля и устройство специально созданного для этих целей малогабаритного переносного дефектоскопа.

Контроль лопаток турбин (рис. 57) производится главным образом со стороны их кромок, где появление трещин и других дефектов наиболее опасно. Контроль осуществляется ультразвуковыми рэлеевскими волнами с использованием контактного варианта импульсного эхометода. Излучающий и приемный щуп (2) для удобства

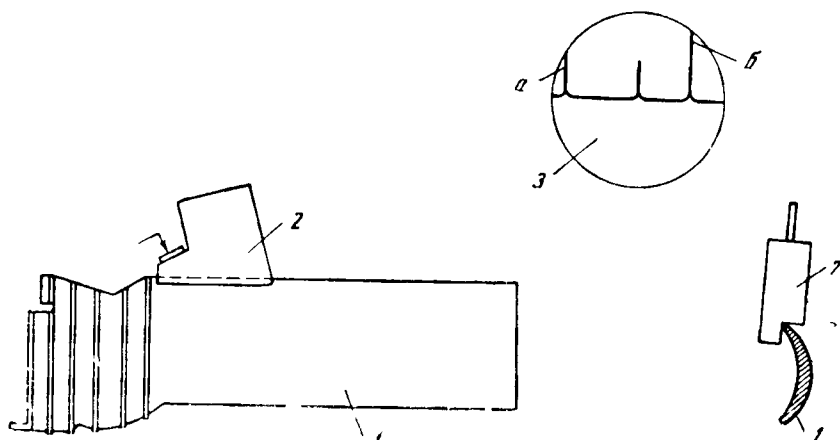


Рис. 57

прижима к перу лопатки (1) имеет специальную ступенчатую контактную поверхность. Контроль производится двумя операторами. Один из них, лежа в выхлопной трубе, прикладывает щуп к кромкам лопатки, а второй наблюдает за характером осциллограмм на экране дефектоскопа (3). На контактную поверхность щупа наносится тонкий слой масла и щуп прикладывается к выходной кромке у замка так, чтобы ультразвуковые волны были направлены на другой конец лопатки (рис. 57). Появление эхо-сигнала между начальным *a* и конечным *b* (соответствующим отражению от конца лопатки) импульсами на экране дефектоскопа свидетельствует о наличии дефекта, которым могут быть сквозные трещины глубиной от 0,5 мм и более, начинающиеся от кромки и распространяющиеся поперек пера лопатки, микрорастрескивания поверхностного слоя материала лопатки, коррозионные поражения материала, глубокие риски на кромке лопатки, мелкие внутренние подповерхностные



дефекты и т. д. Опыт показал большую эффективность ультразвукового метода контроля лопаток турбин, о чем свидетельствует резкое уменьшение случаев обрыва лопаток по проточной части.

Ультразвуковой контроль кожухов камер сгорания двигателей самолетов производится волнами Лэмба с использованием контактного варианта эхо-метода. Кожух камер сгорания (рис. 58) представляет собой тонкостенную трубу (1) толщиной 1,2 мм. Усталостные трещины, приводящие к разрушению кожуха, образуются обычно на его участке, имеющем форму усеченного конуса.

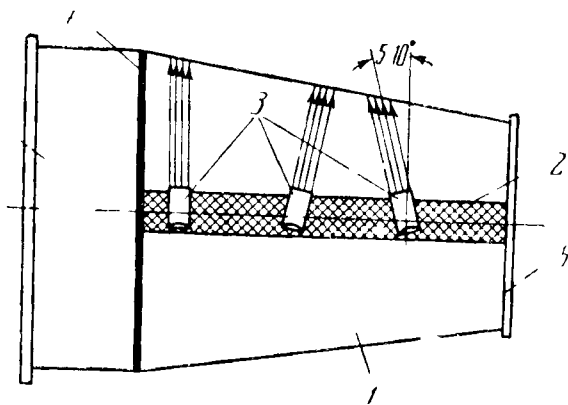


Рис. 58

Для их обнаружения на наружную поверхность кожуха наносится тонкий слой масла в виде направленной по образующей полосы (2). Клиновый щуп (3) прикладывается к кожуху так, чтобы ультразвуковые волны Лэмба были направлены по окружности кожуха, и последовательно перемещается при контроле вдоль контактной полосы смазки (на рис. 58 показаны три положения щупа). В процессе контроля щуп поворачивают на 5—10° от первоначального положения, что улучшает поиск дефектов. При наличии в кожухе дефекта на экране дефектоскопа появляется импульс. Концевого импульса в данной методике контроля не существует, поэтому для проверки исправности щупа его необходимо время от времени направлять на сварной шов (4) или уплотнительное кольцо (5) кожуха для получения отраженного сигнала от них. Испытания показали, что описанная методика контроля позволяет выявлять не только усталостные трещины, но и риски, закаты, неметаллические включения и т. д.

### § 3. Применение в ультразвуковых линиях задержки

В § 1 данной главы отмечалось, что применение ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в линиях задержки позволило создать новые типы таких устройств, а именно: дисперсионные, многоотводные линии задержки и линии с плавной регулировкой времени задержки. Кроме того, благодаря локализации этих волн не в объеме твердого

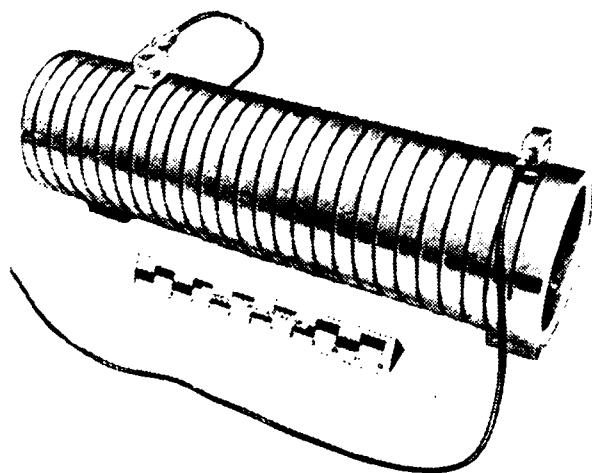


Рис. 59

тела, а в слое, линии задержки на волнах Рэлея и Лэмба значительно выигрывают в габаритах по сравнению с ультразвуковыми линиями задержки на объемных волнах.

Простейшая конструкция ультразвуковой линии задержки на рэлеевских волнах с широким интервалом времени задержки описана в работе [73]. Линия представляет собой полый алюминиевый цилиндр со спиральной дорожкой на его внешней поверхности (рис. 59). Внешний диаметр цилиндра 15,2 см, длина 61 см, остальные размеры (в дюймах) можно видеть на рис. 59. Рэлеевские волны распространяются вдоль спиральной дорожки. Излучение и прием волн осуществляются плексиглазовыми клиновыми преобразователями, причем излучающий преобразователь закрепляется неподвижно, а приемный — может помещаться в любое место на спиральной

дорожке. Благодаря этому время задержки может плавно изменяться от нескольких *мксек* до 6 *мсек*. Акустический контакт преобразователей с поверхностью цилиндра осуществляется масляной пленкой. На частоте 0,9 *Мгц* при относительной ширине полосы пропускания 15% и при задержке 100 *мксек* двойной коэффициент преобразования электрического импульса в акустический и обратно составляет  $\approx 30$  *дб*. Коэффициент внутренних потерь в линии из-за поглощения и рассеяния ультразвуковых рэлеевских волн в алюминии составляет 1,5 *дб* на 1 *мсек* задержки. Уровень паразитных сигналов примерно на 30 *дб* ниже уровня основного сигнала.

Волны Лэмба обычно используются для создания дисперсионных ультразвуковых линий задержки. Особый интерес представляют так называемые линейные ультразвуковые линии задержки, в которых время задержки линейно зависит от частоты распространяющихся в линии волн Лэмба. Такие линии задержки широко используются в концентрирующих радарных устройствах [74, 75], т. е. системах для повышения дальности действия радара без уменьшения по разрешающей способности. В таких системах короткий лоцирующий импульс разлагается с помощью дисперсионной линии задержки в частотный спектр, каждая из компонент которого сдвинута по времени относительно другой. Каждая из компонент усиливается, и в результате весь импульс излучается как длинный частотно-модулированный цуг большой средней мощности. В приемнике сигнал проходит через другую цепь с линейной дисперсией, но противоположного наклона, которая восстанавливает импульс до его первоначальной короткой длительности. Таким образом, разрешающая способность радара не уменьшается, а мощность в импульсе значительно повышается.

Для создания линейной дисперсионной линии задержки обычно используется нулевая симметричная волна  $s_0$ , распространяющаяся в металлической полосе. Волна  $s_0$  имеет линейный участок зависимости времени задержки от частоты. Для иллюстрации на рис. 60, взятом из работы [76], изображена зависимость отношения  $c_t/c_s^{гp}$  (пропорционального времени задержки на единицу пути) от  $k_t d/\pi = 2df/c_t$ , где  $f$  — частота ультразвуковых колебаний. Из рис. 60 видно, что при изменении  $k_t d/\pi$  в области 0,6 — 0,8 кривая имеет примерно линейный участок.

Конструкция линейной дисперсионной ультразвуковой линии задержки, использующая в качестве распространяющегося ультразвукового сигнала импульс волны  $s_0$ , подробно описана в работах [76, 77]. Линия представляет собой полосу из алюминия толщиной 2,2 мм и

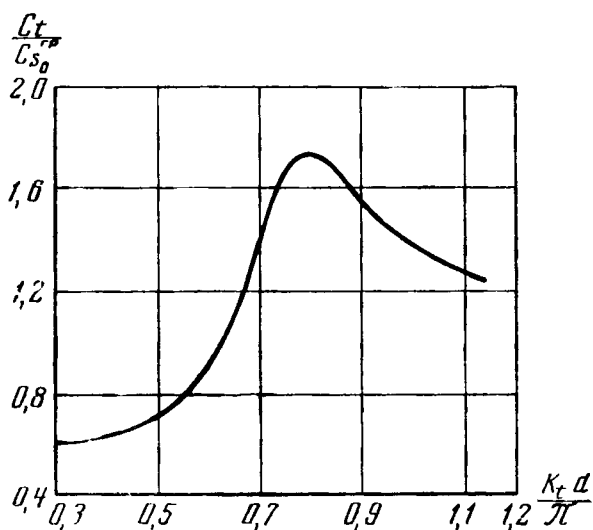


Рис. 60

длиной 142 см. На одном из торцов полосы (рис. 61) располагается прямоугольная излучающая пластинка 1 из керамики титаната бария, а на другом — аналогичная приемная пластинка. Излучающая пластинка, расположенная симметрично относительно центральной плоскости полосы, возбуждает в полосе импульс волны  $s_0$ , который распространяется вдоль полосы. Частота возбуждения составляет 1 мГц, а ширина полосы пропускания всего устройства — 0,1 мГц. Общая задержка сигнала, производимая линией, равна 633 мксек, а изменение задержки при изменении частоты в пределах линейного участка, составляет 200 мксек с отклонением от линейности  $\pm 3$  мксек. Средние потери из-за поглощения и рассеяния ультразвуковых волн в алюминии не превышают 15 дБ. Для уменьшения уровня ложных сигналов, появляющихся из-за расхождения пучка ультразвуковых волн в линии, а также для получения ровной полосы пропускания, одна из боковых кромок полосы и некоторые участки основной поверхности оклеены специальным поглотителем (2) ультразвуковых колебаний. Благодаря этому уровень паразитных сигналов на 40 дБ ниже уров-

ня основного сигнала. Ширина линии может быть довольно произвольной — в интервале ширины 20—40 мм задержка почти не зависит от ширины линии. Толщина линии должна быть выдержана постоянной довольно строго (до  $10^{-4} d$ ), иначе непостоянство толщины значительно увеличивает затухание ультразвуковых волн в линии.

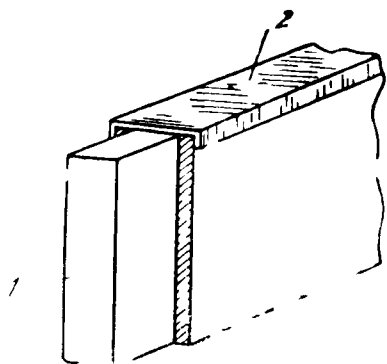


Рис. 61

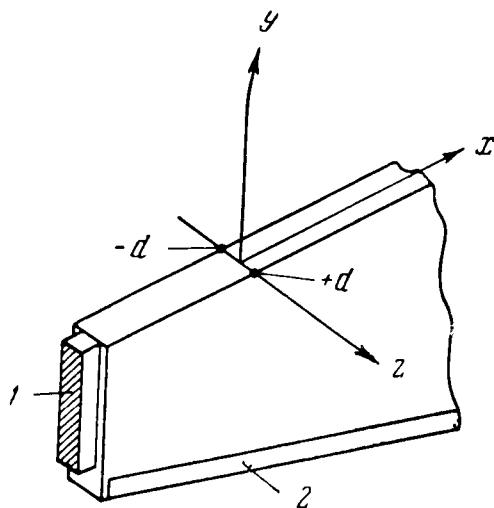


Рис 62

Иногда [78] для уменьшения внутренних потерь и уровня паразитных сигналов, а также для улучшения полосы пропускания дисперсионную полосовую линию задержки на волне  $s_0$  делают в виде расширяющейся в направлении от излучателя к приемнику полосы с поглотителем на скошенной грани (2 на рис. 62; 1 — излучающая пьезопластинка). Толщина линии  $2d$  выбирается при этом так, чтобы на средней частоте из полосы пропускания линии волна  $s_0$  удовлетворяла условию отсутствия напряжений не только на плоскостях  $z = \pm d$  (это выполняется всегда), но и на грани  $y = 0$ . Тогда потери в линии на средней частоте становятся минимальными, поскольку отражение волны  $s_0$  от грани  $y = 0$  (и связанные с ним потери энергии основного сигнала) отсутствуют. Одновременно с толщиной выбирают коэффициент Пуассона материала линии, причем так, чтобы полоса пропускания линии лежала в области линейной зависимости времени задержки от частоты. Таким образом, оказывается, что геометрией линии можно регулировать и задавать не

только дисперсионные свойства линии, но и полосу пропускания. Косой срез и поглотитель на нем сводят к минимуму паразитные сигналы, связанные с отражением от граней полосы, и делают форму кривой полосы пропускания гладкой.

В работе [76] приведены параметры ряда описанных линий со средней частотой 2 Мгц. Например, линия из алюминиевой полосы толщиной 0,111 см, длиной 241,3 см и шириной у узкого конца 0,927 см, а у широкого — 1,35 см, имеет полосу пропускания в пределах 1,92—2,07 мгц, потери на преобразование и на затухание волн в линии 34 дб и изменение времени задержки для разных частот в пределах полосы пропускания от 1000 мксек до 1240 мксек.

Изменяя толщину полосовой линии задержки на волне  $s_0$  вдоль направления распространения волны, можно получить разнообразные задерживающие характеристики (т. е. зависимость времени задержки от частоты и полосы пропускания), которые не получишь с полосами постоянной толщины. Полосовая линия задержки, толщина которой меняется некоторым образом вдоль ее оси, может быть интерпретирована как набор полосовых линий постоянных толщин. Складывая задержки этих линий, можно получить общую задерживающую характеристику, полностью отличную по форме от задерживающих характеристик отдельных секций. Такая возможность была впервые отмечена и осуществлена в работе [79], где приведено несколько примеров полосовых линий задержки переменной толщины как с линейной, так и с нелинейной зависимостями времени задержки от частоты.

Полосовые линии задержки на волнах Лэмба очень легко сделать многоотводными: для этого достаточно только принимать колебания не с торца линии, а с одной из ее основных поверхностей (плоскости  $z = \pm d$  на рис. 62). В качестве приемников при этом можно использовать набор клиновых преобразователей или пластинок гребенчатого профиля, помещая их на разные расстояния от излучателя.

При рассмотрении дисперсионных кривых фазовых и групповых скоростей волн Лэмба различных порядков было отмечено (см. § 3 гл. II), что в некоторых интервалах частот фазовая и групповая скорости симметричных

волн Лэмба меняются крайне слабо. Интервалы частот квазипостоянных значений фазовой и групповой скорости могут представить интерес для передачи сигналов без искажений. Учитывая наличие целого ряда таких интервалов частот, можно сказать, что твердая пластинка (полоса) может, в принципе, служить бездисперсионной многоканальной линией задержки и линией передачи. Идея такого использования твердой пластинки высказана в работе [34].

Отметим в заключение, что полосовые линии задержки на ультразвуковых волнах Лэмба могут быть не только дисперсионными, но и бездисперсионными. Это можно легко осуществить, используя те же частоты и толщины полос, при которых волны Лэмба имеют пренебрежимо малую дисперсию групповых скоростей, т. е., взяв, например, интервалы частот квазипостоянных значений фазовой и групповой скорости, о которых говорилось выше. Проще всего использовать для бездисперсионной линии задержки опять волну  $s_0$ , выбирая толщину полосы много меньшей длины этой волны на необходимой частоте, когда дисперсия фазовой и групповой скоростей практически отсутствует (см. рис. 32, *a—б*).

#### § 4. Прочие применения

Помимо указанных двух чрезвычайно широко распространенных применений ультразвуковых волн Лэмба и Рэлея существует еще целый ряд полезных и важных применений этих волн.

В первую очередь здесь следует отметить использование ультразвуковых рэлеевских волн не только для обнаружения дефектов в поверхностном слое образца, но и для всестороннего контроля поверхности и поверхностного слоя. Этот контроль осуществляется обычно путем прецизионных измерений скорости и затухания ультразвуковых рэлеевских волн, поскольку обе эти основные характеристики рэлеевской волны весьма чувствительны к изменению механических параметров поверхностного слоя образца, в котором они распространяются. Так, например, по затуханию рэлеевской волны можно определить качество обработки поверхности образца [31], при условии, что все остальные параметры (химический состав, механическая структура и т. д.) испытуемой серии

образцов одинаковы. В этом случае затухание однозначно связано со степенью обработки поверхности. По скорости рэлеевской волны определяют механические напряжения в поверхностном слое детали [80, 81], поскольку при прочих равных условиях скорость рэлеевской волны однозначно связана с величиной механических напряжений в поверхностном слое. В работе [80] отмечается, что остаточные напряжения в поверхностных слоях металлических образцов после их обработки изменяют скорость рэлеевской волны на несколько десятых процента. Такое изменение можно сравнительно легко уловить. В работе [82] по скорости рэлеевских волн предлагается получать информацию о термических свойствах образца.

По затуханию ультразвуковых рэлеевских волн можно определять также глубину поверхностно упрочненного (например, цементованного или закаленного) слоя детали. Это можно делать на основании следующих соображений. Плотность и упругие константы поверхностно-упрочненного слоя несколько отличаются от этих же параметров основной толщи образца. Несмотря на это различие, в такой неоднородной твердой среде тоже может распространяться рэлеевская волна, правда более сложного типа, чем в однородном твердом полупространстве. Затухание этой рэлеевской волны определяется глубиной упрочненного слоя, плотностями и упругими константами слоя и основной толщи материала [83]. Если все параметры, кроме глубины слоя, известны, то по затуханию волны можно определить глубину. На практике поступают проще [81]. Пусть, например, имеется большая серия однородных деталей с разбросом глубины поверхностно-упрочненного слоя. Выбирают несколько деталей (с максимально различными коэффициентами затухания рэлеевских волн) за эталоны и измеряют затухание рэлеевских волн в них. Далее каким-либо разрушающим методом определяют глубину слоя в эталонах. Построив кривую зависимости глубины слоя от затухания рэлеевских волн, можно определить глубину слоя любой детали из серии без разрушения ее, измерив лишь затухание, а упростив метод, можно ограничиться измерением амплитуды пришедшего сигнала при постоянном расстоянии между приемником и излучателем.

Важным практическим применением волн Лэмба является использование их для прецезионных измерений



толщины листовых конструкций, доступных для измерения только с одной стороны. Измерение осуществляется здесь иммерсионным вариантом импульсного эхо-метода по следующей методике.

Вначале составляется градуировочная номограмма для материала испытываемой партии. Для этого берется набор пластинок разной толщины, сделанных из этого материала. Пластины помещаются в ванну с водой, причем так, что с водой контактирует одна грань, а вторая — граничит с воздухом. В воде располагаются широкополосные излучатель и приемник, наклоненные под фиксированным углом  $\theta$  к плоскости контролируемой пластинки. На излучатель подается прямоугольный электрический импульс с частотой заполнения, которая может меняться в пределах полосы пропускания системы. При некоторых фиксированных (для данной пластинки) частотах пространственные периоды возмущений, создаваемых волной от излучателя на поверхности пластинки, совпадают с длинами волн Лэмба в пластинке (на этих частотах). Это соответствует эффективному возбуждению волн Лэмба (см. § 5 гл. II), и на экране индикатора появляются резко выраженные максимумы (пики) сигнала. Каждому максимуму будет соответствовать волна Лэмба определенного номера. Проводя измерения частот, соответствующих максимумам, для пластинок разной толщины можно получить серию кривых зависимости частоты максимума от толщины пластинки. Каждая кривая будет соответствовать волне Лэмба своего номера. Имея семейство таких градуировочных кривых (номограмму), можно определять неизвестные толщины образцов, помещая их в ванну с водой и измеряя частоты, соответствующие максимумам сигнала на индикаторе. Взаимное расположение этих частот позволяет определить соответствующий каждой частоте номер волны Лэмба. После этого по номограмме сразу же находится неизвестная толщина.

В работе [85] показано, что на частотах 2—13 *Мгц* диапазон толщин металлических изделий, измеряемых описанным методом, простирается от 0,015 *мм* до нескольких миллиметров, а точность измерения составляет 0,0003 *мм*, т. е. существенно превышает возможные точности других методов измерений без разрушения. Применение иммерсионного варианта повышает произво-

дительность измерений толщин волнами Лэмба и позволяет использовать метод для автоматического контроля.

По фазовой скорости волн Лэмба, распространяющихся в образце с известной толщиной и плотностью, можно рассчитать упругие константы материала — модули Юнга и сдвига. Такой метод нахождения упругих констант очень полезен в тех случаях, когда геометрия образца затрудняет использование для этих целей объемных (продольных и поперечных) волн.

Таковы, кратко, основные применения ультразвуковых волн Лэмба и Рэлея, описанные в литературе. Область этих применений в настоящее время непрерывно расширяется.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh. On waves propagated along the plane surfaces of an elastic solid.—Proc. London Math. Soc. 1885, 17, 4—11.
2. Е. А. Нарышкина. Общая теория волн Rayleigh для полупространства.—Труды Сейсмол. ин-та АН СССР, 1940, № 90.
3. H. Lamb. On waves in an elastic plate.—Proc. Roy. Soc. A, 1917, 93, 114.
4. Г. Кольский. Волны напряжения в твердых телах, ч. 1, гл. II, § 5. М., ИЛ, 1955.
5. Л. Бергман. Ультразвук и его применение в науке и технике. М., ИЛ, 1957.
6. E. G. Cook, H. E. Valkenburg. Surface waves at ultrasonic frequencies.—ASTM Bull., 1954, N 198, 81—84.
7. C. Minton. Inspection of metals with ultrasonic surface waves.—Nondestruct. test., 1954, 12, N 4, 13—16.
8. F. Firestone, I. Frederick. Refinements in supersonic reflectoscopy.—JASA, 1946, 18, N 1, 200—211.
9. К. Н. Виноградов, Г. К. Ульянов. Измерение скорости и затухания ультразвуковых поверхностных волн в твердых материалах.—Акуст. ж., 1959, 5, 3, 290—293.
10. Д. С. Шрайбер. Ультразвуковая дефектоскопия.—В сб.: «Дефектоскопия металлов». М., Гос. изд. оборон. пром., 1959, стр. 241—355.
11. L. C. Lynnworth. Shear wave probes and applications IEEE Trans. Sonic ultrasonic, v. SU 1964.
12. А. Г. Соколинский. Способ возбуждения и приема поверхностных волн. Авт. свид., 19297, 1958.
13. И. А. Викторов. Исследование методов возбуждения рэлеевских волн.—Акуст. ж., 1961, 7, № 3, 295—306.
14. Е. А. Нарышкина. Колебания полупространства при любых начальных условиях.—Труды Сейсмол. ин-та АН СССР, 1934, № 45.
15. Г. Д. Малюжинец. Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн (докт. дисс.). Физ. ин-т им. П. Н. Лебедева АН СССР, 1950.
16. F. Press, I. Healy. Absorption of Rayleigh waves in low-loss media.—J. Appl. Phys., 1957, 28, N 11, 1323—1325.
17. И. А. Викторов. Некоторые вопросы распространения рэлеевских волн в твердых телах (канд. дисс.). Акуст. ин-т АН СССР. М., 1958.
18. И. А. Викторов. Затухание поверхностных и объемных ультразвуковых волн.—Акуст. ж., 1964, 10, № 1, 116—118.

19. W. M. Ewing, W. S. Jardetzky, F. Press. Elastic waves in layered media. N. Y., McGraw-Hill, 1957.
20. И. А. Виктор ов. Волны типа рэлеевских на цилиндрических поверхностях.— Акуст. ж., 1958, 4, № 2, 131—136.
21. И. А. Виктор ов. О затухании рэлеевских волн на цилиндрических поверхностях.— Акуст. ж., 1961, 7, № 1, 21—25.
22. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. I. М., ИЛ, 1949.
23. И. А. Виктор ов. О влиянии несовершенств поверхности на распространение рэлеевских волн.— ДАН СССР, 1958, 119, № 3, 463—465.
24. И. А. Виктор ов. Прохождение и отражение рэлеевских волн на закруглениях различного радиуса.— Акуст. ж., 1961, 7, № 1, 90—91.
25. Г. И. Петра шень. Задача Рэлея для поверхностных волн в случае сферы.— ДАН СССР, 1946, 52, № 9, 763—766.
26. I. Cl. de Вгемаескер. Transmission and reflection of Rayleigh waves at corners. Geophysics, 1958, 23, N 2, 253—266.
27. В. Г. Гого ладзе. Волны Рэлея на границе сжимаемой жидкой среды и твердого упругого полупространства.— Труды Сейсмол. ин-та АН СССР, 1948, № 127.
28. Л. М. Бре ховских. Волны в слоистых средах, гл. I. М., Изд-во АН СССР, 1957.
29. И. А. Виктор ов, Е. К. Гри щенко, Т. М. Ка ёкина. Исследование распространения ультразвуковых поверхностных волн на границе твердого тела с жидкостью.— Акуст. ж., 1963, 9, № 2, 162—170.
30. Л. М. Бре ховских. О распространении поверхностных рэлеевских волн вдоль неровной границы упругого тела.— Акуст. ж., 1959, 5, № 3, 282—289.
31. Н. С. Бы ков, Ю. Г. Шней дер. Экспериментальное исследование влияния качества поверхности на затухание поверхностных волн.— Акуст. ж., 1960, 6, № 4, 501—503.
32. И. А. Виктор ов. О влиянии дефектов поверхности на распространение рэлеевских волн.— В сб.: «Применение ультразвуковых колебаний для исследования свойств, контроля качества и обработки металлов и сплавов». Киев, Изд. АН УССР, 1960, стр. 54—61.
33. И. А. Виктор ов, Т. М. Ка ёкина. Рассеяние ультразвуковых рэлеевских волн на моделях поверхностных дефектов.— Акуст. ж., 1964, 10, № 1, 30—33.
34. Е. С. Маш ашвили. Исследование нормальных волн в плоской пластине. Отчет Акуст. ин-та АН СССР. М., 1962.
35. Л. В. Ага фонов а. Программа вычисления на машине «Урал-1» фазовых и групповых скоростей симметричных нормальных волн, распространяющихся в твердой пластине. Отчет Акуст. ин-та АН СССР. М., 1961.
36. И. А. Виктор ов, О. М. Зубова, Т. М. Ка ёкина. Исследование волн Лэмба и границ их применения для ультразвуковой дефектоскопии. Отчет Акуст. ин-та АН СССР. М., 1963.
37. R. H. Lyon. Response of an elastic plate to localized driving forces.— JASA, 1955, 27, N 2, 259—265.
38. А. С. Матвеев, М. Ф. Краков як. Метод ультразвуковой дефектоскопии тонкостенных труб с применением свободных волн.— Заводская лаборатория, 1960, № 11, 1235—1238.

39. I. G. Rasmussen. Ultrasonic inspection of turbine and compressor rotor blades for cracks and other flaws.—*Nondestruct. test.*, 1958, 16, N 3, 228—236.
40. Heinrich, Hentze Horst Wiegand Fehlerortung in Feiblechen durch Ultraschall-Plattenwellen.—*Materialprüfung*, 1960, 2, N 2, 45—50.
41. D. C. Worlton. Ultrasonic testing with Lamb waves. *Nondestruct. test.*, 1957, 15, N 4, 218—222.
42. И. А. Викторov, О. М. Зубова, Т. М. Каёкина. Исследование возбуждения волн Лэмба методом «клина».—*Акуст. ж.*, 1964, 10, № 4, 412—418.
43. И. А. Викторov, Р. А. Григорян. Квазирэлеевские волны в упругом слое.—*Акуст. ж.*, 1959, 5, № 3, 366—368.
44. И. А. Викторov, О. М. Зубова. О диаграммах направленности излучателей волн Лэмба и Рэлея.—*Акуст. ж.*, 1963, 9, № 2, 171—175.
45. Г. С. Горелик. Колебания и волны, гл. 8. М., Гостехтеориздат, 1950.
46. В. Л. Гинзбург. Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн.—*Акуст. ж.*, 1955, 1, № 1, 31—39.
47. К. В. Жарков, Л. Г. Меркулов, Е. Д. Пигулевский. Затухание нормальных волн в пластине со свободными границами.—*Акуст. ж.*, 1964, 10, № 2, 163—166.
48. И. А. Викторov, О. М. Зубова. Нормальные волны в твердом цилиндрическом слое.—*Акуст. ж.*, 1963, 9, № 1, 19—22.
49. A. Schösch. «Der Schalldurchgang durch Platten», *Acustica*, 1952, 2, N 1, 1—17.
50. G. Kurtze, R. H. Bolt. On the interaction between plate bending waves and their radiation load.—*Akust. Beih.*, 1959, 9, N 1, 238—242.
51. D. C. Worlton. Experimental confirmation of Lamb waves at megacycle frequencies — *J. Appl. Phys.*, 1961, 32, N 6, 967—971.
52. Л. Г. Меркулов. Затухание нормальных волн в пластинах, находящихся в жидкости.—*Акуст. ж.*, 1964, 10, № 2, 206—212.
53. G. I. Binczewski. Standardization and application of ultrasonic surface-wave inspection.—*Nondestruct. test.*, 1957, 15, N 1, 36—40.
54. I. Tabin, M. Kurek. Badanie metali ultradźwiękowymi falami powier zchniowymi.—*Hutnik Polska*, 1956, 23, N 7—8, 300—304.
55. L. Filipczyński, Z. Pawłowski, I. Wehr. Ultradźwiękowe metody badania materiałów. Państwowe wydawnictwa techn. Warszawa, 1959.
56. В. Лефельд. Испытание листового материала, труб и штанг при помощи ультразвуковых поверхностных и пластиночных волн.—*Труды Межд. симпозиума о применении ультразвука (русский пер.)*. ЧССР, Братислава, сентябрь, 1962.
57. E. Haeusler. Application of elastic (ultrasonic) surface waves to nondestructive testing of solid media.—*Materialprüfung*, 1960, 2, N 2, 51—55.
58. W. Grabendorfer. Untersuchung von dünnen runden Werkstoffen mit Überschall-Oberflächenwellen.—*Stahl und Eisen*, 1955, 75, N 19, 1273—1275.
59. W. Grabendorfer. The examination of thin round objects by means of ultrasonic surface waves. Ministry of Aviation, Gr. Britain, February, 1960.

60. P. I. Brose ns, N. A. G. Haki mi, G. R. Knabba z. Detection of fatigue damage with Rayleigh waves. Applied Mechanics Lab., Masc. Inst. Tech. Cambridge. August, 1960
61. I. G. Rasmussen. Prediction of fatigue failure using ultrasonic surface waves.—Nondestruct. test., 1962, 20, N 2, 103—110.
62. R. Pohlman Untersuchungen zum Nachweis von Oberflächenrissen an nitrierten Vergütungsstählen mittels Ultraschall-Oberflächenwellen.—Z. Instr., 1963, 71, N 12, 322—329.
63. W. Lehfeldt. Die Fehlererkennbarkeit bei der Ultraschallprüfung mittels Plattenwellen.—Industrieblatt, 1960, 60, N 1, 1—7.
64. C. Drouet. Sondage ultrasonore des tôles minces d'acier à l'aide des ondes de Lamb. Métaux (corros.—inds), 1962, 37, N 440, 127—153.
65. P. Höller, E. Lechky. Prüfung von 3 bis 20 mm dicken Stahlblechen mit Ultraschall-Plattenwellen. Arch. Eisenhüttenwesen, 1962, 33, N 10, 699—710.
66. W. Lehfeldt. Ultrasonic testing of sheet with Lamb waves. Mater. test., 1962, 4, N 9, 331—337.
67. T. N. Grigsby, E. J. Tajchman. Properties of Lamb waves relevant to the ultrasonic inspection of thin plates.—IRE Trans. Ultrasonic Engng, March, 1961, UE-8, N 1, 26—33.
68. R. Pohlman. Die kontinuierliche Ultraschallprüfung langsgeschweister Rohre.—Blech, 1957, 4, N 6, 25—28
69. А. С. Матвеев, М. Ф. Краковяк. Новая аппаратура ультразвуковой дефектоскопии тонкостенных труб.—Труды ЦНИИТМАШ, 1962, № 33, 26—37.
70. Böhme. Die zerstörungsfreie Prüfung von Aluminium-Werkstücken mit Ultraschallimpulsen.—Aluminium (BRD). 1958, 34, N 4, 200—205.
71. Б. И. Выборнов. Применение поверхностных и нормальных волн для контроля деталей. Материалы семинара «Физические методы неразрушающего контроля качества продукции». М., 1962, № 1.
72. Б. И. Выборнов, К. А. Огурцов. Малогабаритный ультразвуковой дефектоскоп УЗДЛ-61 для контроля лопаток газовых турбин.—Заводская лаборатория, 1962, 28, № 8, 997—998.
73. I. D. Ross, S. I. Karuseienskii, K. B. Daniels. Variable delay line using ultrasonic surfaces waves.—IRE National Convent. Rec., 1958, 6, N 2, 118—120.
74. I. E. May. New trends in ultrasonic device technology. K-31, Fourth Internat. Congr. Acoustics, Copenhagen, August, 1962.
75. Масон. Применение ультразвука в радиотехнических, радиолокационных и гидроакустических системах.—Труды Ин-та радиоинженеров (русский пер.), 1962, 50, № 5, ч. 2, 1437—1447.
76. T. R. Meeker. Dispersive ultrasonic delay lines using the first longitudinal mode in a strip.—IRE Trans., UE-7, 1960, N 2, 53—58.
77. T. R. Meeker. The application of the theory of elastic waves in plates to the design of ultrasonic dispersive delay lines.—IRE Internat. Convent. Rec., 1961, 9, pt. 6, 327—333.
78. A. H. Meitzler. Transmission characteristics of longitudinal-mode, strip delay lines having asymmetrically tapered widths. IRE Internat. Convent. Rec., 1961, 9, pt 6, 334—342.

79. A. H. Fitch. Synthesis of dispersive delay characteristics by thickness tapering in ultrasonic strip delay lines.—*JASA*, 1961, 33, N 11, 1658.
80. I. R. Frederick. Use of ultrasonic surface waves in the determination of residual stress in metals.—*JASA*, 1960, 32, N 11, 1499.
81. P. Greguss. On the relation between the ultrasonic velocity and the surface properties of metals.—*Proc. Vibrat. Probl. Polish Acad. Sci.*, 1960, N 5, 3—10.
82. F. J. Lockett. Effect of thermal properties of a solid on the velocity of Rayleigh waves. *Mech. Phys. Solids*, 1958, 7, N 1, 71—75.
83. Н. Н. Егоров. Затухание волн Рэдея в упругом слое на полупространстве.—*Акуст. ж.*, 1961, 7, № 3, 378—380.
84. Н. Н. Егоров. Исследование возможности применения поверхностных ультразвуковых волн для измерения глубины некоторых видов поверхностно-упрочненных слоев.— В сб.: «Применение ультразвука к исследованию вещества». М., 1961, № 14, 197—208.
85. C. L. Frederick, D. C. Worlton. Ultrasonic thickness measurements with Lamb waves.—*Nondestruct. test.*, 1962, 20, N 1, 51—55.

# О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие . . . . .	3
Глава I. Физические свойства ультразвуковых волн Рэлея	5
§ 1. Понятие о волнах Рэлея, их структура и скорость	5
§ 2. Методы возбуждения и приема волн Рэлея . . . . .	12
§ 3. Затухание волн Рэлея . . . . .	32
§ 4. Рэлеевские волны на цилиндрических и сферических поверхностях . . . . .	37
§ 5. Рэлеевские волны на двухгранных поверхностях . . . . .	51
§ 6. Распространение в контакте с жидкостью . . . . .	55
§ 7. Влияние дефектов поверхности на распространение рэлеевских волн . . . . .	67
Глава II. Физические свойства ультразвуковых волн Лэмба	78
§ 1. Понятие о волнах Лэмба . . . . .	78
§ 2. Число волн Лэмба, критические частоты . . . . .	81
§ 3. Фазовые и групповые скорости волн Лэмба . . . . .	84
§ 4. Движение в волнах Лэмба . . . . .	87
§ 5. Методы возбуждения и приема волн Лэмба . . . . .	96
§ 6. Связь между волнами Лэмба и Рэлея . . . . .	107
§ 7. Диаграммы направленности излучателей волн Лэмба и Рэлея . . . . .	111
§ 8. Затухание волн Лэмба в зависимости от частоты . . . . .	119
§ 9. Распространение в цилиндрическом слое . . . . .	124
§ 10. Распространение в контакте с жидкостью . . . . .	131
Глава III. Применение ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба	136
§ 1. Новые технические возможности, открываемые ульт- развуковыми волнами Рэлея и Лэмба . . . . .	136
§ 2. Применение в ультразвуковой дефектоскопии . . . . .	138
а) Обнаружение поверхностных и околоповерхност- ных дефектов . . . . .	138
б) Обнаружение дефектов в листах и трубах . . . . .	145
в) Обнаружение дефектов в тонкостенных изделиях сложной формы . . . . .	151
§ 3. Применение в ультразвуковых линиях задержки . . . . .	154
§ 4. Прочие применения . . . . .	159
Литература . . . . .	163

*Игорь Александрович Викторов*  
**Физические основы применения  
ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике**

*Утверждено к печати Акустическим институтом АН СССР*

Редактор издательства *К. П. Гуров*  
Технический редактор *Т. И. Анурова*

Сдано в набор 1/Х 1965 г. Подписано к печати 30/ХII 1965 г. Формат 80×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.  
Печ. л. 5,25. Усл. печ. л. 8,82 Уч.-изд л 7,9. Тираж 3200 экз.  
Т-17433. Изд № 3153 Тип. зак 5904 Темплан 1965 г (доп.) № 125

*Цена 50 коп*

Издательство «Наука», Москва, К-62, Подсосенский пер., 21  
2-я типография издательства «Наука», Москва, Г-99, Шубинский пер., 10



О П Е Ч А Т К И

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
11	14 сн.	полупространствах	полупространстве
13	4 сн.	$C_{\text{кл}} C < R$	$C_{\text{кл}} < C_R$
38	12 сн.	$\psi$ и $\psi$	$\varphi$ и $\psi$
40	14 св.	$(R - h)$	$(R - r)$
95	3 сн.	$k_{s_1 a}^2 \nrightarrow s_{s_2 a}^2$	$k_{s, a}^2 \nrightarrow s_{s, a}^2$
105	13 св.	$b$	$\bar{b}$
115	9 св.	12	19
124	20 св.	$\gamma_s, \gamma_{a_0}, \gamma_a$	$\gamma_{s_1}, \gamma_{a_0}, \gamma_{a_1}$
130	Ф-ла (II.42)	$[ \nrightarrow$	$[1 \nrightarrow$