Г. ВИЛЕЙТНЕР

История математики от Декарта до середины XIX столетия

Г. ВИЛЕЙТНЕР

История математики от Декарта до середины XIX столетия

Перевод с немецкого
под редакцией
А. П. ЮШКЕВИЧА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1960

11-5-4

АННОТАЦИЯ

В книге содержится обзор развития математики, начиная с основоположных работ Декарта по алгебре и аналитической геометрии (1637) и кончая 1850 г. В изложении автор рассматривает по отдельности историю различных математических наук: арифметики, алгебры, теории чисел и т. д.; в тексте даются указания на все рассмотренные сочинения.

В литературе по истории математики на русском языке нет книги, посвященной специально восемнадцатому столетию, а развитие математики первой половины XIX в. освещено только частично. Перевод работы Г. Вилейтнера восполняет этот существенный пробел.

Книгой могут воспользоваться, помимо специалистов по истории науки, студенты университетов и педагогических институтов, учителя математики, научные работники и любители математики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ ОТ ДЕКАРТА ДО КОНЦА XVIII СТОЛЕТИЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, АНАЛИЗ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЯ И ТРИГОНОМЕТРИЯ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ XIX СТОЛЕТИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

В литературе по истории математики на русском языке до сих пор имеется серьезный пробел. У нас есть ряд книг по общей истории математики до XVII в. включительно и немало работ по отдельным вопросам развития математики в XVIII—XX вв., но нет сводного труда, специально посвященного последним двум с половиной столетиям. Отсутствие такого труда остро ощущается научными работниками, а особенно студентами и преподавателями университетов и педагогических институтов, где история математики входит в число обязательных или факультативных курсов. Глубокие «Лекции по истории математики в XIX столетии» Ф. Клейна (ч. I, М.—Л., 1937) ценны для всякого, изучающего математику этого времени, но, во-первых, в них не затронут XVIII в., и, во-вторых, оставлен в стороне ряд направлений и проблем, лежавших вне круга интересов Клейна. Предлагаемый перевод имеет целью отчасти восполнить указанный пробел.

Имя автора настоящей книги, выдающегося немецкого историка математики Генриха Вилейтнера (1874—1931) [1], известно советским читателям по его «Хрестоматии» и популярной брошюре «Как рождалась современная математика». Данная книга составлена из трех частей, вышедших в разное время. Первая и вторая части содержат историю арифметики, алгебры, анализа и, соответственно, геометрии и тригонометрии от Декарта до 1800 г. [2]). Третью часть образует последний отдел 2-го тома другой работы Вилейтнера по общей истории математики [3]), посвященный пятидесятилетию с 1800 по 1850 год.

В книге Вилейтнера дано, вообще говоря, точное и вместе с тем краткое, особенно в третьей части, изложение развития отдельных математических дисциплин и их разделов. Автор сообщает сведения

---

[1]) Некролог Г. Вилейтнера, написанный Ю. Руска, см. в Isis, XVIII, 1, № 52 (1932). К некрологу приложена библиография работ Вилейтнера (около 150 названий).

[2]) H. Wieleitner, Geschichte der Mathematik, II Teil. Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. I Hälfte. Arithmetik, Algebra, Analysis. II Hälfte. Geometrie und Trigonometrie. Leipzig, 1911—1921.

[3]) H. Wieleitner, Geschichte der Mathematik. II. Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. Berlin und Leipzig, 1923, стр. 53—147.

почти обо всех работах и результатах, оставивших сколько-нибудь заметный след в математике. В тексте всегда приводятся указания на первоисточники, а в конце книги имеется обширный список дополнительной литературы, в который включены общие работы, биографии, сочинения классиков, специальные монографии и статьи. В русском издании эта библиография значительно дополнена новой литературой на русском и иностранных языках. Богатство фактического материала и обилие библиографических справок — сильная сторона настоящей книги, которая не утратила ценности и к настоящему времени. Конечно, за время, прошедшее после появления книг Вилейтнера, был установлен ряд новых фактов: более детально изучена история некоторых наук (например, теории дифференциальных уравнений), впервые исследовано рукописное наследие некоторых ученых (например, Торричелли и Дж. Грегори). Указания на отдельные более важные пробелы изложения сделаны в подстрочных примечаниях редактора, с отсылкой к литературе вопроса. Некоторые мнения автора являются устарелыми или спорными (например, его оценка эйлеровой концепции расходящихся рядов); такие моменты также отмечены в редакционных примечаниях.

Слабой стороной данной книги является отсутствие в ней широких обобщающих идей, невнимание автора к методологическим проблемам науки и ее истории. Вилейтнер ограничивается, как правило, описанием постепенного накопления математических результатов. Он оставляет в стороне общественные условия развития математики, его движущие силы, связи математики с техникой, естествознанием и философией.

Заметим, наконец, что Вилейтнер был недостаточно знаком с историей математики в России и его изложение работ русских ученых, даже таких, как Н. И. Лобачевский и М. В. Остроградский, весьма неполно. Необходимые сведения читатель найдет в сочинениях советских историков науки, приведенных в списке литературы.

Первая и вторая части переведены мною, третья — Н. В. Леви. Перевод проверили И. Г. Башмакова и Л. А. Сорокина.

А. П. Юшкевич

15 VI 1958.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЙ АВТОРА [1])

Для составления первой части была использована рукопись А. Браунмюля. Она заключала в себе, с некоторыми пробелами, историю арифметики, алгебры, теории чисел, исчисления бесконечно малых и дифференциальных уравнений. Для того чтобы получилась цельная первая часть, составителю пришлось добавить главы о комбинаторике и теории вероятностей, о конечных разностях, интерполировании и вариационном исчислении. Но и подготовка других глав представила больше трудностей, чем казалось первоначально. Некоторые отделы работы Браунмюля возникли еще до 1904 г., так что необходимо было привлечь материал, собранный с тех пор преимущественно Г. Энестремом в Bibliotheca mathemathica. Г. Энестрем сам бескорыстно предоставлял в мое распоряжение свои выдающиеся познания, за что я выражаю ему сердечную благодарность.

При указании источников я ограничился сообщением года издания соответствующей книги или выпуска журнала. В последнем случае к году издания я присоединяю в скобках год действительного выхода в свет, если последний был указан на титульном листе. Для истории математики этот год выхода много важнее формального текущего года издания, который отличается часто на несколько лет, — важнее не только потому, что влияние какой-либо работы может начаться обычно лишь после публикации, но и потому, что год выхода является крайним пределом времени составления статьи (ср. стр. 176) [2]). Таким образом, хотя ссылки библиографически не полны, но на основании их все же можно, по большей части, проверить правильность сообщаемых сведений.

---

[1]) Первые две части настоящей книги в немецком издании составили вторую часть «Истории математики» в серии Шуберта, первую часть которой написал З. Гюнтер (S. Günter, Geschichte der Mathematik, I Teil. Von den ältesten Zeiten bis Cartesius.—Sammlung Schubert. Leipzig, 1908). Составление второй части было поручено А. Браунмюлю, который, однако, скончался, не доведя работу до конца. Вилейтнер, написавший эту часть, частично использовал посмертные материалы Браунмюля, о чем и говорится в предисловии. — *Прим. ред.*

[2]) Дату представления статьи ее автором я указываю лишь иногда. Все, что известно в этом отношении об Эйлере, содержится в Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers Г. Энестрема.

Если при указании источников удалось достичь известной полноты и точности, то это является заслугой главным образом того же Г. Энестрема.

На сочинения по истории математики в тексте ссылок не имеется. Поэтому в конце приложен указатель литературы и, в частности, той, которая была использована мною. Более подробные сведения можно найти в книге Ф. Мюллера: F. Müller, Führer durch die mathematische Literatur (Leipzig, 1909), в которой специально учтены сочинения, важные для истории математики.

Я нигде (за одним исключением) не занимаюсь критикой данных, приводимых в других исторических трудах. Но если изложение в этой книге в каких-нибудь пунктах отклоняется от предшествующих работ, то читатель может быть уверен, что на это у меня имелись достаточные основания (с той оговоркой, что человек вообще может ошибаться).

В заключение выражаю благодарность З. Гюнтеру и Ф. Мюллеру дружескую помощь при чтении корректур.

Май 1911 г.

Вторая часть была составлена в согласии с теми же установками, что и первая. Там, где автор не мог основываться на собственных исследованиях, он обращался к наилучшим вторичным источникам.

Г. Энестрем любезно проверил правильность ссылок на источники при чтении корректур. Ему, как и Ю. Тропфке, который мне также помог в корректуре, я обязан рядом ценных замечаний и дополнений. Им обоим я выражаю сердечную благодарность.

Ноябрь 1920 г.

История математики от Декарта до конца XVIII столетия

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, АНАЛИЗ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

АРИФМЕТИКА

§ 1. Теоретическая арифметика

Строгое различие между «видовой логистикой» и «числовой логистикой», алгебраическим и числовым вычислением проводил Ф. Виет (Цейтен, ч. II, стр. 111) [1]). Постепенно упрощая тяжеловесную систему записи и обозначений Виета, его последователи сначала попытались разработать законы буквенного исчисления, опираясь на исчисление рациональных чисел. Лишь позднее, когда алгебраическое исчисление достаточно окрепло и было распространено также на иррациональные числа, стало возможным рассматривать числовое исчисление только как частный случай алгебраического. Вместе с тем возникла возможность объяснить обыкновенные правила счета с помощью теоретической арифметики и тем самым способствовать прогрессу вычислений и коренной реформе школьного преподавания. Одним из первых связал элементарную арифметику с усовершенствованным буквенным исчислением Виета английский ученый У. Оутред, простой сельский священник, имя которого встречается в различных областях математики.

Действительно, в труде, опубликованном впервые в 1631, под названием «Ключ к математике» (Clavis mathematicae) [2]) он сначала показывает, как производятся отдельные действия над *определенными*

[1]) Здесь и далее так обозначены ссылки на книги: Г. Цейтен, История математики в древности и в средние века. Перев. П. С. Юшкевича, М. — Л., 1938 (Цейтен, ч. I); Г. Цейтен, История математики в XVI и XVII веках. Перев. П. Новикова, обработка М. Я. Выгодского, М. — Л., 1938 (Цейтен, ч. II). — *Прим. ред.*

[2]) Заголовок первого издания начинается словами Arithmeticae etc institutio. В 1647 вышел английский перевод под названием The Key of the Mathematicks.

числами, а затем устанавливает правила исчисления с *общими* числовыми знаками. Например, в случае, когда Оутреду нужно вычесть из $6\frac{1}{18}$ сумму $\frac{13}{16}$ и $2\frac{7}{12}$, он, разобрав эту операцию, пишет: «Сложи $\frac{A}{B}$ и Z, сумма есть $\frac{A+ZB}{B}$, из $\frac{A}{B}$ вычти $\frac{B}{C}$, останется $\frac{CA-Bq}{BC}$» и т. д. Выражение Bq, в котором виетовское «*quadr.*» сокращено до q, обозначает здесь B^2. Подобным же образом вместо A^{10} Оутред писал $Aqqcc$, вместо $10\,A^9E$ у него стояло $10\,AcccE$ и т. д. Последовательная запись знаков q (квадрат), c (куб) соответствовала, таким образом, сложению показателей. Аналогично было его обозначение корней: $\sqrt{qqA}$ это $\sqrt[4]{A}$, $\sqrt{ccccAcBqq}$ это $\sqrt[12]{A^3B^4}$ и т. д. Впрочем, для $\sqrt[12]{1000}$ у него имелась также запись $\sqrt{\boxed{12}}\,1000$ и для $\sqrt[4]{10}$ обозначение $\sqrt{\boxed{4}}\,10$. Пропорции он записывал в виде $A\cdot\alpha::B\cdot\beta$, для уравнений же пользовался знаком равенства, предложенным Рекордом [1]). Оутреду обязан происхождением также знак умножения в виде креста, хотя он вместо $A\times B$ часто писал просто AB. Знак умножения в виде точки встречается в 1631 у Гарриота (см. ниже) и в 1693 у Лейбница в одном письме к Лопиталю. Однако во всеобщее употребление в качестве знака умножения точка вошла лишь благодаря неоднократно переиздававшимся «Основаниям всех математических наук» (Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften, 1-е изд., 4 тома, 1710) Христиана фон-Вольфа. В этом сочинении применено было также в качестве знака деления двоеточие, которым иногда пользовались в пропорциях еще Оутред в 1657 и Дж. Грегори в 1668 [2]) и которое Лейбниц предложил в Acta Eruditorum в 1684. Лейбниц же (в одной работе, опубликованной только в новейшее время) впервые стал записывать пропорцию в обычной для нас форме $a:b=c:d$. Перед этим он, как еще раньше Ф. Дюлоран в «Математических примерах» (Specimina mathematica, Париж, 1667), применял для равенства знак $|\overline{}|$.

Возведение в степень двучленов и извлечение квадратных и кубических корней Оутред также разъяснил на общих числовых знаках. Им были разобраны *вычисления с десятичными дробями*. Как мы увидим, он много занимался тригонометрией, а десятичные дроби применялись тогда именно в тригонометрии. Он даже впер-

---

[1]) Это различие между символами = и : : в Англии проводится и в настоящее время. Знак равенства Рекорда (1556) отличался от нынешнего лишь тем, что был несколько длиннее.

[2]) Оутред в «Таблицах синусов, тангенсов, секансов и логарифмов синусов и тангенсов» (Canones sinuum, tangentium, secantium et logarithmorum pro sinubus et tangentibus, Лондон, 1657); Грегори в «Геометрических этюдах» (Exercitationes geometricae, Лондон, 1668).

вые опубликовал способ сокращенного умножения и деления десятичных дробей, по которому производим эти действия и мы [1]); правда, еще до Оутреда этот способ был известен И. Бюрги (Цейтен, ч. II, стр. 136). Обозначение десятичных дробей у Оутреда ясно из следующего образца: вместо 3794,236 он писал $3794\,|\underline{236}$.

Сочетание арифметических и алгебраических действий встречается также в первом (шеститомном) «Курсе» всех отделов математики, изданном французом П. Эригоном в 1634 и 1644 на латинском (Cursus mathematicus) и французском языках. Чтобы обойтись без употребительного ранее словесного изложения, Эригон создал специальный символический язык. Например,

$$\sqsubset\!\sqsupset 6{,}7 \;|\underline{\quad}|\; 42 \quad 2|2 \quad 6+\square 6$$

у него обозначало $6\cdot 7=42=6+6^2$.

Знак равенства представлялся, таким образом, в виде $|\underline{\quad}|$ или, чаще, в виде 2|2; место наших знаков для «больше» и «меньше» занимали символы 3|2 и, соответственно, 2|3. Для многократно применявшихся пропорций Эригон ввел обозначение

$$a\pi b \;\; 2|2 \;\; c\pi d,$$

которое имело, однако, меньший успех, чем обозначение Оутреда. С помощью своего богатого символического языка, страдавшего еще некоторой тяжеловесностью, но представлявшего несомненный прогресс по сравнению с прежним, Эригон сумел коротко и точно выразить теоремы всех областей математики, рассмотренных в его энциклопедическом труде.

В то время как, Оутред, подобно Виету, для обозначения числовых величин пользовался еще прописными буквами латинского алфавита, Т. Гарриот в книге «Применение аналитического искусства к решению алгебраических уравнений» (Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas; издано посмертно в 1631 У. Уорнером) употреблял уже строчные буквы. С тех пор последние начали быстро входить в обиход, так как им отдали предпочтение Ренэ Декарт в знаменитой «Геометрии» (Géométrie, 1637), Эригон и Дж. Валлис в «Алгебре» («Исторический и практический трактат по алгебре», Treatise of Algebra both historical and practical, англ. изд. 1685, расширенное латинск. изд. в т. II Opera, 1693). Употребление букв было вскоре дополнено введением индексов. В форме $2C$, $3C$ индексы применялись еще в 1649 Ф. ван-Скаутеном в латин. издании «Геометрии» (Geometria) Декарта, а затем Лейбницем (Acta Erud., 1682 и след.) и Ньютоном в «Математических началах натуральной философии» (Philosophiae naturalis prin-

[1]) Метод Оутреда позднее усовершенствовал Ж. Фурье в «Анализе определенных уравнений» (Analyse des équations déterminees, Париж, 1831). См. J. Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Лейпциг, 1900.

cipia mathematica; 1687). В «Методе разностей» (Methodus differentialis, 1711) Ньютон неоднократно пользовался ими уже почти в современной форме $C1$, $C2$. С усовершенствованием книгопечатания индексы начали постепенно ставить ниже строки, как это делал, быть может, в своих рукописях еще Лейбниц (ср. стр. 39—40).

Вместо обозначения степени, с которым мы познакомились у предшественника Гарриота — Оутреда, автор «Применения аналитического искусства» ввел запись aa, aaa и т. д. [1]), которой Эригон придал затем более простой вид: $a2$, $a3$,... Быть может, именно последнее обстоятельство привело Декарта к созданию современной символики (1637). Впрочем, уже в 1636 один шотландский математик Дж. Юм опубликовал в Париже книгу «Новая алгебра Виета» (L'Algèbre nouvelle de Viète etc.), в которой римские цифры играли роль настоящих показателей степени; например, одно уравнение имеет у него вид $A^{\mathrm{III}} - AAH$ *égal* $\grave{a}X$. Общие показатели степени встречаются кое-где у Валлиса (Mathesis universalis, Oxoniae, 1657, т. е. «Универсальная математика», Оксфорд), но более широкое распространение они получили лишь благодаря Ньютону и Лейбницу. Гарриоту мы обязаны еще нашими знаками $>$ и $<$ для отношений «больше» и «меньше».

В качестве показателей корня цифры и буквы употреблялись иногда Валлисом, который, например, писал $\sqrt{^dR^d} = R$. Последовательное применение они получили у Ньютона. Наша теперешняя запись стала постепенно укореняться после того, как нашла регулярное употребление в «Трактате по алгебре» (Traité d'Algèbre, 1690) М. Ролля и в «Началах математики» (Elemens des Mathématiques, 1675) Ж. Престэ. Можно сказать, что, начиная с вышеназванного труда Декарта, буквенное исчисление приобрело тот самый облик, которым оно обладает и ныне. Правда, некоторые из приверженцев Декарта пользовались еще вместо рекордовского знака $=$ декартовым знаком равенства $\propto$, однако, первый вскоре получил общее распространение. Во второй половине XVII столетия во Франции вместо нашего знака $=$ встречался еще знак $\|$, ибо символ $=$ в выражении $a = b$ обозначал у Виета и Декарта абсолютное значение $|a - b|$.

Виет и его последователи строили алгебраическое исчисление на геометрическом основании; вообще вся математика выросла из геометрических представлений. Положение вещей изменилось по выходе «Геометрии» Декарта (в оригинальном издании являвшейся лишь одним из трех приложений к столь же знаменитому Discours de la méthode etc. — «Рассуждению о методе»). Хотя уже Оутред излагал буквенное исчисление в тесной связи с числовой арифметикой,

---

[1]) Впрочем, уже М. Штифель в 1553 употреблял обозначения $1AAA$, $1BB$ и т. п. там, где мы пишем для x^3, y^2,...

но только Декарт ясно понял, что буквенное исчисление должно быть построено на арифметической основе. Для этой цели он ввел произвольно выбираемый *единичный отрезок* и показал, как можно с его помощью вывести все основные действия арифметики из античной теории пропорций. Полученные таким образом определения действий оказывались поэтому справедливыми и для *иррациональных чисел* — обстоятельство, на которое Виет обратил внимание лишь случайно. Для Декарта не было уже теперь обязательным оперирование только однородными формулами, как делали Виет и соперник Декарта Ферма́. Выбор определенной единицы делал возможными и неоднородные выражения, члены которых можно было рассматривать как числа. Первая попытка дать объяснение и обоснование действий, производимых над иррациональными числами, была предпринята лишь в XVIII столетии Кестнером (ср. стр. 21).

Важность шага, сделанного Декартом, была понята отнюдь не сразу. Так, например, знаменитый оксфордский профессор Дж. Валлис, из многочисленных сочинений которого два были посвящены вычислительной и теоретической арифметике, стоял еще почти целиком на почве Виета и Оутреда. В его «Универсальной математике» (1657) числовое и алгебраическое исчисление следуют все время рука об руку. Обозначения его были взяты главным образом у Оутреда, например, для десятичных дробей, которые он, впрочем, иногда писал и в современной форме. Но Валлис имеет вместе с тем серьезные заслуги в арифметике. Он подверг подробному разбору различные числовые системы и исследовал представление чисел в троичной, четверичной и тому подобных системах. Он впервые дал безупречную математическую трактовку староиндусского способа проверки с помощью девяти и впервые же проанализировал все задачи, какие могут возникнуть в арифметической и геометрической прогрессиях; оперируя общими величинами, он расположил эти задачи в форме таблиц. Далее, в «Трактате по алгебре», (1685 и 1693) он исследовал приведение обыкновенных дробей к десятичным и изложил важнейшие свойства простых и смешанных периодических дробей, к которым пришел еще в 1657 в «Универсальной математике». Для него не осталось неизвестным и обратное превращение такой десятичной дроби в обыкновенную, так же как и то обстоятельство, что извлечение корней доставляет непериодические десятичные бесконечные дроби, образующие особый род чисел. От Валлиса исходит также употребление слова «мантисса» (т. е. дополнение), которое он применял для обозначения десятичных мест дроби.

Положительные и отрицательные числа Валлис определял как *числа, друг другу противоположные* (прибыль и потеря). Декарт, а ранее Штифель и Жирар характеризовали отрицательные числа как меньшие, чем «ничто». Однако в одном случае Валлис из неравенства $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ для натуральных чисел заключил, что

$$\ldots \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3} \ldots,$$

т. е. что отрицательные числа больше бесконечности. Эту же точку зрения позднее высказал и Эйлер [Nov. Comm. Petr., 1754/55 (1760)]. Исаак Ньютон, с 1673 по 1683 читавший в Кембридже лекции, опубликованные вопреки его желанию в 1707 У. Уистоном под названием «Универсальная арифметика» (Arithmetica universalis), также определил отрицательные числа как меньшие, чем «ничто», понимая под последним нуль. Вскоре это определение перешло в учебники. В Германии оно получило распространение благодаря книгам Хр. фон-Вольфа (см. стр. 14) и удержалось надолго. Затем Эйлер в «Основаниях дифференциального исчисления» (Institutiones calculi differentialis, 1755) показал, что положительные и отрицательные числа связаны переходом через бесконечность, благодаря чему нашел объяснение парадокс Валлиса. После возникновения понятия предела стало применяться толкование нуля как предела дроби с произвольно возрастающим знаменателем, — точка зрения, не чуждая еще индусам. Это представление перешло в XVIII столетии в учебники алгебры; его можно найти в книге В. Карстена «Система математики» (Lehrbegriff der gesamten Mathematik, 8 томов, 1767/77).

Обратные значения степеней, вроде $\frac{1}{x^2}$, Валлис в своей «Алгебре» рассматривал как степени с отрицательными показателями (x^{-2}). Он, далее, индуктивно установил делимость двучлена $a^n \pm b^n$ на $a \pm b$. Ньютон в «Арифметике» подробно рассмотрел деление двух многочленов, причем указал на необходимость располагать делимое и делитель по возрастающим или убывающим степеням одной и той же величины. Ньютон же привел новый способ определения делителей многочлена. Соответствующее доказательство, пропущенное у Ньютона, было сообщено в 1709 Лейбницу Николаем I Бернулли. Этим вопросом в том же году занимались в своей переписке сам Лейбниц и Я. Герман. Мы уже упоминали, что Ньютон применял общие показатели. Это позволило ему представить бином $(a+b)^n$ в *общем* виде. Так как его не смущали дробные показатели, то он смог найти разложение и для $(a+b)^{m/n}$ в бесконечный ряд, именно *биномиальный ряд*, о чем мы подробнее расскажем в истории учения о рядах. Значение дробных показателей, до Ньютона случайно применявшихся еще Оремом, Жираром и Стевином (Цейтен, ч. I — II), и вычисления с ними были детально исследованы в превосходных «Началах алгебры» (Eléments d'Algèbre, Париж, 1746) А. К. Клеро. В этой же книге Клеро показал, как извлекать квадратные и кубические корни из алгебраических многочленов [1]).

В построении своей алгебры, которому он предпослал полное изложение числовой арифметики, Валлис не двинулся дальше своих предшественников. Приводимые им доказательства правил алгебраических действий обладали лишь внешним правдоподобием. Во всяком случае, они уступали доводам одного более раннего сочинения, опубликованного под названием «Теория и практика арифметики» [Arithmeticae theoria et praxis, Lovanii (Лувен), 1656] бельгийским иезуитом А. Таке, имя которого пользовалось тогда в математическом мире большой популярностью. Хотя Таке оставил в стороне вычисления с буквенными величинами, зато он снабдил все свои теоремы и правила доказательствами. Как справедливо утверждал он сам, до него в таком объеме этого еще никто не предпринимал. В своем сочинении Таке особенно подчеркивает значение вычислений с десятичными дробями, видя их смысл и пользу в том, что они позволяют обходиться по существу без каких бы то ни было вычислений с дробями; вообще это обстоятельство тогда еще долго не замечали. Следует еще добавить, что в главе о прогрессиях он вывел сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии из суммы прогрессии с конечным числом членов путем *предельного перехода* [2]).

После того как Эригон положил начало, стали появляться различные сочинения, охватывавшие всю математику в целом. Таким был «Курс математики или полная энциклопедия всех математических дисциплин» [Cursus mathematicus sive absoluta omnium mathematicarum disciplinarum Encyclopaedia, Herbipoli (Вюрцбург), 1661, in folio] иезуита К. Шотта, затем широко распространенный «Курс или мир математики» (Cursus seu mundus mathematicus, Lugduni (Лион) 1674, 3 тома, in folio) Дешаля, «Курс математики» (Cours de mathématique, Париж, 1693, 5 томов, in 8°) Озанама и упомянутый на стр. 16 труд Престэ (Париж, 1675). Все эти авторы излагали и арифметику, но не предлагали заслуживающих внимания новинок; они, за исключением Престэ, даже не доказывали приводимых теорем и не устанавливали связи между числовой арифметикой и буквенным исчислением. По своему значению их курсы вследствие этого вовсе не стоят на одном уровне с работами Эригона, Оутреда, Валлиса и Таке. Лишь «Начала универсальной математики» (Elementa Matheseos universae, 1713/41, 5 томов) Вольфа, примыкающие к его «Основаниям всех математических наук» от 1710, вновь

[1]) Впрочем, подобные извлечения корней встречались еще у ал-Караджи (около 1010, см. Цейтен, ч. I, стр. 200—201), М. Штифеля (1544 и 1553, см. Цейтен, ч. II, стр. 137).

[2]) Этот вывод, как показал Э. Бортолотти (Bolletino della Unione matematica italiana, 1939, стр. 361—370), в основном заимствован был у Торричелли. — *Прим. ред.*

придали больший вес доказательствам и систематическому построению, оказавшись в силу этого на высшей арифметической ступени.

Своеобразную роль играли вплоть до середины XVIII столетия *логарифмы*. Известно (Цейтен, ч. II), что они возникли в результате сопоставления членов арифметической и геометрической прогрессий и применялись только в качестве вспомогательного средства, упрощающего сложные вычисления, встречающиеся в тригонометрии и астрономии. Конечно, свойства логарифмов были известны и излагались на числовых примерах. Однако точно сформулировал их впервые Оутред в приложении ко второму изданию своего труда «Ключ к математике» (1648), хотя и у него свойства логарифмов не были записаны еще с помощью буквенных величин. Лишь в XVIII столетии их начали записывать порознь в виде $L.ab = L.a + L.b$ и т. д.; в такой форме, например, они приводятся ради краткости во введении к «Таблицам логарифмов» (Tables of Logarithms, Лондон, 1742) Гардинера. Логарифмирование не причислялось тогда к алгебраическим действиям. Это произошло лишь после того, как Эйлер в своем «Введении в анализ бесконечных величин» (Introductio in Analysin infinitorum, 1748) определил логарифмирование как второе обращение действия возведения в степень и, значит, *логарифм как некоторый показатель степени* [1]). Благодаря Эйлеру вошел в употребление знак логарифма l, примененный им еще в 1729 в письмах к Гольдбаху, вместо использовавшихся ранее сокращений «Loga» или «Log». Широкое распространение этот знак получил после того, как попал в «Основания арифметики, геометрии и тригонометрии» (Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, Геттинген, 1758) геттингенского профессора А. Г. Кестнера, в «Начала арифметики, геометрии и т. д.» (Élementa Arithmeticae, Geometriae etc., Галле, 1757/68) И. А. Зегнера, бывшего профессором сначала в Геттингене, а позднее в Галле, и в другие учебники для высшего образования. Строгое различие символов l и log для обозначения натуральных и бригсовых логарифмов было рекомендовано впервые Коши в «Курсе алгебраического анализа» (Cours d'Analyse algébrique, 1821).

Попытка упростить логарифмирование сумм и разностей впервые встречается в сочинении Б. Кавальери «Сто различных задач для демонстрации применения и легкости логарифмов и т. д.» (Centuria di varii Problemi per dimostrari l'uso e la facilità dei logarithmi etc., Болонья, 1639). Если $a > b$ и ищутся $\log(a+b)$ и $\log(a-b)$, то полагается $\sin\psi = \frac{b}{a}$; тогда

$$\log(a+b) = \log a + \log 2 + 2\log\sin\frac{90^\circ + \psi}{2}.$$

---

[1]) Уже Лейбниц применял правила логарифмирования к показательным уравнениям. В одном письме к Я. Бернулли от 1694 он вывел таким образом из $x^x = y$ уравнение $x \log x = \log y$.

Подобным же образом, если взять $\sin\varphi = \sqrt{\frac{b}{2a}}$, то

$$\log(a-b) = \log a + \log\cos 2\varphi.$$

Эти же формулы встречаются затем вновь у одного врача из Глаца, И. Мушеля, получившего их, вероятно, самостоятельно (1696). В 1715 Вольф сообщил в Acta Eruditorum формулу

$$\log(a+b) = \log a - 2\log\sin\alpha,$$

где $\log\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}(\log a - \log b)$. Схожей формулой пользовался французский астроном Деламбр (1788). Действительно плодотворными оказались таблицы логарифмов сумм и разностей, построенные уже в XIX столетии Ц. Леонелли (1802/03) и опубликованные Гауссом в 1812.

В то время как в сочинениях Валлиса и Ньютона буквенное исчисление являлось еще лишь обобщением числовой арифметики, в названных выше книгах Кестнера, Зегнера, Карстена и других оно от последней уже отделилось. Математики начали стремиться, как это в скромной форме проступало уже в работах Вольфа, к *научно-систематическому изложению* алгебраического исчисления, для чего старались снабдить отдельные правила действий точными доказательствами. Последнее, естественно, не могло удаться, ибо тогдашняя теоретическая арифметика не обладала прочным фундаментом, который в первую очередь необходим для построения научной системы.

В восемнадцатом столетии, как во времена Декарта и Ньютона, на математику смотрели как на «науку о величинах». В соответствии с этим число определяли как отношение или, по выражению Вольфа, «как то, что относится к единице, как одна прямая к некоторой другой прямой». Такое определение было не чуждо уже Декарту и почти дословно содержалось в «Арифметике» Ньютона. Лишь немногие все еще предпочитали держаться евклидова определения числа как множества единиц. Тем не менее общее понятие иррационального числа проникло в более широкие круги математиков только во второй половине XVIII столетия; во Франции, начиная с 1750, этому значительно содействовал Даламбер.

Отрицательные числа рассматривали, по Валлису, как *противоположные* положительным величинам (см. стр. 17). В «Основаниях арифметики и т. д.» (1758) Кестнер определял их так: «противоположными величинами называются величины одного рода, рассматриваемые при таких условиях, что одна из них уменьшает другую». В этом, конечно, намечалось расширение понятия числа, хотя и в весьма несовершенном виде. Слепой английский математик Н. Саундерсон в «Алгебре» (1740), немецкий перевод которой выпустил в 1798 Грюзон, также принял это определение, но затем он без дальнейшего обоснования рассматривал знаки $+$ и $-$ как знаки действий. Однако по большей части поступали обратным образом: определяли $+$ и $-$ как знаки действий, а затем молчаливо употребляли их для обозначения положительных и отрицательных чисел. Так, например, поступал в своей уже упоминавшейся книге Клеро. Подобным же образом действовал в «Трактате по алгебре в трех частях» (A Treatise of Algebra in three parts, Лондон, 1748), составленном в качестве комментария к ньютоновой «Универсальной арифметике», К. Маклорен. На этот же путь встал знаменитый Леонард Эйлер в его широко известном «Полном введении в алгебру» (Vollständige Anleitung zur Algebra, С.-Петербург, 1770) [1]. Имелись, однако, представители и третьего направления, не признававшие ни отрицательных чисел, ни многократных корней, ни мнимых чисел. К ним относятся англичанин У. Френд с его «Принципами алгебры» (Principles of Algebra, 1796) и еще раньше проживавший в Англии француз Ф. Мазе́р с его «Рассуждением о применении отрицательного знака и т. д.» (Dissertation on the use of the negative sign etc., 1758). Их алгебру называли *арифметической*, в противоположность *символической* алгебре, развившейся в XIX столетии.

Однако в XVIII столетии еще не достигли ясного понимания того, что отрицательные числа представляют собой закономерное расширение числовой системы. С этим связано и то, что правила умножения не получили в это время нигде точного обоснования, даже в знаменитых лекциях Лапласа в Политехнической школе. Только в одной статье С. Клюгеля, появившейся в 1795 в Archiv der Mathematik Гинденбурга, сделана была попытка установить *формальные* законы алгебры, причем автор весьма близко подошел к правильной концепции.

Разумеется, математики того времени хорошо ощущали неудовлетворительность такого положения вещей. Однако лишь в XIX столетии появились люди, открыто настаивавшие на необходимости реформы оснований арифметики и указавшие ведущие к ней пути. Первым из них мы назовем М. Ома. В небольшом сочинении «Критическое освещение математики вообще и евклидовой геометрии в особенности» (Kritische Beleuchtung der Mathematik überhaupt und der Euklidischen Geometrie insbesondere, 1819) он с особенной остротой указал на необходимость такого преобразования. Свои мысли он попытался развить в «Опыте совершенно последовательной системы математики» (Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik, 1822). Но так как деятельность Ома лежит уже за пределами рассматриваемого нами времени, то мы лишь назовем имена ученых, заложивших основания формальной алгебры.

[1] Первое издание этой книги Эйлера вышло в русском переводе с рукописи: «Универсальная арифметика», т. I—II, СПб., 1768 — 1769. Перевели ее П. Иноходцев и И. Юдин. — *Прим. ред.*

Это — англичане Дж. Пикок, У. Р. Гамильтон, А. де-Морган и особенно немец Г. Ганкель.

Нам следует еще обратиться к истории мнимых чисел. Мы знаем, что уже в XVI столетии математики натолкнулись на мнимые корни уравнений. Однако использовать их почти не умели, и еще Декарт в своей «Геометрии» говорил, что эти величины никак нельзя себе представить, почему и назвал их «мнимыми», т. е. воображаемыми (по-латыни — «radices imaginariae»). Ньютон также привлекал мнимые величины лишь постольку, поскольку они встречались в виде корней уравнений. Только Дж. Валлису пришла мысль смотреть на мнимую величину $\sqrt{-bc}$ как на среднюю пропорциональную между положительной и отрицательной величинами. Он попытался также в «Алгебре» (1685) дать различные геометрические толкования чисто мнимых и комплексных величин, которые хотя и не вполне ему удались, но все же могли бы послужить основой для последовательной интерпретации. Но на это не обратили никакого внимания. Только возникновение новой отрасли математики — исчисления бесконечно малых — дало толчок изучению мнимых величин. В ходе занятий интегрированием дробных рациональных функций Лейбниц дал разложение на мнимые множители двучлена x^4+a^4 (Acta Erud., 1702 и 1703). В это же время его друг Иоганн Бернулли сообщил [Acta Erud., 1703 и Mém. Ac. Paris, 1702 (1704)] зависимость, найденную им между логарифмом мнимого числа и действительным арксинусом, несомненно бывшую известной тогда и Лейбницу. Оба они произвели интегрирование выражений вида $\frac{dx}{x\pm i}$ по формальным правилам, справедливым для действительных выражений. С этого времени начали постепенно развиваться формальные вычисления с мнимыми числами, не сопровождавшиеся, однако, изучением вопроса об их обосновании. А. де-Муавр, английский ученый, являвшийся по рождению французом, нашел важную теорему, носящую его имя (Philos. Trans., 1707, 1722 и Miscellanea analytica, 1730); мы ею займемся в следующей главе (ср. стр. 44).

Уже в 1714 Р. Котес в одной статье в Philos. Trans., включенной позднее в его «Гармонию мер» (Harmonia mensurarum, 1722), установил фундаментальное соотношение между тригонометрическими функциями и показательной функцией. Не зная, очевидно, об этом открытии, Эйлер привел затем то же соотношение в письме к Иоганну Бернулли [см. также Comm. Ac. Petr., 1740 (1750) и Misc. Berol., 1743]; впоследствии он разработал его в восьмой главе I книги «Введения в анализ» (1748). Вслед затем Даламбер в «Размышлениях об общей причине ветров» (Réflexions sur la cause générale des vents, Берлин, 1747) и несколько позже в Mém. Ac. Berl., 1746 (1748) доказал, что всякое алгебраическое выражение, образованное из любого числа мнимых величин, может быть приведено к виду $A+iB$, где A и B — действительные величины. Он даже говорил об интеграле от функции переменной $x+iy$ и высказал мнение, что дифференциал $f(x+iy)\,d(x+iy)$ всегда можно представить в виде $dp+idq$. Хотя последнее утверждение осталось пока недоказанным, справедливость его была принята вскоре всеми. В Hist. Ac. Berl., 1749 (1751) Эйлер дал более полные доказательства теорем Даламбера, показав их истинность для всех известных в то время функций. Особенно обстоятельно исследовал он при этом логарифмы отрицательных и мнимых чисел. Его исследования положили конец многолетнему спору во-первых между Лейбницем и Иоганном Бернулли и затем между Даламбером и самим Эйлером; Эйлер именно показал, что $\log x$ обладает бесчисленным множеством значений, среди которых одно действительное имеется в том и только в том случае, если $x>0$. Обозначение $\sqrt{-1}$ буквой i также встречается впервые в одной статье Эйлера от 1777, увидевшей свет в четвертом томе 2-го издания «Оснований интегрального исчисления» (Institutiones calculi integralis, 1794). Впрочем, в обиход буква i была введена лишь Гауссом.

Несмотря на широкое употребление мнимых величин, ценность и значение которых выступали все более, представления о их сущности оставались вплоть до XIX столетия совершенно не ясными. Датский землемер К. Вессель первый открыл способ геометрического представления комплексных величин на плоскости, приписываемый обычно Гауссу. На этой основе он разработал в 1797 полную теорию, которую опубликовал в 1799 (см. стр. 147). Однако сочинение Весселя оставалось совершенно неизвестным, пока его не нашли в недавнее время снова. Не лучшая участь постигла содержавший такую же интерпретацию «Опыт некоторого представления мнимых величин и т. д.» (Essai sur une maniére de représenter les quantités imaginaires etc., 1806) Ж. Аргана. Только Гаусс, в диссертации которого от 1799 уже было намечено это геометрическое представление, строго установил в «Теории биквадратных вычетов» (Theoria residuorum biquadraticorum, 1828/31) общее понятие комплексного числа и доказал правомерность всех производимых над ним действий. Он ввел в этой работе термин «комплексное число» и назвал выражение a^2+b^2 «нормой» числа $a+bi$. Ранее того, в 1821, Коши назвал $\sqrt{a^2+b^2}$ тоже весьма употребительным словом «модуль». Коши также принадлежит наименование чисел $a+bi$ и $a-bi$ «сопряженными».

§ 2. Арифметические вычисления

В этом параграфе мы рассмотрим развитие арифметических вычислений и вспомогательных средств, созданных для их облегчения. Все содержание школьных руководств сводилось в XVII столетии к собранию правил (иногда их насчитывалось около 240), которые давались ученикам без всякого обоснования или доказательства, так что механическое усвоение расцветало самым пышным образом. Такое положение вещей возникло в Германии уже в конце XV столетия. В XVII столетии за ней последовали Франция и Англия, с соответствующим опозданием открывшие двери перед реформой, начавшейся в Германии в XVIII столетии.

Сочинения коссиста А. Ризе и его обоих сыновей, центральное место в которых занимало тройное правило (Regeldetri), дошли в многочисленных переизданиях до 1656. Сменившие их книги отличались либо только формулировкой их правил, как, например, в «Практической арифметике» (Arithmetica practica, 1698) Вендлера, либо еще усиливали механичность изложения, приводя правила в стихах; так поступил, например, Т. Бейтель в изданном в 1663 (?) труде «Саксонский кедровый лес, арифметика или весьма полезное счетное искусство» (Chursächsischer Cedernwald, eine Arithmetik oder sehr nützliche Rechenkunst), выдержавшем много изданий (7-е изд., 1693).

Положение, которое занимал в Германии А. Ризе, во Франции выпало на долю парижского математика Ф. Баррема, опубликовавшего в 1677 книгу «Арифметика или же легкая книга для самостоятельного изучения арифметики» (L'Arithmétique ou le livre facile pour apprendre l'arithmétique soi-même), также неоднократно издававшуюся вплоть до 1779.

В Англии также имелся математик, сыгравший не менее важную роль, чем А. Ризе в Германии. Это был Э. Кокер (умер в 1675). Шесть различных сочинений по арифметике, написанных этим автором, господствовали в английском школьном преподавании почти столетие. Одна лишь «Арифметика» (Arithmetick), вышедшая в 1678, уже после смерти Кокера, выдержала 112 изданий. У Кокера, так же как в Германии и Франции, главенствующим являлось *тройное правило,* из которого естественно получалось множество других частных правил. *Цепное правило,* бывшее известным еще индийцу Брахмагупте (Цейтен, ч. I) и весьма ценившееся в торговых кругах, также широко применялось в Англии, Германии и Франции. В XVIII столетии оно даже оттесняло всемогущее тройное правило на задний план. Особенно содействовала распространению этого приема книга по арифметике К. Ф. ван-Рееса, родившегося около 1690 в голландской провинции Лимбург. Он выпустил свою книгу в 1735 на голландском языке; в 1737 она была переведена на французский, а Л. М. Кале перевел ее с французского на немецкий и издал в 1739 под названием «Общее правило арифметики» (Allgemeine Regel der Rechenkunst). Содержащаяся здесь схема применения цепного правила получила поэтому также название «правила Рееса». Столь значительный успех этого приема объяснялся, с одной стороны, все более нараставшим стремлением арифметиков заменить множество частных правил одним общим правилом, применимым во всех случаях, и, с другой стороны, тем, что употребление названного правила требовало весьма незначительных умственных усилий[1]).

Среди различных важных нововведений в *практической* арифметике XVII столетия нам нужно отметить лишь одно, принадлежащее великому Лейбницу, интересовавшемуся всеми математическими вопросами, которые ему попадались. Мы имеем в виду усовершенствование вычисления сложных процентов, ставшее возможным благодаря употреблению логарифмов, и правильное обоснование вычисления рент. В своей статье об учете (Acta Erud., 1683) Лейбниц показал теоретическую необходимость производить при вычислении наличной ценности учет не с валюты векселя, а с валюты, увеличенной на учетный процент. Тогда наличная ценность платежа C с годичным сроком получалась равной

$$C\left(1-\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m^3}+\ldots\right)=C\,\frac{m}{1+m},$$

где $m=\frac{100}{p}$ и p — процент. Чтобы определить наличную ценность на год назад, нужно поэтому при $p=5$ от суммы C отнять $\frac{1}{21}$, а не $\frac{1}{20}$, как принимали ранее, в частности, по указаниям знаменитого юриста Б. Карпцова (умер в 1666). Для n-летнего срока Лейбниц совершенно правильно нашел учетную сумму равной $C\left(\frac{m}{1+m}\right)^n$. Однако эти несложные выкладки получили надлежащее признание в Германии только после страстного и длительного спора в XVIII столетии. В Голландии и Англии наличную ценность рент умели правильно вычислять еще раньше. Это видно из работ Я. де-Витта (1671) и Э. Галлея (1693). Мы подробнее займемся ими в четвертой главе.

Дальнейшее обогащение материала практической арифметики принесло с собой начало XVIII столетия. В 1705 только что упомянутый Галлей выпустил маленькую работу «О сложных процентах» (Of Compound Interest), в которой дал отсутствовавшее до

---

[1]) В России обучение арифметике в XVII в. велось по рукописным сочинениям. Первой печатной книгой на русском языке по арифметике явилось «Краткое и полезное руковедение во аритметыку» И. Ф. Копиевского (Амстердам, 1699), где на 16 страницах описаны нумерация и первые четыре действия. В 1703 г. в Москве была издана «Арифметика, сиречь наука числительная» преподавателя Московской навигационной школы Л. Ф. Магницкого, по ней обучались около полустолетия. В книге подробно изложены правила арифметики (включая тройное и правила ложных положений), измерение основных геометрических фигур, начала алгебры, тригонометрии и навигации; дается решение очень большого числа задач; всего «Арифметика» содержит 662 страницы. Руководство Магницкого использовалось в школах и для самообразования. — *Прим. ред.*

того систематическое изложение *вычисления сложных процентов и рент*. Эта работа составляет четвертую главу введения к таблицам логарифмов Шервина. Интересно отметить, что во всех случаях Галлей писал формулы в буквенном виде, а для случая вычисления рент, когда ищется размер процента, он при решении уравнения

$$\frac{c}{r}-1=\frac{c}{r}\,q-q^n$$

относительно q (где $q=1+\frac{p}{100}$, c — капитал, r — рента, n — время и p — процент) разработал весьма целесообразный приближенный метод. К формулам Галлея Эйлер присоединил во «Введении в анализ» (1748) так называемое уравнение амортизации

$$q^n c=\frac{q^n r-r}{q-1}$$

и решил его относительно n. Карстен во втором томе своей «Системы математики» (1768) добавил еще решения этого уравнения относительно r и c. Укажем также, хотя это уже и не вполне элементарно, а главное, не получило практического приложения, — что Як. Бернулли вычислил (Acta Erud., 1690) величину долга a, непрерывно нарастающего из $\frac{b}{a}$ % годовых, равную к концу года $ae^{b/a}$, в форме ряда

$$a+b+\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 3\cdot a^2}+\ldots$$

Реформа методики преподавания арифметики в немецких школах вышла из ученых кругов. Уже И. Х. Штурм дал в своих «Краткой математике» (Mathesis compendiaria, Альтдорф, 1670) и «Юношеской математике» (Mathesis juvenilis, 1699 и 1701) сочинения, благодаря которым обучение математике становилось доступным и неспециалистам. Его сын Л. Х. Штурм в «Кратком изложении всей математики» (Kurzer Begriff der gesamten Mathesis, 1710) продолжил работу отца. В «Основаниях всех математических наук» (1710) Хр. Вольф со всей энергией выступил на защиту системы преподавания, на первый план выдвигающей понимание и логическую тренировку ума. «Недостаточно, — писал он, — чтобы учитель говорил истину, необходимо еще, чтобы ученики понимали, что это истина». И далее, «излагая арифметику, нужно не только показывать правила, по которым можно найти требуемые числа, но должно ясно уразуметь, почему искомые числа могут быть найдены с помощью этих правил».

С этого времени действительно наметился поворот к лучшему, и предисловия ко всем позднейшим руководствам арифметики XVIII столетия стали подчеркивать охарактеризованную только что точку зрения. Превосходнейшей из этих книг, не знавшей в течение всего века соперников, была «Доказательная арифметика» (Demonstrative Rechenkunst, Лейпциг, 1732) Хр. Клаусберга, объемом в 1520 страниц. Клаусберг снабдил все правила необходимыми пояснениями и доказательствами, тщательно и исчерпывающе разобрал весь теоретический и практический материал арифметики. Здесь впервые давалось цельное и полное исследование вычисления процентов, детальное изложение вексельных вычислений, систематическое рассмотрение задач на смеси и специальная глава о счетах за тару. Так как книга предназначалась для практических целей, то буквенного исчисления автор вообще избегал. Зато в ней были изложены правила простого и двойного ложного положения, а также нашли применение бригсовы логарифмы, таблицу которых от 1 до 100 сам автор вычислил с 32 десятичными знаками.

Наряду с выдающимся сочинением Клаусберга мы назовем еще отличную «Пфортскую арифметику» (Arithmetica Portensis, 1748) И. Гюбша, учителя княжеской школы в Пфорте. И он придает главное значение пониманию отдельных действий и приемов; приложения у него отходят при этом на более далекий план, чем у Клаусберга.

Внутреннее сочетание буквенного исчисления с арифметикой вновь встречается в «Основаниях арифметики, геометрии и тригонометрии» (1758) Кестнера, в которых также был рассмотрен весь арифметический материал, включая логарифмы, и к которым примкнуло в 1786 «Продолжение арифметики в приложении к различным деловым вопросам» (Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendung auf mancherlei Geschäfte). Сочинения Кестнера, предназначавшиеся, главным образом, для высшей школы, постепенно вытеснили книги Хр. Вольфа, которые они превосходили своей большей основательностью и глубиной, хотя пространность их часто действовала утомляюще [1]).

---

[1]) В России Эйлер опубликовал Einleitung zur Rechenkunst (2 части, СПб., 1738 — 1740), вышедшее также под названием «Руководства к арифметике» в русском переводе В. Ададурова и В. Кузнецова в Петербурге в 1740 — 1760 годах. Эйлер стремился соединить ясность изложения с основательностью доказательств, что удалось ему во многом лучше, чем другим современникам. Однако Эйлер написал только отделы о действиях с целыми и дробями и об именованных числах; намерение дать в следующих частях изложение правил коммерческой арифметики, десятичных дробей и логарифмов осталось невыполненным. Наряду с «Арифметикой» Магницкого книга Эйлера оказала большое влияние на некоторые последующие руководства, например, на учебники Н. Г. Курганова «Универсальная арифметика» (СПб., 1757), «Арифметика или числовник» (СПб., 1771 и др. издания).

На русском языке вышел также ряд учебников арифметики С. Румовского, Д. Аничкова и др., примыкающих к сочинениям Вольфа и его немецких последователей. Подробнее см. в библиографическом труде В. В. Бобынина, указанном в списке литературы в конце настоящей книги. — *Прим. ред.*

Те же цели, что «Основания» Кестнера, преследовала упоминавшаяся уже выше и превосходная для своего времени «Система математики» Карстена. В первой части, вышедшей в 1767 в Грейфсвальде, Карстен систематически рассмотрел обычную арифметику, проводя при этом строгое различие между вычислениями с именованными и с отвлеченными числами. В задачах на именованные числа он пользовался решением с помощью уравнений, что тогда было еще мало принято. Так, например, он вывел при помощи уравнений правило смешения, для которого Эригон давал еще геометрическое доказательство. Престэ, правда, выразил его с помощью буквенных величин, но зато не доказал. Главная ценность работы Карстена заключается, однако, в систематическом построении буквенного исчисления, проведенном автором в той мере, в какой это было тогда возможно.

И в Голландии, где возникло «правило Рееса», постепенно пришли к убеждению в необходимости при обучении обосновывать правила арифметики. Об этом свидетельствуют «Первые основания арифметики» и «Основание числовного и буквенного исчисления» (Eerste Beginselen der Reeken-Kunde, Гаага, 1769, и Institution du calcul numérique et littéral, Гаага, 1770), изданные Ж. Блассиером. Он алгебраически обосновывает учение о пропорциях и на этом строит алгорифм Рееса.

Несколько раньше в Дании тоже появилась «Математика для детей или датская школьная математика» (Mathesis puerilis eller Dansk Skole Mathematik, Копенгаген, 1765) О. А. Борреби, выступавшего против механического усвоения. Впрочем, книга Борреби не встретила, по-видимому, особенного сочувствия, ибо обещанная вторая часть света не увидала.

Во французских школах предреволюционного времени в большом ходу были «Начальные уроки математики» (Leçons élémentaires de mathématiques) астронома Н. Л. де-Лакайля, впервые опубликованные в 1741. Хотя в них входила и теоретическая арифметика, но доказательствами она была снабжена весьма скудно, а буквенное исчисление к ней не привлекалось: это был несомненный шаг назад. В позднейших изданиях 1770 и 1784, редактированных аббатом Ж. Мари, профессором в Колледже Мазарини, обоснованию правил также не было уделено внимания [1]). Если это сочинение в неоднократных переводах на латинский и итальянский языки (до 1796) получило чрезвычайное распространение в Италии, то это показывает, что и в Италии преподавание стояло тогда не выше, чем во Франции.

Впрочем, и выдающиеся французские математики включали в свои руководства арифметические главы. Так, «Курс математики для гардемаринов» и «Курс математики для артиллерийского корпуса»

[1]) Последующие издания выпустили Ш. Тевено и Ж. Лабей (еще в 1811).

(Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Париж, 1764/69 и Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie, Париж, 1770/ 72) Э. Безу, вышедшие в нескольких изданиях, содержали арифметику, делавшую бо́льший упор, чем сочинение Лакайля, на теоретическое обоснование, хотя нигде не пользовавшуюся буквенным исчислением. Вычислениям с десятичными дробями автор здесь обучал, непосредственно примыкая к вычислениям с целыми числами. Сказанное относится также к «Элементарному трактату по чистой математике» (Traité élémentaire de mathématiques pures) Э. Лемуана, выпущенному в 1790 в Париже и предназначенному для менее успевающих учеников.

Выдающееся влияние на педагогические реформы, произведенные во Франции в конце XVIII столетия, оказал С. Фр. Лакруа. Среди его многочисленных превосходных руководств имеется и «Трактат по арифметике» (Traité d'Arithmétique), вышедший в Париже в 1797 и предназначенный для Центральной школы.

Из названных выше сочинений видно, что в конце XVIII столетия, т. е. значительно позднее, чем в Германии, и во Франции укрепилось мнение, что не следует обучать одним лишь приводимым без доказательства правилам арифметики и что момент доказательства обладает важным педагогическим значением, по крайней мере для преподавания в высшей школе.

В английских книгах XVIII столетия это убеждение проступает менее выпукло. Здесь все еще переиздавались старые работы Кокера (см. стр. 25), Э. Уингета (Natural and artificial arithmetick — «Естественная и искусственная арифметика», первое издание, 1630) и других, с их механически заучиваемыми правилами; впрочем, последняя книга была выпущена Дж. Додсоном в 1760 в значительно улучшенном виде. На более высоком уровне стоял предназначавшийся в первую очередь для практиков «Полный трактат по практической арифметике и бухгалтерии» (A complete Treatise on practical Arithmetic and Book-Keeping) математика Ч. Геттона, выдержавший ряд изданий (8-е датировано 1788). В нем, в частности, было уделено большое внимание вычислениям с десятичными дробями. Однако в тогдашней Англии усиленно занимались и двенадцатеричными дробями, например, в «Лучшем товарище землемера» (The measurers Best Companion) Т. Сеттона, вышедшем в 1785 в Грит-Ярмуте. Научный подход лучше всего был выражен в «Путеводителе школьника по арифметике» (The Scholar's Guide to Arithmetic), опубликованном в 1780 в Лондоне Д. Бонникестлем, профессором математики Вульвичской военной академии. В этой книге содержались доказательства правил арифметики, частью представленные в алгебраической форме. Восемнадцатое издание этой книги появилось еще в 1851.

Мы уже отмечали, что в XVII столетии десятичные дроби применялись только в астрономически-тригонометрических вычислениях. Положение вещей не менялось до конца XVIII столетия, в силу чего десятичные дроби в обыкновенных учебниках арифметики затрагивались, как правило, лишь мимоходом и подробнее разбирались лишь в руководствах, предназначенных для высшего образования. Перемена наступила с введением метрической системы мер и весов, о которой мечтали уже давно и которая явилась одним из прогрессивных последствий французской революции. Еще в 1585 голландец С. Стевин обратил внимание правительств на необходимость и пользу такого нововведения, но ему не удалось осуществить свои планы. Только в 1790 Франция положила начало созданию новой системы денег, мер и весов, которая была бы приемлемой для всех народов. Какой контраст с тем фактом, что главное парижское счетоводство вплоть до XVIII столетия держалось римских цифр! Конвент учредил комиссию, в которую среди других вошли крупнейшие ученые этого великого времени — Лагранж, Лаплас и Монж. В качестве единицы длины решено было принять одну десятимиллионную часть четверти земного меридиана. Все остальные меры должны были быть установлены в зависимости от этой единицы и повсюду должно было быть проведено исключительно десятичное деление. Для точного определения новой единицы длины, — метра, — было предпринято новое градусное измерение меридиана, и на основе полученных результатов 24 апреля 1799 была введена новая система мер и весов. В течение XIX столетия большинство европейских государств также приняло метрическую систему. Благодаря этому десятичные дроби, столь долго представлявшие лишь научный интерес, внезапно приобрели выдающееся практическое значение. И хотя арифметическое содержание теории десятичных дробей, по крайней мере обыкновенных, не могло уже быть обогащено чем-либо новым, но зато они проникли в XIX столетии в школы; благодаря их простоте стало непрерывно возрастать и их значение в методике преподавания.

Среди людей, которые много сделали для введения десятичной системы, элементарными отделами математики интересовался знаменитый Лагранж. В 1795 он прочитал в основанной Конвентом в Париже Нормальной школе курс лекций по арифметике и алгебре. В этих лекциях, опубликованных в Séances des Ecoles normales (год III, т. е. 1794/95)[1], Лагранж вновь изложил метод десятичного дополнения при вычитании чисел, бывший известным, вероятно, уже индусам, рассмотрел периодические десятичные дроби, дал общее буквенное доказательство теоремы, что произведение вычетов двух чисел по модулю третьего (или вычет этого произведения вычетов) равно вычету произведения обоих чисел. Стремясь к углублению понимания предмета, он обратил внимание на условия,

[1]) Имеется немецкий перевод Г. Нидермюллера под названием Mathematische Elementar-Vorlesungen, Лейпциг, 1880.

при которых только и может применяться тройное правило. Именно, это имеет место, когда приращение зависимой величины пропорционально приращению независимой. Он высказал также некоторые соображения о значении правила смешения и коснулся при этом таблиц смертности (см. главу IV). Наконец, в задачах на смеси с несколькими сортами он воспользовался для получения целочисленных решений собственным приемом, основанным на применении цепных дробей, с которым мы встретимся в главе о теории чисел.

Объем и значение учения об *арифметических цепных дробях*, встречавшихся еще в XVI столетии у итальянца Бомбелли, а затем у Катальди и нюрнбержца Швентера (Цейтен, II, стр. 163—164), в XVII и XVIII столетиях значительно возросли. Валлис в «Арифметике бесконечных» (Arithmetica infinitorum, Оксфорд, 1656) рассмотрел цепные дроби с произвольными числителями и знаменателями и привел для них закон образования подходящих дробей, который Швентер дал только для дробей с числителями, равными единице. Гюйгенс, у которого при конструировании планетария появилась необходимость выразить возможно точнее с помощью возможно малых чисел отношения времен обращения мировых светил, также употребил для этой цели цепные дроби и с успехом изучил ряд их свойств. Впрочем, трактующее об этом сочинение «Описание планетарного автомата» (Descriptio automati planetarii) было опубликовано по оставшимся после него бумагам только в 1703. Гюйгенс нашел, что числители и знаменатели подходящей дроби всегда взаимно просты, что она дает лучшее приближение, чем любая дробь с меньшим знаменателем, и что последовательные подходящие дроби бывают попеременно то больше, то меньше самой непрерывной дроби. Запись Гюйгенса совпадала с нашей. Но более всего продвинул учение о непрерывных дробях Л. Эйлер, впервые создавший настоящую их теорию. С одной стороны, он снабдил теоремы своих предшественников доказательствами, с другой — дал ряд новых теорем. Так, например, мы обязаны ему основным равенством

$$\frac{Z_n}{N_n}-\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{N_n\cdot N_{n-1}},$$

теоремой, что каждую рациональную дробь можно обратить в конечную, а каждую иррациональную — в бесконечную непрерывную дробь, и методом преобразования таких дробей в сходящиеся ряды и обратно. Резюме своих исследований об элементарных свойствах непрерывных дробей, начатых еще в Comm. Ac. Petr., 1737 (1744), он изложил во «Введении в анализ» в 1748; затем он дополнил свои результаты в многочисленных позднейших работах. Лагранж, как упоминалось, тоже много занимался непрерывными дробями (см. также его «Приложения» к французскому переводу «Алгебры»

Эйлера, вышедшему в 1774) и, в частности, исследовал также непрерывные дроби со знакопеременными знаменателями. Но так как другие его работы о непрерывных дробях относятся к теории чисел, алгебре и теории функций, то мы их дальше разбирать здесь не будем.

Обратимся теперь к вспомогательным средствам, применявшимся для облегчения вычислений. Наиболее важные из них, таблицы логарифмов, мы здесь рассматривать не будем, а займемся их историей в главе о тригонометрии. Кроме логарифмов, постепенно вошли в употребление еще и другие числовые таблицы. К ним относится таблица произведений Г. Гогенбурга[1]), заново вычисленная Крелле и расположенная им столь остроумно, что эту обширную таблицу удалось опубликовать в двух томах (in octavo) в 900 страниц (1820). В «Таблицах произведений и степеней чисел» (Tables of the Products and Powers of Numbers, Лондон, 1781, 8°) Ч. Геттона приводилась таблица, в которой один из множителей принимал значения от 1 до 100, а другой — от 1 до 1000; другая таблица этой книги содержала квадраты всех чисел до 25 400 и кубы до 10 000.

Таблица квадратов всех чисел от 1 до 10 000 была приложена еще иезуитом П. Гульдином к его книге «О центре тяжести» (De centro gravitatis, Вена, 1635, 4°)[2]). Но наиболее значительным произведением такого рода было появившееся в 1690 в Лейпциге «Табличное измерение четырехугольников» (Tetragonometria tabularia) Иоганна Лудольфа, в котором были помещены квадраты всех чисел до 100 000; автор показывал также, как его таблицу использовать для перемножения двух чисел по формуле $ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2$. И. Г. Ламберт, с которым мы еще нередко будем встречаться, установил в «Дополнениях к логарифмическим и тригонометрическим таблицам» (Zusätzen zu den logarithmischen und trigonometrischen Tafeln, 1770) правила, позволяющие определять, является ли какое-либо число квадратом. Подобные правила были указаны также в многочисленных статьях Эйлера.

В большем числе появлялись значительно более важные таблицы простых и составных делителей чисел. Среди них мы отметим лишь некоторые, например, таблицу простых чисел от 1 до 10 000 Ф. ван-Скаутена младшего, появившуюся в 1657 в его «Математических этюдах» (Exercitationes mathematicae), и таблицу всех делителей чисел от 1 до 102 000 Ламберта во втором томе его труда «Об употреблении математики» (Beiträge zum Gebrauche der Mathematik,

---

[1]) Это «Универсальные арифметические... таблицы» (Tabulae Arithmeticae... universales, Аугсбург, 1610). — *Прим. ред.*

[2]) Впрочем, таблицы Маджини, вышедшие в 1592, уже дошли до квадрата 100 100.

Берлин, 1770), продолженную А. Фелькелем до 408 000. Фелькель довел, по-видимому, свои вычисления до 2 000 000, но результаты труда в его «Таблицах» (Tafeln, Вена, 1776) не приведены. Сам Ламберт определил простые числа до 101 977 и для их отыскания указал ряд теорем. Марси (1772) продолжил их отыскание до 400 000, а Вега во втором издании своих «Логарифмически-тригонометрических таблиц» (Tabulae logarithmo-trigonometricae, Лейпциг, 1797) привел таблицы множителей до 102 000. За первый миллион перешагнул лишь в 1811 голландец Л. Чернак (он дошел до 1 020 000), а за третий (до 3 036 000) — Иоганн Буркхардт в «Таблицах делителей всех чисел 1-го, 2-го и 3-го миллионов вместе с простыми числами» (Tables des diviseurs pour tous les nombres du 1. 2. et 3. million avec les nombres premiers, Париж, 1814/17). Наименьшие делители чисел 7-го, 8-го и частично 9-го миллионов по предложению Гаусса определил вычислитель Ц. Дазе (опубликовано посмертно, Гамбург, 1862/65); для 4-го, 5-го и 6-го миллионов их впервые установил Дж. Глешер в 1879/83. Венская Академия обладает еще неопубликованной рукописью, в которой Я. Ф. Кулик вычислил наименьшие делители всех чисел от 3-го до 100-го миллиона — гигантский труд, который до сих пор не мог быть напечатан[1]).

Хотя палочки Непера[2]) представляли собой весьма неудовлетворительное пособие при более сложных вычислениях, ими все же, по-видимому, нередко пользовались. Если в случае применения шкалы Гунтера[3]) еще приходилось пользоваться циркулем, то У. Оутред внес радикальное усовершенствование, применив две одинаковые шкалы, скользящие одна вдоль другой[4]), а С. Партридж придал этой «счетной линейке» нынешний вид, заставив скользить одну шкалу, движок, в пазу другой (см. его «Описание и употребление прибора, называемого двойной шкалой отношений» — The

---

[1]) Впрочем, Д. Лемер, выпустивший новейшую таблицу множителей (Factor table for the first ten millions, Вашингтон, 1909), нашел в таблице Кулика 226 ошибок только в 10-м миллионе.

[2]) В «Двух книгах о рабдологии или счете с помощью палочек» (Rhabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo, Эдинбург, 1617) Непер описал действия на счетном приборе из 10 палочек (греческое «рабдос» — значит прут, палочка), на боковых гранях которых в определенном порядке были нанесены произведения от 1.1 до 9.9 — *Прим. ред.*

[3]) Э. Гунтер изобрел логарифмическую шкалу, лежащую в основе устройства логарифмической линейки. В России профессор Петербургской Морской Академии А. Фархварсон издал «Книжицу о сочинении и описании сектора, скал плоской и гунтерской со употреблением оных инструментов в решении различных математических проблем» (СПб., 1739). — *Прим. ред.*

[4]) Соответствующие труды Оутреда: «Круги отношения» (The circles of Proportion, Лондон, 1632) и «Дополнение к пользованию прибором» с приложением «Объяснения двух вычислительных линеек» (Addition unto the use the instrument; The declaration of the two rulers for calculation, Лондон, 1633).

Description and Use of an Instrument called the Double Scale of Proportion, Лондон, 1662). Это описание привел в своем «Арифметико-геометрическом обозрении» (Theatrum Arithmetico-Geometricum, Лейпциг, 1727) Я. Лейпольд, благодаря чему счетная линейка впервые получила известность в Германии.

В силу тех же потребностей возникли счетные машины, изобретение которых было стимулировано открытием счетных палочек. Сомнительно, что подобным аппаратом обладал иезуит Иоганн Цирманс. Правда, в своих (вообще весьма малоценных) «Математических науках» (Disciplinae mathematicae, Лувен, 1640) он упоминает об изобретенном им приспособлении, снабженном колесами и позволявшем безошибочно производить любое умножение и деление. Но, скорее всего, ему было знакомо открытие Оутреда, и он имел в виду только счетную линейку. В 19-летнем возрасте, т. е. около 1642, знаменитый Блез Паскаль действительно построил такую машину. Описание ее дал Дени Дидро в Oeuvres Паскаля (1779), но тогдашним механикам не удалось восстановить хранящийся и по сию пору в Париже экземпляр так, чтобы его можно было применить практически, хотя теоретически он был задуман правильно. Такая же участь постигла машину Лейбница, изобретенную в 1671 и со значительными улучшениями построенную в 1673, хотя и она была вполне точной. Оригинал этой машины и ныне стоит в ганноверской библиотеке. Основатель первой немецкой фабрики счетных машин, инженер А. Буркхардт из Глазхютте, заново смонтировал машину Лейбница, так что ее можно было пустить в ход. Описание оригинала было опубликовано в Misc. Berol., 1710.

Усовершенствования в машину Лейбница внесли в XVIII столетии М. Кнутцен[1]), в 1774 пастор М. Ган, впервые построивший пригодную для употребления и ремесленного изготовления машину, и в 1783 инженер Иоганн Мюллер, счетная машина которого уже давала звонок, если от нее требовали чего-либо неподходящего. Замена руки вычислителя механическим приводом, которую имел в виду еще Лейбниц, была осуществлена в машине А. Штерна (1814), являвшейся настоящим автоматом.

Впрочем, широкое практическое применение счетные машины получили только в XIX столетии, ознаменовавшемся массой новых изобретений в этой области.

---

[1]) М. Кнутцен — кенигсбергский профессор, скончавшийся в 1751, был учителем И. Канта.

ГЛАВА ВТОРАЯ

АЛГЕБРА

§ 1. Общая теория уравнений

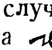
Открыв буквенное исчисление, Виет оказался в состоянии существенно расширить наши сведения о свойствах уравнений. Так, среди многого другого он установил зависимость между коэффициентами уравнения и его корнями в той мере, в какой это было возможно, если принимать только положительные корни. Отрицательные корни, как таковые, Виет еще не признавал (Цейтен, ч. II). Этот недостаток был устранен А. Жираром, который привлек отрицательные и даже мнимые корни и рассмотрел элементарные *симметрические функции корней*, а также привел формулы *степенных сумм* до четвертой степени включительно. Наконец, Т. Гарриот сделал уже серьезный шаг вперед по сравнению с несколько тяжеловесной символикой Виета. Он пользовался строчными буквами латинского алфавита, всегда обозначал неизвестную в уравнении через a и, например, вместо нашего

$$x^3 - 3b^2x = 2c^3$$

писал

$$aaa - 3 \cdot bba = + 2 \cdot ccc.$$

Здесь уже отчетливо проявилась все более возраставшая потребность в гибкой и пригодной для более сложных вычислений форме. Чем совершеннее становилась последняя, тем более алгебраическое исчисление выдвигалось на передний план, стремясь занять место геометрии, до того господствовавшей над всей математикой. Можно сказать, что построение математики на арифметико-алгебраической основе коренилось уже в работах Виета и его ближайших последователей. Однако лишь Декарт воспринял эту новую идею с глубоким пониманием ее значения и с подлинно творческой силой. Ее развитию он посвятил выпущенную им в 1637 знаменитую «Геометрию» (см. стр. 15), в которой содержались основы современной аналитической геометрии и которая составила эпоху также в алгебре и в математике вообще.

Осуществление плана Декарта — поставить алгебру на первое место и сделать ее пригодной для формулировки и исследования любых вопросов — принудительно требовало дальнейшего усовершенствования традиционной формы, теоретической и практической разработки учения об уравнениях. Первую задачу Декарт решил, как мы уже указывали в главе I, введя целесообразный способ записи степеней неизвестной величины и предложив ставить числовые коэффициенты впереди неизвестных. Так как благодаря введению единичного отрезка он избавился от необходимости соблюдать однородность выражений, то уравнения у него были вполне сходны с нынешними. Исключением является лишь знак равенства, который он писал в виде $\propto$. Сходство это усиливалось тем, что для обозначения неизвестных Декарт вместо гарриотовой a стал употреблять последние буквы алфавита — сначала z, затем y и, наконец, x. Тот факт, что для обозначения первой из неизвестных стала преимущественно применяться буква x, объясняется, возможно, наличием соответствующей литеры во французских типографиях в бо́льших количествах. Во всяком случае, здесь не могло иметь места «смешение» коссического знака  с буквой x, ибо недавно удалось показать, что Декарт не только знал коссические символы для x, x^2, x^3, но и сам пользовался ими в юности. Отсутствие членов в многочлене, стоящем в левой части уравнения (summa aequationis), Декарт первый стал обозначать с помощью звездочек. Так, например, он писал

$$z^4 * - 25\,zz - 60\,z - 36 \propto 0.$$

Обозначения Декарта тотчас же вошли в повсеместное употребление, но только чаще пользовались давно известным знаком равенства Рекорда (см. стр. 14). Однако лишь Иоганн Гудде в одном письме от 1657 (см. стр. 38) стал обозначать одинаковым символом коэффициенты, имеющие положительные или отрицательные значения, не отмечая этого специально знаком $+$ или $-$, и таким образом придал своему алгебраическому исчислению более общий характер.

Возможно, что во время своего пребывания в Голландии Декарт познакомился с сочинениями Жирара. Во всяком случае, и он подверг тщательному исследованию зависимость между корнями и коэффициентами. Это привело его к понижению степени уравнения посредством деления на разность $x - a$, где a — корень уравнения (чему, впрочем, учил еще в 1567 П. Нуньес), и к нахождению целочисленных корней путем разложения на множители постоянного члена уравнения. Истинные (положительные), ложные (отрицательные) и мнимые корни уравнения Декарт различал еще в 1628, т. е. до выхода жираровского труда «Новое открытие в алгебре» (Invention nouvelle en l'algèbre, 1629). Термин «мнимый», ставший известным из «Геометрии», принадлежал также самому

Декарту. Одним из важнейших открытий Декарта являлось называемое по его имени правило знаков, гласящее, что полное алгебраическое уравнение *может* иметь столько положительных корней, сколько имеется перемен знака у коэффициентов его членов, и столько отрицательных, сколько раз следуют подряд друг за другом два знака $+$ или два знака $-$. Вывод этого правила, о котором довольно определенно догадывался еще Кардано (Цейтен, ч. II), Декарт, однако, не дал, и лишь в XVIII столетии его снабдили различными доказательствами (см. стр. 42 и 46).

Кроме того, Декарт открыл новый способ решения уравнений четвертой степени, представляя левую часть уравнения в виде произведения двух квадратных трехчленов. Для этого он принял коэффициенты обоих множителей неопределенными и сравнил их произведение с первоначальным уравнением. В результате он получил для одного из неопределенных коэффициентов (через который легко выражались другие) уравнение шестой степени, немедленно приводившееся к кубическому. Декарт и здесь не раскрыл свой метод, но уже голландец Ф. ван-Скаутен, издавший «Геометрию» на латинском языке в 1649 и 1659, восполнил в приложенных ко второму из названных изданий «Комментариях» (Commentarii), требуемые доказательством выкладки. Несколько иным путем пошел в доказательстве истинности декартова решения Ф. Дебон (уже 1649), «Краткие замечания» (Notae breves) которого также вошли в латинские издания «Геометрии».

Примененное Декартом разложение на множители побудило Гудде, впоследствии много лет состоявшего амстердамским бургомистром, детальнее заняться изучением разложения на множители многочленов, образующих уравнения. Попутно он пришел к известному, быть может, еще Сципиону дель Ферро (около 1510; см. Цейтен, ч. II) решению уравнения третьей степени, в котором для случая $x^3 = qx + r$ делают подстановку $x = y + z$, дающую для y или z трехчленное уравнение шестой степени, приводящееся к квадратному. О своих открытиях он письменно сообщил в 1657 Ф. ван-Скаутену. Такой же метод был открыт независимо, еще двумя годами ранее, Хр. Гюйгенсом, также рассказавшим о нем в письме к Скаутену. В том же и во втором письме от 1658 (опубликованы во втором латинском издании «Геометрии», 1659) Гудде впервые изложил известное правило отыскания двойных и многократных корней уравнения.

Великий соперник Декарта, П. де-Ферма́, с которым нам еще предстоит познакомиться ближе, также занялся, в свойственной ему и примыкающей к Виету манере, важными алгебраическими исследованиями. Еще до 1638 он разработал очень простой и изящный прием *исключения* одного неизвестного из двух уравнений одинаковой степени. Он переносил в обоих уравнениях постоянные члены направо от знака равенства и затем производил деление на них. Приравнивание возникающих при этом двух выражений давало, после деления на неизвестное, уравнение со степенью на единицу ниже первоначальной. Повторение того же приема приводило в конце концов к уравнению первой степени относительно x; подстановка рационально выраженного отсюда значения x в одно из начальных уравнений давала результант[1]). Ферма́ наметил также способ приложения этого приема к нескольким уравнениям. Затем он свел к проблеме исключения задачу приведения уравнений к *рациональному виду*. С этой целью он вместо каждого из подлежащих устранению радикалов, кроме одного уединяемого радикала, вводил новую неизвестную. В возникающих таким образом уравнениях он удалял радикалы посредством возведения в степень и получал уравнения в числе, достаточном для исключения вспомогательных неизвестных.

Продолжая изложение дальнейшего развития чисто алгебраических исследований и оставляя пока в стороне применение Декартом и другими учеными геометрических приемов в алгебре, мы прежде всего остановимся на одном замечании Лейбница. Это замечание имело большое значение для позднейшей алгебры, и в нем следует видеть одно из непосредственных проявлений выдающейся одаренности Лейбница в формальном отношении. Исключение неизвестных из линейных уравнений было известно давно, но Лейбниц сумел придать ему особенно целесообразный вид. Уже в 1675 он впервые употребил индексы (см. стр. 15—16) для отличия принадлежащих в каком-либо смысле к одному роду точек кривой, обозначенных одной буквой. В одном письме к Лопиталю от 1693 он применил уже для составления *результанта трех линейных уравнений многократную индексацию*.

Уравнения эти он записал в виде

$$10+11x+12y=0,$$

$$20+21x+22y=0,$$

$$30+31x+32y=0;$$

мы, как известно, пишем теперь $a_{10}+a_{11}x+a_{12}y$ и т. п. Затем он приводит результант в форме

$$\begin{array}{ccc} 1_0\cdot 2_1\cdot 3_2 & & 1_0\cdot 2_2\cdot 3_1 \\ 1_1\cdot 2_2\cdot 3_0 & = & 1_1\cdot 2_0\cdot 3_2 \\ 1_2\cdot 2_0\cdot 3_1 & & 1_2\cdot 2_1\cdot 3_0, \end{array}$$

где подписанные друг под другом произведения подлежат

[1]) Выражение «результирующее уравнение» («aequatio resultans») происходит из «Универсальной арифметики» Ньютона (1707).

сложению[1]). Лейбниц полностью сознавал важность такого способа, который, как видно, закладывал основы для создания теории определителей, но далее его не разработал[2]). Для исключения одного неизвестного из двух уравнений более высокой, но одинаковой степени, т. е. для задачи, изученной уже Ферма́, Лейбниц предложил свой собственный прием. Каждое из уравнений умножается на многочлен степени на единицу ниже и с неопределенными коэффициентами. Затем коэффициенты уравнения, которое получится, если сложить оба эти произведения, приравниваются по отдельности нулю. Тогда уравнений получается на одно больше, чем введено неопределенных коэффициентов. Поскольку эти уравнения линейны, задача тем самым приведена к предыдущей. Этот метод можно рассматривать, как предшествующий известному методу Безу (см. стр. 50).

В Париже Лейбниц познакомился с Э. фон-Чирнгаузом. Связанный тесной дружбой с Лейбницем, Чирнгауз, естественно, хорошо был знаком с его работами. Привлекаемый, как и Лейбниц, математическими исследованиями, он занялся главным образом теорией уравнений. В 1683 Чирнгауз опубликовал в Acta Eruditorum известное под его именем преобразование уравнения любой степени в другое уравнение той же степени, но с меньшим числом членов. Свой способ Чирнгауз письменно сообщил Лейбницу еще в 1677. Этот способ заключается в том, что сначала из уравнения

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

---

[1]) Мы следуем здесь перепечатке в Werke Лейбница, изданных Гергардтом. Мы не можем, однако, судить, точно ли соответствовала эта перепечатка рукописи Лейбница.

Подробнее об обозначении индексов у Лейбница см. у Д. Манке в Bibliotheca mathematica (3) **13**, 1912—1913, стр. 250—260.

[2]) Регулярный прием решения системы с числовыми коэффициентами вида

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n,
\end{gathered}$$

путем сведения ее к системе

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
\bar{a}_{22}x_2 + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n &= \bar{b}_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
\bar{a}_{nn}x_n &= \bar{b}_n,
\end{aligned}$$

был разработан в Древнем Китае еще до начала н. э. Исключение неизвестных производится с помощью действий над рядами таблицы коэффициентов и правых частей системы по правилам, сходным с правилами современной теории определителей (см. Древнекитайский трактат «Математика в девяти книгах», перев. с примечаниями Э. И. Березкиной. —Историко-математические исследования, вып. X, М., 1957, стр. 564 и след.). Отправляясь от приема китайцев, японский математик Кова Секи в 1683 разработал правила решения систем линейных уравнений, еще более близкие к методу теории определителей (см. книгу Д. Смита и И. Миками в списке литературы). — *Прим. ред.*

и вспомогательного уравнения с неопределенными коэффициентами

$$y=b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\ldots+b_{n-1}$$

исключают x. Если бы в возникающем при этом уравнении

$$y^n+c_1y^{n-1}+c_2y^{n-2}+\ldots+c_n=0$$

можно было определить постоянные b_k, входящие в коэффициенты c_i так, чтобы исчезли все c_i от c_1 до c_{n-1}, то главная проблема теории уравнений была бы решена таким способом, как это представляли себе Чирнгауз и многие его современники, т. е. в радикалах. Проведя требуемые выкладки при $n=3$, Чирнгаузен нашел новое решение уравнения третьей степени. Однако сделанное им отсюда заключение, что возможно произвести соответствующие вычисления и для всякого n, было опрометчивым. Такое же утверждение было выставлено еще раньше в «Математических примерах» (1667) Ф. Дюлораном, который, впрочем, устранил только один-единственный член с помощью обычной подстановки $x=y+k$. Лейбниц писал Чирнгаузу, что он располагает, как ему кажется, доказательством того, что для уравнений выше четвертой степени требуемые выкладки произвести невозможно. Тем не менее Лейбниц был уверен в разрешимости уравнения пятой степени в радикалах и предпринял в этом направлении некоторые попытки. То, что действительно можно извлечь для уравнений пятой степени из преобразования Чирнгауза, а именно, приведение его к форме $x^5+Ax+B=0$, нашел лишь шведский математик Э. Бринг в диссертации от 1786 (Лунд). Впрочем, Бринг не знал, что дальше предпринять с этой формой, и только Ш. Эрмит построил на ней в 1858 свое решение уравнения пятой степени с помощью эллиптических функций. Общее доказательство того, что уравнения выше четвертой степени, вообще говоря, в радикалах неразрешимы, на что указывал в своей диссертации 1799 Гаусс и что многократно пытался доказать итальянец П. Руффини (в последний раз в 1813), — является одним из величайших достижений молодого норвежского математика Н. Абеля (1824 и 1826, ср. стр. 379).

В то самое время, на которое падают упомянутые успехи в алгебре немецких ученых, великий Ньютон читал в Кембридже лекции, из которых возникла уже известная нам и очень важная «Универсальная арифметика» (см. стр. 18). Частично она стала известной ранее ее выхода (1707): с одной стороны, из самих лекций Ньютона, посещавшихся, впрочем, весьма умеренно, с другой стороны, из «Алгебры» (1685) Валлиса, в которую вошел кое-какой ее материал. Нам приходилось обращаться к «Универсальной арифметике» уже в главе об арифметике. Здесь мы отметим то, что в этом сочинении обусловило дальнейший прогресс алгебры. Прежде всего, Ньютон сформулировал основную теорему алгебры о числе корней уравнения осторожнее, чем Жирар;

имея в виду только действительные корни, он, подобно Декарту в его «Геометрии», писал: «Уравнение *может* иметь столько корней, каково его измерение, но не более». К Ньютону примкнул в своей «Алгебре» (1748) Маклорен, и лишь Эйлер в Misc. Berol. 1743 высказал эту теорему точно так, как это делают ныне, хотя и он не был в состоянии доказать ее безупречно. Впервые удалось это в 1797 Гауссу, опубликовавшему свое доказательство в диссертации «Новое доказательство и т. д.» (Demonstratio nova etc., Гельмштедт, 1799). Предшествующие попытки Даламбера — в Mém. Ac. Berl., 1746 (1748), Эйлера — там же, 1749 (1751), Лагранжа — в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1772 (1774) и других не увенчались полным успехом. Несмотря на это, французы часто называют это предложение «теоремой Даламбера».

Для сумм степеней корней Ньютон установил называемые и теперь по его имени рекуррентные формулы, которые он, впрочем, ясно высказал только до пятой степени включительно[1]). Общий закон их образования был впервые доказан К. Маклореном в «Алгебре» и Эйлером во втором томе «Сочинений различного содержания» (Opuscula varii argumenti, 1750). Виттенбергский профессор Берманн[2]), Лагранж[3]) и Грунерт[4]) позднее дали другие доказательства.

Декарт высказал свое правило знаков в весьма осторожной форме. Это побудило Ньютона произвести самостоятельное исследование вопроса. В результате он не только точно установил это правило для уравнений, все корни которых действительны, но и попытался впервые дать правило, позволяющее определить число мнимых корней. Оно гласило, что уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

имеет по меньшей мере столько комплексных корней, сколько есть перемен знака в ряду

$$+a_0,\quad \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{2}a_1^2 - a_0a_2,\quad \frac{2}{n-1}\cdot\frac{n-2}{3}a_2^2 - a_1a_3,\ \ldots$$
$$\ldots,\quad \frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{n}a_{n-1}^2 - a_{n-2}a_n,\quad +a_n.$$

Позднее мы увидим, что это правило не дает вполне удовлетворительного критерия (см. стр. 49).

[1]) Ньютон ясно высказал правило образования этих формул для всех степеней, меньших степени уравнения (позднейшая поправка Г. Вилейтнера).

[2]) «Доказательство алгебраической теоремы» (Demonstratio theorematis algebraici, Виттенберг, 1745).

[3]) Mém. Ac. Berl., 1768 (1770). Несмотря на утверждение Лагранжа, что его доказательство проще обычных, оно, по существу, совпадает с первым доказательством Эйлера в названной книге.

[4]) «Математические статьи» (Mathematische Abhandlungen, Альтона, 1822).

Наконец, Ньютон коснулся еще одного вопроса, который приобрел чрезвычайную важность в наше время, а именно — проблемы *приводимости уравнений.* Для случая линейных множителей он справился с ней вполне, а для множителей высшей степени дал первый намек на соответствующее правило. Способ Ньютона для линейных множителей совпадал по существу с приемом, данным еще Я. ван-Вессенером в первом латинском издании «Геометрии» Декарта (1649), и в нем можно видеть предшественника метода, примененного впоследствии Л. Кронекером и устанавливающего все вообще рассматриваемые делители. Следует упомянуть еще о его приеме *исключения* (exterminatio) одного неизвестного из двух уравнений. Этот прием, собственно говоря, восходит к Ферма́, но Ньютон вместо того, чтобы исключить постоянные члены, устраняет высшие степени неизвестного, благодаря чему и получает уравнение более низкой степени. Это — тот же метод, который опубликовал во втором издании декартовой «Геометрии» (1659) Гудде и который вновь исследовал во «Введении в анализ» (1748) Эйлер, под именем которого он теперь общеизвестен [см. также Mém. Ac. Berl., 1764 (1766)]. Важно заметить, что Ньютон, подобно Лейбницу в случае уравнений первой степени, счел необходимым систематически оформить процесс элиминирования для высших уравнений и даже составил таблицу результантов любых двух уравнений первых четырех степеней.

Мы уже неоднократно упоминали английского математика Дж. Валлиса, профессора в Оксфорде, и, в частности, его «Трактат по алгебре» (1685 и 1693). Это сочинение имеет для нас значение главным образом потому, что оно объединило в органическое целое все известные тогда алгебраические методы и результаты и ознакомило современников как с ними, так и с некоторыми собственными интересными мыслями автора, часть которых мы уже отметили выше. Если бы национальное самомнение Валлиса и, в частности, предубеждение против Декарта не склонили его чрезмерно выпятить заслуги своих соотечественников, а среди них особенно Гарриота, то историческое предисловие, предпосланное им книге, также обладало бы большей ценностью в глазах историка математики. Впрочем в «Алгебре» имеется много важных исторических указаний.

Полную противоположность в отношении книжной эрудиции представлял собой тяжело и неясно написанный «Трактат по алгебре» француза М. Ролля, выпущенный в Париже в 1690. Наиболее интересные его результаты относились к приближенному решению уравнений, и мы еще к ним возвратимся в следующем параграфе (стр. 64). Здесь же отметим, что Ролль подробнее исследовал метод образования результанта посредством отыскания общего наибольшего делителя, метод, данный также еще Ньютоном, что он изобрел новые, хотя и громоздкие, способы решения уравнений третьей и четвертой степени и впервые точно сформулировал теорему: всякий корень n-й степени имеет n значений; при n нечетном все корни, кроме одного, мнимы; при n четном могут быть два корня действительны, а остальные мнимы.

Впрочем, сам Ролль вычислил лишь три корня уравнения $x^3 = -a^3$, а для уравнения $x^3 = 8$ это сделал еще пятью годами ранее Валлис в своей «Алгебре» (ср. также работу Кольсона в Philos. Trans., 1707). В общем случае представление корня n-й степени из числа удалось найти Муавру (ср. стр. 23), занимавшемуся этим вопросом в Philos. Trans. за 1707, 1722 и 1738, а также в своих «Аналитических этюдах» (Miscellanea analytica, 1730) и установившему теорему, до сих пор сохранившую его имя. Муавр знал, согласно Виету, что неприводимый случай формулы Кардано можно обойти, отождествив уравнение третьей степени с формулой синуса трехкратного угла. Отсюда следовало, что сумма двух определенного вида кубических корней из комплексных чисел дает действительное число. Чтобы распространить этот результат на корни n-й степени, Муавр исходил из формулы синуса n-кратного угла, которую для целого нечетного n выразил Ньютон в 1676 в одном письме к Лейбницу в форме:

$$ny - \frac{n(n^2-1)}{3!}y^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{5!}y^5 - $$
$$- \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{7!}y^7 + \ldots = a.$$

При $y = \sin\varphi$, $a = \sin n\varphi$ мы тотчас узнаем здесь требуемое тригонометрическое уравнение. Корни его Муавр без вывода дал в виде

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2-1}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{a - \sqrt{a^2-1}}, \quad (a<1).$$

При этом он показал, сначала на примере, а позднее общим образом, что эта форма равнозначна такой:

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\varphi + i\cos n\varphi} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\varphi - i\cos n\varphi},$$

он лишь не обладал еще нашей символикой. Уравнение

$$\sqrt[n]{\cos n\varphi \pm i\sin n\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

в скрытом виде также содержалось в его статье от 1722. В 1738 он снова возвратился к этим вещам и непосредственно вычислил корень $\sqrt[n]{a + \sqrt{-b}}$. Он положил его равным $x + i\sqrt{y}$, численно определил x и y для $n = 3, 4, 5, 6, 7$ и отсюда сделал заключение относительно любого n. Результат, приведенный им в словесной форме, содержит представление n значений для вышеуказанного корня, т. е. самую общую форму *теоремы Муавра*. В употребительном теперь виде ее привел только Эйлер во «Введении в анализ», 1748.

К тем же результатам, независимо от Муавра, пришел итальянский ученый граф Джулио Фаньяно де Фаньяни в 1738 [18-й том Raccolta Calogerà[1])]. Более известный своими работами по анализу, Фаньяно занимался также и алгеброй. Например, во втором томе своих «Математических произведений» (Produzioni matematiche, Пезаро, 1750) он дал метод, позволяющий единообразным путем решать уравнения вплоть до четвертой степени; Грунерт вновь открыл его в 1863, не зная о работе Фаньяно. В случае, например, уравнения второй степени этот метод состоял в том, что тождество

$$(a+b+c)^2=(a+2c)(a+b+c)+b^2+ab-c^2-ac$$

отождествлялось с уравнением

$$x^2=nx+p.$$

Затем из

$$x=a+b+c,\quad n=a+2c,\quad p=b^2+ab-c^2-ac$$

Фаньяно находил известную формулу. Из тождеств, возникающих при разложении $(a+b+c)^3$ и $(a+b+c)^4$, он аналогичным образом получил решения уравнений третьей и четвертой степени. Другой способ, ведущий к той же цели, опубликовал среди прочих также Эйлер в Comm. Ac. Petr., 1732/33 (1738).

В тесной связи с теоремой Муавра стоит разложение выражения $x^\lambda \pm a^\lambda$ на *действительные* множители. Высокоодаренный друг и ученик Ньютона, Р. Котес, который слишком рано умер для науки, оставил сочинение «Гармония мер». Оно было опубликовано в 1722 Р. Смитом и о нем мы будем еще говорить позднее. В этом издании Смит восстановил сохранившуюся в наследии его друга теорему о разложении выражения $x^\lambda \pm a^\lambda$. Хотя разложение это было представлено только в геометрической форме на чертеже, но в переводе на язык вычислений оно непосредственно дает формулы, известные теперь под именем его автора.

Тригонометрические функции впервые ввел в алгебру Виет при рассмотрении неприводимого случая формулы Кардано; Муавр сумел их использовать указанным образом для некоторых уравнений высших степеней. Довольно скоро их применили также для более удобного вычисления корней квадратных уравнений. Это

---

[1]) Calogerà — фамилия издателя.

сделал в «Геометрических лекциях» известный уже нам астроном Э. Галлей[1]; Вольф также наметил подобный прием в Acta Erud., 1715. После того астроном А. Д. дю-Сежур в «Аналитическом трактате о движениях и т. д.» (Traité analytique des mouvemens etc., 1786) впервые установил общую формулу решения для *обеих* форм $x^2 \mp 2ax \pm b^2$, которую Кестнер включил в 3-е издание своих «Оснований анализа конечных величин» (Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen, 1794). Единое для всех случаев решение дал Молльвейде в 1810.

Правило знаков Декарта (стр. 37—38) неоднократно привлекало внимание последователей Декарта и Ньютона. В письмах и в двух оставшихся рукописных статьях Лейбниц приписывал это правило Гарриоту, хотя в книге последнего нет ни одной относящейся к нему строки. Но так уж случилось, что вплоть до нашего времени это правило часто называли гарриотовым. Зегнер (ср. стр. 21), давший в своем «Рассуждении в письмах и т. д.» (Dissertatio epistolica etc., 1728) доказательство правила для случая, когда все корни действительные, — доказательство, основные идеи которого были мимоходом намечены еще Лейбницем в 1707 в переписке с Як. Германом и Хр. Вольфом, — также сначала допустил эту ошибку; при этом он опирался на «Начала универсальной математики» (1713/41) Вольфа. Указанное доказательство, как и доказательство, опубликованное Зегнером в Mém. Ac. Berl., 1756 (1758), а также вывод Т. Эпинуса [Mém. Ac. Berl., 1758 (1765)], исходили в основном из той же мысли, которую положил в основу своего доказательства, приведенного в мемуарах Парижской Академии за 1741, французский аббат Ж. П. де-Гюа де-Мальв. Де-Гюа умножал левую часть уравнения на линейный двучлен $x \pm p$ и рассматривал возникающие при этом изменения в чередовании знаков. Если в двучлене стоит верхний знак, то сохраняется число перемен знака; если же нижний, то остается без изменения число последовательностей одинакового знака; отсюда немедленно получается правило знаков Декарта для случая, когда все корни действительные. Исходя из тех же идей, Гаусс в 1828 дал впервые общее доказательство правила. В другой статье, опубликованной в том же томе мемуаров (за 1741), де-Гюа подошел к определению числа действительных и мнимых корней уравнения $\varphi(x)=0$ с геометрической точки зрения. Вопрос о числе корней того или иного вида он привел к вопросу об отыскании максимумов кривой $y=\varphi(x)$, пересекающей ось x в таком числе точек, дающих корни, которое не более чем на единицу превосходит число максимумов этой кривой. При этом «точками максимума» для него служили точки, в которых произве-

[1]) По одному указанию «Математического хранилища» (Mathematical Repository, т. I, Лондон, 1748) Додсона эти «Геометрические лекции» (Geometrical lectures) представляли собой приложение к последнему изданию «Алгебры» Дж. Керси (вероятно, изд. 1717).

дение $y\,d^2y$ отрицательно. Подобными соображениями воспользовался и Кестнер, когда попробовал доказать правило Декарта в сочинении «Доказательство теоремы Гарриота» (Demonstratio theorematis Harrioti, 1745).

Неудача попытки Чирнгауза с помощью своего преобразования решить уравнение выше четвертой степени отнюдь не смогла поколебать убеждения математиков XVIII столетия о разрешимости всех алгебраических уравнений в обыкновенных иррациональностях. Великий Эйлер также держался этого взгляда. Comm. Ac. Petrop. за 1732/33 (1738) содержали первую статью Эйлера о решении уравнений. Он указывал, что решение уравнений второй, третьей и четвертой степеней приводится к уравнениям соответственно первой, второй и третьей степени; эти последние уравнения он называл «aequatio resolvens» («разрешающее уравнение»), откуда и возникло слово «резольвента». Эйлеру удалось образовать резольвенту уравнения третьей степени

$$x^3 = ax + b$$

с помощью подстановки

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},$$

а уравнения четвертой степени

$$x^4 = ax^2 + bx + c$$

с помощью подстановок

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} \quad \text{или} \quad x = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}$$

(благодаря чему он нашел новое решение уравнения четвертой степени). На этом основании он счел правомерным заключить, что, по всей вероятности, и для уравнения

$$x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + \ldots + g$$

должна существовать резольвента $(n-1)$-й степени, определить которую следует посредством подстановки $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \ldots$ $\ldots + \sqrt[n]{G}$. Но уже при $n = 5$ попытка, естественно, окончилась неудачей. Эйлер сумел достигнуть цели только в частном случае *возвратных уравнений*, на которые впервые натолкнулся Муавр в «Аналитических этюдах» (1730) и которые получили свое название от самого Эйлера. Спустя почти 30 лет [в Nov. Comm. Ac. Petr., 1762/63 (1764)] Эйлер вновь обратился к этому методу[1]. Он улучшил подстановку, придав ей вид

$$x = w + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + C\sqrt[n]{v^3} + \ldots + Q\sqrt[n]{v^{n-1}},$$

и полагал, что нашел правильную форму, которая позволит отыскать решение общей задачи. Он оказался при этом в согласии

[1]) Эта работа была представлена уже в 1759.

с Варингом, применившим в «Аналитических этюдах» (Miscellanea analytica, 1762) такую же форму радикалов. Но именно от этой формы отправился Абель в своем доказательстве невозможности решения уравнения пятой степени в радикалах. Эйлер использовал также преобразование Чирнгауза, несколько видоизменив его. Полагая, что с его помощью можно найти решение любого уравнения, он приложил его к решению уравнений третьей и четвертой степеней. Такого же мнения держался и Э. Безу. В Mém. Ac. Paris, 1762 (1764) и 1765 (1768) он путем подходящей подстановки с неопределенными коэффициентами преобразовывал двучленное уравнение $y^n - h = 0$ так, чтобы результат можно было сравнить с первоначальным уравнением, что в свою очередь накладывало на неопределенные коэффициенты некоторые условия. Конечно, и этот метод, в сущности совпадающий с приемом Чирнгауза, привел к цели только при $n = 3$ и $n = 4$.

Рассказывая в главе I о развитии буквенного исчисления, мы уже упоминали (стр. 18) «Начала алгебры» Клеро (1746) — учебник, в свое время принадлежавший к числу наиболее известных и имевшийся на руках у всех, кто занимался математикой. Эту книгу стоит прочесть и ныне; она вполне достойна славного имени своего автора, которое встретится нам еще не раз.

В мастерски ясном стиле Клеро изложил в своем курсе почти все, что было известно тогда относительно алгебраических действий и решения уравнений; не приведены были в этой предназначенной для обучения книге только самые новые открытия. Нас интересует здесь прежде всего трактовка Клеро *неприводимого случая формулы Кардано*. Уже Лейбниц (в одном письме к Ольденбургу от 1677 и в письме к Валлису от 1698) предложил воспользоваться разложением кубических корней в бесконечные ряды. Этот замысел был осуществлен Фр. Николем в Mém. Ac. Paris за 1738. Клеро последовал за Николем и показал, как в этом случае представить с помощью бесконечных рядов все три корня в действительной и пригодной для вычислений форме. Доказательство существования трех корней несколько позднее дали также Мария Гаэтана Аньези в ее «Основаниях анализа» (Istituzioni analitiche, 1748) и Кестнер в одном сочинении от 1757 [1]). Но лишь в 1890 итальянец В. Молламе доказал, что невозможно чисто алгебраически представить три действительных корня, если не пользоваться комплексными величинами.

Через два года после выхода работы Клеро в Лондоне был издан несколько раз бегло упоминавшийся учебник не менее знаменитого Маклорена «Трактат по алгебре в трех частях» (A Trea-

---

[1]) Сочинение носит заглавие «Доказательство А. Г. К., что формула Кардано заключает все корни кубического уравнения» (Formulam Cardani aequationum cubicarum radices omnes tenere ostendit A. G. K., Геттинген, 4°). Там приведена также дальнейшая литература вопроса.

tise of Algebra in three parts, 1748). Опубликование его было задумано еще задолго до того, но осуществлено было только после смерти автора (1746) его вдовой. В основном книга представляла собой комментарий к «Универсальной арифметике» Ньютона; она должна была восполнить доказательства, отсутствовавшие у Ньютона, и развить алгебру далее в его духе. Как мы уже отмечали (стр. 42), Маклорен дал общее доказательство ньютоновой формулы, выражающей суммы степеней корней через коэффициенты уравнения. Далее он распространил исследования Ньютона о приводимости уравнений на отыскание квадратичных и кубических множителей с рациональными коэффициентами, причем развил здесь собственный метод. Еще раньше он старался доказать данное Ньютоном правило определения числа мнимых корней. Хотя изыскания Маклорена, а также работа Дж. Кемпбелла, напечатанная в Philos. Trans. за 1728, осветили происхождение этого правила, но они не устранили всех трудностей; к тому же оба ученые не заметили причины недостаточности правила (ср. стр. 42). Маклорен привел еще два способа, позволяющих заключать о существовании мнимых корней.

В год появления «Алгебры» Маклорена вышло также знаменитое «Введение в анализ бесконечных величин» (Лозанна, 2 тома) Эйлера. В девятнадцатой главе второго тома этого сочинения к теории плоских алгебраических кривых примыкало рассмотрение *проблемы исключения неизвестных*. Уже Маклорен в «Органической геометрии» (Geometria organica, 1720), с которой мы еще познакомимся в дальнейшем, высказал теорему, что две кривые порядка m и n могут пересекаться самое большее в $m \cdot n$ точках. Введя бесконечно удаленные и мнимые точки пересечения, Эйлер придал этой теореме несколько иной вид, а именно, что указанные кривые всегда пересекаются в $m \cdot n$ точках. Однако доказательство этой теоремы, одинаково важной для алгебры и для геометрии, не вполне удалось ни Эйлеру, ни Г. Крамеру, пытавшемуся провести его во «Введении в анализ кривых линий» (Introduction à l'analyse des lignes courbes, Женева, 1750). Оба математика определили при этом результант относительно x как произведение разностей корней уравнений, разрешенных относительно y. Крамер показал, как результант образуется с помощью симметрических функций, что привело его в свою очередь к новым исследованиям этих функций. Оперируя, подобно Лейбницу, индексами, он старался выразить общие функции такого рода через коэффициенты уравнения. Почти одновременно этим занимался и Эйлер в Mém. Ac. Berl., 1748 (1750).

В том же сочинении Крамер, не зная о предварительной работе Лейбница, высказал в законченном виде закон образования решений системы любого числа линейных уравнений. Введя понятие «беспорядка» (dérangement) в перестановках индексов, он дал также правило определения знаков при отдельных членах, входящих в выражения для неизвестных. Поэтому Крамера обыкновенно называют изобретателем *определителей*; действительно, у него недоставало только удобного их обозначения.

Девятнадцатая глава второго тома «Введения» Эйлера содержала подробное изложение того метода исключения неизвестных, о котором мы уже неоднократно говорили и который смогли свести еще к работам Ферма̀. В ней приводился также второй прием, сходный со способом, предложенным раньше Лейбницем, но не опубликованным им (стр. 40). Наконец, Эйлер излагал здесь метод образования результанта с помощью симметрических функций. Однако наибольшие заслуги в этой области приобрел Безу. В своем «Курсе математики для гардемаринов» (1764/69) он не только установил закон образования результанта системы линейных уравнений, чем наряду с Крамером содействовал возникновению теории определителей, но и усовершенствовал эйлеров метод исключения. Если уравнениями, из которых требуется исключить x, являются

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

и

$$\varphi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n=0,$$

то он умножает каждое из них соответственно на b_0 и a_0, затем на b_0x+b_1 и a_0x+a_1, потом на $b_0x^2+b_1x+b_2$ и $a_0x^2+a_1x+$ $+a_2$ и т. д. и всякий раз вычитает одно полученное произведение из другого. Благодаря этому он получает n уравнений $(n-1)$-й степени и оказывается в состоянии *линейно* исключить однородные величины $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$. Безу приводит механическое правило составления результата этого исключения, соответствующее способу образования определителей. Ему же впервые удалось дать, в основном удовлетворительно, доказательство теоремы о количестве общих решений двух уравнений m-й и n-й степени.

Забегая несколько вперед, дабы не нарушать связность изложения, отметим еще, что в «Общей теории алгебраических уравнений» (Théorie générale des équations algébriques, Париж, 1779) Безу продвинул вперед вопрос об исключении неизвестных из системы уравнений высшей степени. Он предложил для этой цели новый замечательный метод, правда, не всегда пригодный. Более подробное рассмотрение этого метода увело бы нас здесь слишком далеко. Лагранж в Mém. Ac. Berl., 1769 (1771), также занимался проблемой исключения, но его громоздкий метод встретил мало сочувствия.

Англичанин Э. Варинг, благодаря своей неясной манере изложения, был оценен современниками менее, чем последующими учеными. Алгебре в основном был посвящен ряд его работ, как «Аналитические этюды» (Miscellanea analytica, Кембридж, 1762), «Алгебраические размышления» (Meditationes algebraicae, 1770 и 1782; это — второе и третье расширенные издания первой части Miscellanea) и «Аналитические размышления» (Meditationes analyticae), впервые выпущенные в 1775. Большая часть того, что внес Варинг нового, содержалась, впрочем, уже в «Аналитических этюдах». Наибольшую важность имели его работы по *симметрическим функциям*, в которых он, подобно Крамеру (стр. 49), ввел «exponentes litterarum», т. е. веса коэффициентов, и дал формулу, приводящую многотипные симметрические функции к однотипным. Далее он привел способ представления целой симметрической функции как целой функции от элементарных симметрических функций. Позднее (1815) к этому способу вновь пришел, по-видимому независимо, Гаусс, давший точное доказательство теоремы о возможности представления всякой целой рациональной симметрической функции через элементарные. В «Аналитических этюдах» Варинг впервые разрешил рекуррентную формулу, данную для уравнения n-й степени Ньютоном, как относительно сумм степеней s_m, так и относительно коэффициентов a_m, и выразил одни через другие при любом n. Упомянем еще, что Крамп в издававшемся им совместно с К. Гинденбургом «Первом собрании комбинаторно-аналитических статей» (Erste Sammlung kombinatorisch-analytischen Abhandlungen, 1796) вывел позднее обе формулы для s_m и a_m чисто комбинаторным путем, не пользуясь формулой Ньютона. Для установления границ действительных корней уравнения Варинг в «Смешанных статьях» воспользовался уравнением, корни которого представляют собой обратные величины разностей корней рассматриваемого уравнения. Он составил также уравнение, корни которого суть квадраты разностей корней данного уравнения, и по знакам членов первого уравнения судил о действительности корней второго. В Philos. Trans. за 1763 он, кроме того, привел без доказательства критерии существования мнимых решений уравнений третьей, четвертой и пятой степеней, основывающиеся на некоторых зависимостях между коэффициентами [1]).

Бо̀льшая часть последних результатов была вновь независимо найдена Лагранжем [Nouv. Mém. Ac. Berl., 1777 (1779)], лишь позднее познакомившимся с сочинениями Варинга. Лагранж несколько раз [например, Nouv. Mém. Ac. Berl., 1772 (1774)] принимался за поиски надежного признака, с помощью которого можно было бы a priori устанавливать существование и определять число мнимых корней уравнений. Однако цели он не достиг и решить этот вопрос удалось впервые в 1829 Ш. Штурму (опубликовано в 1835, см. стр. 377—378). Зато в своих исследованиях Лагранж открыл причину недостаточности правила Ньютона

[1]) Ср. G. Junge, Zur Hauptaufgabe der symmetrischen Funktionen (Гиссен, 1917) и замечания П. Штекеля в Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 26, 1918, стр. 76—79.

(ср. стр. 42 и 49). Именно, он показал, что правило Ньютона выведено из условий, которые обязательно выполняются, когда все корни действительны, но про которые нельзя утверждать обратного, т. е. того, что при их выполнении корни не могут быть мнимыми. Собственные критерии Лагранжа, как и Варинга, связывают наличие мнимых корней уравнения с появлением отрицательных корней у дискриминантного уравнения; кроме того, Лагранж привлек еще уравнение, корни которого представляют собой квадраты разностей парных сумм корней данного уравнения. Посвященные этим вопросам статьи Лагранжа были помещены в Mém. Ac. Berl., 1767 (1769), 1768 (1770) и в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1777 (1779).

Всем изложенным исследованиям по вопросу о мнимых корнях уравнений должно было предшествовать изучение той формы, в которой встречаются мнимости. Мы уже упоминали (стр. 23—24), что изучение этой формы начато было Даламбером в написанном на соискание премии сочинении «Размышления об общей причине ветров» (1747). Но еще в 1743 Ник. Бернулли письменно сообщил Эйлеру, что всякий мнимый корень уравнения и вообще всякое выражение, составленное из некоторого числа мнимых величин, может быть приведено к виду $p+qi$. Не вполне удовлетворительное доказательство этого факта, данное Даламбером, и последовавшие затем доказательства Эйлера [Mém. Ac. Berl., 1749 (1751)] и Фонсенэ (т. I Misc. Taur., 1759) восполнил позднее Лагранж [Nouv. Mém. Ac. Berl., 1772 (1774)]. Замечательно, что при рассмотрении степени $(a+ib)^{g+ih}$ Даламбер, с целью воспользоваться логарифмическим дифференцированием, принимал основание $(a+ib)$ переменным. Это, вероятно, был один из первых случаев появления *комплексной переменной.*

Еще Гудде в упоминавшихся выше письмах о понижении степени уравнения путем нахождения его множителей (см. стр. 38) указывал, что такое понижение возможно при наличии некоторых простых соотношений между корнями. В 1762 эти мысли получили дальнейшее развитие у Варинга. Он существенно углубил их и впервые привлек к определению степени резольвент *соображения общего комбинаторного характера.* На примере различных методов решения уравнения четвертой степени он показал, что корни его кубических резольвент представляют собой трехзначные функции $x_1x_2+x_3x_4$, $(x_1+x_2-x_3-x_4)^2$, $(x_1x_2-x_3x_4)^2$ корней x_1, x_2, x_3, x_4 данного уравнения четвертой степени.

Этими же соображениями руководствовался, не зная работы Варинга, Лагранж в «Размышлениях о решении уравнений» [Réflexions sur la résolution des équations, в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1771 (1773)]. Впрочем, он изложил новые идеи гораздо яснее и нагляднее, чем Варинг. В исследованиях Лагранжа, существенно развитых Гауссом в его теории уравнений деления круга, содержались ростки геории Галуа. Обширный трактат Лагранжа, распадающийся на две части, представлял собой самый значительный из трудов, появившихся в XVIII столетии по вопросу об уравнениях высших степеней. Стремясь во всех работах к установлению общих принципов, Лагранж и в этих превосходных изысканиях направил всю свою проницательность на поиски общего источника различных способов решения уравнений третьей и четвертой степеней. Он впервые с успехом применил здесь преобразование Чирнгауза к уравнению четвертой степени [см. также Nouv. Mém. Ac. Berl., 1770 (1772)]. Лагранж при этом надеялся обнаружить пути к решению уравнений высших степеней, что, однако, оказалось обманчивым. В частности, Лагранж твердо установил, что преобразование Чирнгауза дает вспомогательные уравнения, степень которых превосходит степень исходного уравнения. В тринадцатом замечании ко второму изданию своего «Трактата о решении числовых уравнений» (Traité de la résolution des équations numériques, 1808) Лагранж вновь возвратился к этим исследованиям, но ничего существенно нового уже не добавил.

Общий принцип, установленный Лагранжем, вкратце таков. Если $t=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть данная рациональная функция корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнения, то при всех возможных перестановках x_i она принимает $n!$ значений. Поэтому можно составить уравнение степени $n!$:

$$[t-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)][t-f(x_2, x_1, \ldots, x_n)]\ldots=0,$$

коэффициенты которого можно выразить (с помощью симметрических функций корней по способам Крамера и Варинга) через коэффициенты данного уравнения. Решение этой резольвенты (или, как вначале назвал ее Лагранж, «réduite») дало бы $n!$ корней t, а затем через последние нашлись бы x_i. Однако этот метод действительно пригоден для решения уравнения n-й степени лишь в том случае, если уравнение, содержащее t, можно привести к степени меньшей, чем n. Последнее имеет место, когда выбираемая нами функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такова, что, например, некоторые из значений, принимаемых ею при перестановках x_i, совпадают. Так, при $n=3$ резольвента имеет степень $1\cdot 2\cdot 3=6$, однако, если взять $t=(x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3)^3$, где α есть мнимый кубический корень из единицы, то степень ее понижается до 2, ибо из шести значений, возникающих при перестановке x_i, три всегда совпадают.

Для уравнений третьей и четвертой степеней можно найти такие функции $f(x_1, x_2, x_3)$ и $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$; в зависимости от их выбора получаются различные способы решения. Но Лагранжу не представлялось вероятным, чтобы это было возможно также и для уравнения пятой степени. Таким образом, это исследование уже пошатнуло твердую веру Лагранжа в разрешимость уравнения пятой степени. Добавим, что Лагранж приложил свой метод к решению полного уравнения третьей степени и что Лаплас в лекциях, читанных в парижской Нормальной школе в 1795, излагал сходный по идее метод [опубликован в Séances des Ec. norm., год III (1794/95)].

В то же время, когда Лагранж докладывал о своих новых результатах в Берлинской академии, А. Вандермонд также представил Парижской академии мемуар о решении уравнений [Mém. Ac. Paris, 1771 (1774)]. Он исходил из представления отдельных корней уравнения a, b, c, ... в функциях самих корней, выражающихся с помощью симметрических функций через коэффициенты уравнения. При этом он получил теорему, что каждую симметрическую функцию можно представить в виде частного двух целых симметрических функций.

Для случая уравнения третьей степени Вандермонд положил

$$a=\frac{1}{3}\left[\sqrt{(a+b+c)}+\sqrt{(a+r_1b+r_2c)}+\sqrt{(a+r_1^2b+r_2^2c)}\right],$$

где r_1 и r_2 суть мнимые кубические корни из единицы, и составил аналогичные выражения для b и c.

Он пробовал также приложить свой метод к уравнению пятой степени, но столь же мало успел в этом, как итальянец Дж. Мальфатти. Последний с помощью формы, предложенной для корней уравнений Эйлером (см. стр. 47), получил резольвенту шестой степени, давшую ему, однако, решение только в тех частных случаях, которые были уже рассмотрены как-либо иначе (Atti Accad. di Siena, 1771).

Вандермонд имеет заслуги и в теории исключения неизвестных [Mém. Ac. Paris, 1772, ч. II (1776)], ибо, предложив специальный символ определителя, он дал новый толчок развитию учения об определителях. Этот символ вновь появился почти в таком же виде в XIX столетии у Сильвестра. То, что мы теперь обозначаем a_{12}, Вандермонд записывал в форме $\frac{1}{2}$. Свой символ он определял следующим образом:

$$\frac{\alpha\,|\,\beta}{a\,|\,b}=\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta}{b}-\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{a}$$

$$\frac{\alpha\,|\,\beta\,|\,\gamma}{a\,|\,b\,|\,c}=\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta\,|\,\gamma}{b\,|\,c}+\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta\,|\,\gamma}{c\,|\,a}+\frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta\,|\,\gamma}{a\,|\,b}$$

и т. д. Вандермонд указал все важнейшие формальные свойства этих выражений, связанные с перестановкой элементов, с их равенством и т. д. Поэтому он мог дать в такой символике решение любой системы линейных уравнений.

В том же томе мемуаров Парижской Академии наук теорию определителей случайно затронул великий Лаплас. Рассматривая различные перестановки, он дал известное под его именем представление результанта (здесь впервые встретилось слово résultant) системы линейных уравнений в виде суммы произведений миноров и их адъюнкт. Затем вскоре [в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1773 (1775)] Лагранж доказал, что сумма произведений элементов ряда на соответствующие адъюнкты равна результанту, а сумма произведений элементов ряда на адъюнкты, соответствующие элементам параллельного ряда, равна нулю. Запись определителя в виде квадратной схемы и двойная индексация элементов появились лишь в XIX столетии (см. стр. 371).

Распространению правила образования результанта системы линейных уравнений, данного Безу, содействовал основатель комбинаторной школы К. Ф. Гинденбург. В предисловии к «Аналитическому исследованию кривых второго порядка» (Specimen analyticum de lineis curvis secundi ordinis, 1784) он привел правило образования членов детерминанта и определения их знаков.

Другой представитель комбинаторной школы, с которым мы еще встретимся позднее, Г. Роте, дал подробное доказательство правила знаков Крамера во второй части издававшегося Гинденбургом «Собрания комбинаторно-аналитических статей» (1800). В своей содержательной статье он вполне удовлетворительно излагает тот факт, что все члены определителя получаются одинаковым образом как при перестановке первых индексов, так и при перестановке вторых. В заключение он приходит к решению системы r линейных уравнений, вполне соответствующему нынешнему, причем разлагает определители по минорам.

Слово определитель (детерминант—determinans) встречается впервые у Гаусса, придававшего ему, однако, не тот смысл, который ему придают теперь: он называл так в своих «Исследованиях» (1801, см. стр. 86) дискриминант квадратичной формы. В ныне употребительном значении этот термин ввел Коши (1815).

Развитие учения о решении уравнений получило в начале последней трети XVIII столетия известное завершение в работах Варинга, Лагранжа и Вандермонда. Действительно, за исключением работы Руффини, к которой мы вскоре обратимся, конец века дал мало примечательного. Молодой лейтенант флота Ж. Ж. де-Маргери еще в 1773 опубликовал в мемуарах Морской Академии (Mémoires de l'Académie royale de marine) в Бресте выдающийся по своей простоте способ образования резольвент. Швед Фр. Маллет между 1777 и 1782 выпустил в Упсале три сочинения об уравнениях первых четырех степеней [1]). В частности, он по-новому решил уравнение четвертой степени: он увеличил его неизвестную на величину E, определяемую некоторым кубическим уравнением, так, чтобы начальное уравнение распалось на два квадратных множителя. Такой же мыслью воспользовался в книге «Аналитические открытия в преобразовании и решении высших уравнений» (Analytische

---

[1]) Именно: две диссертации (1777, 1782) и статью в Nov. Acta Soc. Scient. et Litt. Upsala, 1780.

Entdeckungen in der Verwandlungs- und Auflösungskunst der höheren Gleichungen, Штральзунд, 1794, 4°) А. Гульбе, давший, помимо того, целый ряд остроумных решений уравнений третьей и четвертой степеней.

Внимание математиков все еще продолжал привлекать неприводимый случай формулы Кардано. Подобно Николю и Клеро (см. стр. 48) его рассмотрели также Франсуа Мазéр в Philos. Trans., 1778, ч. II (1779) и А. М. Лорньа, применивший при этом исчисление бесконечно малых (Верона, около 1776) [1]. Другие, как Дж. Николаи из Падуи (1783) [2], все еще старались доказать возможность алгебраического представления корня уравнения для этого случая в конечной и действительной форме. Однако их ошибки были обнаружены Кантерцани, Кальдани и другими [см. Antologia Romana, тт. X, XI (1784/85) и Giornale de'confini d'Italia, 1783 и 1784]. Только Лагранж произвел дельный анализ неприводимого случая (Séances Ec. norm., год III, ср. выше стр. 31), хотя и ему не удалось доказать невозможность алгебраического выражения трех существующих при этом действительных корней. Это впервые сделали, как упоминалось, Молламе в 1890, а затем иными путями О. Гельдер в 1891, А. Кнезер в 1893 и другие.

Более важными были работы о *разложении многочленов на рациональные множители*. Мы уже видели, что вопросом об определении линейных и квадратных множителей занимались Лейбниц, Ньютон, Вессенер, Гудде и Маклорен (стр. 43). Встречавшийся нам (стр. 21) кембриджский профессор Ник. Саундерсон в опубликованных посмертно «Началах алгебры» (Elements of Algebra, 1740) показал, что выделение квадратных множителей многочлена четвертой степени зависит от уравнения шестой степени, что, впрочем, непосредственно вытекало из решения уравнения четвертой степени, данного в 1637 в «Геометрии» Декарта. Вслед за тем Т. Лесер в «Мемуаре об интегральном исчислении» (Mémoire sur le calcul intégral, Рим, 1748) нашел, что для многочлена n-й степени вспомогательное уравнение, соответствующее множителю степени m, имеет степень $\binom{n}{m}$. Этой проблемой занимался и Варинг. Лагранж подверг ее подробному исследованию, которое привело его к теоретически правильному, но с практической стороны слишком громоздкому способу отыскания множителей [«О решении числовых уравнений всех степеней», De la résolution des équations numériques des tous les degrés, Париж, год VI (1798), замечание X; ср. также Nouv. Mém. Ac. Berl., 1772 (1774)]. Наконец, астроном Фр. Т. Шуберт,

[1] Соответствующее сочинение «О неприводимом случае и т. д.» (De casu irreductibili etc.) имеет на титульном листе пометку 1776. Но так как Лорньа в тексте упоминает одно сообщение Мальфатти, содержащееся впервые в одном письме от мая 1777, то ясно, что книга вышла позднее.

[2] В отдельном сочинении под названием «О возможности действительного решения и т. д.» (Della possibilità della reale soluzione etc.).

воспользовавшись методами конечных разностей, дал практическое правило нахождения таких делителей в Nov. Act. Petr., 1793 (1798). Проблема была окончательно решена, как упоминалось, лишь Кронекером в 1886. Нельзя не признать некоторой связи метода Кронекера с первыми наметками Ньютона и выкладками Шуберта.

Достойным завершением столетия, богатого в области алгебры блестящими результатами, явились открытия итальянского врача и математика П. Руффини, которые вместе с тем подводят к великим алгебраическим открытиям XIX столетия. В 1799 Руффини выпустил учебник алгебры под названием «Общая теория уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвертой степени» (Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto). Приведенное в нем доказательство невозможности решения уравнения пятой степени он все время пытался улучшить в последующих пяти работах от 1801, 1802, 1806 и 1813. Хотя ему и не удалось это осуществить с нашей точки зрения безупречно, но в названных работах он высказал ряд новых идей, на основе которых покоятся современные алгебраические теории. Непосредственно примыкая к воззрениям Варинга, Лагранжа и Вандермонда, Руффини подверг систематическому изучению проблему определения тех же перестановок, при которых меняют или не меняют свое значение рациональные функции от n величин, и доказал важную теорему, что не существует трех- или четырехзначных функций от пяти величин. При этом он впервые выявил основное понятие *группы* операций и рассмотрел важнейшие виды групп этой области. Затем он простейшим образом доказал теорему о невозможности решения уравнений высших степеней в радикалах, если используются лишь функции, рационально зависящие от корней. Наконец, Руффини обнаружил зависимость, существующую между приводимостью уравнения и интранзитивностью его группы, а также между разрешимостью уравнения посредством вспомогательных уравнений низшей степени и импримитивностью его группы, хотя он и не ввел подобной терминологии.

§ 2. Графическое и числовое решение уравнений

1. Графические методы. «Геометрия» Декарта не только выдвинула ряд новых идей, давших толчок развитию теоретической алгебры. Столь же важной ее заслугой явилось *введение общих методов графического решения уравнений*, которое покоилось на новой геометрической трактовке вопроса и отчасти возобновляло приемы, употреблявшиеся некогда греками и арабами. К вопросу о возникновении и развитии аналитической геометрии, давшей для этого вспомогательные средства, мы обратимся в своем месте, а сейчас займемся только ее приложением к алгебре.

Уравнения решались с помощью геометрических построений и до Декарта. Так, например, Жирар, Ф. ван-Скаутен и др. привели решение некоторых числовых кубических уравнений к задаче о трисекции угла. Метод Декарта тем не менее был нов, а главное — *общеприменим*. Он заключался в том, что посредством введения второй неизвестной решаемое уравнение разбивалось на два. Эти два уравнения выражали в новой геометрии Декарта геометрические места, пересечение которых и доставляло искомые корни. Чтобы решить, например, уравнение четвертой степени

$$z^4 = pz^2 - qz + r,$$

Декарт полагал $z^2 = x$ и легко получал уравнение окружности

$$x^2 + z^2 - (p+1)x + qz - r = 0,$$

которую можно вычертить непосредственно. Ординаты точек пересечения окружности с параболой $z^2 = x$ прямо давали корни уравнения; при этом парабола $z^2 = x$ в силу постоянства параметра оставалась одной и той же, каковы бы ни были числовые коэффициенты решаемого уравнения.

Согласно предложенной Декартом классификации кривых по «родам» кривые порядка $2n - 1$ и $2n$ относились к одному роду, и трактовать их следовало одинаково. Поэтому приведенное построение давало в его глазах также решение кубического уравнения. В самом деле, достаточно заставить окружность пройти через начало координат, одновременно являющееся вершиной параболы, чтобы оказалось не более трех действительных точек пересечения, дающих корни. Следующий род обнимал кривые пятого и шестого порядка, и Декарт действительно дал графическое решение общего уравнения шестой степени. С этой целью он представил его корни как ординаты точек пересечения окружности и одной кривой третьего порядка, для которой указал способ механического описания. Этот случай, труднейший из рассмотренных Декартом, не был затронут хотя бы мельком ни одним из его комментаторов — ни Дебоном в «Кратких замечаниях», ни Ф. ван-Скаутеном в «Комментариях» — сочинениях, присоединенных к латинским изданиям «Геометрии» 1649 и 1659/61 [1]). Отсюда видно, какие трудности представляла для современников новая концепция Декарта, к тому же намеренно изложенная им неясно.

С несомненной целью скрыть от других избранный им путь, Декарт нигде не показал, как находить по данным уравнениям кривые, с помощью которых он определял корни этих уравнений. Ферма́ был откровеннее Декарта и в работе, приложенной к «Введению в изучение плоских и телесных мест» (Isagoge ad locos

---

[1]) Титульный лист помечен 1659, но печатание второго тома закончилось только в 1661.

planos et solidos, написано еще до 1637), разъяснил, как можно составлять в каждом отдельном случае такие геометрические места. В другом сочинении «Рассуждение в трех частях ... о решении геометрических проблем» (De resolutione problematum geometricorum ... dissertatio tripartita, около 1660), полемизируя со своим соперником Декартом, Ферма́ показал, что при известных условиях, особенно в случае уравнений какого-либо специального вида, вроде, например, двучленных, можно обойтись кривыми низшей степени, чем рекомендовал Декарт. После Ферма́ составление таких геометрических мест было подробно изучено Р. Ф. де-Слюзом в «Мезолабии» (Mesolabum, 1659) и Маклореном в «Алгебре» (1748).

Интересно отметить, что уже тогда подвергались обсуждению подобные принципиальные вопросы, и, в частности, Декарт заметил, что с помощью циркуля и линейки можно построить лишь уравнения второй степени, хотя приведенное им доказательство не было, да и не могло быть, удовлетворительным.

В своих построениях Декарт и Ферма̀ всегда подчеркивали, что следует пользоваться кривыми *возможно более низкого порядка*, например, коническими сечениями, а среди них — окружностью и параболой. К этому мнению присоединились ван-Скаутен в «Комментариях», названный выше бельгиец де-Слюз (1659), англичанин Т. Бекер в труде «Геометрический ключ» [Clavis geometrica (The geometrical key), 1684] и Галлей в Philos. Trans., 1687; эти авторы несколько усовершенствовали первоначальные приемы. Но Ньютон и в этом вопросе пошел своей собственной дорогой. В «Универсальной арифметике» (1707) он заявил, что при выборе кривой для геометрического построения уравнения он считает нужным руководствоваться не степенью ее уравнения, а только легкостью ее образования с помощью какого-либо прибора. Поэтому он предпочел пользоваться вместо конических сечений конхоидой Никомеда. Среди конических сечений он отдал преимущество не параболе, а эллипсу в силу большей легкости и точности его построения, а также ограниченности его фигуры. При графическом решении уравнений третьей степени Ньютон употреблял конхоиду, при решении уравнения четвертой степени — эллипс. Чтобы при решении уравнений можно было применять еще циссоиду Диоклеса, он изобрел некий механический прием ее вычерчивания.

В последующее время ученые примыкали то к Декарту, то к Ньютону. Требования, выставленные последним, привели И. Барроу (уже в 1670), а потом Як. Бернулли, Дж. Стирлинга и маркиза Лопиталя к мысли строить уравнение вида

$$a = bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + px^n$$

прямо посредством точек пересечения прямой $y = a$ и кривой $y = bx + cx^2 + \ldots + px^n$. В 1750 этот метод подробно изложил Г. Крамер в уже известном нам «Введении» (стр. 49). Несколько позднее его упростил Зегнер [Nov. Comm. Ac. Petr., 1758/59 (1761)], который стал искать точки пересечения линии

$$y=-a+bx+cx^2+\ldots+px^n$$

с осью x и указал сравнительно несложное построение такой кривой. Крамер усмотрел пользу этого приема также и в легкости определения с его помощью простых и двойных действительных корней уравнения и границ, между которыми они лежат.

Предложенное Зегнером построение этих параболических кривых по точкам привело англичанина Дж. Роунинга к изобретению аппарата, позволявшего механически вычерчивать кривую

$$y=-a+bx+cx^2+\ldots+px^n$$

(см. Philos. Trans., 1770). Мы не будем останавливаться на описании этого прибора, ибо в силу своей громоздкости он не получил никакого применения. Построение Зегнера и аппарат Роунинга основывались на представлении ординаты y в виде суммы

$$y=y'+y''+\ldots+y^{(n-1)},$$

где

$$y'=-a+bx,\ y''=cx^2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=px^n.$$

Этим способом пользовался еще Ньютон в работе «Перечисление кривых третьего порядка» (Enumeratio linearum tertii ordinis, опубликовано в 1711). Распространение названия «параболических кривых» на линии, выражаемые приведенным общим уравнением, было тоже делом Ньютона («Метод разностей», 1-е изд. вышло также в 1711). Одна из этих кривых, так называемая кубическая парабола $y^3=2m^2(x-n)$, была позднее применена Г. Монжем (1814) для построения всех кубических уравнений.

2. Числовые приближенные методы. Первым ученым, которому пришла мысль систематически решать числовые уравнения приближенным путем, был Виет [1]). «Отец алгебры» сам придумал один подобный прием, но из-за своей сложности этот прием, даже после улучшений, внесенных Оутредом, Гарриотом и др., остался практически почти неприменимым [2]). Ньютон, во всех

---

[1]) Об одном примере, решенном еще Леонардо Пизанским (1202), см. Цейтен, ч. I, стр. 212—213.

[2]) Разработка систематических приемов численного решения алгебраических уравнений высших степеней начата была задолго до Виета. В средневековом Китае был разработан способ, совпадающий с так называемым ныне способом Руффини—Горнера; подробное описание его применительно к уравнениям любой степени встречается в литературе XIII в., а возник он в развитие приема извлечения квадратных и кубических корней, описанного в «Математике в девяти книгах» (см. стр. 40); в VII в. этот способ применен был в Китае к уравнениям третьей степени. Прием Виета в некоторых отношениях сходен с древнекитайским (см. книгу И. Миками в списке литературы). Численные методы решения кубических уравнений разрабатыва-

работах которого на первом плане стояли интересы практики, обратил внимание на этот вопрос еще в самом начале своей математической деятельности. Тогда же он разработал метод, носящий до сих пор его имя. В первом своем сочинении «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (Analysis per aequationes numero terminorum infinitas), написанном не позднее 1669 и впервые частично изложенном в 1685 в 94-й главе «Алгебры» Валлиса, Ньютон пояснил свой прием на примере уравнения

$$y^3-2y-5=0.$$

Пусть $y=2$ представляет собой искомый корень с точностью до $\frac{1}{10}$. Примем в качестве точного значения выражение $y=2+p$ и подставим его в уравнение. Тогда для определения p получится уравнение $p^3+6p^2+10p-1=0$. Если пренебречь здесь высшими степенями p, то $p=0{,}1$. Подставив теперь в предыдущее уравнение $p=0{,}1+q$, мы при том же условии найдем, что $q=-0{,}0054$, и т. д. Таким образом, корень окажется представленным в виде ряда

$$y=2+0{,}1-0{,}0054-\ldots$$

Ньютон применил этот способ и к решению буквенных уравнений с двумя неизвестными.

Пусть требуется, например, решить относительно y уравнение

$$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$$

и пусть известно, что x — малая величина. Первое приближенное значение $y=a$ мы найдем, полагая $x=0$. Выражая затем y в виде $y=a+p$ и подставляя это значение в уравнение, мы найдем

$$4a^2p+3ap^2+p^3+a^2x+apx-x^3=0.$$

Для определения погрешности p в последнем уравнении сначала учитываются только члены первой степени относительно x и p. Тогда $4a^2p+a^2x=0$ и, значит, $p=\frac{-x}{4}$. Полагая теперь $p=-\frac{x}{4}+q$ и подставляя это значение в предыдущее уравнение, мы таким же путем получим, что $q=\frac{x^2}{64}$, и т. д. В результате Ньютон пришел к ряду

$$y=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16\,384a^3}+\ldots$$

лись и в арабских странах; об одном из таких методов, примененных Джемшидом ал-Каши к весьма точному вычислению синуса 1° по известному синусу 3°, см. в книге: Джемшид Гиясэддин ал-Каши, «Ключ арифметики. Трактат об окружности», перев. Б. А. Розенфельда с комментариями А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда, стр. 311 и след. — *Прим. ред.*

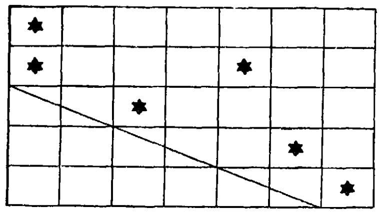
В случае, когда величина x велика, Ньютон видоизменяет свой метод и дает разложение в ряд, расположенный по отрицательным степеням x. Для определения начального члена таких разложений Ньютон в одном письме от 24 октября 1676, предназначенном для Лейбница, сообщил практическое правило, получившее название *параллелограмма Ньютона* и впервые ставшее общеизвестным из вышеупомянутой 94 главы валлисовой «Алгебры». Чтобы найти, например, первый член разложения в ряд для y, определяемого уравнением

$$y^6+5xy^5+\frac{x^3}{a}y^4-7a^2x^2y^2+6a^3x^3+b^2x^4=0,$$

все члены бинарной формы, в которой x восходит до четвертой, а y до шестой степени, заносятся в прямоугольник, как это показано на черт. 1. Внутренние прямоугольники, содержащие члены предложенного уравнения, отмечаются затем звездочками (как это сделано на черт. 2). К левому нижнему углу левого нижнего

x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5	x^2y^6
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6
0	y	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6

Черт. 1.



Черт. 2.

отмеченного звездочкой прямоугольника прикладывается линейка, которую вращают направо снизу вверх, пока она не коснется угла какого-нибудь другого отмеченного прямоугольника. Наконец, составляется уравнение из тех членов данного уравнения, которые соответствуют затронутым линейкой прямоугольникам:

$$6a^3x^3-7a^2x^2y^2+y^6=0.$$

Это уравнение (считая, что $a>0$) имеет четыре действительных корня:

$$y=+\sqrt{ax},\ -\sqrt{ax},\ +\sqrt{2ax},\ -\sqrt{2ax},$$

каждый из которых, рассматриваемый как начальный член, порождает свой ряд для y. Остальные два корня уравнения — мнимые и поэтому не рассматриваются. В последующее время параллелограмм Ньютона пользовался большим успехом. Стирлинг применил его в своей работе «Ньютоновы кривые третьего порядка» (Lineae tertii ordinis Newtonianae, 1717); де-Гюа (1740) и Крамер (1750) в своих исследованиях высших кривых преобразовали его в «алгебраический» и соответственно «аналитический» *треугольники*. Свой «аналитический треугольник» Крамер использовал плодотворнейшим образом при исследовании течения отдельных ветвей кривой, о чем мы будем подробнее говорить во второй части. Кестнер пространно изложил метод Ньютона в сочинении «Ньютоново решение буквенных уравнений и т. д.» (Aequationum specios. resolutio Newtoniana etc., 1743), а Лагранж, исходя из некоторых теоретических соображений, попытался заменить этот практический прием чисто аналитическим способом (Nouv. Mém. Ac. Berl., 1776).

В применении к числовым уравнениям метод Ньютона несколько переработал уже Э. Галлей (Philos. Trans., 1687 и 1694; последняя статья была перепечатана в 1707 в «Универсальной арифметике» Ньютона). Однако в том виде, в каком им пользуются ныне, т. е. с применением для производства подстановок ряда Тейлора, его опубликовал впервые, по-видимому, Эйлер («Основания дифференциального исчисления», 1755). Еще ранее Эйлер применил его в таком виде в письме к Гольдбаху от 4 июля 1744. Недостатки метода Ньютона впервые заметил Галлей. Один из них он усматривал в том, что первое приближенное значение приходится устанавливать с точностью до 1/10, а другой — в том, что метод не дает критерия точности для каждого из получаемых последовательно приближений, и, наконец, третий в том, что при некоторых обстоятельствах может возникнуть даже расходящийся ряд. В замечании V к своему неоднократно упоминавшемуся трактату «О решении числовых уравнений» (1798) Лагранж тщательно проанализировал метод Ньютона и нашел, что с полной уверенностью его можно применять только для вычисления наибольшего и наименьшего корней [1]).

Одной из важнейших задач, предшествующих применению большинства приближенных методов, являются *определение границ*, между которыми лежат положительные и отрицательные корни, и отделение корней. Понятно, что эта задача возникла перед математиками тотчас же, как только они начали заниматься приближенным решением уравнений высших степеней. Впервые вопрос о границах корней был поставлен в одном из дополнений Дебона к латинскому изданию «Геометрии» Декарта (1649 и 1659/61) [2]). После

---

[1]) Важные добавления дал впоследствии Фурье в «Анализе определенных уравнений» (1831).

Впрочем, задолго до Лагранжа и Фурье метод Ньютона был точно исследован и улучшен Ж. Мурайлем в его «Трактате о решении любых уравнений» (Traité de la résolution des équations en général, ч. I, Марсель и Париж, 1768). См. литературу к главе II. Дж. Рафсон видоизменил метод Ньютона в своем «Общем анализе уравнений» (Analysis aequationum universalis, Лондон, 1690).

[2]) Постановка вопроса о границах действительных корней квадратных и кубических уравнений восходит к древности. Для одной задачи, выража-

открытия своего метода приближенного решения уравнений этим вопросом, естественно, занялся Ньютон. В «Универсальной арифметике» он выставил несколько формул для определения верхней границы корней, одну из которых можно и теперь встретить в учебниках. Комментатор Ньютона, Маклорен (см. стр. 49), присоединил к ньютоновым свой собственный прием. После того как Гудде (письма к ван-Скаутену от 1657/58, приложенные им к «Геометрии», изд. 1659) открыл, что уравнение $f'(x)=0$ дает двойные корни уравнения $f(x)=0$, Ролль нашел, что корни уравнения $f'(x)=0$ могут служить границами корней уравнения $f(x)=0$. Исходя из этой мысли, Ролль в «Трактате по алгебре» (1690) разработал метод, позволявший заключать корни в некоторые границы или же отделять корни, названный им «методом каскадов». В несколько отличной форме этот способ известен теперь под названием «теоремы Ролля». Пусть $f(v)=0$ представляет собой данное уравнение n-й степени. Если подставить в него $v=z+x$, то (в наших обозначениях) получится:

$$f(z+x)=f(z)+x\frac{f'(z)}{1!}+x^2\frac{f''(z)}{2!}+\ldots+x^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}+ \\ +x^n\frac{f^{(n)}(z)}{n!}.$$

Уравнения

$$\frac{f^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}=0,\quad \frac{f^{(n-2)}(z)}{(n-2)!}=0 \quad \text{и т. д.}$$

Ролль называл первым каскадом, вторым каскадом и т. д.

Для определения с помощью каскадов *границ* действительных корней уравнения Ролль пользовался следующей теоремой: «между двумя последовательными корнями a и b какого-либо каскада может заключаться только один корень следующего каскада». Применение этой теоремы ко всем по порядку каскадам, начиная с первого, давало Роллю искомые границы.

Дж. Стирлинг и де-Гюа (Mém. Ac. Paris, 1741; ср. стр. 46) подошли к определению границ корней с геометрической точки зрения. Основываясь на течении параболических кривых третьего и четвертого порядков и расположении их максимумов и минимумов, они получили способ, который потом обобщил Эйлер («Основания дифференциального исчисления», 1755) и который в сущности приводится к способу Ролля, но распространяется и на мнимые корни.

ющейся уравнением третьей степени, полный анализ условий возможности положительного корня дал еще Архимед. Для уравнений третьей степени систематическое исследование условий возможности положительных корней, не свободное, правда, от неточностей, произведено было рядом математиков Ближнего и Среднего Востока, особенно полно — Омаром Хайямом в XI в. (см. русский перевод его трактата по алгебре в «Историко-математических исследованиях», вып. VI, М., 1953). — *Прим. ред.*

Варинг (ср. стр. 50—51) и Лагранж позднее применили для установления границ корней уравнения другое уравнение, корни которого суть квадраты разностей корней предложенного уравнения. В замечании VIII к своему трактату «О решении числовых уравнений» (1798) Лагранж дал вывод различных методов определения границ корней, вытекающих из одного общего принципа; при этом он, между прочим, получил доказательство правила знаков Декарта (ср. стр. 46).

Другим приближенным методом, который покоился на совсем иной основе, чем способ Ньютона, и не нуждался в определении границ корней, был *метод рекуррентных рядов*, сообщенный Даниилом Бернулли в Comm. Ac. Petr., 1728 (1732). Возникновение этого метода было, впрочем, связано с замечаниями Ньютона о применении к решению уравнений сумм степеней корней. Способ Бернулли заключался в следующем. Пусть требуется решить уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

и пусть выбраны n произвольных чисел P_1, P_2, $P_3, \ldots$, P_n. Если теперь определить P_{n+1}, P_{n+2}, ... рекуррентным законом

$$P_{n+m} + a_1P_{n+m-1} + a_2P_{n+m-2} + \ldots + a_nP_m = 0$$

($m = 1, 2, 3, \ldots$), то отношение $\frac{P_{m+1}}{P_m}$ с возрастанием m приближается к наибольшему по абсолютной величине корню уравнения. Даниил Бернулли высказал эту теорему без доказательства. Его друг Эйлер в 17-й главе «Введения» (1748) тщательно разобрал этот метод и привел отсутствовавший вывод. Методом Бернулли занялся также Лагранж (в замечании VI к трактату «О решении уравнений»). При этом он его несколько специализировал, предложив вместо произвольных P_i брать суммы степеней корней s_i.

Кроме метода Бернулли, который сохранился до нашего времени в форме, сообщенной ему Лагранжем, XVIII столетие принесло еще два оригинальных метода И. Г. Ламберта. Оба они были изложены в статье «Различные замечания о чистой математике» (Observationes variae in mathesin puram в Acta Helvetica за 1758). Если в уравнении

$$0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + \ldots + px^n$$

сделать подстановку $x = k + y$ и пренебречь всеми степенями y, кроме первой, то получится, что

$$x = k + y = \frac{a - ck^2 + 2dk^3 - \ldots - (n-1)pk^n}{b - 2ck + 3dk^2 - \ldots - npk^{n-1}}.$$

Когда k представляет собой какое-либо число, эта формула, согласно Ламберту, дает приближенное значение для корня, ближайшего к k. Второй метод заключался в применении ряда, получившего название ламбертова, к *трехчленным* уравнениям вида

$ax^{\varkappa}+bx^{\lambda}=d$ или, что то же, $x^m+px=q$, по способу последовательных приближений. Ряд этот

$$x=\frac{q}{p}-\frac{q^m}{p^{m+1}}+m\frac{q^{2m-1}}{p^{2m-1}}-\frac{m(3m-1)}{2!}\frac{q^{3m-2}}{p^{3m+1}}+$$
$$+\frac{m(4m-1)(4m-2)}{3!}\frac{q^{4m-3}}{p^{4m+1}}-\dots$$

сходится при $(m-1)^{m-1}p^m>m^mq^{m-1}$, что и было без доказательства указано его автором.

Эйлер, которому Ламберт по приезде в Берлин в 1764 сообщил о своей работе, тотчас же сделал из нее отправной пункт новых изысканий. Полуиндуктивным способом он нашел ряды для решения уравнений более чем с тремя и даже с любым числом членов; впрочем, о сходимости этих рядов он по обыкновению не заботился [Nov. Comm. Ac. Petr., 1770 (1771)]. К этим замечательным рядам он затем возвращался в позднейших статьях [Nov. Comm. Ac. Petr., 1775 (1776), Act. Ac. Petr., 1779 (ч. II, 1783), а также Nov. Act. Petr., 1786 (1789) и 1794 (1801)], причем добавил недостававшее еще доказательство их справедливости. Он дал также ряды, с помощью которых можно выражать не только корни уравнений, но и их степени [Nov. Act. Petr., 1786 (1789) и 1794 (1801)].

Идеи Ламберта получили гениальное развитие и у Лагранжа, напечатавшего в Mém. Ac. Berl., 1768 (1770) статью «Новый метод решения буквенных уравнений посредством рядов» (Nouvelle Méthode pour résoudre les équations littéraires par le moyen des séries). В ней Лагранж привел носящую его имя формулу для обращения функции. В замечании XI к трактату «О решении числовых уравнений» он опять вернулся к этой формуле и дал ее точный вывод, хотя изящные доказательства ее были уже сообщены Кондорсе в Misc. Taur., 1770/73 и Лапласом в Mém. Ac. Paris, 1777 (1780). Свою формулу Лагранж представил в следующем виде. Если α есть наименьший корень уравнения

$$u-x+f(x)=0,$$

то

$$\alpha^r=u^r+(u^r)'f(u)+\left[\frac{(u^r)'f^2(u)}{2!}\right]'+\left[\frac{(u^r)'f^3(u)}{3!}\right]''+\dots,$$

где r — любое положительное или отрицательное число, а штрихи обозначают производные по x.

В применении к уравнению любой степени

$$a-bx+cx^2-dx^3+\dots=0$$

эта формула при $r=1$ сразу дает общий случай разложения Ньютона:

$$x=\frac{a}{b}+\frac{a^2c}{b^3}-\frac{a^3d}{b^4}+\dots+\frac{2a^3c^2}{b^5}-\frac{5a^4cd}{b^6}+\dots+\frac{8a^4c^3}{b^7}\dots$$

Лагранж занимался также определением области сходимости своего ряда, но успеха не достиг. Свой ряд он также применил в Mém. Ac. Berl., 1769 (1771) к решению задачи Кеплера, выражающейся трансцендентным уравнением $x = t - e \sin x$. Отсюда стало ясно выдающееся практическое значение ряда, который многократно употреблялся и впоследствии. Так, например, Лаплас в 1798/99 в своей «Небесной механике» (Mécanique céleste) выразил с его помощью радиус-вектор планетной орбиты в явной зависимости от времени.

В первой из указанных статей Лагранж еще показал, как можно применить тот же метод к приближенному решению системы двух уравнений $F(x, y) = 0$ и $f(x, y) = 0$, если для x и y известны два первых приближения a и b. Положив $x = a + p$ и $y = b + q$, он не только получил первые приближения для p и q, которые дал еще Т. Симпсон в книге «Опыты о некоторых... вопросах и т. д.» (Essays on several... subjects etc., Лондон, 1740), но и нашел ряды, служащие для определения p и q с любой степенью точности.

Кроме открытия этого ряда, годившегося как для решения алгебраических и трансцендентных уравнений, так и для обращения рядов, Лагранжу принадлежало еще изобретение *нового* приближенного метода, основанного на излюбленном им *разложении в цепные дроби* [Hist. Ac. Berl., 1767 (1769)]. Если известно такое первое приближенное значение p корня x, что $p < x < p + 1$, и если в уравнение подставить $x = p + \frac{1}{y}$, то возникает новое уравнение той же степени с неизвестным y. Так как $1 > \frac{1}{y} > 0$, то новое уравнение во всяком случае имеет действительный корень, больший единицы. Если целая часть приближенного значения y есть q, то $y = q + \frac{1}{z}$ и т. д. Таким образом для x находится разложение

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \ldots}}.$$

Когда цепная дробь на каком-либо месте обрывается, x является рациональным корнем, в противном случае он иррационален. Это обстоятельство, а также легкость, с которой определяется погрешность каждого последовательного приближения, сообщают методу цепных дробей теоретическое преимущество перед способом Ньютона. Напротив, практически он мало применим, ибо находить с его помощью приближенные значения слишком трудно.

В одной заметке в Mém. Ac. Berl., 1768 (1770), в которой Лагранж несколько улучшил свой метод, он показал, как разлагаются в цепные дроби корни квадратного уравнения, и установил, что выражающая корень цепная дробь всегда должна быть периодической. До того было лишь без доказательства отмечено Эйлером, что в периодическую цепную дробь разлагается квадратный корень из целого числа.

В заключение укажем на приближенный метод, опубликованный уже известным нам знаменитым алгебраистом XVIII столетия Варингом в его «Аналитических этюдах» (1762). Это тот самый метод, который заново и самостоятельно открыл в 1837 Греффе[1]) и который с тех пор всюду известен как «метод Греффе». Принцип последнего у Варинга выражен совершенно отчетливо, однако английский математик не занялся практическим проведением вычисления, как это сделал впоследствии Греффе.

[1]) О так называемом методе Греффе см. далее на стр. 378. — *Прим. ред.*

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

§ 1. Общий обзор

В рамках нашего исследования историю теории чисел можно разделить на три периода. Первый период начался с восстановления сочинений Диофанта, благодаря К. Г. Баше де-Мезириаку, выпустившему их в подлиннике и с латинским переводом в 1621 (Цейтен, ч. II). Этот период дал ряд отдельных открытий, среди которых особенно яркими были знаменитые теоремы Ферма́, сообщенные им, к сожалению, без доказательств. Поэтому методы, которыми, без сомнения, обладал этот великий математик, окутаны глубокой тьмой, прорезаемой лишь несколькими лучами света. Напротив, второй период, во главе которого мы поставим многочисленные и обширные работы Эйлера, был отмечен появлением некоторых методов, применимых к определенным группам задач. В конце XVIII столетия эти методы нашли ясное изложение в «Опыте теории чисел» (Essai sur la théorie des nombres,Париж, год VI, 1797/8) Лежандра. На третий период пришлись замечательные творения Гаусса. Его исследования, впервые исходившие из единой точки зрения, не только систематически объединили и гениально продолжили уже известные частные теории, но и содержали ростки, которые развились затем в современную теорию чисел. Только начиная с Гаусса можно по существу говорить о подлинной теории чисел.

§ 2. Ферма и его современники

Ферма́, величайший французский математик XVII столетия, пришел к своим теоретико-числовым изысканиям, которые по значению далеко опередили свое время, в результате изучения Диофанта в издании Баше де-Мезириака (1621). Часть открытых Ферма́ важных теорем была обнаружена лишь после его смерти на полях его рабочего экземпляра книги Диофанта.

Сын математика, Самуил Ферма́, опубликовал их в выпущенном им новом издании Диофанта (Тулуза, 1670). Первые 36 страниц этого издания Диофанта занимало «Новое открытие в аналитическом учении» (Doctrinae analyticae inventum novum), представлявшее собой переработку переписки Ферма́ с иезуитом Жаком де-Билли по теоретико-числовым вопросам; переработка принадлежала при этом самому корреспонденту Ферма́. Другая часть результатов Ферма́ содержится в его «Различных сочинениях» (Varia Opera, 1679) и в переписке с различными современниками, как де-Сент-Круа, де-Сен-Мартеном, Паскалем и, особенно, Френиклем де-Бесси, а также с некоторыми английскими учеными.

Разумеется, здесь мы можем лишь охарактеризовать направления, в которых шли работы Ферма́, и отметить только те результаты, которые получили особенное значение для позднейшего развития теории чисел. Прежде всего Ферма́ занялся вопросом о делимости чисел и дал способ систематического нахождения всех делителей какого-либо числа. По-видимому, эти исследования, наряду с изучением вопроса об образовании совершенных, дружественных и тому подобных чисел, привели его к столь важной теореме, которая впоследствии была названа его именем и которую он сообщил без доказательства Френиклю де-Бесси в письме от 18 октября 1640. Мы имеем в виду теорему, которая в обозначениях Гаусса ныне выражается так: для всякого a существует такое m, что

$$a^m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p),$$

где p — простое число, не делящее a, и $p \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ m)$.

Столь же большое значение, как эта теорема, приобрела позднее проблема целочисленного решения уравнения $ax^2+1=y^2$, где a есть данное неквадратное число. Ферма́ сначала поставил ее в 1657 перед Френиклем, а затем, согласно тогдашнему обычаю, предложил ее в открытом письме всем современным математикам. Найти ее решение, впрочем весьма сложное, удалось Валлису и лорду Броункеру; оно было опубликовано в 1658 в «Недавней переписке о некоторых математических вопросах» (Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis nuper habitum). Вследствие одного недоразумения Эйлер приписал это решение математику Дж. Пеллю (умер в 1685). С тех пор проблема получила наименование «уравнение Пелля», которое сохранилось за ней и в современной литературе, хотя Пелль вовсе не занимался приведенным уравнением. Было бы справедливее присвоить ей имя Ферма́. Он, несомненно, обладал ее общим решением, а также доказательством того, что уравнение $ax^2+1=y^2$ всегда разрешимо [1]), ибо отметил, что последнее доказательство основывается

---

[1]) Доказательство, которое пытался дать в своей «Алгебре» (1685) Валлис, содержало ошибочное умозаключение, что отметили Лагранж [Misc. Taur. 1766/69 и § VIII его «Приложений» к «Началам алгебры» (Eléments d'algèbre, Лион, 1774) Эйлера] и Гаусс в § 202 «Арифметических исследований» (Disquisitiones arithmeticae, Лейпциг, 1801).

на методе неограниченного спуска, о котором мы еще будем говорить ниже. Более подробные указания Ферма́ думал привести в сочинении, в котором, как он говорит в другом месте, намеревался замечательным образом обогатить арифметику. Однако такое сочинение, к сожалению, в свет не появилось. Частные случаи этой важной проблемы были изучены еще греками, а индусы дали гениальное ее решение (Цейтен, ч. I), в основном совпадающее с позднейшим способом Лагранжа. Но все это не умаляет славы Ферма́, вновь открывшего проблему и оценившего ее значение.

Стремясь обобщить теоремы древних о составлении прямоугольных треугольников с рациональными сторонами, Ферма́ пришел к ряду теорем о *невозможности* некоторых равенств. Мы упомянем здесь лишь важнейшую из них, гласящую, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ неразрешимо в целых числах. Эта теорема, которая в начале XX столетия приобрела столь громкую известность благодаря учреждению Вольфскелем премии в 100 000 марок за ее решение, находилась среди замечаний, сделанных Ферма́ на полях книги Диофанта. Рядом стояли такие слова: «Для этого я располагаю поистине чудесным доказательством, но поля слишком узки, чтобы его можно было на них поместить». Общее доказательство предложения Ферма́ безуспешно искали величайшие математики до нашего времени. Уже доказательство для всех простых чисел n, $3 < n < 100$, которое, наконец, удалось получить Куммеру, можно провести только с помощью средств, которые не могли быть известны в XVII столетии. Поэтому утверждение Ферма́, что он располагал соответствующим доказательством, следует считать, по всей вероятности, ошибочным. Однако нам известно его доказательство для $n = 4$, которое содержится в некотором другом предложении и базируется на упоминавшемся методе бесконечного спуска. Предложение, о котором мы говорим, гласит: «не существует прямоугольного треугольника, стороны которого суть целые числа, а площадь — квадрат». Для доказательства этого предложения Ферма́ показал, что если допустить существование *одного* такого треугольника, то должен существовать другой треугольник, с площадью, выражающейся квадратом, и с *меньшими* целочисленными сторонами, а от этого треугольника можно перейти к следующему и т. д. до бесконечности. Но так как бесконечного числа убывающих положительных целых чисел не существует, то принятое допущение ошибочно. Доказательство невозможности существования треугольника с описанными свойствами содержит в себе, если держаться рассуждений Ферма́, невозможность существования квадрата, равного разности двух четвертых степеней $u^4 - v^4$, откуда немедленно вытекает, что тем более не может существовать четвертая степень, равная разности $u^4 - v^4$, и, следовательно, равенство $u^4 = v^4 + w^4$ невозможно. Именно, если представить три целочисленные стороны прямоугольного треугольника в виде x^2+y^2, x^2-y^2, $2xy$ и если допустить, что площадь $(x^2-y^2)\,xy$ есть квадрат, то должно было бы быть $x=u^2$ и $y=v^2$; значит, $(u^4-v^4)\,u^2v^2$ также было бы квадратом, откуда следовало бы, что u^4-v^4 также есть квадрат.

Френикль де-Бесси, который был, разумеется, знаком с общим методом Ферма́, дал основывающееся на нем доказательство «великой теоремы Ферма́» при $n=4$ уже в 1676 в «Трактате о числовых прямоугольных треугольниках» (Traité des triangles rectangles en nombres) и в Mém. Ac. Paris, 1666/69 (1729). Его доказательство было несколько растянуто, но по сути дела совпадало с тем, которое нашел Эйлер [Comm. Ac. Petr., 1738 (1747)].

Впрочем, как указывал Ферма́, он применял свой метод доказательства к теоремам не только отрицательного, но и положительного характера, например, для вывода теоремы, что каждое простое число вида $4n+1$ представляет собой сумму двух квадратов, что, далее, каждое неквадратное число равно сумме 2, 3 или 4 квадратов, и, наконец, как мы уже сказали выше, для доказательства разрешимости в общем случае так называемого уравнения Пелля.

Мы не можем входить в рассмотрение многочисленных отдельных теорем и решений неопределенных уравнений, данных Ферма́. Упомянем только, что во второй части «Нового открытия», вообще представляющего ключ ко многим замечаниям, сделанным Ферма́ на полях Диофанта, разбирались, в частности, так называемые «трехкратные равенства», которые Ферма́ считал собственным открытием. Речь шла о том, чтобы сделать квадратами сразу три выражения, что, впрочем, нередко встречалось и у Диофанта. Выражения эти имеют либо форму a^2+bx (скажем, $1+x$, $4+2x$, $9+6x$), либо форму a^2x^2+bx (скажем, x^2+x, x^2+2x, x^2+5x). Из других теорем мы в несколько сокращенном виде приведем ту, которая утверждает, что всякое число есть либо некоторое n-угольное число, либо сумма не более чем n n-угольных чисел. «Я не могу,— писал Ферма́, — приложить здесь доказательство, которое берется из многочисленных разнообразных и таинственных свойств чисел». Только в 1815 Коши нашел доказательство теоремы для любого n.

По сравнению с теоретико-числовыми результатами Ферма́, сохранившими руководящее значение для всего последующего развития учения о числах, открытия его современников совершенно отступают на задний план, так что при их изложении мы можем быть весьма краткими. В переписке с Ферма́ находился Блез Паскаль (умер в 1662), от которого до нас дошли две небольшие теоретико-числовые работы, возникшие, вероятно, в 1654, но опубликованные только в 1665. В одной Паскаль занимался факториальным выражением

$$a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1)$$

(a и k — целые числа) и установил семь относящихся к нему теорем. Возобновление в XVIII столетии его исследований Лагранжем, Вильсоном и Эйлером (см. ниже) показывает, что математическое остроумие Паскаля привело его к действительно важной области. Другая работа содержала обоснование правила для установления делимости какого-либо числа на *любое* данное число. На самом деле это «правило» представляет собой скрытое деление.

Мы уже говорили о важнейшем открытии Френикля де-Бесси. Кроме того, в вышеназванном сочинении он установил некоторые теоремы частного характера о прямоугольных треугольниках, вроде, например, такой: в каждом прямоугольном треугольнике с целочисленными сторонами одно из трех чисел, выражающих стороны, делится на 4 и одно — на 5.

Упомянем попутно собственные труды Жака де-Билли. В двух сочинениях, примыкающих к «Арифметике» Диофанта: «Геометр Диофант и т. д.» (Diophantus geometra etc., 1660) и «Первая и вторая части возрожденного Диофанта» (Diophanti redivivi pars prior et pars posterior, 1670), он подверг искусному алгебраико-геометрическому анализу задачи греческого математика, причем отчасти продолжил ход мыслей Ферма́. Мы должны также отметить первое доказательство теоремы Ферма́ о сравнении $a^m \equiv 1 \pmod{m+1}$, найденное Лейбницем. Лейбниц самостоятельно открыл указанную теорему не позднее 1683 и сообщил ее вместе с точным доказательством Иоганну Бернулли.

Впрочем, опубликовано было это доказательство только в наше время. Остальные достижения Лейбница в теории чисел были незначительны; самое большее, можно еще указать на одно выставленное им предложение, в котором усматривается и прообраз так называемой теоремы Вильсона (см. стр. 78).

Решением неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными занимался М. Ролль. В уже известном нам «Трактате по алгебре» (1690) Ролль привел способ решения таких уравнений, по идее точно совпадающий с общеизвестным решением, которое дал впоследствии Эйлер в Comm. Ac. Petr., 1734/35 (1740) и которое с тех пор всегда приписывалось последнему.

В заключение мы коснемся другой области теории чисел — именно различных недесятичных систем счета. Двоичная система была весьма древней. Еще Леонардо Пизанский в начале XIII столетия, а затем Лука Пачиоли в своей Summa (1494) употребили двоичную систему для решения популярной задачи о минимальном числе разновесков, потребном для того, чтобы взвесить все тяжести, не превосходящие некоторого предела. Систематическое изложение бинарной системы счета впервые дал Дж. Непер в добавлении к своей Rhabdologia (1617). Великий английский философ и государственный деятель Ф. Бэкон в книге «О достоинстве и прогрессе наук» (De dignitate et augmentis scientiarum, 1623) составил с помощью системы из двух букв специальный алфавитный шифр. Особенно много, однако, поработал над усовершенствованием и распространением в более широких кругах двоичной арифметики Лейбниц [см., например, Mém. Ac. Paris, 1703 (1705), а также ряд писем к Шуленбургу (уже в 1698), Як. Бернулли, Ник. Ремону и Я. Герману; последние были опубликованы в Mém. Ac. Berl., 1757 (1759)]. Поэтому Лейбница часто принимали за изобретателя этой системы [1]. На другие числовые системы обратил внимание во второй из названных выше статей Паскаль (Caractères de divisibilité des nombres — «Признаки делимости чисел»). Позднее ими занимались испанский иезуит епископ Иоганн Карамуель-и-Лобковиц в книге «Двоякая старая и новая математика» (Mathesis biceps vetus et nova, 1670) и естествоиспытатель Бюффон, который, как, впрочем, еще Лобковиц и Паскаль, отвел в своем «Опыте нравственной арифметики» (Essai d'arithmétique morale, составлен около 1760, ср. стр. 100) особое место двенадцатеричной системе. Двенадцатеричную систему энергичнейшим образом отстаивал в «Кратком изложении новой числовой... системы» (Kurze Darstellung eines neuen Zahlen—...Systems, 1798) Иог. Фр. Хр. Вернебург. Напротив, Лагранж не находил никакого преимущества в большом числе делителей у 12 [см. заметку Деламбра в Mém. (Hist.) Inst., Paris, 1812]. О Валлисе см. на стр. 17.

§ 3. От Эйлера до Гаусса

С конца XVII до тридцатых годов XVIII столетия мы не можем назвать какого-либо замечательного теоретико-числового открытия. Математики были слишком заняты разработкой возникших недавно исчисления бесконечно малых и аналитической геометрии. Только Эйлер, распространивший свою огромную активность на все области математики, уделил внимание этой отвлеченнейшей ее ветви и даже с особенной любовью занимался ею на протяжении всей жизни. Из многочисленных работ Эйлера мы, разумеется, можем выделить только важнейшие результаты и методы, не вдаваясь в частности. Как и до сих пор, мы здесь будем вести изложение в порядке разбора отдельных вопросов, причем всякий раз будем привлекать к рассмотрению соответствующие открытия Лагранжа, Лежандра и других ученых этого времени.

В целом ряде статей Эйлер занялся *целочисленным решением неопределенных уравнений*. Уже в раннем периоде своей дея-

[1]) Согласно Клюгелю (Mathem. Wörterbuch, т. I, 1803, стр. 943), двоичной системой Лейбниц занимался уже в одном письме 1697 к брауншвейгскому герцогу Рудольфу-Августу. Сам Лейбниц полагал, что двоичная система была у китайцев. Однако это оказалось неверным. Любопытно также, что в возможности представления всех чисел с помощью знаков 0 и 1 Лейбниц видел математическое доказательство творения мира из ничего (бог—1, ничто—0).

тельности он нашел упомянутый выше способ решений уравнений первой степени с двумя неизвестными [Comm. Ac. Petr., 1734/35 (1740)], который мы встретили у Ролля. В «Полном введении в алгебру» (1768/69) Эйлер применил тот же прием к линейным уравнениям с несколькими неизвестными. К последним он возвратился затем в статье, опубликованной уже после его смерти во втором томе «Аналитических сочинений» (Opuscula analytica, 1785). Лагранж в Mém. Ac. Berl., 1768 (1770) присоединил к методу Эйлера еще свой известный способ цепных дробей, весьма близкий, впрочем, к способу Баше (см. Цейтен, ч. II). Еще ранее Эйлер показал [Comm. Ac. Petr., 1732/33 (1738)], как получается бесконечно много целочисленных решений уравнения $ax^2+bx+c=y^2$, если известно *одно* такое решение. Несложное преобразование этого уравнения немедленно приводит задачу к более простой, именно к определению целочисленных решений уравнения $A+By^2=z^2$. В Nov. Comm. Ac. Petr. за 1762/63 (1764) и 1773 (1774) Эйлер сумел также дать правила нахождения одного такого решения при положительном B. Однако его исследования вскоре были отодвинуты на задний план результатами Лагранжа, который привел к виду $A+Bt^2=u^2$ общее уравнение

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+cy+f=0$$

и в Mém. Ac. Berl., 1769 (1771) подробнейшим образом рассмотрел вопрос о решении первого уравнения. Прием Лагранжа заключался в том, что посредством подходящих преобразований он постепенно уменьшал коэффициенты, пока один из них не становился равным единице, после чего решение сводилось к решению задачи Ферма́. Эйлер все же вернулся впоследствии к общей проблеме снова и сообщил два метода, позволявших по одному известному решению найти бесконечно много решений. Вместе с тем он нашел условия, при которых рациональные решения переходят в целочисленные [см. Nov. Comm. Ac. Petr., 1773 (1774) и «Аналитические сочинения», т. I, 1783]. Эйлер подошел к аналогичной задаче и для уравнений третьей и четвертой степеней. Последние исследования, в которых предшественником Эйлера был еще Ферма́, рассмотревший две частные формы четвертой степени, относились к 1780, но появились много времени спустя после смерти Эйлера [например, в т. XI Mém. Pétersb. (1830)], когда они представляли уже почти лишь исторический интерес.

В круг своих занятий Эйлер включил также вопрос о целочисленном решении систем диофантовых уравнений высших степеней и систем более чем с двумя неизвестными, которому посвятил целый ряд статей. Однако они не оказали влияния на последующее развитие теории чисел, ибо не давали общих методов и содержали только искусные приемы в частных случаях.

Эйлер весьма обстоятельно занялся вышеупомянутым специальным случаем целочисленного решения так называемого уравнения Пелля, с которым, как мы видели, он встретился рано. Он установил, что для преобразования трехчлена ax^2+bx+c в квадрат y^2 необходимо решение уравнения Пелля, и посвятил ему поэтому несколько статей. В последней из них, появившейся в Nov. Comm. Ac. Petr., 1765 (1767), он, наконец, привел общий способ его решения, показав, каким образом приводит к цели вычисление подходящих дробей разложения $\sqrt{a}$ в цепную дробь. Сам по себе его метод не оставлял желать ничего лучшего, но обоснование его страдало множеством недостатков. Лагранж, начавший тогда же работать над этим вопросом и вначале не знавший о статье Эйлера, дал в четвертом томе Misc. Taur. (1766/69) первое строгое доказательство того, что уравнение всегда разрешимо, и сообщил метод его решения. Ознакомившись с работой Эйлера, он видоизменил и упростил свой способ в Mém. Ac. Berl., 1768 (1770) так, что в основном он уже несущественно отличался от приема Эйлера. Метод Лагранжа тот же, который употребляли еще индусы, не пытаясь, конечно, строго его обосновать. В самой ясной и простой форме метод Эйлера — Лагранжа был изложен затем Лежандром в его знаменитом «Опыте теории чисел» (Essai sur la théorie des nombres, Париж), впервые опубликованном в 1797/8.

Из сказанного видно, что систематическое изучение вопросов неопределенного анализа начато было только Эйлером и достигло известного завершения в его работах и работах Лагранжа. Эйлер поэтому поспешил сделать свои исследования в этой области доступными более широким кругам, включив их во вторую часть своего руководства по алгебре. Во французском переводе этого первого курса теории неопределенных уравнений, выпущенном в 1774 (см. стр. 70), Лагранж снабдил отдельные главы дополнениями, еще значительно увеличившими ценность и полезность книги.

До сих пор мы занимались проблемой решения неопределенных уравнений, интерес к которой возбудили Диофант и Баше. Теперь мы обратимся к задачам, возникшим, главным образом, из оставшихся без доказательства теорем Ферма́. Эйлер неоднократно обращался к утверждению Ферма́, что уравнение $x^n+y^n=z^n$ при $n>2$ неразрешимо в целых числах, и мы уже упоминали на стр. 72 о его доказательстве для случая $n=4$. Эйлер сделал еще один шаг вперед, доказав с помощью того же метода справедливость теоремы при $n=3$. Не вполне аккуратное доказательство для этого случая он сообщил еще в 1753 Гольдбаху. Точное доказательство им было впервые напечатано в Nov. Comm. Ac. Petr., 1760/61 (1763) и подробнее проведено в «Алгебре». Тщетно пытаясь найти доказательство теоремы в общем виде, Эйлер натолкнулся на ряд прекрасных теорем о делимости чисел, имеющих форму степенных двучленов; они находятся в Nov. Comm. Ac. Petr., 1747/48 (1750) и в 9-й главе посмертного «Трактата по теории чисел» (Tractatus de numerorum doctrina, опубликовано во 2-м томе Comment. arithmeticae, Петербург, 1849).

Другие утверждения Ферма́ привели Эйлера к исследованию чисел, которые могут быть представлены некоторыми специальными формами второй степени вида mx^2+ny^2 [см. Comm. Ac. Petr., 1744/46 (1751), Mém. Ac. Pétr., 1812 (1815) и Nov. Act. Ac. Petr., 1783 (1787)]. Так он доказал теорему Ферма́, гласящую, что всякое простое число вида $4n+1$ можно единственным образом представить как сумму двух квадратов, и теорему Баше о том, что всякое неквадратное число можно представить как сумму двух, трех или четырех квадратов. Однако он не дал ни общей трактовки задачи о представлении числа в виде некоторой данной формы, ни метода, позволяющего a priori устанавливать свойства таких чисел.

Значительный шаг вперед в этом направлении сделал впервые Лагранж, систематически работавший над этим вопросом, ограничиваясь, правда, случаем квадратичных форм. Ему удалось найти прямые и общие методы для установления форм всех простых делителей чисел, представимых квадратичной формой t^2+au^2 [две статьи в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1773 (1775) и 1775 (1777)]. Он нашел, что эти делители имеют вид $4an+b$, и вычислил таблицы соответственных значений величин a и b. Благодаря этому Лагранж сумел свести в единый закон многочисленные частные теоремы, найденные Ферма́ и Эйлером, а вместе с тем сделать первый вклад в развившуюся позднее *теорию квадратичных форм*. К этой же области принадлежат несколько более ранние исследования Лагранжа о максимумах и минимумах форм m-го порядка, проведенные им с большим изяществом для случая $m=2$ [Mém. Ac. Berl., 1769 (1771) и Nouv. Mém. Ac. Berl., 1770 (1772)]. Сама проблема впервые была поставлена Лагранжем. Данное им решение, а также опубликованное в тех же томах мемуаров Берлинской академии исследование вопроса о разложении на множители форм высшего порядка с несколькими переменными приобрели большое значение, ибо легли в основу позднейшего развития теории чисел в исследованиях Дирихле.

Теперь мы снова возвращаемся к Эйлеру. Мощным побудительным стимулом явилась для него так называемая теорема Ферма́ о сравнении $a^m \equiv 1 \pmod{p}$, значение которой он оценил сразу. Эйлеру принадлежат два доказательства этой теоремы, покоящихся на разных основаниях. Первое [Comm. Ac. Petr., 1736 (1741)] использовало тот факт, что все биномиальные коэффициенты, соответствующие показателю степени p, делятся на p, и было проведено с помощью индукции. Второе и третье доказательства появились в Nov. Comm. Ac. Petr. за 1758/59 (1761) и 1760/61 (1763).

В последней статье Эйлер обобщил теорему Ферма́, установив (в обозначениях, ведущих свое происхождение от Гаусса), что

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m,$$

где $\varphi(m)$ есть число чисел, взаимно простых с m и меньших m. Встречающееся здесь число $\varphi(m)$, которое по предложению Гаусса называют теперь «функцией Эйлера», последний представил в той же работе в виде

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p'}\right)\ldots,$$

где $p, p', \ldots$ — простые делители числа m. Если m само есть простое число, то числа $1, 2, 3, \ldots, (p-1)$ будут с ним взаимно простыми, и получается важная теорема, высказанная Дж. Вильсоном и опубликованная в 1770 Варингом в его «Алгебраических размышлениях». Теорема эта гласит, что величина $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) + 1$ делится без остатка на p, где p, как и всюду здесь, — простое число. Эта теорема, как и теорема Ферма́, заключается в установленном Лагранжем [Mém. Ac. Berl., 1771 (1773)] общем сравнении

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x+1)(x+2)\ldots(x+p-1) \pmod p$$

при $x = 0$. Она была также доказана Эйлером («Аналитические сочинения», I, 1783) и Гауссом («Арифметические исследования», 1801). Упрощенное доказательство теоремы Ферма́ дал еще И. Г. Ламберт, охотно занимавшийся и теорией чисел (Nov. Acta Erud., 1769).

К важнейшим достижениям в исследовании целых чисел Эйлера привели старания доказать другую, упоминавшуюся уже, теорему Ферма́ о том, что всякое простое число вида $4n+1$ разбивается на сумму двух квадратов. Эйлер многократно и с различных сторон подходил к этой теореме и при этом нашел ряд интересных предложений. Окончательно доказать ее Эйлеру удалось лишь в 1749 [Nov. Comm. Ac. Petr., 1754/55 (1760)], воспользовавшись тем ходом мыслей, которым он шел в первом доказательстве теоремы о сравнении $a^m \equiv 1 \pmod p$. Это привело его к рассмотрению остатков от деления квадратов $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, (p-1)^2$ на простое число p. Эйлер немедленно увидел, что при этом получаются «многие замечательные свойства, изучение которых проливает немало света на природу чисел». Таким образом, он впервые поставил вопрос о квадратичных вычетах и понял их значение. Здесь уже встречаются и термины: *вычеты* (residua) и *невычеты* (non residua). В том же месте и в позднейших статьях, в которых он занялся степенными вычетами вообще[1]) и рассмотрел полные и неполные системы вычетов, он установил важнейшие

[1]) Эти термины были введены в Nov. Comm. Ac. Petr., 1758/59 (1761). — *Прим. ред.*

относящиеся к ним теоремы. В Nov. Comm. Ac. Petr., 1773 (1774) он ввел также понятие и слово «первообразный корень». Поэтому Эйлера справедливо называют *творцом теории степенных вычетов*, тем более, что ему принадлежит и открытие «*закона взаимности*» квадратичных вычетов, который Гаусс называл «основной теоремой» (theorema fundamentale) и который до недавнего времени приписывали Лежандру. Закон взаимности Эйлер установил еще в 1772, а опубликован он был, правда, без доказательства, в 1783 в первом томе «Аналитических сочинений».

Когда Лежандр для обозначения вычета от деления $n^{\frac{m-1}{2}}$ на m, где m и n — нечетные простые числа, ввел впоследствии (1808) символ $\left(\frac{n}{m}\right)$ («символ Лежандра»), он выразил закон взаимности в наглядном виде:

$$\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}\left(\frac{m}{n}\right).$$

Лежандр дал также его доказательство, опубликованное в Mém. Ac. Paris, 1785 (1788) и в его «Опыте»; впрочем, оно было неполным. Мы увидим, что Гаусс потом привел семь точных доказательств этого закона.

Нам нужно еще добавить кое-что о разложении чисел на множители и о связанных с этим теоремах о простых числах. Уже Валлис в своем «Рассуждении о соединениях» (Discourse of Combinations, 1685) высказал теорему, гласившую, что всякое число можно разложить на простые множители *единственным* образом. Он выразил словесно важную формулу, согласно которой число делителей числа $m=p^{\lambda}\cdot q^{\mu}\cdot r^{\nu}\ldots$, где p, q, r, … — простые числа, равно $(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)\ldots$ [1]), и нашел, что сумма всех этих делителей равна

$$\frac{p^{\lambda+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{\mu+1}-1}{q-1}\cdot\frac{r^{\nu+1}-1}{r-1}\ldots;$$

благодаря этому Валлис решил некоторые задачи, поставленные перед ним Ферма. Для нахождения самих делителей, именно простых делителей больших чисел, Эйлер предложил метод, основанный на представлении этих делителей в виде квадратичной формы mx^2+ny^2 [Nov. Comm. Ac. Petr., 1768 (1769) и Nouv. Mém. Ac. Berl., 1776 (1779)]. Упоминавшиеся выше (стр. 77) исследования Лагранжа о подобных квадратичных формах также смогли быть применены к определению простых делителей. Ник. де-Бегелен разработал в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1775 (1777) метод отыскания простых делителей вида $4x^2+1$. Эйлер в письме к Бегелену

[1]) По существу, эта формула имелась уже в «Математических этюдах» (1657) Ф. ван-Скаутена.

обратил его внимание на то, что эти делители можно получить из более общей формы nx^2+y^2, и указал правило подходящего выбора числа n, давшее ему целый ряд больших простых чисел [Nouv. Mém. Ac. Berl., 1776 (1779)]. Наконец, десять лет спустя Эйлер указал общий признак, позволяющий решать, является данное число простым или составным [Nov. Act. Ac. Petr., 1797/98 (1805)].

Вместе с тем математики того времени тщетно искали общее аналитическое выражение для представления простых чисел. Лежандр, которому удалось доказать, что это выражение не может быть рациональным, потерял всякую надежду на то, что его когда-либо удастся найти. Вероятно, такое аналитическое выражение не существует вообще. Столь же мало вероятно существование функции $\pi(x)$, составленной конечным образом и точно представляющей число простых чисел, не превосходящих числа x. Теорему о том, что эта функция $\pi(x)$ при возрастании x асимптотически приближается к $\frac{x}{\ln x}$ (строго доказанную лишь Ж. Адамаром и Валле-Пуссеном в 1896), предвидел еще Лежандр, не имея, впрочем, никакого представления о ее доказательстве. Он именно нашел (в «Опыте», 1798 и, точнее, во втором издании 1808) эмпирическую формулу

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x-1{,}08366}\ [1].$$

К разложению чисел на множители примыкает их разбиение на слагаемые, которые можно отнести к области аналитической теории чисел, т. е. к теоретико-числовым исследованиям, опирающимся на рассмотрения аналитического характера. Эйлер, посвятивший исследованиям этого рода 15-ю и 16-ю главы первого тома «Введения» (1748), и здесь опять указал путь вперед. Он исходил из разложения произведения

$$(1+x^\alpha z)(1+x^\beta z)(1+x^\gamma z)\ldots,$$

где α, β, γ — положительные целые числа, в ряд

$$1+Pz+Qz^2+Rz^3+\ldots$$

Отсюда немедленно следовало, что

$$P=x^\alpha+x^\beta+x^\gamma+\ldots,\qquad Q=x^{\alpha+\beta}+x^{\alpha+\gamma}+\ldots$$

и т. д., и было видно, что если показатель одной и той же степени может представлять сумму двух или нескольких членов ряда α, β, γ различными способами, то такая степень имеет коэффициент, заключающий в себе столько единиц, сколько существует таких

[1] Неудовлетворительность эмпирической формулы Лагранжа показал П. Л. Чебышев в работе 1848 г., о которой см. на стр. 377. — *Прим. ред.*

способов. Поэтому, если требуется узнать, сколькими способами можно представить число n в виде суммы m неравных членов ряда α, β, $\gamma, \ldots$, то это укажет коэффициент имеющегося в разложении члена $x^n z^m$. Аналогичным образом Эйлер рассмотрел дробь

$$\frac{1}{(1-x^{\alpha}z)(1-x^{\beta}z)(1-x^{\gamma}z)\ldots}=1+Pz+Qz^2+Rz^3+\ldots$$

и вывел теорему, что коэффициент члена $x^n z^m$ указывает, сколькими различными способами можно получить целое число n в виде суммы m равных или неравных чисел ряда α, β, γ... Из этих двух главных теорем при тех или иных частных значениях z был получен ряд отдельных теорем об аддитивном разбиении чисел. Эйлер построил также таблицу, продолженную затем в Nov. Comm. Ac. Petr. [1750/51 (1753), см. также 1769 (1770)], в которой можно было прочесть, сколькими способами можно представить число n в виде сумм чисел 1, 2, 3, $\ldots, m$. В указанных томах Nov. Comm. Ac. Petr. [см. также 1754/55 (1760)] он вывел отсюда так называемую пентагональную теорему, гласящую, что число разбиений числа n на четное число различных слагаемых равно числу разбиений на нечетное число слагаемых, кроме случая $n=\frac{1}{2}(3m^2+m)$, когда для m четного (нечетного) оно на единицу больше (соответственно, меньше). Тот же метод дал Эйлеру важную формулу

$$1:\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\ldots=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\ldots,$$

левая часть которой распространена на все простые, а правая на все натуральные числа; правая часть теперь известна как «дзета-функция Римана» (ср. гл. VII, §2). Из этой формулы получается также, что ряд натуральных чисел содержит бесчисленное множество простых чисел, что, впрочем, было известно еще из доказательства Евклида. Но теорему о том, что всякая неограниченная арифметическая прогрессия, первый член и разность которой взаимно простые, также содержит бесчисленное множество простых чисел, Эйлер смог высказать лишь в качестве предположения («Аналитические сочинения», т. II, 1783). Это предположение высказал и Лежандр в Mém. Ac. Paris, 1785 (1788). Доказано оно было лишь Дирихле в 1837. Наконец, Эйлер занимался дружественными и совершенными числами, известными еще древним, причем для обозначения суммы делителей числа n он ввел символ $\int(n)$, сохранившийся и в последующее время (Nov. Act. Erud., 1747 и «Сочинения различного содержания», т. II, 1750).

В своих «Алгебраических размышлениях» (1770) Варинг выдвинул еще одну важную теоретико-числовую теорему, определенно высказав ее, впрочем, лишь для $n=3$ и $n=4$. Теорема эта гласит: «Каждое положительное целое число можно представить в виде суммы n-х степеней положительных целых чисел, причем число слагаемых зависит только от показателя n». «Проблема Варинга» в ее общем виде была впервые решена лишь в 1909 Д. Гильбертом[1]).

К аналитической теории чисел относятся также исследования о *природе чисел* π и e. Работы над периодическими десятичными дробями, принадлежавшие Валлису («Алгебра», 1685), Джону Робертсону (Phil. Trans.,1768), Эйлеру («Алгебра», 1770), Иоганну III Бернулли [Nouv. Mém. Ac. Berl., 1771 (1773)] и особенно Ламберту (Act. Helvet., 1758; Nov. Acta Erud., 1769), показали, что они всегда представляют собой рациональную дробь; с другой стороны, в десятичном разложении числа π, доведенном Т. де-Ланьи уже до 127 знаков (Mém. Ac. Paris, 1719), не обнаружилось никакой периодичности. Наконец, Эйлер дал для π многочисленные аналитические выражения в форме весьма сложных бесконечных рядов. В результате стало все более укрепляться давнее предположение, что это число должно принадлежать к области иррациональных чисел. Точное доказательство этого впервые удалось провести Ламберту. Действительно, о попытке найти это доказательство можно было начать думать лишь после того, как Эйлер в одной из своих ранних работ показал, что всякое рациональное число может быть представлено в виде конечной цепной дроби, и вместе с тем действительно выявил иррациональность e и e^2 [Comm. Ac. Petr., 1737 (1744)]. Разложение числа e в цепную дробь, данное Эйлером, имелось, правда, уже в «Логометрии» Котеса (Logometria, Phil. Trans., 1714), но Котес не сделал отсюда никаких умозаключений относительно его природы. В своем доказательстве Ламберт опирался на высказанную еще Ланьи (в указанной статье Mém. Ac. Paris), но не доказанную им теорему, утверждающую, что тангенс всякой рациональной дуги есть число иррациональное и, наоборот, всякая дуга, имеющая рациональный тангенс, иррациональна. Дав путем разложения $\operatorname{tg} x$ в цепную дробь строгий вывод этой теоремы, удовлетворяющий даже современным требованиям и стоявший особняком в те времена чисто формального развития математики, Ламберт смог доказать в 1767 иррациональность числа π [Mém. Ac. Berl., 1761 (1768)]. С помощью разложения функции $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ в цепную дробь он там же доказал иррациональность e^m для рационального показателя m. Он проник в существо вопроса еще глубже, о чем свидетельствует одно его замечание в письме от 1768 к фон-Голланду: «способ, которым я это доказал, можно распространить дальше на доказательство того, что круговые и

---

[1]) Метод Гильберта носит частный характер и дает чрезмерно большие значения для зависящего от показателя числа слагаемых. Значительно лучшие результаты были получены в этом направлении Г. Харди и Дж. Литлвудом в 1920—1925 годах и особенно И. М. Виноградовым в 1924—1937 годах. Подробнее см. книгу Б. Н. Делоне в списке литературы. — *Прим. ред.*

логарифмические величины *не могут быть корнями рациональных уравнений*». Впрочем, он не дал такого распространения; как выяснилось впоследствии, оно потребовало бы гораздо более сложных изысканий [1]).

Наш второй период в развитии теории чисел получил завершение с выходом неоднократно упоминавшегося выдающегося сочинения А. Лежандра «Опыт теории чисел» (1797/8). В этой книге была впервые предпринята попытка систематически изложить в виде некоторой теории известные тогда исследования свойств целых чисел. Сочинение Лежандра было написано столь ясно и понятно и, особенно в последней переработке от 1830, содержало такую массу материала, что не потеряло своего значения и теперь [2]). Г. Мáзер поступил совершенно правильно, переведя его на немецкий язык (1886, 2-е издание, Лейпциг, 1893). В последнем издании Лежандр, как и все исследователи того времени, начинает с неопределенного анализа. Затем он излагает общие свойства чисел, особенно подчеркивая вновь открытый им закон взаимности, и заканчивает первый том теорией разбиения чисел на сумму трех квадратов (тернарные формы). Второй том начинается с изложения разнообразных изысканий, из которых мы отметим доказательства некоторых теорем о невозможности тех или иных соотношений, а также решение неопределенных квадратных и кубических уравнений. За этим следует разбор уравнений деления круга, где передаются окончательно разрешившие эту проблему исследования Гаусса, к которым мы сейчас перейдем. Впрочем, Лежандр излагает открытия Гаусса в весьма оригинальной форме. Заключение второго тома составляют уравнения Абеля, принадлежащие всецело XIX столетию [3]).

---

[1]) В доказательстве Ламберта не доставало для полноты обоснования одного свойства бесконечных цепных дробей, которое с полной строгостью доказал А. Лежандр в одном из примечаний к своим «Началам геометрии» (Éléments de géométrie, 1 изд., Париж, 1794). См. сборник «О квадратуре круга» в списке литературы. Доказательство трансцендентности числа e дал Ш. Эрмит (1873), а числа π — Ф. Линдеман (1882).

[2]) Второе издание вышло под названием «Теория чисел» (Théorie des nombres, Париж, 1808); к нему были присоединены два дополнения в 1816 и 1825; третье издание вышло в 1830 под тем же названием в двух томах. Имеется переиздание 1900 г.

[3]) Г. Вилейтнер оставил в стороне знаменитую «проблему Гольдбаха», выдвинутую в переписке этого математика с Эйлером (1742) в виде предположения, что всякое четное число есть сумма двух простых и всякое нечетное — сумма трех простых чисел. Доказать это предположение оказалось чрезвычайно трудно. Советский математик Л. Г. Шнирельман в 1930 установил, что всякое целое число является суммой некоторого ограниченного числа простых чисел, но число слагаемых, которое удается определить по методу Шнирельмана, значительно больше трех. В 1937 И. М. Виноградов, используя по существу тот же метод, который он применил к задаче Варинга, доказал, что все нечетные числа, начиная с некоторого, суть суммы

§ 4. Теоретико-числовые открытия Гаусса

Новая эпоха в истории теории чисел началась с выходом «Арифметических исследований» (1801) К. Гаусса. Уже с 1795, т. е. с восемнадцатилетнего возраста, Гаусс занялся арифметическими исследованиями. Не зная еще работ своих предшественников, он тогда же пошел своими собственными путями. Поэтому сообщаемые им в первых главах «Исследований» результаты были в основном уже известны, но зато *методы*, созданные великим гением, оказались абсолютно новыми и в высшей степени важными для последующего развития теории чисел. По словам профессора П. Бахмана, одного из лучших знатоков теории чисел, этот научный первенец юного Гаусса представлял собой «по своей глубине и основательности, своей исчерпывающей полноте, своей прочной и систематической структуре, по богатству новых и плодотворных идей — поистине гигантское дело». Лишь после выхода «Исследований» появляется возможность говорить о теории чисел как о науке и, по выражению Кронекера, «их содержание веками будет служить источником всех арифметических исследований».

По содержанию «Исследования» распадаются на три части. Первые две, обнимающие теорию сравнений и теорию квадратичных форм, изложены строго систематически, чего нельзя сказать о третьей, в которую вошли различные приложения учений, развитых в предыдущих частях.

Важнейшим орудием Гаусса, созданным им для обоснования его арифметической теории, было понятие *сравнения*. Хотя по существу это понятие имелось в математической литературе уже давно, но лишь Гаусс сумел оценить все его значение и сделать его общеприменимым благодаря введению подходящего обозначения, с помощью которого можно было производить вычисления. Место уравнений заняли теперь сравнения; так, например, сравнение $ax \equiv \pm 1 \pmod b$ представляет неопределенное уравнение $ax = by \pm 1$. Гаусс различал алгебраические и трансцендентные сравнения, а первые классифицировал еще по их степеням. В конце второго отдела он, в частности, доказал основную теорему об алгебраических сравнениях, гласящую, что сравнение m-й степени

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Mx + N \equiv 0,$$

трех простых. Подробнее см. в книге Б. Н. Делоне, указанной в списке литературы.

К «Введению в анализ» Эйлера (1748) восходит другая известная задача об арифметической природе чисел, вроде $2^{\sqrt{2}}$; в более общем виде эта задача была поставлена Д. Гильбертом и решена в 1929 — 1934 советским математиком А. О. Гельфондом. Именно, Гельфонд доказал, что всякое число α^β, где α — алгебраическое число, не равное 0 и 1, и β — алгебраическая иррациональность, является трансцендентным. — *Прим. ред.*

модуль которого p есть простое число, не делящее A, имеет не более чем m несравнимых по модулю корней. Впрочем, в другой форме это раньше нашел Лагранж [Mém. Ac. Berl., 1768 (1770)].

Теория сравнений позволила Гауссу систематически изложить в третьем отделе в основном уже известные теоремы о степенных вычетах и снабдить их точными, частью совсем новыми, частью облеченными в новую форму доказательствами. Он ввел здесь также важное понятие *индекса*, играющее в теории сравнений роль, аналогичную роли логарифмов в алгебраических операциях. Вычисления с этими индексами подчиняются точно тем же правилам, что вычисления с логарифмами. С их помощью Гаусс решил двучленное сравнение $x^n \equiv A \pmod{p}$ (p — простое число) и построил для этой цели таблицу индексов простых чисел до 89, которую К. Якоби продолжил в «Математическом каноне» (Canon mathematicus, 1839) для всех простых чисел до 1000. Но Гаусс дал и прямой метод решения двучленных сравнений, основывающийся, подобно решению двучленных уравнений, на отыскании первообразных корней.

В четвертом отделе «Исследований» рассматриваются сравнения второй степени. Прежде всего здесь по порядку приводятся и строго доказываются теоремы о квадратичных вычетах и невычетах. Эти предварительные исследования увенчиваются законом взаимности для квадратичных вычетов, для которого Гаусс, как мы говорили, нашел в разное время семь доказательств. Два доказательства приведены в «Исследованиях». Первое из них, более сложное, ибо Гаусс еще не знал символа Лежандра (см. стр. 79), являлось наиболее естественным, так как оно, опираясь на принцип полной индукции, не выходило за пределы области сравнений второй степени. Второе доказательство основывалось на теоремах из теории квадратичных форм и поэтому приведено было лишь в пятом отделе. Из пяти других доказательств четыре были опубликованы в Comment. Götting., а одно сохранилось в литературном наследии Гаусса. Три из них основываются на более далекой теории деления круга, а два (третье и пятое) на известной лемме, которую можно выразить в виде

$$\left(\frac{q}{p}\right) \equiv (-1)^{\rho},$$

где ρ — число отрицательных абсолютно наименьших вычетов чисел $q,\ 2q,\ 3q, \ldots, \frac{p-1}{2}q$ по модулю p.

Историческая роль этих доказательств заключается, главным образом, в том, что они возникли в новых отделах теории чисел, которые благодаря этому впервые продемонстрировали свое научное значение.

Исследования о квадратичных вычетах были далее применены Гауссом к квадратичным сравнениям, которые он разделил на неполные или двучленные сравнения вида

$$x^2 \equiv A \pmod{m}$$

и полные сравнения вида

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{m}.$$

Последние могут быть приведены к первым, а нахождение корней двучленных сравнений всегда сводится к случаю, в котором m есть простое число. Для решения этого случая Гаусс предложил новый прямой метод, к которому он добавил еще в шестом отделе «Исследований» непрямой метод, основывающийся на исключении. Хотя второй способ ведет к цели быстрее, но, как писал Гаусс, «он не обладает красотой прямого метода».

Пятый отдел, теснейшим образом связанный с предшествующим, обнимает вторую часть важных исследований Гаусса, именно *теорию квадратичных форм*. Здесь по существу начинаются собственные творения Гаусса. В пятом отделе впервые появляются понятие и наименование «квадратичной» формы для выражения $ax^2 + 2bxy + cy^2$ и разделение форм на *бинарные, тернарные* и т. д., в зависимости от числа переменнных. На новых принципах здесь заново создается элементарная теория бинарных квадратичных форм, полностью включающая все результаты, полученные ранее Эйлером, Лагранжем и Лежандром и развивающая их в различных направлениях. На первый план выдвигаются «определитель» формы, т. е. выражение $b^2 - ac = D$, а также линейные преобразования квадратичной формы, приводящие к важным понятиям собственной и несобственной *эквивалентности* форм, и их разделение на формы с положительным, отрицательным и нулевым определителями. Гауссу удается доказать, что число приведенных форм данного положительного или отрицательного определителя всегда конечно и эти формы определяются двояким образом. К этому присоединяется решение задачи о нахождении всех представлений данного числа M данной формой $ax^2 + 2bxy + cy^2$. Эти исследования были внутренне связаны с известным решением общего уравнения второй степени, сводящегося к так называемому уравнению Пелля (см. стр. 70). Для уравнения Пелля Гаусс предложил новый способ решения, отличавшийся от ранее известных; в качестве исходного пункта им было взято преобразование квадратичных форм.

Наряду с этими бегло очерченными изысканиями пятый отдел содержит ряд новых открытий, «которые, — как сказал Дирихле, — отличаются глубиной методов, обилием и многообразием исследований» и которые легли в основу позднейшего развития теории чисел. Выдающееся значение имела гауссова классификация форм по классам, порядкам и родам, а также теория композиции форм;

то же относится к его учению о тернарных квадратичных формах и приложению их к теории бинарных форм, которое позволило ему осуществить разбиение числа и бинарной формы на сумму трех квадратов. При этом получилось совершенно оригинальное доказательство теоремы Ферма̀ о представлении любого числа в виде суммы трех треугольных чисел или четырех квадратов. По одному замечанию Гаусса в § 300 видно, что он уже тогда предпринял подробное исследование тернарных форм, которое в «Исследованиях», однако, было лишь намечено. Здесь же он привел без доказательства асимптотические формулы для среднего числа родов и классов квадратичных форм, а в его наследии нашлась даже формула, определяющая число неэквивалентных классов квадратичных форм данного определителя. Путь, каким он получил этот результат, был тот же, на который впоследствии вновь вступил Дирихле, когда начал в 1839 свои пролагающие новые пути исследования по аналитической теории чисел, относящиеся к числу классов и к вопросу о числе действительно существующих родов квадратичных форм.

Из приложений новых теорий, приведенных в шестом отделе «Исследований», мы упомянем некоторые теоремы о периодических десятичных дробях. Ни одному из ученых, занимавшихся до того десятичными дробями, не удалось выяснить что-либо определенное относительно цифр периода. Гаусс показывает, что если число 10 является первообразным корнем по модулю p^{μ} (p — простое число), то из периода дроби $\frac{1}{p^{\mu}}$ можно тотчас же без вычислений получить период любой дроби вида $\frac{m}{p^{\mu}}$. Напротив, если 10 не является первообразным корнем, то из указанного периода можно получить периоды только тех дробей, числители которых m сравнимы с какой-либо степенью числа 10 (mod p^{μ}). Гаусс приводит таблицу периодов всех дробей со знаменателями $p^{\mu} < 100$, из которой с помощью таблицы индексов можно определить период для всякой дроби вида $\frac{m}{p^{\mu}}$. Таблица Гаусса позволяет также находить периоды всех дробей, знаменатели которых суть произведения степеней простых чисел, содержащихся в таблице. Упомянем еще два новых, сообщаемых здесь Гауссом метода, с помощью которых можно различать простые и составные числа. По быстроте употребления способы Гаусса значительно превосходили им предшествующие.

Наконец, в седьмом отделе Гаусс исследовал древнюю задачу о *делении круга*, которая, как сообщает он сам, привела его к занятиям математикой. Во времена Евклида проблема эта ставилась чисто геометрически, почему решение ее могло удаваться только в простейших случаях, а именно, когда требовалось разделить круг на 2^k, $3 \cdot 2^k$, $5 \cdot 2^k$, $15 \cdot 2^k$ частей. Дальнейший успешный анализ задачи на чисто геометрическом пути был вряд ли мыслим, и на 2000 лет она застыла в одном положении, пока острый взор Гаусса не усмотрел внутренней связи этой задачи с его арифметическими размышлениями. Так как хорда n-й части окружности радиуса 1 равна $2\sin\frac{2\pi}{n}$, то для деления круга на n частей требуется определить синус или какую-нибудь иную тригонометрическую функцию угла $\frac{2\pi}{n}$. Чтобы получить простейший способ решения, Гаусс взял

$$r=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n};$$

тогда $r^n=1$, и r является корнем уравнения $x^n-1=0$. После сокращения на действительный множитель $x-1$ это уравнение переходит в уравнение деления круга

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=0,$$

корни которого и требуется определить алгебраически. При этом n бралось нечетным простым числом, чего было вполне достаточно. Гаусс доказал неприводимость этого уравнения над полем рациональных чисел, как говорят теперь, и свел задачу о делении круга на n частей к решению уравнений, число которых равно числу множителей, на которые разлагается число $n-1$. Так как с помощью циркуля и линейки можно строить корни только квадратных уравнений, то отсюда следовало, что деление круга на равные части с помощью названных средств можно выполнить лишь тогда, когда $n-1$ есть степень 2, т. е. равно 2^m; нетрудно увидеть, что и само m должно быть лишь степенью 2. Таким образом, задача может быть решена в смысле древних, если n является простым числом вида $n=2^{2^r}+1$, что имеет место для $n=3, 5, 17, 257, 65\,537$.

Гауссовы исследования об уравнении деления круга были важны не только потому, что они дали решение древней задачи; еще важнее было то, что в них выступила совершенно новая концепция теории уравнений, которая легла в основу наших современных воззрений. Другой способ решения уравнений деления круга дал в XIII и XIV замечаниях ко второму изданию своего «Трактата» (1808) Лагранж. При этом он пользовался некоторой линейной функцией корней из единицы, которую теперь обыкновенно называют «резольвентой Лагранжа». Метод его в ряде отношений был позднее дополнен К. Якоби.

К этому сжатому резюме «Исследований» следует добавить, что в них, как и во всех других сочинениях, Гаусс предпочитал в изложении синтетический метод Евклида. Он намеренно сглаживает все следы, которые могли бы свидетельствовать о ходе мыслей, приведших автора к его открытиям. В этом заключалась причина того, что «Исследования» долго оставались непонятыми и первоначально не оказали плодотворного влияния на развитие теории чисел. Только П. Г. Лежен-Дирихле удалось проникнуть в дух труда Гаусса и раскрыть огромные таившиеся в нем сокровища.

Научный первенец Гаусса заключал в себе, впрочем, не все его открытия в области теории чисел. Пожалуй, наиболее значительные из них содержались в двух статьях 1828 и 1832, посвященных *теории биквадратичных вычетов*. Гаусс нашел, что для вычетов этого рода имеет место закон, подобный закону взаимности квадратичных вычетов; однако понимание его требовало рассмотрения комплексных множителей простых чисел вида $4n+1$.

Это побудило Гаусса дать набросок своей теории комплексных чисел, о которой мы уже говорили в первой главе, и создать в основных чертах арифметическую теорию целых комплексных чисел. Введение таких комплексных множителей бесконечно расширило, как говорит сам Гаусс, область теории чисел. Действительно, в этой идее таились первые ростки теории числовых полей, развившейся во второй половине XIX столетия из работ Дирихле (1841, 1842, 1846) и Э. Куммера (1844, 1845), появившихся еще при жизни Гаусса.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Комбинаторный анализ

О создании комбинаторики как некоторой научной дисциплины можно говорить, лишь начиная с XVII столетия. В 1634 Эригон, независимо от Тартальи, правильно определил в своей «Практической арифметике» (Arithmetica practica), составлявшей второй том «Курса математики», число сочетаний из n элементов по m. В 1656 это же нашел иезуит А. Таке, посвятивший сочетаниям и перестановкам небольшую главу в «Теории и практике арифметики», причем термины он понимал в том же смысле, что и мы. В 1654 Паскаль отправил Ферма́ «Трактат об арифметическом треугольнике» (Traité du triangle arithmétique, опубликовано посмертно, Париж, 1665). В этом сочинении и в «Трактате о числовых порядках» (Traité des ordres numériques), вышедшем впервые также в 1665, были приведены основные отношения между биномиальными коэффициентами, в которых Паскаль признал число сочетаний и с которыми оперировал как с таковыми. Свой «арифметический треугольник» Паскаль нашел независимо от Штифеля [Цейтен, II, стр. 115] и расположил его по-иному[1]). Послание Паскаля к Ферма́ встретилось в пути со статьей Ферма́ по родственному вопросу, именно о фигурных числах, которую последний отправил Паскалю. Эти «фигурные числа» (треугольные, четырехугольные,..., многоугольные) рассматривались здесь как члены разностных рядов высших порядков (см. гл. IX) и были представлены Ферма́ с помощью произведений, нами теперь обозначаемых символом

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\ .$$

[1]) Треугольник Паскаля и аддитивный закон образования его элементов были известны в Индии примерно за два века до н. э. Таблица биномиальных коэффициентов до восьмой степени встречается в 1303 г. у китайского математика Чжу Ши-цзе, который имел предшественников в XII в. См. книгу И. Миками в списке литературы. Общая теорема о разложении бинома в случае натурального показателя впервые встречается у Джемшида ал-Каши (см. стр. 61), но была известна ранее, быть может, еще в XI в. Омару Хайяму.— *Прим. ред.*

Из результатов, полученных Ферма́ в теории магических квадратов (см. стр. 93), можно, по-видимому, заключить, что связь фигурных чисел с теорией соединений была ему известна.

Однако собственно научное основание теории сочетаний и перестановок дал лишь Лейбниц в «Рассуждении о комбинаторном искусстве» (Dissertatio de arte combinatoria, 1666). Отсюда и получила наименование эта область математики. В частности, Лейбниц систематически изучил перестановки и ввел при этом понятие «циклической перестановки». Перестановки с повторениями привлекли внимание Френикля де-Бесси (1676) в статье «Резюме теории соединений» [Abrégé des Combinaisons, Mém. Ac. Paris, 1693 (1729)] и Валлиса в «Рассуждении о сочетаниях, перестановках и т. д.» (Discourse of Combinations, Alternations etc., Лондон, 1685; латинский перевод во втором томе Opera, 1693). Завершением этого периода явилась часть II «Искусства предположений» (Ars conjectandi) Як. Бернулли, изданного в 1713 его племянником Николаем, и «Теория случая» (Doctrine of Chances, Лондон, 1718) Муавра. В своей книге Я. Бернулли впервые занялся изучением «размещений»; впрочем, это слово он применил к соответствующему математическому понятию лишь один раз и случайно. Слово «перестановка» он зато употреблял подобно нам. Термин «сочетание» применял в нашем смысле также Блез Паскаль. Все современные символы, вроде $\binom{n}{r}$, $n!$ и т. п., принадлежат XIX столетию. Что $0!$ следует принять равным 1, понял, между прочим, еще Валлис в «Арифметике бесконечных» (1656).

Важно заметить еще, что для доказательства своих теорем о биномиальных коэффициентах Паскаль ввел способ «полной индукции». Пока не удалось выяснить, оказал ли в этом отношении на Паскаля влияние Мавролико, воспользовавшийся этим методом доказательства уже в 1575 в работе «Две книги по арифметике» (Arithmeticorum libri duo). К этому приему, играющему в математике столь важную роль, самостоятельно пришел также Як. Бернулли (Acta Erud., 1686).

Новые понятия нашли благодарное поле для приложений в теореме о возведении полинома в степень. Заслуга первого опубликования этой теоремы принадлежит Муавру, решившему с помощью способа неопределенных коэффициентов задачу о возведении в степень бесконечного ряда (Philos. Trans., 1697 и 1698). Но еще ранее, в 1678, теорема была, несомненно, известна Лейбницу; об этом он писал в 1695 Иоганну Бернулли. Рассуждения Лейбница, особенно важные благодаря примененному в них символическому способу индексации, были изложены около 1700 в статье «Новое распространение алгебры» (Nova algebrae promotio), опубликованной, впрочем, лишь в 1863 по бумагам, сохранившимся в его литературном наследии. В этой работе и в одной статье об обращении рядов, направленной против Фатио де-Дюилье (Acta Erud., 1700), заключались первые ростки комбинаторного метода, который расцвел в виде «комбинаторного анализа» в Германии второй половины XVIII столетия. Он сообщил здесь своеобразный характер всей математической деятельности, хотя и не принес особенно значительных плодов.

Основателем и руководителем этой комбинаторной школы был К. Гинденбург. Свои работы над теоремой о степени многочлена он привел к удовлетворительному концу в 1778/79. Ему предшествовал в этом Р. И. Бошкович, давший в 1747 самостоятельное представление коэффициентов разложения в Giorn. de'Letterati. Эйлерово «Введение» (1748; глава IV) содержало, однако, еще рекуррентные разложения. Характерно название сборника, выпущенного Гинденбургом в 1796: «Предложение о полиноме — важнейшая теорема всего анализа» (Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis). В той же книге Гинденбург напечатал статью о своем сложном способе обозначений в теории соединений, который, по словам самого автора, должен был оказать «в высшей степени важное влияние на анализ». Укажем еще на резюмирующий труд Гинденбурга «Основные черты . . . новой системы перестановок» (Novi systematis permutationum . . . primae lineae, 1781).

Все же формулы «комбинаториков» не были лишены некоторого изящества. Так, Г. Эшенбах комбинаторным путем получил особую формулу обращения рядов («Рассуждение об обращении рядов и т. д.» — Dissertatio de serierum reversione etc., Лейпциг, 1789). Его выводы были улучшены Гинденбургом (Problema solutum etc., Лейпциг, 1793) и еще более усовершенствованы в том же году Г. Роте («Доказательство формулы обращения рядов и т. д.» — Formulae de serierum reversione demonstratio etc., Лейпциг, 1793). Роте удалось также с помощью своей формулы вывести формулу для обращения функций, данную в 1770 без доказательства Лагранжем (том I основанного Гинденбургом Archiv für reine und angewandte Mathematik, 1795; ср. выше стр. 66). Исследования эти были продолжены И. Ф. Пфаффом в его «Аналитических исследованиях и т. д.» (Disquisitiones analyticae etc., Гельмштед, 1797). Назовем еще имена комбинаториков Хр. Крампа, Г. С. Клюгеля, составителя известного словаря, и Г. А. Тепфера.

Эйлер также неоднократно занимался комбинаторными задачами. Так, например, он написал статью о связях между биномиальными коэффициентами [Act. Ac. Petr., 1781 (ч. I, 1784)], которой предшествовала, между прочим, сходная по содержанию статья Лагранжа (Misc. Taur., 1770/73). Упомянем затем задачу о переходе через ряд мостов, переброшенных над рукавами реки, причем каждый мост можно проходить только по одному разу, задачу, которую часто приводят теперь в книгах по занимательной математике и которую Эйлер рассмотрел еще в Comm. Ac. Petr. за 1736 (1741), а также вопрос о том, сколькими способами можно разбить с помощью диагоналей n-угольник на треугольники. В письме Гольдбаху от 1751 Эйлер дал решающую вопрос формулу, тогда как Зегнер разработал здесь лишь некоторый рекуррентный прием [Nov. Comm. Petr., 1758/59 (1761)].

Эйлер занимался еще задачей о ходе коня [Mém. Ac. Berl., 1759 (1766)], введенной тогда в большую моду «Математическими и физическими развлечениями» (Récréations math. et phys., выдержала много изданий, начиная с 1696) Ж. Озанама.

Позднее на эту задачу обратил внимание также Вандермонд [Mém. Ac. Paris, 1771 (1774)], обозначивший поля шахматной доски с помощью двойных индексов, которыми мы пользуемся для обозначения элементов определителей. И Монж не счел ниже достоинства применить свое математическое остроумие к одному карточному фокусу, в котором после подходящей перетасовки карт восстанавливалось их первоначальное расположение. По существу это была одна из частных задач теории подстановок, которую Монж подробно исследовал в Mém. prés. Ac. Paris, 1773 (1776). Впрочем, уже Валлис в латинском издании своей «Алгебры» (1693)[1]) разработал устройство одной игрушки, составленной из колец («меледа» франц. Baguenaudier, нем. Nürnberger Zankeisen), на которой мы здесь задерживаться не можем. А Лейбниц, охотно занимавшийся игрой в «солитер», в одном письме к Монмору от 1716 заявил, что необходимо создание математической теории игр.

Упомянем в этой связи магические квадраты, хотя отчасти они принадлежат к теории чисел. Френикль де-Бесси предпринял колоссальный труд по составлению всех 880 магических квадратов с 4^2 ячейками. По оставшимся в его наследии бумагам эти и другие родственные исследования были опубликованы де-Лагиром в «Различных математических и физических работах гг. членов Королевской Академии наук» (Divers ouvrages de math. et de phys. par Mess. de l'académie royale des sciences, 1693). Этими вопросами занимался также Ферма́, и нам известен магический квадрат с 14^2 ячейками, который он отправил в 1640 Мерсенну. Квадрат этот был даже окаймленным, т. е. после удаления из него определенного слоя ячеек всюду одинаковой ширины остаток в свою очередь оказывался магическим квадратом. Составлением магических квадратов в XVII столетии продолжали заниматься знаменитый янсенист А. Арно («Новые начала геометрии» — Nouv. élém. de Géométrie, 1667), Ж. Престэ («Новые начала математики» — Nouv. élém. de Math., 1689)[2]) и, разумеется, Озанам («Математиче-

---

[1]) В оригинальном издании 1685 соответствующая глава отсутствовала.
[2]) В первом издании 1675 глава о магических квадратах отсутствовала.

ские и физические развлечения» и «Математический словарь» — Dictionnaire math., 1691). В XVIII в. каноник Пуаньяр выпустил книгу «Трактат о магических квадратах» (Traité des quarrés magiques, Брюссель, 1704). Подробный реферат последней дал в Mém. Ac. Paris за 1705 де-Лагир, сам тоже произведший некоторые исследования по этому вопросу. Упомянем еще Ж. Совера (Mém. Ac. Paris, 1710) и особенно Л. Эйлера, статьи которого от 1776 и 1779[1]) были помещены во втором томе Commentationes Arithmeticae (Петербург, 1849).

§ 2. Теория вероятностей и ее приложения

Теорию вероятностей трудно отделить от комбинаторики. Обе дисциплины одновременно (1654) получили подлинное обоснование в переписке Паскаля и Ферма́. Исходным пунктом явилась встречающаяся при игре в кости задача, которую пытался решить еще Лука Пачиоли в своей Summa (1494). Речь шла о справедливом распределении между игроками ставки, которую должен получить один из них после того, как он наберет известное количество очков, в случае, если игра прекращается раньше достижения кем-либо из партнеров этого числа очков. Лука Пачиоли рассматривал подобные вопросы при слишком неопределенных предпосылках и трактовал их как задачи на правило товарищества. Кардано (1539) и Тарталья (1556) также не достигли серьезного успеха в изучении этой трудной проблемы, хотя первый из них уже заметил связь ее с комбинаторикой. Правильное, но хлопотливое решение Паскаля было подтверждено Ферма́, получившим тот же результат с помощью совершенно отличного и более простого способа. Однако также удачно распространить задачу на случай более чем двух игроков Паскалю не удалось, ибо использовать здесь свой арифметический треугольник, с которым он все время оперировал, он мог лишь с большим трудом. Мы уже знаем, что исследования Паскаля были опубликованы только в 1665 (стр. 90), а соответствующие письма Ферма́ увидели свет лишь в 1779 в «Сочинениях» (Oeuvres) Паскаля, изданных Боссю.

В 1656 с изысканиями, некоторыми результатами и, наконец, методом французских ученых познакомился Гюйгенс. Однако он уже не нашел в присланных ему сообщениях ничего нового, ибо к указанному времени решил ту же задачу в самом общем виде. Свои исследования Гюйгенс изложил в работе «О расчетах при азартной игре» (De ratiociniis in ludo aleae), появившейся в качестве приложения к «Математическим этюдам» младшего Франца ван Скаугена (1657) и составившей затем первую часть «Искусства

---

[1]) Вторая из названных статей была опубликована уже в 1782 в Verhandel. Genootsch. Vlissingen.

предположений» Якова Бернулли (1713). Однако в весьма подробном и ценном своем комментарии к сочинению Гюйгенса Як. Бернулли пошел гораздо дальше голландского математика. Во второй части своего труда он разработал для нужд исчисления вероятностей комбинаторный анализ (см. выше стр. 91) и показал его пользу на отдельных задачах в третьей части. Во время работы над четвертой частью, в которой Бернулли намеревался дать различные приложения теории вероятностей к вопросу о длительности человеческой жизни, его неожиданно постигла смерть. Тем не менее Бернулли успел сделать еще один огромный шаг вперед. Он первый вполне сознательно ввел наряду с вероятностями a priori, которые до того только и рассматривались, еще и вероятности a posteriori, а также доказал принадлежащий ему так называемый «закон больших чисел». Благодаря этому теория вероятностей, ранее изучавшая лишь азартные игры, смогла приобрести важнейшее значение в практической деятельности. Лейбниц в переписке с Як. Бернулли тоже проявил большой интерес к теоретико-вероятностным вопросам. Бернулли был обязан ему некоторыми стимулами, но сам Лейбниц не дал по теории вероятностей ни одной работы.

Укажем далее на остроумную трактовку азартных игр и пари, данную Карамуель-и-Лобковицем в уже упоминавшейся «Двоякой математике» (1670, см. стр. 74), данную им в целях решения юридически-теологических споров о правомерности пари, об ответственности (в случае продажи или порчи) и т. п. Познания по комбинаторике этот ученый иезуит получил, главным образом, из «Маяка наук» (Pharus scientiarum, 1659) своего собрата по ордену С. Изкиердо. Независимое и безупречное изложение основ исчисления вероятностей дал также Френикль де-Бесси в принадлежащем ему «Резюме» (см. стр. 91).

В 1713 вышло также второе издание «Опыт анализа азартных игр» (Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard) де-Монмора. Как и первое издание 1708, оно вышло анонимно, позволяя, впрочем, легко установить авторство по приложенным письмам. «Опыт» Монмора содержал многие вещи, которые автор почерпнул из сношений с Ник. Бернулли. Николай Бернулли уже в 1709 выпустил сочинение «Примеры искусства предположений в приложении к правовым вопросам» (Specimina Artis conjectandi ad quaestiones Juris applicatae), где применил исчисление вероятностей к вопросу о виновности обвиняемого, против которого имеется несколько свидетельств, к вопросу об объявлении умершими лиц, пропавших без вести, и к так называемой генуэзской игре, из которой возникло позднее нумерное лото. Теорией последнего занялись впоследствии среди других ученых Эйлер и Бегелен в Mém. Ac. Berl., 1765 (1767), а также Иоганн III Бернулли [там же, 1769 (1771)]. Этому вопросу была посвящена еще одна статья Эйлера, представленная им Берлинской Академии в 1763, но опубликованная лишь в «Посмертных сочинениях» (Opera posthuma, I, 1862). В 1713 Монмору была известна и появившаяся в Phil. Trans. за 1711 работа Муавра «О мере случая и т. д.» (De mensura Sortis etc.), ценная глубоким единством построения.

В своем «Опыте» Монмор выступил против некоторых замечаний, сделанных в этой статье Муавром по адресу первого издания его книги. Из статьи Муавра от 1711 выросла упоминавшаяся выше (стр. 91) «Теория случая», первым изданием вышедшая в 1718. Отметим, что в противовес общепринятому обычаю Муавр здесь впервые применил теоретико-вероятностные соображения для вывода чисел сочетаний. Второе издание (1738) им было значительно расширено. В него вошла статья «Пожизненные ренты» (Annuities upon Lives), напечатанная отдельно в 1724, и часть материала из «Аналитических этюдов» (1730), в которых Муавр отвел целый отдел исчислению вероятностей и опровержению возражений скончавшегося тем временем Монмора. Книгу, изданную Т. Симпсоном в 1740, «Природа и законы случая» (The Nature and Laws of Chance) можно рассматривать как извлечение из труда Муавра.

Как видно из нашего изложения, исчисление вероятностей было вскоре применено в практической жизни. В связи с этим вопросом нам придется несколько возвратиться назад. Уже в 1669 Гюйгенс занялся в одном письме вопросом о построении таблицы смертности. Однако первую такую таблицу составил с целью правильного вычисления пожизненных рент упоминавшийся ранее Я. де-Витт (в сочинении 'Waerdije van lijf-renten etc., 1671). Результат де-Витта не был, впрочем, безупречен. Формула, применявшаяся им, была верной, но числовые значения, использованные им при выкладках, не согласовались с его статистическими данными. Возможно, что он сознательно стремился понизить стоимость ренты. Основоположное значение для всей теории приобрели выводы и таблицы, приведенные Эдмундом Галлеем в статье «Оценка степеней человеческой смертности» [An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Phil. Trans., 1690/93 (1694)]. Галлей составил таблицу одновременно живущих людей по различным возрастным группам для случая стационарного населения и по ней определил для каждого возраста вероятность дожития. На этой основе он вычислил значения пожизненной ренты. Он совершенно точно исследовал даже вопрос о пережитии двух лиц различного возраста. На базе вычислений Галлея в Лондоне в 1699 была создана вдовья и сиротская касса. Определением стоимости пожизненных рент занялся в своей работе 1709 также Ник. Бернулли. Муавр, исходя из таблиц Галлея, нашел в статье за 1724, что уменьшение числа лиц, принадлежащих к различным возрастным группам, между 12 и 86 годами, должно следовать арифметической прогрессии. Опираясь на это, он вывел различные формулы и таблицы для пожизненных рент, но при исследовании стоимости совместных рент он исходил из произвольно принятой продолжительности жизни.

Большое значение приобрело сочинение И. П. Зюссмильха «Божественный порядок в переменах человеческого рода» (Göttliche Ordnung in den Veränderungen des Menschengeschlechts; выдержало ряд изданий, начиная с 1741), хотя по существу автор не преследовал практических целей. Случайно для самого себя Зюссмильх оказался даже одним из основателей демографической статистики.

В качестве занятного курьеза упомянем еще «Математические начала христианского богословия» (Theologiae Christianae Principia Mathematica, 1699) шотландца Дж. Крега. Предположив, что доверие убывает пропорционально квадрату расстояния, он вывел, что к 3150 году вера в истину христианской религии сохраниться уже не сможет. Так как, однако, светопреставление должно наступить ранее, то этого, по Крегу, следует ожидать еще до 3150.

Другой областью применения теории вероятностей явилось учение о выравнивании результатов наблюдений. Здесь в первую очередь нужно назвать Р. Котеса. В статье «Оценка ошибок и т. д.» (Aestimatio errorum etc.), опубликованной лишь после его смерти в «Гармонии мер» (1722), Котес указал на необходимость придавать веса различным наблюдениям, имея в виду сначала буквально *веса*. Если при наблюдении для местоположения предмета получаются четыре различных точки, то Котес в своем правиле предлагал присваивать им веса, обратно пропорциональные ошибкам наблюдения, а в качестве истинного места предмета брать центр тяжести этих четырех точек. Однако мысль, что всегда лучше выровнять несколько наблюдений, чем опираться на одно, как бы аккуратно ни было оно проведено, в то время еще не укрепилась. Симпсон энергично отстаивал это убеждение в одной статье в Phil. Trans. за 1755 (I, 1756), в которой он вместе с тем привел выражение вероятности того, что средняя ошибка нескольких наблюдений не превзойдет известной величины. Совершенно такие же соображения развил в Misc. Taur., 1770/73 Лагранж, не знавший, вероятно, работы Симпсона. При этом Лагранж ввел новое понятие вероятности ошибки, которую определил как частное от деления числа появлений соответствующей ошибки на общее число наблюдений. В это же время Даниил Бернулли занялся поисками закона распределения вероятностей ошибок, однако принятые им допущения привели его неудачным образом к полуокружности [Act. Ac. Petr., 1777 (ч. I, 1778)]. Функцию, выражающую закон ошибок, стремился найти также Лаплас. В одном случае он пришел к выражению $y=\frac{1}{2}me^{-mx}$ (Mém. prés. Ac. Paris, 1774), но при этом частично нарушил поставленные им самим требования. Позднее, в объемистом «Мемуаре о вероятностях» [Mémoire sur les probabilités в Mém. Ac. Paris, 1778 (1781)] он предложил кривую $y=\frac{1}{2a}\ln\frac{a}{|x|}$, не обратив внимание ни на трудности, связанные со случаем $x=0$, ни на то, что при $|x|>a$ становится отрицательным y. Лишь Гаусс («Теория движения небесных тел», 1809) вывел применяющийся с тех пор во многих случаях закон ошибок в виде $y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$, где h — постоянная, зависящая от точности наблюдений.

Значительный толчок развитию теории вероятностей сообщил Даниил Бернулли. Еще Гюйгенс ввел понятие «математического ожидания». Если игрок в p случаях может ожидать выигрыша a, а в q случаях — выигрыша b, то согласно Гюйгенсу ожидание игрока в каждом отдельном случае равно $\frac{ap+bq}{p+q}$. Таким образом, это математическое ожидание представляет собой в сущности сумму произведений отдельных выигрышей на их вероятности. В важной статье «Образец новой теории меры случая» [Specimen Theoriae novae de Mensura Sortis, в Comm. Ac. Petr., 1730/31 (1738)] Даниил Бернулли противопоставил математическому ожиданию «нравственное ожидание», учитывающее имущественное положение игрока. Для лица, обладающего состоянием a и ожидающего с вероятностью p_i получить сумму x_i, нравственное ожидание равно

$$(a+x_1)^{p_1}(a+x_2)^{p_2}(a+x_3)^{p_3}\ldots-a.$$

Бернулли тотчас приложил новое понятие к «петербургской задаче», которую впервые поставил в 1713 Ник. I Бернулли и которую впоследствии прославили споры, связанные с ее решением[1]). Задача состояла в следующем: если монета упадет вверх гербом впервые после 1, 2, 3, 4,... бросания ее Петром, то Павел уплачивает Петру соответственно 1, 2, 4, 8,... рублей[2]). Петербургской задачей занялся также Даламбер в статье «Герб или решка» [Croix ou pile, 1754, в издававшейся Дидро и Даламбером «Энциклопедии»[3])]; он вернулся к ней еще в 1757 в статье «Пари» (Gageure). Однако ни эти, ни более поздние выступления Даламбера по вопросам теории вероятностей и ее приложений (особенно в т. II «Математических сочинений», Opusc. math., 1761/80) не отличались основательностью. Одни, как, например, Кондорсе, Лаплас и остроумный Г. Х. Лихтенберг, их оспаривали, другие, вроде Эйлера, просто не принимали всерьез. Д. Бернулли применил впервые в теории вероятностей исчисление бесконечно малых. Это упростило многие

[1]) Название задачи объяснялось тем, что мемуар Бернулли был напечатан в комментариях Петербургской Академии наук.

[2]) Парадоксальность задачи состоит в том, что математическое ожидание выигрыша Петра оказывается бесконечно большим и, значит, для безобидности игры Петр должен вначале выплатить Павлу за право играть бесконечно большую сумму. Введенное Д. Бернулли понятие нравственного ожидания в науке не сохранилось. См. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, М. — Л., 1950, стр. 345—346. — *Прим. ред.*

[3]) Encyclopédе ou Dictionnaire raisonné des sciences, der arts et des métiers.

задачи, представлявшие до того с комбинаторной точки зрения большие трудности; другие проблемы вообще стали доступны лишь с введением инфинитезимальных приемов. Подробно изложил свой метод Д. Бернулли в Nov. Comm. Petr., 1766/67 (1768) и 1769 (1770). В нескольких работах он приложил теорию вероятности к вопросам о длительности человеческой жизни, к вопросу о смертности от оспы и действии прививки, к изучению средней продолжительности браков и к взаимоотношению чисел новорожденных мальчиков и девочек. Отметим еще особо оригинальную по замыслу конкурсную работу, в которой Д. Бернулли рассмотрел, следует ли приписывать различия в наклонениях планетных орбит к эклиптике каким-либо определенным причинам («Работы, получившие двойную премию 1734» — Pièces qui ont remporté le prix double en 1734, Париж, 1735).

Мы можем перейти теперь к апостериорным вероятностям. Введены они были еще Я. Бернулли, но основная задача в этой области была впервые поставлена и решена англичанином Т. Бейесом. Бейес сформулировал ее в следующем точном виде: «Известна частота наступления и ненаступления события при некотором числе испытаний; требуется найти вероятность того, что вероятность наступления события при одном испытании лежит между двумя заданными границами». Работа Бейеса была опубликована лишь посмертно в Phil. Trans., 1763. Выводы и заключительная формула Бейеса были справедливы. Однако этот вопрос был много яснее изложен Лапласом (Mém. pres. Ac. Paris, 1774), познакомившимся со статьей Бейеса, несомненно, лишь позднее. С несколько иной точки зрения и в более общей форме этот вопрос решил Кондорсе. Он это сделал сначала в Mém. Ac. Paris, 1783 (1786), а затем в своем большом, но неясно написанном и не во всем безупречном «Опыте приложения анализа к вероятности решений, принятых большинством голосов» (Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, Париж, 1785). Это сочинение по замыслу автора должно было служить благу человечества, главным образом, посредством приложения теории вероятностей к общественно-политической жизни, например к выборам, голосованиям, установлению законов. Лаплас не раз еще возвращался к формуле Бейеса и весьма просто вывел ее, в частности, в «Мемуаре о приближениях формул, являющихся функциями очень больших чисел» [Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres, Mém. Ac. Paris, 1783 (1786)].

Как видно из названия последней работы, теория вероятностей нашла также применение в приближенном представлении выражений, содержащих очень большие числа, в частности факториалы[1]).

---

[1]) Лаплас определял здесь приближенным образом встречающиеся в теории вероятностей функции, в частности биномиальные коэффициенты, соответствующие очень большим показателям.

И здесь первый толчок дал еще Даниил Бернулли, — именно во второй из упоминавшихся на стр. 99 работ. Во всех вопросах этого рода получили широчайшее употребление инфинитезимальные методы. Но уже и тогда находились люди, которые, подобно Ж. Трамблею, старались каждый новый результат получить с помощью специального «элементарного» вывода, как бы сложен в действительности последний ни был.

Мы не можем останавливаться здесь на различных работах Эйлера, Лагранжа и Кондорсе, посвященных частью азартным играм, частью практическим приложениям теории вероятностей. Главный труд Лапласа «Аналитическая теория вероятностей» (Théorie analytique des probabilités, 1812) лежит слишком далеко за пределами рассматриваемого времени. Мы должны отметить лишь один, оставшийся пока незатронутым вопрос о применении понятия вероятности в геометрии. Впервые подобными задачами занялся естествоиспытатель Бюффон. Он рассмотрел вероятность того, что круглый диск, брошенный на прямоугольную полосу, разбитую на квадраты, упадет целиком внутри одного из квадратов. Бюффон брался и за более трудные задачи этого рода, в которых участвовали квадратная пластинка или же игла. Исследование Бюффона было впервые опубликовано в «Опыте нравственной арифметики» (Essai d'Arithmétique morale, 1777), составлявшем часть написанного в 1760 четвертого, дополнительного тома его «Естественной истории» (Histoire naturelle). Но отчет о сообщении Бюффона по этим вопросам имеется еще в Mém. Ac. Paris за 1733.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПРЕДЫСТОРИЯ ИСЧИСЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

§ 1. Квадратуры и кубатуры

Еще Архимед занимался вычислением площадей поверхностей и объемов тел, причем привлек к исследованию некоторые простые тела вращения. Долгое время математики довольствовались результатами, унаследованными от греков, не добавляя к ним ничего нового. Объяснялось это тем, что достаточно строгим для публичного изложения считали только элементарный метод греков. Между тем, хотя последний и был пригоден для доказательства правильности уже произведенных определений размеров фигур, но не мог быть применен к отысканию размеров новых тел и площадей[1]). И Архимед обладал эвристическим методом, не совпадавшим с методом изложения, что, впрочем, было установлено только после открытия в 1906 рукописи одного его послания к Эратосфену (Цейтен, ч. I).

Поэтому формулировка, в которой Иоганн Кеплер представил свой знаменитый закон о пропорциональности площадей, описываемых радиусом-вектором планеты, и времени, потребного для прохождения соответствующих участков орбиты, оказалась совершенной новостью. В своей «Новой астрономии» (Astronomia nova, 1609) Кеплер утверждал, что «сумма радиусов-векторов», соответствующих дуге орбиты, относится к сумме радиусов-векторов всего эллипса как время, необходимое для прохождения этой дуги, ко времени полного обращения. Действительно, отношение обоих времен он нашел, просуммировав по возможности много радиусов-векторов, следовавших друг за другом по некоторому определенному правилу. В том же сочинении Кеплер установил, что сумма синусов всех углов от 0 до некоторого определенного значения φ, приближенно вычисленная им с интервалом в один градус для различных

---

[1]) Такая оценка «элементарного метода греков» представляется спорной. См. статью А. П. Юшкевича «О методе исчерпывания древних математиков».—Труды совещания по истории естествознания 24—26 декабря 1946 г., М.—Л., 1948.—*Прим. ред.*

значений φ, пропорциональна синус-верзусу φ. Таким образом он вывел, если воспользоваться нашими обозначениями, что

$$\int_0^\varphi \sin\varphi\, d\varphi = 1 - \cos\varphi.$$

В урожайный для винограда 1612 год Кеплер, будучи в Линце, заинтересовался практическими правилами определения объемов винных бочек. При указанном характере предыдущих его работ было неудивительно, что, занявшись этим вопросом, он изобрел особый инфинитезимальный прием, который тотчас приложил к измерению разнообразных старых и новых тел вращения. В 1615 он опубликовал «Новое измерение винных бочек и т. д.» (Nova Stereometria Doliorum Vinariorum etc.), а в следующем году выпустил на немецком языке популярное издание этого труда под заголовком «Извлечение из древнего искусства измерения Архимеда и т. д.» (Außzug auß der uralten Messekunst Archimedis etc.). Хотя Кеплер не располагал разработанным представлением о бесконечно малом, но в названной книге он применил это понятие так же, как сто лет спустя в геометрии употребляли дифференциал. Он разбивал поверхности и тела на элементарные части и суммировал последние. Руководясь своей новой идеей, Кеплер впервые пошел дальше того, что было известно тогда от древних. В общем он определил размеры 87 новых тел. Кроме того, исследования Кеплера о форме бочек, обладающих наибольшей вместимостью при наименьшей затрате материала, привели его к задачам на максимумы и к изопериметрическим задачам, в рассмотрении которых он примкнул к книге V «Сборника» Паппа. Кеплер правильно увидел основной признак максимума в том, что, как писал он, разница между самим максимумом и непосредственно предшествующими или же последующими значениями незаметна.

На первых порах Кеплер с его инфинитезимальными исследованиями оказался в одиночестве, но поднятые им идеи не заглохли. Уже в 1621/22 Б. Кавальери сообщил своему учителю Галилею основные принципы изобретенной им новой концепции образования поверхностей и тел и определения их размеров. Воззрения Кавальери систематически были изложены лишь в 1635 в его книге «Геометрия, развитая некоторым новым способом при помощи неделимых частей непрерывных величин» (Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota). Сочинение это, несмотря на свою неясность, долгое время оставалось наиболее значительным произведением в этой области; оно даже вышло по смерти автора вторым, улучшенным еще им самим изданием (1653).

Представления о бесконечно малом были у Кавальери много точнее, чем у Кеплера. Итальянский ученый воспользовался понятием «неделимых», известным, по крайней мере, со времен Брадвардина и точно определенным в схоластической философии Фомы Аквинского. Согласно этому учению «неделимое» представляет собой нечто разнородное по отношению к бесконечно делимому геометрическому континууму и обладает одним измерением меньше, чем последний. Так, например, точка является неделимым для линии, прямая — неделимым для плоскости и т. д. Каждое неделимое обладает способностью порождать при *движении* континуум ближайшего числа измерений. Основываясь на подобном понятии неделимого, которое, впрочем, сам он не разъяснил, Кавальери мыслил, что, скажем, площадь плоской фигуры представляется «совокупностью» всех пересекающих ее прямых, параллельных какой-либо касательной контура. Все такие прямолинейные сечения порождаются продвижением (течением)[1]) одной из них, так называемой regula (направляющей). Две площади равны, если равны между собой любые два сечения, находящиеся на одинаковых расстояниях от соответствующих касательных; если же такие сечения находятся в постоянном отношении, то площади подобны. Относительно сечений — неделимых — Кавальери установил два главных предложения, на которых и построены все его определения и сравнения размеров фигур.

I. «Совокупность неделимых одной и той же фигуры не зависит от выбора направляющей».

II. «Размеры двух геометрических фигур относятся как совокупности их неделимых, и эти совокупности обладают определенным отношением, если в таком же отношении находятся все соответствующие неделимые обеих фигур».

С современной точки зрения произведенные Кавальери сравнения размеров геометрических фигур сводятся к тому, что для каждой фигуры определяется ось и система прямых, образующих с осью постоянный угол. Условие подобия фигур тогда заключается в том, что между неделимыми прямыми для соответственных точек на обеих осях существует постоянное отношение. О бесконечно малых в смысле Кеплера и суммировании их у Кавальери нигде нет и речи.

Крупный шаг вперед, сделанный Кавальери по сравнению с Кеплером, состоял, не говоря о более систематической трактовке вопроса, в том, что он не ограничился применением совокупностей всех прямых плоской фигуры, а перешел к вычислению совокупности квадратов всех прямых. После того как Кавальери показал, что в подобных треугольниках эти суммы квадратов относятся как

---

[1]) Выражение «течь» встречается у Кавальери в опубликованных в 1647 «Шести геометрических этюдах» (Exercitationes geometricae sex) и в других местах; оно было получено, вероятно, из представлений Непера. Понятия, выставленные в первом издании «Геометрии неделимых», были выражены более четко уже в этих «Этюдах».

кубы сходственных сторон, он доказывает теорему: «совокупность квадратов всех отрезков параллелограмма, параллельных одной из его сторон, втрое больше совокупности таких же отрезков в треугольнике, отсекаемом в параллелограмме его диагональю». В переводе на наш язык это предложение с точностью до постоянного множителя выражало интеграл $\int\limits_0^a x^2\,dx=\frac{a^3}{3}$ путем его сравнения с интегралом $\int\limits_0^a a^2\,dx=a^3$. С помощью его Кавальери нашел объемы пирамиды и конуса, а также площадь параболического сегмента. Указанная теорема, выведенная на свой лад и использованная еще Архимедом, была открыта в 1629 также Ферма́ (см. его письмо к Робервалю от 22 сентября 1636), который распространил ее одновременно на параболы любого порядка. Отвечая на запрос Кавальери, Ферма́ еще до 1644 сообщил ему некоторые свои результаты. Кавальери дал доказательство этого обобщения, высказанного им, впрочем, уже в 1639, в «Этюдах». По содержанию названное обобщение совпадает с формулой

$$\int\limits_0^a \frac{x^n}{a^n}\,dx=\frac{a}{n+1}.$$

Кавальери провел доказательство лишь для первых девяти степеней. Эту важную теорему самостоятельно нашли еще Декарт и Валлис, первый в 1638, исходя, вероятно, из понятия совокупности Кавальери, а второй несколько позднее, иным путем. Кавальери заново произвел и квадратуру спирали Архимеда, открытую еще самим Архимедом. Здесь он воспользовался кругообразными неделимыми, т. е., говоря по-современному, интегрированием в полярных координатах с радиусом-вектором, как независимым переменным. Эта квадратура приведена была еще в одной работе, посланной Кавальери Галилею 9 апреля 1623. Тем самым исключается возможность плагиата у иезуита Григория Сен-Винцента, устное сообщение которого о таком же методе могло быть сделано не ранее 1625 и который опубликовал его в 1647 в своем «Геометрическом труде» (Opus geometricum). Но нет также оснований думать, что Григорий Сен-Винцент заимствовал этот метод у Кавальери, ибо основная мысль имелась уже у самого Архимеда.

Среди некоторых инфинитезимальных рассмотрений, содержавшихся в «Геометрическом труде», особенно интересны кубатуры тел, способ образования которых мы можем передать следующим образом. Представим себе прямоугольную пространственную систему координат и два цилиндра $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$, соответственные образующие которых перпендикулярны друг к другу и к оси x.

Оба цилиндра, плоскости xy и xz и плоскости $x=a$ и $x=b$, ограничивают тогда тело, объем которого в наших обозначениях равен $\int_a^b yz\,dx$. Беря для y и z различные значения, при которых остается неизменным произведение yz, Григорий получил ряд красивых предложений. Если, например,

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\quad z=\sqrt{a^2-x^2},$$

то возникающее при этом тело имеет тот же объем, как и в случае, если вместо полуцилиндров взять плоскости $y=a-x$, $z=a+x$.

Случайное употребление инфинитезимальных величин встречалось уже в сочинениях Валерио, Лафайля и Гульдина (Цейтен, II), посвященных отысканию центров тяжести. Но бесконечно малые применялись здесь в форме, известной еще из работ Архимеда. Способ, которым Галилей в знаменитых «Беседах и математических доказательствах о двух новых науках» (Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, 1638) вывел закон пути $s=\frac{1}{2}gt^2$ по известной скорости свободно падающего тела, $v=gt$, был, напротив, вполне в духе концепции Кавальери[1]). Таким образом, по времени и по существу он вполне относится к разбираемому нами вопросу, хотя и стоял у Галилея особняком. Галилей показал, что путь s равен площади прямоугольного треугольника, катетами которого являются время и конечная скорость. При доказательстве время и скорость выступали в качестве прямоугольных координат t, v некоторой прямой ($v=gt$); в этом Галилей близко примыкал к Аполлонию. Площадь треугольника рассматривалась как совокупность всех v, т. е. по-нашему как $\int v\,dt$.

Совершенно в духе Кавальери применял неделимые и Жиль Персонье де-Роберваль, хотя определял он их как бесконечно малые величины того же измерения, что и соответствующий геометрический образ. Быть может, Роберваль поступал так, чтобы замаскировать свою зависимость от Кавальери, с методом которого он был, несомненно, знаком, когда начал в 1637 разрабатывать свое «Учение о бесконечном» (Doctrina infiniti). Впрочем, и здесь, и в «Трактате о неделимых»[2]) (Traité des indivisibles) Роберваль

---

[1]) Мы только записали в современной форме то, что Галилей выражал с помощью пропорций.

[2]) Сочинения Роберваля впервые вышли в 1693 в Divers ouvrages de mathématique et de physique par Mss. de l'Académie des Sciences, а затем в 1730 в парижском издании старой серии (1666/99) Mém. Ac. Paris, т. VI и в т. III (1731) гаагского издания. Разработку инфинитезимальных приемов Роберваль начал, по-видимому, в 1634 независимо от Кавальери. К 1634 относится, вероятно, и квадрирование Робервалем циклоиды. (*Прим. ред.*)

с большим искусством применил метод Кавальери к ряду трудных задач. С его помощью, например, он нашел в конце 1636 квадратуру циклоиды, которую затем вновь вывел в 1638 Декарт, тоже воспользовавшийся основным предложением Кавальери. Роберваль произвел также кубатуру тел вращения циклоиды вокруг ее основания и вокруг наибольшей ординаты.

Значительно последовательнее Роберваля поступал его знаменитый ученик Блез Паскаль. Метод доказательства, применявшийся Григорием Сен-Винцентом, с которым мы познакомимся ниже, побудил Паскаля преобразовать *понятие совокупности* Кавальери в *понятие суммы*. При этом Паскаль проводил отчетливое различие между неделимыми и элементарными частями. Паскаль, далее, существенно более общим образом толковал понятие равенства фигур, чем это позволяло употребительное до того определение Евклида. Именно, он считал равными две фигуры, если различие между ними меньше любой данной величины. Паскаль с полной ясностью проник в существо интеграционного процесса, заметив, что всякое интегрирование приводится к определению некоторых *арифметических сумм*. Уже в работе 1654 «Сумма степеней чисел» (Potestatum numericarum summa, опубликовано в Париже в 1665, ср. стр. 90) он заявил, что для всех, кто сколько-нибудь разобрался в учении о неделимых, должна быть ясна зависимость между суммами степеней и измерением криволинейных площадей. Действительно, в различных своих работах Паскаль подошел к понятию определенного интеграла ближе всех своих современников. Напротив, он не располагал никакой символикой, а все выражал одними словами, и, следовательно, он ни в коей мере не думал о новом *инфинитезимальном исчислении*. Статьи Паскаля, выпущенные им в 1659 под псевдонимом А. Деттонвилля[1]), были весьма богаты разнообразными частными результатами. Они содержали вычисление интегралов многих тригонометрических функций и интегралов вида

$$\int_0^a (a^2-x^2)^{3/2}dx, \qquad \int_0^a (a^2-x^2)^{1/2}x^3\,dx, \qquad \int_0^a (a^2-x^2)^{1/2}x^2\,dx.$$

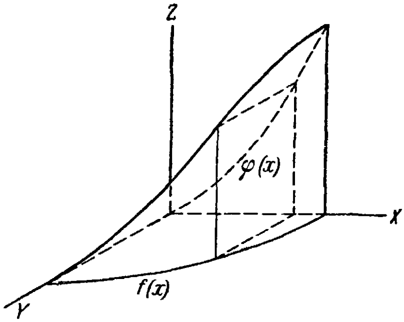
Интеграл

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$$

определил еще Роберваль в связи с квадратурой конхоиды Никомеда. Паскаль доказал также ряд теорем, которые мы теперь относим к замене переменных и к интегрированию по частям. Так,

[1]) Amos Dettonville — анаграмма псевдонима Louis de Montalte, под которым Паскаль выпустил в 1656/57 свои знаменитые «Письма к провинциалу» (Lettres provinciales).

например, он рассмотрел, подобно Григорию Сен-Винценту, тело, ограниченное тремя взаимно-перпендикулярными плоскостями, цилиндром $y=f(x)$, отсекающим на осях отрезки a и b, и цилиндром $z=\varphi(x)$, образующие которого параллельны оси y. Если $z=\varphi(x)$ есть плоскость, проходящая через ось y, то возникает так называемое цилиндрическое копыто, которое Паскаль называл onglet. Объем такого тела равен вообще $\int\limits_0^a yz\,dx$, где yz изображается на приложенном чертеже (черт. 3) прямоугольником с тремя пунктирными сторонами.



Черт. 3.

Объем того же тела можно получить, произведя сечения, параллельные плоскости xz и обладающие площадью $\int\limits_0^x z\,dx$. Это дает формулу

$$\int\limits_0^a yz\,dx=\int\limits_0^b \left(\int\limits_0^x z\,dx\right)dy.$$

Наряду с методом неделимых Кавальери в рассматриваемое время из элементарных методов Архимеда возник еще другой прием. Мы имеем в виду *метод пределов*, тончайшим образом разработанный и твердо укрепившийся в современной математике. Само понятие предельной фигуры было уже давно известно в геометрии. Однако точная формулировка этого понятия и применение его к созданию метода квадратур и кубатур принадлежат только XVII столетию. Метод, употреблявшийся Архимедом, представлял собой по существу лишь *косвенный способ доказательства результатов*, найденных иным путем. Основывался он на следующем предложении: если при допущениях $A>B$ или $B>A$ можно установить, что разности $A-B$ и соответственно $B-A$ оказываются меньше всякой однородной с A и B величины, то геометрические величины A и B равны. Так как определение этих величин зависит от природы проблемы, то в каждой новой задаче его приходилось производить сначала. Впервые облегчил это определение Л. Валерио, предпославший в своей работе «О центре тяжести тел» (De centro gravitatis solidorum, 1604) целый ряд общезначимых теорем. В своем «Геометрическом труде» Григорий Сен-Винцент также стремился приспособить античный метод к сравнению размеров новых фигур с известными. Для этого он вписывал в те и другие столько параллелограммов или параллелепипедов, чтобы они «исчерпали» площадь или соответственно объем фигур. Благодаря употребленному им слову «исчерпывать» («exhaurire») преобразованный таким образом метод получил название *метода исчерпывания*, которое в свою очередь не вполне правильно было перенесено на чисто элементарный способ доказательства древних. В этом методе исчерпывания Григорий Сен-Винцент довольно близко подошел к понятию предела. В арифметическом отношении он даже определил предел, поскольку определил сумму прогрессии как ее конец («terminus»), которого нельзя достигнуть даже при бесконечном продолжении, но к которому можно подойти ближе, чем на любой данный интервал.

Первый подлинный *переход к пределу* встречается, однако, у собрата Григория по ордену, А. Таке, который вывел сумму бесконечной геометрической прогрессии из суммы конечной прогрессии («Начала плоской и телесной геометрии и т. д.»—Elementa Geometriae planae et solidae etc., 1654, 2-е изд., 1665 [1])). Метод исчерпывания тоже приобрел в руках Таке более строгий математический характер. В книге «Четыре книги о цилиндриках и кольцах» (Cylindricorum et annularium libri quatuor, 1651) Таке применил его к кубатуре цилиндрических копыт и кольцеобразных тел, причем осуществлял предельные переходы для вписанных и описанных фигур с помощью специально предпосланных арифметических предложений.

Мы теперь должны возвратиться к Ферма́. В одной работе, завершенной не ранее 1657 [2]), он распространил свою квадратуру парабол также на случай дробных и отрицательных показателей. Он чертил параболу в прямоугольной системе координат и разбивал квадрируемую площадь прямыми, параллельными оси y, на весьма узкие полоски, длины оснований которых убывали или же возрастали в геометрической прогрессии. Рассматривая эти полоски как прямоугольники, Ферма́ затем производил их суммирование. При этом, разумеется, он должен был суммировать бесконечный ряд и определять предел суммы, когда первая из полосок, а за ней и все остальные становятся бесконечно узкими. Для обыкновенной гиперболы $xy=a^2$ Ферма́ нашел, что при его способе разбиения полосы оказываются одинаковой величины, что заметил еще Григорий Сен-Винцент в «Геометрическом труде».

Для Ферма́ и для Григория, несомненно, была ясна вытекающая отсюда связь гиперболических площадей с логарифмами, хотя предложение, что площадь гиперболы выражается логарифмом, было для них обоих еще совсем чуждым. Ферма́ также применял некоторые преобразования интегралов, хотя и в менее общей форме, нежели Паскаль. Он проинтегрировал

$$\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$$

[1]) См. примечание на стр. 19. — *Прим. ред.*

[2]) Опубликовано впервые в Varia opera, 1679.

при нечетном n, вычислил площади декартова листа $x^3+y^3=axy$ и так называемого «локона Аньези», $y(x^2+a^2)=a^3$. Интегралы он приводил по большей части в неопределенной форме.

Полностью арифметизирован был предельный переход в «Арифметике бесконечных» (1656) Дж. Валлиса. Валлис рассматривал поверхности или тела как алгебраические суммы элементарных частей и представлял отношение двух площадей или объемов в виде частного сумм расходящихся рядов. При этом искомое предельное значение было для него результатом бесконечного процесса, а *бесконечное* определялось через предел. В связи с этим Валлис впервые ввел для бесконечности особый знак ∞; у него же появляются равенства $\frac{1}{0}=\infty$ и $\frac{1}{\infty}=0$. Пользуясь своим методом, Валлис, как уже говорилось, самостоятельно открыл теорему Ферма́ об интеграле целой степени аргумента, а затем с помощью смелых заключений, опиравшихся на неполную индукцию, перенес ее на дробные и даже содержащие радикалы показатели. С помощью столь же смелых заключений, по аналогии проведенных им, однако, с большим математическим тактом, или, как выражался сам Валлис, с помощью «интерполяции», он выразил интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$, дающий площадь полукруга с диаметром 1, через факториалы дробных величин. Это привело Валлиса к знаменитому бесконечному произведению

$$\frac{4}{\pi}=\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\ \ldots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\ \ldots},$$

которое и теперь носит его имя. Валлис, между прочим, пришел к выводу, что точно произвести квадратуру круга посредством циркуля и линейки невозможно. В «Опровержении гоббсовой геометрии» (Elenchus Geometriae Hobbianae, 1655) он даже заметил, что $\frac{4}{\pi}$ нельзя представить с помощью корней, т. е., как выражаемся мы теперь, что это трансцендентное число. Разумеется, он не был в состоянии доказать это, как и Дж. Грегори в его «Истинной квадратуре круга и гиперболы» (Vera circuli et hyperbolae quadratura, 1667). Во введении к названному сочинению Грегори рассматривал уже предел как *новое* число, которое определяется как граница последовательности (series) и нахождение которого представляет собой *исчисление нового рода*.[1]

Среди отдельных результатов, найденных Валлисом с помощью его своеобразного метода, упомянем еще квадратуру площади, заключенной между циссоидой Диоклеса и ее асимптотой. Эту задачу Валлису предложил Хр. Гюйгенс, сам решивший ее в 1658. Величину той же площади независимо нашел также около 1661

Ферма́[1]). Еще важнее были рассуждения Дж. Грегори о том, как заменять участки кривой, лежащие в определенных интервалах, через параболы («Геометрические этюды» — Exercitationes geometricae, 1668). Используя ряд разностей второго порядка, Грегори дал формулу приближенных квадратур, лишь по внешности отличающуюся от правила, названного позднее именем Симпсона (см. главу VII, § 3). Грегори указывал также на возможность применения парабол высшего порядка. До того Грегори особым способом точно вычислил интеграл

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln(\sec x).$$

§ 2. Задачи на проведение касательных и экстремумы; спрямление кривых и обратная задача о касательных

В области задач, решаемых ныне посредством дифференцирования, древние сделали гораздо меньшую подготовительную работу, чем в области задач, относимых нами теперь к интегральному исчислению. Важные в этом отношении античные сочинения, вроде «Конических сечений» Аполлония, в пятой книге которых разбирались некоторые вопросы о максимумах и минимумах, еще не были опубликованы. Попытку восстановить содержание названной книги сделал ученик Галилея В. Вивиани в работе De maximis et minimis geometrica divinatio etc., вышедшей в 1659. Перевод труда Аполлония, изданный в 1661 Борелли при содействии одного ориенталиста и основывавшийся на арабской рукописи, блестяще подтвердил гипотезы Вивиани. Наоборот, попытка, предпринятая в том же направлении Мавролико, работа которого была напечатана только в 1654, должна быть признана неудачной.

Но уже в 1629 Ферма́, как сообщал он Робервалю в письме от 22 сентября 1636, изобрел прославившийся впоследствии метод отыскания максимумов и минимумов. Через посредство М. Мерсенна работа Ферма́ попала в январе 1638 к Декарту. Опубликована она была лишь в 1679 в Varia opera под названием «Метод отыскания наибольших и наименьших значений» (Methodus ad disquirendam maximam et minimam). Тем не менее способ Ферма́ получил широкую гласность значительно раньше благодаря Эригону, включившему его в свое «Дополнение к курсу математики» (Supplementum Cursus mathematici, 1642). Независимо от Ферма́ этот же прием был открыт, правда, слишком поздно, итальянцем А. ди-Монфорте («Об определении проблем», — De Problematum determinatione, Неаполь, 1699). Пользуясь выражениями самого Ферма́, его метод можно передать следующим образом. В выражении, которое должно получить экстремальное значение, вместо

[1]) Опубликовано впервые в Oeuvres, т. II (1894).

неизвестной величины A подставляется $A+E$, и оба выражения приближенно приравниваются друг другу. Затем в обеих сторонах равенства вычеркиваются одинаковые члены, производится деление на множитель E и, наконец, E полагается равным нулю. Остающееся в результате уравнение и дает значение A, соответствующее экстремуму. Ни A, ни E не рассматривались при этом как *переменные*, так что о предельном переходе или же о производной в нашем смысле здесь не может быть и речи, хотя прием Ферма́ и был вполне равносилен образованию производной. То же самое относится к методу, предложенному Ферма́ для нахождения касательных, который опирался на такой же вычислительный прием и который Ферма́ сумел применить к ряду кривых, заданных неявными уравнениями (циссоида Диоклеса, декартов лист), и к циклоиде. Определяя максимум или минимум угла касательной с осью абсцисс, Ферма́ мог также разыскивать точки перегиба. В нескольких случаях Ферма́ использовал свой метод и для определения центров тяжести. Но подлинное обоснование метода у Ферма́ отсутствовало. Не был знаком он и с достаточными условиями экстремума вообще и максимума или минимума в частности [1]). Сказанное имеет силу и для исследований, о которых идет речь ниже.

Декарт, великий соперник Ферма́, тоже занимался проблемами исчисления бесконечно малых. Однако сколь остроумным ни было декартово решение таких задач в каждом отдельном случае, методически разработал он лишь проблему проведения касательной. Алгебраическое решение ее он дал в своей «Геометрии». Для определения положения нормали в точке с абсциссой x Декарт описывал окружность из предполагаемой точки пересечения нормали с осью абсцисс и для определения этой точки выставлял условие, чтобы две точки пересечения окружности и кривой сливались в одну. Впрочем, уже в одном письме от мая 1638 Декарт заметил, что вместо окружности проще пользоваться секущей прямой. Подробнее эта мысль проведена была Ф. Дебоном в его «Кратких замечаниях» к латинскому изданию декартовой «Геометрии» (1649). Однако эти чисто алгебраические методы, вообще весьма громоздкие, не годились для трансцендентных или, как тогда говорили, «механических» кривых. Поэтому при построении касательной к циклоиде Декарт пошел иной дорогой, а именно, воспользовался открытым им *кинематическим* свойством, что нормаль кривой, образуемой при качении, проходит через точку,

[1]) Из одного письма Ферма́ от 1643 г., опубликованного только в 1922 г., мы знаем теперь, что для целой рациональной функции он выводил необходимое условие экстремума так же, как это делаем мы теперь в общем случае с помощью формулы Тейлора, и по существу располагал достаточными признаками максимума и минимума. См. примечание на стр. 242 моего перевода «Геометрии» Декарта, указанного в списке литературы. —*Прим. ред.*

в которой образующая кривая касается основания, по которому катится. Построение Декарта, как видно из письма к Мерсенну от 23 августа 1638, предшествовало построению, данному Ферма́, и тем самым явилось первым решением этой задачи.

На *механических* представлениях покоился хорошо известный и ныне метод касательных Роберваля. Роберваль, поддерживавший дружеские связи с Ферма́, принадлежал к кружку ученых, встречавшихся на научных собраниях у Мерсенна. Из этих собраний по распоряжению Ришелье создана была в 1635 Парижская Академия, заново преобразованная в 1666 Кольбером. Метод Роберваля, бегло изложенный впервые в 1644 в «Физико-математических размышлениях» (Cogitata Physico-Mathematica) Мерсенна, опирался на закон параллелограмма скоростей при равномерном движении. Одновременно с Робервалем его открыл ученик Галилея Э. Торричелли, исходивший из теории падения тел, созданной его учителем, и опубликовавший найденный им прием в сборнике «Геометрические труды» (Opera geometrica), изданном тоже в 1644. Наряду с методом касательных, книга Торричелли содержала еще ряд квадратур и кубатур. Способом Роберваля—Торричелли, который с большим искусством применял и Декарт, мы еще займемся подробнее в следующей части.

Методы касательных, которыми пользовались голландец Гудде в письмах от 1659, а начиная с 1662 бельгиец де-Слюз, представляли собой сочетание приемов Ферма́ и Декарта[1]). Гудде отправлялся от определения кратных корней уравнения (см. стр. 64) и для целых рациональных алгебраических уравнений открыл *формальную процедуру*, по существу тождественную с образованием производной, хотя сам Гудде руководствовался исключительно алгебраическими соображениями. Так же обстояло дело с методами для определения касательных, максимумов и минимумов, предложенными Хр. Гюйгенсом, исходившим из исследований Ферма́ (опубликованы они были только в 1693 в Divers ouvrages de math. et de phys.). Формальные операции, которые употребляли эти ученые, не остались без влияния на последующее развитие математики, поскольку могли подать мысль о возможности некоего нового исчисления.

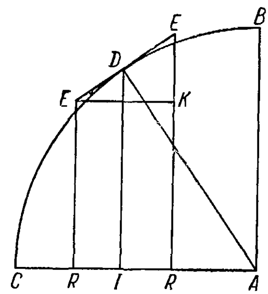
Задача о *спрямлении кривых* была для ученых того времени, естественно, еще труднее, чем рассмотренные выше вопросы исчисления бесконечно малых. Это объясняется уже тем, что долгое время считали вообще нелепым самое сравнение кривых линий с прямыми. Первое спрямление удалось произвести Торричелли, который около

---

[1]) Письмо Гудде к Скаутену было напечатано в 1713 в Journ. litéraire. Два соответствующих письма де-Слюза от 1673 были опубликованы в Phil. Trans. за 1672 и соответственно 1673. Вывод Слюза в них намечен лишь в общих чертах.

1640 определил отрезок, равный длине логарифмической спирали, отсчитываемой от полюса. Первый же пример алгебраического спрямления алгебраической кривой дал У. Нейль. По свидетельству Валлиса (см. сочинение: «Два трактата о циклоиде и циссоиде» — Tractatus duo de cycloide et de cissoide, Оксфорд, 1659) Нейль в 1657 спрямил полукубическую параболу, носящую теперь его имя. В приведенном сочинении Валлис изложил также способ спрямления циклоиды, найденный в 1658 Кр. Реном. После этого Ферма́, Валлис и ван Гейрет[1]) произвели ряд спрямлений, а Гюйгенс вычислил ряд площадей поверхностей тел вращения. Обе задачи эти ученые привели к квадратурам, доказав, что дуга кривой так относится к некоторому отрезку прямой, как площадь, определенной другой кривой к некоторому прямоугольнику. Таким путем, например, длина дуги параболы была измерена с помощью площади равносторонней гиперболы. С нашей современной точки зрения это обозначало преобразование одного определенного интеграла в другой известный интеграл посредством введения новой переменной; тогда это преобразование производилось чисто геометрически.

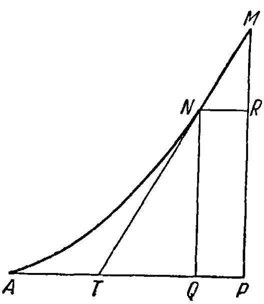
Еще Валлис в «Арифметике бесконечных» (1656) получил выражение, эквивалентное нашему элементу дуги, т. е. $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Мы имеем в виду одно из наиболее богатых последствиями его открытий, а именно, по терминологии Лейбница, «характеристический треугольник» («triangulum characteristicum»), составленный из катетов dx, dy и гипотенузы ds. Однако Валлис не смог воспользоваться им для ректификаций, ибо, очевидно, не умел преобразовывать, как этого требовал его метод, радикала $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ в бесконечный ряд. Несколько позднее характеристический треугольник многократно применялся также Паскалем, допускавшим, что элемент дуги, который он рассматривал как отрезок прямой, совпадает с касательной. В своем «Трактате о синусах четверти круга» (Traité des sinus du quart de cercle, вышел, вероятно, в Париже, 1659) Паскаль, основываясь на характеристическом треугольнике (черт. 4), вывел равенство: $DI \cdot EE = RR \cdot AB$, которое определяет отношение двух бесконечно малых элементов $\frac{RR}{EE}$ через отношение конечных величин $\frac{DI}{AB}$. Именно этот чертеж Паскаля привел Лейбница к изобретению дифференциального исчисления. Сам Лейбниц говорил, что увидел здесь свет, которого не различал автор.



Черт. 4.

[1]) Письмо Гейрета от 1659 приложено ко второму латинскому изданию «Геометрии» Декарта (1659).

Из нашего изложения видно, что *взаимно обратный характер* двух групп инфинитезимальных проблем, решаемых нами теперь с помощью дифференцирования и интегрирования, отнюдь еще не был ясен ученым того времени. Открыл это обстоятельство И. Барроу, учитель и друг Ньютона [1]). В своих «Лекциях по оптике и геометрии» (Lectiones opticae et geometricae, 1-е изд. 1669/70, 2-е изд. 1674) Барроу исходил из механических идей Галилея и Торричелли. Во главу исследования он поставил понятие движения и в одних случаях выводит путь, пройденный точкой, по времени и скорости ее движения, а в других по времени и пути выводит скорость движения. В такой форме у Барроу впервые были сопоставлены две взаимно обратные проблемы интегрирования и дифференцирования, причем для произвольных кривых, т. е., по-нашему, функций. Мы увидим, далее, как на этом фундаменте построил свое *исчисление флюксий* Ньютон. Барроу, побуждаемый Ньютоном, опубликовал базирующийся на тех же идеях формальный прием определения касательных, в котором объединил употребление характеристического треугольника Валлиса с методом касательных Ферма́. Пусть MN (черт. 5) есть бесконечно малая дуга кривой, MT — касательная, MP и NQ — две перпендикулярные к оси AP ординаты и пусть $NR \parallel AP$, $MR = a$ и $NR = e$. «Тогда a и e будут связаны друг с другом уравнением; при этом следует отбросить все члены, содержащие степени a и e выше первой или же их произведения. После установления уравнения «откидывают», руководствуясь уравнением кривой, члены, не содержащие a и e. Если заменить теперь a через $MP = m$ и e через $TP = t$, то получается уравнение, определяющее *подкасательную* t», к установлению которой стремился еще Ферма́. Цитированное правило показывает, что Барроу полагал отношение бесконечно малых величин $\frac{a}{e}$ равным отношению конечных величин $\frac{MP}{TP} = \frac{m}{t}$, как поступал и Ньютон, метод которого прямо вытекал из приема Барроу.



Черт. 5.

---

[1]) Как показали новые исследования, взаимно обратный характер задач на касательные и задач на квадратуры был ясен по существу Торричелли и Дж. Грегори. См. об этом статью Э. Бортолотти в IV томе Opere Торричелли, сборник памяти Грегори под ред. Г. Тернболла, книгу Хр. Скриба, а также часть 2 «Истории математики» И. Э. Гофмана (см. список литературы). В этих работах вообще дана значительно более полная оценка достижений Торричелли и Грегори, в большой мере основанная на изучении рукописного наследия. — *Прим. ред.*

Барроу занимался и так называемой *обратной задачей о касательных*. Под этим именем тогда понимали задачу об определении кривой или, по крайней мере, ее свойств на основании известных свойств касательных к кривой. Мы бы сказали, что речь шла об интегрировании дифференциального уравнения первого порядка. К проблемам этого рода относились данное приближенно еще П. Нуньесом (1546) представление шаровой локсодромы и определение логарифмической спирали, приведенное Декартом в одном письме к Мерсенну от 1638. Однако систематически начали заниматься проблемами этого рода только после того, как на них обратил внимание Дебон, известный своими «Краткими замечаниями» к изданию «Геометрии» Декарта 1649. В одном недошедшем до нас письме Дебона от 1638, пересланном Мерсенном Декарту, ставилась задача об определении кривой, для которой отношение ординаты к подкасательной равно отношению некоторого данного отрезка к разности ординаты и абсциссы. В своем ответе от 20 февраля 1639 Декарт тотчас признал важность подобных задач, но указал, что общее решение их с помощью данных им или Ферма́ правил для касательных он считает невозможным.

Барроу первый попытался принципиально свести обратную задачу о касательных к квадратуре. Начальный шаг к этому заключался уже в открытии им взаимно обратного характера проблемы определения касательной и проблемы квадратур. В самом деле, квадратура непосредственно позволяла определить кривую, для которой отношение ординаты к подкасательной зависит только от абсциссы, ибо тогда $\frac{y}{t}=\frac{dy}{dx}=f(x)$. Подобный пример встречается также в работе Дж. Грегори «Общая часть геометрии» (Geometriae pars universalis, 1668). Сведе́ние вопроса к квадратурам удалось Барроу и в ряде более трудных случаев. В этом ему помог открытый им и изложенный в одном приложении к «Лекциям» геометрический прием, заменявший наше разделение переменных. Новым было и сознательное применение Барроу правил, встречающихся при определении касательных (т. е. дифференцировании), к преобразованиям квадратур. Зная, что $d\sin\varphi=\cos\varphi\, d\varphi$, он получал в наших обозначениях формулу

$$\int_0^{\varphi}\sec^2\varphi\, d\sin\varphi=\int_0^{\varphi}\sec\varphi\, d\varphi.$$

Открытия Барроу заключали цепь предварительных работ, предшествовавших открытию исчисления бесконечно малых[1]). Содержавшееся в его работах возобновление и развитие *механических*

[1]) В 1672 году Валлис опубликовал в VII т. Phil. Trans. еще один метод касательных, который, однако, явно примыкал к известным ранее.

идей Галилея и Торричелли, его сопоставление взаимно обратных инфинитезимальных задач, несомненно, оказали столь же направляющее влияние на Ньютона, как метод неделимых Кавальери и вычисления с бесконечно малыми величинами Паскаля на Лейбница. Но все еще недоставало *систематического* применения отношений двух исчезающих величин, ясной точки зрения на понятие *функции* и прежде всего особого *вычислительного алгорифма*, который мог бы, при подходящем определении его формальных операций, оттеснить на задний план лишнюю работу мысли, ранее необходимую при отдельных инфинитезимальных исследованиях. Введение всего этого в математику выпало на долю двух великих умов, деятельностью которых мы займемся в следующей главе.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ОТКРЫТИЕ И ПЕРВОНАЧАЛЬНОЕ РАЗВИТИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ. БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

§ 1. Метод флюксий Ньютона и введение рядов

Мы видели, что хотя Григорий из Сен-Винцента и Ферма́ заметили связь между площадью гиперболы и логарифмами, но они не могли сказать, что, как пишем мы, $\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}$. Объяснялось это тем, что логарифмы представляли собой для них нечто совершенно новое. Они скорее склонны были рассматривать площадь гиперболы как геометрическую иллюстрацию понятия логарифма, чем, наоборот, определять ее через логарифм. Поэтому о квадратуре гиперболы можно говорить лишь с того времени, когда гольштинец Ник. Меркатор (первоначальная фамилия которого была Кауфман) в написанной и напечатанной в Лондоне «Логарифмотехнике» (Logarithmotechnia, 1668) пришел к мысли взять уравнение гиперболы в виде $y = \frac{1}{1+x}$ и путем простого деления разложить эту дробь в бесконечный ряд $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ Благодаря этому, путем, как говорим мы, почленного интегрирования ряда была получена квадратура гиперболы в форме

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Вместе с тем был найден ряд для $\ln(1+x)$—первый бесконечный степенной ряд после геометрической прогрессии. Смелым здесь было не только применение бесконечного ряда при интегрировании, но и выполнение непрекращающегося деления, хотя в одном случае такое деление употребил еще в 1657 в «Универсальной математике» Валлис[1]).

---

[1]) Точнее говоря, Валлис только показал, что при произвольно большом t

$$\frac{AR^t - A}{R-1} = A + AR + AR^2 + \ldots$$

Он не делил A на $1 - R$.

Впрочем, сам Меркатор не написал в «Логарифмотехнике» общий ряд, а привел только ряды для $x=0{,}1$ и $x=0{,}21$ и ряд

$$\int_0^x \ln(1+x)\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}-\ldots$$

для частного значения $x=0{,}1$. Но способ, которым он все это вывел, мог быть применен к любому $0<x<1$. В том же 1668 лорд Броункер на основании геометрических соображений дал в Phil. Trans. квадратуру площади равносторонней гиперболы $xy=1$ от $x=1$ до $x=2$ в виде ряда

$$(\ln 2=)\,\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots$$

Он даже доказал, почти не сознавая значения этого, сходимость данного ряда и показал, как распространяется его способ на площади, лежащие между любыми рациональными абсциссами.

Слово «сходимость» часто употреблял незадолго до того Дж. Грегори в «Истинной квадратуре круга и гиперболы» (1667). В отзыве на «Логарифмотехнику», напечатанном в Phil. Trans. за 1668, Валлис впервые отметил, что логарифмический ряд можно непосредственно применять только при $x\leqslant 1$. Затем он показал, что всякое число, большее единицы, можно представить в форме $\frac{1}{1-x}$, где $x<1$, так что ряд Меркатора вновь оказывается применимым [1]).

Столь важным разложением функций в бесконечные ряды несколько ранее занимался также Ньютон. Он так искусно приложил при этом свой метод к решению геометрических вопросов, что с ним, безусловно, необходимо связывать *принципиальное введение* в математику *бесконечных рядов*. Однако об этих ранних работах мы узнаем лишь по двум письмам 1676 к секретарю Королевского общества Г. Ольденбургу, предназначавшимся для передачи Лейбницу [2]). В этих письмах рассказывалось об открытии биномиального ряда для любых показателей. К теореме о биноме Ньютона привели предложенный Декартом сокращенный способ обозначения

[1]) О бесконечных рядах у П. Менголи («Новые арифметические квадратуры» — Novae quadraturae arithmeticae, Болонья, 1650), в частности, о доказательстве расходимости ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$, см. статью Г. Энестрема, Bibl. math. (3), 12, 1911/12, стр. 135—145. В книге «Видовая геометрия» (Geometria speciosa, Болонья, 1659) Менголи уже ввел в особой форме логарифмические ряды. Ср. G. Vacca, Rend. Acc. Linc. (fis. mat.) 24, ser. 5^a, 1916, стр. 617—620.

[2]) Лондонское Королевское общество (Royal society) было официально основано в 1662. Возникло оно, подобно французской Академии, из частного кружка ученых, начавшего работу в 1645.

степеней с помощью показателей и распространение его на дробные показатели, принадлежавшее самому Ньютону, а также «интерполяционный» метод Валлиса (см. стр. 109)[1]). Впервые опубликован был биномиальный ряд в «Алгебре» Валлиса (1685) в виде

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+ \\ +\frac{m-3n}{4n}DQ+ \text{ и т. д.,}$$

где $A=P^{\frac{m}{n}}$, $B=\frac{m}{n}AQ$, $C=\frac{m-n}{2n}BQ$ и т. д.

Появившийся в том же году «Метод определения... квадратур фигур» (Methodus figurarum... quadraturas determinandi) упоминавшегося уже Дж. Крега (стр. 97) также содержал частные случаи бинома для показателей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, но выведены они были там с помощью формул для извлечения корней.

Во втором из писем Ньютон говорит о сочинении, начатом им еще до появления чумы в Кембридже в 1665/66 и в 1669 попавшем через его учителя Барроу к Дж. Коллинсу [2]), а через последнего — лорду Броункеру, первому президенту Королевского общества. Это был трактат «Об анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (De analysi per aequationes numero terminorum infinitas), опубликованный только в 1711.

Главной целью названной работы было показать, как можно производить квадратуры общим способом, разлагая для этого $y=f(x)$ в степенной ряд и применяя к последнему известный прием интегрирования. Для получения рядов Ньютон пользовался разными приемами: делением, как Меркатор, извлечением корней, теоремой о биноме (в случае целых положительных показателей) и приближенным представлением корней уравнений, коэффициенты которых суть рациональные функций одного переменного. В скрытом виде здесь заключалось понятие функции, не получившее, впрочем, у Ньютона явной формулировки. Во втором письме к Ольденбургу Ньютон высказал также мысль, что если подставляемый вместо функции бесконечный ряд недостаточно прост, то кривую можно заменить параболой высшего порядка, проходящей через произвольное число точек данной кривой (ср. стр. 110). Он писал там же, что располагает общим и удобным решением этой

---

[1]) Общую теорему о биноме независимо от Ньютона и примерно в одно время с ним открыл Дж. Грегори (см. примечание на стр. 114). — *Прим. ред.*

[2]) Значение Коллинса в истории математики определяется покровительством, которое он оказывал издателям старых и новых сочинений, и его обширной научной перепиской.

проблемы. Однако впервые две такие формулы, ныне называемые «интерполяционными», он привел в «Математических началах натуральной философии» (1687), а формулу, специально носящую его имя, доказал в «Методе разностей», опубликованном в 1711 (ср. главу IX). Примененный для решения уравнений метод неопределенных коэффициентов Ньютон использовал затем для обращения рядов и таким путем получил впервые целый ряд бесконечных рядов для простых трансцендентных функций. Так, обращая логарифмический ряд, он открыл ряд для e^x; с помощью теоремы о биноме и интегрирования нашел ряд для $\arcsin x$, обращение которого дало ему ряд для $\sin x$; в свою очередь отсюда, путем извлечения корня, он вывел ряд для $\cos x$ и т. д. Можно заметить также, что Ньютон ясно чувствовал потребность в исследовании сходимости рядов, хотя ему и не удалось установить ее общие условия.

Когда в 1670 Коллинс сообщил Дж. Грегори о некоторых результатах Ньютона, последний принялся выяснять способ их вывода. После множества тщетных усилий ему удалось в следующем году найти ряд для $\operatorname{arctg} x$, с которым он ознакомил Коллинса в феврале 1671 [1]).

Ньютон умел применять свой метод не только к вычислению площадей. Он уже понимал, что спрямление линий, кубатуры и определение центров тяжести по существу не отличаются от проблемы квадрирования площадей, а, напротив, все они *вытекают из одного общего метода, которым он, следовательно, уже обладал,* когда писал трактат «Об анализе с помощью уравнений». Из различных мест этого сочинения непосредственно следует, что уже в самую раннюю пору своей научной деятельности Ньютон вполне ясно представлял себе связь между «*флюксией*» (производной) и «*флюентой*» (интегралом), хотя и не употреблял еще тогда приведенных терминов. Рукописи Ньютона, ставшие известными только позднее, показывают, что уже в 1665 или в 1666 он ввел свое обозначение флюксий посредством пунктирования букв

---

[1]) Латинский перевод этого письма был опубликован в «Переписке» (Commercium epistolicum, 1712).

(Помимо арктангенса Грегори разложил в степенные ряды и другие функции, например, $\sec x$, $\ln \operatorname{tg} x$, $\ln \sec x$, $\ln \frac{1+x}{1-x}$. Что касается ряда для $\operatorname{arctg} x$, то он впервые был получен индийскими математиками XV в., которые применили его к вычислению π. В частности, в Индии был известен так называемый ряд Лейбница для $\frac{\pi}{4}$ и некоторые ряды, получающиеся из него с помощью тех или иных преобразований и сходящиеся быстрее. См. J. E. Hofmann, Über eine altindische Berechnung von π und ihre allgemeine Bedeutung. Mathematisch-physikalische Semesterberichte, III, 3/4, 1953 и там же дальнейшую литературу вопроса. — *Прим. ред.*)

$\left(\frac{dx}{dt}=\dot{x}\text{, где } t\text{ — время}\right)$, хотя избегал еще пользоваться такой символикой в «Анализе с помощью уравнений».

Таким образом, судя по всем данным, открытие нового исчисления, «метода флюксий», пришлось на 1665. В первой же своей работе Ньютон применил его в ряде пунктов. Так, например, он использовал его при спрямлении окружности и при доказательстве основной теоремы, что если ордината кривой есть $y=ax^{\frac{m}{n}}$, то площадь ее (area) будет $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}=z$. Для доказательства этого он, обратно, из площади z вывел дифференцированием ординату y.

В 1670/71 Ньютон изложил свои открытия по новому исчислению бесконечно малых в обширном труде «Метод флюксий и бесконечных рядов» (Methodus fluxionum et serierum infinitarum). Однако эта книга не увидела света при жизни автора. Она впервые вышла в английском переводе под названием The method of fluxions and infinite series в 1736, т. е. девять лет спустя после кончины Ньютона, когда ее появление представляло уже незначительный интерес. В этом сочинении обе задачи исчисления бесконечно малых были четко сформулированы в двух следующих предложениях:

I. «Длина проходимого пути постоянно (т. е. в каждый момент времени) дана; требуется найти скорость движения в предложенное время». Если обозначить путь через z, а время через t, то, выражаясь на нашем языке, требуется по $z=f(t)$ определить $\frac{dz}{dt}$.

II. «Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного в предложенное время пути», т. е., зная $\frac{dz}{dt}=\varphi(t)$, вычислить $z=\int\varphi(t)dt$[1]).

Вместо времени, которое служило Ньютону только для придания наглядности вводимым понятиям, берется *произвольная* переменная величина, так называемая «соотнесенная величина» («quantitas correlata»), «посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время». Бесконечно малые приращения времени или соотнесенной величины (dt) Ньютон обозначает буквой o, отличной, впрочем, от нуля[2]). «Постепенно и неопределенно возрастающие величины называются *флюентами* (z),

[1]) Точнее говоря, как указывает далее Г. Вилейтнер, в проблеме I речь идет о дифференцировании любого уравнения, а в проблеме II об интегрировании дифференциального уравнения первого порядка. — *Прим. ред.*

[2]) Подобным же образом этой буквой пользовался Дж. Грегори в своей «Геометрии», 1668. Однако Ньютон употреблял ее еще в «Анализе с помощью уравнений». Поэтому совпадение, должно быть, является случайным и основывается на сходстве o и 0.

их бесконечно малые приращения (dz) суть *моменты*[1]), между тем как их скорости $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ суть *флюксии*, «с которыми возрастают вследствие порождающего их движения флюенты». Обозначается флюксия знаком $\dot{z}$, а наш $dz=\frac{dz}{dt}\cdot dt$, который записывается в форме $\dot{z}\cdot o$, выводится из пропорции

$$(\text{момент } z):o=\dot{z}:1.$$

Ньютон отнюдь не определил точнее постоянно употребляемое им здесь понятие бесконечно малого. Из приводимых им доказательств следует лишь, что члены, содержащие множителем o, он рассматривал, по сравнению с *конечными* членами, как нули.

В качестве первой проблемы Ньютон ставил следующую: «по данному соотношению между флюентами определить соотношение между флюксиями». Для этого он образует выражение

$$f\,(x+\dot{x}\cdot o,\ y+\dot{y}\cdot o,\ z+\dot{z}\cdot o,\ldots)=0,$$

из которого удаляет члены, входящие в данное уравнение:

$$f\,(x,\ y,\ z,\ldots)=0.$$

Затем производится деление на o и, наконец, отбрасываются все члены, в которых еще сохранился множитель o, ибо «их можно считать за ничто в сравнении с другими». В результате искомое уравнение получается в виде

$$F\,(x,\ y,\ z,\ldots,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\ \ldots)=0.$$

Когда в

$$f\,(x,\ y,\ z,\ldots)=0$$

встречаются радикалы или же дроби, Ньютон вводит вспомогательные флюенты, получая с их помощью новые целые рациональные уравнения: это было эквивалентно применению правила дифференцирования сложной функции

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\,.$$

Вторая важнейшая проблема исчисления флюксий такова: по уравнению, существующему между флюксиями величин, $M\dot{x}+N\dot{y}=0$, где M и N суть целые рациональные функции x и y, определить соотношение между флюентами. Так как эта проблема не может быть решена общим образом (в известных функциях или квадратурах), то в случае нужды Ньютон вновь обращается к методу разложения в бесконечные ряды, прилагая его к дроби, выражающей отношение флюксий $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Все получаемые им решения

[1]) Это выражение употреблялось в том же самом смысле и в «Анализе с помощью уравнений».

дифференциальных уравнений являются частными, так как он никогда не присоединяет к ним произвольную постоянную[1]). Относительно уравнений с несколькими переменными и их флюксиями Ньютон совершенно справедливо заметил и показал на примерах, что при их интегрировании следует вводить еще произвольные функции.

Решения обеих главных задач были применены затем к определению *максимумов* и *минимумов*, которые имеют место, когда скорость движения, т. е. флюксия, равна нулю, к *проведению касательных*, к отысканию *центра кривизны* и *радиуса кривизны* кривой и, наконец, к *квадратурам площадей* и *спрямлениям дуг* как в конечном виде, так и с помощью бесконечных рядов.

Для решения проблемы касательной Ньютон привел девять различных способов. Все они, однако, базировались на той идее, что отношение моментов обеих определяющих точку координат находится с помощью подобия из отношения двух соответствующих конечных величин фигуры. Различие методов заключается только в выборе различных систем координат. В частности, при рассмотрении спиралей находят применение полярные координаты. Круг кривизны в точке кривой Ньютон определил из условия, что он должен проходить через три последовательные точки кривой. При этом он получил общую формулу радиуса кривизны, совпадающую с нашей современной не только по существу, но почти точно даже по внешности. Впрочем, весьма сомнительно, что этот его вывод и еще более приводимые им здесь примеры, среди которых фигурировала циклоида, ее эволюта и циклоидальный маятник, были им найдены уже в 1670/71. Скорее всего, эти вещи были включены в «Метод флюксий» лишь при позднейшей частичной его переработке, после того как Ньютон познакомился с циклоидальным маятником у Гюйгенса, т. е. лишь по выходе гюйгенсовых «Маятниковых часов» (Horologium oscillatorium, 1673). Наконец, исследование радиуса кривизны привело Ньютона к рассмотрению *точек перегиба*, в которых радиус кривизны бесконечен; Ньютон их называл «точками прямизны» («puncta rectitudinis») [2]).

Для облегчения интеграций Ньютон присоединил к своей работе некоторые таблицы, в которых собрал значения интегралов или, как выражался он сам, квадратуры ряда иррациональных функций, содержащих радикалы

$$\sqrt{e+fz^{\eta}} \quad \text{и} \quad \sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}.$$

[1]) На самом деле Ньютон близко подошел к понятию произвольной постоянной в решении дифференциального уравнения. — *Прим. ред.*

[2]) Точки прямизны не обязательно бывают точками перегиба, как это отмечал сам Ньютон. Если $y''=0, y'''\neq 0$, получается точка перегиба; если $y''=y'''=0$, $y^{(IV)}\neq 0$, точка прямизны не является точкой перегиба. Условий, соответствующих различным случаям, Ньютон не указал. — *Прим. ред.*

Однако он не подошел здесь к рассмотренным им частным случаям с общей точки зрения. Такой подход к интегрированию так называемых *биномиальных дифференциалов* мы встречаем впервые в известном уже письме от 24 октября 1676, где Ньютон утверждал, что $\int z^{\theta}(e+fz^{\eta})^{\lambda}dz$ принимает конечную и притом алгебраическую форму, если $\frac{\theta+1}{\eta}$ или $\frac{\theta+1}{\eta}+\lambda$ суть целые положительные числа. Это, насколько он может судить, единственные случаи такого рода. Тем самым Ньютон действительно установил два главных случая конечной интегрируемости биномиальных дифференциалов [1]). Между прочим, отсюда можно сделать вывод, что таблицы интегралов, о которых только что шла речь, были составлены не позднее 1676. Ньютон вообще уже весьма рано занялся поисками общих критериев, позволяющих установить, является ли интеграл алгебраического выражения в свою очередь алгебраическим, или же показывающих, к каким простейшим интегралам он может быть приведен. При этом он встретился с трехчленными интегралами, т. е. интегралами, содержащими иррациональность

$$Z \equiv \sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}$$

в одной из двух форм:

$$\int z^{n\eta-1}Z\,dz \text{ или } \int \frac{z^{(n+1)\eta-1}}{Z}\,dz.$$

Эти интегралы Ньютон и в «Методе флюксий», и в упомянутом письме представлял геометрически с помощью площадей, ограниченных осью абсцисс, двумя ординатами и *дугой конического сечения*. Другими словами, он заменял трансцендентную часть таких интегралов, представляющую собой логарифмические или же обратные круговые функции, через эти площади, аналитическое определение которых им было дано уже ранее с помощью бесконечных рядов. Необходимые приведения Ньютон осуществил с помощью рационализации и рекуррентных формул, полученных им посредством дифференцирования.

Еще в 1676 в письмах, предназначавшихся для Лейбница, Ньютон продолжал держать свой метод флюксий в тайне. Основной принцип его он сформулировал во втором письме, в совершенно не поддающейся расшифровке анаграмме. Лишь через три года после того как Лейбниц в 1684 опубликовал свою важную работу по дифференциальному исчислению, Ньютон впервые указал в печати

[1]) Все случаи интегрируемости дифференциального бинома в элементарных функциях были полностью установлены вскоре после Ньютона. Доказательство единственности этих случаев (при рациональных показателях), из которого вытекает необходимость условия Ньютона для алгебраической интегрируемости, дал только П. Л. Чебышев (Journal de Liouville, XVIII, 1853). — *Прим. ред.*

на свой метод. В 1687 в бессмертных и прославивших его имя «Математических началах натуральной философии» он сделал в одиннадцати леммах, предпосланных без доказательства первой книге сочинения, несколько более понятные замечания о применении понятия предела в исчислениях с бесконечно малыми, а также о своем методе, причем совершенно случайно употребил слово «флюксия», тем самым впервые получившее гласность. После того, по просьбе Валлиса, Ньютон отправил ему в августе и сентябре 1692 два посвященных этому вопросу письма, извлечения из которых Валлис, чтобы не пропало их содержание, напечатал в 1693 при издании своих Opera. Благодаря этому исчисление флюксий впервые было изложено общепонятным образом. Сам Ньютон опубликовал изложение своего метода лишь в 1704 во втором приложении[1]) к своей работе «Оптика, или рассуждение об отражениях, преломлениях и т. д.» (Opticks: or a treatise of the reflections, refractions etc.), носившем заглавие «Рассуждение о квадратуре кривых» (Tractatus de quadratura curvarum). Согласно указанию Ньютона в письме к Дж. Кейлю от 15 мая 1714 и это сочинение было составлено уже весьма давно; в самом деле, приводившиеся в нем методы были те же, что в более ранних работах. Напротив, введение в «Рассуждении о квадратуре кривых» было, несомненно, новым, ибо в нем Ньютон дал иное изложение принципов исчисления флюксий, в котором, вопреки прежним своим взглядам, полностью отверг вычисления с бесконечно малыми. Он подчеркивал, что рассматривает математические величины не как состоящие из мельчайших частиц, а как описываемые непрерывным движением. Скорости таких движений, флюксии, находятся почти в том же отношении, что и приращения флюент, произведенные в равные и мельчайшие частицы времени, или же находятся в *первом отношении* только лишь возникающих приращений. Однако, говорит Ньютон, флюксии можно представлять любыми пропорциональными им линиями. Наконец, дело сведется к тому же, если рассматривать флюксии, как находящиеся в *последнем отношении* исчезающих частиц величин.

Эти замечания были, очевидно, направлены против исчисления бесконечно малых Лейбница. Тем временем между обоими великими учеными успел разгореться ожесточенный спор о первенстве открытия; Ньютон желал противопоставить и уточнить свои взгляды на основы анализа, расходившиеся с воззрениями Лейбница. В «Рассуждении о квадратуре кривых», как, впрочем, еще в письмах к Валлису, Ньютон распространил свой способ обозначения флюксий на флюксии высших порядков $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$ и т. д. (наши $\frac{d^2x}{dt^2}$,

[1]) Первым приложением являлось «Перечисление кривых третьего порядка», с которым мы познакомимся в следующей части.

$\frac{d^3x}{dt^3}, \frac{d^4x}{dt^4}, \ldots$), кроме того, он предложил особый символ интеграла, записывая $\acute{x}$ вместо $\int x\,dz$, $\acute{\acute{x}}$ вместо $\int \acute{x}\,dz$ и т. п. Последнее было сделано с явной целью не отстать от Лейбница, изобретшего знак интеграла еще в 1675 и опубликовавшего его в 1686 (см. ниже стр. 128). Обозначение Ньютона не укоренилось, однако, в математике, так же как и знак $f_1(x)$, предложенный для интеграла $\int f(x)\,dx$ Лагранжем в его «Теории аналитических функций» (1797, см. стр. 140).

Мы вынуждены отказаться от ближайшего разбора ньютоновых «Начал». Главные результаты их относились к динамике и, в частности, к установлению согласия законов Кеплера с движением планет по открытому Ньютоном закону всемирного тяготения, к определению притяжения шара, плотность которого изменяется лишь концентрическими слоями, и к движению в сопротивляющейся среде. Мы еще вернемся в соответствующем месте к дифференциальным уравнениям, возникающим в последней задаче. Несомненно, что при выводе своих основоположных механических теорем Ньютон применил метод флюксий или, лучше сказать, как раз в связи с этим его разработал. Однако при изложении небесной механики он им не воспользовался. На это имелись две причины. Во-первых, Ньютону пришлось бы разъяснять читателю не только метод флюксий, но и его приложение к механике, а кроме того, он, конечно, с полным правом сомневался в том, что законы, основанные на новом исчислении, окажут такое же влияние, как если он выведет их на старой геометрической основе.

§ 2. Открытия Лейбница в области бесконечных рядов и его исчисление бесконечно малых

Как математик Лейбниц был полностью самоучкой. Он сам рассказывал, что еще в 1673, когда в возрасте 27 лет впервые предпринял поездку в Англию, он располагал весьма скудными математическими знаниями.

Особенно сильной в математическом даровании Лейбница была формальная сторона. В соответствии с этим исходным пунктом его занятий оказались исследования по комбинаторике, опубликованные им еще в 1666 (см. стр. 91). После этого Лейбниц обратился к суммированию конечных арифметических рядов, суммированию, различные методы которого он самостоятельно открыл, исходя из некоторых тождеств, даже не подозревая, что в этом не было ничего нового. Однако он тотчас же сделал значительный шаг вперед, поставив, наряду с арифметическим треугольником Паскаля, *гармонический треугольник*, из величин, обратных биномиальным коэффициентам, и произведя с помощью его свойств суммирование некоторых *бесконечных* гармонических рядов.

Познакомившись затем в Англии с «Логарифмотехникой» Меркатора, он попытался применить меркаторов способ деления к разложению в ряд иррационального выражения, встречающегося при квадратуре круга. С этой целью он преобразовал интеграл $\int \sqrt{2rx - x^2}\,dx$ в интеграл рациональной дроби $8r^5 \int \frac{z^2\,dz}{(r^2+z^2)^3}$; кроме того, он привел получающиеся по тому же способу ряды для площадей секторов круга, эллипса и гиперболы. Отсюда, в частности, получался известный ряд для $\frac{\pi}{4}$, который он нашел уже в 1674, несколько позднее, впрочем, чем Дж. Грегори (см. стр. 120). Все изложенное содержалось в одном письме Лейбница к Ольденбургу от 1676. Опубликованы эти ряды были только в 1682 в статье «Об истинном отношении круга к описанному квадрату и г. д.» (De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum etc., Acta Erud.)[1]), которая показывает также, что Лейбницу был тогда уже известен его критерий *сходимости* знакочередующихся рядов. Этот критерий точнее исследован был много позднее в письмах Лейбница к Герману от 1705 и к Иоганну Бернулли от 1714. В том же письме к Ольденбургу (1676) Лейбниц привел, кроме ряда для $\frac{\pi}{4}$, ряды для e^{-x} и e^x, для $\operatorname{sinvers} x$ (т. е. $1 - \cos x$), $\sin x$ и $\cos x$, не снабдив их здесь, правда, выводами. По одной рукописи, найденной впоследствии, можно установить, что Лейбниц получил эти ряды методом неопределенных коэффициентов, который довел до сведения читателей в Acta Erud. за 1693. В рассматриваемое время Лейбниц уже обладал дифференциальным исчислением, к открытию которого мы скоро обратимся, и поэтому ему было нетрудно по дифференциальным свойствам соответствующих функций определить их с помощью бесконечных рядов. При этом Лейбниц дал первый пример интегрирования дифференциальных уравнений посредством бесконечных рядов.

В своем открытии исчисления бесконечно малых Лейбниц отправлялся не от квадратуры кривых, как Ньютон, а от проблемы касательных. В 1673 Гюйгенс преподнес Лейбницу экземпляр только что вышедших тогда «Маятниковых часов». Чтобы понять эту книгу, Лейбниц занялся изучением Декарта, Паскаля, Григория Сен-Винцента и др.

Изучение работ Паскаля, а также собственные прежние исследования конечных рядов разностей привели Лейбница к идее о «характеристическом треугольнике», катетами которого являлись разность ординат и разность абсцисс двух соседних точек кривой,

[1]) В Acta Erud., 1684 и 1691, Лейбниц опубликовал статьи, дополнявшие эту работу.

а гипотенузой — бесконечно малый отрезок касательной или дуги кривой, рассматривавшейся им при этом как многоугольник с бесконечным числом сторон (см. стр. 113). Вопрос о построении касательной приводится тогда к определению ординат по известным их разностям. В это же время Лейбниц открыл зависимость между прямой и обратной задачами о касательных, а год спустя пришел к убеждению, что «из обратного метода касательных следует квадратура всех фигур». В заметке от 29 октября 1675 был сделан первый шаг к созданию нового алгорифма. В сохранившейся в литературном наследии Лейбница и точно датированной указанным числом записи он уже перестает, как поступал вслед за Валлисом («Механика», Лондон, 1670) ранее, обозначать сумму бесконечно малых величин с помощью предшествующего им слова «Omnia» (все). Вместо Omn. l он пишет $\int l$, а операцию, противоположную суммированию, обозначает, подписывая ниже строки под переменной букву d. Наконец, 11 ноября 1675 в одной неопубликованной тогда работе Лейбниц написал dx вместо $\frac{x}{d}$ и приложил свое новое исчисление к примерам на обратную задачу о касательных. Тогда же появляются записи вроде $\int y\,dy$ и т. п. Знак интеграла был впервые опубликован в Acta Erud., 1686, в статье «О скрытой геометрии и т. д.» (De Geometria recondita etc.).

12 мая следующего (1676) года, т. е. когда основы нового алгорифма Лейбница были уже заложены, он письменно обратился к Ольденбургу с просьбой известить его о методах, применявшихся англичанами, так как он узнал, что Коллинс располагает сообщенными ему (Коллинсу) Ньютоном рядами для arc sin x и sin x. Полученные Лейбницем через посредство Ольденбурга письма Ньютона (два наиболее важных от июня и октября 1676 нам уже известны) ничего не могли рассказать ему о новом методе великого британца, боязливо скрывшего в них свое исчисление флюксий от соперника. Таким образом, самостоятельность открытия Лейбница, глубоко отличавшегося по характеру от изобретения Ньютона, совершенно несомненна. На столь сдержанное второе письмо Ньютона Лейбниц ответил ясным и полным изложением решения проблемы касательных посредством дифференциального исчисления. При этом он сообщил правила дифференцирования произведения в форме

$$d\,\overline{xy} \sqcap y\,d\overline{x} + x\,d\overline{y}$$

и степени, а также способ образования отношения дифференциалов в случае неявной рациональной или иррациональной функции двух переменных. Лейбниц отметил также возможность квадратуры всякой фигуры, которая может быть приведена к *«дифференциальному уравнению»*. Этот термин, впервые здесь появившийся, обозначал, по определению, уравнение, которое выражает значение dx

и которое является «производным» (derivata) от другого уравнения, представляющего значение x. Выражаясь современным языком, Лейбниц утверждал, что кривая $x=f(y)$ является квадрируемой, если известно, что

$$f(y)=\frac{dF(y)}{dy}.$$

Свой метод Лейбниц опубликовал только в 1684, после того как В. Э. Чирнгауз, работавший вместе с ним в Париже, выдал в Acta Erud. за 1683 ряд мыслей Лейбница за свои собственные. В майском выпуске этого журнала за 1684 вышла статья Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления» (Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus). В этой работе Лейбниц привел простейшие правила дифференцирования и назвал свой алгорифм *дифференциальным исчислением.* Его особым преимуществом, по сравнению с прежними методами, Лейбниц считал то, что он может применяться к дробным и иррациональным выражениям так же, как и к целым. Здесь же было впервые установлено различие между максимумом и минимумом кривой и дан правильный признак точки перегиба, способы определения которой нашли еще де-Слюз и Ферма́ (см. стр. 111—112). Нельзя не признать, однако, что в «Новом методе» Лейбниц еще воздержался от точного изложения своей основной мысли, а также намеренно обошел молчанием интегральное исчисление, которым владел уже давно.

За этой основоположной статьей в Acta Erud. последовал ряд других работ Лейбница, в которых он рассмотрел круг кривизны, причем обратил внимание на «соприкасания» высших порядков («Новое размышление о природе угла касания» — Meditatio nova de natura anguli contactus, 1686), ввел знак интеграла и характеристический треугольник, установил различие между алгебраическими и трансцендентными кривыми и показал, что его исчисление применимо также к последним [«О скрытой геометрии и т. д.» (1686)]. В 1692 Лейбниц показал, как возникает огибающая семейства кривых и разъяснил, как находить огибающую посредством дифференцирования по переменному «параметру» («О линии, образующейся из бесконечного числа проведенных в определенном порядке и пересекающихся между собой линий и т. д.» — De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata etc.), а в 1694 в связи с одной обратной задачей на касательные привел пример огибающей («Новое приложение дифференциального исчисления и т. д.» — Nova calculi differentialis applicatio etc.). В 1697 он использовал этот прием, названный им «дифференцированием кривой в кривую» (differentiatio de curva in curvam), для решения поставленной Иоганном Бернулли задачи о брахистохроне. Далее Лейбниц вывел дифференциал показательной функции и решил с помощью своего нового исчисления целый ряд актуальных задач математики и механики. В 1693 он опубликовал упомянутые выше первые образцы интегрирования дифференциальных уравнений с помощью бесконечных рядов и в связи с этим пришел к рассмотрению $d^2y{:}dx^2$. В одном письме к Лопиталю от конца 1694 встречается и частное дифференцирование; для $\frac{\partial m}{\partial x}$ Лейбниц пользовался знаком δm, а для $\frac{\partial m}{\partial y}$ — знаком ϑm.

Высшими дифференциалами Лейбниц специально занялся в 1695 в связи с защитой своего исчисления от напавшего на его основания голландца Б. Ньювентиита. Критике нового анализа Ньювентиит уделил две специальные работы, в которых, однако, ни в коей мере не сумел сам помочь его усовершенствованию. В том же году Лейбниц заметил сходство в образовании выражений для $d^n\ (xyz...)$ и для $(x+y+z+...)^n$, (опублик. в Misc. Berol., 1710). Он увидел также, что подобную символику можно распространить на интегралы любого порядка и тем дал повод для установления единой точки зрения на процессы дифференцирования и интегрирования (см. стр. 206). Эту мысль развили дальше Эйлер в Comm. Acad. Petrop., 1730/31 (1738) и Лагранж в сочинении, изданном под названием «Письмо к графу Дж. К. да-Фаньяно» (Lettera al conte G. C. da Fagnano, Турин, 1754) и затем в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1772 (1774).

В 1702/03 Лейбниц, несколько опередив Иоганна Бернулли [см. его статью от 1702 в Mém. Ac. Paris, 1702 (1704)], проинтегрировал в круговых и логарифмических функциях рациональные дроби посредством их разложения на элементарные дроби («Новый пример анализа и т. д.» — Specimen novum analyseos etc., Acta Erud., 1702, продолжение там же, 1703). Он не остановился даже перед встречающимися при этом мнимыми корнями, хотя и признавал, что здесь еще господствует глубокая тайна. Однако разложение выражений вроде x^4+a^4 еще представляло для Лейбница, по крайней мере вначале, трудности, которые были окончательно преодолены только в «Гармонии мер» (1722) Р. Котеса, друга и ученика Ньютона (см. стр. 45). В эти же годы Лейбниц был принужден вновь ответить на ряд нападений на основания его исчисления бесконечно малых. В 1696 выступил с ответным сочинением Ньювентиит. Другим противником, не проявившим особенно глубокого понимания дела, явился М. Ролль. Это побудило Лейбница дать более точное разъяснение своих идей, которое вышло в Journal des Sçavans за 1702 под названием «Оправдание исчисления бесконечно малых и т. д.» (Justification du calcul des infinitésimales etc.).

Эти мысли Лейбница можно передать примерно следующим образом. После того как он постепенно составил ясное представление о функциональной зависимости двух переменных величин, он поставил во главу своего исчисления бесконечно малых «принцип непрерывности». Согласно названному принципу равенство следует понимать как частный (предельный) случай неравенства. Разность двух становящихся равными величин не есть уже ничто, а находится в состоянии исчезновения. И круг, говорит Лейбниц, не есть правильный многоугольник, но только *заканчивает* собой правильные многоугольники с бесконечным числом сторон. На одном геометрическом примере Лейбниц показывает, как две исчезающие величины могут иметь конечное отношение, так что, несмотря на их обоюдное исчезновение, между ними сохраняется различие в величине. При введении высших дифференциалов он замечает, что и в пределах какого-либо рода величин существует бесчисленно много различных порядков величин, причем отношение величины некоторого порядка к величине непосредственно предшествующего или последующего порядка может выражаться только нулем или же бесконечностью, между тем как отношение величин одного и того же порядка может принимать любые числовые значения. Из этой основной идеи исчисления Лейбница, в силу его «нового закона однородности», следует, что во всяком уравнении, содержащем члены различных порядков малости, должны быть отброшены все члены, которые нарушили бы однородность не только родов величин, но также их порядков; сохраняться должны только члены низшего порядка малости.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ИСЧИСЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И ПЕРИОД ФОРМАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ РЯДОВ

§ 1. Современники и ближайшие последователи Лейбница и Ньютона

Основоположная статья Лейбница по дифференциальному исчислению, опубликованная в 1684, была столь сжатой и темной, а, кроме того, еще искаженной опечатками, что вряд ли могла немедленно возбудить живой интерес к новому методу со стороны современных математиков. Правда, уже в 1685 Дж. Крег в упоминавшейся ранее книге «Метод определения ... квадратур фигур» (стр. 119) бегло коснулся метода Лейбница и даже употребил при этом знак дифференциала d. Но сколько-нибудь глубоко в его сущность он не проник. Лопиталь принялся за изучение новой теории только в 1688. Несколько ранее, в 1687, Яков Бернулли отправил Лейбницу письмо, в котором просил дать ближайшие разъяснения его метода, но письмо дошло до адресата только в 1690. Голландец Гюйгенс, сам прекрасно владевший исчислением бесконечно малых по методу древних и в своем сочинении о маятниковых часах (стр.127) произведший ряд интеграций, познакомился с новым методом по прямому приглашению Лейбница также лишь в 1690. Старый Валлис еще ни разу не видел статьи Лейбница даже в 1696. Если, несмотря на это, новое исчисление вскоре проложило себе широкую дорогу, то причиной этого явилось убеждение в том, что оно таило в себе силы, отсутствовавшие в распоряжении старших математиков.

В девяностых годах XVII столетия убеждение это распространили, главным образом, братья Яков и Иоганн Бернулли, которые вслед за самим Лейбницем более всех других участвовали в создании исчисления бесконечно малых. Як. Бернулли постепенно самостоятельно овладел алгорифмом Лейбница. Это отняло у него от двух до трех лет, и лишь в мае 1690 он напечатал в Acta Erud. статью, где применил метод дифференциалов к поставленной Лейбницем задаче об изохроне. Отвечая в сентябре 1690 на письмо Як. Бернулли от 1687, Лейбниц мог уже поэтому высказать желание привлечь его в качестве сотрудника к своему делу. Як. Бернулли познакомил с дифференциальным исчислением своего брата Иоганна, бывшего моложе его на 13 лет. В упомянутой статье от 1690, в которой Як. Бернулли принял символ $\int$ и впервые ввел для него наименование «интеграл», а также в различных позднейших работах он выставил ряд важных проблем, решенных затем Лейбницем, Гюйгенсом, Иоганном Бернулли и другими. Эти проблемы дали важный материал для постройки нового исчисления. Особенно следует отметить среди них задачу о *цепной линии*, возникшую еще у Галилея (который в «Беседах», 1638, высказал предположение, что эта кривая представляет собой параболу) и подхваченную Як. Бернулли. Задача эта имеет особый исторический интерес. Дело в том, что Лейбниц и Иоганн Бернулли решили ее с помощью нового исчисления, Гюйгенс же, который никогда не сумел как следует освоиться с ним, исследовал ее старым методом. При этом они пришли к одинаковому результату, и, таким образом, задача о цепной линии явилась первым пробным камнем для испытания правильности и применимости нового исчисления. Впрочем, *уравнение* цепной линии тогда еще не было приведено. Все решения были напечатаны в Acta Erud., 1691.

Яков Бернулли занимался также свойствами логарифмической спирали, упругой линии, открыл носящую его имя лемнискату, определил посредством нового исчисления площадь сферического треугольника (Acta Erud., 1691), вычислил площади коноидальных и сфероидальных поверхностей, произвел многочисленные квадратуры и спрямления. Он дал прекрасное решение поставленной его братом задачи о кривой быстрейшего спуска, брахистохроне, в решении которой приняли участие также Лейбниц и Ньютон (см. главу IX). Якову Бернулли принадлежат большие заслуги и в области нового тогда *учения о рядах*. Пять больших диссертаций его, вышедших в Базеле в 1689—1704 под заголовком «Арифметические предложения о бесконечных рядах и их конечных суммах» (Propositiones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita), явились первым руководством по этому вопросу. В своем труде Бернулли привел два новых метода суммирования числовых рядов. Один из них заключался в том, что бесконечный ряд разлагался на бесконечную сумму рядов, которые Як. Бернулли умел. суммировать; другой способ не выдерживает серьезной критики Кроме того, Як. Бернулли пользовался уже известными методами, которые связно изложил, подобно Ньютону, применительно к решению разнообразнейших задач. Благодаря расходимости некоторых употреблявшихся им рядов у него вкрались при этом и отдельные ошибки.

Второй брат, Иоганн Бернулли, приобрел еще бо́льшие заслуги в разработке исчисления бесконечно малых Лейбница, а именно, интегрального исчисления. Уже во время пребывания в Париже в 1691/92 он составил «Математические лекции о методе интегралов и иных вещах» (Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque), опубликованные, впрочем, лишь в 1742 при издании его «Сочинений». Эти лекции по своему характеру менее всего представляли собой методический курс. Из них видно, что Иоганн Бернулли уже тогда рассматривал интеграл как неопределенный, содержащий произвольную постоянную, определяя его как функцию, получающуюся из данного дифференциала при обращении действия дифференцирования; эту идею мы, впрочем, встретили уже у Ньютона. Лекции Бернулли свидетельствовали также о возможности применения нового метода к многочисленным геометрическим и механическим задачам.

Начиная с 1693, между Лейбницем и Иоганном Бернулли завязалась обширная переписка, содержавшая важнейшие сообщения о деятельности обоих ученых и имеющая поэтому большое значение для истории построения анализа. В 1694 Иоганн Бернулли привел в Acta Erud. способ построения некоторых дифференциальных уравнений первого порядка (см. стр. 169). Здесь же, под влиянием статьи Лейбница об интегрировании с помощью бесконечных рядов, Бернулли своеобразно вывел носящий его имя ряд

$$\int_0^z n\,dz = nz - \frac{z^2}{1\cdot 2}\frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2n}{dz^2} - \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^3n}{dz^3} + \ldots,$$

который приложил к интегрированию. Написанный ряд напоминает ряд Тейлора, в который, действительно, может быть переведен с помощью одного преобразования. Вслед за этим, опять-таки побуждаемый Лейбницем, Бернулли правильно вычислил дифференциал логарифма, который ранее в своих лекциях по интегральному исчислению он рассмотрел совершенно неверно. В статье в Acta Erud., 1697, направленной отчасти против Ньювентиита, Иог. Бернулли занялся простыми и итерированными показательными функциями.

В 1696 Иоганн Бернулли поставил упомянутую выше задачу о брахистохроне, явившуюся исходным пунктом открытия *вариационного исчисления*, сделанного позднее Эйлером и Лагранжем (см. главу IX). В связи с решением этой задачи, данным Иоганном Бернулли, напряженные отношения, установившиеся уже несколько ранее между ним и братом Яковом, перешли в весьма некрасивую ссору. Споры братьев закончились только со смертью старшего, Якова, в 1705, и единственной полезной стороной их явилось лишь то, что в их процессе было поставлено несколько задач, существенно содействовавших прогрессу науки. Так, например, в Journal ds Sçavans за 1697 Иоганн Бернулли выдвинул шесть проблем, важнейшей из которых была проблема о кратчайшей линии на выпуклой поверхности (см. главу IX). Плодотворное влияние на дифференциальное исчисление оказала задача о траекториях, поставленная также Иоганном Бернулли (в одном письме к Лейбницу от 1697). Первое (геометрическое) решение ее в случае ортогональных траекторий семейства логарифмических кривых дал в Acta Erud. за 1698 Як. Бернулли[1]). В том же году Иоганн Бернулли, воспользовавшись одним правилом, данным уже Лейбницем, привел задачу к дифференциальному уравнению первого порядка. Правило Лейбница было несколько более точно сформулировано потом Як. Германом (Acta Erud., 1717); согласно Герману в дифференциальном уравнении семейства данных кривых нужно заменить dx на dy, а dy на $-dx$, после чего из полученного таким образом дифференциального уравнения и конечного уравнения семейства следует исключить переменный параметр. Проблема траекторий привела к изучению дифференцирования под знаком интеграла и к исследованию уравнений с переменным параметром, названных Германом модулярными уравнениями. Последнее в свою очередь оказало значительное влияние на разработку вопроса об условиях интегрируемости обыкновенных дифференциальных уравнений у Эйлера и его современников.

Наряду с братьями Бернулли мы должны еще обратиться к попутно упоминавшемуся уже третьему ученому — Лопиталю, приобретшему значительные заслуги в популяризации идей Лейбница. Маркиз Г. Ф. де-Лопиталь овладел новым исчислением отчасти самостоятельно, отчасти с помощью Иог. Бернулли, сношения с которым в Париже (1692) оказали на него большое влияние. Лопиталь задумал написать книгу по дифференциальному исчислению, которая позволила бы легче усвоить воззрения Лейбница. В результате в 1696 появился первый и на долгое время единственно употребительный учебник дифференциального исчисления «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий» (Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes), неоднократно переиздававшийся после смерти автора, переведенный на английский и латинский языки и вызвавший несколько комментаторских работ. Причина широкого распространения этого труда заключалась, главным образом, в его легкости для чтения, а также в том, что он излагал все важнейшие вопросы, рассматривавшиеся ко времени его возникновения, с помощью нового исчисления. Из нового материала Лопиталь добавил только раскрытие «неопределенных выражений» по употребительному и ныне «правилу Лопиталя»,

[1]) Детальный анализ работ Я. Бернулли по исчислению бесконечно малых, основанный также на изучении его рукописного наследия, дан в специальной монографии И. Э. Гофмана, указанной в списке литературы. — *Прим. ред.*

которое, однако, как это определенно известно, было ему сообщено Иоганном Бернулли, и разбор точек возврата, к которым он присоединил острия «второго рода»[1]).

Упомянув важнейшие работы, способствовавшие в первое время после изобретения дифференциального и интегрального исчислений их развитию, мы должны коснуться еще неприятного спора о приоритете, разгоревшегося между Ньютоном и Лейбницем, а также их приверженцами. Но так как этот спор мало принес пользы самой науке, то мы будем весьма кратки.

Одаренный швейцарский математик Фатио де Дюильи, проживавший в Лондоне и бывший более англичанином, нежели швейцарцем, уже давно испытывал скрытую злобу к школе Лейбница. Чувства Дюилье прорвались наружу после того, как Лейбниц в 1697 не назвал его в числе людей, которые могли бы, по его мнению, решить задачу о брахистохроне. Для того чтобы отомстить, Дюилье опубликовал в 1699 сочинение «Исследование линии кратчайшего спуска и т. д.» (Lineae brevissimi descensus investigatio etc.), в котором привел два решения названной задачи и, резко нападая на Лейбница, объявил себя самостоятельным изобретателем дифференциального исчисления. Вместе с тем он отстаивал первенство в открытии нового исчисления за Ньютоном и намекал на то, что Лейбниц позаимствовал свои знания у Ньютона. За этим последовала блестяще написанная защитительная статья Лейбница в Acta Erud., 1700, где он в подтверждение самостоятельности своего открытия сослался на самого Ньютона, признавшего ее в поучении ко второму отделу 2-й книги своих «Начал» (1687). Так как Ньютон не отозвался на эту ссылку, а также и в одном другом случае не вымолвил ни слова в пользу Лейбница, то последний, очевидно, заключил, что нападки на него были одобрены Ньютоном. В связи с этим Лейбниц начал, с одной стороны, преуменьшать заслуги Ньютона, а с другой, — не упускал ни одного повода, чтобы не подчеркнуть резко свои права на изобретение нового «анализа бесконечно малых». Вслед за тем шотландец Дж. Кейль, бывший, как и Дюилье, членом Королевского общества, в Phil. Trans. за 1710 прямо обвинил

---

[1]) Уже после выхода в свет первой части «Истории математики» Вилейтнера П. Шафхайтлин обнаружил в 1920 г. рукопись «Лекций по дифференциальному исчислению» (Lectiones de calculo differentialium) Иоганна Бернулли, написанных в Париже в 1691/92 (опублик. в Verhandl. Nat. Ges. Basel 34, 1923). Содержание этих лекций почти целиком было включено (в переработанном виде) в книгу Лопиталя. Об определяющей роли Иоганна Бернулли в создании этой книги можно судить по его обширной переписке с Лопиталем в первом томе Der Briefwechsel von Joh. Bernoulli (см. список литературы). В этой переписке обсуждается и вопрос о точках возврата второго рода, причем здесь Бернулли опять-таки выступает в роли учителя; ему же принадлежит и сам термин «точка возврата». — *Прим. ред.*

Лейбница в плагиате у Ньютона. Лейбниц, тоже являвшийся членом этого ученого общества, обратился к последнему с жалобой. Для расследования дела Королевское общество назначило в январе 1712 комиссию, поручив ей опубликовать соответствующие необходимые документы. Эти материалы были изданы в 1713 в книжке «Переписка»[1]) (Commercium epistolicum). Однако «Переписка» не только выражала одностороннюю точку зрения, благоприятную для Ньютона, с 1703 состоявшего президентом Королевского общества, но разбросанные повсюду примечания и заключавшийся между отдельными письмами рассказ содержали самые язвительные и оскорбительные нападки на Лейбница и прямо стремились доказать его вину. На поведение Ньютона в этом неприятном споре «Переписка» бросает весьма невыгодный свет. Она показала, что он, вместо того, чтобы выступить против Лейбница открыто, принял непосредственное участие в составлении этого обвинительного акта, т. е. спрятался за спины членов следственной комиссии. Лейбниц так и расценил положение вещей, и никто не может поставить ему в упрек, что он несколько грубо атаковал «Переписку» и представленную в ней точку зрения в двух анонимных сочинениях. За этим последовали еще более резкие оскорбления со стороны Кейля и самого Ньютона, который, опять-таки безымянно, дал собственное изложение спора в Phil. Trans., 1715; позднее Ньютон даже отрицал свое авторство. В 1714 Лейбниц, еще прежде чем он ознакомился со статьей Ньютона, написал оправдательное сочинение «История и возникновение дифференциального исчисления» (Historia et origo calculi differentialis). Опубликовать его Лейбницу уже не удалось, он скончался 14 ноября 1716. «История дифференциального исчисления» увидела свет лишь в 1846 благодаря К. Гергардту, после пересмотра литературного наследия Лейбница.

Можно было бы думать, что со смертью Лейбница злосчастный спор должен был закончиться. Но этого не произошло. Наоборот, враги Лейбница продолжали спор тем энергичнее, что он принял для них уже характер борьбы английской национальности против немецкой. Применявшиеся средства были при этом тем грязнее, что опаснейшего противника более не имелось в живых. Не входя в детали, заметим лишь, что в третьем издании ньютоновских «Начал» (1726) упомянутое поучение, признававшее права Лейбница, было изменено в неблагоприятную для него сторону и что в 1722 вышло новое издание «Переписки», в которое внесен ряд изменений в пользу Ньютона. Лишь прошлое столетие принесло

[1]) При указании всех дат в основу было положено наше летоисчисление. Но старый английский год начинался в конце марта. Поэтому в январе 1713, когда были готовы к рассылке первые экземпляры «Переписки», в Англии еще считался 1712. Этим же годом помечен и титульный лист книжки.

беспристрастное решение спора о приоритете со стороны ученых обеих стран, уже после того как поступательное развитие самой науки решило вопрос в пользу открытия Лейбница [1]).

§ 2. Формальное развитие теории рядов

Учение о бесконечных рядах выросло главным образом из потребности найти для некоторых функций или, как это представляли тогда, ординат кривых рациональные выражения, позволявшие производить интегрирование. При вычислении таких функций для отдельных значений переменных естественно чувствовалась необходимость в исследовании их сходимости. Однако вскоре это чувство было утрачено, и парадоксы, возникавшие при стремлении сохранить применимость ряда для всех значений переменной, пытались устранить с помощью метафизических соображений, разумеется, не приводивших к цели. Среди немногих ученых, занявших более строгую математическую позицию, прежде всего следует назвать П. Вариньона. В одной статье в Acta Erud., 1715 он обратил внимание на то, что члены пригодного для вычислений ряда должны непрестанно убывать и, кроме того, остаток ряда должен в конце концов становиться сколь угодно малым. Однако предостережения Вариньона учтены не были. Эйлер, со своей баснословной продуктивностью господствовавший над математикой всего последующего периода, отвлек внимание математиков исключительно в сторону формальной разработки учения о рядах.

Важнейший метод, предложенный в XVIII столетии для разложения функции в ряд, был изобретен Б. Тейлором. В 1712 Тейлор письменно сообщил его Дж. Мэчину, а три года спустя опубликовал в «Прямом и обратном методе приращений» (Methodus incrementorum directa et inversa, Лондон, 1715). В этой книге был приведен тот знаменитый общий ряд, который уже в статье «Приближения» в Encyclopédie méthodique, т. 1,1784) Кондорсе был назван «теоремой

---

[1]) Описание спора о приоритете между Лейбницем и Ньютоном А. Браунмюль взял из подробного рассказа М. Кантора в третьем томе его «Лекций». Однако, согласно Г. Энестрему, этот рассказ в ряде пунктов нуждается в существенных изменениях.

(Взаимная независимость основных открытий Ньютона и Лейбница в анализе бесконечно малых является ныне прочно установленным фактом. Ньютон пришел к методу флюксий ранее, чем Лейбниц к дифференциальному и интегральному исчислению, но первые важные публикации принадлежали Лейбницу. Идеи обоих ученых сначала становились известными в частном порядке узкому кругу специалистов. Обмен письмами между Ньютоном и Лейбницем во второй половине 70-х годов происходил уже после того, как оба они владели исходными понятиями и методами. Подробнее о первых открытиях Ньютона и Лейбница в этой области см. работы Вавилова, Манке и Гофмана, указанные в списке литературы. — *Прим. ред.*)

Тейлора»[1]). Тогда как в письме к Мэчину ряд был приведен без доказательства, в «Методе приращений» Тейлор дал вывод, опиравшийся на метод разностей и одновременно заключавший в себе лучшее представление интерполяционной формулы Ньютона. Тейлор в своей книге преследовал цель обосновать правила исчисления флюксий (в области алгебраических функций) с помощью конечных разностей, которые, как позднее у Эйлера, полагались в заключительном уравнении равными нулю (nihil, ничто). На этой недостаточной основе Тейлор и развил свой ряд, формально примыкая к интерполяционной формуле, данной Ньютоном в «Началах». Не располагая знаком функции, он выразил его следующим образом. Если независимая переменная z принимает значение $z+v$, то зависимая переменная x принимает значение

$$x+\dot{x}\cdot\frac{v}{1\cdot\dot{z}}+\ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot 2\cdot\dot{z}^2}+\dddot{x}\cdot\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dot{z}^3}+\text{ и т. д.}$$

В своей книге Тейлор вывел более просто и относительно более строго также ряд Бернулли (стр. 134), не назвав, однако, его автора. Связь между обоими рядами не заметили, впрочем, ни Тейлор, ни Бернулли, который справедливо заявил о приоритете в открытии своего ряда, но на ряд Тейлора не имел никаких прав. Тейлор же установил известный специальный вид своего ряда, ошибочно называемый теперь «рядом Маклорена». Однако он не дал ему никакого применения, очевидно, не сознавая как следует значения своего открытия. Только Маклорен, который по-новому вывел этот ряд[2]) в «Трактате о флюксиях» (A Treatise of Fluxions, Эдинбург, 1742), допуская, что всякая функция разлагается в степенной ряд, получил с его помощью бывшие тогда уже известными разложения для a^x, $\sin\frac{x}{a}$ и $\cos\frac{x}{a}$. При этом он отметил наличие своего ряда у Тейлора. Вывод ряда Тейлора, данный Эйлером в «Основаниях дифференциального исчисления» (1755), еще вполне совпадал с тейлоровским; Эйлер только ввел при этом для разностей символы Δ, Δ^2 и т. д. Утверждение Эйлера, что каждая функция может быть разложена в такой ряд, основывалось только на индуктивном заключении. Незадолго до выхода «Оснований» Эйлера Даламбер в «Исследованиях о различных важных вопросах системы мира» (Recherches sur différents points importants du système du monde, I том, Париж, 1754) дал другой вывод ряда Тейлора. Способ Даламбера не корректен, но при последовательном

---

[1]) Рукописное наследие Дж. Грегори свидетельствует о том, что он уже в 1671/72 владел рядом Тейлора, хотя в явном виде последний в рукописях не встречается. См. об этом в сборнике памяти Грегори под ред. Тернболла, стр. 356—359. *Прим. ред.*

[2]) По методу неопределенных коэффициентов. — *Прим. ред.*

проведении он ведет к формальному представлению остаточного члена в виде n-кратного интеграла. Впрочем, эта цель была Даламберу совершенно чужда, хотя Лакруа во втором издании третьего тома своего «Трактата по дифференциальному и интегральному исчислению» (Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, Париж, 1819) и приписывал эту форму остаточного члена Даламберу. Даже Лагранж, желавший дать чисто алгебраическое обоснование дифференциального исчисления, не пользующееся ни бесконечно малыми, ни пределами, лишь постепенно пришел к точному представлению ряда Тейлора. В первой своей статье по этому вопросу [Nouv. Mém. Ac. Berl., 1772 (1774)], в которой он впервые обобщил ряд Тейлора на случай n переменных, он еще целиком стоял на формальной точке зрения Тейлора. Еще в «Теории аналитических функций» (Théorie des fonctions analytiques, 1-е изд., 1797) существование разложения функции в степенной ряд он принимал a priori. Но здесь он дал уже иной вывод ряда, который позволил ему определить последовательные дифференциальные частные — «производные» — для $y=f(x)$ через коэффициенты разложения $f(x)$ в ряд Тейлора. Для обозначения этих производных он, наряду с записью $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д., примененной случайно Эйлером в томе III «Оснований интегрального исчисления» (1770), употреблял обозначения y', y'' и т. д. Однако Лагранж не ограничился формальным разложением. В «Теории аналитических функций» имеется и *первое сознательное определение остаточного члена ряда Тейлора,* который Лагранж сначала представил в виде определенного интеграла, а затем в известной под его именем форме. Последнюю он получил с помощью данного им обобщения «теоремы о среднем значении», известной уже из «Трактата по алгебре» Ролля (1690). В «Лекциях по исчислению функций» (Leçons sur le calcul des fonctions, опубликованы вначале в Séances Éc. norm., 1801), читанных им в Нормальной школе в Париже в 1799, Лагранж определенно заметил, что если какое-либо разложение в ряд служит не только для получения «производных функций», но должно представлять собой значение функции, то необходимо точно знать остаток ряда. Весь вывод он при этом построил на теореме о среднем значении, дав тем самым все существенное для точного обоснования ряда. Правда, условия применимости и сходимости рядов были точнее исследованы лишь Коши (1823, см. стр. 384).

Важную группу рядов, подвергнутых изучению в XVIII в., образовали так называемые «*возвратные ряды*», каждый член которых, начиная с некоторого, линейно выражается через несколько предыдущих членов. Важнейшие свойства возвратных рядов установил Муавр, давший им это название и почти полностью разработавший их теорию. Исходным пунктом Муавра при этом явилось исчисление вероятностей, которому, как мы знаем, он посвятил в 1718 книгу «Теория случая». В 1722 он опубликовал в Phil. Trans. первую работу о возвратных рядах [1]), значительно дополненную затем в «Аналитических этюдах» (1730). Названный сборник содержал также статью о возведении бесконечного ряда в целую степень и статью об извлечении корня из бесконечного ряда — то и другое с помощью метода неопределенных коэффициентов. Возвратными рядами пользовались позднее также Лагранж [Miscell. Taurin., 1759 и Nouv. Mém. Berl., 1775 (опубликовано в 1777)] и Лаплас (Mém. prés. div. sav. Ac. Paris, 1774). Большая работа Лапласа о «производящих функциях» [Mém. Ac. Paris, 1779 (1882)] тоже близко соприкасалась с этим вопросом; эти статьи, впрочем, посвящены в основном решению уравнений в конечных разностях и также возникли из теоретико-вероятностных изысканий.

В том же году, в котором Муавр издал «Аналитические этюды», его соотечественник Дж. Стирлинг выпустил «Метод разностей или трактат о суммировании и интерполировании бесконечных рядов» (Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum). Кроме способа суммирования некоторых рядов, он дал здесь также решение задачи об определении суммы бригсовых логарифмов любого числа чисел, возрастающих в арифметической прогрессии. Он представил эту сумму в виде асимптотического ряда, называемого в честь его рядом Стирлинга. Впрочем, так нередко называют и частный случай, рассмотренный еще Муавром, когда последовательность чисел образует натуральный ряд, т. е. разложение $\ln[(n+1)!]$ [2]). Подлинный характер этих рядов был, однако, раскрыт Эйлером при установлении одного разложения числа π [Comm. Ac. Petrop., 1739 (1750)]. Подобно исследованиям Стирлинга, первые открытия, сделанные в теории рядов великим Эйлером, имели отправным пунктом так называемый интерполяционный метод Валлиса (стр. 109), приведший еще Ньютона к обобщению теоремы о биноме. Этот метод навел Эйлера на мысль представлять *общие члены* бесконечных рядов через определенные интегралы [Comm. Ac. Petrop. 1730/31 (1738)]. Исходя отсюда, Эйлер, с одной стороны, пришел к созданию теории определенных интегралов, а с другой, открыл названные впоследствии по его имени интегралы, — бэта-функцию

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)},$$

---

[1]) Представлена эта работа была уже в 1720.

[2]) Ни Муавр, ни Стирлинг, однако, не думали еще об обобщенном ряде для $\ln \Gamma(n+1)$, который тоже часто называют рядом Стирлинга.

и гамма-функцию

$$\int_0^1 (-\ln x)^n\,dx = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n = \int_0^\infty e^{-x} x^n\,dx,$$

которые и подверг подробному исследованию[1]. Впрочем, первый интеграл был рассмотрен ранее уже Валлисом и Ньютоном, а затем, почти одновременно с Эйлером, Стирлингом в «Методе разностей». Представление гамма-функции через интеграл, содержащий логарифм, было первоначальным. Оно встречается уже в одном письме Эйлера к Гольдбаху от января 1730, между тем как вторая его форма была впервые опубликована лишь в томе IV «Оснований интегрального исчисления» (1794), хотя соответствующая работа была написана в 1781. Одним из первых результатов Эйлера была известная формула $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Эйлер установил также некоторые ряды, суммы которых выражаются определенными интегралами, и попутно вывел формулу суммирования [Comm. Ac. Petr., 1732/33 (1739)], несколько позже самостоятельно найденную снова Маклореном, опубликовавшим ее в «Трактате о флюксиях» (1742). Если s есть сумма первых n членов ряда и t есть n-й член, причем s и t выражены через n, то согласно Эйлеру

$$s=\int t\,dn+\frac{t}{2}+\frac{dt}{12\,dn}-\frac{d^3t}{720\,dn^3}+\frac{d^5t}{30240\,dn^5}\ \text{и т. д.},$$

где при $n=0$ также $t=0$ и $s=0$. Эта формула, ныне записываемая в ином виде, представляет собой вместе с тем распространение ряда Стирлинга на произвольную функцию t. Для случая, когда $t=\frac{1}{x}$, $n=x$, Эйлер в одной более поздней работе [там же, 1736 (1741)] получил

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}=C+\ln x+\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{720x^4}-\ldots$$

Здесь C — «эйлерова постоянная», которую Эйлер уже ранее [Comm. Ac. Petr., 1734/35 (1740)] привел с шестью десятичными знаками одновременно с формулой

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln(n+1)+C.$$

Теперь, положив $x=10$, он нашел, что $C=0{,}577\,215\,664\,901\,532\,9$.

---

[1] Употребляемые теперь названия были введены в XIX столетии: термин «бэта-функция» — Бине, «гамма-функция» — Лежандром.

. Определить закон образования коэффициентов формулы суммирования Эйлеру удалось лишь в более поздней статье [там же, 1740 (1750)], установив их связь с суммами

$$\frac{1}{1^{2k}}+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\ldots$$

Эйлер много занимался суммированием таких «обратных» рядов, как он назвал их в первой посвященной им работе [Comm. Ac. Petr., 1734/35 (1740)]. На ряд величин, обратных квадратам натуральных чисел, указал еще Як. Бернулли в своих «Арифметических предложениях о бесконечных рядах» (1689), в которых ему удалось вычислить суммы обратных значений треугольных и некоторых других чисел. Однако определить сумму ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$$

базельский математик не сумел. Лишь Эйлер в 1736 нашел, что сумма этого ряда равна $\frac{1}{6}\pi^2$; для ряда

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots$$

он одновременно получил сумму $\frac{1}{90}\pi^4$. Мы знаем это из одного письма Даниила Бернулли, которому Эйлер сообщил без доказательства свои результаты. Метод суммирования и значение сумм для некоторых других рядов Эйлер опубликовал в упомянутой работе в Comm. Ac. Petr., 1734/35 (1740). Он именно полагал равным нулю ряд для синуса и рассматривал получившееся выражение как уравнение бесконечно высокой степени. Это уравнение он разлагал соответственно на бесконечное число множителей, а затем применял теоремы о степенных суммах корней уравнения. Замечательно, что Иоганн Бернулли, узнав от своего сына Даниила о результате Эйлера для ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots,$$

заново открыл сходный смелый прием. И вряд ли можно упрекать Иоганна Бернулли за то, что он уже после выхода работы Эйлера опубликовал свое исследование в IV томе Opera omnia (1742).

Эйлеру с разных сторон указывали на незаконность его способа, лишь случайно приведшего к правильному результату. В связи с этим в Comm. Ac. Petrop., 1740 (1750) он дал существенно отличный вывод, вычислил суммы до $2k=24$ и привел их в виде

$$S_{2k}=\frac{2^{2k-1}}{(2k+1)!}A_{2k}\,\pi^{2k}\,.$$

Коэффициенты A_{2k} здесь находятся в весьма простой зависимости как с числами, введенными уже Як. Бернулли при вычислении сумм

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$$

(«Искусство предположений», 1713) и названными Муавром *«числами Бернулли»*, так и с коэффициентами эйлеровой формулы суммирования. Зависимость последних от чисел Бернулли Эйлер опубликовал, по-видимому, лишь в «Основаниях дифференциального исчисления», 1755. Специально для ряда

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

Эйлер нашел еще два вывода, анонимно появившихся в Journal littéraire de l'Allemagne, 1743. Первый из них был сообщен Иоганну Бернулли Эйлером уже в 1737. Во втором особенно заслуживает упоминания, что Эйлер использовал здесь степенной ряд для $(\arcsin x)^2$, который был ему известен также с 1737, но который замечательным образом встречается еще раньше у японского математика Кова Секи (умер в 1708; см. стр. 149).

Эйлер определил также суммы соответствующих знакочередующихся рядов

$$1 - \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4^{2k}} + \ldots = \frac{2^{2k-1}}{(2k+1)} A_{2k} \pi^{2k}.$$

Эти суммирования были изложены в труде «Введение в анализ бесконечных величин» (1748), в котором Эйлер собрал воедино множество сделанных им, начиная с 1730, открытий по так называемому ныне «алгебраическому анализу». Проникновенному дарованию Эйлера удалось тогда же (1749) найти две следующие формулы, доказать которые он, правда, оказался не в силах, а именно:

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - \ldots}{1 - 2^{-n} + 3^{-n} - \ldots} = \frac{-\Gamma(n)(2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1)\pi^n} \cos \frac{n\pi}{2}$$

и

$$\frac{1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - \ldots}{1 - 3^{-n} + 5^{-n} - \ldots} = \frac{\Gamma(n) 2^n}{\pi^n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

[опубликовано в Mém. Ac. Berl., 1761 (1788)]. Первая из них была вновь открыта и выведена лишь в 1859 Б. Риманом в качестве функционального уравнения для его ζ-функции $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s}$.

Вторая формула была заново получена в XIX столетии даже двукратно: Мальмстеном в 1842 и О. Шлемильхом в 1849. Особенно важна первая из формул, играющая теперь большую роль в аналитической теории чисел.

Для создания алгебраического анализа в нашем смысле слова прежде всего необходимо было определение *понятия функции*. Понятие о зависимости между двумя переменными величинами весьма постепенно проникало в математику благодаря развитию аналитической геометрии. Вначале оно вовсе не было ясно распознано и не получило ни названия, ни четкого определения. В более узком смысле слово «функция» стали уже употреблять с 1692 Лейбниц (Acta Erud. и переписка) и с 1694 Яков Бернулли (Acta Erud.), но в современном значении применил его лишь Иоганн Бернулли в одном письме к Лейбницу от 1698. За год до того (также в Acta Erud.) Иог. Бернулли определил уже понятие функции (не пользуясь еще этим термином) как *выражение, составленное каким-либо образом из переменной величины и постоянных величин*. Различие между *алгебраическими* и *трансцендентными* функциями Лейбниц установил еще в Acta Erud. за 1686. Определение функции как *аналитического* выражения, составленного из переменных и постоянных величин, последовательно провел в своем «Введении» (1748) Эйлер. В зависимости от характера этого аналитического выражения он говорил об алгебраических и о трансцендентных функциях. Он подразделил также функции на однозначные и многозначные, четные и нечетные, явные и неявные, а алгебраические функции — на рациональные и иррациональные [1]).

Символ $f(x)$ также принадлежит Эйлеру, впервые употребившему его в статье Additamentum etc. в Comm. Ac. Petr., 1734/35 (1740). Ранее того символом φx, без скобок, воспользовался Иог. Бернулли, называвший φ «характеристикой функции» (Mém. Ac. Paris, 1718). Одновременно с Эйлером Ал. Клеро применял знаки Π и Δ, приписывая аргумент без скобок (Mém. Ac. Paris, 1734); Даламбер еще в 1747 аналогично употреблял буквы φ и Δ [Mém. Ac. Berl., 1748 (1750)]. Наряду с этим Клеро все еще пользовался для функций аргумента x обозначениями X и ξ, предложенными в 1698 Иог. Бернулли в письмах к Лейбницу.

Символика Эйлера приобрела впервые подлинное значение, когда Лагранж в «Теории аналитических функций» (1797) начал исследование общих свойств аналитических функций и заложил основы общей теории функций. Эйлер и Лагранж определили, подобно функциям одного аргумента, также функции двух и, наконец, многих переменных. Это произошло после того, как функции двух переменных были получены частью аналитическим путем, частью

[1]) Подробнее о развитии понятия функции, в частности в связи со спорами вокруг задачи о колеблющейся струне, см. в книге И. Ю. Тимченко, указанной в списке литературы. — *Прим. ред.*

при изучении проблем, в которых встречался произвольный параметр, вроде, например, задачи о траекториях.

Для Ньютона представление алгебраических и трансцендентных функций с помощью бесконечных рядов являлось средством интегрирования. Эйлер уже сознавал, что такое представление дает нам ясное понимание сущности и свойств функций. Эта точка зрения была отчетливо выражена им во «Введении в анализ». Поэтому Эйлер поставил целью разложить элементарным образом в ряды все известные тогда функции. Для показательных величин, логарифмов и тригонометрических функций он исходил при этом из биномиального ряда; в случае логарифмического и показательного рядов таким путем пошел еще астроном Э. Галлей (Phil. Trans., 1695). В одной работе, посвященной «обратным» рядам и опубликованной в Miscell. Berol., 1743, Эйлер впервые указал также, что

$$e^z = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Тем самым он обобщил результат Дан. Бернулли, выразившего в 1728 предельное значение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ с помощью числового ряда, соответствующего $z=1$. Во «Введении в анализ» Эйлер воспользовался этим рядом

$$1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$$

для вычисления значения e с 23 десятичными знаками. Буква e была употреблена впервые в печати Эйлером во втором томе «Механики», изданном в 1736, а затем в приводившейся уже статье в Comm. Ac. Petr. за 1734/35 (1740). Но буква e встречалась у Эйлера и ранее в одном письме к Гольдбаху от 1731. Благодаря «Введению в анализ» это обозначение прочно вошло в обиход, сменив нередко применявшуюся ранее букву c.

Эйлеру принадлежит также отчетливое выяснение связи между тригонометрическими и показательной функциями. Правда, еще Р. Котес между прочим получил выраженное им словесно уравнение

$$\ln(\cos x + i\sin x) = ix$$

(Phil. Trans., 1714/16 и позднее в «Гармонии мер», 1722). Но аналитические формулы

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

появились впервые в упоминавшейся статье Эйлера в Misc. Berol. за 1743. Первое из приведенных соотношений он сообщил письменно Иоганну Бернулли уже в октябре 1740. Это открытие Эйлер сделал, получив в качестве решения одного дифференциального уравнения, с одной стороны, $2\cos x$, а с другой, $e^{ix}+e^{-ix}$, и установив затем тождество обоих решений с помощью разложения в ряд. Приведенные формулы косинуса и синуса неоднократно применялись во «Введении в анализ». Эйлер же первый ввел в анализ в качестве *функций* тригонометрические *линии*, рассматривавшиеся до него обязательно в связи с кругом. Наряду с тригонометрическими функциями плодотворное употребление получили у него и круговые функции. Ныне употребительная форма теоремы о возведении в степень комплексного числа $\cos x \pm i \sin x$, содержание которой открыл Муавр в 1707 и 1722 (см. стр. 44), тоже встречается впервые лишь у Эйлера. Зависимость между логарифмами и круговыми функциями в области мнимых величин, установленная Лейбницем и Иог. Бернулли в их переписке за 1702/04 для $\arcsin x$, Лейбницем в Acta Erud., 1712 для $\operatorname{arctg} x$ и намеченная Р. Котесом в 1714 (Phil. Trans.) и 1722 («Гармония мер») также была подробнее исследована во «Введении в анализ» Эйлера. Правда, «Введение в анализ» не содержало точной теории логарифмов. Но уже в процессе своего спора с Иог. Бернулли о логарифмах отрицательных величин, продолжавшегося с 1727, Эйлер совершенно безупречно уяснил положение вещей. Основные положения учения о логарифмах он высказал в нескольких письмах к Даламберу от 1747, не сумев, впрочем, убедить своего адресата. В блестящей статье в Mém. Ac. Berl. [1749 (1751)] Эйлер печатно изложил свою концепцию, что не помешало растянуться спорам на все столетие и даже за его пределы. Для окончательного решения их недоставало еще самой теории мнимых величин [1]). Теория эта была опубликована землемером К. Весселем как раз в конце рассматриваемого периода в пятом томе Nye Samling danske Vidensk. Selskabs Skrifter (Копенгаген, 1799). Эта теория, по существу вполне сходная с геометрической интерпретацией комплексных величин, вновь найденной позднее Арганом и иногда называемой теперь по имени Гаусса, оставалась, однако, никому неизвестной в продолжении ста лет. Добавим, что обозначение $\sqrt{-1}$ буквой i было предложено Эйлером в работе 1777, опубликованной в IV томе второго издания «Оснований интегрального исчисления» (1794).

В связи с самыми разнообразными обстоятельствами Эйлер занимался также вопросом о представлении отношения длины окружности к диаметру, т. е. числа π. Буква π была употреблена в этом смысле в 1706 У. Джонсом в «Обзоре лауреатов математики» (Synopsis palmariorum Matheseos), но навсегда в математику ее ввело постоянное употребление Эйлером, который еще в «Механике»

---

[1]) Следует упомянуть о попытке создания такой теории, предпринятой Г. Кюном в Comm. Ac. Petr., 1750/15 (1753). Она, однако, уступала по значению более ранней работе Валлиса (см. стр. 23).

(1736) заменил ею применявшуюся им ранее букву p, после чего он уже держался символа π довольно последовательно. Особенное значение Эйлер придавал установлению удобных разложений числа π в ряды. С этой целью он обратился к методу, опубликованному англичанином Дж. Мэчином еще в «Обзоре» Джонса (1706). Прием Мэчина заключался в том, что $\frac{\pi}{4}$ разбивалось на сумму или разность двух дуг, тангенсы которых суть простые рациональные дроби; так, например, Мэчин положил

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

и с помощью ряда

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \ldots,$$

открытого Дж. Грегори и Лейбницем, вычислил π со 100 десятичными знаками. Несколько позднее, в 1717, де-Ланьи получил 127 знаков путем непосредственного вычисления $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ [опубликовано в Hist. Ac. Paris, 1719 (1721)]. Эйлер подробнее разработал метод Мэчина [Comm. Ac. Petr., 1737 (1744)], указав, как можно находить любые такие разложения. Вслед за тем Эйлер показал, как применить к вычислению π упоминавшийся несколько выше асимптотический ряд [Comm. Ac. Petr., 1739 (1750)], облек в аналитическую форму один способ приближенной квадратуры круга, предложенный Декартом [Nov. Comm. Ac. Petr., 1760/61 (1763)], и представил $\frac{\pi}{2}$ в виде непрерывной дроби [Comm. Ac. Petr., 1739 (1750)]. В «Основаниях дифференциального исчисления» (1755) Эйлер привел еще один весьма удобный для вычисления π ряд, позволивший ему найти в течение часа 20 знаков. Вопроса о теоретико-числовом характере числа π Эйлер коснулся лишь мельком; иррациональность π была строго доказана, как мы знаем, впервые его младшим современником Иоганном Ламбертом в 1767. Эйлер вновь получил разложения числа π в бесконечные произведения, данные Виетом и Валлисом, исходя из иных идей, чем первые их авторы [Comm. Ac. Petr. 1730/31 (1738)].

Тот же Эйлер впервые выразил в виде бесконечных произведений тригонометрические и гиперболические функции, а отсюда получил, между прочим, формулы для вычисления их логарифмов. В 1742 он сообщил Ник. Бернулли более строгое обоснование упоминавшегося нами ранее разложения $\sin x$. Это и другие бесконечные произведения были подвергнуты подробному исследованию во «Введении в анализ». В двух статьях в Comm. Ac. Petr. за 1737 (1744) и 1739 (1750), основное содержание которых было включено затем частично во «Введение в анализ», Эйлер значительно обогатил теорию цепных дробей, детально изучив разложение в цепные дроби бесконечных рядов и некоторых функций. Его разложения в цепные дроби чисел e, $\frac{e^2-1}{e}$ и т. д. (первое было дано, впрочем, уже Р. Котесом) оказались весьма важными для исследования иррациональности e, предпринятого позднее Ламбертом (см. стр 82). Значение содержащихся здесь же исследований Эйлера о зависимостях между определенными интегралами, произведениями и цепными дробями велико еще и потому, что они примыкают к его более ранним работам о гамма-функции.

Интересно отметить, что вычислением весьма точных значений числа π с успехом занимались издавна также японцы и притом, как можно считать ныне почти доказанным, независимо от европейских влияний. Несколько возвращаясь во времени назад, заметим, что первая книга по математике была опубликована в Японии в 1600, но она не сохранилась. Во втором математическом труде «Жинко-ки» Иошида (1627) для числа π было приведено значение 3,16, выраженное дробью $\frac{79}{25}$. В 1663/64 появилось значение 3,14, но одновременно с помощью 2^{15}-угольника π было уже вычислено с восемью десятичными знаками. Как упоминалось выше, Кова Секи, преследуя ту же цель, гениальным образом установил ряд для $(\arcsin x)^2$, вывод которого показывает, что ему была известна теорема о биноме по крайней мере для показателя $\frac{1}{2}$. Открытие Ньютона было опубликовано лишь в 1685 в английском издании «Алгебры» Валлиса, работа же Секи была готова самое позднее в 1700. Если принять во внимание медленность, с которой тогда распространялись научные сообщения, и язык, на котором была изложена теорема Ньютона, то самостоятельность Секи можно считать почти несомненной. Секи дал для числа π 24 десятичных знака, а его последователи продолжили затем вычисления до 41 и соответственно 50 знаков. Кроме того, японцы дали своеобразную последовательность обыкновенных дробей, представляющих собой приближенные значения π. В этой последовательности встречаются и некоторые значения, употреблявшиеся китайцами. Так, седьмое значение, дробь $\frac{22}{7}$, впервые найденная Архимедом, называется «неточным значением» Цзу Чун-чжи, сто тринадцатое, $\frac{355}{113}$, «точным значением» Цзу Чун-чжи. Согласно китайским источникам, использованным в самое недавнее время, этот математик жил в пятом столетии нашей эры. Не исключена возможность, что к приближению $\frac{355}{113}$, до сих пор приписывавшемуся Адриану Антонисзоону, он пришел с помощью своего рода разложения в ряд [1]). Значительно более точные значения в виде обыкновенных дробей были даны для π и π^2 позднее.

Вероятно, в середине XVIII столетия японцы обладали некоторыми разложениями в цепные дроби. Но мы удивляемся еще более, когда узнаем, что уже в начале того же столетия японцы, пользуясь методом, представлявшим собой настоящее интегрирование, получили ряды для $\arcsin x$ и связанных с ним функций, дававшие при подстановке частных значений аргумента бесконечные разложения числа π. Для этой цели круг или его части разбивались параллельными прямыми на очень узкие полоски, границы которых считали прямолинейными. Площади полосок выражались через абсциссу, а возникавшее при этом выражение $(1-x^2)^{\pm 1/2}$ разлагалось в ряд, который затем интегрировался почленно. При интегрировании, подобно Кавальери и Валлису, пользовались пределом

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^r+2^r+\ldots+n^r}{n^{r+1}} = \frac{1}{r+1},$$

вывод которого нам неизвестен. Четыре таких ряда дошли до нас под именем Райдо Арима [2]), жившего приблизительно в 1737/97, но они, несомненно, более раннего происхождения. Отсюда, по-видимому, следует, что японцам в XVII—XVIII столетиях был известен и своего рода метод координат. Современные японцы приписывают Секи и его школе еще гораздо более глубокие познания, которые пока, правда, не засвидетельствованы, но тем не менее вполне возможны [3]). Во всяком случае, мы видим, как на Дальнем Востоке люди, не связанные с античностью и не получившие заметных стимулов с Запада, пришли к идеям, совершенно сходным с европейскими. Этот факт служит прекрасным доказательством общности мышления всего человечества.

Для *решения уравнений* бесконечные ряды были использованы еще Ньютоном. Выражения ординат y, определяемых неявными функциями, в явной функции абсцисс ему были необходимы, чтобы можно было производить квадратуры кривых. Мы уже говорили об этом, так же как о рядах Ламберта, работах Эйлера и, наконец, формуле обращения функций Лагранжа в § 2 главы II.

Несколько предвосхищая изложение истории дифференциальных уравнений с частными производными, упомянем еще о разложении

---

[1]) То же приближение, независимо от Антонисзоона, получил в конце XVI столетия В. Ото. Что касается приближения Цзу Чун-чжи, то он получил его скорее всего с помощью вписанных правильных многоугольников.— *Прим. ред.*

[2]) Древние японские собственные имена сохранились только в виде китайских идеограмм, чтение которых часто сомнительно. Поэтому приводимые имена не достоверны. Так, вместо Кова читают также Такакацу, вместо Наомару — Хокуйен и вместо Ажима — Ясушима.

[3]) Подробнее см. книгу Д. Смита и И. Миками, указанную в списке литературы. — *Прим. ред.*

функций в тригонометрические ряды, приобретшие впоследствии столь выдающееся значение. Математики пришли к тригонометрическим рядам от задачи о колеблющейся струне, впервые поставленной Б. Тейлором в 1713 в Phil. Trans. и в 1715 в «Методе приращений». Даламбер привел задачу [Mém. Ac. Berl., 1747 (1749)] к дифференциальному уравнению с частными производными

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

общий интеграл которого выразил с помощью двух произвольных функций. Несколько позднее Дан. Бернулли представил общее решение в форме ряда

$$y=\alpha \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi t}{l}+\beta \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi t}{l}+\ldots$$

[Mém. Ac. Berl., 1753 (1755)]. Это естественно привлекло внимание к таким рядам. Ими занялся также Эйлер [Mém. Ac. Berl., 1748 (1750)], в ряде пунктов оспаривавший даламберово понимание физического процесса колебания струны. Даламбер ответил Эйлеру в том же журнале в 1750 (1752). Вслед затем Эйлер в различных работах [1]) поставил перед собой задачу представить некоторые выражения, вроде $\sin^m\varphi$, $\cos^m\varphi$, с помощью рядов вида

$$a_1\sin\varphi+a_2\sin 2\varphi+\ldots+b+b_1\cos\varphi+b_2\cos 2\varphi+\ldots,$$

а также занялся суммированием подобных рядов. Интересно отметить, что он разложил в тригонометрические ряды некоторые рациональные функции (см. первую из статей, указанных в сноске), хотя ранее, при рассмотрении задачи о струне, утверждал, что такое их представление невозможно. Несколько подобных разложений в тригонометрические ряды дал со своей стороны Дан. Бернулли [Nov. Comm. Ac. Petr., 1772 (1773)].

Одновременно с появлением последних работ Эйлера некоторые функции были разложены в тригонометрические ряды также Даламбером и Клеро. В томе II своих «Исследований о различных важных вопросах системы мира» (1754) Даламбер, исходя из теории возмущений планетной системы, получил разложение

$$(1-n\cos\varphi)^{-s}=\mathfrak{A}_s^{(0)}+2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\mathfrak{A}_s^{(\nu)}\cos\nu\varphi$$

и представил первые два коэффициента $\mathfrak{A}_s^{(0)}$ и $\mathfrak{A}_s^{(1)}$ в виде определенных интегралов. Клеро в своих изысканиях 1757 о возмущениях Солнца [Mém. Ac. Paris, 1754 (1759)] пришел к выводу, что любая

---

[1]) Например, Nov. Comm. Ac. Petr., 1754/55 (1760), Nov. Act. Ac. Petr., 1789 (1793) и там же две статьи в томе за 1793 (1798).

функция $f(\varphi)$, которая может и не быть задана алгебраическим законом, а представлять собой лишь отдельные точки, разлагается в ряд:

$$f(\varphi)=A_0+2\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \cos \nu\varphi,$$

где коэффициенты

$$A_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos \nu\varphi d\varphi.$$

Этот фундаментальный результат странным образом прошел совершенно незамеченным. Только Эйлер, не упоминая Клеро, возвратился в двух статьях 1777 к исследованию этого вопроса и пришел к тому же результату [опубликовано в Nov. Act. Petr., 1793 (1798)].

Другая важная область учения о рядах была обнаружена при изучении притяжения эллипсоида и связанной с этим проблемы о фигуре равновесия вращающейся жидкой массы, подчиняющейся закону Ньютона. В 1783 Лежандр, желая получить компоненту силы притяжения эллипсоида вращения в направлении радиуса-вектора, выражавшуюся тройным интегралом, пришел к разложению функции $1 : \sqrt{r^2-2rR\mu+R^2}$ в ряд по степеням $\frac{r}{R}$ или $\frac{R}{r}$ [Mém. prés. sav. étr. Ac. Paris, 1785; Mém. Ac. Paris, 1783 (1786)]. Коэффициенты ряда оказались при этом целыми рациональными функциями μ; это были так называемые «полиномы Лежандра». Год спустя Лежандр установил важнейшие их свойства [Mém. Ac. Paris, 1784 (1787)]. В 1789 в мемуарах Парижской Академии за тот же год (опубликован в году II, т. е. 1793/94) он привел также теорему сложения его полиномов. Лежандр заметил, что здесь необходимо исследование сходимости полученных разложений и постарался обеспечить их сходимость.

Исследование вопроса о притяжении любого эллипсоида привело в это же время Лапласа к шаровым функциям двух переменных[1]), которые он определил как решения дифференциального уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial U_n}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 U_n}{\partial\omega^2}+n(n+1)U_n=0$$

[Mém. Ac. Paris, 1782 (1785) и 1783 (1786)]. Постепенно Лаплас пришел к убеждению, что всякая функция может быть разложена

---

[1]) Термин «шаровые функции» принадлежит Гауссу (Göttinger gelehrte Anzeigen, 1828).

в ряд по шаровым функциям. Это утверждение он впервые высказал в своей «Небесной механике» [Mécanique céleste, т. II, год VIII (1800)]. Он не произвел, однако, исследования сходимости, необходимого для точной формулировки его теоремы, и оно выпало уже на долю позднейшего времени, причем обнаружились границы, в которых теорема Лапласа справедлива.

Мы видели, что теория бесконечных рядов испытала в XVIII столетии мощный подъем, которым обязана была в немалой степени творческим силам гениального Эйлера, непрестанно находившего новые пути успешного изучения разнообразнейших вопросов этого отдела математики. Однако, как бы ни была плодотворна эта деятельность Эйлера, мы все же не должны упускать из виду, что направлена она была только в сторону формального развития. Найденное каким-либо способом разложение в ряд было, по мнению Эйлера, a priori справедливо при всех значениях переменного, даже если получался расходящийся ряд. Поэтому Эйлер обращался при выкладках с расходящимися рядами совершенно так же, как со сходящимися. Его не смутили предостережения Ник. I Бернулли, племянника Иоганна, и он думал, что поможет делу, просто предложив вместо слов «сумма ряда» ставить «значение конечного выражения, из разложения которого он возник». Эта точка зрения была выражена уже в письме к Ник. I Бернулли от 1744 и в точно таком же виде изложена в «Основаниях дифференциального исчисления» (1755)[1]. После того как ученые XVIII столетия увидели, что методы, обладавшие в те времена весьма сомнительной правомерностью (скажем, вычисления с мнимыми величинами), давали большой успех, они вообще перестали предъявлять к анализу столь строгие требования, как к геометрии. Но как беззаботно ни обращался Эйлер с бесконечными рядами, он все же не отказывался вовсе от исследования сходимости. В противном случае он не высказал бы, в связи с занятиями гармоническими рядами, вообще начавшими снова несколько беспокоить совесть математиков в указанном отношении, предложения, по содержанию совпадающего с утверждением, что ряд расходится, если

$$\lim_{n \to \infty} |S_{kn} - S_n| > 0,$$

[1]) Пользуясь расходящимися рядами, Эйлер искал пути, оправдывающие его вычислительные приемы, различные действия с такими рядами, их преобразования в сходящиеся выражения и т. д. Хотя сам он не создал теории расходящихся рядов, но его более широкое понимание суммы ряда и методы обобщенного суммирования были оправданы, строго обоснованы и развиты далее на рубеже XIX и XX столетий Э. Чезаро, Э. Борелем, Г. Ф. Вороным, Л. Фейером и др. См. Г. Харди, Расходящиеся ряды, М., 1951, а также статью Г. Фабера во второй части 16 тома первой серии Opera omnia Эйлера (Базель, 1935), содержащую подробный разбор всех работ великого математика по теории бесконечных рядов. — *Прим. ред.*

где S_n — сумма первых n членов [Comm. Ac. Petr., 1734/35 (1740)]. В той же статье он заявил, что необходимое и достаточное условие сходимости состоит в том, что $\lim\limits_{n \to \infty} (S_{kn} - S_n) = 0$, но, как известно, справедлива лишь первая часть этого предложения.

Бóльшая часть современников Эйлера придерживалась той же точки зрения на сходимость рядов, что и он. Потребность в исследовании сходимости сказывалась лишь у отдельных лиц. Это относится, например, к Маклорену и П. Вариньону (см. стр. 138). В своих «Основаниях анализа конечных величин» и «Основаниях анализа бесконечного» (Геттинген, 1760 и 1761; последняя книга — Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen — была первым немецким учебником высшего анализа) Кестнер также постоянно подчеркивал, что нужно строго различать сходящиеся и расходящиеся ряды. Потребность в изучении сходимости рядов стала жизненнее, когда возникла полемика о рядах из синусов и косинусов. В ходе разгоревшегося между Даламбером, Дан. Бернулли, Эйлером и Лагранжем спора о возможности представить общее решение проблемы колеблющейся струны в виде таких рядов, Даламбер встретил случай уточнить свои воззрения по интересующему нас вопросу. В отличие от Эйлера, для него все вычисления с рядами, сходимость которых не была установлена или же которые нельзя было предполагать сходящимися, были весьма сомнительны. Однако Даламбер, примкнувший тем самым к упоминавшейся ранее концепции Вариньона, стоял довольно одиноко. Исключение составлял еще лишь Ламберт, стремившийся во всех своих работах к большой строгости. Его доказательство иррациональности π (ср. стр. 82) представляло пример исследования сходимости разложения в цепную дробь, удовлетворяющего наиболее современным требованиям строгости, и выделялось в XVIII столетии как единственная в своем роде редкость[1]). Заметим, что Лагранж в своих исследованиях об остаточном члене ряда Тейлора первоначально стремился лишь получить формулу для оценки погрешности, появляющейся, когда бесконечный ряд обрывают на каком-либо определенном месте. Только постепенно он пришел к более глубокому пониманию вопроса.

§ 3. Дальнейшая разработка дифференциального и интегрального исчисления

Первое время после выхода работ Лейбница вычислениями с бесконечно малыми величинами пользовались довольно некритически, пока в 1704, в процессе изложенного выше спора о приоритете, Ньютон не отверг полностью инфинитезимальные величины.

---

[1]) О доказательстве Ламберта см. примечание на стр. 83. — *Прим. ред.*

Но и после этого перелом, вызванный авторитетом Ньютона, наступил лишь в Англии. Например, Дж. Крег, бывший ранее приверженцем лейбницевых идей (см. стр. 132 и Phil. Trans., 1701, 1703, 1704), в сочинении «Две книги об исчислении флюэнт» (De calculo fluentium libri duo, Лондон, 1718) пользовался исчислением флюксий. Впрочем, и в Англии этот период длился недолго. Например, в 1730 Стон издал «Метод флюксий» (A method of fluxions), у которого общим с исчислением флюксий был только заголовок, а первая часть являлась переводом курса Лопиталя.

Вопрос об основах как метода флюксий, так и дифференциального исчисления был снова поставлен сочинением Дж. Беркли «Аналист» (The Analyst, 1734). Беркли довольно резко напал на оба метода и дал их критику, которая не была лишена оснований, но которая вместе с тем показывала, что ясные определения понятий, принадлежавшие Лейбницу, к тому времени были уже позабыты [1]. «Аналист» принес ту пользу, что в борьбе за метод флюксий выступил его достойный защитник — Б. Робинс. В своих четырех работах, вышедших в 1735/36 [2], Робинс прежде всего выставил концепцию, что метод флюксий является сокращенным вычислительным приемом. С этой целью он сначала строго доказал основную теорему Ньютона о дифференцировании степени по методу Архимеда, а затем показал, что исчисление флюксий приводит к тому же результату. Вслед затем Робинс определил обобщенное еще Паскалем (стр. 106) понятие равенства в таких выражениях: «всякая постоянная величина, к которой приближается, никогда не переходя ее, непрерывно увеличивающаяся или уменьшающаяся переменная, рассматривается как величина, равной которой становится в конце концов или же напоследок переменная, если предположить, что разница между переменной и постоянным пределом при ее приближении к последнему может быть сделана менее любой как угодно малой данной величины». И далее: «точно так же могут приближаться к определенному пределу отношения; отношение при этом рассматривается, как совпадающее в конце концов с таким пределом; отсюда, однако, вовсе не следует, что и переменные, из которых составлено отношение, также должны приближаться к какой-либо конечной величине или пределу, которого они не могут превзойти».

---

[1] В оценке строгости и точности идей обоснования анализа, выдвинутых Ньютоном, Лейбницем и их преемниками, историки математики довольно значительно расходятся. Этой проблеме посвящен на русском языке ряд работ А. Н. Колмогорова, Н. Н. Лузина, С. Я. Лурье, К. А. Рыбникова, С. А. Яновской и др. (см. список литературы). — *Прим. ред.*

[2] Именно, в сочинении «Рассуждение о ... методе флюксий» (A discourse concerning the ... methods of fluxions..., Лондон..., 1735) и в трех статьях в журнале Republick of letters, октябрь и декабрь 1735 и апрель 1736. — Более точное изложение взглядов см. в книге Ф. Кеджари, указанной в списке литературы. — *Прим. ред.*

Эти точные определения укрепили фундамент исчисления флюксий и принудили Беркли замолчать. Но заслуги Робинса вскоре были забыты, ибо уже в 1742 вышел знаменитый труд К. Маклорена «Трактат о флюксиях», неоднократно упоминавшийся нами. Трактат Маклорена, вызванный к жизни также критикой Беркли, тоже исходил из точно установленного понятия предела и излагал учение об образовании величин посредством движения. Маклорен выставил два основных принципа:

1. Если две порождаемые движением величины постоянно равны, то постоянно равными должны быть и порождающие движения.

2. Если, наоборот, постоянно равны порождающие движения, то равны будут всегда и величины, порожденные ими в одинаковое время.

На первом принципе покоился прямой, а на втором — обратный метод флюксий. С помощью движения Маклорен объяснил и флюксии высшего порядка, введя понятие об *ускорениях различных порядков*. Он также перекинул мост между исчислениями флюксий и бесконечно малых, указав, что инфинитезимальные рассуждения представляют собой лишь *другой способ выражения* при рассмотрении движущихся величин, и если пользоваться ими с должной осторожностью, то выдвигаемые против них возражения будут совершенно несостоятельны.

На континенте о необходимости исследования основ исчисления бесконечно малых думали в то время, по-видимому, гораздо меньше. Эйлер разделался с этим вопросом довольно просто. Для него исчисление бесконечно малых было методом определения отношения исчезающих приращений, приобретаемых функциями, когда их аргументы возрастают на исчезающие приращения. При этом Эйлер рассматривал исчезающие приращения как *абсолютные нули*, так что дифференциальное исчисление занимается не столько ими, сколько их *отношениями*. Фундаментальные «Основания дифференциального исчисления» (1755), систематически излагавшие все тогдашнее достояние дифференциального исчисления, Эйлер построил на *вычислениях с конечными разностями*. О самом исчислении конечных разностей см. главу IX.

Младший современник Эйлера, Даламбер, вновь обосновал дифференциальное исчисление на рассмотрении *пределов* отношений. Метод Даламбера лишь незначительно отличался от ньютонова метода первых и последних отношений. Но Даламбер приблизил эту концепцию к математикам континента Европы, тем более что сам пользовался символикой Лейбница. Свои взгляды на бесконечность и понятие предела Даламбер подробно изложил в статьях «Дифференциал» (Différentielle) и «Предел» (Limite) знаменитой Encyclopédie (т. IV, 1754 и соответственно т. IX, 1765).

К новой мысли дать чисто *алгебраическое* обоснование анализа первым пришел англичанин Дж. Ланден. В сочинениях «Рассуждение об анализе вычетов» и «Анализ вычетов» (A discourse concerning the residual analysis, 1758 и The residual analysis, 1764) он для функции $y=f(x)$ разлагал дробь $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ в ряд так, чтобы делитель $x'-x$ сокращался. Полагая затем $x'=x$, он получал «особое значение» частного, а именно, дифференциальное частное, которое обозначал $[x \overset{\prime}{-} y]$. Рассуждения Ландена опирались, таким образом, на возможность, которую он допускал как самоочевидную, разложения произвольной функции $f(x)$ в ряд по степеням $x'-x$.

В 1784 физико-математический класс Берлинской Академии, руководителем которой состоял тогда Лагранж, объявил конкурс на тему о ясной и точной теории математических бесконечно большого и бесконечно малого. При этом требовалось, чтобы вместо понятия бесконечности было предложено такое отчетливое и подлинно математическое начало, чтобы исследования не сделались затруднительными или долгими. Премию получил женевский математик С. Люилье, превосходно и последовательно развивший исчисление бесконечно малых на точных представлениях о пределе, данных Робинсом. Сочинение Люилье вышло в 1786 в Берлине под названием «Элементарное изложение начал высших исчислений» (Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs, год издания не указан); затем оно было издано по-латыни: Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris (Тюбинген, 1795). Люилье определенно заявлял, что $\frac{dy}{dx}$ следует рассматривать не как дробь, а только как символ предела дроби, именно $\lim\limits_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)$. Хотя работа Люилье была премирована, но той цели, которую имел в виду при постановке проблемы Лагранж, она не достигла. В противном случае Лагранжу не пришлось бы 13 лет спустя изложить собственные взгляды на проблему обоснования анализа (которых мы мельком коснулись выше; см. стр. 140) в своей «Теории аналитических функций». Тем не менее, в последующем развитии основ дифференциального исчисления утвердилась не алгебраическая концепция Лагранжа, а теория пределов. Мы не станем задерживаться на других попытках заменить или усовершенствовать метод Лейбница, вроде «calcul d'exposition» И. Грюзона [Nouv. Mém. Ac. Berl., 1798—1800 (1801/03)].

Для полноты правил дифференцирования после деятельности Лейбница и Бернулли оставалось лишь рассмотреть угловые и круговые функции. В явном виде дифференциалы этих функций появляются после 1700, но неявно использовались они и раньше. Р. Котес, в частности, геометрически вывел правила для $d \sin x$, $d \operatorname{tg} x$, $d \sec x$ (в приложенной к «Гармонии мер», 1722, статье «Оценка ошибок»). Такое положение вещей объяснялось тем, что до конца XVII столетия математики не располагали специальными обозначениями этих функций. В случае нужды искомое соотношение находили из характеристического треугольника. Только после того, как Эйлер ввел в анализ тригонометрические линии в качестве функций, смогли быть плодотворно применены формулы их дифференциалов. Эйлер же дал вывод и полный перечень этих формул в «Основаниях дифференциального исчисления» (1755).

Теорема о независимости значения частных производных от порядка дифференцирования была известна еще с 1721 (Ник. I Бернулли, Acta Erud., Suppl. VII). Первоначально ее считали аксиомой. Затем ее доказательство, впрочем, недостаточное, дал Эйлер в Comm. Ac. Petr., 1734/35 (1740). В «Основаниях дифференциального исчисления» он распространил эту теорему на высшие частные производные. Для обозначения частных производных Эйлер здесь и позднее употреблял символы $\left(\frac{dA}{dx}\right)$, $\left(\frac{dA}{dy}\right)$ и т. д., между тем как Клеро, также применивший в 1739 (Mém. Ac. Paris) частное дифференцирование, писал еще просто $\frac{dA}{dx}$, $\frac{dA}{dy}$, Лежандр первый определенно противопоставил обозначению $\frac{dA}{dx}$, $\frac{dA}{dy}$ символы $\frac{\partial A}{\partial x}$, $\frac{\partial A}{\partial y}$ [Mém. Ac. Paris., 1786 (1788)].

Теорему об однородных функциях двух переменных Эйлер высказал в 1736 во втором томе «Механики». Доказательство ее было приведено в Comm. Ac. Petr. за 1734/35, вышедших только в 1740, и в «Основаниях дифференциального исчисления» (1755), в которых Эйлер распространил теорему на случай n переменных. Теорема об однородных функциях была самостоятельно найдена также А. Фонтеном. По его заявлению свое доказательство для случая n переменных он представил Парижской Академии еще в 1738, но опубликовано оно было лишь в изданных самим Фонтеном мемуарах, представленных Королевской Академии наук, но своевременно не напечатанных (Mémoires donnés à l' Académie royale des sciences, non imprimés dans leur temps, 1764).

Эйлер подверг дальнейшему исследованию с помощью дифференциального исчисления так называемые неопределенные выражения. Именно он рассмотрел случаи $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ и свел к ним еще некоторые другие. Впрочем, его трактовка вопроса с нашей теперешней точки зрения была лишена должной строгости, ибо он всегда смотрел на бесконечность как на число, с которым можно оперировать, как со всяким другим числом. Кроме того, дифференциальное исчисление получило у Эйлера многообразное применение в теории рядов. Так, не говоря уже о частом употреблении упоминавшейся нами ранее формуле суммирования Эйлера — Маклорена (см. стр. 142), Эйлер использовал его еще для вывода из уже известных рядов новых суммируемых рядов, для формального образования частного данных рядов, их степеней и т. д.

Дополнено было в XVIII столетии и учение о *максимумах* и *минимумах*. Точные правила определения экстремума функции $y=f(x)$ в случае обращения в нуль ряда высших производных были даны первоначально Маклореном в его «Трактате о флюксиях». Соответствующие правила для функций двух переменных частично приведены впервые в «Основаниях дифференциального исчисления» (1755) Эйлера, а Лагранж в Misc. Taur. за 1759 показал, как отличать максимум от минимума для функций двух или многих переменных. В «Теории аналитических функций» (1797) Лагранж распространил теоремы Маклорена на функции любого числа переменных. Для исследования условных экстремумов он там же применил называемый по его имени метод неопределенных множителей.

Мы видели, что еще Ньютон распространил вычисление неопределенных интегралов на некоторые биномиальные дифференциалы и на дифференциалы, содержащие квадратный корень из квадратного трехчлена. Он приводил такие интегралы к квадратурам конических сечений. Эти работы были продолжены учеником Ньютона Котесом, который показал, как непосредственно вычислять результаты этих квадратур с помощью логарифмических и тригонометрических таблиц, т. е. свел их к логарифмическим и круговым функциям. С этой целью он, следуя неперову способу определения логарифмов, ввел в качестве меры отношения отрезков произведение некоторой постоянной на логарифм этого отношения. Это мероопределение было затем совершенно забыто и лишь в наше время вновь обрело все свое значение в неевклидовой геометрии. «Гармония мер» заключалась для Котеса в наличии зависимости между этой мерой и мерой угловой, или же, в случае мнимого аргумента, в переходе круговой функции в логарифм. У Котеса, правда, не было еще удобного обозначения круговых функций[1]), но ему все же удалось свести к ним или соответственно к логарифмам главнейшие биномиальные и трехчленные интегралы. Издатель сочинений Котеса, Р. Смит, дополнил затем его результаты, воспользовавшись разложением $a^n \pm b^n$ на действительные множители, которое он нашел в заметках Котеса и которое с правом носит имя своего автора. Но лишь Эйлеру мы обязаны обычной для нас формой вычисления интеграла

$$\int f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})\,dx,$$

[1]) Такая символика была впервые предложена Эйлером в «Механике» (1736), где arctg был обозначен *At*. Несколько позднее [Comm. Ac. Petr., 1737 (1744)] он стал обозначать наш arcsin в виде *Asin*.

подробно разобранного им в «Основаниях интегрального исчисления» (три тома 1768/70; 2-е издание, четыре тома, 1792/94). Еще в «Трактате по интегральному исчислению» (Traité du calcul intégral, том I, 1754; том II, 1756) Л. А. де-Бугенвиля — сочинении, в котором следует видеть продолжение «Анализа бесконечно малых» Лопиталя, — обозначения были весьма громоздкими. Вычисление неопределенных интегралов тригонометрических функций также явилось в значительной мере заслугой Эйлера; в названном труде Бугенвиля не было еще и намека на эту группу интегралов. Наконец, Даламбер подошел к проблеме неопределенного интегрирования с общей точки зрения, поставив вопрос о том, каковы должны быть дифференциальные выражения, интегрируемые в конечном виде (Opuscules mathématiques, т. IV, 1768; Misc. Taur., 1766/69).

В первой трети XVIII столетия математики встретились с рядом задач, приводящих, как мы теперь говорим, к *эллиптическим интегралам*. К таким задачам пришел, правда, еще Паскаль, а Валлис исследовал некоторые из них посредством своих вычислительных методов. Однако лишь Як. Бернулли в Acta Erud. за 1691 впервые выразил в виде эллиптического дифференциала элемент дуги параболической спирали, уравнение которой в полярных координатах есть $(\rho - a)^2 = 2a\rho\Theta$; отсюда он вывел даже возможность сравнения различных частей дуги. Работы Як. Бернулли и его брата Иоганна (1695 и 1698) привели графа Дж. К. де'Тоски ди-Фаньяно к исследованиям о дугах эллипсов, гипербол и лемнискат и к открытию формул сложения этих дуг, которые он опубликовал в Giorn. de' Letterati d'Italia, 1716. Фаньяно удалось также найти алгебраический способ деления на n частей квадранта лемнискаты, когда $n = 2 \cdot 2^m$, $n = 3 \cdot 2^m$, $n = 5 \cdot 2^m$, где m — целое число. Подобным же образом, только придерживаясь еще более геометрического пути, работал Маклорен, изучивший в «Трактате о флюксиях» (1742) вопрос о сравнении и сложении дуг гиперболы. В то же самое время Даламбер [Mém. Ac. Berl., 1746 (1748)] предложил, напротив, чисто аналитический прием исследования и привел ряд отдельных эллиптических интегралов к уже известным тогда формам. Эйлер впервые увидел, что формулы сложения Фаньяно представляют собой *частные* решения особых *эллиптических дифференциальных уравнений*; по их характеру он заключил, что и общий интеграл такого дифференциального уравнения должен представляться в алгебраически-рациональном виде. Руководствуясь своей гениальной интуицией, он вскоре действительно нашел — «potius tentando vel divinando» (скорее ощупью или догадываясь) — интеграл уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{P(y)}},$$

где $P(x) = 1 - x^4$. Продвигаясь последовательно вперед, он затем решил эту задачу для случая, когда P представляет собой общий многочлен четвертой степени, для чего представил интеграл в форме с неопределенными коэффициентами, которые затем и определил. Исследования Эйлера начали публиковаться в Nov. Comm. Petr. за 1756/57 (1761) и были продолжены в следующих томах. В четвертом томе «Оснований интегрального исчисления» (1794) наряду с двумя статьями, вышедшими уже ранее, была помещена еще посмертная работа Эйлера на ту же тему. Позднейшие попытки Эйлера разработать прямой метод нахождения интеграла не удовлетворили его самого. Это лучше удалось осуществить Лагранжу в Misc. Taur. за 1766/69, что вызвало живое восхищение со стороны Эйлера и побудило его заняться дальнейшим упрощением прямого метода Лагранжа [Act. Ac. Petr., 1778 (ч. I, 1780)]. Кроме того, Эйлер распространил свой прием на значительно более общее дифференциальное уравнение

$$\frac{X\,dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{Y\,dy}{\sqrt{P(y)}},$$

где X и Y — одинаковые рациональные функции x и соответственно y, а

$$P(x) = 1 + mx^2 + nx^4, \qquad P(y) = 1 + my^2 + ny^4.$$

Благодаря этому Эйлер нашел *теорему сложения эллиптических интегралов всех трех родов* (см. стр. 163). Уже одного этого открытия было достаточно, чтобы увековечить его имя. Эйлер ясно понял, что теорема сложения может иметь место только в случае, когда $P(x)$ не выше четвертой степени, т. е., что для гиперэллиптических интегралов она несправедлива [Nov. Comm. Ac. Petr., 1766/67 (1768)]. Мы вынуждены отказаться здесь от ближайшего рассмотрения теоремы и задачи, доказательство и соответственно решение которых Эйлер предложил найти математикам в анонимной статье в Nova Acta Erud. за 1754. В теореме речь шла об алгебраическом спрямлении разности двух дуг конического сечения, а в задаче требовалось алгебраически разделить пополам четверть дуги эллипса. Сын Джулио ди-Фаньяно, Джанфранческо, посвятил этим вопросам три немаловажные работы, в которых ему частично еще помог 80-летний отец (Nova Acta Erud., 1762, 1766/67, 1770). Точно так же мы можем лишь упомянуть изыскания Ш. Боссю и Э. Безу, посвященные задаче Эйлера (статьи обоих авторов появились в Mém. prés. div. sav. Ac. Paris, 1760).

Наряду с этими исследованиями, относившимися, выражаясь геометрически, к дугам одного и того же конического сечения и увенчавшимися открытием теоремы сложения, одновременно велись и другие, посвященные вопросу о том, можно ли выразить дугу любого конического сечения через дугу другого конического сечения, т. е. говоря аналитически, вопросу о преобразовании эллиптических интегралов. Подобными изысканиями занимались в приведенных выше трудах еще Маклорен и Даламбер; последний обратился к ним, кроме того, и позднее, в IV и VII томах Opuscules mathématiques (1768 и 1780) и в Misc. Taur., 1766/69. Но и здесь наиболее плодотворные теоретические идеи были внесены Эйлером. Он предложил включить в анализ дуги конических сечений на правах новых трансцендентных, подобно дугам окружностей. Эта мысль весьма близко подводила к открытию эллиптических функций, как и теорема сложения, сходство которой с соответствующей теоремой для круговых функций не ускользнуло ни от Эйлера, ни от Лагранжа. Уравнение основного конического сечения с полупараметром 1 Эйлер [Nov. Comm. Ac. Petr., 1764 (1766)] взял в виде

$$y^2 = 2x - \frac{x^2}{a}.$$

Длину дуги он выразил интегралом, который привел к нормальной форме

$$\int \sqrt{\frac{f+gz^2}{h+kz^2}}\,dz.$$

Эйлер различал двенадцать видов этого интеграла и для каждого из них показал, как можно выразить интеграл с помощью дуг конических сечений. Примыкая к исследованиям Эйлера, классификацией этого интеграла занялся также Лексель [Act. Ac. Petr., 1778 (ч. I, 1780)]. Совершенно сходную с эйлеровой классификацию того же интеграла дал самостоятельно Дж. Мальфатти, не знавший работ Эйлера (Mem. Soc. Ital., 1784). Другие результаты в учении о преобразовании эллиптических интегралов получили Лагранж в Mém. Ac. Turin., 1784/85 (1786) и П. Феррони в сочинении «Математический этюд о вычислении интегралов» [De calculo integralium etc., Флоренция, 1792). Мысль о введении эллиптических дуг в вычисления наподобие дуг окружности была подхвачена Лежандром, и для более легкого вычисления этих дуг он дал их разложения в ряды [Mém. Ac. Paris., 1786 (1788)]. В некоторых посмертных статьях Эйлера также заключались ценные исследования о приведении интегралов к эллиптическим, а именно, были определены алгебраические кривые, которые могут быть спрямлены посредством дуг конических сечений [Nov. Act. Ac. Petr., 1787 (1789), составлено в 1776 (две статьи); Mém. Ac. Petr., 1830, составлено в 1781 (две статьи)]. Эйлер же вслед за Маклореном («Трактат о флюксиях», 1742) подробно рассмотрел в Приложении I к «Методу нахождения кривых линий и т. д.» (1744)

упругую кривую, уравнение которой

$$y=\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

содержит эллиптический интеграл; он возвратился к этому предмету и позднее [Act. Ac. Petr., 1782 (ч. I, 1786)]. Упругой кривой занимался еще Як. Бернулли (Acta Erud., 1694, 1695). Эйлер, далее, в Comm. Ac. Petr., 1732/33 (1738) разложил длину дуги эллипса в быстро сходящийся ряд [см. также Nov. Comm. Ac. Petr., 1773 (1774)].

Мы перейдем теперь к некоторым работам уже знакомого нам Дж. Ландена (Phil. Trans., 1771 и 1775; Mathematical Memoirs, I, 1780 и «Приложение» к ним). Сначала Ланден представил разность двух гиперболических дуг в виде отрезка, а затем, во второй статье, дал одно важное преобразование, с тех пор носящее его имя. Значение преобразования Ландена было надлежащим образом выявлено Лежандром; он это фактически сделал в вышеприведенной статье, еще не зная о работе Ландена, но в другой статье того же тома Mém. Ac. Paris это сделано им уже сознательно. Результат Ландена заключался в измерении любой гиперболической дуги с помощью разности дуг двух различных эллипсов.

В качестве последнего и вместе с тем важнейшего для последующего развития теории эллиптических интегралов сочинения мы отметим «Мемуар об эллиптических трансцендентных и т. д.» (Mémoire sur les transcendantes elliptiques etc.) Лежандра, вышедший отдельным изданием в 1793/94 (год II). Свое влияние эта работа оказала, впрочем, лишь после того, как основное содержание ее было включено в лежандровы «Упражнения по интегральному исчислению» (Exercices de calcul intégral, т. I, 1811). В «Мемуаре» Лежандр дал в употребляемой ныне форме классификацию эллиптических интегралов по трем родам, получившую с тех пор фундаментальное значение. Если

$$\Delta\varphi \equiv \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

то три рода эллиптических интегралов таковы:

$$\text{I.}\quad F=\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi};\qquad \text{II.}\quad G=\int(A+B\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Ко II роду принадлежат, в частности, эллиптические и гиперболические дуги.

$$\text{III.}\quad H=\int\frac{A+B\sin^2\varphi}{1+n\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Далее Лежандр привел формулы сложения и умножения интегралов I рода; он показал, что задача деления на n частей вообще зависит от алгебраического уравнения степени n^2, и разобрал преобразования интегралов всех трех родов, когда между старыми и новыми k и соответственно φ имеются определенные отношения [1]).

Все тот же великий Эйлер установил в 1769 году в Nov. Comm. Petr. (ч. I, 1770) понятие *двойного интеграла* и на различных примерах показал, как его вычислять и применять. Вслед за тем Лагранж, занимаясь проблемой притяжения сфероидальных тел, пришел к тройным интегралам [Nouv. Mém. Ac. Berl., 1773 (1775)] и рассмотрел для них вопрос о преобразовании переменных. При этом он привел формулы для случая общих криволинейных координат, которые применил при исследовании той же проблемы Лаплас («Трактат о небесной механике», 1799).

Мы помним, что понятие определенного интеграла первоначально возникло из квадратуры площадей, и уже современник Ньютона, Дж. Грегори, сумел, исходя из этих воззрений, вывести формулу приближенного вычисления определенных интегралов (см. стр. 110). Формула Грегори была впоследствии вновь открыта Т. Симпсоном в «Математических рассуждениях на физические и аналитические темы» (Mathematical Dissertations on Physical and Analytical Subjects, Лондон, 1743), и теперь ее везде называют «формулой Симпсона». В современных обозначениях она имеет вид

$$\int_0^h f(x)\,dx = \frac{h}{6n}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}].$$

Эта формула представляет собой существенное обобщение другой формулы, тоже часто называемой симпсоновой, а именно:

$$\int_0^h f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left[f(0) + 4f\left(\frac{h}{2}\right) + f(h)\right],$$

которая по геометрическому содержанию восходит еще к Торричелли (1644) и которую рассмотрел в «Гармонии мер» Котес (1722). В «Основаниях интегрального исчисления» (т. I, 1768) Эйлер для приближенного вычисления интеграла предложил прием, основывавшийся, по существу, на первоначальном определении определенного интеграла как суммы элементов, совершенно оставленном в тот период формального развития интегрального исчисления. Однако ни Эйлер, ни кто-либо другой из его современников ни-

[1]) Из дневника Гаусса, найденного П. Штекелем и опубликованного в 1901 Ф. Клейном в Festschrift d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, мы знаем, что уже в юношеском периоде Гаусс глубоко проник в теорию эллиптических интегралов. Но некоторые рукописные фрагменты Гаусса по этим вопросам были опубликованы лишь после его смерти.

когда не определяли понятие об определенном нитеграле в таком духе. Для Эйлера интегральное исчисление было только методом отыскания соотношения между самими величинами по данному соотношению между их дифференциалами. Определенный интеграл он получал из неопределенного, подставляя фиксированные значения вместо переменных; поэтому он никогда не писал пределов интегрирования. Когда нужно было взять интеграл в определенных пределах, то это по большей части выражалось словами. В позднейшие годы жизни Эйлер писал также

$$\int P\,dx \begin{bmatrix} \text{ab}\, x = a \\ \text{ad}\, x = b \end{bmatrix},$$

что обозначало наш $\int\limits_a^b P\,dx$ (ср., например, его Opuscula analytica, т. II, 1785, стр. 17).

Тем не менее Эйлер исследовал ряд настоящих *определенных интегралов;* мы уже видели это, когда речь шла о функциях бэта и гамма (стр. 141). Кроме того, в ряде статей, появившихся, главным образом, в Commentarii и в Acta Петербургской Академии, Эйлер вычислил множество труднейших определенных интегралов. Мы приведем для примера интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{(x-1)\,dx}{\ln x} = \ln 2,$$

который Эйлер сообщил в 1775 Лагранжу, чем дал последнему повод, со своей стороны, предложить Эйлеру два других подобных интеграла. Вычислением определенных интегралов занимался, правда, лишь при случае, и Лаплас. В известном нам уже «Мемуаре о вероятностях» [Mém. Ac. Paris, 1778 (1781), ср. стр. 97] он применил интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^{2r}} dt.$$

При $r = 1$ и четном m он нашел, что

$$\int\limits_0^\infty t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n} \int\limits_0^\infty e^{-t^2} dt,$$

а значение последнего интеграла, играющего большую роль и в современной теории вероятностей, равное $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, он получил путем приведения его к некоторому двойному интегралу[1]). Так как мы вынуждены отказаться даже от изложения соответствующих работ Эйлера, то отдельные результаты других математиков здесь не заслуживают упоминания.

Мы должны особо остановиться на интеграле

$$\operatorname{li}(x)=\int_0^x \frac{dx}{\ln x}=\int_{-\infty}^{\ln x}\frac{e^t dt}{t},$$

называемом со времени Зольднера (1811) «*интегральным логарифмом*». В «Основаниях интегрального исчисления» (т. I, 1768) Эйлер разложил $\operatorname{li}(e^{-x})$ в ряд

$$\operatorname{li}(e^{-x})=C+\ln x-\frac{x}{1\cdot 1!}+\frac{x^2}{2\cdot 2!}-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots,$$

где C снова представляет собой так называемую постоянную Эйлера (ср. стр. 142). Л. Маскерони, именовавший интегральный логарифм «гиперлогарифмом», вычислил с помощью этого ряда в первой части своих «Примечаний к интегральному исчислению Эйлера и т. д.» (Adnotationes ad calculum integralem Euleri etc., 1790/92) 32 десятичных знака постоянной C, из которых, впрочем, правильными оказались только 19. Функция $\operatorname{li}(x)$ очень важна потому, что разность

$$\operatorname{li}(x)-\operatorname{li}(2)$$

асимптотически выражает число простых чисел, меньших x.

В 1849 Гаусс сообщил астроному Энке, что мысль об этом возникла у него еще в 1792/93, когда он был мальчиком 15—16 лет. Эта догадка сходна с известным предположением Лежандра (см. стр. 80).

При вычислении различных определенных интегралов встретились некоторые затруднения, которые теперь разрешают с помощью комплексных переменных и интегрирования по пути в комплексной области. Как мы знаем, комплексные переменные при интегрировании применили уже Лейбниц и Иог. Бернулли (стр. 23), а Даламбер [Mém. Ac. Berl., 1746 (1748)] утверждал не только то,

---

[1]) Этот результат не был, собственно говоря, нов. В самом деле, при подстановке $z=e^{-t^2}$ он вытекает из равенства

$$\int_0^1(-\ln z)^{-\frac{1}{2}}dz=\sqrt{\pi},$$

установленного еще в первом томе «Механики» Эйлера (1736).

что всякое аналитическое выражение, зависящее от $x+iy$, можно привести к виду $p+iq$, но даже что дифференциал $f(x+iy)\,d(x+iy)$ всегда можно представить в форме $dp+idq$. Мы говорили выше и об этом. Эйлер, несомненно, знавший работы Даламбера, указал как на основной в учении о мнимых величинах факт, что если $\varphi(x+iy)=M+iN$, то $\varphi(x-iy)=M-iN$. Это свойство он использовал [см. четыре статьи от 1777 в Nov. Ac. Petr., 1789 (1793, две статьи), 1792 (1797), 1797/98 (1805)], чтобы посредством подстановки $z=x+iy$ и отделения действительной и мнимой частей получить из интеграла

$$\int Z(z)\,dz=V(z),$$

где $Z=M+iN$ и $V=P+iQ$, действительные интегралы

$$\int M\,dx-N\,dy=P,\qquad \int N\,dx+M\,dy=Q.$$

Его весьма поразило при этом, что он неизменно находил таким образом две функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{\partial N}{\partial x},\qquad \frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial y}. \tag{A}$$

Впрочем, еще Даламбер в «Опыте новой теории сопротивления жидкостей» (Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides, Париж, 1752), занимаясь одной гидродинамической задачей, нашел, что если M и N образуют действительную и мнимую части комплексной функции, то обязательно имеют место уравнения (A). Эйлер применил этот метод интегрирования уже в своей фундаментальной работе по гидродинамике в Mém. Ac. Berl., 1755 (1757), а Лагранж использовал его для конформного отображения на плоскость поверхности вращения [Nouv. Mém. Ac. Berl., 1779 (1781)]. В первом томе своих «Математических сочинений» (1761) Даламбер заметил связь между комплексными функциями и уравнением

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Хотя уже Клеро («Теория фигуры Земли и т. д.» — Théorie de la figure de la terre etc., 1743) рассмотрел интеграл $\int P\,dx+Q\,dy$, взятый вдоль кривой, а еще ранее того привел необходимые условия, чтобы $P\,dx+Q\,dy$ было полным дифференциалом [Mém. Ac. Paris, 1740 (1742)], Эйлер в названной работе не смог предпринять с этими уравнениями и интегралами ничего дальнейшего. Это объяснялось тем, что он, как мы уже говорили, не привык рассматривать интеграл как бесконечную сумму; подстановку $z = v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ он производил собственно для того, чтобы получать интегралы функций *одной* переменной. В другой статье 1777 [опубликована в Nov. Act Ac. Petr., 1794 (1801)] он разобрал примеры, в которых $V(z) = \ln(1 \pm z)$ или $\ln(1 - 2z\cos\alpha + z^2)$ или $\operatorname{arctg}\frac{z\sin\alpha}{1 - z\cos\alpha}$, и для того, чтобы отделить здесь действительную часть от мнимой, ему пришлось применить «немало остроумия». Особенно плодотворным оказался этот метод, когда Эйлер положил в определяющем уравнении Г-функции $x = ky$, где k — комплексное число (опубликовано в «Основаниях интегрального исчисления», т. IV, 1794, но написано еще в 1781). Прежде всего он получил два довольно общих определенных интеграла, зависящих от Г-функции, а затем вывел из них несколько более частных, среди которых отметим

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

найденный им посредством смелого предельного перехода.

Еще несколько ранее Лаплас [«Мемуар о приближениях формул, являющихся функциями очень больших чисел» — Mém. Ac. Paris, 1783 (1786)] пришел к интегралам с мнимыми пределами, которые он искусно свел к интегралам с действительными пределами. Лаплас определенно подчеркивал необходимость последующего доказательства, протекающего в области действительных величин. Теория функций комплексного переменного выросла из этих уже наличных ростков только в XIX столетии[1]).

[1]) Подробности см. в книге А. И. Маркушевича, указанной в списке литературы. — *Прим. ред.*

ГЛАВА ВОСЬМАЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Различные проблемы, занимавшие математиков в конце XVII и начале XVIII столетий, привели к разнообразным дифференциальным уравнениям первого порядка. Интегрирование их прежде всего попробовали осуществить с помощью функций, выражающихся конечным числом алгебраических действий или уже содержащих элементарные трансцендентные. Именно так еще Ньютон в «Началах» (1687) решил одно линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Но вскоре нашли, что в таком виде проблема интегрирования дифференциальных уравнений вообще неразрешима и к делу привлекли также неопределенные интегралы, т. е. стали искать решение дифференциальных уравнений в квадратурах. Например, Эйлер в Comm. Ac. Petr., 1732/33 (1738) привел решение уравнения

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x}=\frac{x}{x^2-1}$$

к спрямлению эллипса. Первым приемом интегрирования дифференциальных уравнений, естественно, оказалось *отделение переменных*. В «Математических лекциях о методе интегралов» (1691/92, опублик. 1742; ср. Acta Erud., 1694) Иоганн Бернулли применил в отдельных случаях *интегрирующий множитель*, который он использовал также для решения одного линейного уравнения n-го порядка, о чем будет идти речь ниже. Ш. Рейно, познакомившийся с этим приемом по экземпляру лекций Бернулли, имевшемуся у Лопиталя, опубликовал его в своем «Доказанном анализе» (Analyse démontrée, 1708). С помощью подстановки $y=xt$ И. Бернулли решил, далее, *однородное* уравнение первого порядка; эта подстановка, впрочем, была известна Лейбницу еще до 1693. Однако в опубликовании этого приема Лейбница и Бернулли опередил итальянец Г. Манфреди (Giorn. de'Letterati d'Italia, 1714). В Acta Erud., 1697 И. Бернулли проинтегрировал уравнение, часто называемое по его имени,

$$a\,dy = yp\,dx + by^n q\,dx,$$

где a и b — постоянные, а p и q — функции одного x. Для этого он представил y в виде произведения двух новых переменных и показал, что при подстановке $y^{1-n} = v$ это уравнение переходит в *линейное* дифференциальное уравнение первого порядка. Лейбниц отметил это обстоятельство еще раньше, в марте 1696 (Acta Erud.).

В том же году (июльская тетрадь Acta Erud.) результат решения этого уравнения привел также Як. Бернулли. Прием Иоганна Бернулли по существу был тождественен с методом вариации постоянных. Наконец, уже к 1700 И. Бернулли решил линейное дифференциальное уравнение

$$0 = y + Ax\frac{dy}{dx} + Bx^2\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + Qx^n\frac{d^ny}{dx^n},$$

последовательно понижая порядок с помощью интегрирующего множителя вида x^p.

Итальянец граф Дж. Риккати присоединил к этим разрозненно применявшимся методам еще некоторые иные. Так, в одной работе в Giorn. de'Letterati d'Italia, 1715 он привел способ понижения порядка дифференциального уравнения второго порядка, содержащего явно лишь *одну* из переменных, посредством замены y'' на $y'\dfrac{dy'}{dy}$. Еще ранее этот способ был, правда, употреблен Як. Бернулли, но соответствующая статья швейцарского математика увидела свет лишь в 1744, во втором томе его «Сочинений». Риккати, далее, впервые методически исследовал одно важное уравнение, которое носит его имя и которое он привел (Acta Erud., Suppl. VIII, 1724) в виде

$$x^n\frac{dq}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{u^2}{q}.$$

Здесь u и q первоначально представляли собой любые функции x и y, но затем Риккати положил $q = x^n$. К этому же уравнению он пришел, стараясь привести к уравнению первого порядка дифференциальное уравнение $x^n d^2x = d^2y + dy^2$; эту мысль развил затем в различных направлениях Даламбер [Mém. Ac. Berl., 1763 (1770)]. Там же самым уравнением задолго до Риккати неоднократно, но безуспешно занимался в своей переписке с Лейбницем Як. Бернулли. Самому Риккати были хорошо известны случаи, в которых его уравнение решается путем отделения переменных, хотя в опубликовании этого результата его опередил второй сын Иог. Бернулли — Даниил («Некоторые математические этюды» — Exercitationes quaedam mathematicae, Венеция, 1724). Уравнением Риккати занимались также отец Даниила — Иоганн, его двоюродный брат Ник. I Бернулли, его брат Николай II (см. Suppl. VIII к Acta Erud., 1724) и Хр. Гольдбах [Comm. Ac. Petr., 1726 (1728)]. Впрочем, они не добились чего-либо существенно нового. Лишь Эйлер нашел, что если известен частный интеграл v более общего дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)y^2+\psi(x)y+\chi(x)$$

[это уравнение Даламбером в письме к Лагранжу от июня 1769 было названо *уравнением Риккати*; ср. Mém. Ac. Berl., 1763 (1770)], то подстановка $y=v+\frac{1}{z}$ переводит его в линейное дифференциальное уравнение [Nov. Comm. Ac. Petr., 1760/61 (1763), 1762/63 (1764)]. Эйлер же показал, что когда известны два частных решения, то интегрирование уравнения Риккати требует только квадратуры. Обобщенное уравнение Риккати встречалось у Эйлера еще в Comm. Ac. Petr., 1738 (1747). Решение простого уравнения Риккати с помощью рядов Эйлер дал там же еще в 1732/33 (1738).

С уравнения Риккати начинается методическая разработка теории дифференциальных уравнений. В 1732 вышла пролагавшая в этом направлении пути статья Эйлера о трех новых классах дифференциальных уравнений второго порядка (Comm. Ac. Petr., 1728). Эйлер изложил в ней новый метод, позволявший с помощью показательных функций понижать на единицу порядок некоторых однородных уравнений. Позднее этот прием привел Эйлера к единому алгорифму решения *линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами*. Решением однородных уравнений этого класса Эйлер обладал уже в 1739, как это видно из одного письма к Иоганну Бернулли. Получив решение, по-видимому, почти одновременно с Дан. Бернулли [ср. Comm. Ac. Petr., 1741/43 (1751)], Эйлер обнародовал его, однако, только в 1743 в Miscell. Berol. При этом он впервые ввел здесь понятия *частного* и *общего интегралов*. В решении неоднородного линейного уравнения Эйлера опередил в некоторой мере Даламбер. Именно, в 1747 (опубликовано в 1750 в Mém. Ac. Berl. за 1748) Даламбер, в дополнение к своему важному исследованию систем дифференциальных уравнений, к которому мы обратимся позднее, очертил весьма общий метод, ведущий к цели и в случае неоднородного линейного уравнения. Метод Даламбера состоял в приведении решения уравнения высшего порядка к решению системы совместных дифференциальных уравнений первого порядка.

Вслед за тем Эйлер дал подробное решение неоднородного уравнения, в котором разобрал все возможные здесь случаи [Nov. Comm. Ac. Petr., 1750/51 (1753)]. Прием Эйлера заключался в следующем. Он умножал уравнение, например,

$$X = Ay + By' + Cy''$$

на $e^{\alpha x}$, а затем принимал, что его интеграл имеет вид

$$\int e^{\alpha x} X\,dx = e^{\alpha x}(A'y + B'y'),$$

где A' и B' — неопределенные коэффициенты. Дифференцируя последнее выражение и почленно сравнивая результат с данным дифференциальным уравнением, он определял три постоянные A', B', α. Тем самым задача сводилась к решению уравнения

$$e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X\,dx = A'y + B'y',$$

порядок которого на единицу ниже, чем у начального. Таким же путем понижался порядок вновь возникшего уравнения и т. д. Исследование линейного дифференциального уравнения было завершено в работах Даламбера [Misc. Taurin., 1762/65 (1766)], Лагранжа [там же и Nouv. Mém. Ac. Berl., 1775 (1777)] и в одной статье Лапласа (Misc. Taur., 1766/69). В мемуаре 1775 Лагранж разработал так называемый метод *вариации постоянных* и, в частности, приложил его к решению неоднородного линейного дифференциального уравнения. Заметим, что метод вариации постоянных был известен Эйлеру, судя по одному его письму к Иог. Бернулли, еще в начале 1739 (ср. стр. 170). В конкурсном сочинении о приливах и отливах от 1740 [1]) Эйлер решил с его помощью уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = X;$$

одновременно и независимо это сделал, как явствует из переписки, Дан. Бернулли. Эйлер применил метод вариации постоянных также в Comm. Ac. Petr., 1739 (1750), а в премированном в 1748 конкурсном сочинении о неравенствах в движении Юпитера и Сатурна решил с его помощью уравнение возмущенного движения [2]). Подробнее изложил этот прием Эйлер в Mém. Ac. Berl., 1747 (1749). В другой конкурсной работе о возмущениях планетных

---

[1]) «Физическое исследование причины морских приливов и отливов» (Inquisitio physica in causam fluxus ac refluxus maris). Помещено в томе Pièces qui ont remporté le prix... en MDCCXL (Париж, 1741) и в Recueil de pièces qui ont remporté etc. (четыре тома, 1752).

[2]) «Исследования по вопросу о неравенствах в движении Сатурна и Юпитера и т. д.» (Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter etc., Париж, 1749).

орбит[1]) (премированной в 1756, а опубликованной в 1771) Эйлер приложил тот же прием к исследованию вариации всех шести элементов, определяющих движение планеты. Совершенно сходный способ употребил Лаплас в Mém. Ac. Paris, 1772 (ч. 1, 1775).

В упомянутой работе в Misc. Taur. за 1762/65 (1766) Лагранж решил уравнение

$$X=y+A(x+h)\frac{dy}{dx}+A'(x+h)^2\frac{d^2y}{dx^2}+A''(x+h)^3\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots,$$

где h, A, A', A'',... суть постоянные. Примыкая к этому решению, Лаплас (Misc. Taur., 1766/69) занялся более общим уравнением вида

$$X=y+H\frac{dy}{dx}+H'\frac{d^2y}{dx^2}+H''\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots,$$

где X, H, H', H'',... суть функции x. Он показал, что если известны $n-1$ частных решений некоторого другого, нелинейного уравнения, то общий интеграл приведенного уравнения тотчас получается с помощью квадратур. При $n=2$ вспомогательное уравнение оказывается уравнением Риккати. Если, например, дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$X=y+H\frac{dy}{dx}+H'\frac{d^2y}{dx^2},$$

то достаточно знать лишь одно частное решение уравнения Риккати,

$$\frac{dw}{dx}=-\left(1-\frac{Hw}{H'}+\frac{w^2}{H'}\right),$$

чтобы немедленно получить с его помощью общий интеграл первого уравнения посредством интегрирования двух линейных уравнений первого порядка.

Для дифференциального уравнения

$$a=a_0y+a_1y'+a_2y''+\ldots+a_ny^{(n)},$$

где a не зависит от y, y', ...$y^{(n)}$, Лагранж высказал теорему, что если известны m частных решений более простого уравнения

$$0=a_0y+a_1y'+\ldots+a_ny^{(n)},$$

то решение первого уравнения приводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения $(n-m)$-го порядка. Это приведение, возможность которого была указана Лагранжем, конкретно осуществил в названной выше работе Даламбер.

---

[1]) «Исследование возмущений, которые испытывает движение планет от их взаимодействия» (Investigatio perturbationum quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur, в 8-м томе Recueil de pièces etc).

Возвращаясь к дифференциальным уравнениям первого порядка, которые мы оставили на уравнении Риккати, укажем, что метод *интегрирующего множителя*, примененный к решению их в отдельных случаях еще Иог. Бернулли, а затем и его сыном Николаем II (Acta Erud., 1720), был вновь открыт почти одновременно А. Клеро [Mém. Ac. Paris, 1739 (1741) и 1740 (1742)] и Эйлером [Comm. Ac. Petr., 1732/33 (1739) и 1734/35 (1740); Nov. Comm. Petr., 1760/61 (1763) и 1772 (1773)]. В своих «Основаниях интегрального исчисления» (тома I и II, 1768/69) Эйлер подверг его тщательной разработке. Впрочем, доказательство существования интегрирующего множителя у всякого дифференциального уравнения первого порядка дал впервые Даламбер в т. IV Opuscules mathématiques (1768). Главная же заслуга Эйлера заключалась в установлении классов дифференциальных уравнений, обладающих интегрирующим множителем заданной формы. С теорией интегрирующего множителя был, разумеется, тесно связан вопрос об условиях интегрируемости дифференциальных выражений от двух или многих переменных; этот вопрос возник, главным образом, из задачи о траекториях. Изучением этих условий занимались как Клеро, так и Эйлер; последний привел интегрирование таких дифференциальных выражений к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений.

В третьем томе «Оснований интегрального исчисления» (1770) Эйлер распространил понятие интегрирующего множителя на уравнения n-го порядка. Теория Эйлера основывалась на определении условий, при которых «дифференциальная функция n-го порядка» $V(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ является полной производной дифференциальной функции $(n-1)$-го порядка $W(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Такие условия были найдены Эйлером с помощью вариационного исчисления еще в Nov. Comm. Ac. Petr., 1764 (1766), а независимо от него приведены в сочинении Кондорсе «Об интегральном исчислении» (Du calcul intégral, Париж, 1765). Позднее их получили прямым путем финляндец А. И. Лексель [Nov. Comm. Ac. Petr., 1770 (1771)] и др. При выполнении соответствующих условий W находится простой квадратурой. Хотя дифференциальные уравнения в частных производных, которым удовлетворяет интегрирующий множитель, довольно сложны, Эйлер все же дал некоторые применения интегрирующего множителя к уравнениям второго и третьего порядков. Это относится также к Лекселю [Nov. Comm. Petr., 1771 (1772)]. Приложение того же приема к линейным уравнениям n-го порядка привело Лагранжа к открытию «сопряженного уравнения» для интегрирующего множителя, сопряженным с которым в свою очередь является первоначальное уравнение [Misc. Taur., 1762/65 (1766)].

Замечательно, что дифференциальные уравнения с тремя переменными, не удовлетворяющие условию интегрируемости, долгое время считали нелепыми, пока Г. Монж не дал их геометрической интерпретации и не показал тем самым, что и они обладают реальным значением [Mém. Ac. Paris, 1784 (1787)]. Подобные уравнения рассматривал в своем «Методе флюксий» еще Ньютон, но затем его совершенно правильные взгляды были полностью забыты. Очень странно, что Эйлер, неоднократно занимавшийся интегрированием уравнения $ds^2=dx^2+dy^2$ (решение которого в несколько отличном виде дал ранее Иоганн Бернулли в Acta Erud. за 1724), был твердо уверен в абсурдности дифференциальных уравнений вида $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$, когда они не удовлетворяют условию интегрируемости. Решение уравнения дифференциала дуги Эйлер дал еще в Comm. Ac. Petr., 1730/31 (1738), а вывод приведенных там формул сообщил в Nov. Comm. Ac. Petr., 1754/55 (1760).

Особое решение дифференциального уравнения впервые встречается в «Методе приращений» (1715) Тейлора. Тейлор хотя и получил его посредством дифференцирования данного дифференциального уравнения, однако не понял его значения. Данное Тейлором полученному решению название — «некоторое особое решение» («singularis quaedam solutio»), из которого позднее возник термин «особое решение», объяснялось просто тем, что решение казалось ему необыкновенным. После того Клеро, продифференцировав дифференциальное уравнение, носящее его имя, также нашел его особое решение [Mém. Ac. Paris, 1734 (1736)]. Он установил, что это решение не содержится в общем интеграле уравнения, но для него осталось еще неизвестным, как особое решение получается из общего. При этом Клеро все же видел, что прямые линии, представляющие общее решение, огибают кривую, соответствующую особому решению; это геометрическое свойство служило даже для него исходным пунктом. Под влиянием статьи Клеро Даламбер вывел таким же путем особое решение более общего дифференциального уравнения

$$y=x\varphi(y')+\psi(y')$$

[Mém. Ac. Berl., 1748 (1750) и Mém. Ac. Paris, 1769 (1772)]. Это уравнение, называемое уравнением Даламбера, было, как можно заключить по одному письму к Лейбницу, проинтегрировано еще в 1694 Иоганном Бернулли.

Эйлер рассмотрел ряд дифференциальных уравнений с особыми решениями еще во втором томе своей «Механики» (1736). После того он в 1756 специально занялся двумя парадоксальными, на его взгляд, обстоятельствами, заключавшимися в том, что такое решение уравнения можно получить путем дифференцирования и что оно не содержится в общем решении [Mém. Ac. Berl., 1756 (1758)]. Но хотя Эйлер геометрически построил ряд дифференциальных уравнений с особыми решениями, он не заметил, что последние дают огибающие семейств кривых, выражающихся общим решением, а просто считал получающееся в таких случаях общее решение недостаточным. Позднее, в первом томе «Оснований интегрального исчисления» (1768), Эйлер установил первый общий признак, позволяющий определить, принадлежит или нет данное решение дифференциального уравнения к числу частных решений. Но и тогда он не проник глубже в природу особых решений, все еще представлявшихся ему парадоксальными; он не имел для них и специального названия. Однако работы Эйлера возбудили к этому предмету общий интерес. Уже в одной работе, помещенной в Mém. prés. div. sav. Ac. Paris, 1774, а также в последующей[1]) статье в Mém. Ac. Paris, 1772 (ч. I, 1775), Лаплас привел еще два критерия для определения характера какого-либо данного решения дифференциального уравнения и предложил методы нахождения особых интегралов.

Лагранжа, по его собственным словам, побудили обратиться к этой актуальной тогда проблеме непосредственно исследования Лапласа. Уже в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1774 (1776) Лагранж опубликовал обширную статью, которая впервые, насколько это было возможно в его время, исчерпывающе трактовала вопрос. Показав прежде всего, как можно найти особое решение либо прямо из дифференциального уравнения, либо из общего интеграла посредством дифференцирования по постоянной, он затем совершенно ясно проанализировал геометрическую зависимость между частными интегральными кривыми и кривой особого решения. Тем самым он, наконец, связал дифференциальные уравнения с давно известной и подробно разработанной теорией огибающих. В другой статье того же журнала [1779 (1781)] Лагранж значительно расширил круг своих занятий, включив в него вопрос о геометрическом смысле особых решений дифференциальных уравнений высших порядков и уравнений с частными производными. Впоследствии выяснилось, что условия существования особого решения, выведенные им как из дифференциального уравнения, так и из уравнения его интеграла, являлись только необходимыми, но не достаточными. Напротив, парадоксы Эйлера получили у Лагранжа окончательное объяснение. Систематическое и основанное на единой точке зрения изложение всех тогдашних сведений об особых решениях обыкновенных дифференциальных уравнений Лагранж дал в «Лекциях об исчислении функций» (1801)[2]), в которых присоединил также кое-что новое. Так, Лагранж доказал здесь теорему, выставленную еще Кондорсе (Misc. Taur., 1766/69), а потом снова

---

[1]) Это статья была более поздней, чем первая, на которую автор в ней ссылался.

[2]) Отдельное издание «Лекций» (Leçons sur le calcul des fonctions) вышло в 1806. Эти «Лекции» впервые были напечатаны в Séances Éc. norm. и вторично в Journ. Éc. polyt., XII (1804).

приведенную Эйлером («Основания интегрального исчисления»), о том, что для особого решения интегрирующий множитель дифференциального уравнения обращается в бесконечность. Он дал новое, получившее впоследствии большое значение правило нахождения особого решения (если таковое существует) уравнения первого порядка и показал, как можно распространить это правило на уравнения высших порядков. Далее, Лагранж развил метод получения дифференциального уравнения, для которого данная кривая $y=\varphi(x)$ является особым решением. При этом он получил обширный класс дифференциальных уравнений, обладающих заданными особыми решениями. Именно, он доказал следующую теорему: если $F(x, y, a, b, c, \ldots)=0$ представляет собой любую функцию с произвольными постоянными $a, b, c, \ldots$ и если подставить значения $a, b, c, \ldots$, определяемые уравнениями $F(x, y)=0$, $F'(x, y)=0$, $F''(x, y)=0, \ldots$ и выраженные через $x, y, y', y'', \ldots$, в любое уравнение $\Phi(a, b, c, \ldots)=0$, то полученное таким образом дифференциальное уравнение будет иметь особое решение. Следует заметить, что «Лекции» Лагранжа ввели в математику термин «особое решение» в противоположность термину «частное решение»; только у Лагранжа это решение называлось «особое примитивное уравнение» («équation primitive singulière»).

Мы упоминали, что уже Даламбер свел решение неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами к решению n совместных дифференциальных уравнений [Mém. Ac. Berl., 1748 (1750)]. К такой трактовке этих дифференциальных уравнений Даламбера привело, вероятно, рассмотрение дифференциальных уравнений динамики

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

из которых первые два встречались еще в «Трактате о флюксиях» 1742) Маклорена. Действительно, в указанной статье Даламбер первый подверг исследованию такие уравнения. Он начал с простейшего случая линейной системы с постоянными коэффициентами

$$dx+(Cx+Dy)\,dt=0, \quad dy+(Kx+Ly)\,dt=0,$$

затем перешел к трем уравнениям, построенным таким же образом, и, наконец, разобрал еще неоднородные уравнения

$$T'A\,dx+T'B\,dy+T''\,dt\,(Cx+Dy)+\theta\,dt=0,$$
$$T'F\,dx+T'G\,dy+T''\,dt\,(Kx+Ly)+\theta'\,dt=0,$$

в которых T', T'', θ, θ' суть функции t. Метод Даламбера, который он применил в одном частном случае еще в «Трактате по динамике» (Traité de dynamique, 1743), употребляется и теперь; он заключается в применении постоянных множителей. Даламбер увидел также возможность распространения этого метода на систему n уравнений. Тридцать лет спустя, в т. VII Opuscules mathématiques (1780) Даламбер еще раз обратился к тому же приему и показал, что если принять в качестве множителей произвольные функции, то при некоторых условиях прием приводит к цели и для более сложных уравнений. В «Трактате по динамике» Даламбер сообщил также способ интегрирования уравнений движения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha_i x+\beta_i y+\gamma_i z=T_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

в случае, когда α_i, β_i, γ_i суть постоянные, а T_i — функции t. Примыкая к этому, Лексель показал, как решаются уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha_i\frac{dx}{dt}+\beta_i\frac{dy}{dt}+\gamma_i x+\delta_i y=T_i \quad (i=1,\ 2)$$

[Act. Ac. Petr., 1777 (ч. I, 1778)]; в Act. Ac. Petr. за 1779 (ч. II, 1783) он решил еще более общую систему.

Попытки применить основные уравнения механики к задачам теории планетных движений, именно, к задаче трех тел, сразу привели к изобретению *приближенных методов* решения дифференциальных уравнений. Эксцентриситеты планетных орбит, наклон их к эклиптике и действия сил тяготения в теории возмущений представляют собой очень малые величины. Поэтому со времени выхода «Исследований о системе мира» (1754) Даламбера (см. стр. 151) пришли к мысли рассматривать в качестве приближенных решений круговые орбиты, а затем исправлять эти приближения с помощью рядов, расположенных по возрастающим степеням указанных малых величин. Бесконечные ряды такого характера вводились по-разному: либо пользовались способом, придуманным еще Ньютоном для приближенного решения алгебраических уравнений: так поступали сначала Даламбер, затем Эйлер в «Теории Луны» [Théorie de la Lune, в Recueil d. pièces cour. de Paris, 1770 (1777)] и Кондорсе в Mém. Ac. Paris, 1769 (1772), 1770 (1773), 1771 (1774), — либо же прямо вводили ряды с неопределенными коэффициентами, которые старались определить по дифференциальному уравнению. Эйлер разработал первый метод в указанном выше конкурсном сочинении о теории движения Луны и изложил его в первом томе «Оснований интегрального исчисления» (1768) следующим образом.

Если

$$\frac{dy}{dx}=V(x,\ y)$$

есть дифференциальное уравнение первого порядка и $y=b$ при $x=a$, то при $x=a+\omega$, где ω сколь угодно малая величина,

$$y=b+\omega\frac{dy}{dx}+\frac{\omega^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\omega^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots$$

При этом в значения дифференциальных частных, получаемые из дифференциального уравнения, следует подставить величины $x=a$, $y=b$. Если обозначить найденное таким путем приближенное значение b' и положить $a+\omega=a'$, то при $x=a'+\omega'$ точно так же получается

$$y=b'+\omega'\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\omega'^2}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\ldots,$$

где в дифференциальные частные следует теперь подставить $x=a'$, $y=b'$ и т. д. Эйлер получает, таким образом, последовательность приближенных значений y для $x=a$, $a+\omega$, $a+2\omega$ и т. д. Он довольствуется при этом замечанием, что для достаточно малых значений ω ряды быстро сходятся. В другой главе того же труда (т. II, 1769) он показал, как распространить этот метод на общие дифференциальные уравнения второго порядка, к частным случаям которых он применил его уже в вышеупомянутых астрономических работах.

Если дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2}=V(x, y, p) \qquad \left(p=\frac{dy}{dx}\right)$$

и если $p=c$ при $x=a$, $y=b$, то можно положить

$$p=c+(x-a)V-\int\limits_a^x(x-a)\,dV$$

и

$$dV=P\,dx+Q\,dy+R\,dp=(P+Qp+RV)\,dx.$$

Если принять сначала, что множитель при dx есть постоянная, то

$$p=c+(x-a)V_a-\frac{1}{2}(P+Qc+RV_a)(x-a)^2,$$

а отсюда получается приближенное значение y для $x=a+\omega$:

$$y=b+(x-a)c+\frac{1}{2}V_a(x-a)^2-\frac{1}{6}(P+Qc+RV_a)(x-a)^3.$$

Здесь V_a представляет собой значение, которое принимает V при

$x=a$, $y=b$, $p=c$. Полагая теперь

$$x=a+\omega=a',$$

$$b'=b+c\omega+\frac{1}{2}V_a\omega^2-\frac{1}{6}(P+Qc+RV_a)\omega^3,$$

$$c'=c+V_a\omega-\frac{1}{2}(P+Qc+RV_a)\omega^2,$$

мы можем немедленно получить таким же образом приближенное значение y, соответствующее $x=a'+\omega$, и т. д. Эйлер рассматривает также исключения, которые могут встретиться при употреблении этого правила в некоторых случаях, и указывает, какие следует тогда соблюдать меры предосторожности.

Для решения уравнений возмущенного движения Лагранж применил в Misc. Taur., 1762/65 (1766) несколько иной метод, разработанный далее Кондорсе. Если при замене одной из упомянутых выше малых величин на нуль из данного дифференциального уравнения возникает линейное или какое-либо другое интегрируемое уравнение, то общий интеграл последнего дает первое приближение $y=y_1$ для решения исходного уравнения. Подставляя затем в исходное уравнение $y=y_1+\omega y'$, мы после деления на ω получаем дифференциальное уравнение того же порядка, служащее для определения y', и т. д. В конце концов интеграл находится в виде $y=y_1+\omega y'+\omega^2 y''+\ldots$ Однако при пользовании этими методами в случае уравнений возмущенного движения интегралы получались в форме рядов, расположенных по степеням x, между тем как x вообще не входил явно в дифференциальные уравнения. Лагранж попытался устранить этот недостаток, приспособив к приближенному решению таких дифференциальных уравнений метод вариации постоянных. Сжато очертил он свой прием в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1775 (1777). После того как Лаплас употребил без особого успеха этот способ в Mém. Ac. Paris, 1777 (1780), Лагранж в обширной статье в Nouv. Mém. Berl., 1781 (1783) приложил его к системе совокупных уравнений второго порядка, а в заключение дал подробное его обоснование в том же журнале за 1783 (1785). Но вскоре Ж. Трамблей показал, что старания обойти первоначальный метод с помощью вариации постоянных оказываются излишними, если воспользоваться показательными функциями с мнимыми показателями [Nouv. Mém. Berl., 1786/87 (1792)].

Второй названный нами способ приближенного решения дифференциальных уравнений посредством рядов с неопределенными коэффициентами многократно и чрезвычайно искусно применял Эйлер, например, в Nov. Comm. Ac. Petr., 1752/53 (1758), 1764 (1766) и в «Основаниях интегрального исчисления», (1768/69). За ним последовали Даламбер, Кондорсе, Лагранж и др. Эйлеру, между прочим, удалось найти с помощью этого приема и конечные интегралы различных специальных дифференциальных уравнений первого и высшего порядков. Он, именно, исследовал случаи, когда ряды обрываются или же когда их можно как-либо просуммировать, например, с помощью определенных интегралов. Применяя свой метод, Эйлер разложил в ряды также некоторые новые функции и среди них цилиндрические [Nov. Comm. Ac. Petr., 1764 (1766)], которые впоследствии назвали «бесселевыми функциями», так как их с успехом использовал астроном Бессель. Мы еще встретимся с ними в параграфе о дифференциальных уравнениях с частными производными.

Мысль представлять решения дифференциальных уравнений в виде *определенных интегралов* впервые возникла опять-таки у Эйлера. Еще в Comm. Ac. Petr., 1736 (1741) он выразил интеграл одного дифференциального уравнения с помощью дуги эллипса. Эйлер собственно ставил здесь обратную задачу, сформулированную затем весьма общим образом в главе X книги I второго тома его «Оснований интегрального исчисления», носившей весьма характерный заголовок «О построении дифференциальных уравнений 2-го порядка с помощью квадратуры кривых». Именно, пусть $y=\int\limits_0^a V dx$, где V — функция x и u. Если составить

$$\frac{dy}{du}=\int\limits_0^a \frac{\partial V}{\partial u}\,dx, \qquad \frac{d^2y}{du^2}=\int\limits_0^a \frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\,dx$$

и найти такие функции L, M, N аргумента u, чтобы выражение

$$\int\limits_0^a \left(L\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+M\frac{\partial V}{\partial u}+N\right)dx$$

оказалось интегрируемым и равным $U(u)$, то $y=\int\limits_0^a V dx$ будет интегралом линейного дифференциального уравнения

$$L\frac{d^2y}{du^2}+M\frac{dy}{du}+N=U.$$

Но так как проинтегрировать таким путем заданные дифференциальные уравнения невозможно, то в ряде случаев Эйлер представил интегралы данных уравнений в виде бесконечных рядов, а затем пытался, как мы указывали выше, найти сумму последних с помощью определенных интегралов. Так, например, ему удалось получить четырьмя способами решение дифференциального уравнения

$$x^2(a+bx^n)\frac{d^2y}{dx^2}+x(c+ex^n)\frac{dy}{dx}+(f+gx^n)y=0$$

в виде определенного интеграла. Знаменитый метод, примененный Лапласом к решению носящего его имя дифференциального уравнения с частными производными (мы о нем еще будем говорить ниже), возник в развитие этой мысли Эйлера [1]).

Для приближенного представления интеграла обыкновенного дифференциального уравнения Лагранж, кроме описанного ранее, изобрел еще другой бесконечный процесс (Nouv. Mém. Ac. Berl., 1776 (1779)]. Это был метод разложения в цепную дробь. По мнению Лагранжа, он обладал тем преимуществом, что позволял сразу выяснить, представляет ли собой интеграл рациональную или иррациональную функцию, ибо в первом случае разложение обрывается, а во втором простирается в бесконечность. Чтобы найти такое разложение, прежде всего ищут для очень малой величины x первое приближенное значение ξ величины y, выраженное в функции x, а затем подставляют в дифференциальное уравнение $y=\frac{\xi}{1+y'}$. Это дает относительно x и y' новое уравнение тех же порядка и степени, в котором очень малому x соответствует также очень малое y'. Если ξ' есть первый член для выражения y' в функции x, то y' полагают равным $\frac{\xi}{1+y''}$ и т. д. В конце концов получается, что

$$y=\cfrac{\xi}{1+\cfrac{\xi'}{1+\cfrac{\xi''}{1+\dots}}}$$

Значения ξ при этом все получают форму ax^α, где должно быть $\alpha>0$. Вся трудность состояла в определении показателей α и постоянных a, и преодолению ее Лагранж посвятил детальное исследование. Взяв в качестве примера некоторые дифференциальные уравнения, непосредственно интегрируемые в конечном виде, Лагранж попутно получил разложения в цепные дроби элементарных трансцендентных функций, часть которых была найдена уже иным путем Эйлером [Comm. Ac. Petr., 1737 (1744)] и Ламбертом [Mém. Ac. Berl., 1761 (1768)].

---

[1]) Подробнее о работах Эйлера по дифференциальным уравнениям см. в статьях и книге Н. И. Симонова, указанных в списке литературы — *Прим. ред.*

§ 2. Дифференциальные уравнения с частными производными

Некоторые задачи инфинитезимальной геометрии и среди них упоминавшаяся ранее задача о траекториях привели к рассмотрению кривых, уравнения которых содержат переменный «параметр». Приведенным термином пользовался еще Лейбниц при исследовании проблемы огибающих в Acta Erud., 1692; Як. Герман в своих статьях 1717/19 (Acta Erud.) называл эту величину «модулем». В соответствии с этим уравнения, содержащие параметры, Герман называл «модулярными»; это наименование сохранилось за ними у Эйлера и встречалось еще у Лагранжа [Nouv. Mém. Ac. Berl., 1785 (1787)]. Изучив одну частную задачу такого рода, Эйлер впервые встретился с *дифференциальными уравнениями в частных производных вида*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial x}=f(x, y, z)$$

[Comm. Ac. Petr., 1734/35 (1740)]. Второе уравнение, записанное им в форме $dz+Pdx=0$, он с помощью интегрирующего множителя R попробовал свести к точному, т. е. сразу же интегрируемому уравнению. Для этого ему пришлось определять R по линейному уравнению с частными производными первого порядка,

$$\frac{\partial R}{\partial x}=P\frac{\partial R}{\partial z}+R\frac{\partial P}{\partial z},$$

получающемуся из условия интегрируемости. В рассмотренном им специальном случае Эйлеру удалось найти решение по методу, который употребляется и ныне и который дал ему возможность установить, что

$$\ln R=\int \frac{\partial P}{\partial z}\,dx.$$

Наряду с приведенной геометрической проблемой и главным образом дифференциальные уравнения с частными производными обязаны возникновением многочисленным практически-физическим вопросам, непрестанно занимавшим, начиная с середины XVIII столетия, всех выдающихся математиков. Мы уже упоминали (стр. 151), что Даламбер привел знаменитую задачу о колеблющейся струне [затронутую ранее еще Тейлором в Phil. Trans., 1713/14 и в «Методе приращений», 1715; Иог. Бернулли в Comm. Ac. Petr., 1727 (1729) и 1728 (1732); Эйлером там же, 1734/35 (1740)] к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

«общее» решение которого он дал в форме

$$y=\Psi(t+x)+\Gamma(t-x).$$

В споре, завязавшемся вокруг этого решения между Даламбером и Эйлером, выявилось различие их воззрений на понятие функции. Даламбер считал возможным допускать при решении дифференциальных уравнений только функции, разлагающиеся в ряд Тейлора, а Эйлер полагал, что дифференциальное и интегральное исчисление можно применять к совершенно произвольным функциям. Мы возвратимся ниже к этому спору (см. стр. 191).

Интегрирование только что приведенного важного уравнения второго порядка, а также разнообразные исследования о мнимых величинах, произведенные Даламбером и изложенные им в «Размышлениях об общей причине ветров» (премия Берлинской Академии 1746, Берлин, 1747) и в «Исследованиях по интегральному исчислению» [Mém. Ac. Berl., 1746 (1748)], позволили ему в 1752 проинтегрировать с помощью функций комплексного аргумента два дифференциальных уравнения, возникающих в одной гидродинамической задаче,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z}.$$

Впоследствии эти уравнения, как известно, получили чрезвычайно важное значение в теории функций. Позднее (1761; ср. стр. 167) Даламбер пришел к выводу, что с помощью комплексных функций можно проинтегрировать также уравнение

$$\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0.$$

Однако на первых порах речь шла только об отдельных уравнениях, изучение которых было вызвано практическими вопросами. Систематическое интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными было начато опять-таки Эйлером. В статье «Разыскание функций по данному дифференциальному условию» [Investigatio functionum ex data differentialium conditione в Nov. Comm. Ac. Petr., 1762/63 (1764)] он подверг исследованию уравнение

$$z = \varphi(p, q), \qquad (dz = p\,dx + q\,dy),$$

к которому затем добавил в третьем томе «Оснований интегрального исчисления» (1770) большое количество частных случаев. Но и Эйлер не обладал единым методом, а действовал от случая к случаю, опираясь на свою неисчерпаемую изобретательность. Ряд различных дифференциальных уравнений с частными производными проинтегрировал также Даламбер. Опубликовал он свои результаты позднее Эйлера, в 1768, хотя получил их, по собственному его указанию, еще в 1762. Так, в статье «Исследования по интегральному исчислению» (IV том Opuscules mathématiques) он прежде всего рассмотрел решение линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.

Даламбер пользовался при этом двумя методами. Один заключался в приведении задачи к составлению интегрируемых обыкновенных дифференциальных выражений, которые он определял по способу множителей, развитому им в 1746/47 (см. стр. 177—178). Во втором методе, который он применил к линейному уравнению 1-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial z}{\partial x}+A\frac{\partial z}{\partial y}+Cz=0,$$

он воспользовался известной еще Эйлеру подстановкой $z=e^{\omega}$, которая преобразовала уравнение в более простое:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}+A\frac{\partial \omega}{\partial y}+C=0.$$

Если к этому присоединить, что

$$d\omega=p\,dx+q\,dy,$$

то $-(Aq+C)\,dx+q\,dy$ должно быть точным дифференциалом, откуда следует, что

$$q=\varphi(y-Ax) \quad \text{и} \quad p=-C-A\varphi(y-Ax).$$

Эти уравнения позволяли найти сначала ω, а затем z.

Отправляясь от этого результата, Даламбер перешел к интегрированию уравнения первого порядка, линейного относительно p, q и z:

$$p+q\varphi(x, y)+z\psi(x, y)+\chi(x, y)=0.$$

Он поставил его решение в зависимость от решения более простого уравнения

$$p+q\varphi(x, y)+\psi(x, y)=0,$$

последнее же на основании того, что

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

приводилось к

$$dz=q\,dy-[p\varphi(x, y)+\psi(x, y)]\,dx.$$

Вместе с тем Даламбер рассмотрел, в каких случаях (он различал три) это выражение является точным дифференциалом. Это исследование близко подвело Даламбера к общему методу, данному впоследствии Лагранжем в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1774 (1776) и 1779 (1781). Изложенные изыскания Даламбера были определенно систематичнее работ Эйлера. Так, например, у него и для уравнений высшего порядка уже имелась, не высказанная, правда, ясно, наша классификация их на линейные и нелинейные, с постоянными или же с переменными коэффициентами. И все же Эйлер, почти не сознавая того, сделал важный шаг вперед по сравнению со своим современником. Занимаясь в «Основаниях интегрального исчисления» интегрированием многочисленных уравнений с частными производными 1-го порядка, он совершенно случайно показал (т. III, 1770), что дифференциальное уравнение с тремя переменными всегда можно привести к *линейному* уравнению с четырьмя переменными,

$$p\frac{\partial q}{\partial z}-q\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=0,$$

которое он получил в качестве следствия из своего условия интегрируемости.

Общее линейное уравнение с частными производными 1-го порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\varphi(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}+\psi(x, y, z)=0$$

впервые решил в 1773 Лаплас, отправлявшийся прямо от работ Даламбера и Эйлера. Он ввел для этого вспомогательную переменную, которую затем определил подходящим образом [Mém. Ac. Paris, 1773 (1777)]. Лагранж разработал тогда же простой метод сведения этого уравнения к системе совместных обыкновенных дифференциальных уравнений, оказавший определяющее влияние на последующее развитие вопроса [Nouv. Mém. Ac. Berl., 1774 (1776)]. На линейные дифференциальные уравнения с произвольным числом переменных Лагранж распространил свой метод лишь в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1779 (1781), а детальное обоснование его привел там же в 1785 (1787).

Выше говорилось, что уже Эйлер показал, как можно свести интегрирование *нелинейного* дифференциального уравнения с частными производными 1-го порядка к *линейному* уравнению, с бо́льшим на единицу числом переменных, не обратив, однако, на этот результат внимания. Но уже Лагранж в одной статье в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1772 (1774), где подробно разбирался вопрос о сведе́нии одного уравнения к другому, усмотрел в этом существенный шаг вперед. Тем более непонятно, что Лагранж, давно располагавший своим общим приемом интегрирования линейных дифференциальных уравнений, не заметил, что тем самым была также доведена до конца задача о решении нелинейных уравнений. Он не знал этого еще в 1785; то же относится к большой работе Монжа в Mém. Ac. Paris, 1784 (1787), хотя последний был хорошо знаком с исследованиями Лагранжа. Определенно обратил внимание на связь между решениями обоих видов уравнений только П. Шарпи. Соответствующая работа этого скончавшегося в молодых годах математика была им направлена Парижской Академии в 1784, но света не увидела. Лакруа сообщает о ней в своем «Трактате о дифференциальном и интегральном исчислении» (т. II, 2-е изд., Париж, 1814).

В этой работе Шарпи попытался распространить метод Лагранжа и на уравнения с большим числом переменных, но встретился здесь с трудностями. Много времени спустя этим вопросом с успехом вновь занялся Якоби, после того как Пфафф уже разработал другой способ решения нелинейных уравнений 1-го порядка.

В работе 1772 (1774) Лагранж открыл, что для интегрирования уравнения 1-го порядка не обязательно иметь общий интеграл эйлерова уравнения условий интегрируемости, а достаточно иметь частное решение, содержащее произвольную постоянную. Вместе с тем он показал, как из него можно аналитически получить общее решение путем дифференцирования по постоянной и исключения последней. Эйлер странным образом не разглядел общеметодического значения этого приема, хотя фактически пользовался им во всех частных примерах. В Nouv. Mém. Ac. Berl., 1774 (1776) Лагранж назвал решение вида $z=\varphi(x, y, a, b)$, где a и b суть две произвольные постоянные, «*полным*» и показал, что если положить b равным произвольной функции $\psi(a)$, а затем из уравнений $z=\varphi[x, y, a, \psi(a)]$ и $\frac{\partial z}{\partial a}=0$ исключить a, то возникнет «*общее решение*».

Наконец, исключение a и b из уравнений

$$z=\varphi(x, y, a, b), \qquad \frac{\partial z}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial z}{\partial b}=0$$

дало Лагранжу решение, которое он сначала назвал «специальным», а позже, в «Теории аналитических функций» (1797), «особым». В той же статье Лагранж, правда, лишь в нескольких словах, охарактеризовал геометрический смысл подобных решений; позднее, в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1779 (1781) он разъяснил это на некоторых примерах. Однако полное свое значение геометрическая интерпретация решения дифференциальных уравнений с частными производными получила у Монжа. Именно изучение геометрического образования поверхностей привело этого математика к его столь важным работам по теории уравнений с частными производными.

Тот результат, что при решении уравнений с частными производными 1-го порядка появляется одна произвольная функция, а при решении уравнений 2-го порядка — две, получился у Эйлера и Даламбера как бы сам собой. Однако, на природу таких функций они смотрели совершенно по-разному. Эйлер считал необходимым допускать произвольные «смешанные или неправильные функции» [«functiones mixtas vel irregulares», Misc. Taur., 1762/65 (1766)], и с этим воззрением соглашались многие другие современники, как, например, аббат Т. Вальперга ди-Калюзо [Mém. Ac. Turin, 1786/87 (1788)], исключавший, впрочем, функции, разрывные в нашем смысле слова. Даламбер, как говорилось ранее, придерживался мнения, что правомерно пользоваться лишь функциями, разлагающимися в ряд Тейлора. Монж склонялся более к идеям Эйлера. В ряде статей, содержавших подробный анализ вопроса о построении дифференциальных уравнений с частными производными, он выяснил, как можно геометрически построить их интегралы и в случае разрывных функций, т. е., согласно тогдашнему пониманию этого слова, — функций, управляемых различными законами на различных участках их области определения [Misc. Taur., 1770/73, Mém. prés. div. sav. Ac. Paris, т. 7 (1776) и т. 9 (1780), также добавления к «Приложению анализа и т. д.» (Париж, 1807)]. Наоборот, Арбогаст в сочинении на конкурсную тему 1790, выдвинутую Петербургской Академией в 1787, пришел к заключению, что должны быть допущены и «несмежные» — по-нашему — разрывные функции («fonctions discontiguës»). Он изложил эту точку зрения в «Мемуаре о природе произвольных функций, входящих в интегралы уравнений с частными дифференциалами» (Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires, qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles, Петербург, 1791). Разрывными в нашем смысле функциями занимался, впрочем, еще ранее Монж[1]).

Уже в названных работах Монж проявил себя выдающимся геометром, в качестве которого он и прославился. Геометрические же рассмотрения привели Монжа к его работам в области дифференциальных уравнений. Прежде всего, основываясь на геометрическом способе образования некоторых классов поверхностей, он вывел их дифференциальные уравнения, а затем, исходя из способа получения последних, разработал с помощью обратных умозаключений метод их интегрирования [Mém. Ac. Paris, 1784 (1787)]. Главную свою идею, высказанную им еще в 1771 [а опубликованную в Mém. prés. div. sav. Ac. Paris, т. 7 (1776)], Монж сформулировал следующим образом.

Если уравнение

$$M\frac{\partial z}{\partial x}+N\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

где M и N суть функции x, y, z, интегрируемо при $z=\text{const.}$ и его интеграл есть $z=\varphi(V)$, то оно интегрируемо также, когда z рассматривается как переменная и его интеграл будет снова $z=\varphi(V)$. Эти соображения привели Монжа в том же томе Mém. Ac. Paris, 1784 (1787), содержавшем целый ряд тесно связанных между собой его статей, к сведéнию задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что, как мы знаем, сделал также Лагранж (см. стр. 186). Затем Монжу легко удалось распространить тот же прием на интегрирование линейных уравнений

[1]) Подробное изложение спора о природе функций, служащих решениями уравнений с частными производными, см. в книге И. Ю. Тимченко, указанной в списке литературы. — *Прим. ред.*

с частными производными 1-го порядка с любым числом переменных.

Монж обратил внимание и на уравнения 1-го порядка с тремя переменными более *высокой степени*, которые разделил на класс уравнений, конечным интегралом которых является одно-*единственное* выражение, содержащее эти переменные, и класс уравнений, решение которых можно выразить лишь с помощью системы нескольких совокупных уравнений. Распространить свой метод на уравнения первого порядка и 2-й степени Монжу и здесь позволил обратный переход от интеграла к соответствующему дифференциальному уравнению. Продифференцировав последнее, Монж увидел, что если бы был найден интеграл получившегося таким образом уравнения, то в него должна была бы войти произвольная функция dx и dy. Отсюда следовало, что можно взять произвольное отношение уже между величинами dx и dy, участвующими в исходном дифференциальном уравнении. Но благодаря этому последнее распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения. Это рассуждение привело далее Монжа к установлению одного принципа, все значение которого было раскрыто лишь позднее, именно, к применению преобразований, которые мы, вслед за С. Ли, называем «касательными» и которые позволяют находить решение дифференциальных уравнений с помощью лишь дифференцирования. Хотя Эйлер и некоторые другие (например, П. Вариньон в Mém. Ac. Paris, 1704) в отдельных случаях уже применяли касательные преобразования, но лишь Монж построил на них *метод* интегрирования дифференциальных уравнений. Он установил также, что когда удается найти такое преобразование, оказывается возможным проинтегрировать любое соответствующее уравнение с частными производными 1-го порядка, но заметил, с другой стороны, что систематическое получение преобразований, соответствующих дифференциальным уравнениям, не легче их непосредственного интегрирования. Наконец, он привел способ нахождения бесчисленного множества таких преобразований. Монжу была известна и возможность приложения этого метода к дифференциальному уравнению Клеро; он даже показал, что это и вообще всякое обыкновенное дифференциальное уравнение, допускающее касательное преобразование, решается посредством дифференцирования.

С уравнениями в частных производных тесно связаны также упоминавшиеся на стр. 175 обыкновенные уравнения с тремя переменными, не удовлетворяющие условию интегрируемости, к которым мы должны поэтому ненадолго обратиться. Геометрическое значение таких дифференциальных уравнений впервые открыл опять-таки Монж в том же томе Mém. Ac. Paris. В противовес обрисованной выше точке зрения Эйлера, он показал, что эти уравнения представляют собой наиболее общий случай и что их решение выражается с помощью двух уравнений, определяющих, таким образом, пространственную кривую. Выяснив, далее, что интегралы этих уравнений должны дополняться произвольными функциями входящих в них переменных, которыми до того пользовались только для уравнений с частными производными, он установил глубокую зависимость между обоими названными видами дифференциальных уравнений и указал, как сводить одни из них к другим. В частности, он рассмотрел линейные уравнения, впоследствии названные пфаффовыми. Общие уравнения вида

$$\Omega(x,\ y,\ z,\ dx,\ dy,\ dz)=0,$$

однородные относительно dx, dy, dz, Ли назвал уравнениями Монжа.

Из последних исследований выросла «теория характеристик» Монжа, изложенная им с чрезвычайной ясностью в «Приложении анализа к геометрии» (Application de l'analyse à la géométrie, 1807) и оказавшаяся столь важной впоследствии для изучения уравнений с частными производными. Заметим, что этому сочинению предшествовали «Листы анализа, приложенного к геометрии» (Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie, 1795, 2-е издание, 1801) и написанная совместно с Ашеттом книга «Приложение алгебры к геометрии» (Application de l'algèbre à la géométrie, 1805). Теория характеристик основывается на следующих соображениях. Пусть $f(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta)=0$ есть полный интеграл (по терминологии Лагранжа) некоторого дифференциального уравнения 1-го порядка. Если постоянную β заменить произвольной функцией α, например, взять $\beta=\varphi(\alpha)$, то получается уравнение $f[x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \varphi(\alpha)]=0$, при переменном α представляющее собой семейство поверхностей, которые Монж называет «огибаемыми» («surfaces développées»). Исключая из $f=0$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$ параметр α, мы получим касающуюся всех этих поверхностей «огибающую» (общий интеграл по Лагранжу). Кривые, по которым пересекаются любые две последовательные поверхности семейства или же вдоль которых огибаемые касаются огибающей, т. е. кривые, заданные уравнениями $f=0$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$ при фиксированных значениях α, называются «характеристиками». Монж дал этим линиям такое название потому, что только они представляют собой образующие всех бесчисленных огибающих, соответствующих различным видам произвольно выбираемой функции $\varphi(\alpha)$. Таким образом, как подробно разъясняет Монж, из всех образующих кривых только этим линиям присуще некоторое общее характерное свойство образования огибающих, находящее свое выражение в дифференциальном уравнении, общее решение которого заключает в себе все эти бесчисленные огибающие.

Применяя эти геометрические соображения к общему уравнению с частными производными 1-го порядка

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0,$$

полный дифференциал которого есть

$$P\,dp + Q\,dq + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

Монж пришел к системе уравнений:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + pZ} = -\frac{dq}{Y + qZ}.$$

Интегрирование последней давало ему уравнения характеристики, а геометрические свойства этой кривой позволяли непосредственно определять общий интеграл дифференциального уравнения. Благодаря этому разработанная Лагранжем и Монжем теория интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка с тремя переменными приобрела крайне прозрачный характер, позволяющий непосредственно охватить всю геометрическую картину решения.

Переходя к истории уравнений с частными производными высшего порядка, мы прежде всего отметим, что они были обязаны своим происхождением физическим проблемам. Первым среди них явилось дифференциальное уравнение задачи о колеблющейся струне (см. стр. 183). Даламбер, Эйлер, Дан. Бернулли, Лагранж, Монж и др. посвятили ему исследования, оказавшие разнообразные и плодотворные влияния на математику. Работая над ним, математики впервые выяснили, сколько произвольных функций входит в интеграл уравнения с частными производными, а из обрисованного уже выше спора о природе этих произвольных функций в конце концов выросло учение о представлении произвольных функций с помощью тригонометрических рядов, впоследствии названных рядами Фурье.

За проблемой о колеблющейся струне вскоре последовали другие, также приводившие к уравнениям с частными производными 2-го порядка. Так, в одном письме к Лагранжу от 1 января 1760 (см. Misc. Taur. II, 1760/61) и в Mém. Ac. Berl., 1759 (1766) Эйлер привел общие уравнения гидродинамики и вывел из них, что объемное расширение u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

для которого он постарался найти частные интегралы. В одном специальном случае, когда движение везде направлено к фиксированному центру и скорости в точках, равноудаленных от центра, одинаковы, Эйлер после многих тщетных попыток получил даже общий интеграл. Общее решение для этого случая отыскал затем и Лагранж (Misc. Taur. II, 1760/61), применив метод, служивший ему ранее в задаче о колеблющейся струне.

Другое уравнение с частными производными 2-го порядка возникло в вопросе о поперечных колебаниях струн переменной толщины: его интегрирование Лагранж в только что указанной работе привел к решению одного обыкновенного уравнения 2-го порядка. К уравнениям с частными производными 2-го порядка привела и задача о колебаниях газа в цилиндрических и нецилиндрических трубах, которой занялся в своих гидродинамических исследованиях Эйлер [Nov. Comm. Ac. Petr., 1771 (1772)]. Для случая нецилиндрических труб он пришел к уравнению формы

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+U\frac{\partial v}{\partial x}+Tv,$$

где U и T зависят только от x. Так как в частных случаях общий интеграл получался в виде

$$v=P\Gamma(t\pm x)+Q\Gamma'(t\pm x)+R\Gamma''(t\pm x)+\ldots,$$

где P, Q, $R,\ldots$ — определенные функции x, то Эйлер проанализировал вопрос о том, каким должно быть дифференциальное уравнение, чтобы его интеграл состоял из заданного числа членов такого рода.

Дифференциальное уравнение 4-го порядка,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0,$$

Эйлер встретил при изучении колебаний пластинки. Эту задачу Дан. Бернулли поставил в письме к Эйлеру еще в октябре 1735. Эйлер не раз возвращался к ней, но получил написанное уравнение только в Nov. Comm. Ac. Petr., 1772 (1773). Он должен был, однако, признать, что не в состоянии отыскать общий интеграл с четырьмя произвольными функциями и поэтому рассмотрел лишь случай простых колебаний.

Мы видели, что математики того времени, с большей или меньшей полнотой исследуя эти задачи, ограничивались уравнениями, в которые кроме времени входила лишь одна пространственная координата. Действительно, в XVIII столетии мы встречаем лишь отдельные попытки решения уравнений с тремя независимыми переменными. Так, Эйлер уже в 1759 пришел к задаче о колеблющейся мембране[1]). В печати он занялся ею только в Nov. Comm. Ac. Petr., 1764 (1766), причем свел ее к уравнению с частными производными:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Рассматривая это уравнение, он получил трансцендентные функции, названные позднее *цилиндрическими* или *бесселевыми* (ср. стр. 181). Написанное уравнение Эйлер преобразовал к полярным координатам, что ему дало

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2},$$

[1]) См. письмо к Лагранжу от 1 января 1760 [Misc. Taur., 1760/61 (1762)].

и допустил, что решение имеет вид

$$z = u \sin \alpha t \sin \beta\varphi.$$

Для определения величины u, которая берётся зависящей лишь от r, он с помощью еще одной подстановки нашел уравнение типа Риккати. Решить последнее с помощью обыкновенных функций удавалось только в совершенно специальном случае. Поэтому Эйлер прибегнул к разложениям в ряды. В приведенной работе, а потом в Act. Ac. Petr., 1781 (ч. I, 1784) он нашел таким образом ряд

$$u = \sum (r, \beta) = r^{\beta}\left\{1 - \frac{1}{1\cdot(\beta+1)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot(\beta+1)(\beta+2)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^6 + \ldots\right\},$$

который с точностью до числового множителя совпадает с бесселевой функцией $J_{\beta}(\alpha r)$, частный случай которой, возникающий при $\beta = 0$, открыл еще Д. Бернулли в Comm. Ac. Petr., 1732/33 (1738); см. еще там же, 1734/35 (1740).

Заслуживающая здесь упоминания попытка Лагранжа проинтегрировать общие уравнения гидродинамики привела его только к частным решениям. Вообще все перечисленные до сих пор исследования по уравнениям с частными производными 2-го порядка были лишены единого метода, который был бы применим к какому-либо определенному их классу. Создать такой метод поставил себе целью Лаплас. Он искал единый прием решения общего линейного уравнения с частными производными

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + T = 0,$$

где α, β, γ, δ, λ, T обозначают какие-либо функции x и y, ибо в большинстве рассматривавшихся тогда практических задач встречались как раз уравнения такого рода [Mém, Ac. Paris, 1773 (1777)]. Введя две новые переменные, которые он затем определил подходящим образом, Лаплас сначала представил это уравнение (в случае $\alpha^2 > 4\beta$) в виде

$$D(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_1} + m \frac{\partial u}{\partial s} + n \frac{\partial u}{\partial s_1} + lu + T = 0,$$

и затем приложил к нему метод, использованный им с успехом еще для дифференциального уравнения 1-го порядка (ср. стр. 186), а позднее развитый далее, на основе употребления определенных интегралов, в «Мемуаре о последовательностях» [Mémoire sur les suites, Mém. Ac. Paris, 1779 (1782)]. Если $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ — две произвольные функции и если составить

$$\varphi_1(s) = \int \varphi(s)\, ds, \quad \varphi_2(s) = \int \varphi_1(s)\, ds, \quad \ldots$$

и

$$\psi_1(s_1)=\int\psi(s_1)\,ds_1,\quad \psi_2(s_1)=\int\psi_1(s_1)\,ds_1,\ \ldots$$

то u можно представить в виде ряда

$$u=A_0\varphi_1(s)+A_1\varphi_2(s)+A_2\varphi_3(s)+\ldots+$$
$$+B_0\psi_1(s_1)+B_1\psi_2(s_1)+B_2\psi_3(s_1)+\ldots$$

Коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots$ определяются здесь следующими дифференциальными уравнениями, возникающими при подстановке u в уравнение $D(u)=0$:

$$\frac{\partial A_0}{\partial s_1}+mA_0=0,\qquad \frac{\partial B_0}{\partial s}+nB_0=0,$$
$$\frac{\partial A_1}{\partial s_1}+mA_1+D(A_0)=0,\qquad \frac{\partial B_1}{\partial s}+nB_1+D(B_0)=0,$$
$$\frac{\partial A_2}{\partial s_1}+mA_2+D(A_1)=0,\qquad \frac{\partial B_2}{\partial s}+nB_2+D(B_1)=0,$$

и т. д.

Когда в процессе образования решений этих уравнений случается, что при каком-либо определенном значении индекса μ $A_\mu=0$ или $B_\mu=0$, то ряд для u обрывается и общий интеграл выражается в конечной форме. Если же этот случай, рассмотренный Лапласом еще в первой из названных статей, не имеет места, то Лаплас от представления решения с помощью рядов переходит к представлению его с помощью *определенных интегралов*. Он показал, что тогда u можно привести к форме

$$u=\int_0^s p\varphi(z)\,dz+\int_0^{s_1} p_1\psi(z)\,dz,$$

где p и p_1 — частные интегралы для $D(u)=0$, имеющие вид

$$p=\int_0^s \Gamma(s-z)\,\varphi(z)\,dz,\quad p_1=\int_0^s \Pi(s-z)\,\psi(z)\,dz,$$

причем в этих интегралах

$$\Gamma(s-z)=\sum_{k=1}^{k=\infty} A_{k-1}\frac{(s-z)^{k-1}}{(k-1)!},$$
$$\Pi(s-z)=\sum_{k=1}^{k=\infty} B_{k-1}\frac{(s-z)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Заметим, что ни Лаплас, ни Эйлер, ни кто-либо другой из их современников еще не обозначали определенные интегралы с помощью указания пределов интегрирования около символа интеграла (ср. стр. 165).

Позднее дифференциальное уравнение $D(u)=0$ было названо «уравнением Лапласа», а его способ интегрирования — «методом каскадов». В случаях, когда l, m, n — постоянные числа и $T=0$, а также когда

$$m=\frac{f}{s+s_1},\quad n=\frac{g}{s+s_1},\quad l=\frac{h}{(s+s_1)^2},$$

Лаплас с помощью своего приема свел задачу к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Различные результаты, которые Эйлер получил с помощью гениальных догадок, Лаплас находил как частные случаи из своего метода. Лежандр в Mém. Ac. Paris, 1787 (1789) дополнил метод Лапласа, показав, что он не нуждается в преобразовании общего линейного уравнения к лапласовой форме. Сам Лаплас затем (Journal de l'École Polyt., 1809) присоединил к этому решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

В то время, как метод интегрирования уравнений с частными производными, созданный Лапласом, возник в ответ на требования, предъявленные физическими задачами, результаты, полученные десятью годами позже Монжем, выросли на чисто геометрической почве. В тех же статьях, в которых Монж изложил способы интегрирования уравнений с частными производными 1-го порядка, достигшие вершины и завершения в его теории характеристик, он применил положенные в их основу идеи (см. стр. 190) также и к высшим уравнениям. Понимая под линейным дифференциальным уравнением с частными производными 2-го порядка уравнение вида

$$Ar+Bs+Ct+D=0,$$

где коэффициенты суть произвольные функции x, y, z, p и q, он с помощью уравнений

$$dp=r\,dx+s\,dy \quad \text{и} \quad dq=s\,dx+t\,dy$$

исключал две из трех величин r, s, t. Так как возникающие в результате исключения уравнения должны иметь место независимо от третьей из этих величин, Монж получал четыре уравнения относительно dx, dy, dp, dq, среди которых два являлись независимыми. Если общие интегралы этих двух обыкновенных уравнений суть $V=a$ и $U=b$ (a и b — постоянные), то $V=\varphi(U)$ есть «первый интеграл» данного дифференциального уравнения. Позднее, в «Приложении анализа к геометрии» (1807), Монж нашел, что два из четырех уравнений, получающихся при исключении r, s, t, представляют собой дифференциальные уравнения характеристик. После того как он дал геометрическое определение последних, он привел способ образования их уравнений также в случае любого дифференциального уравнения 2-го порядка. Уже в работах, помещенных в Mém. Ac. Paris, 1784 (1787), Монж перенес свой метод на линейные уравнения в частных производных 2-го порядка с постоянными коэффициентами, а также на некоторые другие и среди них на дифференциальное уравнение минимальных поверхностей, установленное, но не проинтегрированное Лагранжем в Misc. Taur., 1760/61 (1762) и Ж. Ш. де-Бордá в Mém. Ac. Paris, 1767 (1770). Этод метод дал Монжу общий интеграл дифференциального уравнения указанного класса поверхностей, но в мало пригодном, а кроме того, и ошибочном виде. Ошибку свою Монж вскоре заметил и в «Приложении анализа к геометрии» смог дать правильное решение, опиравшееся на теорию характеристик. Еще до 1787 Монж познакомил со своей теорией Лежандра, который после того дал несколько более строгое математическое обоснование метода Монжа в Mém. Ac. Paris, 1787 (1789).

В указанной работе 1784 (1787) Монж приложил точно такой же способ к линейным дифференциальным уравнениям с частными производными 3-го порядка и на одном примере показал, что их можно свести к трем парам линейных уравнений; общности этого результата он, однако, не заметил.

Попытка Монжа приложить свой метод к линейным уравнениям в частных производных 2-го порядка с любым числом переменных, конкретно проведенная им для уравнений с четырьмя переменными, привела его к результату, по крайней мере в случае, когда дискриминант коэффициентов уравнения равен нулю. Обобщение на произвольное число переменных Монж лишь кратко наметил. Точнее разобраны были уравнения с четырьмя и пятью переменными Лежандром в Mém. Ac. Paris, 1787 (1789). В круг своих исследований Лежандр включил также одно специальное линейное уравнение 3-го порядка с тремя переменными, в котором искомая функция продифференцирована по одному из аргументов только один раз.

Нелинейные уравнения с частными производными 2-го порядка тоже были рассмотрены Монжем, правда, лишь бегло, еще в Mém. Ac. Paris, 1784 (1787). Он продифференцировал уравнение

$$W(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0$$

и особо допустил, что дифференциал

$$A\,dr+B\,ds+C\,dt+D\,dx+E\,dy=0$$

распадается на два уравнения

$$D\,dx+E\,dy=0,\quad A\,dr+B\,ds+C\,dt=0,$$

т. е., как говорим мы теперь, существует характеристика 2-го порядка. Эти два уравчения дали ему линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка, которое доставило согласно прежним его указаниям два обыкновенных дифференциальных уравнения, непосредственно приводящих к решению. Как ни сжаты были эти замечания Монжа, они все же содержали ростки разработанной впоследствии теории характеристик высшего порядка.

Следует, наконец, упомянуть о приеме, употребленном Лежандром в названной ранее статье Mém. Ac. Paris, 1787 (1789) в случае дифференциального уравнения

$$r = f(s,\ t).$$

С помощью преобразования

$$x\,ds + y\,dt = dv$$

он свел последнее к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + S\,\frac{\partial^2 v}{\partial s\,\partial t} - T\,\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = 0,$$

где S и T — функции s и t.

Среди различных изложенных нами приемов изучения уравнений с частными производными нам несколько раз встречалось интегрирование посредством бесконечных рядов. Задачи о колеблющейся струне и колеблющейся мембране привели даже к возникновению новых чрезвычайно важных классов рядов, именно рядов Фурье и цилиндрических функций (стр. 151 и 192). Однако ряды Фурье были получены из интеграла, определенного уже в конечной форме, а цилиндрические функции были найдены из одного обыкновенного дифференциального уравнения и для интегрирования уравнения с частными производными соответствующей задачи служили только косвенным образом. Но бесконечные ряды были и непосредственно применены к решению уравнений с частными производными, для которых не удавалось отыскать интеграл в конечной форме. В одних случаях с этой целью пользовались, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, представлением зависимой переменной в виде ряда, расположенного по степеням одной из независимых переменных, т. е. полагали искомую функцию φ равной ряду

$$\varphi = \varphi' + z\varphi'' + z^2\varphi''' + \ldots,$$

где неопределенные коэффициенты $\varphi', \varphi'', \ldots$, не содержат z, и определяли коэффициенты, подставляя ряд в данное дифференциальное уравнение. Так, например, поступил в своей «Аналитической механике» (1788) Лагранж при интегрировании уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Поступая указанным образом, он получил

$$\varphi=\varphi'+\frac{z}{1}\varphi''-\frac{z^2}{2!}\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}\right)-\frac{z^3}{3!}\left(\frac{\partial^3\varphi''}{\partial x^3}-\frac{\partial^3\varphi'''}{\partial y^3}\right)+\ldots,$$

где φ' и φ'' обозначают две произвольные функции.

На этом же принципе основывалось употребление рядов более сложного вида, о характере которых можно было догадываться, например, по известным частным интегралам дифференциального уравнения. Этот способ неоднократно применялся Эйлером в третьем томе «Оснований интегрального исчисления» (1770); мы встретились с ним уже на стр. 180—181. Ограничимся одним примером. Эйлер заметил, что уравнение

$$(x+y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+m(x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+nz=0$$

имеет частный интеграл $z=(x+y)^\lambda$. Поэтому он представил общий интеграл в виде ряда

$$z=A(x+y)^\lambda f(x)+B(x+y)^{\lambda+1}f'(x)+C(x+y)^{\lambda+2}f''(x)+\ldots$$

С помощью рекуррентных формул он выразил коэффициенты B, $C,\ldots$ через A и, при некоторых предположениях, получил конечный ряд. Определив затем случаи, в которых можно привести к указанному виду более общее уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+Q\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+R\frac{\partial z}{\partial y}+S\frac{\partial z}{\partial x}+Tz=0,$$

он нашел множество интегрируемых уравнений такого рода. Эта же мысль привела к интегрированию с помощью тригонометрических рядов. Иногда в ряд разлагали часть членов самого дифференциального уравнения, а затем для приближенного решения пользовались лишь несколькими первыми членами разложения, которые в некоторых случаях могли составить вместе с оставшейся группой членов новое, интегрируемое уравнение. Такой пример приводит Лагранж в Misc. Taur., 1760/61 (1762).

Большой теоретический интерес представлял способ Кондорсе, распространенный им на линейные уравнения 2-го и 3-го порядков [Mém. Ac. Paris, 1769 (1772) и 1772 (ч. I, 1775)]. Мы рассмотрим его на простом уравнении 1-го порядка, разобранном Кондорсе

$$\frac{\partial z}{\partial x}=m\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Сначала он взял ряд

$$z=a+bx+b'y+cx^2+c'xy+c''y^2+\ldots,$$

а затем с помощью дифференциального уравнения получил, что z представляется рядом

$$z=a+b\left(x+\frac{y}{m}\right)+c\left(x+\frac{y}{m}\right)^2+\ldots$$

с бесконечным множеством постоянных интегрирования a, b, $c, \ldots$ Отсюда Кондорсе, наконец, заключил, что z можно приравнять произвольной функции от $\left(x+\frac{y}{m}\right)$. Впрочем, тогда еще не понимали ясно, что тем самым полагали одинаково общими представление решения как в форме произвольной функции, так и в форме бесконечного ряда с произвольными коэффициентами. В случае тригонометрических рядов эту концепцию оспаривал, в противовес мнению Д. Бернулли [Mém. Ac. Berl., 1753 (1755)], Эйлер.

На той же идее, что и описанный выше способ Эйлера, основывался метод интегрирования линейных уравнений с частными производными Лапласа (ср. стр. 193), который, согласно Лежандру [Mém. Ac. Paris, 1787 (1789)], можно прямо использовать для уравнений вида

$$Rr+Ss+Tt+Qq+Zz=0,$$

где $R, \ldots, Z$ — функции x и y. Для того времени весьма характерно, что о сходимости или расходимости получавшихся бесконечных рядов заботились только тогда, когда желали получить пригодные числовые результаты.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

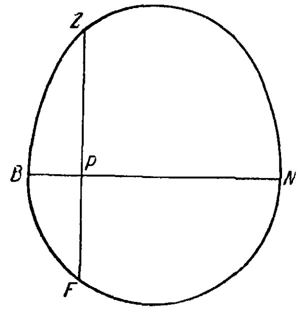
ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

§ 1. Вариационное исчисление

Мы видели ранее, что уже вскоре после открытия дифференциального исчисления его применили к отысканию экстремальных значений, принимаемых какими-либо данными функциями. Но великих деятелей того времени не отпугнула и гораздо более трудная задача об определении функций или же соответственно кривых или поверхностей, обладающих, по сравнению с другими кривыми или поверхностями, некоторыми максимальными или минимальными свойствами. Уже Ньютон поставил и решил в «Началах» (1687) задачу о проходящей через две данные точки кривой, тело вращения которой вокруг данной оси испытывает при движении в жидкости в направлении своей оси наименьшее сопротивление. Не сообщив способа решения, опиравшегося, во всяком случае, на исчисление флюксий, Ньютон привел пропорцию, которая позволяла построить искомую кривую по ее касательным и тем самым замещала дифференциальное уравнение задачи. Лопиталь и Иоганн Бернулли посвятили этой задаче статьи в Acta Erud., 1699 и 1700. Еще позднее множество вариантов ее дал в своей «Морской науке» (Scientia navalis, Петербург, 1749) Эйлер.

Подлинный толчок исследованию таких проблем сообщила, однако, знаменитая задача о брахистохроне или же кривой быстрейшего спуска, предложенная математиком И. Бернулли в Acta Erud. за 1696 и в одной программе, изданной в Гронингене в 1697. Точная формулировка задачи была такова: «среди всех проходящих через две данные точки кривых найти ту, падая по которой тяжелая точка пройдет дугу между обеими точками в кратчайшее время». Сам Бернулли дал в следующем году остроумное решение, бывшее, однако, применимым только в этом случае. Большее значение имели решения Лейбница, сообщенные им Иог. Бернулли письменно в 1686, а особенно решение Як. Бернулли, опубликованное в том же томе Acta Erud. за 1697, что и решение младшего брата. В своем решении Як. Бернулли опирался на принцип, применимый во многих случаях, согласно которому максимальное или минимальное свойство может быть присуще всей кривой лишь тогда, когда им обладают и мельчайшие ее части. В рассматриваемой задаче искомой кривой являлась циклоида, уже хорошо известная в то время. Одновременно Як. Бернулли указал на первый пример с подвижным концом, поставив задачу о брахистохроне для случая, когда тяжелая точка должна возможно быстрее достигнуть некоторой вертикальной прямой. Як. Бернулли не дал решения этой задачи, но зато вместе с ней он поставил одну так называемую изопериметрическую проблему, которая гласила:

«Среди всех кривых BFN равной длины найти ту (черт. 6), произвольные степени или корни ординат PF или дуг BF которой образуют другую кривую BZN, для которой площадь $BPNZB$ будет наибольшей или наименьшей».



Черт. 6.

Вполне удовлетворительное, хотя и громоздкое, решение этой задачи удалось тогда найти лишь самому Як. Бернулли (Acta Erud., 1700 и 1701)[1]. Бернулли первый увидел, что в таких задачах необходимо рассматривать три последовательных элемента кривой и, значит, варьировать сразу две последовательные ординаты. Позднее ту же задачу исследовали Тейлор в «Методе приращений», 1715, Иог. Бернулли в Mém. Ac. Paris, 1718 и подробнее всего Эйлер в Comm. Ac. Petr., 1732/1733 (1739). В одной работе в Comm. Ac. Petr., 1734/35 (1740) Эйлер разобрал некоторые задачи, содержавшие дополнительное условие, выраженное дифференциальным уравнением. Но так как Эйлер и здесь применил принцип Бернулли, то его решения были ошибочны. Он это признал в следующей работе, опубликованной также в Comm. Ac. Petr., 1736 (1741), хотя в то время ему не удалось овладеть этой трудностью.

Тогда же, т. е. в конце XVII столетия, возникла другая замечательная проблема вариационного исчисления. Речь шла о проведении на выпуклой кривой поверхности кратчайшей линии между двумя данными точками. Эту задачу поставил Иог. Бернулли в Journal des Sçavans в 1697. В следующем году его брат привел в Acta Erud. синтетически-геометрическое решение для поверхностей вращения 2-го порядка. Иоганн Бернулли уже тогда утверждал, что обладает общим решением вопроса. Действительно, как видно из одного его письма к Лейбницу от августа 1698, ему было

[1]) Эти тома содержат перепечатку результата и соответственно его вывода, появившихся сначала в виде листовки и соответственно диссертации в Базеле в 1700 и 1701.

известно геометрическое свойство кратчайших линий: в любой точке кривой соприкасающаяся плоскость содержит нормаль к поверхности. Мы не можем, однако, установить, знал ли он уже тогда характерное дифференциальное уравнение геодезических линий, которое опубликовал в собрании своих сочинений в 1742. Вероятно, оно еще не было тогда знакомо Иог. Бернулли, ибо в противном случае он должен был бы располагать аналитическим выражением поверхностей с помощью уравнений между тремя координатами, а никаких следов этого в его работах, относящихся к тому времени, не имеется. Впервые появилось уравнение поверхности в статье А. Парана, написанной в 1700, но опубликованной лишь в 1705, во втором томике «Математических и физических опытов и исследований» (Essais et recherches de mathématique et physique). Во всяком случае, первым опубликовал дифференциальное уравнение геодезических линий Эйлер в Comm. Ac. Petr., 1728 (1732). В 1733 Клеро сообщил Парижской Академии несколько интересных экстремальных задач, решение которых, однако, не содействовало прогрессу общей теории.

Непрестанно занимаясь в тридцатых годах XVIII столетия такого рода задачами (например, в «Механике», 1736) и исследуя их с помощью метода, приобретавшего все бóльшую общность, хотя и покоившегося на отдельных рассмотрениях геометрического характера, Эйлер создал и обосновал вариационное исчисление, которому, между прочим, присвоил это наименование несколько позже. Систематическое изложение своих результатов Эйлер дал в большой (322 страницы ин-кварто) книге «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле» (Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissima sensu accepti, Лозанна и Женева, 1744). Прежде всего Эйлер определил здесь основную проблему вариационного исчисления. В простейшем случае она заключается в нахождении такой зависимости между x и y, чтобы интеграл $W=\int\limits_{x_0}^{x_1} Z\,dx$, где Z есть функция x, y, y', y'' и т. д., принимал экстремальное значение. Эйлер проводил различие между таким «абсолютным» экстремумом и «относительным» экстремумом, при котором должны выполняться еще дополнительные условия, например, требуется найти кривую, обладающую максимальным или минимальным свойством, среди линий, определяемых некоторым дифференциальным уравнением с переменными x, y. Если дополнительное условие заключается в том, что должен сохранять постоянное значение некоторый другой интеграл (скажем, в частности, интеграл дуги кривой), то получается обобщенная изопериметрическая задача. Затем Эйлер излагал методы решения таких проблем и, на этот раз правильно, исследовал случай, в котором принцип Як. Бернулли теряет силу. На множестве примеров он показал, как получать ответ в задачах, в которых кривая обладает экстремальным свойством, не присущим ее мельчайшим частям. К числу крупнейших достижений Эйлера относится также решение задач, в которых варьируемые величины определяются не интегралами, а дифференциальными уравнениями, как это имеет место для брахистохроны в сопротивляющейся среде. При этом несравненная аналитическая сноровка Эйлера служила ему для преодоления встречавшихся трудностей посредством искусственных приемов; как он признавал и сам, в этом заключался еще недостаток его способа, но устранить его он не мог.

Выполнить это удалось 24-летнему Лагранжу, первая же статья которого по вариационному исчислению, опубликованная в Misc. Taur., 1760/61 (1762), открыла новую эпоху в истории рассматриваемой нами дисциплины. Основная заслуга Лагранжа заключалась в создании алгорифма вариационного исчисления, который позволил дать общее аналитическое выражение громоздким геометрически-инфинитезимальным рассмотрениям Эйлера. Решающий шаг состоял в том, что для различия варьирования от дифференцирования Лагранж ввел новый символ δ, с которым он производил вычисления, как со знаком дифференциала d. Это позволило Лагранжу рассматривать впоследствии пределы интегралов как переменные и распространить свои исследования на двойные интегралы. Основные черты своего исчисления Лагранж письменно сообщил Эйлеру уже в 1755. Эйлер правильно оценил и воспринял новые идеи и в Nov. Comm. Ac. Petr., 1764 (1766) дал подробное и снабженное примерами изложение исчисления Лагранжа. Впоследствии Эйлер также не раз обращался к вариационному исчислению. В частности, в Nov. Comm. Ac. Petr., 1771 (1772) (перепечатано в виде дополнения XI к «Основаниям интегрального исчисления», т. IV, 1794) он высказал мысль, что варьируемую кривую следует рассматривать как член некоторого семейства кривых. Это была весьма важная идея, благодаря которой исчисление Лагранжа приводилось к проблеме дифференциального исчисления, и тем самым впервые ставилось на прочное основание. Конечно, тогда было легко притти к ошибочному мнению, будто именно такова наиболее общая концепция понятия вариации. Так называемые «сильные вариации», при которых точка кривой перемещается бесконечно мало, но касательная поворачивается на конечный угол, при этом совершенно исключались. Эйлер вообще не представлял себе необходимым допускать подобные вариации, хотя Дан. Бернулли письменно обратил его внимание на один такой случай еще в 1736, да и сам он в одной статье о колеблющейся струне (Misc. Taur., т. III, 1762/65) встретился уже с такими возможностями. В работе 1779 [вышла в Mém. Ac.

Pétersb., 1811 (1813)] Эйлер затем приложил вариационное исчисление к пространственным кривым с экстремальными свойствами, а в другой статье, опубликованной также после его смерти, занялся брахистохронами, удовлетворяющими некоторым специальным условиям [там же, 1817/18 (1822)].

Среди прочих работ, появившихся в этот промежуток времени, следует отметить статью старшего сына Леонарда Эйлера, Иоганна Альбрехта, написанную в 1757 и опубликованную в трудах Мюнх. Акад. 1764. Автор, пользуясь методами своего отца, определил здесь кривую, лежащую в основании конуса данной высоты и площади боковой поверхности, объем которого должен быть максимальным[1]).

Сам Лагранж несколько раз возвращался к вариационному исчислению. В статье 1770 (Misc. Taur., т. IV, 1766/69) он исправил ошибку, допущенную им при исследовании брахистохроны в случае, когда начальная точка движения лежит на данной кривой, — ошибка, за которую его упрекнул Бордá в Mém. Ac. Paris, 1767 (1770). Кроме того, он расквитался здесь с некоторыми учеными, которые, несущественно изменив приемы, принадлежавшие ему и Эйлеру, выдавали их за свои собственные: так поступили Фонтен в только что цитированном томе Mém. Ac. Paris и минориты Т. Лесер и Ф. Жакье в не лишенных вообще достоинств «Началах интегрального исчисления» (Élémens du calcul intégral, Парма, 1768). В «Аналитической механике» (1788) Лагранж существенно дополнил свои исследования, сведя вариационные задачи на условные экстремумы к безусловным экстремумам; он воспользовался для этого способом неопределенных множителей, введенным при изучении систем дифференциальных уравнений еще Даламбером и употребленным Эйлером в изопериметрических задачах. К детальному исследованию таких вариационных задач Лагранж впоследствии возвратился в «Теории аналитических функций» (1797) и «Лекциях об исчислении функций» (Séances Éc. norm., 1801; отдельное издание 1806), в которых ему представился случай связно изложить свою теорию, не пользуясь понятиями дифференциала и бесконечно малого. В 22-й главе «Лекций» он среди других образцов применения теории решил, между прочим. задачу о кратчайшей кривой, лежащей между двумя точками на произвольной поверхности, разбиравшуюся еще в «Методе нахождения кривых линий и т. д.» Эйлера, а также определил дифференциальное уравнение минимальных поверхностей, найденное раньше иным путем Менье (1776), Монжем (1784) и Лежандром (1787) (см. стр. 298, 302). Но и здесь он лишь мельком коснулся вопроса о различении максимума от минимума с помощью второй

---

[1]) Задача об определении кривой, лежащей в основании конуса данной высоты, имеющего при данном объеме наименьшую боковую поверхность, была в 1758 рассмотрена другим учеником Эйлера С. Я. Румовским [Nov. Comm. Ac. Petr., 1760/61 (1763)]. — *Прим. ред.*

вариации. Разработка этой трудной проблемы вообще заставила себя ждать довольно долго. После неудачной попытки Лапласа (1770, опубликовано в Nov. Ac. Erud., 1772) первых заметных успехов в этом направлении достиг Лежандр в Mém. Ac. Paris, 1786 (1788). Ему удалось представить вторую вариацию с помощью произведения двух множителей, один из которых является квадратом, например в виде

$$\int \frac{\partial^2 v}{\partial y^{(n)2}} (\delta y'' + \mu\delta y' + \nu\delta y)^2.$$

Лежандр счел возможным поэтому заключить, что знак второй вариации зависит только от другого множителя, который для данной функции $v(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ имеет вообще вид $\frac{\partial^2 v}{\partial y^{(n)2}}$. Полученное отсюда условие существования экстремальных значений того или иного рода оказалось, однако, недостаточным. Уже Лагранж в «Теории аналитических функций» (1797) на примере

$$\frac{x}{1-x} = \int \frac{dx}{(1-x)^2}$$

показал, что интеграл от произведения двух таких множителей может на данном отрезке менять знак, хотя подынтегральная функция знакопостоянна, если последняя обращается в некоторых точках отрезка в бесконечность. Достаточные условия для определения знака второй вариации смог дать лишь Якоби в 1837.

В названной статье 1788 Лежандр, критически анализируя упомянутую выше задачу Ньютона о теле наименьшего сопротивления, говорит также о решениях, соответствующих сильным вариациям и формально удовлетворяющих задаче, так что экстремумы, получающиеся в отдельных случаях, оказываются лишь относительными. Однако этот вопрос был разъяснен лишь в новейшее время Л. Шеефером и К. Вейерштрассом. В общем, можно сказать, что к концу XVIII века было завершено лишь формальное изучение первой вариации. Только в XIX столетии были выяснены и снабжены доказательствами точные условия, при которых правомерны операции, беззаботно производившиеся математиками XVIII столетия, как перемена местами знаков d и δ, варьирование под знаком интеграла и метод множителей, не вполне справедливо называемый исключительно по имени Лагранжа. Установление достаточных условий экстремума, изучение вариации кратных интегралов с переменными пределами также принадлежат XIX столетию.

§ 2. Исчисление конечных разностей и интерполирование

Исчисление конечных разностей состоит по сути дела в исследовании отношений между значениями, принимаемыми функциями, когда их аргумент или же аргументы изменяются на равноотстоящие интервалы. Поэтому названная математическая дисциплина и вместе с тем интерполирование возникли, как только начали составлять более значительные по объему числовые таблицы. Основные формулы ее содержались и применялись уже в «Логарифмической арифметике» (Arithmetica logarithmica) Г. Бригса (1624) и продолжавшей их «Британской тригонометрии» (Trigonometria britannica) Г. Геллибранда (1633), а также в таблицах солнечных склонений, приведенных Г. Мутоном в «Наблюдениях видимых диаметров Солнца и Луны» (Observationes diametrorum Solis et Lunae apparentium, 1670). Для Лейбница вычисления с конечными разностями явились отчасти исходным пунктом создания дифференциального исчисления, которое Тейлор в «Методе приращений» (1715) затем попытался построить прямо на этой основе. В Тейлоре следует видеть первого творца теории конечных разностей в собственном смысле слова.

В то время как Лейбниц всегда пользовался символом дифференциала d, Тейлор обозначал приращения и уменьшения, ставя под буквами точки или цифры, причем он употреблял также отрицательные индексы. Символ Тейлора $\underset{\cdot\cdot}{x}$ $(=\underset{2}{x})$ в нашем обозначении, предложенном Эйлером в «Основаниях дифференциального исчисления» (1755), есть, таким образом, $\Delta^2 x$, $\underset{\cdot}{x}(=\underset{1}{x})=\Delta x$, $\underset{0}{x}=x$, а $\underset{-1}{x}$ представляет $\sum x$, так что $\Delta \underset{-1}{x}$ равно x и т. д. Применение отрицательных индексов такого рода не было чуждым и Лейбницу. Он рассматривал интегрирование как дифференцирование с отрицательным индексом и задумывался даже над дифференцированием с дробным индексом. Эти идеи, изложенные им в письмах к Иог. Бернулли и Лопиталю от 1695, остались в свое время неопубликованными. Но Лейбниц действительно подготовил почву для символики разностного исчисления, указав, правда, сначала только для дифференциалов, на аналогию между разложениями $d^m(xy)$ и $(x+y)^m$. Свои результаты, первоначально сообщенные И. Бернулли в 1695 и Валлису в 1697, Лейбниц опубликовал в первом томе Misc. Berol., 1710 в статье «Замечательный символизм и т. д.» (Symbolismus mirabilis etc.). Символические обозначения общей теории разностного исчисления разработали позднее Лагранж [Nouv. Mém. Berl., 1772 (1774), Mém. Ac. Berl., 1792/93 (1798)] и Лаплас [Mém. Ac. Paris, 1777 (1780) и 1779 (1782)].

Начатки подлинного исчисления конечных разностей можно видеть и в исследованиях арифметических рядов высших порядков, появившихся в XVI и XVII столетиях. После того как С. Якоб в арифметике 1565, составленной не позднее 1552, нашел сумму ряда [1])

$$1+2+4+7+11+16+22+29,$$

[1]) Правда, Якоб образовал этот ряд из ряда треугольных чисел

$$0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,$$

увеличив все члены последнего на единицу; суммирование же треугольных чисел произвел еще Никомах (II столетие нашей эры).

М. Бернеггер в «Учебнике математики» (Manuale mathematicum, 1619) заметил постоянство третьих разностей ряда

$$1^3+2^3+3^3+\ldots,$$

а И. Фаульгабер в «Продолжении нового чудесного искусства» (Continuatio seiner neuen Wunderkünste, 1617) привел суммы одиннадцати первых степенных рядов вида

$$1^m+2^m+3^m+\ldots,$$

Хотя вывод у Фаульгабера отсутствовал, следует думать, что он составил ряды разностей по крайней мере для первых значений m, ибо позднее, в Academia algebrae (1631), он определенно отметил постоянство $\Delta^{20}(x^{20})$ [1]). Согласно одному письму Ферма́ к Мерсенну от сентября 1636, и он открыл способ суммирования таких рядов, оставшийся, однако, до сих пор неизвестным. Аналогичное сообщение отправил в 1673 Ольденбургу Лейбниц, просуммировавший для примера ряд третьих степеней. Пользуясь повторным образованием разностей, Ньютон в «Началах» (1687) и в «Методе разностей» (1711) получил свои шесть интерполяционных формул, а именно, так называемые формулы для интерполирования вперед, назад и на середину, притом как для равноотстоящих, так и для неравноотстоящих абсцисс [2]). Заметим кстати, что слово «интерполяция» впервые употребил Валлис в «Арифметике бесконечных» (1656). Стирлинг, именем которого часто называют одну интерполяционную формулу, не дал в действительности новых формул. Формулы Котеса, опубликованные в приложении к «Гармонии мер» (1772), также не были новыми, но были выведены из других соображений. Одну из формул

---

[1]) В Academia algebrae (Ульм, 1631) Фаульгабер вычислил суммы степеней целых чисел до $\sum n^{17}$ и при этом получил первые восемь чисел Бернулли.

[2]) «Метод разностей» был написан Ньютоном не позднее осени 1676, но интерполяционная формула

$$f(a+xh)=f(a)+x\Delta f(a)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(a)+\ldots$$

была известна еще в 1670 Дж. Грегори. См. Э. Уиттекер и Г. Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений. Перев. под ред. Н. М. Гюнтера, Л. — М., 1933, стр. 15.

Интерполяционная формула Грегори — Ньютона с членами до второй степени впервые встречается у китайских астрономов VI столетия; на рубеже VII и VIII столетий она была распространена на случай неравноотстоящих значений аргумента; в XIV столетии к формуле для равноотстоящих значений аргумента был добавлен член, содержащий разности третьего порядка. Эти формулы получали применение в астрономических и календарных расчетах. См. Li Yen, The interpolation formulae of early Chinese mathematicians. Actes du VIII Congrès international d'histoire des sciences. Florence, 3—9 September 1956. — *Прим. ред.*

Ньютона привел в неявном виде также Ж. Озанам в т. II своего «Курса математики» (1693).

Ф. Николь в Mém. Ac. Paris, 1717/19 (1720) поставил целью разъяснить и пополнить несколько трудное для понимания изложение Тейлора. Среди прочего материала он в явной форме привел разность и сумму так называемой «обобщенной степени» $x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(n-1)h)$, а также ее обратного значения. Дробные рациональные функции он при этом разлагал на простые дроби с такими же «степенями» в знаменателях и постоянными числителями. Другая, позднейшая статья в том же томе Mém. Ac. Paris, написанная учителем Николя, де-Монмором, методически излагала прием Николя. Эта статья содержала также приложение, написанное Тейлором, в котором он применил разложение на простые дроби с линейными знаменателями к определению суммы дробной функции. В «Методе разностей» (1730) Стирлинг рассмотрел тот же вопрос, пользуясь по существу способом Николя. Впрочем, уже в Phil. Trans., 1719 Стирлинг внес серьезный вклад в исчисление конечных разностей, применив интерполяционный метод Ньютона к улучшению сходимости бесконечных рядов. Сам Николь в Mém. Ac. Paris, 1723, 1724 и 1727 опубликовал еще несколько статей, в которых приложил свой прием к суммированию бесконечных рядов, составленных из обобщенных отрицательных степеней. Упомянем еще две работы де-Ланьи в Mém. Ac. Paris, 1705 и 1722, в которых он воспользовался высшими разностями для решения уравнений. Можно сказать, что в 1730, после выхода «Метода разностей» Стирлинга, был заложен прочный фундамент исчисления конечных разностей. В дальнейшем построении его приняли участие крупнейшие математики XVIII столетия.

Прежде всего здесь следует назвать Эйлера. В первой главе «Оснований дифференциального исчисления» (1755) он дал полное изложение вычислений с конечными разностями и суммами, которые применил во второй главе к интерполированию рядов. В дальнейшем изложении Эйлер обращается к разностям для преобразования с их помощью одних рядов в другие, либо конечные, либо скорее сходящиеся. После того разностное исчисление аналогично применял Ф. Мазéр (Phil. Trans., т. 67, ч. I, 1777). Эйлер занимался интересующей нас дисциплиной и позже. В Nov. Comm. Ac. Petr., 1762/63 (1764) он вычислил разность функции $\operatorname{arctg}(ax+b)$, а в 1776 написал небольшую статью о суммах рядов $1^n+2^n+\ldots$ $\ldots+x^n$, опубликованную в Nov. Act. Ac. Petr., 1788 (1790). Так называемая формула суммирования Эйлера — Маклорена (см. стр. 142) относится, собственно говоря, тоже к исчислению конечных разностей. Укажем, кроме того, на статью Вандермонда в Mém. Ac. Paris, 1772 (ч. I, 1775), посвященную обобщенным степеням и, в частности, разъясняющую сходство, существующее между ними и степенями.

Уравнения в конечных разностях неоднократно рассматривались попутно и сходно с соответствующими типами дифференциальных уравнений. В «Методе приращений» Тейлор привел первый метод решения общего линейного уравнения в конечных разностях. Но разностные уравнения встречались и в связи с другими проблемами. Например, в первом томе Misc. Taur., 1759 Лагранж сообщил новый метод изучения возвратных рядов, основывавшийся на решении разностных уравнений[1]). Отправляясь от простейшего линейного уравнения в конечных разностях

$$\Delta y + My = N,$$

где M и N суть постоянные или же зависят от x, он перешел к наиболее общему линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами

$$y + A\Delta y + B\Delta^2 y + \ldots = X_x$$

и разработал метод решения последнего, сходный с методом неопределенных коэффициентов, примененным к дифференциальным уравнениям Даламбером.

Вслед за этой статьей Лагранжа в Mém. prés. Ac. Paris [т. VI, без указания даты (1774), и т. VII за 1773 (1776)] появились две работы Лапласа о возвратно-возвратных рядах, в которых автор обобщил идеи Лагранжа, опередив его в этом, как признал тот в следующей статье в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1775 (1777). После того Лагранж постарался дать более простую и общую трактовку того же предмета. Во второй из названных статей Лаплас получил также разностные уравнения, исходя из функциональных уравнений, вроде $f(x)^2 = f(2x) + 2$; этот отправной пункт был затем использован Ж. Шарлем в Mém. Ac. Paris, 1786 (1788).

Впрочем, разностными уравнениями Лаплас занимался еще в Misc. Taurin, т. IV, 1766/69. В одной статье, написанной, по-видимому, лишь в марте 1771, он развил метод интегрирования общих линейных дифференциальных уравнений n-го порядка и перенес его на уравнения в конечных разностях. Прежде всего он нашел, что неоднородное линейное разностное уравнение

$$X_x = y_x + H_x y_{x+1} + {}'H_x y_{x+2} + {}''H_x y_{x+2} + \ldots$$

всегда разрешимо, если разрешимо соответствующее однородное уравнение ($X_x = 0$), как это показал для дифференциальных уравнений Лагранж.

К рассматриваемым здесь исследованиям Лапласа неоднократно приводили проблемы теории вероятностей. Других, как, например,

---

[1]) Для обозначения конечных разностей Лагранж пользовался не знаком Δ, а d, а для конечных сумм не Σ, а $\int$, Лаплас же употреблял символику Эйлера.

Кондорсе, разобравшего сходные задачи разностного исчисления в книге «Об интегральном исчислении» (1765) и в Mém. Ac. Paris, 1771 (1774) и 1772 (ч. I, 1775), к разностным уравнениям привело определение произвольных функций, участвующих в решениях дифференциальных уравнений с частными производными и удовлетворяющих некоторым условиям. Работу такого характера опубликовал также Монж в Mém. prés. div. sav. Ac. Paris, 1773 (1776). В несколько более ранней работе в Mém. Ac. Paris, 1770 (1773), на которую опирался потом Лаплас, Кондорсе уже попытался перенести на конечные разности понятия полного дифференциала и вариации, а также разработать методы приближенного решения разностных уравнений. Шарль в Mém. Ac. Paris, 1786 (1788) исследовал особые решения разностных уравнений.

Случай, когда разность Δx не постоянна, а является данной функцией x, впервые был рассмотрен Монжем (Mém. prés. div. sav. Ac. Paris, т. IX, 1780, прислано в 1774), но подробнее и более общим образом его изучил Лорнья в Mem. Mat. Soc. Ital., 1782.

Мы должны еще раз кратко обратиться к упомянутым выше статьям Лапласа. Определенные уже в первой из них возвратно-возвратные ряды зависели от двух параметров, а уравнение, выражавшее закон развития ряда, являлось уравнением в частных конечных разностях. Общее решение его, как и у дифференциальных уравнений с частными производными, содержало произвольную функцию. Лаплас свел решение этого уравнения к решению системы обыкновенных разностных уравнений. Мы уже говорили на стр. 141 об одной позднейшей работе Лапласа сходного содержания, вышедшей в Mém. Ac. Paris, 1779 (1782). Упомянем только еще, что в этой статье Лаплас рассмотрел уравнения, содержащие наряду с разностями, дифференциалы. Такие смешанные уравнения изучал также Лорньа в Mem. Mat. Soc. Ital., 1788.

Лагранж в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1778 (1780), 1783 (1785) и в Mém. Ac. Berl., 1792/93 (1798) опубликовал также важные работы по *интерполированию*. В частности, следует упомянуть известную формулу, которая носит имя Лагранжа, приведшего ее без доказательства в «Элементарных лекциях по математике и т. д.» [Leçons élémentaires sur les mathématiques etc., год III (1795)], но которая задолго до того была сообщена в Phil. Trans., 1779 Варингом. Как и формула Ньютона, она соответствует проведению через данные точки некоторой параболической кривой. Ришь де-Прони в Journ. Éc. Polyt. [год IV (1796)] предложил вместо того употреблять сумму показательных функций. Однако гораздо большее распространение и значение, особенно в приложениях, приобрело тригонометрическое интерполирование. Основные формулы

$$\sum_{0}^{m} \sin(a+\mu t) \quad \text{и} \quad \sum_{0}^{m} \cos(a+\mu t)$$

установил Эйлер (Misc. Berol., 1743), рассматривая при этом левые стороны формул как возвратные ряды. Для случая $a=0$ эти формулы восходят к Архимеду, а затем к В. Снеллю (1627).

Мы не будем останавливаться на разложениях в бесконечные тригонометрические ряды, о которых уже говорили (стр. 191) и которые сюда по существу не относятся, хотя отчасти они были выведены с помощью интерполирования. Из открытий XVIII столетия мы должны только отметить, что впервые определенным образом решил задачу о проведении через n точек с равноотстоящими абсциссами кривой, составленной из n синусоид, опять-таки Лагранж (Misc. Taur., 1759 и 1762/65). Если к этой работе его привел вопрос о колеблющейся струне, то задача об определении неравенств планетных орбит дала ему повод изучить тригонометрическое интерполирование гораздо более общим образом [Mém. Ac. Paris, 1772 (1, 1775)]. В связи с указанной задачей Лагранж определил также величины периодов отдельных компонент, для чего применил возвратные ряды в непрерывные дроби. В Berl. Astron. Jahrb., 1783 (1780) он добавил к этому статью, в которой для получения возвратных рядов с действительным рекуррентным соотношением сначала образовал разностные ряды по данным значениям функций. Но как ни остроумен был этот прием Лагранжа, он все же обладал лишь теоретическим значением. Настоящее практическое применение тригонометрическое интерполирование получило только в XIX столетии.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЯ И ТРИГОНОМЕТРИЯ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ, В ЧАСТНОСТИ, ТЕОРИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

§ 1. Создание аналитической геометрии Ферма́ и Декартом

Первым краеугольным камнем аналитической геометрии явился трактат Ферма́ «Введение в изучение плоских и телесных мест» (Ad locos planos et solidos isagoge). Хотя это сочинение стало известным в кругу парижских математиков еще до 1637, но впервые было опубликовано лишь после смерти автора в 1679 в Varia Opera. Чтобы правильно понять, в какой мере продвинулся здесь вперед Ферма́, и чтобы суметь сравнить достижения его и Декарта, мы должны будем возможно точнее передать содержание этого небольшого сочинения. При этом мы только отчасти воспользуемся современными обозначениями [1]), в остальном же будем непосредственно следовать за Ферма́.

Ферма́ прямо заявляет, что всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, то налицо имеется геометрическое место, которое описывает конечная точка одной из неизвестных [2]). Обе неизвестные величины целесообразно брать под определенным углом и для одной из них следует взять на какой-либо определенной прямой определенную начальную точку (N). Эту первую неизвестную Ферма́ всегда обозначал NZ и называл ее A, другую же, соответственно, ZI и E. Мы заменим A

---

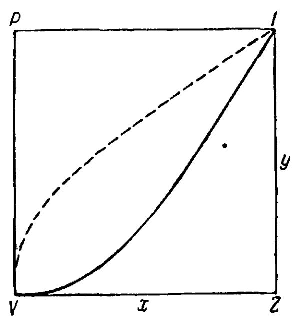
[1]) Уже в Varia Opera не употреблялся способ записи самого Ферма́, непрактичный и примыкавший к Виету. С ним, впрочем, можно познакомиться по перепечатке в первом томе «Сочинений» Ферма́, подготовленном на основании одной старинной копии.

[2]) Под величиной Ферма́ понимает здесь прямолинейный отрезок. — *Прим. ред.*

и E на x и y. Далее, с помощью подобных треугольников Ферма́ показывает, что в случае уравнения $Dx = By$ точка I должна лежать на прямой, проходящей через N. При этом он начертил лишь верхнюю часть прямой. Коэффициенты здесь являлись отрезками, а если они должны были означать площади, то к ним добавлялось *pl.* (*anum*). Затем Ферма́ доказывает, что каждое уравнение вида $Z pl. - Dx = By$ также представляет прямую, для чего полагает $Z pl. = DR$ и вновь пользуется подобием треугольников. Так обстоит дело со всяким уравнением, содержащим только x и y. Здесь же Ферма́ приводит теорему, которую, обобщая одно предложение книги Аполлония «О плоских местах», формулирует так: «Допустим, что имеется какое-либо число данных по положению прямых и что к ним из некоторой точки проведены под заданными углами прямые (отрезки); если сумма произведений этих проведенных прямых на данные равна данной площади, точка находится на данной по положению прямой».

«Второй порядок» таких уравнений получается, когда $xy = Zpl.$ Это уравнение представляет собой не что иное, как перевод на язык алгебры одного свойства гиперболы, встречавшегося уже в «Конических сечениях» Аполлония. Ферма́ вычерчивает прямой угол первого квадранта (как говорим мы) и расположенную в нем ветвь равносторонней гиперболы. Каждое уравнение, содержащее только x, y и xy, например, $D pl. + xy = Rx + Sy$ можно привести к этому случаю. Ферма́ преобразует это уравнение в $(x - S)(R - y) = D pl. - RS$ и теперь может снова применить теорему Аполлония. Вычерчивается лишь кусок одной ветви гиперболы.

«Следующий порядок» заключает все уравнения, члены которых содержат лишь x^2, y^2 и xy. Ферма́ соединяет произвольно взятую точку I с начальной точкой N и, пользуясь пропорциональностью отрезков, показывает на одном примере, что такому уравнению удовлетворяют все точки прямой NI. Следовательно, точка I лежит на прямой. Недостаточность приема и неполнота результата здесь очевидны.



Черт. 7.

Иначе обстоит дело далее, когда Ферма́ полагает $x^2 = Dy$, ибо, опираясь на Аполлония, он может здесь сразу сказать, что речь идет о параболе (черт. 7). Он сейчас же замечает, что уравнению $y^2 = Dx$ соответствует парабола, проведенная на фигуре штрихом. Вслед затем, полагая $B^2 = DR$, он преобразует уравнение $B^2 - x^2 = Dy$ к форме $D(R - y) = x^2$, которая оказывается тождественной с только что указанной, если только принять $R - y$ за y. Подобным же образом можно рассмотреть все уравнения, содержащие x^2 и y.

Однако может быть, что x^2 входит в уравнение вместе с y^2 и постоянными. Конечно, для Ферма́ легко было показать, что $B^2 - x^2 = y^2$ представляет окружность; на чертеже была изображена лишь часть ее, немного большая первого квадранта. Но Ферма́ указывает также совершенно правильно общие условия, при которых уравнение выражает окружность, и рассматривает пример

$$B^2 - 2Dx - x^2 = y^2 + 2Ry.$$

Он приводит это уравнение к форме, записываемой нами здесь несколько короче:

$$P^2 - (x + D)^2 = (y + R)^2.$$

Беря затем снова x вместо $x + D$ и y вместо $y + R$, он получает исходную форму. Пример одного геометрического места, приведенный в конце трактата, показывает, что Ферма́ хорошо знал, как построить центр и радиус такой произвольно расположенной окружности.

Но если $B^2 - x^2$ находится в данном отношении к y^2, то точка лежит на эллипсе (чертеж отсутствует). Увидеть это было опять-таки легко, ибо, согласно Аполлонию, у эллипса отношение квадрата ординаты к прямоугольнику, построенному на отрезках диаметра $B + x$ и $B - x$, должно быть постоянным. Ферма́ также определенно подчеркивает, что если привести пропорцию к виду уравнения, то при x^2 и y^2 должны стоять различные знаки и различные коэффициенты; последнее необязательно только тогда, когда выбранный угол отличен от прямого, — теорема Аполлония ведь относилась к любым сопряженным диаметрам. Уравнения, содержащие еще x и y, могут быть приведены к простейшей форме с помощью уже примененного выше преобразования.

Если в данном отношении к y^2 находится $x^2 + B^2$, то точка I лежит на гиперболе. Приведение этого случая к соответствующей теореме Аполлония было для Ферма́ несколько труднее. Но если мы станем понимать слово «отрезок» в современном значении, то теорема о гиперболе будет формулироваться точно так же, как теорема об эллипсе. Поэтому, если только принять x за ординату в нашем смысле, как здесь и поступает Ферма́, то в современном обозначении

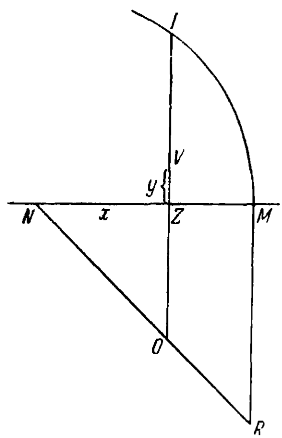
$$x^2 = \lambda (y + a)(y - a),$$

а это будет тождественно с начальным требованием, коль скоро мы положим $\lambda a^2 = B^2$. Здесь вычерчивались обе ветви гиперболы. Относительно уравнений, содержащих еще члены с x и y, следует иметь в виду вышеуказанное обстоятельство.

Наиболее трудным является, конечно, случай, когда наряду с x^2 и y^2 встречаются еще члены с xy. Ферма́ его так и квалифицирует. В качестве примера он берет уравнение $B^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$ и приводит его к виду

$$B^2 - x^2 = (x + y)^2;$$

поскольку теперь он берет NZ за x и ZI за $x+y$ (черт. 8), точка I описывает окружность. Здесь возникает вопрос, какое геометрическое место описывает точка V, если взять $IV=NZ$. Ферма́ строит равнобедренный прямоугольный треугольник NMR и доказывает в обстоятельном античном стиле, что отношение VO^2 к NR^2-NO^2 является тогда постоянным. Но согласно приведенной выше теореме точка V лежит в таком случае на эллипсе с полуосью NR, для которой сопряженным служит направление OV. Мы немедленно замечаем, что $NR^2-NO^2=2(B^2-x^2)$ и так как $VO=x+y$, то указанное постоянное отношение равно $1/2$. Аналогичным путем, говорит Ферма́, можно исследовать также все прочие случаи. Это, разумеется, справедливо, но можно было бы пожелать, чтобы Ферма́ показал это на менее удобоприспособленном примере. В заключение Ферма́ говорит, что теперь изложено все, что оставили невыясненным относительно геометрических мест древние, а все прочее, что относится к этому предмету, можно будет отныне найти без труда. Высшие («линейные») места, как он уже сказал в начале своей работы, с помощью приведений можно легко свести к «плоским» (т. е. прямой и окружности) и «телесным» (т. е. эллипсу, параболе, гипереболе).



Черт. 8.

Мы не знаем, ознакомился ли Декарт с этим сочинением, или по крайней мере с содержащимися в нем результатами и методом Ферма́, до публикации своей «Геометрии» (1637, ср. стр. 15). Во всяком случае, то, что Декарт сообщил в своем труде, было сделано настолько по-иному, что не может быть речи о том, чтобы Ферма́ послужил для него какой-либо опорой. В одном отношении Декарт дал в «Геометрии» меньше, чем Ферма́, ибо у Декарта не было столь систематического изложения простейших уравнений и их геометрических образов, но зато в другом — много, много больше, поскольку Декарт, как мы уже показали в различных местах первой части (особенно стр. 36—38), одновременно усовершенствовал и по форме, и по существу алгебру, а также обратил отношение между ней и геометрией, поставив на первое место алгебру с тем, впрочем, чтобы в заключение применить найденные с ее помощью геометрические места к графическому решению опять-таки алгебраических уравнений (см. стр. 57—58). Отсутствие систематического изложения простейших форм уравнений вообще не следует расценивать как подлинный научный недостаток Декарта в сравнении с Ферма́. Во-первых, в ряде мест

«Геометрии» и своей переписки Декарт указывал, что желал наметить лишь общие контуры своего нового метода, которые нередко оставлял туманными даже нарочно (ср. стр. 58). Во-вторых, даже для неслишком творчески одаренного математика было нетрудно, если только он был в состоянии понять «Геометрию», дать изложение и интерпретацию простейших форм уравнений. Действительно, вскоре после выхода «Геометрии» это осуществил друг Декарта Ф. Дебон (см. стр. 223).

Наше общее суждение мы желаем построить на точной передаче содержания этого величественного для своего времени труда. Декарт начинает с утверждения, что всякая геометрическая задача приводится в конце концов к определению длин или соответственно к построению некоторых отрезков. При этом он имеет в виду не что иное, как алгебраическое вычисление неизвестных отрезков (z, y, x) по данным (a, b, $c, \ldots$) и построение отрезка z по уравнению с одним неизвестным z, возникающему после удаления всех других неизвестных. Такое алгебраически-геометрическое решение геометрических задач ввел еще Виет в «Каноническом разборе геометрических действий» — Effectionum geometricarum canonica recensio, около 1593[1]), если не говорить о более ранних попытках Бенедетти («Книга о различных математических и физических размышлениях» — Diversarum speculationum math. et phys. liber, Турин, 1580). П. Катальди пошел по стопам Виета в третьей части своей «Дискурсивной алгебры» (Algebra discorsiva, Болонья, 1618). Но все эти авторы достигли лишь геометрического построения решений уравнений. Подробнее произвел алгебраический анализ некоторых настоящих задач М. Гетальди в своих книгах «Собрание различных задач» (Variorum problematum collectio, Венеция, 1607) и «О математическом анализе и синтезе» (De resolutione et compositione mathematica, Рим, 1630). В терминологии и символике Гетальди присоединился к своему учителю Виету. Только что названный второй большой труд в 343 страницы (in folio) заключал довольно беспорядочный и неравномерный[2]) набор задач на деление отрезков, построение треугольников и вставки (Цейтен, ч. II). За Гетальди последовал У. Оутред («Ключ к математике», 1631, см. стр. 13), примкнувший в подборе задач к первому приведенному сочинению Гетальди, но сделавший существенный шаг вперед в их алгебраической трактовке.

Декарт не рассматривал подобные элементарные задачи, хотя его комментаторы неоднократно приводили примеры этого рода

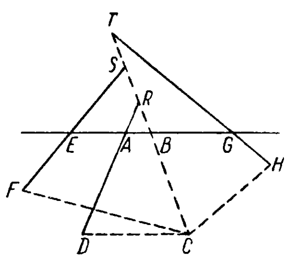
---

[1]) Оригинал вышел без указания года и места издания, а также фамилии издателя.

[2]) Например, одна лишь задача о вставке между двумя полуокружностями, диаметры которых лежат на одной прямой, отрезка данной длины, продолжение которого проходит через конец одного из диаметров, занимает 130 страниц.

(стр. 224). Его внимание, напротив, привлекли задачи, в которых получается меньше уравнений, чем должно быть введено неизвестных. Это свидетельствует, говорит он, что задача — не вполне определенная, и в этом случае для всех неизвестных, которым не соответствует никаких уравнений, можно взять произвольные известные отрезки. Затем он обращается к задаче Паппа (около III столетия нашей эры, см. Цейтен, ч. 1), проходящей красной нитью через все сочинение. В названной задаче речь идет о «геометрическом месте к трем, четырем (или более) прямым», некоторые случаи которого рассмотрел еще Аполлоний. Дается некоторое число, три, четыре или более прямых; требуется найти геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что от них можно провести к каждой из прямых по отрезку, образующему с ней данный угол, так, чтобы в случае трех прямых прямоугольник, построенный на двух этих отрезках, находился в данном отношении к квадрату третьего, чтобы в случае четырех прямых прямоугольник на двух отрезках находился в данном отношении к прямоугольнику на двух других, и т. д. Уже древние знали, что в случае трех или четырех прямых геометрическим местом является коническое сечение, хотя они и не дали более точных указаний относительно его рода и расположения. Однако в случае более шести прямых возникает то затруднение, что, как говорим мы и как это тотчас отметил Декарт, произведение четырех и больше отрезков не имеет уже никакого геометрического смысла. В связи с этим Папп указывал на необходимость пользоваться в подобных случаях «сложными отношениями», не сообщив, однако, каких-либо результатов.

Декарт подходит к этой задаче следующим образом. Он берет четыре прямые AB, AD, EF, GH и допускает, что для некоторой точки C задача решена и что CB, CD, CF, CH представляют собой четыре отрезка, удовлетворяющих указанному условию, а углы при B, D, F, H даны (черт. 9). Среди этого множества линий Декарт выбирает одну из данных и одну из искомых, именно AB и CB, и относит к ним остальные. AB он называет x, а BC через y, продолжает все остальные данные прямые до пересечения с прямыми отсчета и полагает $AE=k$, $AG=l$. Все углы треугольников на чертеже известны, так что все отрезки можно выразить через x, y, k, l. Но так как Декарт не употребляет теоремы синусов, то он принимает, выражая, впрочем, это словами:



Черт. 9.

$$AB:BR=z:b,\quad CR:CD=z:c,\quad BE:BS=z:d,$$
$$CS:CF=z:e,\quad BG:BT=z:f,\quad CT:CH=z:g,$$

так что все эти данные отношения имеют один и тот же предыдущий член z. Мы можем теперь предоставить читателю самому произвести последовательно выкладки и получить, что

$$BR=\frac{bx}{z},\quad CR=y+\frac{bx}{z},\quad CD=\frac{cy}{z}+\frac{bcx}{z^2},$$

$$BS=\frac{dk+dx}{z},\quad CS=\frac{zy+dk+dx}{z},\quad CF=\frac{ezy+dek+dex}{z^2},$$

$$BT=\frac{fl-fx}{z},\quad CT=\frac{zy+fl-fx}{z}\quad \text{и}\quad CH=\frac{gzy+fgl-fgx}{z^2}.$$

Современный читатель заметит, что выражения для CD, CF, CH пропорциональны расстояниям точки C от прямых AD, EF, GH и, значит, левым частям уравнений этих прямых в системе координат, в которой осью абсцисс является AB, началом координат служит A, а ось y направлена параллельно BC.

Теперь Декарт может указать, что его способ вычисления расстояний CD и т. д. всегда и при любом числе данных прямых приводит к линейному, как коротко говорим мы, выражению относительно x, y. Поэтому в случае трех, четырех, а также и пяти прямых задача оказывается плоской, т. е. при любом значении y соответствующее x можно построить с помощью циркуля и линейки, ибо для x получается квадратное уравнение. Если, пишет Декарт, придавать отрезку y последовательно бесконечное множество различных значений, то найдется бесконечное множество значений и для отрезков x, и таким образом получится бесконечное множество точек C, с помощью которых можно описать искомую кривую. Декарт не упускает из виду, что в случае пяти параллельных прямых задача более не является плоской, и сообщает, каковы будут измерения уравнений при большем числе данных прямых. Этим заканчивается первая книга «Геометрии».

Здесь Декарт прерывает исследование задачи Паппа. Вторую книгу он открывает общими соображениями о типах и классификации кривых (см. ниже стр. 263—264). Мы отметим пока лишь его слова, что все точки каждой кривой находятся в каком-либо отношении ко всем точкам некоторой прямой и что это отношение может быть выражено (посредством двух «неопределенных величин») уравнением, одним и тем же для всех точек кривой. Чтобы все это стало более понятным, он рассматривает одно геометрическое место, являющееся гиперболой, выбирает для установления искомого уравнения прямую AB, дабы «отнести к ее различным точкам точки искомой кривой», и начинает вычисления на прямой AB с точки A. Хотя прямая AB и точка A вибираются возможно более целесообразно, но Декарт дает понять, что он умеет доказать, что измерение кривой не изменилось бы при любом другом их выборе. Уравнение, которое он в конце концов получает, таково:

$$y^2=cy-\frac{cxy}{b}+ay-ac.$$

Мы привели его как первое уравнение конического сечения, записанное в обычном для нас виде (здесь x и y даже взаимно перпендикулярны).

Лишь сделав еще ряд замечаний общего характера, Декарт возвращается к задаче Паппа. Допустив, что произведение CB и CF должно быть равно произведению CD и CH, он находит уравнение

$$y^2 = \frac{(cfglz - dckz^2)\,y - (dez^2 + cfgz - bcgz)\,xy + bcfglx - bcfgx^2}{cz^3 - cgz^2}.$$

Это уравнение он немедленно приводит в более простой форме

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$$

и решает его относительно y:

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{cz^3 - cgz^2}};$$

затем, введя некоторые сокращенные обозначения, получает

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}.$$

Это выражение, говорит он, представляет длину линии BC, когда AB или x берется неопределенной.

Декарт весьма подробно исследует затем это уравнение, учитывая также знаки отрезков m, n, o, p. Впрочем, уже при выводе выражений для длин проводимых им наклонных отрезков он указал на различные возможные их расположения и обусловливаемые этим изменения знаков [1]). Метод Декарта, а также его последователей в XVII столетии и позднее заключается попросту в том, что отрезки, выражаемые величинами

$$m, \quad \frac{n}{z}x \quad \text{и} \quad \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2},$$

принимаются за построенные и соединяются друг с другом соответственно их знакам. При этом Декарт замечает, что когда радикал есть нуль, точка C находится на прямой, соответствующей уравнению, в правой части которого имеются лишь два первых члена. В случае, если бы корень извлекался, точка находилась бы на некоторой другой прямой, найти которую было бы столь же легко. Поэтому неверно говорить, будто уравнение прямой совершенно отсутствовало в «Геометрии», хотя оно и не встречалось

[1]) Замечание, что отрицательные решения уравнений следует наносить на фигурах в сторону, обратную положительным, определенно встречается в «Новом открытии в алгебре» (Амстердам, 1629) А. Жирара, но по существу оно более раннего происхождения.

в ней самостоятельно как таковое. Теорему о том, что каждое уравнение, линейное относительно x, y, представляет прямую, впервые печатно высказал Дебон (см. стр. 223).

Когда подкоренное выражение не является ни нулем, ни полным квадратом, Декарт, опираясь на Аполлония, показывает, что геометрическое место точек C является коническим сечением. Один из диаметров его лежит на прямой, представленной уравнением $y=m-\frac{n}{z}x$, а квадратный радикал выражает собой ординату («appliquée par ordre», см. стр. 248), параллельную другому сопряженному диаметру. Декарт точно указывает, при каких знаках коэффициентов получаются парабола, эллипс и окружность или гипербола. Он находит положение центра, длины обоих сопряженных диаметров, т. е., коротко говоря, точное положение и размеры конического сечения. По существу, уравнение его выглядит так же, как то, которое записали бы в несколько более современном виде мы. Может лишь удивить, что Декарт так заботится о сохранении однородности, между тем как уже в начале первой книги он разъяснил, что под a^2, b^2 и подобными выражениями он понимает просто отрезки, ибо после введения единичного отрезка их можно построить как таковые (ср. стр. 17). Но сохранение однородности здесь объясняется тем, что он все время видит содержание своей задачи в алгебраически-геометрическом построении отрезка y, хотя, разумеется, воздерживается от конкретного проведения этого построения. Насколько мало интересует его в действительности однородность, которой до него придавалось величайшее значение, Декарт показывает сейчас же по окончании исследования, приводя числовой пример. Для Ферма́, и вообще во всем круге идей Виета, такая мысль была абсолютно чуждой, ибо в алгебраических уравнениях они видели только символы геометрических операций. Декарт принимает

$$EA=3,\ AG=5,\ AB=BR,\ BS=\frac{1}{2}BE,\ GB=BT,$$
$$CD=\frac{3}{2}CR,\quad CF=2CS,\quad CH=\frac{2}{3}CT \text{ и } \sphericalangle ABR=60^\circ,$$

так что получается уравнение

$$y^2=2y-xy+5x-x^2$$

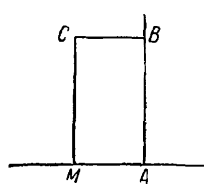
или, по разрешении,

$$y=1-\frac{1}{2}x+\sqrt{1+4x-\frac{3}{4}x^2}.$$

Таким образом, отдельные определяющие элементы конического сечения выражаются теперь числами и притом, вообще говоря, иррациональными числами.

Далее Декарт устанавливает еще уравнение кривой, представляющей собой геометрическое место точек C в случае пяти данных прямых, из которых четыре—параллельные эквидистанты, а пятая к ним перпендикулярна, и когда произведение расстояний от трех параллельных прямых должно быть равно произведению двух других расстояний и еще некоторого данного отрезка (кривая эта — третьего порядка и по терминологии Ньютона принадлежит к трезубцам). За этим следует объяснение способа построения нормалей (см. стр. 111), который применяется к конхоиде Никомеда (правда, вычисления здесь не приводятся) и к появляющимся здесь впервые овалам, носящим теперь имя Декарта (см. стр. 222 и 282). В последнем случае употребляется биполярная система координат. Третья книга содержит описанные нами в первой части методы алгебраического и графического решения уравнений.

Как видно из подробно разобранного нами примера и некоторых других мест второй книги «Геометрии», Декарт рассматривает уравнение, содержащее x, y как выражение отношения точек кривой (которая мыслится в качестве простой ветви) к точкам некоторой прямой. Отношение это устанавливается с помощью параллельных между собой отрезков, которые в нашем примере назывались y и которые, вообще говоря, наклонны к прямой отсчета. На последней Декарт берет некоторую исходную точку для отсчета x, обозначаемую им обыкновенно через A. Но Декарт не проводит последовательного различия в употреблении x и y, у него нет какого-либо предпочтительного направления для прямой отсчета. В третьей книге, в которой, казалось бы, намерения Декарта должны были проявиться особенно отчетливо, он вообще не сообщает уравнений двух используемых там кривых и дает лишь их построение (см. стр. 58). Неизвестную величину алгебраического уравнения он при этом обыкновенно называет z и решения проводятся так, что z оказывается всегда, по нашей терминологии, ординатой. Точки пересечения получаются, естественно, с обеих сторон от прямой отсчета, и Декарт совершенно правильно принимает ординаты, расположенные с одной стороны, за истинные, а с другой — за ложные (т. е. отрицательные, см. стр. 37) корни уравнения.



Черт. 10.

Сравнивая координаты Декарта с координатами Ферма́, мы хотя и найдем некоторое различие в их концепциях, но в основном встретим и здесь и там одинаковый результат, а именно, выражаясь по-современному, ось абсцисс с начальной точкой и систему параллельных, вообще наклонных, ординат. Правда, у Декарта встречается черт. 10, и он говорит, что полагает CB или $MA = y$, CM или $AB = x$. Дебон, его первый комментатор, уже дошел, пользуясь сходным чертежом, до перемены местами x и y

в уравнении $x^2 = by$ (так же действовал Ферма́, см. стр. 213). Но это применение второй оси являлось лишь случайным, поскольку вытекало непосредственно из чертежа. На самом деле отсутствие ее еще долгое время спустя затрудняло развитие аналитической геометрии (см. стр. 239 и след.).

Мы располагаем некоторыми данными относительно времени возникновения в уме Декарта всех этих нововведений, чреватых важнейшими последствиями. Уже в октябре 1628 он рассказывал своему другу И. Бекману, что в течение последних девяти лет сделал в арифметике и геометрии такие успехи, что ему уже нечего более желать, и сообщил ему правило построения всех уравнений третьей и четвертой степени с помощью параболы. В самом деле, примерно в это время Декарт открыл также закон преломления света и попытался установить с помощью математики наиболее целесообразную форму оптических линз. Рассмотрение этого вопроса привело его к овалам, носящим теперь его имя. Сохранился один отрывок, посвященный этим овалам и составленный тогда же [впервые опубликован в «Посмертных сочинениях» (Opusc. posthuma, Амстердам, 1701)]. В этом отрывке Декарт уже вводит абсциссу x, употребляемая же им здесь ордината еще не имеет специального обозначения, а y служит символом некоторого параметра, который позднее в «Геометрии» был обозначен через z. Известно далее, что приблизительно в 1631 ориенталист Як. Гооль обратил внимание Декарта на задачу Паппа. В письме к Гоолю от января 1632 Декарт указывает ее решение, сообщая, что нашел его с помощью вычисления. Таким образом, становится понятным, как вся система алгебраически-аналитических идей сложилась у Декарта к 1637 столь полно, что он в неосновательном самомнении с пренебрежением смотрел на древних и, подобно Ферма́, думал, будто все главное в этой области им уже выполнено.

§ 2. Современники и последователи Декарта

Для современников Декарта понимание «Геометрии» было весьма трудным. Поэтому уже в ближайшем году после ее выхода сам автор позаботился о распространении рукописи, которую он в своих письмах называл «Введением» (Introduction); нам известен лишь неполный экземпляр ее под названием «Исчисление г. Декарта» (Calcul de Monsieur Des Cartes, впервые опубликовано в 1896, см. т. X Oeuvres Декарта). Это «Исчисление» было составлено одним другом Декарта, личность которого точно установить не удалось. В рукописи содержалось краткое введение в алгебраический алгоритм Декарта, приводились три алгебраически-геометрические задачи на треугольники и аналитико-геометрическое определение одного места, восходящего к Аполлонию. Из переписки явствует, что сочинение должно было содержать еще алгебраическое решение задачи об определении шара, касающегося четырех данных шаров. Более подробное алгебраическое введение в «Геометрию» составил по указаниям Скаутена Э. Бартолин, выпустивший его в Лейдене в 1651 под названием «Начала универсальной математики Франца ван-Скаутена и т. д.» (Francisci à Schooten Principia Matheseos universae etc). Сочинение это было присоединено ко второму (1659/61) и следующим латинским изданиям (1683, 1695) «Геометрии» [1]).

Вследствие трудности декартовой «Геометрии» особо заслуживают серьезного внимания работы, специально комментировавшие ее. Одними из таких комментариев были «Краткие замечания» Дебона, которые мы нередко упоминали еще в первой части.

Скаутен приложил их, тоже в латинском переводе, к первому латинскому изданию «Геометрии» 1649; в остальных латинских изданиях они перепечатывались без изменений. Автор собственно не предназначал их к публикации, но Скаутен нашел, что они способны несколько осветить труд Декарта, и это назначение они в свое время, видимо, выполнили. Свои замечания Дебон уже в 1639 переслал Декарту, и мы знаем, что последний оценил их благожелательно. Прежде всего Дебон развил далее исходные идеи и построения Декарта, затем сразу перешел к общему уравнению второй степени и рассмотрел случаи, когда отдельные коэффициенты в нем равны нулю, например, гиперболу $y^2 = xy + xb$, параболу $y^2 = -2dy + bx$, окружность (или эллипс) $y^2 = bx - x^2$, причем угол между x и y все время предполагал произвольным. В качестве новых примеров он привел геометрическое место точек D, расстояния которых DA и DB от концов отрезка AB относится как данные отрезки e и f, т. е. окружность Аполлония, и еще один вид уравнения гиперболы $xy + bx + cy - df = 0$, лежащий в стороне от хода рассуждений Декарта. В зависимости от исчезновения коэффициентов b, c, d и изменения знаков при них Дебон установил здесь 17 случаев. Он заметил также, что когда в уравнении отсутствуют x^2, y^2 и xy, то линия тоже принадлежит к первому «роду» («genre», см. стр. 58 и 264), но является уже не кривой, а прямой. К геометрии в «Кратких замечаниях» относилось еще лишь определение касательной, проведенное на примере кривой $bx + yx = y^2$ и сопоставленное с методом Декарта (см. стр. 111). У Дебона x и y также не имели характерных направлений. В двух местах он даже рассматривал x как зависимую переменную и писал вообще, что при случае переменные можно менять местами. В остальном Дебон тесно примыкал к своему образцу — Декарту.

---

[1]) В последнем издании (см. стр. 232) заглавие этого сочинения начинается словами: Renati des Cartes Principia Matheseos universae.

Наибольшие заслуги в распространении «аналитического искусства» [1]) Декарта приобрел все же Скаутен, во-первых, самим латинским переводом «Геометрии», вышедшим в XVII столетии в четырех изданиях, а, во-вторых, и, вероятно, еще в большей мере, тем, что он устно и письменно пропагандировал метод Декарта. После того как мы уже упомянули о его алгебраическом введении в «Геометрии» (стр. 223), мы прежде всего скажем несколько слов о его «Комментариях», приложенных им еще к латинскому изданию 1649 и довольно значительно расширенных затем в издании 1659 (см. стр. 38). Эти «Комментарии» были значительно больше по объему, чем «Замечания» Дебона, и давали кое-что новое, особенно во вторичной переработке. Вообще они дополняли и разъясняли неразвитые или темные пункты изложения Декарта. Например, Скаутен привел ряд алгебраически-геометрических задач, а также рассмотрел в аналитико-геометрической форме несколько мест и среди последних один способ образования эллипса, взятый из его книги «Органическое описание конических сечений на плоскости» (Organica conicarum sectionum in plano descriptio, Лейден, 1650). Он снабдил доказательством декартово построение нормали к конхоиде (стр. 221). Скаутен вычислил и построил точки перегиба конхоиды, примыкая к изложению Гюйгенса в добавлении к его сочинению «Открытия о величине круга» (De circuli magnitudine inventa, Лейден, 1654, ср. стр. 270) и опираясь на одно сообщение Г. ван-Гейрета.

В 1649 уравнение прямой у Скаутена еще не встречалось, хотя он и рассмотрел тогда задачу о «геометрическом месте к двум прямым» с алгебраически-конструктивной точки зрения. Но в издании 1659 в качестве уравнения геометрического места появилось и $y = a - x$. Во втором издании он вывел также основные уравнения трех видов конических сечений в форме $rx = yy$ и $\frac{acqx \pm acxx}{bb} = yy$ непосредственно из рассмотрения конуса, хотя в этом его опередил Валлис (см. стр. 227). Скаутен показал также, как найти конус, на котором лежит данная парабола, эллипс или гипербола. Преобразование координат у Декарта было лишь намечено (см. стр. 218). Скаутен привел для прямоугольных координат формулы поворота с некоторым смещением начала вдоль оси абсцисс:

$$DG = \frac{a^2 + ax - by}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad CG = \frac{ab + bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(см. черт. 11, где $AB = x$, $BC = y$, $DA = a$, $AF = b$). Простое смещение начала вдоль оси ему также, конечно, было известно.

---

[1]) Выражение «ars analytica» исходило, конечно, еще от Виета.

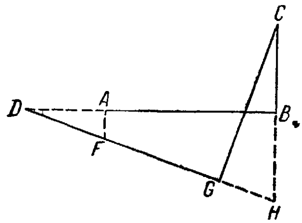
Он применил и перенос начала, и поворот осей для преобразования уравнения гиперболы

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac \quad (x \perp y),$$

вначале к виду

$$y^2 = \frac{cx}{b}y - ac \quad (x \perp y),$$

а затем к сопряженным диаметрам: $y^2 = \frac{c^2x^2}{4b^2} - ac$. Он излагает еще, опять-таки данное Гюйгенсом, построение с помощью циркуля и линейки трех нормалей к параболе из данной точки. Кроме того, «Комментарии» содержали кое-какие сведения относительно обыкновенной и обобщенной циклоид, а затем много чисто алгебраического материала (см. стр. 59).



Черт. 11.

В своих «Математических этюдах» (Лейден, 1656/57) Скаутен также применял алгебраическое исчисление к арифметическим и геометрическим задачам. Например, в реставрации «Плоских мест» Аполлония, составившей содержание третьей книги «Этюдов» и в целом выдержанной в античном духе, наиболее трудные случаи он исследовал как раз с помощью метода Декарта. Особо отметим, что для одного геометрического места у него здесь попутно встретилось линейное уравнение, которое он определенно характеризовал как уравнение прямой. Четвертая книга представляла собой перепечатку упомянутого выше (стр. 224) сочинения об описании конических сечений посредством механизмов. Этот способ образования кривых (ср. также Б. Брамер, Apollonius Cattus, Кассель, 1634) получил большое развитие благодаря Декарту, к которому, между прочим, восходит ныне употребительный термин «построение эллипса у садовников» (Gärtnerkonstruktion) (в «Диоптрике», приложенной вместе с «Геометрией» к «Рассуждению о методе» — Discours de la méthode, Лейден, 1637)[1]. Хотя сочинение Скаутена об образовании конических сечений по характеру своему не было аналитическим, но кое-что в нем все же заслуживает внимания. Такова, например, общая теорема, что при движении концов отрезка по двум прямым всякая жестко связанная с отрезком точка описывает коническое сечение[2]. Последняя пятая книга, в которую вошли

[1]) В действительности построение эллипса с помощью нити, закрепленной в фокусах, было дано уже византийцем Анфимием в VI столетии нашей эры. Соответствующее построение гиперболы восходит к Planisphaeriorum universalis theorica Гвидубальдо дель-Монте (Пезаро, 1579).

[2]) Для точек, лежащих на самом отрезке, теорема была известна уже в древности, по крайней мере, Проклу (V в. н. э.).

разнородные исследования, тоже содержала аналитико-геометрический материал. Примыкая к сообщениям Гудде, Скаутен привел ряд коноидов, сечения которых дают кривые все более высоких порядков, и установил уравнения этих кривых. Однако, так как эти коноиды рассматривались как ограниченные тела (см. главу II, § 2), Скаутен, естественно, получил лишь части положенных в основу поверхностей и кривых, представляемых его уравнениями. Он вывел также здесь по методу наибольших и наименьших значений Гудде максимальную ширину декартова листа (известную ему из сообщения самого Гудде), причем определенно заявил, что не видит, как можно было бы находить подобные вещи без алгебры. Еще в последнем сочинении Ф. Скаутена «Трактат о проведении геометрических доказательств с помощью алгебраического исчисления» (Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico), изданном его братом Петером и приложенном ко второму тому 2-го латинского издания «Геометрии» (1661), он стремился убедить тех лиц, которые еще не постигли алгебраической трактовки геометрии, в превосходстве ее над древним методом. Вместе с тем он старался показать, что по существу оба приема находятся между собой в полном согласии, ибо из алгебраического анализа задачи можно всегда получить синтетическое доказательство с помощью пропорций, обращая ход рассуждений и употребляя иную терминологию.

В относительно кратких рассуждениях об установлении уравнений геометрических мест, приведенных Робервалем в одной большой работе о геометрическом решении уравнений (см. выше стр. 105), содержалось мало замечательного. И Роберваль примыкал к Декарту (строчные буквы, знак равенства, определение уравнения геометрического места), хотя обозначал абсциссу и ординату не x и y, а e и a. С помощью известных теорем Аполлония он вывел уравнения конических сечений относительно вершины (в том числе уравнение окружности). Преобразовывал он их только путем переноса начала координат, впрочем, и это было выражено не особенно отчетливо. Характерно, что Роберваль называл «уравнением» гиперболы также уравнение $ae=b^2$, где a и e представляли собой отрезки секущих, лежащие между точкой гиперболы и асимптотами. Кроме уравнений конических сечений, Роберваль установил еще лишь уравнение конхоиды Никомеда, получив при этом для ее двух ветвей различные уравнения, ибо для одной ветви он считал a положительными кверху, а для другой книзу. Он дал превосходные чертежи всех трех видов конхоиды.

Еще до выхода второго издания «Геометрии» (1659/61) Дж. Валлис опубликовал «Трактат о конических сечениях, изложенных по новому способу» (Tractatus de sectionibus conicis, nova methodo expositis, Оксфорд, 1655). Он неоднократно проводил здесь доказательства с помощью алгебраического исчисления, которому приписывал большую ясность и краткость и которое объявлял обладающим не меньшей доказательной силой, чем геометрический вывод, опирающийся на нагромождение линий. Он говорил также, что пропорции не столь геометричны, сколь арифметичны, «чтобы не сказать чисто арифметичны». Изучение конических сечений было ранее так трудно потому, что большинство геометров не осмеливалось употреблять алгебраическое исчисление. Правда, Кл. Мидорж и другие пытались кое-что облегчить, но достигли немногого[1]). Валлис, однако, недостаточно оттенил, что сильнейшие стимулы были получены им от Декарта. Мы не будем здесь останавливаться на многообразных применениях, которые получили уже в этом сочинении (т. е. до выхода «Арифметики бесконечных», см. выше, стр. 109) слегка видоизмененные неделимые Кавальери[2]), и обратимся лишь к тому, что относится к коническим сечениям. В этом отношении заслуга Валлиса заключалась главным образом в том, что он заменил отрезки в фигурах рассеченного конуса, происходящих еще от Аполлония, буквами, так что смог выразить «симптомы» конических сечений посредством уравнений. Абсциссу, отмеряемую на произвольном диаметре (длины t) от вершины, он обозначил d («diameter intercepta», отсеченный диаметр), соответствующие ординаты (параллельные направлению, сопряженному с выбранным диаметром) параболы, эллипса и гиперболы соответственно p, e и h, «параметр»[3]) («latus rectum», поперечная сторона) l, а затем, исходя из рассмотрения трехмерных фигур, вывел уравнения

$$p^2 = ld, \quad e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2, \quad h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2,$$

известные нам как уравнения конических сечений относительно вершины. После того как эти симптомы уже получены, говорит Валлис, можно обойтись совершенно без рассмотрения конуса и все прочее вывести путем вычисления. Это заявление было весьма замечательно, хотя прошло еще почти столетие, прежде чем содержащаяся в нем программа была осуществлена значительно полнее. У Валлиса алгебраическое вычисление представляло собой по большей части только перевод синтетических рассуждений. Однако он все же им владел, и несомненно, что его изложение весьма

---

[1]) Прекрасная работа Мидоржа «Введение в катоптрику и диоптрику ... и т. д.» (Prodromus catoptricorum et dioptricorum sive conicorum etc.) вышла в Париже в 1631. Издания, на которых указан более поздний год (1649), отличаются, очевидно, только заглавием. Опубликованные «4 первые книги» трактовали лишь о конических сечениях.

[2]) Здесь уже появился и знак ∞.

[3]) Этот термин впервые употребил в названном выше сочинении Мидорж. В позднейшее время параметром стали называть величину $\frac{1}{2}l$.

выигрывало в сравнении с изложением его предшественников. Прежде всего Валлис определил касательные и показал, что конические сечения обладают бесчисленным множеством пар «сопряженных диаметров», подобных по свойствам с той парой, которая служила для вывода уравнения. Он не доказал и даже не упомянул, что среди них имеется пара взаимно перпендикулярных диаметров. Вообще он выводил еще лишь отдельные основные теоремы. В одном приложении он для сравнения разобрал кубическую параболу $p^3 = l^2d$ (ср. стр. 109), дал способ определения касательных и показал, что эта кривая не имеет параллельных диаметров, к которым можно было бы ее относить наподобие обыкновенной параболы. Так как Валлис занимался лишь одной ветвью кривой, он, ни о чем не подозревая, присоединил к ней другую ветвь так, что кривая в целом приняла вид обыкновенной параболы. Свою ошибку он, впрочем, заметил уже в следующем году. В посвящении к своему сочинению «Трактат, опровергающий диалог... М. Мейбома» (Adversus M. Meibomii... dialogum tractatus elencticus), помеченном 5 декабря 1656, он пересек кубическую параболу сетью прямых, параллельных касательной, и, к своему большому удивлению, установил правильное положение второй ветви. Безупречно разобрав вопрос о знаках, он затем распространил свое наблюдение на форму парабол вроде $p^4 = l^3d$ и т. д., с одной стороны, и парабол типа $p^5 = l^4d$ и т. д. — с другой. Мы должны поэтому видеть в Валлисе первого математика, введшего отрицательные абсциссы и правильно применившего их вместе с отрицательными ординатами. Однако непосредственно следовавшие за Валлисом ученые не обратили, по-видимому, внимания на этот важный шаг вперед.

В 1659 де-Слюз выпустил в Льеже небольшую книжку «Мезолабий», в которой показал и доказал синтетическим способом, что задача о вставке двух средних пропорциональных между двумя данными отрезками и вообще все так называемые «пространственные задачи» могут быть решены с помощью окружности и любого конического сечения (см. выше, стр. 59). Это сочинение вышло еще раз в учетверенном объеме (Льеж, 1668). Во втором издании Слюз впервые дал аналитическую трактовку своих решений. Обозначив данные отрезки b и d, а неизвестные e и a и приняв затем e за абсциссу, a — за ординату, он написал непрерывную пропорцию в виде $b|a|e|d$, а отсюда вывел уравнения $be\|aa$, $da\|ee$, $ae\|bd$[1]). Из этих простых уравнений парабол и гиперболы он с помощью производных пропорций получил (в прямоугольных координатах) уравнения окружности и тех конических сечений, которые употреблял раньше. В простейшем

[1]) О знаке равенства см. выше, стр. 16.

виде конические сечения имели уравнения $be - ee \| aa - da$ и соответственно

$$be \mp \frac{bee}{q} \Big\| aa \mp \frac{bda}{q},$$

причем произвольность величины q обусловливала собой «бесчисленность» этих конических сечений. Воспользовавшись затем аффинными преобразованиями $a \Big\| \frac{by}{q}$ и $e \Big\| \frac{bv}{q}$, Слюз смог в конце концов доказать, что он в состоянии для любого уравнения третьей или четвертой степени и произвольного данного конического сечения определить окружность, дающую решение задачи.

Задача о графическом решении уравнений, наряду с определением касательных, побудила применять координаты также И. Барроу (ср. стр. 114). Метод Барроу был своеобразен, но мало что принес аналитической геометрии («Лекции по геометрии», Лондон, 1670, объединенные затем в одну книгу с «Лекциями по оптике», 1674). В тринадцатой лекции он разделил уравнения на тринадцать групп, из которых в первую вошли $a + b = n$, $aa + ba = nn$, $a^3 + baa = n^3$, $a^4 + ba^3 = n^4$ и т. д. Неизвестную a он принимал затем за абсциссу, n — за ординату, вычерчивая, однако, для каждой кривой только небольшую дугу. Кривые этой группы он называл гиперболообразными («hyperboliformes»). Насколько мало проник Барроу в аналитический дух математики Декарта, еще более показывают другие лекции, в которых он беспорядочно смешивал прописные и строчные буквы, обозначения Виета и символику Декарта. Так, в примерах к своему методу касательных (лекция X), желая обобщить уравнение окружности на более высокие показатели, он писал не $x^4 + y^4 = c^4$, как поступил бы Декарт, а $APqq + MPqq = AEqq$. Иногда он обозначает, впрочем, абсциссу также через x, но для ординаты при этом снова употребляет большие буквы. Интересно, что при рассмотрении некоторых кривых производного характера, которые он вслед за Дж. Грегори («Общая часть геометрии», Падуя, 1668) называл «инволютами» и «эволютами», он, опять-таки примыкая к Грегори, применил преобразование прямоугольных координат в полярные, которое мы теперь выражаем уравнениями $a\varphi = x$, $p = y$ и которое до сих пор приписывалось П. Вариньону [Mém. Ac. Paris, 1704 (1722)]. Барроу упоминал уже, что при этом прямой линии соответствует спираль Архимеда.

Теперь мы вновь обратимся ко второму латинскому изданию «Геометрии» Декарта. К этому изданию добавлены были «Начала кривых линий» (Elementa curvarum linearum, год публикации 1659) Я. де-Витта, представлявшие некоторый прогресс по сравнению с книгой Валлиса. В предисловии к первому тому своих «Сочинений» (1695) Валлис характеризовал работу Витта как подражание собственному учению о конических сечениях. Это во всех отношениях несправедливо и невероятно уже потому, что, согласно Скаугену, Витт составил свои заметки еще в 1649. Неудобство всех появившихся до того изложений теории конических сечений Витт видел прежде всего в том, что для развития последней пользовались пространством. Он привел поэтому в первой книге кинематические способы образования параболы, гиперболы и эллипса и геометрически доказал, что найденные места удовлетворяют симптомам Аполлония (которые в этом случае были равнозначны для гиперболы и эллипса уравнениям относительно центра), т. е. действительно представляют собой конические сечения древних. Витт считал замечательным, что при образовании гиперболы по его способу сразу получаются обе ее ветви, хотя он и называл еще их по-старому «противолежащими сечениями». Вслед за тем он дал для каждого конического сечения другой, тоже кинематический, способ образования. Отметим, что для эллипса он по существу совпадает с построением, соответствующим нашему параметрическому уравнению $x = a\cos u$, $y = b\sin u$[1]). Однако наиболее важно было в этой первой книге, выдержанной в чисто геометрическом духе, что Витт доказывал существование у каждого конического сечения определенного диаметра, пересекающего соответствующие ординаты (т. е. хорды сопряженного направления) под прямым углом. Это ясно доказывало, что кривые, удовлетворяющие симптому какого-либо вида относительно взаимно перпендикулярных «осей», тождественны с образами, определенными сначала в качестве сечений конуса[2]).

До этого времени такое доказательство в аналитических сочинениях совершенно отсутствовало. Когда Витт перешел во второй книге к исследованию аналитических уравнений, он мог с полным правом предполагать координатный угол любым. Правда, Витт не выводил, как это делал Валлис, свойства конических сечений из уравнений. Для него важно было лишь начертить коническое сечение, представленное данным уравнением. Определение координат у Витта полностью совпадало с определением Ферма́, которое, как мы показали, имел в виду и Декарт (см. стр. 221). Прежде всего Витт утверждал, что уравнение с x, y, содержащее только члены первой степени, представляет прямую. Он рассмотрел, сопровождая это чертежами, положения прямых, соответствующих уравнениям

$$y = \frac{bx}{a}, \qquad y = \frac{bx}{a} \pm c \qquad \text{и} \qquad y = -\frac{bx}{a} + c.$$

[1]) Построение, точно соответствующее этим уравнениям, так же как и вполне современный чертеж, дал еще Мидорж во «Введении», 1631. У практиков оно встречалось даже ранее, например в «Архитектуре» (Architettura, кн. I, Венеция, 1551, быть может, и в первом издании 1537), С. Серлио.

[2]) Даже у Аполлония эта важная теорема выступала не особенно отчетливо.

Уже отсутствие уравнения $y = -\frac{bx}{a} - c$ показывает, что Витт избегал отрицательных ординат и, разумеется, еще более чуждых, отрицательных абсцисс. Он вычерчивал также всегда только часть прямой, не выходящую далеко за границы области, в которой положительны обе координаты. Здесь же впервые приводились уравнения $y = c$ и $x = c$.

Вслед за тем Витт рассмотрел уравнения

$$y^2 = ax, \quad y^2 = ax \pm b^2, \quad y^2 = -ax + b^2$$

и, привлекая результаты первой книги, доказал, что каждое из них представляет параболу. Здесь сказался большой недостаток координатной системы Ферма́—Декарта, заключавшийся в употреблении только одной оси. Витт счел необходимым по отдельности исследовать и вычертить кривые, определяющиеся каждым из уравнений вроде $x^2 = ay$ и т. д., получающихся из предыдущих простой взаимной переменой x и y. Здесь и дальше Витт также не перешел к отрицательным координатам. Он, например, определенно говорил, что уравнению $y^2 = b^2 - ax$ соответствует кусок кривой, который мы называем расположенным в первом квадранте. Для гиперболы он взял в качестве основных формы

$$yx = f^2, \quad \frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2, \quad y^2 - f^2 = \frac{lx^2}{g}, \quad \frac{ly^2}{g} = f^2 - x^2;$$

аналогичные уравнения рассматривал он и в случае эллипса. Посредством преобразования координат, всякий раз наглядно поясняемого чертежом, к этим основным формам приводились затем любые уравнения второй степени. Если отвлечься от ограничений, налагавшихся на знаки, то эти преобразования будут носить довольно общий характер. Если, например,

$$z = y + \frac{bx}{a} + c,$$

то прямая с уравнением $z = 0$ (Витт, правда, выражался иначе) принимается за новую ось, а направление ординат сохраняется прежним. Затем, в случае надобности, Витт полагает еще $v = x - h$ и в результате всегда приходит к двум сопряженным диаметрам. В длинной заключительной главе систематически сопоставлялись все встречающиеся возможности, и всякий раз специально разбирались случаи, которые мы решаем, взаимно заменяя координаты x и y. В начальных уравнениях Витт всегда принимал x за абсциссу, а y — за ординату, но в задачах иногда отклонялся от этого правила. Витт, между прочим, впервые решил здесь в аналитической и вполне современной форме задачу об определении геометрического места точек, сумма или разность расстояний которых от двух данных точек постоянна. Работу Витта можно охарактеризовать как первый самостоятельный курс аналитической геометрии. Правда, как мы уже говорили, в нем еще не было выражено стремление дать также аналитический вывод свойств конических сечений, из которых вообще встречались лишь немногие.

Вплоть до выхода «Введения в анализ» Эйлера (1748) аналитическая геометрия как таковая сделала лишь незначительные успехи. В 1695 Я. Бернулли анонимно издал в последний раз скаутеновский перевод «Геометрии» со всеми приложениями, добавив сам «Беглые замечания» (Notae et Animadversiones tumultuariae). Он привел в них некоторые, тем временем сделанные, геометрические открытия (см. главу III), но ни в коей мере не дополнил и не улучшил самого изложения Декарта. Небольшой прогресс в понимании координат можно все же заметить в обьемистых «Комментариях к «Геометрии» господина Декарта» (Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes, Лион, 1730), написанных иезуитом Кл. Рабюелем и изданных через два года после смерти автора одним его учеником. Из предисловия этого ученика видно, сколько потребовалось времени, чтобы новый метод смог проникнуть в более широкие круги. Он писал, что Скаутен в своем комментарии также, по-видимому, стремился к чести быть в свою очередь прокомментированным и что сама «Геометрия» представляет «почти непреодолимую трудность» («difficulté presqu' insurmontable»). Рабюель рисовал также вторую ось и говорил, что хотя ординаты y собственно отделены друг от друга, ибо идут параллельно, но их все-таки можно сначала брать на второй оси. Если затем известно, в какой точке первой оси должна быть «приложена» y, то ее следует провести из этой точки равной и параллельной отрезку, отмеренному на второй оси от общего начала x и y («origine»). Он называл x и y абсциссами и ординатами (последние иногда также апликатами) и определял их знаки так же, как мы. Эти понятия он применял довольно последовательно, особенно при анализе кривых третьего порядка, полученных им в качестве числовых примеров на «геометрическое место к пяти прямым» (см. стр. 217). Тем не менее для двух ветвей конхоиды он получил различные уравнения, ибо подобно Робервалю (стр. 226) не заметил, что направление оси y брал в этих случаях различным.

Некоторый вклад в аналитическую геометрию сделал еще в XVII столетии также Лагир, именно, во второй части книжки, название которой начинается словами «Новые начала конических сечений» (Nouveaux Élémens des Sections coniques, Париж, 1679). Первая часть явным образом представляла собой улучшенное изложение первой книги работы Витта (стр. 229). Лагир исходил из определений эллипса и гиперболы через сумму и разность радиусов-векторов и заметил, что оба они, если один из фокусов взять в бесконечности, переходят в определение параболы, согласно которому все точки последней равноудалены от фокуса и от некоторой неподвижной прямой. На этой основе, обладавшей тем преимуществом, что оси были уже даны, он затем доказал много употребительных теорем и прежде всего справедливость античных симптомов как для самих осей, так и для любых сопряженных диаметров. Первая часть книги носила чисто геометрический характер.

Во второй части, озаглавленной «Геометрические места», Лагир, после некоторых общих соображений, дал примеры исследования определенных и неопределенных задач с помощью «алгебраического анализа» (ср. стр. 224). Затем он определил геометрическое место как прямую или кривую линию или же поверхность и т. д., все точки которой имеют одно и то же отношение к точкам одной и той же прямой, относительно некоторой точки последней. Это еще совершенно совпадало с концепцией Декарта (ср. стр. 218). Неподвижную точку Лагир называл O (начало, «Origine»), неподвижную прямую «la Tige» (ствол), точки на стволе обозначал буквой N («les Neuds», ботанические «колена», «узлы»), точки геометрического места — буквой L («Lieu» — место). Ординаты LN он называл «les Rameaux» (ветви), абсциссы — «les parties de la Tige» (части ствола). Это — первый случай, когда для абсцисс и ординат, понимаемых в общем смысле слова, были предложены особые наименования, впрочем, не удержавшиеся. Самые обозначения Лагира в основном происходили от Дезарга, которые он ввел еще в своем «Черновом наброске» (Brouillon project, 1639, см. стр. 315). Дезарг только говорил не «Tige», а «Tronc» (также ствол), а «Rameaux» у него вообще не были параллельны. Если в одной найденной в 1845 работе Лагир утверждал, что он впервые прочел «Черновой набросок» в 1679, после окончания печатания «Новых начал», то это не доказывает самостоятельности его терминологии, ибо отец Лагира был связан с Дезаргом тесной дружбой.

Подобно Витту, хотя и не так подробно, Лагир вначале давал нормальные формы уравнений, а затем правила «приведения» к ним более сложных уравнений. Свое изложение он считал лучшим, чем у Витта. Мы, однако, не можем усмотреть у него особенного прогресса. Если он и привел в заключение правила, позволяющие без преобразований определять, к какой из нормальных форм сведется в конце концов данное уравнение, то правила эти совсем не были ясны и основывались лишь на том, что при некотором упражнении становится возможным предвидеть результат. Хотя Лагир, подобно Дебону (ср. стр. 223), говорил о перемене местами x и y, но и здесь, так же как в вопросе о знаках координат, он подчинялся в общем тем же ограничениям, что и Витт. В одном случае он отметил, что из одного и того же уравнения могут получиться два различных значения y. Но эти значения не всегда бывают истинными или действительными; случается также, что одно из них «исчезает» или становится «ложным», как он показал на примере параболы, отнесенной к произвольному диаметру и начальной точке, лежащей вне параболы. Однако, он не имел правильного представления о переходе этого второго корня уравнения от положительных значений через нуль к отрицательным. Третья часть книжки была озаглавлена «Построение аналитических уравнений» и в соответствии с этим трактовала о применении геометрических мест к графическому решению уравнений. Валлис назвал это сочинение Лагира также подражанием его теории конических сечений (ср. стр. 229—230); это было обосновано еще менее, чем аналогичное заявление его по адресу Витта.

В одной работе 1709 [Mém. Ac. Paris, 1710 (1732)] Лагир возобновил начатые им тридцатью годами ранее исследования о построении геометрических мест и уравнений. Главным образом он стремился здесь начертить высшие кривые. Иногда его метод был весьма искусен, но ему еще не удавалось последовательно использовать отрицательные абсциссы, что привело к ряду неправильных результатов. Например, он совершенно справедливо считал, что уравнение $a^2y^2=x^4$ обозначает две соприкасающиеся в вершине параболы, но уравнение вида $x^2=-ay$ (y — абсциссы) для него не являлось настоящим геометрическим местом. Тем не менее подобными уравнениями, с которыми постоянно сталкиваешься при вычислениях, согласно Лагиру можно пользоваться, а кривая, удовлетворяющая приведенному уравнению, является здесь параболой, абсциссы которой суть $-y$. Вторая ось изображалась довольно часто, но по существу не применялась. В этой работе Лагир принял названия «абсцисса» и «ордината».

В 1687 Озанам выпустил в Париже книгу, построенную совершенно сходно с «Новыми началами» Лагира, только несколько более объемистую, составленную из трех томов, изданных по отдельности. Первый том назывался «Трактат о линиях первого рода» (Traité des Lignes du premier genre). Озанам исходил из античных симптомов и установил с их помощью уравнения конических сечений относительно вершины в виде $y^2=px\pm\frac{px^2}{d}$ (p — параметр, d — диаметр; парабола получается, когда диаметр бесконечно велик!). Однако при выводе обыкновенных свойств конических сечений, изложение которых являлось целью сочинения, он употреблял это уравнение («équation constitutive» — определяющее уравнение) и вообще алгебраическое исчисление только совершенно случайным образом. Второй том «Трактат о геометрических местах» (Traité des lieux géométriques) не содержал ничего нового по сравнению с Лагиром и Виттом в части, касающейся геометрических мест и их «построения». Любопытно лишь, что неопределенные арифметические задачи (из Диофанта) Озанам выражал графически. Мало оригинальное сочинение Озанама заканчивалось томом «Трактат о построении уравнений» (Traité de la construction des équations).

То же распределение материала, какое имели сочинения Озанама и Лагира, было у Лопиталя в «Аналитическом трактате о конических сечениях и т. д.» (Traité analytique des sections coniques etc., 1-е посмертное изд., Париж, 1707, 2-е издание, 1720). Этот большой труд являлся для своего времени выдающимся курсом. Лопиталь исходил из того же способа образования конических сечений, что и Лагир, с тем лишь отличием, что выполнял эти построения с помощью механизмов. Он вывел уравнения

$$y^2 = px, \quad y^2 = c^2 - \frac{c^2x^2}{t^2} = \frac{1}{2}pt - \frac{px^2}{2t}$$

и

$$y^2 = \frac{c^2x^2}{t^2} \mp c^2 = \frac{px^2}{2t} \mp \frac{1}{2}pt,$$

где t — большая, а c — малая полуоси, а затем доказал главные свойства конических сечений, отчасти с помощью этих уравнений и алгебры, но в гораздо большей мере посредством пропорций и рассмотрения геометрических фигур[1]). Для x он не имел специального названия, а слово «ордината» употреблял лишь в античном смысле (см. стр. 247). Определение координат («indéterminées» — неопределенные) x, y было очень близко к формулировке Ферма́ (ср. стр. 212). Лопиталь также вводил иногда вторую ось и указывал на пользу, приносимую взаимной переменой x и y. Он даже верно трактует вопрос о знаках, говоря, что «геометрическое место должно проходить через концы всех истинных и ложных значений y, соответствующих истинным и ложным значениям x». Это заявление он весьма детально пояснил на примере прямой $y = \frac{bx}{a}$ и окружности $y^2 = a^2 - x^2$. Но Лопиталь тотчас же добавляет, что в дальнейшем всегда будет снова считать x и y положительными, и поэтому в общем остается на той же точке зрения, что Витт; сказанное относится и к его чертежам. Вследствие этого и у него отсутствовало уравнение прямой вида $y = -\frac{b}{a}x - c$.

Для исследования конических сечений Лопиталь пользовался способом, отличным от приемов его французских предшественников. Он познакомился с ним, очевидно, из последней части «Трактата о ... квадратурах ... фигур и о геометрических местах» (Tractatus ... de figurarum ... quadraturis et locis geometricis, Лондон, 1693) Дж. Крега. Подобно Крегу он брал коническое сечение в

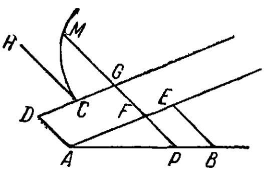
[1]) Книга Лопиталя содержала 32 таблицы с 285 превосходно выполненными чертежами.

возможно более общем положении относительно системы координат, причем все постоянные, участвующие в преобразовании, явно входили в коэффициенты уравнения. Так, например, для параболы с осью CG Лопиталь дал уравнение

$$y^2-\frac{2n}{m}xy+\frac{n^2}{m^2}x^2-2ry+\frac{2nr}{m}x+r^2=0,$$
$$-\frac{ep}{m}x+ps$$

где (см. черт. 12, заимствованный из «Трактата») $AB=m$, $BE=n$, $AD=r$, $DC=s$, $CH=p$ (параметр, соответствующий оси) и $AE=e$, $AP=x$, $PM=y$. После этого ему, конечно, было легко поставить в соответствие с этим уравнением более частное уравнение вроде

$$y^2-2ay-bx+c^2=0.$$



Черт. 12.

При исследовании параболы, представленной последним уравнением, сила вещей проявилась вновь, и (для $a>c$) Лопиталь оказался вынужденным составить параболу из трех кусков, лежащих в первом, втором и четвертом координатных углах и представленных одним и тем же уравнением. Совершенно сходно Лопиталь поступает в случае эллипса и гиперболы, выясняя характерные черты их уравнений; он правильно формулировал при этом условия, при которых уравнение выражает собой окружность. Однако мы не можем усмотреть у него существенного шага вперед по сравнению с Крегом.

Затем Лопиталь рассмотрел одиннадцать геометрических мест и среди них аполлониев круг, причем опять принимал во внимание все четыре квадранта. Мы отметим еще образование конических сечений на основании постоянства отношения расстояний их точек от некоторой фиксированной точки к расстоянию до некоторой фиксированной прямой; далее, образование геометрического места точек, обладающих тем свойством, что две касательные, проведенные от них к некоторой данной параболе, образуют всегда определенный угол (гипербола); затем образование геометрического места полюсов (как сказали бы мы) всех касательных к некоторой окружности относительно другой окружности. Наконец, упомянем следующий способ образования конических сечений: если два постоянных угла вращаются вокруг своих вершин так, что точка пересечения одной пары образующих их лучей движется по прямой, то точка пересечения другой пары лучей описывает коническое сечение [1]. Лопиталь затем изучил это коническое сечение. Следую-

[1]) Эту теорему высказал еще Ньютон в «Началах» (1687).

щая глава трактовала о построении уравнений[1]), а за ней шла еще глава со смешанными задачами определенного анализа.

Вольф в своих «Началах универсальной математики» (т. I, Галле, 1713), определенно ссылаясь на Крега, также применил его способ исследования конических сечений. В противовес этому Як. Герман [Comm. Ac. Petr., 1729 (1735)] указал, что наряду с другими заслуживает внимания забытый, по-видимому, первоначальный прием Декарта (см. стр. 218—219), ибо он позволяет выводить все определяющие элементы конического сечения прямо из уравнения. Герман разработал этот прием дальше, ибо применил преобразования, сделанные Декартом в одном примере, к общему уравнению конического сечения. Он взял последнее в виде

$$\alpha y^2+2\beta xy+\gamma x^2+2\delta y+2\varepsilon x+\varphi=0$$

и решил его относительно y:

$$y=-\frac{\beta x}{\alpha}-\frac{\delta}{\alpha}\pm\sqrt{\left(\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}x^2+\frac{2\beta\delta-2\alpha\varepsilon}{\alpha^2}x+\frac{\delta^2-\alpha\varphi}{\alpha^2}\right)}.$$

Затем, положив подкоренное выражение равным нулю, он определил диаметр, лежащий на прямой $u=-\frac{\beta x}{\alpha}-\frac{\delta}{\alpha}$; подобно Декарту он оказался вынужденным взять параметр из прежней аполлониевой сокровищницы. Хотя Герман правильно определил знаки для диаметральной прямой и даже продолжил ее в сторону отрицательных абсцисс, его понимание координат являлось столь же ограниченным, как и у предыдущих математиков. В дальнейшем изложении он все же установил для большинства видов конических сечений условия, определяющие их характер и выражающиеся через коэффициенты уравнений. В соответствии с двузначностью радикала он указал, что когда корень извлекается, уравнение может выражать *две* прямые, между тем как Декарт говорил в этом случае только об одной из них. Не были забыты и асимптоты.

Правда, Герман так же мало, как и Декарт, обратил внимания на самый трудный случай, возникающий, когда из подрадикального выражения получаются для x два мнимых значения, так что кривая является гиперболой, а принятый за основу диаметр — мнимой осью. В этом отношении его дополнил В. Риккати в одном письме от 1751 своему другу (опубликовано в первом томе его «Сочинений», Болонья 1757), где он вообще точнее изложил метод Германа. Риккати помог делу тем, что отыскал на диаметральной прямой две абсциссы, которым соответствуют равные ординаты. Таким образом он нашел центр, а затем вывел из уравнения длину

[1]) Упомянем, что Лопиталь еще до Крамера указал здесь на пользу этого способа при изучении характера корней уравнения (см. выше стр. 59—60).

соответствующего действительного диаметра, после чего уже было «можно построить» гиперболу. Случай, когда корень извлекается, он совершенно справедливо характеризовал как предельный для обоих возможных расположений гиперболы. Риккати присоединил также разбор нетрудных случаев, когда в основном уравнении отсутствуют y^2, или xy, или же оба вместе. В больших двухтомных «Основаниях анализа» (Institutiones analyticae, Болонья, 1765 и 1767), изданных им позднее при участии Дж. Саладини, Риккати возвратился к способу Витта, но в первом томе он ввел, в случае наличия xy, искусственный прием, немного облегчавший дело.

Гинэ выпустил хороший учебник по общей алгебраической геометрии «Приложение алгебры к геометрии и т. д.» (Application de l'algèbre à la géométrie etc., Париж, 1705, следующие издания 1733, 1753). Он отчетливо указал на важность «ложных» (отрицательных) корней уравнения и исследовал все возможные комбинации знаков координат в уравнении окружности $yy = aa - xx$, для чего ввел две перпендикулярные оси, на которые опустил из точки окружности M перпендикуляры MP и MQ. Эти перпендикуляры, а также отсекаемые ими на осях отрезки он определил как «координаты». Но уже у прямых $ay = bx$ он рассматривал только положительные части; также поступает Гинэ и при изучении конических сечений. Тем не менее, кроме обилия материала, его книга выделялась еще тем, что содержала совершенно самостоятельное учение о конических сечениях. Правда, оно не являлось чисто аналитическим, но там, где это удавалось, автор наряду с подобными треугольниками и пропорциями применял также буквенное исчисление, которое предварительно излагалось на 66 страницах введения к его труду. Во всяком случае, учебник Гинэ был прогрессивнее и в большей мере проникнут аналитическим духом, чем почти одновременный с ним курс Лопиталя (стр. 235).

§ 3. Развитие аналитической геометрии, начиная с систематического исследования высших кривых

Величайшее влияние на развитие аналитической геометрии оказало небольшое сочинение Ньютона, изданное им в 1704 в качестве приложения к его книге «Оптика» (Opticks). Мы имеем в виду «Перечисление кривых третьего порядка» (Enumeratio linearum tertii ordinis, см. выше стр. 60)[1]. Свои рукописи Ньютон давал для ознакомления много ранее (старейшая из имеющихся налицо была составлена еще до 1676), благодаря чему некоторые его результаты приобрели известность. Выпуская «Перечисление кривых»,

---

[1]) Это сочинение было приложено также к первому изданию латинского перевода «Оптики» (Лондон, 1706). В 1711 У. Джонс выпустил его в одном томе с «Анализом с помощью уравнений и т. д.» (ср. стр. 119).

Ньютон хотел, таким образом, лишь сохранить свой приоритет; этим объясняются опубликование этого сочинения в столь неподходящем соседстве[1]) и отсутствие в нем доказательств. Последнее было, впрочем, в большой части восполнено в книге «Ньютоновы кривые третьего порядка» (Оксфорд, 1717) Дж. Стирлинга (ср. стр. 62), самый заголовок которой определенно характеризовал ее как «пояснение» к трактату Ньютона. В данной связи нас интересует не собственное содержание обоих сочинений (о нем см. стр. 264—268), а то обстоятельство, что координатный метод, применение которого за пределами, установленными концепцией Декарта, было мало значительным, почти внезапно с большой уверенностью завоевал ранее почти незнакомую область. Нельзя сказать, что понятие координат было при этом у Ньютона и Стирлинга иным, чем у Декарта. По-прежнему речь шла у них только о «начальной точке абсцисс», и то, что мы называем осью ординат, лишь иногда именовалось «первой» или «главной» ординатой. Но на ньютоновых таблицах чертежей рисовались обе оси, исследование вопроса о знаках координат всегда проводилось до конца и все квадранты были равноправны. Каждая кривая нарисована у Ньютона точно так, как вычерчиваем ее теперь мы. Перед современниками «Перечисление кривых» раскрывало неожиданное богатство совершенно новых форм, типы уравнений которых приводились при этом в тексте.

О конических сечениях книга Ньютона говорила лишь в той мере, в какой это было необходимо для обобщения некоторых понятий и свойств на кривые третьего порядка. Тем не менее в ней заключались ростки более свободной трактовки конических сечений с помощью координат. Начало этому положил уже Стирлинг. Прежде всего он показал, как всякое уравнение линии второго порядка может быть приведено, согласно некоторому общему предложению, к форме $yy = Ax^2 + Bx + C$ (оси предполагаются все время косоугольными), а затем, смещая начало абсцисс, привел это уравнение к виду $yy = Ax^2 + B$ или $yy = B - Ax^2$[2]). Затем, и это весьма замечательно, он принялся за определение положения и длины осей, исходя только из этих уравнений, т. е. совершенно не прибегая к теоремам Аполлония и лишь учитывая форму гиперболы или же эллипса. Со времен Валлиса (стр. 227) это была, по-видимому, первая попытка вывести свойства кривой из ее уравнения. Метод Стирлинга был вполне применим, хотя он и не дошел до каких-либо окончательных формул, ибо всегда лишь указывал на отдельные необходимые этапы приведений. Для параболы $yy = Ax + B$ Стирлинг также определил главную

---

[1]) Буквально все сказанное относится и к «Трактату о квадратуре кривых» (ср. стр. 125).

[2]) Сам Стирлинг каждый раз снова применяет одни и те же буквы.

вершину и главный параметр. С помощью этого метода, говорил он, становится яснее аналогия между геометрическими местами второго порядка и линиями третьего и высших порядков. Аналитическое доказательство так называемой теоремы Ньютона о секущих Стирлинг также дал сначала для конических сечений, а потом соответственно обобщил его на кривые третьего порядка.

В рассматриваемое время координатный метод употребляли преимущественно в дифференциально-геометрических исследованиях, или же, если подчеркивали значение метода Декарта, применяли его к высшим алгебраическим кривым. Последним занялся, в частности, де-Гюа-де-Мальв в небольшой книге «Применения анализа Декарта» (Usages de l'analyse de Descartes, Париж, 1740), которая была богаче новыми идеями, чем аналитическими выводами, и о которой мы еще будем говорить подробнее (см. стр. 271 и след.). Но ясно, что эти исследования более высокого порядка могли быть с таким же успехом приложены к коническим сечениям, которые иногда и привлекались в качестве примеров. Так, например, де-Гюа впервые дал для конического сечения

$$nyy + rxy + mxx + ay + bx + cc = 0$$

(m, n, r обозначают числа, но a, b, c — отрезки) уравнение, определяющее координаты центра, в виде

$$\overline{2ny + rx + a} \cdot dy + \overline{2mx + ry + b} \cdot dx = 0.$$

Быть может, уже здесь следует упомянуть, что для де-Гюа было вполне привычным представление о кривой, распадающейся на несколько других, т. е. кривой, уравнение которой в левой части разлагается на ряд множителей. Он даже называл уравнение $y^3 = x^3$ уравнением трех прямых, две из которых мнимые.

Сочинение Г. Крамера «Введение в анализ алгебраических кривых», опиравшееся во многих отношениях на работу де-Гюа и изданное десятью годами позднее (ср. выше, стр. 49), также ограничивалось высшими алгебраическими кривыми. Тем временем уже появился второй том «Введения в анализ» (1748) Эйлера, поднявший на существенно более высокую ступень и аналитическую теорию конических сечений. Эйлер целиком еще держался декартова понятия о координатах, между тем как Крамер, на сочинение которого книга Эйлера повлиять уже не могла, впервые равноправно определил две координаты и последовательно ввел ось ординат. Правда, в преобразованиях координат у Крамера ось ординат все еще играла несколько беспомощную роль. Со времен Витта (стр. 230) преобразования координат употреблялись всеми математиками и нередко принимали даже довольно сложные формы, ибо тогда часто переходили от одной косоугольной системы к другой, с новым началом и отличным координатным углом, не пользуясь при этом тригонометрическими функциями. Впервые последними воспользовался для этой цели Эйлер во «Введении в анализ». Он еще часто обозначал синус или косинус угла посредством какой-либо специальной буквы. Но у него имелись уже и такие формулы преобразования прямоугольной системы:

$$t = x\cos\cdot q - y\sin\cdot q, \qquad u = x\sin\cdot q + y\cos\cdot q.$$

Во второй главе II тома «Введения в анализ», посвященной преобразованию координат, Эйлер коротко останавливается на вопросе о прямой. Сначала он приводит ее уравнение в виде $\alpha u + \beta t + b = 0$, но затем, желая определить положение прямой, записывает его в виде $\alpha x + \beta y - a = 0$. Он не разбирает различные возможные комбинации знаков α и β и упоминает лишь случаи $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и $\alpha = a = 0$, не касаясь, однако, случая $\beta = a = 0$. Все эти возможности были впервые разобраны, по крайней мере в форме беглых замечаний, в упоминавшейся выше книге Риккати—Саладини (см. стр. 238).

В пятой главе II тома «Введения в анализ» речь идет об общих свойствах всех конических сечений, т. е. свойствах, которые можно вывести из общего уравнения второй степени. Хотя вначале Эйлер определенно заявляет, что из одного принципа вывести все свойства конических сечений нельзя и что одни получаются из способа образования этих линий на конусе, а другие из приемов их описания, но здесь он желает опираться только на уравнение. Последнее он записывает в виде

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)y}{\zeta} + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0,$$

причем координатный угол в зависимости от обстоятельств берется то прямым, то отличным от прямого. Действуя вполне в духе Ньютона и Стирлинга, Эйлер в первую очередь выводит из этого уравнения на основании теоремы о сумме и произведении корней обычные свойства диаметров, секущих и касательных. К числу извлекаемых им следствий принадлежит также теорема, что коническое сечение можно рассматривать как геометрическое место к четырем прямым (стр. 217). Далее он определяет уравнение диаметра, делящего пополам хорды, параллельные ординатам, вначале в прямоугольной системе, а затем для того же конического сечения в системе с прежними осью абсцисс и началом, но с косоугольно расположенными ординатами. Точка пересечения обоих диаметров дает центр конического сечения, координаты которого не зависят от угла, образуемого направлением ординат с осью абсцисс. Затем Эйлер устанавливает отнесенные к «сопряженным диаметрам» уравнения

$$yy = \alpha + \beta x + \gamma xx \quad \text{и} \quad yy = \alpha - \beta xx.$$

За этим следуют совершенно новые и оригинальные вещи. Именно, исходя из последнего уравнения (чертит он здесь лишь эллипсы), Эйлер посредством вычислений определяет другую пару сопряженных диаметров, для одного из которых дан угол с осью абсцисс. Эйлер вычисляет тангенс угла второго диаметра с осью абсцисс, тангенс угла между обоими новыми сопряженными диаметрами и, наконец, длины последних. В этих нелегких выкладках Эйлер применяет для обозначения функций известных углов как специальные буквы, так и их современные символы. В качестве следствий здесь получаются теоремы о постоянстве параллелограммов и сумм квадратов, построенных на сопряженных диаметрах, а также теорема о произведении отрезков касательных, лежащих между двумя фиксированными параллельными касательными.

Теперь Эйлеру нужно лишь выставить требование взаимной перпендикулярности новой пары диаметров, чтобы получить тем самым положение и длины главных осей. При этом он подчеркивает, что решение здесь существует всегда. В присоединенном к этому тому «Приложении о поверхностях» Эйлер действительно преобразовал уравнение

$$aacc = \alpha uu + 2\beta tu + \gamma tt$$

в прямоугольной системе координат к главным осям. Аналитическая геометрия конических сечений впервые была поставлена на собственные ноги. Ведь прием Витта еще не был чисто аналитическим (см. стр. 230), а беглые указания Стирлинга не были проведены вычислительным образом (стр. 239).

В конце рассматриваемой главы определяются действительные фокусы. Эйлер определяет их, отыскивая на большой оси точки, для которых радиусы-векторы точек кривых могут быть рационально выражены через их координаты.

Следующая, шестая глава трактовала о классификации линий второго порядка. Эйлер различает здесь кривые только в зависимости от значения коэффициента γ в уравнении

$$yy = \alpha + \beta x + \gamma xx.$$

Затем он берет для эллипса уравнение относительно центра

$$yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$$

и, в частности, выводит из него фокальные свойства эллипса и его касательной. Далее, он вводит новые величины

$$c = \frac{bb}{a} \text{ (полупараметр) и } d = a - \sqrt{(aa - bb)}$$

(расстояние фокуса от вершины). Тогда уравнение эллипса относительно вершины принимает вид

$$yy = 2cx - \frac{c(2d-c)xx}{dd}.$$

Теперь Эйлер переходит от эллипса к параболе, полагая $2d = c$, благодаря чему a и b становятся бесконечно большими. Насколько возможно, свойства параболы он выводит, исходя из понимания ее как бесконечно растянутого эллипса. Вслед за тем он переходит к уравнению гиперболы

$$yy = \alpha + \gamma xx$$

и устанавливает, что сопряженная ось в этом случае мнимая. Однако, чтобы сохранить сходство с уравнением эллипса, он полагает мнимую ось равной $b\sqrt{-1}$, в результате чего уравнение гиперболы приобретает вид

$$yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa).$$

О свойствах гиперболы он умозаключает, представляя себе, что в соответствующих случаях для эллипса bb заменено через $-bb$. Установив для угла, образуемого касательной с большой осью, скажем, угла ω, общее уравнение

$$\operatorname{tang}\cdot\omega = \frac{bbx}{aay},$$

Эйлер находит асимптоты, полагая $x = \infty$ $\left(\text{т. е. } y = \frac{bx}{a}\right)$, что дает для тангенса угла асимптоты с осью значение $\frac{b}{a}$. При выводе различных свойств асимптот он определенно отмечает, что они сохраняют силу, когда, например, секущая прямая пересекает не одну ветвь гиперболы, а обе. Само собою разумеется, Эйлеру было известно также определение асимптот с помощью разложения на множители совокупности старших членов уравнения кривой. Однако этот прием он применил лишь в последующих главах, вообще посвященных бесконечным ветвям высших кривых (см. ниже стр. 275). В главе VII Эйлер, между прочим, делает замечание, что если $\beta\beta$ больше, чем $4\alpha\gamma$, то общее уравнение

$$\alpha yy + \beta xy + \gamma xx + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0$$

представляет собой гиперболу. Вообще же и у Эйлера отсутствовали еще общие критерии классификации кривых по их коэффициентам.

Первым немецким учебником аналитической геометрии была, по-видимому, книжка М. Губе «Опыт аналитического трактата о конических сечениях» (Versuch einer analytischen Abhandlung von den Kegelschnitten, Геттинген, 1759), которую Кестнер снабдил длинным предисловием на тему о преимуществе аналитического метода по сравнению с синтетическим. Губе определенно поставил целью своего сочинения познакомить более широкий круг читателей с теорией конических сечений Эйлера, изложенной у последнего среди многих других вещей в большой и дорогой книге. В научном отношении Губе по сравнению с «Введением в анализ» не продвинулся, хотя кое в чем проявил самостоятельность. Губе хотя и вводил две оси, но имел дело лишь с началом абсцисс, и все относил лишь к оси абсцисс. Заметим еще, что Губе построил уравнение прямой вида

$$y+Ax+B=0$$

при положительных A и B. Ему, как и Эйлеру, было также вполне ясно, что коническое сечение может состоять из пары прямых. Он даже приводил общее уравнение второй степени в форме

$$y=-\frac{ax-b}{2}\pm\sqrt{\left(m^2x^2+nx+\frac{n^2}{4m^2}\pm p\right)},$$

так что при $p\neq 0$ всегда имел коническое сечение в собственном смысле слова.

В основном популяризация аналитической геометрии и реформы в алгебре, произведенной Декартом, была осуществлена в энциклопедических курсах, содержавших обзоры всех отделов математики. Вовсе не следует думать, что обозначения Декарта вошли в общее употребление, начиная с 1637. Например, еще в третьем издании предназначенного для вюртембергских школ «Обзора математики» (Synopsis mathematica, Тюбинген, 1679, 1-е изд., 1653) И. Я. Гейнлина не имелось и следа декартовой символики. В большом фолианте «Курс» математики» (1-е изд., 1661, за ним ряд других изданий, ср. стр. 19) К. Шотта, несмотря на общую пестроту содержания, о конических сечениях ничего не говорилось даже в издании, вышедшем во Франкфурте-на-Майне в 1699. О координатах не было здесь и речи; лишь случайно наряду с обозначениями Виета применялась символика Декарта. В «Курсе или мире математики» (четыре тома in folio, 2-е изд., Лион, 1690; 1-е изд., 1674, ср. стр. 19) Дешаля конические сечения, правда, рассматривались, но по античному способу; относительно изложения алгебры о нем можно сказать то же самое, что и о книге Шотта[1]). Для обозначения радикала Дешаль и Шотт пользовались еще символом R[2]).

[1]) Здесь, как у Шотта и в упомянутом на стр. 222 рукописном «Введении», вместо a^2 писалось еще $a2$ (ср. стр. 16).

[2]) Для того, чтобы представить себе, чего только не разумели в XVII и даже еще в XVIII столетии под «математикой», я приведу особенно богатое содержание второго издания «Курса» Дешаля. В него входили: т. I — исто-

Лишь в XVIII столетии аналитико-геометрические понятия получили доступ в учебные книги. Мы находим их уже в «Основаниях» (1-е изд., Галле, 1710/11) и в «Началах универсальной математики» (1 т., 1-е изд., 1713) Вольфа, затем в «Основаниях» (8 томов) А. Кестнера (III часть, 1 раздел, 1-е изд., Геттинген, 1760; 3-е изд., без существенных изменений, 1794, ср. стр. 20), в «Системе математики» Карстена (7-я часть, Грейфсвальд, 1775, ср. стр. 18), в «Курсе математики» Зегнера (5 частей, часть II, Галле, 1758), в «Учебнике математики» (Mathematische Lehrbuch) Клемма (1-е изд., Штуттгарт, 1764, 3-е изд., 1777) и в других. Если при определении координат здесь иногда вводились обе оси, как, например, у Клемма и Зегнера, то в дальнейшем изложении ось ординат никогда не являлась равноправной с осью абсцисс. И ни в одном из упомянутых сочинений нельзя усмотреть какого-либо прогресса по сравнению с Эйлером.

Шаг вперед был сделан только в работах Монжа и Лагранжа, имевших, однако, своим предметом в первую очередь геометрию пространства (см. стр. 253—254). Вслед затем С. Лакруа незадолго до конца столетия перенес новое расположение материала и новые обозначения в плоскую геометрию. Он осуществил это в своем «Элементарном курсе прямолинейной и сферической тригонометрии и приложений алгебры к геометрии» (Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie, Париж, an VII, 1798/99; 8-е изд., 1827). Преобладающая часть этой книги была посвящена аналитической геометрии, хотя она все еще содержала, следуя преемникам Декарта (стр. 224), введение, в котором решались алгебраически-геометрические задачи. Декартово понятие координат также не претерпело здесь еще изменения, хотя знаки в четырех квадрантах были введены совершенно правильно. Говоря о новом расположении материала, мы имеем в виду, что автор здесь систематично начал с задач на прямую. Здесь впервые разбиралась задача о проведении прямой через две данные точки и результат приводился в привычном для нас виде:

$$y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha).$$

Далее определялись угол и точка пересечения двух прямых, заданных уравнениями

$$y=ax+b \text{ и } y=a'x+b',$$

рическое введение, 14 книг Евклида, сферика Феодосия, конические сечения, тригонометрия, алгебра, опровержение (философских) гипотез Декарта; т. II — практическая геометрия, механика, статика, география, магнетизм, гражданское зодчество, плотничное искусство, стереотомия; т. III — военное зодчество, гидростатика, гидрография, гидравлика, искусство мореплавания, оптика, перспектива, катоптрика и диоптрика; т. IV — музыка, пиротехника, астролябия, солнечные часы, астрономия, астрология, метеорология, календарь.

и давались обычные формулы для расстояния точки (α, β) от прямой $y = ax + b$ и для расстояния между двумя точками (α, β) и (α', β'). Вслед затем в сохранившемся поныне обозначении, образцы которого мы привели, рассматривались треугольник и окружность. Лишь после этого Лакруа переходит к общему уравнению второй степени и выводит из него три канонические формы уравнений кривых второго порядка. Затем изучаются их специальные свойства. Лакруа устанавливает общее полярное уравнение всех конических сечений, имеющее у него, в частности, вид

$$z = \frac{c'(1+e)}{1+e\cos\varphi}.$$

Употребительное тогда приложение кривых к решению высших уравнений посредством отыскания их точек пересечений было здесь также налицо; при этом разбирался и способ применения линий вида

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots$$

Изложение Лакруа носило столь современный характер, что уже первое издание книги могло бы и теперь без изменений служить основой преподавания в высшем реальном училище. Действительно, 25-е издание учебника Лакруа вышло еще в 1897. За Лакруа последовал ряд авторов, например, Лефрансе с его «Опытами о прямой линии и о кривых второго порядка» (Essais sur la ligne droite et les courbes du second degré, Париж, an IX, 1801) и Био с широко распространенным тогда «Аналитическим трактатом о кривых и поверхностях второго порядка» (Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré, Париж, 1802; 8-е изд., 1834). «Сборник различных геометрических предложений» (Recueil de diverses propositions de géométrie, Париж, 1801) Л. Пюиссана носил характер составленного в том же духе сборника упражнений. На пороге XIX столетия появилась статья Г. Монжа и Ашетта «Приложение алгебры к геометрии» (Application d' algèbre à la géométrie в Journ. Éc. Polyt., an X, 1801/02), позднее не раз выходившая в виде отдельной книги (1805, 1807, 1809 и в значительно расширенном виде 1813). Ее можно рассматривать как введение к «Приложению анализа к геометрии» Монжа, посвященное разбору более элементарных предметов.

§ 4. Предыстория аналитической геометрии. Терминология

Несомненно, что и Ферма́, и Декарт пришли к их аналитико-геометрическому методу, отправляясь от изучения древних, особенно Аполлония (Цейтен, ч. I). Однако аналитическая геометрия смогла возникнуть из учения о конических сечениях греков лишь после того, как алгебра уже получила достаточное развитие.

Так как алгебра Ферма́ покоилась на несколько более старой концепции, чем алгебра Декарта, и, кроме того, Ферма явно привел также и простые виды уравнений конических сечений, то и связь его с античностью заметна особенно отчетливо. У Ферма́ можно даже в некоторой мере проследить, как он пришел к своему координатному методу, главным образом по его попытке восстановить утраченные «Плоские места» Аполлония. Но отсчет или измерение абсцисс от некоторого фиксированного пункта на некоторой фиксированной прямой впервые ввели Ферма́ и Декарт, причем, вероятно, независимо друг от друга. В «симптомах» греков, которые при переводе на язык алгебры переходят в наши уравнения конических сечений, как правило, участвовали, так сказать, две абсциссы (два отрезка одного диаметра) и одна ордината (сопряженная полухорда). Распространение такого приема на исследование высших кривых — дело не простое и в античную эпоху даже не намечалось. Определение точек прямой посредством их расстояний от некоторой фиксированной точки представляется нам теперь весьма естественным. Однако мы не находим его следов ранее Ферма́ и Декарта.

Аполлоний не имел для частей диаметра какого-либо специального термина. Он говорил, например: «[отрезки,] отсеченные на диаметре до вершины». Первые переводчики, как, например, Коммандино (1566), применили для слова «отсекать» латинское «abscindere», и слово «abscissa» в смысле «отрезок» встречается позднее в «Геометрии неделимых» Кавальери (1635, см. выше стр. 102). В смысле, очень близком к Аполлонию, это слово впервые встречается в переводе книги Аполлония, данном Абрагамом Эккелензисом (и опубликованном Борелли, Флоренция, 1661). Однако Декарт, Ферма́ и их ближайшие последователи называли эти отрезки диаметра почти сплошь с помощью различных описательных оборотов.

В качестве настоящего технического термина слово абсцисса было применено в современном смысле Лейбницем (см., например, письма к Ольденбургу от 26 октября и 1 ноября 1675). До этого отрезок от начальной точки, если она не была вершиной конического сечения, до основания ординаты вообще не имел специального названия; x, y именовали просто «неопределенными величинами». Лишь случайно «абсцисса» появляется в качестве технического термина у Риччи в «Геометрическом этюде о максимумах и минимумах» (Exercitatio geometrica de maximis et minimis, Лондон, 1668).

Слово «ордината» тоже возникло в результате перевода с греческого. Выражение, применявшееся Аполлонием, передано было в средние века через «linea secundum ordinem» («линия, соответствующая порядку») или через «linea ordinis» («линия порядка»). Коммандино успешно ввел оборот «ordinatim applicata» («по порядку приложенная»), а позднее наряду с этим составным выражением стали употреблять его элементы в виде «ordinata» и «applicata» (или же, по-французски, «ordonnée» и «appliquée»). Первое из этих слов одержало верх не ранее второй половины XVIII столетия. Первоначально под ординатой понимали то всю хорду конического сечения, то ее половину; подобные колебания восходили к самому Аполлонию[1]). Еще Эйлер во «Введении в анализ» понимал под этим словом целую хорду, а наши ординаты называл «applicatae». Термин «координаты» придумал Лейбниц (Acta Erud., 1692), определенно подчеркнувший при этом равноправие «абсциссы» и «ординаты». Мы выше подробно показали, сколь незначителен был сначала практический эффект этой мысли Лейбница.

Начальную точку, когда ее вообще как-либо называли, по большей части именовали «principium abscissarum» или «initium abscissarum» («начало абсцисс»). Витт (1659, ср. стр. 229) пользовался постоянно выражением «initium immutabile» («неподвижное начало»). Но уже Лагир в «Новых началах» (1679) применил слово «origine» («начало», ср. стр. 233). Ось абсцисс называли «linea abscissarum». Слово «ось» употреблено было самое позднее Барроу в «Лекциях по геометрии» (1670, ср. стр. 229). Однако следует иметь в виду, что все эти названия применялись наряду с другими, нами не приведенными (например, Риччи называл ординаты «parallelae» — «параллельными»). Лишь после 1750 начали постепенно выступать на первый план наши современные термины, а ось ординат, как неоднократно упоминалось, вошла в общее употребление только в XIX столетии.

Многие прежние исследователи утверждали, что в средневековом математике и философе Н. Ореме (Цейтен, ч. I) следует видеть предшественника Декарта в открытии аналитической геометрии. Однако новейшие изыскания показали, что эти утверждения содержали в себе, с одной стороны, слишком много, а с другой — слишком мало. Именно, выяснилось, что вся схоластическая философия представляла себе переменными, скажем во времени, ряд теологических понятий, вроде христианской любви, а наряду с этим — теплоту, холод и т. д. (понимаемые в аристотелевом смысле) и даже скорость какого-либо движения. Схоластики занимались метафизическими спекуляциями о характере изменения этих понятий и снабжали их числовыми (но не эмпирическими!) примерами. Орем первый, по-видимому, предложил воспользоваться в этой связи графическим изображением, весьма близким с нашим

---

[1]) Уже Ф. Мавролико, например, в сочинении «о часовых линиях» (De lineis horariis, опубликовано в Opuscula mathematica, Венеция, 1585), применял, не найдя в этом последователей, слово «ордината» в нашем смысле.

современным. Он это сделал в большом трактате, сохранившемся лишь в рукописном виде и названном им самим «О дифформности качеств» (De difformitate qualitatum, написано ранее 1371). Приписываемый обыкновенно ему «Трактат о широтах форм» (Tractatus de latitudinibus formarum) представлял собой сжатое изложение этого учения, но не принадлежал самому Орему. Существенное отличие графического приема Орема от современных воззрений заключается в том, что у него отсутствовали понятия начальной точки и абсциссы. Орем, как и все его последователи, постоянно исходил лишь из некоторого «основного отрезка», который мог представлять собой, например, час. «Свойство» рассматривалось лишь в границах между перпендикулярами, восстановленными в концах этого отрезка; «latitudines» — «широты» являлись ординатами. «Фигуру» представляли себе ограниченной сверху линией, которая могла быть прямой, кривой или же составленной из каких угодно кусков. О кривых какого-либо определенного рода не было и речи [1]). Схоластики все же сумели очень хорошо исследовать таким образом, например, равномерно-ускоренное движение. Они понимали, что во всех таких случаях площадь «фигуры» служит мерой пути. Метод определения пути падающего тела, примененный Галилеем, как и его результат (см. стр. 105), действительно встречались уже у Орема (если отвлечься от внешней математической формы).

Недавно было установлено, что этот способ графического изображения дошел до времен Декарта и что Декарт знал его и иногда употреблял [2]). Однако и самое тщательное изучение высказываний Декарта не позволяет установить какую-либо видимую связь между указанным графическим приемом и аналитической геометрией Декарта. Весьма вероятно, что общие элементы обоих приемов кажутся очевидными лишь нам, получившим уже твердо укрепившееся и гораздо более широкое представление о координатах. Нередко высказывалась также мысль о влиянии на Декарта или Ферма́ издавна применявшихся небесных координат, но это не может быть доказано и невероятно. Естественна лишь их связь с античной геометрией конических сечений.

---

[1]) Часто встречающееся мнение, будто у Орема имелось указание на то, что максимальной ординате соответствует минимальное изменение скорости описывающей точку кривой, основывается на одной ошибке Курце.

[Подробнее об Ореме см. в статье В. П. Зубова, приложенной к его переводу упоминаемого здесь трактата о широтах форм (Историко-математические исследования, вып. XI, М., 1958). — *Прим. ред.*]

[2]) Действительный график, именно, график ежедневного давления воздуха в 1684, впервые начертил по совету М. Листера Р. Плот (пунктирной ломаной; см. Philos. Trans., 1685).

ГЛАВА ВТОРАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Введение пространственных координат

Нам кажется естественной мысль о представлении линий и поверхностей в пространстве с помощью трех неопределенных величин x, y, z, подобно тому как кривые на плоскости выражаются двумя такими координатами x, y. Однако эта мысль совершенно отсутствовала у Декарта, и лишь намеки на нее встречались у Ферма́. В то время как Ферма́ пытался исследовать форму некоторых тел с помощью их плоских сечений (см. ниже, стр. 256), Декарт в конце второй книги своей «Геометрии» указал, как можно было бы аналитически изучать пространственные кривые. Он представлял себе, что такая кривая проектируется на две взаимно перпендикулярные плоскости, а обе проекции относятся затем к оси, являющейся линией пересечения этих плоскостей. К своим беглым замечаниям Декарт не присоединил ни одного примера, а то, что он говорил о нормалях к пространственным кривым, было неверно. Григорий из Сен-Винцента не раз применил эту мысль, правда, в геометрической форме, для определения линии пересечения двух цилиндров («Геометрический труд» составлен в 1625, опубликован в 1647).

Если не говорить о численном определении точек пространства с помощью трех перпендикулярных координат, данном Дезаргом, который совершенно не преследовал аналитических целей (Exemple de l'une des manières etc., т. е. «Образец одного из общих способов и т. д.», Париж, 1636, ср. ниже стр. 308), то последовательное распространение декартова понятия координат впервые получило в «Новых началах» (1679) Лагира (ср. выше, стр. 232), где были применены буквы x, y, v. Хотя Лагир не пошел дальше в этом направлении и его «Новые начала» вообще были очень мало известны позднейшим математикам, но идея о координатах в пространстве уже не была чуждой в конце XVII столетия. Ею должен был воспользоваться Иоганн Бернулли, устанавливая дифференциальное уравнение геодезических линий, о котором он сообщил Лопиталю 24 декабря 1697 (опубликовано оно было, правда, лишь в 1742, см. ниже, стр. 290). В промежутке между этими двумя сроками той же проблемой занялся Эйлер, давший в 1728/29 ясное решение ее, в котором применил отчетливо определенные пространственные координаты t, x, y [Comm. Ac. Petr., 1728 (1732)]. Но еще в 1715 Иоганн Бернулли определил в письме к Лейбницу пространственные координаты x, y, z как перпендикуляры на три взаимно перпендикулярные плоскости. Если добавить, что А. Паран в своих «Математических и физических опытах», I (Париж, 1705), оставшихся, впрочем, довольно мало известными, вывел уравнение общей шаровой поверхности и некоторых других поверхностей, то будет видно, что с пространственными координатами мы встречаемся с самого начала XVIII столетия (об А. Пито см. стр. 289).

Уравнение шаровой поверхности Паран привел в виде

$$c^2+y^2-2cy+b^2+x^2-2bx+a^2+z^2-2az=r^2.$$

Он продифференцировал это уравнение при постоянном y и x, но к уравнению касательной плоскости все же не пришел, а привел лишь две лежащие в ней прямые, именно, касательные к круговым сечениям шара плоскостями, параллельными плоскостям xOz и yOz. Паран рассмотрел, кроме того, конхоидальную поверхность с уравнением

$$y=\overline{b+x}\sqrt{\frac{z-x}{z}}\quad.$$

и поверхность

$$y=\frac{z^3}{x^2+az}.$$

Он до некоторой степени исследовал обе эти поверхности, определив на них точки максимумов и минимумов, а также точки перегиба для сечений, параллельных координатным (как сказали бы мы) плоскостям. Он употреблял выражения «équation superficielle» («поверхностное уравнение») и «ligne solide» («пространственная линия»), а также термины «tige» и «neud»; последнее показывает, что Паран, подобно Лагиру, примыкал к кругу дезарговых идей (см. стр. 233).

В 1731 в Париже анонимно вышла книга средних размеров, уверенно трактовавшая о новых геометрических вопросах. Это были «Исследования о кривых двоякой кривизны» (Recherches sur les courbes à double courbure). Впрочем, фамилия автора, Клеро, была ясна из двух приложенных отзывов и указа о праве издания. Название «кривая двоякой кривизны» не было совершенно новым. Оно было уже употреблено (правда, случайно) Пито [Mém. Ac. Paris, 1724 (1726)], высказавшим предположение, что, быть может, такие кривые станут некогда предметом исследований геометров. Подобно Лагиру, труда которого он, несомненно, не знал, Клеро ввел третью координату. Он представлял себе, что пространственная кривая задается как линия пересечения двух цилиндров, стоящих на двух «courbes de projection» («проекционных кривых») перпендикулярно к двум координатным плоскостям. Для Клеро было вполне ясно, что одно уравнение между x, y, z выражает поверхность. В качестве примеров он привел уравнения.

$$aa = xx + yy + zz, \quad \frac{n}{m}x = \sqrt{yy + zz}, \quad yy + zz = ax.$$

Он вращал также параболу $xx = au$ вокруг касательной в ее вершине и получил поверхность вращения с уравнением

$$x^4 = aayy + aazz.$$

Затем он вывел уравнения еще других поверхностей вращения в частности, эллипсоид и однополостный гиперболоид вращения. При этом Клеро исходил из уравнений

$$\left.\begin{matrix} aa - xx \\ xx - aa \end{matrix}\right\} = \frac{aa}{bb}uu,$$

в которых заменял потом uu на $yy + zz$.

Далее, Клеро излагал, как можно установить уравнение конуса с заданными вершиной и плоской направляющей кривой. Он указал, что если вершина конуса лежит в начале координат, уравнение его является однородным. В качестве примеров брались косой и круговой конус, а потом конусы с направляющими

$$s^r = a^{r-1}u \quad \text{и} \quad \frac{as^{r+q}}{c} = u^r\,\overline{a \mp u}^{\,q}$$

(эллипсами и гиперболами любого порядка). В последующем изложении Клеро рассмотрел задачи об определении по уравнениям двух любых поверхностей уравнений кривой их пересечения и об исследовании того, лежит ли данная пространственная кривая на данной поверхности; все это снабжалось примерами. Затем разбиралось несколько примеров изучения пространственных кривых по данным уравнениям, причем всегда учитывались отрицательные координаты, хотя на чертежах неизменно изображались лишь части кривых (это относится и к поверхностям). Рассмотрен был и вопрос об изучении уравнения поверхности с помощью определения ее сечений. В качестве образца Клеро взял поверхность $xyz = a^3$, площадь которой Иоганн Бернулли предложил вычислить еще в 1715. Попутно упоминалось, что уравнение плоскости имеет первую степень.

Проблемы, в которых мы применяем дифференциальное исчисление, у Клеро решались в основном лишь геометрически. Так обстояло с задачей об определении перпендикуляра к кривой, лежащей на некоторой поверхности, причем этот перпендикуляр в свою очередь перпендикулярен или касателен к этой поверхности; то же с задачей об определении касательной к кривой, заданной как пересечение двух поверхностей с уравнениями общего вида. Примеры давались только в задаче об определении геометрического места точек пересечения с «основанием», т. е. плоскостью xOy, всех касательных некоторой пространственной кривой и в задаче об определении геометрического места точек пересечения с «основанием» всех нормалей к некоторой поверхности, следующих вдоль некоторой лежащей на ней кривой. О касательной плоскости Клеро сообщал не больше, чем Паран. Из отдела, посвященного применению интегрального исчисления, в первую очередь следует упомянуть, что там была решена задача об определении уравнения плоской кривой, развернутой с цилиндра. Книга заканчивалась рядом разнообразных приложений. Намерение автора выпустить в качестве продолжения «Исследований» другую работу, специально о поверхностях, осуществлено не было.

Почти сорок лет спустя после выхода «Исследований» была написана первая крупная работа Г. Монжа о развертывающихся поверхностях, опубликованная, правда, лишь в Mém. prés. div. Sav., 1785 (поступила она в 1771). Мы здесь не будем касаться собственного содержания этой большой статьи, о котором будет идти речь ниже (стр. 294), а отметим лишь аналитический разбор трех вводных задач. В первой из них Монж искал плоскость, проходящую через точку x', y', z' и перпендикулярную к прямой, данной уравнениями

$$ax+by+cz+d=0,$$
$$a'x+b'y+c'z+d'=0.$$

Он принял, что уравнение искомой плоскости имеет вид

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

и нашел, что

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma},$$

где $\alpha=ab'-a'b$ и т. д. Во второй задаче определялась длина перпендикуляра, опущенного из точки на данную прямую, а в третьей находилась нормальная плоскость в какой-либо точке кривой двоякой кривизны, данной уравнениями $y=\varphi x$, $z=\psi x$. По этому поводу Монж написал уравнение прямой, лежащей в плоскости, в виде $y=Ax+B$.

Мы особо отмечаем все эти мелочи, так как основные задачи пространственной аналитической геометрии были впервые решены, по-видимому, здесь, и так как, в частности, буквенные обозначения Монжа удержались доныне. Эти элементарные задачи Монж разобрал позднее точно таким же образом в своих первых трех вводных «Листах анализа» (1795, ср. ниже стр. 299).

В большой статье о трехгранных пирамидах [Nouv. Mém. Ac. Berlin, 1773 (1775)] Лагранж чисто аналитически решил ряд связанных с этой темой задач. Тем самым принципы аналитической геометрии были впервые употреблены, к тому же сразу с большой общностью и изяществом, в вопросах, ранее относившихся лишь к области элементарной геометрии. Лагранж поместил в начале пространственной прямоугольной системы вершину L[1]), а координаты трех других вершин M, M', M'' обозначил соответственно x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''[2]). Затем он вычислил длины всех ребер, площади боковых граней и площадь основания пирамиды. Если s, t, u суть координаты произвольной точки плоскости $MM'M''$, то должно иметь место уравнение

$$u = l + ms + nt.$$

Неизвестные коэффициенты l, m, n Лагранж нашел, подставив в уравнение координаты вершин x, y, z и т. д. и решив три возникающих при этом линейных уравнения. Все получающиеся в результате выражения, содержащие x, y, z; x', y', z' и т. д., Лагранж привел еще в начале статьи. Для определения высоты пирамиды он нашел минимум $\sqrt{s^2+t^2+u^2}$, после чего получил также различные выражения для объема. Далее, он взял другую точку P с координатами p, q, r, которые определил по данным ее расстояниям от вершин PM, PM', PM'' и координатам точек M, M', M'', определил девять ребер получившейся двойной пирамиды и вычислил длину диагонали LP. Вслед затем точка P принималась за центр описанного вокруг первой пирамиды шара, радиус и координаты центра которого вычислялись в функции координат x, y, z и т. д. Далее, Лагранж нашел с помощью дифференциального исчисления расстояние π опять-таки произвольной точки P от плоскости $MM'M''$, а отсюда вывел расстояния ρ, ρ', ρ'' точки P от других граней пирамиды. Вслед за этим Лагранж принял за данные ρ, ρ', ρ'' и по ним нашел координаты точки P; потом те же координаты получались из данных отношений между четырьмя пирамидами с вершинами в точке P и основаниями, лежащими на гранях первой пирамиды. Принимая затем $\pi = \rho = \rho' = \rho''$, Лагранж перешел к вписанному шару, а при отрицательных

---

[1]) В работе Лагранжа не имелось ни одного чертежа.

[2]) Индексирование с помощью штрихов употреблялось уже Котесом («Гармония мер», 1722). В качестве дальнейших отличительных индексов Монж в Misc. Taur., 1770/73 применял еще K', K'', K''' и даже $'K$, $''K$ и т. д.

знаках некоторых из расстояний — к вневписанным шарам пирамиды. Выведя уравнения плоскостей, проходящих через каждое из ребер и середину противолежащего ребра, и определив их точку пересечения, он нашел еще центр тяжести пирамиды.

Теорему о том, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

где α, β, γ — углы, образуемые некоторой плоскостью с тремя взаимно перпендикулярными координатными плоскостями, установил Тенсо (Mém. prés. div. sav., 1780). Отсюда он вывел также обобщение теоремы Пифагора на трехмерное пространство, а именно, доказал, что квадрат какого-либо куска плоскости равен сумме квадратов его проекций на три координатные плоскости. Де-Гюа [Mém. Ac. Paris, 1783 (1786)] заявил претензию на то, что в более простом виде, когда куском плоскости является треугольник, дополняющий прямой трехгранный угол до тетраэдра, он доказал эту теорему более чем на двадцать лет ранее. Но эта более простая теорема встречалась еще в записях Декарта от 1619/21 (Oeuvres, т. X). Для случая трех равных взаимно перпендикулярных ребер ее впервые опубликовал Фаульгабер («Арифметические чудеса» — Miracula arithmetica, Аугсбург, 1622). Де-Гюа распространил теорему на произвольный тетраэдр.

Преобразование пространственных координат в полном объеме впервые применил Менье в работе о кривизне поверхностей (Mém. prés. div. sav., 1785). Новые координаты Менье назвал x', y', z', старые u, v, t, а новые координаты старого начала x, y, z. Угол старой плоскости xOy с новой он обозначил через π, а угол линии пересечения обеих плоскостей с новой осью y-в через ω. Тогда его формулы приобрели вид (ср. стр. 259)

$$\begin{aligned} z' - z &= t\cos\omega + u\sin\omega, \\ x' - x &= [v\cos\omega - t\sin\omega]\sin\pi + u\cos\pi, \\ y' - y &= [v\cos\omega - t\sin\omega]\cos\pi - u\sin\pi. \end{aligned}$$

Как и при изложении истории плоской аналитической геометрии (стр. 245), мы должны здесь упомянуть «Элементарный курс тригонометрии» С. Лакруа (Париж, 1798/99). В приложении, отсутствовавшем, впрочем, в первом и втором изданиях [an VIII, 1799/1800[1])], при решении основных задач на точки, прямые и плоскости современные обозначения употреблялись и для аналитической геометрии в пространстве. Для уравнения плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

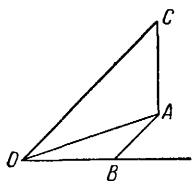
[1]) Возможно, что это приложение появилось впервые в третьем издании, мне недоступном. В четвертом издании (1807) оно уже имелось.

проходящей через три точки (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), вычислялись отношения между коэффициентами. Решены были там и все соответствующие задачи на определение углов. Однако поверхностям второго порядка и пространственным кривым отводилось лишь несколько страниц. Био и здесь вскоре дал более подробное изложение вопроса в современной форме (1802, ср. выше стр. 246).

§ 2. Поверхности второго и высших порядков

«Поверхности» как таковые, кроме плоскости и шара, древние математики почти не рассматривали. Правда, Архимед присоединил к известным тогда обыкновенным коническим и цилиндрическим поверхностям еще «сфероиды» (т. е. эллипсоиды вращения) и «коноиды» (т. е. параболоиды и двухполостные гиперболоиды вращения), но он смотрел на них лишь как на «тела», имея целью определение их объемов. Только Ферма́ в помеченном 6 января 1643 «Введении в изучение поверхностных мест» (Isagoge ad locos ad superficiem), в котором он видел увенчание своего более раннего «Введения» (см. стр. 212), сделал попытку ввести в теорию поверхностей, рассматриваемых как геометрические места, общую точку зрения. Эта точка зрения заключалась в характеристике соответствующих поверхностей, именно, шести вышеназванных, с помощью линий их пересечения с произвольными плоскостями. Прежде всего Ферма́ устанавливает без доказательства шесть соответствующих лемм. Затем он замечает, что существуют также параболические и гиперболические цилиндры, но он не видит, что имеются также общие эллипсоиды, эллиптические параболоиды и двухполостные гиперболоиды, а о гиперболических параболоидах и однополостных гиперболоидах не подозревает и подавно. Вследствие этого приводимые им теоремы о геометрических местах были частью неверны, особенно потому, что он совершенно не располагал средствами, при помощи которых мог бы отличать специальные случаи. Метод, который должен служить для определения геометрических мест, в этом «Введении» был лишь описан, и в работе отсутствовали какие-либо вычисления. Состоял метод в том, что брались произвольная плоскость и в ней, с помощью анализа, которому автор учил в первом «Введении», искалась линия, представляющая искомое геометрическое место. Не всегда ясно, как мыслил себе Ферма́ аналитический вывод. Но так как в приводимых им примерах требуемые линейные места ему были в действительности известны, то он оказывался в состоянии определить и поверхностные места, поскольку для этого было достаточно его лемм. Заключительное замечание работы о том, что всякий проницательный геометр легко смог бы добавить средства отличия отдельных случаев, ограничительные условия для констант, доказательства лемм, «бесчисленные» задачи на места и теоремы, опущенные автором лишь ради краткости, показывает, что Ферма́ весьма недооценил существующие здесь трудности. На пространственные координаты здесь не было и намека. В другом месте Ферма́ весьма бегло отметил, что уравнение, содержащее x, y, z, представляет поверхностное геометрическое место (Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum in analyticis usus. Appendix, «Новое употребление в анализе радикалов второго и высшего порядков». Приложение, Oeuvres, 1).

В своем сочинении о конических сечениях (1655, см. стр. 226) Валлис рассмотрел эллипсоиды, эллиптические параболоиды и двухполостные гиперболоиды общего вида, правда, лишь с целью определения их объемов. Подобно Ферма́, он держался античных названий этих тел. Во II части (1670) своего большого труда «Механика» (Лондон, 1669/71) он взял однополостный гиперболоид вращения, который последовательно именовал «гиперболическим цилиндроидом», исследовал его сечения, привел формулу объема и определил для всех рассматривавшихся им «тел» центры тяжести. Он заметил лежащие на этом теле параболы и прямые, установив, что «противолежащие гиперболы» при соприкосновении «вырождаются в противолежащие треугольники».



Черт. 13.

Уравнение поверхности (именно, параболоида вращения) в пространственных координатах вывел впервые Лагир (1679, ср. стр. 232). В качестве образца неопределенной проблемы, в которой недостает двух условий, он привел следующую задачу (черт. 13). В некоторой плоскости дана прямая OB, требуется найти вне плоскости такую точку C, что при $CB \perp OB$ отрезок OC всегда больше, чем OB, на величину a. Опустив на плоскость перпендикуляр CA и положив $CA = v$, $OB = x$, $AB = y$, Лагир нашел уравнение

$$a^2 + 2ax = y^2 + v^2.$$

Впрочем, он ничего не сказал о том, что представляет собой это уравнение. Но в соответствующей главе своей книги он вообще желал лишь показать, как возникают неопределенные проблемы. Далее он определенно заявляет, что для выяснения отношения точек CC поверхности к точкам прямой (на черт. 13 прямой OB) следует проводить параллельно друг другу прямые CA к плоскости, проходящей через OB, а затем в этой плоскости проводить опять-таки параллельные прямые AB. Однако он не собирается заниматься такими геометрическими местами. Поэтому вряд ли можно сомневаться в том, что Лагир понимал значение приведенного выше уравнения, по крайней мере как уравнения, выражающего некоторую поверхность.

В трактате о кратчайших линиях на поверхностях [Comm. Ac. Petr., 1728 (1732), см. ниже стр. 290] Эйлер рассмотрел три частных рода поверхностей, а именно, цилиндрические и конические поверхности и поверхности вращения. Он привел для этих поверхностей, отчасти лишь словесно, уравнения, которые мы можем записать в виде

$$z=\varphi(y), \quad \frac{z}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad z=\varphi(x^2+y^2)$$

(ср. также одно его письмо к Иог. I Бернулли от 18 февраля 1729).

Вскоре затем Герман в одной статье в Comm. Ac. Petr., 1732/33 (1738) частью аналитически, частью геометрически исследовал несколько поверхностей, данных своими уравнениями. Прежде всего он рассмотрел плоскость

$$az+by+cx-e^2=0,$$

затем «параболически-цилиндрический клин»

$$z^2-ax-by=0,$$

конус

$$z^2-xy=0,$$

«коноиды»

$$z^2-ax^2-bxy-cy^2-ex-fy=0$$

и

$$az^2+byz+cy^2-exz+fx^2+gz-hx=0$$

и, далее, «круглые тела» с общим уравнением

$$u^2-x^2-y^2=0,$$

где

$$u^2=a^2-\frac{a^2z}{b} \quad \text{и} \quad u^2=a^2-\frac{a^2z^2}{b^2}$$

(в последнем случае при $a=b$ получается шар). В заключение Герман рассмотрел тело, уравнение которого привел в виде $(b-z)\sqrt{a^2-y^2}=bx$. Это уравнение аналитически, хотя и не применяя настоящих пространственных координат, исследовал в приложении к «Алгебре» (1685) еще Валлис, назвавший его Cono-Cuneus («конусо-клин»). Уже приведенные названия фигур свидетельствуют о том, что Герман видел в них в основном еще тела, чему содействовало также ограничение лишь положительными значениями z, а по большей части и положительными x, y. Для параболического конуса Герман определил касательную плоскость, не приводя ее уравнения, для коноидов — их высшие точки, для конусов (в том числе для тех, которые оказываются частными случаями коноидов) — круговые сечения и для «конусо-клина», рассматриваемого лишь в первом октанте, — различные сечения, характеризующие форму этих тел.

Эйлер присоединил ко второму тому своего «Введения в анализ» (1748; см. стр. 240) довольно обширное «Приложение о поверхностях». Прежде всего он заявил, что о поверхности можно судить по расстояниям ее точек от произвольно выбранной плоскости. В этой плоскости он затем взял «ось» с «начальной точкой абсцисс» и ввел таким образом прямоугольную систему координат. Эйлер определенно указал, что x, y, z следует придавать всевозможные положительные и отрицательные значения, отметил возможность взаимной перемены трех координат и образуемых их осями плоскостей, весьма подробно разобрал вопрос о симметрии координат в восьми октантах. Тем не менее на чертежах во внимание всегда принимался лишь первый октант, форма поверхностей вообще не анализировалась и понимание пространственных фигур как тел еще не было преодолено. Далее, Эйлер показал, что уравнение с двумя координатами представляет цилиндрическую или призматическую поверхность, а однородное уравнение выражает конус (или пирамиду). После этого он привел весьма общий класс поверхностей, включающий конусы, цилиндры и поверхности вращения (однородное уравнение относительно Z, x, y, где Z есть функция z), затем другой класс поверхностей, сечения которых (именно в первом октанте), перпендикулярные к оси, представляют собой треугольники (сюда попадает, между прочим, «конусо-клин» Валлиса), потом класс поверхностей, параллельные сечения которых аффинны между собой, и еще два вида линейчатых поверхностей, — все это без примеров. Затем Эйлер показал, как можно вообще представить сечение поверхности произвольной плоскостью в самой этой плоскости уравнением с двумя координатами t, v; он применил это потом к точному исследованию сечений цилиндра, конуса и шара, причем за основу взял прямые эллиптические цилиндр и конус, включающие рассматривавшиеся раньше косые круговые конус и цилиндр.

За этим следовала специальная глава, в которой выводились уравнения, преобразующие одну прямоугольную систему пространственных координат в другую. Так как Эйлер ввел шесть определяющих преобразование величин, то его формулы оказались несимметричными. В той же связи Эйлер ввел здесь понятие «порядка» поверхности и сформулировал теорему, что порядок плоской кривой, возникающей при сечении поверхности, не выше порядка самой поверхности; попутно он отметил также возможность распадения линии пересечения на несколько других. В качестве примера Эйлер привел уравнение плоскости

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a,$$

для которой, между прочим, определил углы с координатными плоскостями.

После всего этого Эйлер впервые предпринял исследование общего уравнения второй степени с тремя координатами. В первую очередь он рассмотрел совокупность высших членов уравнения, как характеризующую «асимптотический конус», и сообщил условия его действительности, а также его вырождения. Затем, не произведя, впрочем, всех должных выкладок, он правдоподобным образом показывает, что общее уравнение может быть приведено к виду

$$App+Bqq+Crr+K=0.$$

Из этого уравнения Эйлер получает эллипсоид («elliptoeides»), однополостный и двухполостный гиперболоиды («superficies elliptico-hyperbolica» и «superficies hyperbolico-hyperbolica»). Эллиптический и гиперболический параболоиды («superficies elliptico-parabolica» и «superficies parabolico-hyperbolica») выражены здесь уравнением

$$App\pm Bqq=ar.$$

Эйлер упоминает еще параболический цилиндр

$$App=aq$$

и делает несколько беглых замечаний о том, как можно определить род поверхности по какому-нибудь данному уравнению. Рассуждения Эйлера, особенно в части, касающейся доказательств, были еще весьма несовершенны, но предложенная им классификация легла в основу позднейших исследований.

Еще в начале «Приложения» Эйлер заявил, что не намерен рассматривать подобно Клеро кривые двоякой кривизны отдельно, ибо они тесно связаны с природой поверхностей. Свое «Приложение» он поэтому закончил главой о пересечении двух поверхностей, вообще говоря, представляющем пространственную кривую. Он показал, как при исключении одной из переменных возникают уравнения проекций этой кривой на координатные плоскости, и применил это также к пересечению поверхности с плоскостью. Для примера он привел пересечение плоскости с шаром, причем нашел условия их соприкосновения. Далее, он определил для шара сначала конус вращения, касающийся его вдоль некоторой окружности, а потом эллиптический конус, касающийся шара в двух точках. Относительно последнего случая он заметил, что хотя кривая пересечения имеет лишь две действительные точки, но ее проекция на некоторую координатную плоскость действительна. При определении касательной плоскости к поверхности Эйлер пользовался лишь приемом Клеро (см. стр. 253), не устанавливая общего уравнения этой плоскости, которое потребовало бы «анализа бесконечного», между тем как «Введение в анализ» должно было лишь «открыть к нему путь». В самом конце Эйлер разъяснил, как найти две поверхности, пересекающиеся по данной плоской кривой.

Сочинение Варинга об алгебраических кривых (1762, см. стр. 280) также содержало главу об алгебраических поверхностях («solida»), в первый и последний раз до XIX столетия трактовавшую об этом предмете общим образом. Варинг замечает, что он распространил на поверхности и кривые двоякой кривизны почти все теоремы о плоских кривых, данные им в первой главе. Привел он, однако, лишь отдельные теоремы о диаметральных плоскостях. Далее он указал, что число независимых постоянных для поверхности n-го порядка равно

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}-1.$$

Восемнадцатое столетие не дало и более крупных по значению частных изысканий о поверхностях. Бо́льшей частью тогда занимались проблемами интегрирования, для которых учение о поверхностях доставляло лишь необходимую основу. Мы упомянем одну работу Брекенриджа (Phil. Trans., 1759, I). Он смещал параллельно самой себе плоскость, постоянно пересекающую данную пространственную кривую и данную прямую. Прямые, соединявшие точки пересечения, образовывали новые «тела». Отдельно разбирался случай, когда пространственная кривая является прямой (гиперболический параболоид). А. Модюи, рассматривая кубатуру тела, образованного последней поверхностью (Mém. prés. div. sav., 1763), открыл второе семейство прямых, лежащих на гиперболическом параболоиде, не связанное с только что указанным способом образования. Тенсо (Mém. prés. div. sav., 1780, см. стр. 255) изучал «параллелоиды», образуемые прямой, скользящей по двум пространственным кривым и остающейся всегда параллельной некоторой плоскости. Когда одна из направляющих кривых являлась прямой, перпендикулярной к направляющей плоскости, он называл поверхность «коноидом». Таким образом, это слово впервые приобрело свое современное значение здесь. Затем Тенсо вывел для этого коноида и своих более общих поверхностей теоремы о площадях сечений и об объемах некоторых тел. В виде частного случая появлялся также гиперболический параболоид, уравнение которого приводилось в форме

$$Ky=xz.$$

Н. Фергола независимо от Эйлера [Nov. Act. Petr., 1794 (1801), поступило в 1778] распространил правила Гульдина на общие винтовые поверхности, образуемые при винтовом движении любой меридиональной кривой вокруг оси (Atti Ac. Nap., 1787). Кестнер

(Ad theoriam cochleae etc. «О теории улитки, и т. д.», Diss. math. et phys., Альтенбург, 1771) показал, что существовавшее тогда мнение, будто косая (windschiefe) винтовая поверхность получается при навертывании косой плоскости на цилиндр, — неверно. Это навертывание не может быть осуществлено без разрывов косой плоскости, ибо уже сама винтовая поверхность не принадлежит к развертывающимся. Кестнер, далее, показал, что соприкасающаяся плоскость в точке винтовой линии всегда содержит перпендикуляр, опущенный из этой точки на ось (см. стр. 289).

Мы уже видели ранее, что при интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными Г. Монж в первую очередь руководствовался геометрическими соображениями (стр. 187 и след.). Таким образом он получил конечные уравнения ряда семейств поверхностей, содержавшие произвольные функции. Мы приведем из них уравнение цилиндрических поверхностей

$$\alpha x - \beta z = \varphi(ax - by)$$

и уравнение поверхностей вращения

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

Монж упоминает о них обоих, как о полученных уже ранее, в работе в Mém. Ac. Paris, 1784 (1787), бывшей, впрочем, значительно более богатой по содержанию. В Mém. prés. par. div. sav. (1780) упоминалось также, как найденное ранее (ср. стр. 258), уравнение конических поверхностей

$$z - c = (x - a)\,\varphi\left(\frac{y - b}{x - a}\right).$$

Все эти исследования Монж позднее собрал в «Листах анализа» (см. стр. 299) и в возникшем из них «Приложении анализа к геометрии» (Париж, 1807).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КРИВЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

§ 1. От Декарта до Ньютона и его последователей

Говоря здесь о «высших кривых», мы будем иметь в виду только «плоские алгебраические кривые». О пространственных кривых речь будет идти в главе V, а для плоских «трансцендентных кривых» (см. главу IV, § 1_4) еще и доныне не имеется классификации и общей теории. Декарт, впервые положивший в своей «Геометрии» начало систематическому изучению алгебраических кривых, названных им «геометрическими», желал совершенно исключить из математики трансцендентные, ибо думал, что они — «механические», т. е. порождаются менее точным образом, чем алгебраические. Неосновательность этой концепции доказал Лейбниц, уже с 1677 начавший применять свое дифференциальное исчисление как раз преимущественно к трансцендентным кривым. От Лейбница ведут происхождение также выражения «трансцендентный» и «алгебраический» (заметки 1679; Acta Erud., 1682 и 1686; ср. Иоганн Бернулли, Acta Erud., 1697), к которым он присоединил еще понятие «интерсцендентности»[1] [письмо к Валлису от 28 мая 1697; Валлис, Opera, III (1699), Лейбниц, Gesammelte Werke, 3 серия, 4-й том, Галле, 1859].

Впрочем, Декарт был в некоторой мере прав, поскольку ряд трансцендентных кривых, особенно тех, которые мы теперь выражаем простыми полярными уравнениями, в то время не мог быть сразу выражен с помощью конечных уравнений, связывающих x, y, к чему он как раз и стремился. О некоторых соответствующих функциях тогда отсутствовало даже понятие. Но когда Декарт указал механизм, описывавший кривые с уравнениями

$$x^{2n}=r^2(x^2+y^2)^{2n-2},$$

---

[1]) Это функции вроде $x^{\sqrt{2}}$. — *Прим. ред.*

где $n=0, 1, 2, 3, \ldots$[1]) (которые он, впрочем, не попытался вывести ни для одного частного случая), он справедливо заметил, что все эти кривые или кривые, описываемые подобным же образом, столь же допустимы в геометрии, как и конические сечения. Декарт придавал важное значение «порядку» уравнения. Однако, то обстоятельство, что алгебраические задачи 4 (6) степени приводятся к уравнениям 3 (5) степени, склонило его вообще к объединению двух «порядков» в один «род» («genre»). Конические сечения образовывали, согласно его взглядам, первый «род», кривые 3-го и 4-го порядков — второй «род», кривые 5-го и 6-го порядков — третий «род» (ср. стр. 58). Эта нецелесообразная классификация действовала еще долгое время. Сам Декарт, если не говорить о некоторых отдельных примерах в его рассуждениях (ср. стр. 221), более ничем не обогатил общую теорию высших алгебраических кривых.

В 1704 вышло сочинение, оставившее далеко позади себя все предшествовавшие случайные высказывания о кривых высшего порядка, именно «Перечисление кривых третьего порядка» Ньютона (см. стр. 238). Из сохранившихся рукописей Ньютона, о которых мы упоминали выше, видно, как постепенно складывалась общая теория кривых третьего порядка, а также то, что Ньютон не остановился и перед весьма обширными вычислениями, чтобы найти свои результаты, в конце концов получающиеся столь просто.

Лежащая в основе исследования Ньютона идея была совершенно ясной. Установив, что линии лучше всего подразделять по порядкам, соответствующим степеням их уравнений, причем Ньютон отметил, что порядок равен (возможному) числу точек пересечения кривой и прямой, — он обобщил теоремы о конических сечениях на кривые третьего порядка. Так, например, диаметры он определил как прямые, соединяющие те точки параллельных хорд, для которых сумма двух отрезков хорды с одной стороны всегда равна ее отрезку с другой стороны. Затем соответственно определяются вершины кривой, оси, получающиеся при взаимной перпендикулярности диаметра и сопряженных хорд, и «общий центр», существующий, когда все диаметры пересекаются в одной точке. Далее, подобно тому как в непараболических конических сечениях квадрат ординаты находится в постоянном отношении к прямоугольнику на двух отсекаемых ординатой отрезках диаметра (см. стр. 214), так в непараболических кривых 3-го порядка постоянно отношение параллелепипеда на трех ординатах, соответствующих какой-либо точке диаметра, к параллелепипеду на

---

[1]) Уравнение этих кривых в действительности таково:

$$x^{4n}=r^2(x^2+y^2)^{2n-1}.$$

— *Прим. ред.*

трех отрезках диаметра. Так же можно распространить на кривые 3-го порядка понятия «latus transversum», т. е. длины диаметра, и «latus rectum», т. е. параметра. Кривая не может иметь асимптот в числе, большем ее порядка. Кривая имеет параболическую ветвь, если при удалении точки касания в бесконечность касательная также уходит в бесконечность.

После этого введения, содержание которого отнюдь не исчерпывалось приведенными теоремами, устанавливаются в соответствии с общим видом кривых четыре типа уравнений, правая часть которых равна $ax^3+bxx+cx+d$, а левая представляет собой либо $xyy+ey$, либо xy, либо yy, либо, наконец, y. Каждая кривая может быть представлена уравнением одного из этих типов. Координаты при этом мыслились постоянно косоугольными. Мы видим также, что Ньютон уже совершенно не обращал внимания на однородность уравнений.

Затем Ньютон дает названия различным возможным формам кривых третьего порядка, различая их в зависимости от поведения в бесконечности и положения относительно асимптот. Одновременно он производит классификацию и перечисление видов, которые получает, кладя в основу указанные четыре типа уравнений и исследуя их в зависимости от корней уравнения

$$ax^3+bxx+cx+d=0,$$

а также (в случае первого типа) уравнения

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}e^2=0.$$

Из одного чертежа видно, как Ньютон пришел к последнему уравнению; там изображена гипербола, проходящая через точки касания вертикальных касательных. Эта гипербола имеет уравнение

$$2xy+e=0$$

(Ньютон его не приводит), с помощью которого для абсцисс точек касания получается упомянутое уравнение четвертой степени. Ньютон постоянно различает случаи, в которых кривая не имеет диаметра в специальном смысле слова, т. е. прямой, делящей пополам семейство параллельных хорд, или же имеет один или три таких диаметра. Принимается еще во внимание, пересекаются или нет в одной точке асимптоты. Для классификации используются также простые особенности кривых — узловые точки, точки заострения и изолированные точки. Уже из этих замечаний видно, что принцип классификации Ньютона не был вполне единым. Учитывая, например, горизонтальные касательные, можно было бы получить еще ряд других видов, как это заметил позднее де-Гюа (см. стр. 272). Даже с собственной точки зрения Ньютон упустил из внимания несколько форм, так что установленное им число видов, именно 72, является несколько произвольным.

Все это, однако, было совершенно несущественно по сравнению с грандиозным достижением Ньютона, заключавшимся в установлении этих видов и в твердом овладении целой областью новых и сложных типов кривых (ср. стр. 239). Кроме того, Ньютон сделал еще следующее замечание величайшей важности. Если, говорит он, с помощью светящейся точки отбрасывать на бесконечную плоскость тени фигур, то тенями конических сечений будут всегда тоже конические сечения и вообще порядок кривых меняться при этом не будет. И точно так же, как круг при отбрасывании тени производит все конические сечения, так пять расходящихся парабол с общим уравнением

$$yy = ax^3 + bxx + cx + d$$

производят все другие кривые второго рода, т. е. 3-го порядка. Для кривых высших порядков также можно найти некоторые более простые кривые этих же порядков, порождающие с помощью своих теней все остальные кривые.

С современной точки зрения утверждение Ньютона представляется несколько неопределенным, но оно показывает, что Ньютон был вполне знаком с проективными зависимостями фигур. Вероятно, что к своему результату Ньютон пришел действительно из рассмотрений проективного характера, намеченных им в пятом отделе первой книги «Начал» (1687; лемма XXII). Эта теорема Ньютона являлась наиболее трудной в «Перечислении», и Стирлинг, о котором мы будем вскоре рассказывать, ее еще не доказал. Лишь Клеро в Mém. Ac. Paris, 1731 (1733) дал весьма ясное доказательство положения Ньютона. Сначала он показал, что кубический конус обладает самое большее тремя образующими, вдоль которых располагаются точки перегиба всех получающихся в плоских сечениях кривых, так что криволинейные сечения с двумя точками перегиба, или вообще без таких точек, получатся, если провести секущую плоскость параллельно одной или нескольким таким образующим. Собственно говоря, здесь уже заключалось открытие того факта, что три точки перегиба всегда лежат на одной прямой. Из уравнения Ньютона

$$xyy = ax^3 + bxx + ex + d,$$

пригодного для всех кривых 3-го порядка, кроме расходящихся парабол, Клеро затем получил уравнение

$$xyy = ax^3 + bxxz + exzz + dz^3,$$

представляющее конические поверхности, направляющими которых являются указанные выше кривые, а потом, положив x постоянным, он пришел к уравнению расходящихся парабол в координатах y, z.

Далее, Ньютон приводит еще одно органическое описание ряда кривых. Он вращает два данных угла вокруг их вершин A и B. Если точка пересечения одной пары их сторон движется вдоль данной прямой, то точка пересечения другой пары сторон описывает, вообще говоря, коническое сечение. Если же первая точка пересечения сама движется по коническому сечению, проходящему, скажем, через вершину A, то вторая описывает кривую 3-го порядка, проходящую через B и имеющую в A двойную точку. Но если коническое сечение, по которому перемещается первая точка, расположено произвольно, то вторая точка описывает, вообще говоря, кривую 4-го порядка с тремя двойными точками, из которых две лежат в вершинах A и B; в частных же случаях она описывает кривую 3-го порядка, двойная точка которой не совпадает ни с A, ни с B. Ньютон вообще всегда тщательно отмечает возможные частные случаи. При помощи этих теорем Ньютон строит коническое сечение, проходящее через пять точек, и кривую 3-го порядка с двойной точкой, проходящую через семь точек. Сочинение заканчивалось применением кривых 3-го порядка к графическому решению уравнений (ср. стр. 60). Приведем еще указание, сделанное Ньютоном в начале этого последнего раздела: кривые, пишет он, употребляются в геометрии для решения задач при помощи их точек пересечения. По-видимому, из предшественников Ньютона также никто не видел в изучении кривых самоцели.

Упоминавшееся уже нами сочинение Стирлинга «Ньютоновы кривые третьего порядка» (стр. 239) вышло в Оксфорде в 1717. Стирлинг не только снабдил доказательствами теоремы Ньютона, но также внес и существенные дополнения общего характера. Можно сказать поэтому, что теория высших алгебраических кривых, называемых Стирлингом «lineae rationales» (противоположные им — «lineae irrationales»), получила надежное основание лишь в трудах Ньютона и Стирлинга, взятых вместе. Так, Стирлинг нашел, что число коэффициентов уравнения n-го порядка равно $\frac{1}{2}(n^2+3n)$, а затем указал, что это число равно числу точек, определяющих кривую n-го порядка. Он исследовал ход и возможное количество бесконечных ветвей кривых четного и нечетного порядков, занимался определением асимптот и их точек пересечения с кривой, правильно распознал характер асимптоты перегиба (Wendeasymptote) и отметил понижение порядка уравнения относительно y, если ось ординат параллельна какой-либо асимптоте. Он распространил свое исследование также на криволинейные асимптоты и диаметры высших порядков. Однако все исследования Стирлинга исходили не из самого уравнения кривой, а из разложения y в ряд с помощью параллелограмма Ньютона (стр. 62). Он представлял этот параллелограмм в несколько ином по внешности виде, объясняя не лучше, чем сам Ньютон, почему, собственно, одни члены в нем высшего, а другие низшего порядка. Но, во всяком случае, он привел много хорошо разобранных примеров разложений, как в начале системы координат, так и в бесконечно удаленных точках. Он был столь убежден в важности этого приема, что неоднократно заявлял, например, в случае обыкновенных асимптот, что их нельзя по существу исследовать без разложения в ряд. Стирлинг рассмотрел также общий характер кривых, имеющих уравнения вида

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + gx^6 + \text{ и т. д.}$$

и разобрал различные возможные случаи для третьей и четвертой степени, откуда, между прочим, умозаключил о четности числа мнимых корней уравнения, получающегося, если положить $y = 0$. Разложения в бесконечные ряды Стирлинг впервые использовал при анализе таких уравнений, приведя для образца две кривые 3-го порядка. К 72 видам кривых 3-го порядка, установленным Ньютоном, Стирлинг присоединил четыре новых.

Органический способ образования кривых Ньютона (ср. «Лекции по оптике и геометрии» И. Барроу, Лондон, 1669/70, 2-е изд., 1674) был особенно развит К. Маклореном. Еще в Phil. Trans., 1719 Маклорен привел в духе Ньютона способы образования некоторых лишенных особенностей высших кривых, также не снабдив их доказательствами. Но уже в 1720 он выпустил в Лондоне большую работу «Органическая геометрия или общее описание кривых линий» (Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis), которая содержала не только доказательства всех построений Ньютона, но и многие оригинальные результаты. Так, например, Маклорен вращал один из углов вокруг некоторого полюса, а вершину другого перемещал вдоль прямой, причем одна из его сторон все время проходила через некоторую неподвижную точку. Если при этом одна точка пересечения сторон углов описывала прямую, то другая давала кривую 3-го порядка с двойной точкой. Подобным же образом описывались общие кривые 3-го порядка и кривые 4-го порядка с двумя двойными точками. Указывалось здесь и на кривые 4-го порядка с тремя двойными точками и соответственно с тройной точкой. Маклорен доказал, что кривая 4-го порядка имеет не более трех двойных точек. Образование кривых с помощью углов данной величины, вершины которых движутся по прямым, распространялось затем на линии любого порядка, чем и заканчивалась часть I «Органической геометрии».

Часть II представляла собой обобщение первой, поскольку в ней вместо прямых, вдоль которых движутся вершины данных углов или же на которых должны находиться свободные точки пересечения одной пары сторон, брались кривые. Маклорен доказывает, что когда в вышеупомянутом случае одна точка пересечения свободных сторон находится постоянно на кривой n-го порядка, две другие стороны порождают кривую порядка $3n$. Если же вершина второго подвижного угла движется не по прямой, а по кривой m-го порядка, то порядок порождаемой кривой будет равен $3mn$. При этом Маклорен впервые сформулировал теорему (основа которой была, впрочем, более раннего происхождения), что две кривые порядка m и n пересекаются в mn точках (окончательно доказал это Э. Безу, Mém. Ac. Paris, 1764, стр. 50). Далее, Маклорен перешел к описанию подэр первого и высшего порядков, которым он посвятил уже статью в Phil. Trans., 1718. Рассмотрены были также кривые орбиты, возникающие при действии центральных сил, обратно пропорциональных степеням расстояний. В заключение Маклорен обратился к определению кривых, проходящих через данные точки. При этом он уже встретился с тем затруднением, что $\frac{1}{2}n(n+3)$ точек определяют кривую n-го порядка, а n^2 точек не определяют, ибо две кривые n-го порядка пересекаются в n^2 точках, и что, между тем, эти два числа равны для кривых 3-го порядка (см. стр. 279). Маклорен нашел также, что наибольшее число двойных точек равно $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, показав, что если бы существовала еще одна двойная точка, то через двойные точки и $n-3$ другие точки кривой можно было бы провести C_{n-2}, которая имела бы с исходной кривой на одну точку пересечения больше, чем это может быть в действительности. Доказательства и вся форма изложения «Органической геометрии» были в общем геометрические, но в отдельных случаях выводились и уравнения описываемых кривых, хотя довольно громоздким способом.

Аналогичные образования кривых дал, очевидно независимо от Маклорена, У. Брекенридж в «Геометрическом этюде об описании кривых линий» (Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum, Лондон, 1733). Только он пользовался не углами, а прямыми, которые вращались вокруг своих неподвижных точек A, B, C,... и у которых одни точки пересечения N, S,... двигались вдоль данных кривых, тогда как другие точки пересечения O,... описывали определяемые кривые. Брекенридж исходил из простого случая, когда даны три основные точки и точки N, S перемещаются по прямой. Точка O при этом описывает коническое сечение. Затем он перешел к случаю, когда точка N движется по прямой, а S — по некоторой кривой C_n; тогда O описывает C_{2n}. Если, далее, геометрическим местом точек N является C_m, а геометрическим местом S будет C_n, то O будет двигаться по C_{2mn}. Для случая n основных точек автор пришел к теореме, что если из $\frac{1}{2}n(n-1)$ точек пересечения всех n прямых $n-1$ движутся по прямым, то остальные $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ точек пересечения описывают конические сечения. Некоторые обобщения Брекенридж привел еще в Phil. Trans., 1735/36. В этом же томе Маклорен заявил, что некоторые из теорем Брекенриджа были открыты ранее им, хотя и не опубликованы. Маклорен сообщил там новую теорему, что если вокруг n основных точек вращаются стороны n-угольника, причем $n-1$ вершин описывают кривые $C_l, C_m, C_n, \ldots$, то n-я вершина описывает кривую порядка $2lmn\ldots$

Ту же задачу, которую поставил перед собой Стирлинг, Ф. Николь стремился решить посредством «обыкновенных приемов» [Mém. Ac. Paris, 1729 (1731)]. Предположив сначала ординаты u параллельными одной из асимптот, так что u входило в уравнение лишь во второй степени, он разрешил уравнение относительно u и, полагая в общем уравнении равными нулю те или иные коэффициенты, нашел тридцать одну форму, которые с помощью преобразования координат привел к четырем типам Ньютона. Николь обошелся вовсе без разложения в ряды и дифференциального исчисления. Затем он разобрал формы и свойства кривых, представленных первым уравнением Ньютона

$$xyy - ey = ax^3 + bxx + cx + f,$$

и особо определил случаи, в которых имеются два или три диаметра. На этом работа Николя обрывалась, и обещанное продолжение не увидело света.

Изучение кривых выше 3-го порядка, естественно, приводило иногда и к высшим особенностям. Небольшую, но интересную работу о теоретически возможных видах таких особенностей опубликовал Мопертюи [Mém. Ac. Paris, 1729 (1731)]. Не производя аналитических выкладок, он указал, что точки перегиба и заострения могут непосредственно следовать друг за другом в разных последовательностях: точка перегиба за точкой перегиба, острие за острием, точка перегиба за острием[1]). В первом случае возникает «точка извива» («point de serpentement»), во втором — «точка двойного острия» («point de double pointe»), а в третьем — открытая еще Лопиталем («Анализ бесконечно малых, 1696) «точка возврата второго рода» («point de rebroussement de la seconde sorte»)[2]).

---

[1]) Простые точки перегиба рассматривали еще Ферма́ в 1638, затем Гюйгенс в приложении к сочинению «Открытия о величине круга» (Лейден, 1654), а вслед за ними Ф. ван-Скаутен (латинское издание «Геометрии» Декарта, 1659) и Р. де-Слюз во 2-ом издании «Мезолабия», 1668. Простые точки заострения встречались еще в древности (например, циссоида, см. ниже, стр. 280).

[2]) См. примечание на стр. 136. — *Прим. ред.*

В каждом из этих случаев касательная имеет с кривой три общих элемента. В первом случае они следуют один за другим, во втором накладываются полностью друг на друга, в третьем два из них лежат один на другом, а третий примыкает к ним (черт. 14). Во всех случаях у касательной и кривой совпадают четыре последовательные точки пересечения. Если не говорить о том, что к точкам возврата второго рода принадлежит еще одна двойная точка, то представления Мопертюи были вполне справедливы. Позднее Ж. Альфен (Mém. prés. div. sav. Paris, 1877) и М. Нетер (Math. Ann. IX, 1875) создали из учения об элементах кривых полную теорию высших особенностей.

Черт. 14.

Многократными точками и высшими особенностями, а также прямыми и криволинейными асимптотами кривых подробно занялся Бражелонь. В широко задуманной работе он предпринял классификацию кривых четвертого порядка по образцу Ньютона. Однако из этой работы вышел лишь первый, правда, довольно обширный, отдел, опубликованный в трех продолжениях в Mém. Ac. Paris, 1730 (1732) и 1731 (1734). В этом отделе были изложены только общие основные теоремы, которые должны были предшествовать классификации кривых. Бражелонь применял как алгебраические преобразования, так и дифференциальное исчисление, последнее по способу Ж. Сорена [Mém. Ac. Paris, 1716 (1741?)]. Его перечисление возможных особенностей кривых четвертого порядка было еще неполным, но он все же открыл изолированную точку самоприкосновения («lemniscate infiniment petite» — «бесконечно малая лемниската»), довольно общим образом рассмотрел k-кратную точку и имел ясные представления о точках извива и перегиба высших порядков. О самой классификации было опубликовано еще сообщение в Mém. Ac. Paris, 1732 (1735). Из этого сообщения видно, что Бражелонь прежде всего различал четыре класса кривых 4-го порядка, в соответствии со случаями, когда одна из переменных участвует не более, чем в 1-й, 2-й или 3-й степени или же, входит в уравнение в 4-й степени. Высказанное в конце сообщения намерение издать всю работу в виде отдельной книги осуществлено не было.

§ 2. Де-Гюа, Эйлер, Крамер и их последователи

В 1740 Жан Поль де-Гюа-де-Мальв выпустил в Париже книгу «Применения анализа Декарта», представляющую собой томик величиной в малую октаву. Как это следует из полного текста заглавия, автор стремился показать преимущества чисто аналитического метода Декарта при изучении алгебраических кривых по сравнению с методом дифференциалов (ср. стр. 240). Де-Гюа тщательно изучил работы всех своих предшественников и оживленно критиковал их, хотя и не всегда достаточно справедливо. Однако его сочинение содержало ценные и во многих случаях новые идеи, которые могли бы существенно способствовать прогрессу теории алгебраических кривых, если бы последующие ученые обратили на них больше внимания. Прежде всего де-Гюа установил, что бесконечно удаленные точки, в которых ветви ведут себя иначе, чем у простой параболы или гиперболы, представляют собой не что иное, как особые точки, которые с помощью проектирования можно перевести в начало координат, лежащее в конечной области. В соответствии с этим де-Гюа преобразовал параллелограмм Ньютона в «алгебраический треугольник» (стр. 62), различные стороны и вершины которого считал равноправными. Указанные только что отношения он весьма просто выразил формулами проектирования

$$x = \pm \frac{pq}{z}, \quad y = \pm \frac{pu}{z},$$

где p, q — постоянные.

Для исследования и классификации особых точек, являвшихся главной частью работы, де-Гюа с помощью формул

$$x = p + z + nu \quad \text{и} \quad y = q + mu$$

переносит начало в особую точку (p, q), и, сохраняя прежнюю ось абсцисс, вращает по мере надобности ось ординат (для чего изменяет значения m, n). Затем он находит, что лежащая в начале координат особая точка характеризуется одной или же несколькими кривыми с уравнениями вида $y^m = Ax^n$ и полагает, что уже один первый член разложения Ax^n во всех случаях полностью характеризует ветви кривой. Поэтому он делает смелое утверждение или, как выражается сам, «доказывает априори», что точки возврата второго рода, заимствованные Мопертюи у Лопиталя (стр. 270), существовать не могут. Это уклонение от правильного пути в рассуждениях де-Гюа об особых точках и бесконечных ветвях в некоторой степени компенсировалось тем, что его рассуждения относились к кривым любого порядка, а не только, как было раньше, к кривым 3-го и 4-го порядков. Причину ошибки, допущенной де-Гюа в вопросе о точках возврата второго рода, раскрыл впервые Эйлер [Mém. Ac. Berlin, 1749 (1751)].

Глубокое понимание де-Гюа проективного метода привело его также к открытию неизвестной до того времени теоремы, что если кривая 3-го порядка имеет три точки перегиба, они обязательно лежат на одной прямой (ср. стр. 266). Если же точек перегиба лишь две, то соединяющая их прямая параллельна двум гиперболическим или параболическим ветвям с диаметром; де-Гюа, следовательно, не было ясно, что в этом случае третья точка перегиба лежит в бесконечности. Кроме того, исследования де-Гюа, к сожалению, часто выраженные в словесной форме, привели к окончательному доказательству теоремы Ньютона о пяти расходящихся параболах (см. стр. 266).

В своей книге де-Гюа все же привел методы дифференциальной геометрии для определения простых «особых» точек (для точек перегиба их, например, дал Лейбниц, Acta Erud. 1684), не забывая, впрочем, несколько покритиковать их и объявить, что его метод, разработанный в духе Декарта, значительно лучше. В другом сочинении, которое было только задумано, он собирался даже рассмотреть более простым образом с помощью анализа Декарта задачи интегрального исчисления. Де-Гюа, однако, открыто признавал необходимость дифференциальных приемов при решении задач, приводящих к «механическим» кривым (к которым он, по-видимому, причислял все эволюты), а также при изучении некоторых свойств «механических» кривых (ср. стр. 262). Он и сам употреблял дифференцирование, но, как говорил он, только для сокращения вычислений, например, при определении центра кривой (см. выше стр. 240), которому был посвящен весь первый отдел книги.

В третьем отделе книги де-Гюа с помощью методов, разработанных во втором отделе, решил некоторые задачи. К ним относилось и наиболее общее преобразование координат (все время косоугольных), которое он выразил уравнениями

$$x = p + ns + \overline{ng + h} \cdot r, \quad y = q + ms + mgr,$$

где коэффициенты m, n, g, h связаны некоторым соотношением. В качестве примера он взял сначала кривую 3-го порядка

$$y^3 = x^3 - ax^2 + b^2x.$$

Затем он детально исследовал формы кривых Кассини (см. ниже стр. 282). При этом он не только трактовал уравнения вроде

$$yy + xx + 2bx + bb = 0$$

как уравнение пары мнимых прямых вида

$$y = \overline{x + b} \cdot \pm \sqrt{-1}$$

или же как окружность нулевого радиуса, но даже приблизился к понятию кривой Гессе, рассматривая «результант», получаемый им для определения точек перегиба, как кривую и находя с ее помощью точки перегиба исходной кривой (он сопровождал это чертежом). Далее, он рассмотрел еще две кривые 4-го порядка, а также общие параболические кривые

$$y = a + bx + \dots + px^n$$

и сделал некоторые замечания о классификации кривых.

Патрик Мердок, опубликовавший в 1746 в Лондоне книгу «Ньютоново образование кривых посредством теней» (Neutoni genesis curvarum per umbras), не был знаком с сочинением де-Гюа. Своей задачей он поставил полностью осуществить то, что у Ньютона было только намечено и что осталось незаконченным еще у Стирлинга. Мердок при этом изложил основные идеи линейной перспективы (ср. стр. 311) и применил ее к коническим сечениям. Он вывел те же простые формулы проектирования, что де-Гюа. Затем, придавая различные положения плоскости, на которую производилось проектирование, он показал, как можно вывести из пяти расходящихся парабол все 72 вида Ньютона и четыре вида, добавленные к ним Стирлингом. К этим 76 видам он присоединил еще два новых, которые привел, впрочем, уже де-Гюа и на которые указал еще ранее в 1736 Э. Стон [опубликовано в Phil. Trans., 1739/40, I (1744)]. Все это занимало почти половину книги. Кроме того, Мердок изложил несколько теорем о точках пересечения линий, соединяющих точки касания некоторых касательных. Однако эти его предложения являлись лишь частными случаями более общих теорем, опубликованных в первом томе «Трактата о флюксиях» (1742) Маклореном, которому Мердок вообще был многим обязан.

Уже после смерти Маклорена (1746) был издан его довольно обширный труд об алгебраических кривых. Это сочинение, озаглавленное «Об общих свойствах геометрических линий» (De linearum geometricarum proprietatibus generalibus), было приложено к его «Трактату об алгебре» (1748; ср. выше стр. 48). Прежде всего в своем сочинении Маклорен дал некоторые общие теоремы об уравнении кривой относительно диаметра и о сумме обратных значений отрезков некоторой трансверсали между ее точкой P и точками кривой A, B, C, ... Затем он доказал частную теорему о том, что гармонический центр M точек A, B, C, ..., для которого

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} + \dots,$$

при вращении трансверсали вокруг точки P перемещается вдоль прямой (поляры!). Эта теорема стала известной[1]) Маклорену из посмертного наследия Котеса. Во втором отделе трактата содержались проективные теоремы о конических сечениях, среди которых не имелось почти ничего нового. Зато в третьем отделе Маклорен привел теоремы о точках пересечения прямых с кривыми 3-го по-

[1]) Без доказательства. — *Прим. ред.*

рядка и о касательных в этих точках пересечения, бóльшая часть которых в то время, очевидно, еще не была известна.

В том же году, что и «Алгебра» Маклорена, вышла книга Эйлера «Введение в анализ бесконечных величин». Мы уже знаем, что второй том «Введения» был отведен исключительно геометрии, именно — аналитической геометрии (ср. стр. 240 и следующие). Эйлер весьма ясно и искусно резюмировал здесь все достижения своего времени в этой области, не внеся, впрочем, в само учение о кривых каких-либо важных новых результатов. Теорию прямолинейных и криволинейных асимптот он разработал без алгебраического треугольника, исследуя лишь разложение на линейные множители выражений, составленных из членов n-й, $(n-1)$-й и т. д. степени уравнения кривой. Очевидно, что ему не были знакомы ни работы де-Гюа, ни работы Стирлинга, а идеи первого о равноправности бесконечно удаленных и конечных элементов были ему совершенно чужды. Он распределил кривые третьего порядка на 16 родов в соответствии с их поведением в бесконечности. При этом он справедливо отметил (как это сделал и де-Гюа), что с точки зрения своего принципа классификации Ньютон должен был бы установить значительно больше видов, чем 72, и подчеркнул, что его собственная классификация является окончательной. Для каждого рода он привел его нормальное уравнение и номера соответствующих ему видов Ньютона. Для кривых четвертого порядка он получил таким же путем 146 родов. То немногое, что Эйлер приводит о диаметральных и других свойствах кривых 3-го порядка, он вывел из общего уравнения. Еще большей краткостью отличались его рассуждения об определении формы кривой по уравнению. Столь же бегло Эйлер коснулся вопроса о касательных в простых и кратных точках. Если кратная точка имеет координаты p, q, то в случае двойной точки он приводит уравнение кривой в форме

$$P(x-p)^2+Q(x-p)(y-q)+P(y-q)^2=0,$$

а затем дает соответствующие формы уравнений для тройной и четырехкратной точек.

Вслед за тем Эйлер несколько подробнее и оригинально изложил учение о кривизне линий. Прежде всего он определил для кривой апроксимирующую ее в окрестности данной точки параболу и нашел для последней круг кривизны. Для уравнения

$$0=At+Bu+Ctt+Dtu+Euu+Ft^3+Gttu+Htuu+\text{и т. д.}$$

Эйлер получает, что длина радиуса кривизны в начале координат равна

$$\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}.$$

Анализируя это выражение, он пришел к точкам перегиба первого и высшего порядков, для чего привлекались еще члены третьей степени. Аналогично рассматривались лежащие в начале координат точки заострения первого и высших порядков. В качестве общей формы, заключающей все эти возможности, он взял апроксимирующие кривые с уравнениями $\alpha r^m = s^n$. В плане подобных рассмотрений точки заострения второго рода, разумеется, не встречались, однако с помощью удачно выбранного примера Эйлер доказал, что такие точки действительно существуют (ср. стр. 272).

Ближайшие две главы книги Эйлера трактовали о кривых, имеющих диаметры, и об определении кривых, ординаты которых обладают данными свойствами. В последнем случае Эйлер имел в виду следующее. Пусть, например, уравнение кривой дано в виде

$$yy - Py + Q = 0,$$

где P и Q — функции x, и ординаты, соответствующие одному и тому же значению x, суть PM и PN. Тогда можно принять, например, что

$$PM^n + PN^n = a^n$$

(n может быть также отрицательным или дробным). Аналогично обстоит дело с кривыми, уравнение которых имеет вид

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0.$$

В следующей главе Эйлер определял кривые по другим условиям. Однако и эти условия носили весьма ограничительный характер и относились только к свойствам отрезков, отсекаемых на лучах, выходящих из начала координат. Вначале Эйлер устанавливает общие уравнения алгебраических кривых, имеющих с таким лучом лишь одну, две или три точки пересечения. Попутно Эйлер употребляет полярные координаты, полагая луч $CM = z$, а угол его наклона к оси Ox обозначая через φ, так что

$$x = z \cos \varphi, \quad y = z \sin \varphi \text{ [1]}.$$

Затем он берет условия типа $CM \pm CN = \text{const.}$, $\overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = \text{const.}$, $\overline{CM}^n + \overline{CN}^n = \text{const.}$ и некоторые другие и исследует соответствующие классы кривых. Сходным образом поступает он и в случае трех точек пересечения.

Специальную главу Эйлер посвятил подобию и аффинности кривых. Он повторил сделанное уже ранее указание, что однородное относительно x и y уравнение представляет только систему («aliquot») прямых, пересекающихся в одной точке. Если же уравнение оказывается однородным при введении «параметра» a, то все представляемые им кривые являются подобными. Эйлер

---

[1]) Эйлер имел в этом предшественника, Я. Германа, писавшего еще, впрочем, вместо $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ буквы m и n. Радиус-вектор Герман также обозначал буквой z [Comm. Ac. Petr., 1729 (1735)].

приводит для примера уравнение

$$y^3-2x^3+ayy-aax+2aay=0$$

и доказывает, что если координаты точек другой кривой системы обозначить X и Y, то всегда будет

$$x=\frac{X}{n} \text{ и } y=\frac{Y}{n}.$$

«Аффинными» Эйлер назвал кривые, координаты которых связаны уравнениями

$$x=\frac{X}{m} \text{ и } y=\frac{Y}{n}.$$

Это определение совпадает с современным понятием аффинности. Затем Эйлер привел еще несколько примеров на составление систем кривых с одним переменным параметром.

Интересно, что в свою книгу Эйлер включил также главу о трансцендентных кривых. Он кратко рассмотрел тригонометрические кривые, логарифмическую кривую, циклоиду, эпициклоиды и гипоциклоиды, линию $x^y=y^x$ и спирали. Для спиралей он вновь применил полярные координаты, обозначая полярный угол, измеряемый в радианах, через s, а полярный радиус-вектор, как и раньше, через z. Ни здесь, ни где-либо в другом месте этого тома дифференциальное исчисление не применялось.

Мы должны здесь, по крайней мере, упомянуть написанные в Италии женщиной-математиком М. Аньези «Основания анализа» (Милан, 1748). Вышедшие в двухтомном издании в том же году, что и «Введение» Эйлера, они содержали обширный материал по рассматриваемым нами сейчас вопросам. Вскоре за этим в Женеве (1750) вышла объемистая книга, специально посвященная теории кривых. Это было «Введение в анализ алгебраических кривых» Г. Крамера, резюмировавшее, дополнившее и пояснившее многочисленными примерами все произведенные ранее в этой области исследования. Крамер изучил работы всех своих предшественников, о которых мы рассказывали выше. В частности, он упоминал де-Гюа, у которого позаимствовал, между прочим, «счастливую мысль» о замене параллелограмма Ньютона треугольником, хотя и не последовал за ним в «пренебрежительном отношении к бесконечным ветвям и кратным точкам». О «Введении» Эйлера он писал, что смог бы извлечь из него бо́льшую пользу, если бы познакомился с ним ранее. Действительно, как справедливо указывал Крамер, методы обоих сочинений были существенно различны. Но и Крамер избегал употреблять исчисление бесконечно малых, которое признавал необходимым для исследования трансцендентных кривых. Это обстоятельство часто приводило его к громоздким вычислениям, в частности, при преобразованиях координат, в которых он пользовался вместо теоремы Тейлора длинными разложениями по формуле бинома. Употребление тригонометрических функций в алгебраических вычислениях было ему, в противоположность Эйлеру, еще чуждо.

Мы не собираемся здесь полностью рассмотреть сочинение Крамера; укажем лишь те пункты, в которых он существенно продолжил труды своих предшественников. В первую очередь это относится к применению аналитического треугольника и, значит, разложений в ряды к особым точкам, лежащим в начале координат, и к бесконечным ветвям. В частности, чтобы получить правило линейки Ньютона, Крамер точно исследовал, какие члены неявного уравнения имеют одинаковый порядок по отношению к бесконечно малому и бесконечно большому. Здесь его изложение сходилось с изложением Маклорена в «Алгебре» (1748). Но он не упоминает этого сочинения, ибо он его, наверное, уже не мог использовать. Наряду с трудами более крупных математиков он цитирует также книги, имевшие во всяком случае лишь второстепенное значение, вроде «Геометрии бесконечного» (Géométrie de l'infini, Париж, 1727) де-Фонтенелля и «Начал универсальной математики» (Matheseos universalis elementa, Лейден, 1727) В. Я. с'Гравесанда. Крамер обратил особое внимание на необходимость пользоваться в некоторых случаях более чем одним первым членом соответствующих рядов. Благодаря этому он пришел к правильному пониманию вопроса о точках возврата второго рода. Приведшая к тем же результатам статья Эйлера тогда еще не появилась (см. стр. 272). Для отыскания следующих членов разложения в ряд Крамер дал довольно общие практические правила. Другим важным пунктом, которому он уделил специальное внимание, являлись разветвления рядов, которые получаются уже в начале, когда на определяющей прямой лежат не два, а три или более членов, но которые могут появиться и в ходе дальнейшего разложения. Полную теорию таких разложений в ряды дал лишь В. Пюизе в 1850.

Очень большое место занимало у Крамера приложение разложений в ряды к изучению бесконечных ветвей. Крамер, очевидно, не заметил незначительности рассуждений о прямолинейных и криволинейных асимптотах всех порядков по сравнению с проективной точкой зрения, выраженной мимоходом де-Гюа. Наоборот, он подчеркивал, что именно бесконечные ветви позволяют дать надежную классификацию кривых различного порядка, и произвел подобную классификацию для кривых первых пяти порядков. Как упоминалось, большое внимание обратил Крамер и на кратные точки, в особенности точки перегиба и извива (см. стр. 270) высших порядков. Он нашел, что число условий, которым должна удовлетворять кривая, чтобы она могла иметь t-кратную точку, равно $\frac{1}{2}tt+\frac{1}{2}t-2$; это, впрочем, знал уже де-Гюа (ср. стр. 273). Затем он составил таблицу, которая показывала, какие кратные точки и в каких комбинациях могут иметься у кривых первых восьми порядков. В последней главе он вновь сопоставил (не вполне исчерпывающим образом) различные виды кратных точек, которые могут существовать у кривых первых шести порядков. Здесь же приводился так называемый «парадокс» Крамера, в котором шла речь об отношении между числом точек пересечения двух кривых одинакового порядка и числом точек, определяющих кривую (ср. стр. 269). Отметим еще произведенное Крамером исследование диаметров (также и высших порядков) и кривизны. Предполагая, что y разложен в ряд

$$y = A + Bz + Czz + Dz^3 + \dots,$$

он получил для радиуса кривизны выражение

$$\frac{(1+BB)\sqrt{(1+BB)}}{2C}.$$

Крамер тщательно разобрал вопрос о кривизне парабол $y = ax^h$ в начале координат.

После Крамера в XVIII столетии в теории высших кривых существенных успехов сделано не было. Прочный запас сведений о высших кривых перешел во все математические руководства общего характера, в большом количестве появлявшиеся в то время (ср. стр. 245). Мы должны указать, однако, еще на некоторые частности. Так, Дионис дю-Сежур и Гуден анонимно выпустили книгу в двенадцатую долю листа под названием «Трактат об алгебраических кривых» (Traité des courbes algébriques, Париж, 1756), содержавшую теорему, что C_t может иметь самое большое $t^2 - t$ точек, в которых касательные параллельны какому-либо данному направлению. Лишь в 1818 это число было открыто вновь и использовано для создания понятия «класса» (Понселе, Ann. math.). Любопытно также, что наряду с кругом кривизны авторы еще рассматривали соприкасающиеся параболы и исследовали геометрическое место их фокусов.

Во втором томе упоминавшихся выше «Оснований анализа» Риккати—Саладини (1767, см. стр. 238) давался геометрический вывод формулы радиуса кривизны, если кривые отнесены к некоторому «фокусу». Радиус-вектор обозначался y, а под dx понималось то, что мы бы обозначили $y\,d\varphi$ [1]). Формула тогда гласила:

$$\frac{yds^3}{dx^3 + dx\,dy^2 + ydyddx - ydxddy}\ ^{2)}.$$

Заметим также, что вплоть до Германа (стр. 276) полярные координаты всегда применялись в этой форме и притом вообще только для спиралей. Объяснялось это тем, что остерегались вводить

---

[1]) Термин «полярное уравнение» (aequatio polaris) встречался у В. Крафта [Comm. Ac. Petr., 1732/33 (1738).]

[2]) Радиус кривизны в полярных координатах приводился еще у Лопиталя в его сочинении, указанном на стр. 270. — *Прим. ред.*

в вычисления углы и их дифференциалы. Ту же формулу Г. Фонтана вывел в своих «Сочинениях по высшему анализу» (Analiseos sublimioris opuscula, Венеция, 1763) из формулы в прямоугольных координатах с помощью преобразования координат. В современном виде основные формулы дифференциальной геометрии в полярной системе были приведены впервые, по-видимому, С. Гурьевым, обозначавшим радиус-вектор r, а полярный угол ω [Nov. Act. Petrop., 1794 (1801)]; он получил их аналитически из формул в декартовых координатах, не применяя бесконечно малых треугольников [ср. также Эйлер, Mém. Ac. St.-Pét., 1819/20 (1824), составлено в 1781].

Э. Варинг в качестве второй части своих «Аналитических этюдов» (1762) выпустил особое сочинение «Свойства алгебраических кривых» (Proprietates algebraicarum curvarum, Кембридж, 1772). Новыми в этой работе являлись только некоторые метрические теоремы, особенно о диаметрах, хотя вообще она была написана весьма своеобразно и свидетельствовала о хорошем владении ее автором алгебраической основой теории высших кривых. Отметим, в частности, такую теорему: если

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \dots,$$

максимальные или минимальные ординаты суть $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, а абсциссы точек пересечения кривой с осью абсцисс $x_1, x_2, \dots, x_n$, то произведение всех y_i относится к произведению квадратов всех разностей $x_\varkappa - x_\lambda$, как a^n к n^n. Геометрическое место, описываемое точкой, неизменно связанной с кривой, катящейся по некоторой прямой, автор назвал «курвоидой». Затем он обращается к квадратуре и спрямлению курвоид. Варинг рассматривал также задачи на максимумы и минимумы, связанные с коническими сечениями со вписанными или описанными многоугольниками.

Во второй половине XVIII столетия появилось, кроме того, большое количество статей, в которых рассматривалось спрямление кривых и другие задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (траектории, параллельные кривые, механические задачи, отношения между радиусом кривизны и радиусом-вектором и т. п.). Они принадлежали, главным образом, Эйлеру, Н. Фусу и Ф. Шуберту, публиковавшим их в Nov. Act. Petrop. Мы можем здесь лишь просто упомянуть об этих работах.

Системы алгебраических кривых до XIX столетия рассматривались только в связи с «парадоксом Крамера» [см. стр. 279; ср. особенно Эйлер, Mém. Ac. Berl., 1748 (1750)], между тем как семейства кривых с переменными параметрами начал изучать еще Лейбниц (Acta Erud., 1692; примеры там же, 1694).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

§ 1. Специальные плоские кривые

Еще задолго до того, как возникла общая теория конических сечений, был изобретен ряд отдельных кривых для построения знаменитых античных задач (Цейтен, ч. I). Мы приведем ниже главнейшие черты истории наиболее известных специальных кривых, следуя их современному подразделению на алгебраические и трансцендентные. Древней истории их мы касаться почти не будем.

1. Кривые 3-го порядка. Одной из наиболее древних кривых является «циссоида Диоклеса», названная так благодаря сходству с листом плюща (κισσός); бесконечные ветви ее были, действительно, обнаружены лишь в начале XVII столетия. Она послужила Ферма́, Гюйгенсу, Котесу и И. Бернулли образцом для испытания их интеграционных приемов.

«Декартов лист» чисто аналитически определил в одном письме к Мерсенну от 1638 Декарт, предложив его в качестве примера для применения своего метода касательных [ср. стр. 109)][1]. Первоначально во всех четырех квадрантах вычерчивали четыре одинаковых листа, так что Роберваль предложил для этой кривой название «le galanth» (т. е. подснежник). Правильная форма кривой была установлена лишь в конце XVII столетия. С целью расставить перед Робервалем ловушку, Декарт дал также уравнение этой кривой относительно биссектрисы угла между старыми координатными осями.

«Декартова парабола» появилась, правда, лишь с одной ветвью уже в «Геометрии» Декарта (1637). Правильно нарисовал ее Ньютон, назвавший ее «Tridens», т. е. трезубец («Перечисление кривых», 1704; ср. стр. 221).

«Строфоида» (термин Э. Монтуччи, 1846) была открыта в середине XVII столетия, вероятно, одним французским математиком. Ее изучением занимались Гвидо Гранди и Торричелли.

---

[1]) Точнее говоря, для испытания метода касательных Ферма́. — *Прим. ред.*

«Трисектриса Маклорена» появилась в его «Органической геометрии» (1720), «кривая Чирнгауза» (термин Р. Арчибальда, 1900) встречается в Acta Erud., 1690, а «версьера» (или т. н. «локон Аньези») ведет свое происхождение из «Квадратуры круга и гиперболы» (Quadratura circuli et hyperbolae, Пиза, 1703) Г. Гранди.

2. Кривые 4-го порядка. И здесь имеются весьма древние линии, вроде «спирических линий» Персея (II столетие до н. э.), представлявших собой сечения тора, и «конхоиды Никомеда», две ветви которой рассматривались как различные кривые еще геометрами XVII столетия (см., например, стр. 226). В XVI и XVII столетиях конхоида была излюбленным примером для приложения всяческих инфинитезимальных приемов. Ньютон («Универсальная арифметика», 1707) даже предложил отнести ее, наряду с прямой и окружностью, к разряду постоянно употребляемых кривых.

Конхоида, основанием которой является окружность, была названа еще Робервалем «улиткой Паскаля», в честь Этьена Паскаля (отца Блеза), которому, вероятно, принадлежит ее изобретение. Открытие «кардиоиды» приписывается И. Коерсма, жившему в конце XVII столетия, а название эго ввел Кастильон в Phil. Trans., 1741. Довольно большую статью об общих свойствах конхоид опубликовал Лагир [Mém. Ac. Paris, 1708 (? 1730)].

«Декартовы овалы» были описаны Декартом во второй книге «Геометрии» (1637) с целью их применения при выделке линз. Из рукописей Декарта (ср. стр. 222) видно, что важная теорема о трех фокусах этих овалов была ему известна уже в 1629.

«Кривая-каппа» (название принадлежит А. Обрей, Journ. math. spéc., 1895) согласно сообщению, сделанному в 1662 Гюйгенсу де-Слюзом, была придумана учеником и сотрудником Декарта Г. ван-Гутшовеном.

«Кривые Кассини» (см. стр. 273) должны были представлять собой, по мнению Дж. Д. Кассини, орбиту Солнца, а в фокусе их помещалась Земля [сообщено его сыном Жаком Кассини в «Началах астрономии» (Éléments d'astronomie, Париж, 1749)].

«Лемниската» (т. е. лента, бант) давала, согласно Як. Бернулли, решение одной механической задачи (Acta Erud., 1694; название принадлежит ему же). Еще Даламберу не было известно, что эта линия представляет собой частный случай кривых Кассини с действительной узловой точкой перегиба («Методическая энциклопедия» — Encyclopédie méthodique, Париж — Льеж, 1785); доказано это было лишь П. Феррони (1782) и Дж. Саладини (1806).

«Раковинная линия», описанная в «Наставлении об измерении» (Underweysung der messung usw., Нюренберг, 1525) Альбрехта Дюрера, являлась обобщением конхоиды Никомеда, чего, правда, Дюрер не подозревал.

3. Алгебраические кривые высшего порядка. «Параболы и гиперболы высших порядков», как упоминалось выше,

были использованы в начале разбираемого нами периода рядом математиков в качестве основы для разработки инфинитезимальных приемов (см. стр. 104,108). В класс «биномиальных кривых» их объединил лишь О. Конт (1843). Общими параболическими кривыми

$$y = ax^m + bx^{m-1} + \ldots + f$$

занимался особенно Ньютон в интерполяционных задачах и для графического решения уравнений (стр. 207, 60).

«Розы» были открыты Гвидо Гранди (два письма к Лейбницу, 1713), детально рассмотревшим их в специальной книге «Геометрические цветы» (Flores geometrici, Флоренция, 1728).

«Треугольные кривые» возникли в одной оптической задаче, поставленной Эйлером [Act. Ac. Petr., 1778, II (1781). Эвольвенты этих кривых он называл «круговидными» (Orbiformen).

«Мультипликатрисы» и «медиатрисы», т. е. линии, служащие для умножения куба и соответственно для вставки произвольного числа средних пропорциональных между двумя данными отрезками, изобретались математиками всех времен. Во второй книге «Геометрии» Декарт привел такую кривую совершенно общего вида (см. стр. 263), специально изученную затем Дж. Б. Караччиоли в его «Книге о кривых линиях» (De lineis curvis liber, Пиза, 1740). В возрасте двенадцати с половиной лет несколько таких кривых нашел Клеро (Misc. Berol., 1734); одна из них была, вероятно, тождественна с так называемой «кампилой» Эвдокса.

«Сектрисы», или «кривые деления угла», были тоже предложены в большом числе. Одну из них предложил Томазо Чева (Opuscula, Милан, 1699), назвав ее «аномальной циклоидой» (Cyclois anomala).

Кривым с несколькими осями симметрии посвятил XV главу второго тома своего «Введения» (1748) Эйлер.

Кривыми, длины дуг которых представляют собой некоторые определенные функции, несколько раз занимались Эйлер [Nov. Act. Petr., 1789 (представлено 1776), Mém. Ac. St.-Pét., 1830 (представлено 1781)] и Н. Фус (Nov. Act. Petr., 1805).

«Синус-спирали», современное полярное уравнение которых

$$\rho^n = a^n \cos n\varphi,$$

исследовал еще Маклорен в «Трактате о флюксиях» (1742). Однако название и многочисленные красивые свойства этих линий были получены недавно (А. де-ла-Гупильер, 1880). Частными случаями их являются прямая, все виды конических сечений, лемниската, кардиоида и кривая Чирнгауза.

4. Трансцендентные кривые. Одной из древнейших трансцендентных кривых является «квадратриса Динострата». До Роберваля [около 1636, см. Mém. Ac. Paris, 1666/99 (1730)]

рассматривали только ветвь кривой, лежащую в определяющем квадранте круга. «Квадратриса Чирнгауза» («Исцеление ума» — Medicina mentis, Амстердам, 1686) была аффинна синусоиде. В Phil. Trans., 1700 Дж. Перкс (анонимно) предложил другую квадратрису, уравнение которой в полярных координатах было бы

$$\rho = a\frac{\sin\varphi}{\varphi};$$

эту кривую рассматривали также несколько математиков XVIII столетия. Название «кохлеоиды» ей дал Фалькенбург (1883).

Общеизвестна «спираль Архимеда», также представляющая собой одну из квадратрис. В XVII столетии особенное внимание привлекло ее спрямление, отсутствовавшее у Архимеда. Кавальери, Григорий из Сен-Винцента, Паскаль и Ферма́ показали, что оно может быть приведено к спрямлению параболы.

«Спирали высших порядков», современное уравнение которых

$$\rho^k = a^k\varphi,$$

прежде всего были использованы как примеры для квадратур еще до открытия интегрального исчисления (Ферма́, 1636; Стефан дельи Анджели, 1660; Валлис, около 1663). Частные случаи ($k=2$) встречались и в задачах механики [ср. Вариньон, Mém. Ac. Paris, 1699 (1732?)]. В том же случае $k=2$ («параболическая спираль») Як. Бернулли применил методы интегрального исчисления (Acta Erud., 1691). «Гиперболическую спираль» ($k=-1$) впервые ввел Вариньон [Mém. Ac. Paris, 1704 (1722?)]. «Жезл» (посох, «Lituus», $k=-2$) описал Котес (Phil. Trans., 1714).

Открытие «логарифмической спирали» следует приписать Декарту [письмо к Мерсенну от 12 сентября 1638; термин принадлежит Вариньону, Mém. Ac. Paris, 1704 (1722?)]. Вероятно, одновременно с Декартом к этой кривой пришел Торричелли, давший ее квадратуру и спрямление, явившееся первым спрямлением высшей кривой. Особенно красивые свойства логарифмической спирали были открыты Як. Бернулли (Acta Erud., 1692).

История открытия «циклоиды» неясна. Некоторые находят эту линию у де-Бувелля в «Шести книгах введения в геометрию» (Geometricae introductionis libri sex, Париж, 1503). Название «циклоиды» ей дал около 1598 Галилей, пытавшийся определить ее площадь посредством взвешивания. Точно вычислил площадь циклоиды Роберваль в 1634, результат которого подтвердили Декарт и Ферма́ в 1638 (Роберваль, между прочим, называл ее «трохоидой», от τροχός — колесо). Вскоре затем Рен произвел спрямление циклоиды. Впоследствии ею занимались все выдающиеся геометры. В частности, ряд ценных предложений открыл около 1658 Паскаль. Гюйгенс («Маятниковые часы», 1673, закончено в 1665) нашел, что эволюта циклоиды с ней конгруэнтна.

Касательная к циклоиде была проведена Декартом еще в 1638, причем он указал общий способ построения нормалей для циклоидальных кривых. Гюйгенс установил, что циклоида является таутохронной кривой. Что она представляет собой также брахистохрону, нашел Иоганн Бернулли (Acta Erud., 1696). Существование удлиненных и укороченных циклоид заметил уже Торричелли (1644) [1]).

Мысль об «эпициклоидах» во всяком случае весьма давняя. Объяснить движение планет с помощью эпициклов [2]) пытались еще Аполлоний (около 200 до н. э.) и особенно Гиппарх (около 150 до н. э.). Но геометрически первая конкретная эпициклоида была рассмотрена лишь Дюрером в «Наставлении об измерении» (1525). Первую систематическую работу об эпициклоидах и гипоциклоидах написал Лагир [Mém. Ac. Paris, 1666/99 (1730)], сам указавший в качестве своего предшественника Дезарга; однако, о результатах, полученных в этом направлении последним, ничего не известно. В развитие вышеупомянутого способа Декарта, Гюйгенс («Маятниковые часы», 1673) дал построение нормалей в общем случае качения одной кривой по другой. Что розовидные кривые (стр. 283) являются эпи- или гипоциклоидами, впервые заметил Суарди («Новые приборы» — Nuovi strumenti, Брешиа, 1752). Эвольвенту круга, приведенную еще Лагиром в «Трактате о рулеттах» [Traité des roulettes, Mém. Ac. Paris, 1706 (1731?)], т. е. общих кривых качения, систематически изучил впервые Дени Дидро («Мемуар о различных вопросах математики» — Mémoire sur différents sujets mathématiques, Париж, 1748).

На «псевдоциклоиды» (термин Э. Чезаро, 1896), т. е. эпициклоиды с мнимым образующим кругом, натолкнулся еще Эйлер в поисках кривых, подобных своим эволютам различных порядков [Comm. Ac. Petr., 1740 (1750) и Nov. Act. Petr., 1783 (1787)].

Систематическое изучение «рулетт» вообще после Лагира продолжили Николь [Mém. Ac. Paris, 1707 (1708), 1708 (1730?)] и Варинг («Аналитические этюды», 1762). Уже Лагир доказал, что каждую кривую можно рассматривать как рулетту.

Задачу, ведущую к «кривым Рибокура» (это название было дано в одной работе 1880), поставил Иоганн Бернулли (в одном письме 1716). Лейбниц предложил ее английским математикам, а затем она привлекла внимание многих ученых, особенно в связи с проблемой ортогональных траекторий.

Термин «линия синусов» (синусоида) ввел уже О. Фабри (1659, см. стр. 324). Тангенсоиду и секансоиду Ронде в своем переводе «Анализа бесконечно малых» (Analyse des infiniment

---

[1]) Декарт занимался ими еще в 1638. — *Прим. ред.*

[2]) Слово «эпицикл» встречается у Теона Смирнского (около 130 н. э.) и в «Альмагесте» Птолемея.

petits, Париж, 1735) Э. Стона называл «figure des tangentes» и «figure des sécantes».

«Показательная кривая» (этот термин предложил под влиянием Лейбница И. Бернулли, Acta Erud., 1697) или «логарифмическая кривая» (Г. Гранди, 1701) появилась около 1640. Торричелли писал о ней в одном письме к М. Риччи от 1644 и установил постоянство ее подкасательной. Кроме названных ученых, показательной кривой особенно занимались еще Гюйгенс и Котес. Иоганн Бернулли приписал ей отрицательную ветвь, ошибочно полагая, что $\log(-x)$ равен $\log x$ (письмо к Лейбницу от 1712).

К. Перро поставил перед рядом парижских математиков, а затем и перед Лейбницем, задачу о «трактрисе». Характерное свойство ее нашел Лейбниц (Acta Erud., 1693).

Еще Галилей полагал, что кривой, по которой располагается подвешенная за два конца нить, является парабола [«Беседы и математические доказательства» (Discorsi e dimostrazioni, Лейден, 1638)]. Согласно указанию Лейбница (Acta Erud., 1691) ошибочность этого мнения выяснил Иоахим Юнгиус. Як. Бернулли поставил задачу о математическом определении этой кривой (Acta Erud., 1690). Решения задачи дали в следующем году он сам, а также Гюйгенс, Лейбниц и И. Бернулли. Гюйгенс назвал кривую «цепной линией» («Catenaria, письмо к Лейбницу в ноябре 1690).

«Упругую кривую», т. е. линию, форму которой принимает закрепленный на одном конце упругий стержень, Галилей как это указывает Як. Бернулли (Acta Erud., 1694), также считал параболой. Геометрическую характеристику этой кривой дал Я. Бернулли (Acta Erud., 1694 и 1695). Особенно подробно занялся ею Эйлер в приложении I к «Методу нахождения кривых линий» (1744, ср. стр. 202) и в Acta. Ac. Petr., 1782, II (1786).

5. Производные кривые. Весьма простым способом получать из одних кривых другие является преобразование координат. В рассматриваемое нами время известно было лишь так называемое преобразование координат Вариньона, которое мы встретили уже в 1668 у Дж. Грегори (стр. 229), и которое имеет вид

$$x = a\varphi, \qquad y = \rho.$$

Его можно рассматривать как переход от прямолинейной оси абсцисс к круговой [ср. Я. Бернулли, Acta Erud., 1691, и Г. Манфреди «О построении дифференциальных уравнений первого порядка» (De constructione aequationum differentialium primi gradus, Болонья, 1707)]. При этом высшие параболы и гиперболы переходят в высшие спирали, прямая в спираль Архимеда, логарифмическая кривая в логарифмическую спираль и т. д.

Понятие об эволютах и эвольвентах установил в третьей части «Маятниковых часов» (1673) Гюйгенс. Основную теорему относительно обобщенных косых эволют («эволютоид») дал Реомюр

[Mém. Ac. Paris, 1709 (1733?)]. Лейбниц показал, что эвольвенты получаются при качении прямой по эволюте (Acta Erud., 1706), «Параллельные кривые» впереди были рассмотрены Лейбницем (Acta Erud., 1692), а «кривые преследования» («Courbes de poursuite) Буге [Mém. Ac. Paris, 1732 (1735?)].

Идея «каустик» ведет начало, быть может, от Гюйгенса (1678), от которого, вероятно, о них узнал Чирнгауз (письмо к Лейбницу, 1681 и Acta Erud., 1682). Тщательно разработанную теорию каустик дал в Acta Erud., 1692 Иоганн Бернулли.

Понятие «подэры» («подошвенной кривой») восходит к Маклорену (Phil. Trans., 1718/19; «Органическая геометрия», 1720), а название это встречается впервые у О. Терквема (1848).

§ 2. Специальные пространственные кривые

1. Кривые на шаре. В различных задачах древности встречались и отдельные пространственные кривые. Одной из них являлась «гиппопеда» Эвдокса, названная в 1875 Дж. Скиапарелли «сферической лемнискатой». Это — линия пересечения шаровой поверхности с круговым цилиндром, касающимся шара внутренним образом. Если диаметр кругового цилиндра равен радиусу шара, то кривая называется «кривой Вивиани». Название это объясняется тем, что Вивиани поставил одну задачу квадратуры, которая приводила к этой кривой и которая в свое время получила ряд решений — Лейбница, И. Бернулли, Валлиса, Лопиталя (ср. Acta Erud., 1692). Сам Вивиани написал на эту тему особую работу — «Образование и измерение всех сводов» (Formazione, e misure di tutti i cieli, Флоренция, 1692). Однако, еще ранее «кривую Вивиани» рассматривали Роберваль [Mém. Ac. Paris, 1666/99 (1730)] и А. Лалубер («Распространение геометрии древних» — Veterum geometria promota, Тулуза, 1660). Решение задачи Вивиани, снабженное доказательством, дал также Г. Гранди в сочинении «Геометрическое доказательство задач Вивиани» (Geometrica demonstratio Vivianeorum problematum, Флоренция, 1699).

Кривая Вивиани представляет собой частный случай так называемых «циклоцилиндрических кривых», т. е. кривых пересечения кругового цилиндра с шаром, центр которого лежит на поверхности цилиндра. Декарт применил как-то одну такую линию для деления круга на 27 равных частей (письмо Мерсенну от октября 1629).

Подобно тому как здесь определение окружности было перенесено с плоскости на круговой цилиндр, так определение эллипса можно перенести на шаровую поверхность. Впервые такие «сферические эллипсы» были рассмотрены Н. Фусом [Nov. Act. Petr., 1785 (1788)]. Он заметил, что они представляют собой также линии пересечения шара с концентрическим эллиптическим конусом.

Другое аналогичное геометрическое место на шаровой поверхности изучил Шуберт [там же, 1794 (1801)]. «Линию свода», получающуюся при пересечении двух одинаковых прямых цилиндров, оси которых пересекаются под прямым углом, исследовал А. Кестнер [Comm. Ac. Goett., 1791] [1]).

Г. Гранди распространил на шаровую поверхность и понятие розовидных кривых («Геометрические цветы», 1728). Соответствующие кривые он назвал «клелиями». Кривая Вивиани — одна из клелий. Другую клелию рассматривал еще Папп (III столетие н. э.), ее несколько неподходящим образом называют «спиралью Паппа». Клелии образуют на шаровой поверхности квадрируемые области.

«Сферические эпициклоиды» первым включил в круг своих исследований Як. Герман [Comm. Ac. Petr., 1726 (1728)], которого к этому привела одна задача спрямления, поставленная К. Э. Оффенбургом (Acta Erud., 1718). Изложение Германа существенно улучшил И. Бернулли [Mém. Ac. Paris, 1732 (1735); ср. там же еще статьи Клеро, Мопертюи и Николя]. Позже этим линиям посвятил одну работу также Лексель (Act. Ac. Petr., 1779 (1782)].

Большей известностью, чем все названные кривые, пользовалась важная в мореплавании сферическая «локсодрома». Открывший эту линию П. Нуньес назвал ее «румб» (rumbus) («Трактат в защиту морской карты» — Tratado en defensam da carta de marear, Лиссабон, 1537). Термин «локсодрома» принадлежит В. Снеллю («Батавский Тифий» — Tiphys Batavus, Лейден, 1624) [2]). После Нуньеса, занимавшегося этой кривой еще в своей книге «Об искусстве и способах мореплавания» (De arte atque ratione navigandi, Коимбра, 1573; более раннее издание под несколько иным заглавием в Opera, Базель, 1566; часто приводимого в литературе издания 1546, очевидно, не существовало), ее исследовал также С. Стевин в «Математических мемуарах» (Wiskonstige Gedachtenissen, Лейден, 1605/08). Шаг вперед, важный для позднейшего составления уравнения кривой, сделал Дж. Грегори в «Геометрических этюдах», 1668 (заново открыто Лейбницем, Acta Erud., 1691). Э. Галлей нашел, что стереографической проекцией локсодромы является логарифмическая спираль (Phil. Trans., 1686).

2. Винтовые линии. «Обыкновенной винтовой линией» занимался, по-видимому, за 200 лет до н. э. Аполлоний, и о ней, должно быть, писал Гемин (150 до н. э.) [3]). Во всяком случае,

---

[1]) Объем соответствующего тела определил еще Архимед в «Послании о методе».

[2]) Тифий — кормчий аргонавтов. — *Прим. ред.*

[3]) Винтовая линия встречается также в древнекитайской «Математике в девяти книгах» (см. примечание на стр. 40), в одной задаче которой вычисляется длина ее дуги. — *Прим. ред.*

это — одна из древнейших известных пространственных кривых. Папп (III столетие н. э.) упоминал о ней при описании винтовой поверхности. Ближайшее изучение винтовой линии было начато Гвидубальдо дель-Монте «Об улитке» (De cochlea, Венеция, 1615), назвавшим ее уже helix (т. е. плющ), вероятно, в связи с тем, что она несколько напоминает плющ (ср. Г. Гульден, Act. soc. Jabl., 1780). Пространственные координаты к винтовой линии впервые применил А. Пито [Mém. Ac. Paris, 1724 (1726)]. В посвященной ей диссертации (1771, см. выше стр. 262) А. Кестнер дал уравнения

$$x^2+y^2=r^2, \qquad z=ar\arcsin\frac{y}{r}.$$

Он рассматривал уже, как выражаемся мы, ее соприкасающуюся плоскость; Карстен в своей «Системе математики», II_2 (1786) впервые определил длину ее дуги. Уравнения трех проекций винтовой линии на координатные плоскости (ими являются окружность и синусоиды) дал в «Листах анализа» Г. Монж (ср. стр. 300).

Кривая постоянного подъема на круговом конусе, не представляющая собой настоящей винтовой линии и которую поэтому называют «конической спиралью», также была известна уже Паппу. Она образуется при пересечении кругового конуса с цилиндром, в основании которого лежит спираль Архимеда. Блез Паскаль образовал с ее помощью некоторое тело и определил его объем (1658; ср. Oeuvres, т. V, Париж, 1819). Спрямление ее произвел Г. Гранди (письмо к Т. Чева; см. его «Доказательство теорем Гюйгенса» — (Demonstratio theorematum Hugenianorum, Флоренция, 1701). Он также знал, что при развертывании конуса она дает спираль Архимеда.

Настоящей винтовой линией, т. е. кривой с постоянным отношением кривизны и кручения, является так называемая «локсодрома кругового конуса», т. е. кривая, лежащая на конической поверхности и пересекающая все образующие под одним и тем же углом. Гранди, который первый занялся ею в только что указанной работе, установил, что она возникает при пересечении конуса и цилиндра, в основании которого лежит логарифмическая спираль. Разумеется, при развертывании конуса эта кривая дает логарифмическую спираль.

Совершенно особняком стоит кривая Архита (около 400 лет до н. э.), возникающая при пересечении тора с цилиндром и, следовательно, принадлежащая к кривым восьмого порядка.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Геодезические линии

Возникновение дифференциальной геометрии плоских кривых было столь тесно связано с возникновением исчисления бесконечно малых, что отделить два эти процесса невозможно. Поэтому мы должны отослать здесь читателя к стр. 110 и след., 123, 129, 135 первой части, а также к стр. 270, 272 настоящей. Позднее дифференциалная геометрия была применена к специальным, особенно грансцендентным кривым, и некоторые авторы говорили, что именно при изучении последних нельзя обойтись без исчисления бесконечно малых (ср. стр. 272).

Применение дифференциальных операций к пространственным фигурам, о чем здесь только и будет идти речь, не могло начаться ранее, чем вошло в употребление понятие пространственных координат. Первые дифференциально-геометрические исследования относились к кратчайшим линиям на поверхностях. В самом деле, именно при изучении геодезических линий Иоганн Бернулли в 1697, по-видимому впервые, применил исчисление бесконечно малых (стр. 251). Изложение своего метода он составил лишь в 1728, а опубликовал его в 1742 (Opera, т. IV; ср. стр. 201—202). Как известно из одного его письма к Эйлеру от 18 апреля 1729, дифференциальное уравнение, полученное Бернулли, имело вид

$$\frac{Tddy}{Tdzdy - zds^2} = \frac{ddz}{ds^2 + dz^2},$$

где T обозначает подкасательную и $ds^2 = dx^2 + dy^2$. В одной схолии сам Бернулли показал, что это дифференциальное уравнение легко преобразовать к форме, которая содержится в опубликованной тем временем Эйлером статье в Comm. Ac. Petr., 1728 (1732). Бернулли опирался на теорему, полученную, впрочем, из механических соображений, что соприкасающаяся плоскость геодезической линии («planum osculans») должна быть перпендикулярна к касательной плоскости поверхности (письмо к Лейбницу, август 1698).

Бернулли добавил, что в случае поверхностей вращения задачу можно также решить, требуя, чтобы при развертывании узкой полосы поверхности, содержащей геодезическую линию, на плоскость эта линия переходила в прямую. Для конуса это замечание было сделано Як. Бернулли уже в Acta Erud., 1698.

Эйлер решил задачу в указанной статье, исходя из высказанного еще в 1697 Як. Бернулли положения, что минимальное свойство всей кривой должно быть присуще и ее мельчайшим частям (см. стр. 200), а также применяя теорию максимумов и минимумов.

У Эйлера дифференциальное уравнение геодезической линии имело вид

$$\frac{Qddx + Pd\,dy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

где функции P, Q берутся из дифференциального уравнения поверхности $Pdx = Qdy + Rdt$. Эйлер затем подробнее разобрал частные случаи общего цилиндра и конуса, а также поверхностей вращения. Для этих случаев он привел дифференциальное уравнение к уравнению первого порядка, а в заключение указал некоторые обобщения [1]). Эйлер не забыл отметить, что при развертывании поверхностей цилиндра или конуса на плоскость их геодезические линии должны перейти в прямые.

Лейбниц также весьма интересовался этим вопросом, но он лишь указал (в переписке с И. Бернулли, 1698) способ, который мог бы также привести к составлению дифференциального уравнения. Прием, указываемый Лейбницем, совпадал с тем, которым воспользовался для решения задачи молодой Клеро в Mém. Ac. Paris, 1733 (1735).

Существенный шаг вперед сделал здесь опять-таки Эйлер в IV главе второго тома «Механики» (1736), где доказал, что точка, движущаяся по поверхности без ускорения, всегда описывает геодезическую линию. При этом у него получилось механическое доказательство теоремы, из которой исходил Бернулли (аналитическое доказательство дал впервые Лагранж в 1806).

Более простой вопрос о геодезических кривых на поверхностях вращения геометрически разрешил, как было отмечено, Як. Бернулли (Acta Erud., 1698). Клеро затем доказал, что для точек такой линии произведение радиуса параллельного круга на синус ее угла с меридианом постоянно [Mém. Ac. Paris, 1733 (1735)]; с помощью разложений в ряды он приближенно определил геодезические линии эллипсоида вращения, мало отличающегося от шара [там же, 1739 (1740) [2]).

---

[1]) Уже здесь общее уравнение конуса с вершиной в начале характеризовалось как однородное (см. Клеро, стр. 252).

[2]) «Кратчайшая линия» была впервые названа «геодезической» Лапласом, именно в случае земного сфероида (т. II его «Небесной механики»,

Эйлер, побуждаемый Иоганном Бернулли, обобщил задачу о геодезических линиях на кривые, соприкасающаяся плоскость которых образует с касательной плоскостью к поверхности угол, отличный от прямого (письмо к Бернулли от 11 июля 1730, опубликовано в 1903 г.). Эту задачу решил и Бернулли (Opera, IV, 1742).

Добавим еще, что Эйлер занялся задачей о геодезических в случае неявного уравнения поверхностей [Nov. Act. Petr., 1799—1802 (1806; прислано в 1779)].

§ 2. Общие пространственные кривые и развертывающиеся поверхности

Применение дифференциальных операций к более общим пространственным образам, как и вообще их аналитическое изучение, последовало сравнительно поздно. В «Исследованиях» Клеро (1731: ср. стр. 251), кроме подкасательной пространственной кривой, встречается лишь формула $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Какой-либо прогресс в этом отношении не наблюдается вплоть до выхода двух статей Эйлера о пространственных кривых, последовавших одна за другой в Act. Ac. Petr., 1782, I (1786). Поэтому две указанные работы следует считать в данной области основоположными. Чтобы не выделять особо какую-либо из осей координат, Эйлер сразу выбирает в качестве независимой переменной длину дуги s, полагая

$$dx=p\,ds, \quad dy=q\,ds \quad \text{и} \quad dz=r\,ds.$$

Затем он описал вокруг точки кривой Z шар единичного радиуса, на который, как сказали бы мы, сферически отобразил окрестность точки кривой вместе с прямыми, проходящими через нее параллельно осям, и т. д.; прием этот вел свое происхождение из астрономии.

Далее, Эйлер применил формулы сферической тригонометрии, добавив, однако (в Dissertatio altera — «Другое рассуждение»), для тех, кого не может удовлетворить этот «чужеродный принцип», совершенно иной вывод, отправлявшийся от соприкасающейся плоскости. Полученные результаты сам Эйлер резюмировал в заключении следующим образом. Если взять прямоугольный параллелепипед со сторонами x, y, z, то его диагональ дает длину и направление радиуса-вектора; диагональ параллелепипеда со сторонами p, q, r дает направление касательной и длина ее равна 1; диагональ параллелепипеда со сторонами

$$\frac{dp}{ds}, \quad \frac{dq}{ds}, \quad \frac{dr}{ds}$$

Париж, год VII, т. е. 1798/99); затем это название было распространено на поверхности 2-го порядка, а со времени Лиувилля (Journ. de math., 1844) — на любые поверхности.

дает направление радиуса кривизны, а длина ее равна обратному значению последнего; наконец, если взять стороны равными $\frac{rdq - qdr}{ds}$ и т. д., то длина диагонали будет та же, что и в предыдущем случае, а направление ее будет перпендикулярным к соприкасающейся плоскости.

В тесной связи с этими исследованиями находилась работа Эйлера о «телах», поверхность которых можно наложить на плоскость [Nov. Comm. Petrop., 1771 (1772)]. Подобными развертываниями многократно занимались с чисто практической точки зрения еще ранее Фр. Деран («Архитектура сводов и т. д.» — L'architecture des voûtes etc., Париж, 1643) и особенно А. Фрезье («Теория и практика резки камней и дерева» — La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, I, Страсбург, 1737; см. также ниже о Гварини, стр. 309). Но понятие развертывающейся поверхности создал Эйлер. Он взял на плоскости бесконечно малый прямоугольный треугольник, исходящий из точки (t, u), и определил на поверхности такой треугольник, исходящий из точки x, y, z, который был бы конгруэнтен с первым. Полагая $\frac{\partial x}{\partial t} = l$, $\frac{\partial x}{\partial u} = \lambda$ и т. д., он получил условия развертываемости поверхности в виде

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \qquad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Затем Эйлер аналитически и геометрически показал, что касательные к любой пространственной кривой всегда образуют развертывающуюся поверхность и что то же относится к поверхности, образуемой общими касательными двух «тел», одно из которых рассматривается как светящееся. Тем самым было введено понятие развертывающихся поверхностей, а точки их представлены были с помощью двух параметров.

Немного позднее Тенсо опубликовал в Mém. Ac. div. sav., IX, 1780 решение нескольких задач, отчасти связанных с поверхностями (см. стр. 255). С точки зрения теории кривых новым здесь было введение точек перегиба и разделение их на точки «плоского перегиба», когда три последовательных элемента линии лежат в одной плоскости (кручение равно нулю), и точки «линейного перегиба», когда два последовательных линейных элемента лежат на прямой (кривизна равна нулю). Первые точки он находил с помощью точек перегиба кривой, по которой развертывающаяся поверхность, соответствующая пространственной кривой, пересекает плоскость xOy. «Точки линейного перегиба» суть точки перегиба для всех проекций пространственной кривой; соприкасающаяся плоскость («plan osculant») в них перпендикулярна к плоскости проекций.

Такое же различие между точками перегиба пространственной кривой провел Г. Монж (Mém. div. sav., X, 1785; прислано в 1771), назвавший их соответственно точками простого и двойного перегиба. Независимо от Эйлера у Монжа также возникло понятие развертывающейся поверхности. Важным нововведением Монжа явилась полярная ось элемента дуги, определяемого тремя последовательными точками; под осью он понимал перпендикуляр, восставленный из центра круга, проходящего через эти три точки. Эта ось получается еще как линия пересечения двух последовательных нормальных плоскостей. Монж доказал, что на развертывающейся полярной поверхности («surface des pôles»), образуемой всеми полярными осями пространственной кривой, имеется бесчисленное множество эволют пространственной кривой (и всякой плоской кривой). Далее, по-прежнему геометрически, он показал, что на этой полярной поверхности лежат все центры кривизны, не образуя, однако, на ней эволюты для собственно-пространственных кривых.

Относительно эволют Монж, опять-таки геометрически, установил, что при развертывании полярной поверхности на плоскость они переходят в прямые, и, следовательно, являются геодезическими линиями этой поверхности.

Далее, основываясь на той же геометрической идее, Монж вывел для общих поверхностей дифференциальное уравнение геодезических линий в виде

$$[ds^2+dz^2]\,ddy=\left[dy\,dz-ds^2\left(\frac{dy}{dz}\right)\right]ddz,$$

отмечая, что в силу $T=z:\left(\frac{dz}{dy}\right)$ это уравнение тождественно совпадает с уравнением, полученным Иоганном Бернулли (стр. 290).

После решения основных вводных задач (см. стр. 253) Монж самым ясным образом выразил все, что изложено выше, еще аналитически. Он дал уравнения полярной поверхности и ее ребра возврата («arête de rebroussement»), уравнения любых эволют кривой, радиус кривизны и аналитические условия для обоих видов точек перегиба пространственных кривых.

В заключение Монж еще рассмотрел связанную с пространственной кривой спрямляющую поверхность, которую назвал «эволютой» поверхности, образуемой касательными. В несколько иной форме он выразил тот факт, что на этой «эволюте» исходная пространственная кривая является геодезической линией. Последняя теорема гласила, что если «эволюта» представляет собой цилиндрическую поверхность, то любая часть поверхности касательных находится в постоянном отношении к ее проекции на плоскость основания цилиндра, ибо угол касательных с образующими цилиндра постоянен.

Вслед за этой статьей Монж выпустил другую, еще большую по размерам и почти столь же важную (Mém. div. sav., IX, 1780;

поступила в 1775). Здесь он особенно занялся развертывающимися поверхностями и применением их свойств к теории теней и полутеней. Уже в начале своей статьи Монж ссылался на предыдущую работу (опубликованную случайно позднее) и на статью Эйлера (стр. 293). Прежде всего он провел твердое разграничение между развертывающимися поверхностями и общими линейчатыми поверхностями («surface gauche»), а затем тремя способами определил дифференциальное уравнение развертывающихся поверхностей в форме

$$\delta\delta z \cdot ddz = (\delta dz)^2 \text{ [1]};$$

третий способ дал ему одновременно первый интеграл уравнения $p = \varphi q$. В конце статьи он вывел также дифференциальное уравнение произвольных линейчатых поверхностей:

$$2\delta\left(\frac{-\delta dz + \sqrt{\omega}}{ddz}\right) + d\left(\frac{-\delta dz + \sqrt{\omega}}{ddz}\right)^2 = 0,$$

где $\omega = (\delta dz)^2 - \delta\delta z ddz$, и провел линейчатую поверхность через три данные пространственные кривые. Вместе с тем Монж подверг искусному аналитическому исследованию задачу об определении тени и полутени тела, освещенного другим светящимся телом, приняв последнее сначала за точку и найдя совершенно по-современному первую поляру (как сказали бы мы) этой точки относительно поверхности тела, заданной уравнением $z = K$, где K — функция x и y. Затем он решил общие задачи об определении развертывающейся поверхности, охватывающей две данные поверхности; развертывающейся поверхности, проходящей через две пространственные кривые, и дал уравнения пространственной кривой, ограничивающей на данной поверхности тень, отбрасываемую на ней темным телом при освещении другим телом.

Замечательна не столько по результатам, сколько по своему методу относящаяся к тому же времени работа Эйлера о кратчайших линиях на поверхностях [Nov. Act. Petrop., 1799 — 1802 (1806); поступила в 1779]. Во-первых, для интегрирования дифференциального уравнения Эйлер здесь употребил угол, образуемый кратчайшими линиями с параметрическими линиями $z = \text{const.}$, что, впрочем, не было у него выражено ясным образом. Во-вторых, он ввел прием, симметричный относительно трех координат, так что и дифференциальное уравнение получалось в симметричной форме. Некоторые другие работы Эйлера, о которых мы только упомянем, посвящены вопросу о спрямляемых кривых на шаре, эллипсоиде вращения и конусе [Nov. Comm. Petr., 1770 (1771); Act. Petr., 1781, I (1784), Nov. Act. Petr, 1785 (1788)].

---

[1] Здесь δ обозначало дифференцирование по x, а d — дифференцирование по y. В современных обозначениях уравнение имеет вид $rt - s^2 = 0$. (*Прим. ред.*)

§ 3. Общие поверхности

Во второй половине XVIII столетия прочное основание получила также дифференциальная геометрия общих поверхностей. Уравнение касательной плоскости к поверхности дали одновременно Тенсо и Монж в упомянутых выше (стр. 293—294) статьях (Mém. div. sav., IX, 1780). Обозначая координаты точки поверхности x, y, z, а координаты произвольной точки касательной плоскости π, φ, ω, Тенсо записал ее уравнение в виде

$$(x-\pi)\,dy\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+(y-\varphi)\,dx\left(\frac{dz}{dy}\right)dy-(z-\omega)\,dxdy=0.$$

Заключенные в скобки дифференциальные частные нужно здесь рассматривать как частные производные. Кроме того, Тенсо рассмотрел задачу об определении линии прикосновения к поверхности касательного конуса, проведенного к ней из точки (a, b, c), как это сделал и Монж (стр. 295). Затем он разобрал такую же задачу для параллельных касательных и вопрос об установлении уравнений соответствующих конуса и цилиндра. Впрочем, для всех этих задач он ограничивался лишь указаниями. Готовые формулы или примеры отсутствовали. У Монжа уравнение касательной плоскости получило уже вполне современный вид:

$$z=p'(x-x')+q'(y-y')+K'.$$

Эйлер в этой области также открыл ряд фундаментальных теорем. В одной большой работе о кривизне поверхностей [Mém. Ac. Berlin, 1760 (1767)] он прежде всего приступил к задаче об определении радиуса кривизны сечения данной поверхности, лежащего в плоскости $z=\alpha y-\beta x+\gamma$, причем получил, разумеется, весьма сложное выражение. Затем он провел секущую плоскость через нормаль к поверхности и вычислил новое выражение для радиуса кривизны сечения, нисколько не более простое, чем предыдущее. Далее, он назвал «главным сечением» нормальное сечение, перпендикулярное к плоскости xOy. Для этого и еще для другого нормального сечения, перпендикулярного к первому, получались уже более простые выражения радиуса кривизны. Обозначив затем через φ угол, образуемый плоскостью произвольного нормального сечения с плоскостью главного сечения, Эйлер снова составил общее выражение радиуса кривизны. Получившуюся опять-таки очень громоздкую формулу он несколько упростил и в качестве примеров взял цилиндр

$$z=\sqrt{(aa-yy)},$$

конус

$$z=\sqrt{(nnxx-yy)}$$

и эллипсоид

$$zz=aa-mxx-nyy.$$

Только в конце работы он привел формулу радиуса кривизны в виде

$$\frac{1}{L+M\cos 2\varphi+N\sin 2\varphi},$$

из рассмотрения которой извлек важные заключения. Так, например, он нашел, что три известных радиуса кривизны позволяют определить все остальные его значения в точке поверхности, что в каждой точке поверхности существует наибольший радиус кривизны f и наименьший g, плоскости которых взаимно перпендикулярны и которые в свою очередь определяют общую кривизну элемента поверхности, а именно:

$$r=\frac{2fg}{f+g-(f-g)\cos 2\varphi}.$$

В статье, носившей то же название, что и работа Эйлера, Ж. Менье поставил целью развить результаты последней (Mém. div. sav., 1785; поступила в 1776). Но Менье исходил из совершенно иной концепции. Отправляясь от мысли, что совпадение частных дифференциалов до второго порядка включительно обусловливает совпадение кривизн двух поверхностей, Менье заменил в точке u, v, t (причем ось t лежала на нормали к поверхности в этой точке) поверхность параболоидом

$$t=\frac{cu^2+2euv+fv^2}{2}.$$

Менье преобразовал это уравнение к виду

$$t=\frac{Au'^2+Bv'^2}{2}$$

и затем доказал, что каждый элемент поверхности (термин Менье) можно получить вращением малой дуги окружности вокруг оси, параллельной касательной плоскости этого элемента. Для радиуса этой окружности r и расстояния оси от точки поверхности ρ он получил выражения

$$\frac{1}{r}=\frac{c+f\pm\sqrt{(c-f)^2+4e^2}}{2}$$

и

$$\frac{1}{\rho}=\frac{c+f\mp\sqrt{(c-f)^2+4e^2}}{2},$$

переходящие одно в другое; при этом оказалось, что r и ρ совпадают с найденными Эйлером крайними значениями f и g радиусов кривизны нормальных сечений поверхности. К этому Менье присоединил теорему, носящую его имя. Именно, если R' есть радиус кривизны нормального сечения, проходящего через касательную AQ к кривой на поверхности, то R, радиус кривизны сечения, лежащего в другой плоскости, проходящей через AQ, определяется формулой $R = R' \sin \omega$, где ω — угол между обеими плоскостями. Отправляясь от этого, Менье дал полный разбор соотношений между кривизнами на (не особом) элементе поверхности. Среди примеров он рассмотрел, в частности, задачу об определении поверхностей, для которых $r = \rho$. Интегрируя соответствующее дифференциальное уравнение, он получил, что

$$1 = (Ax + B)^2 + (Ay + C)^2 + (Az + D)^2,$$

т. е., как и должно быть, уравнение шаровой поверхности. Вслед за тем он приступил к решению задачи об отыскании среди всех поверхностей, проходящих через контур, ограниченный данной пространственной кривой, поверхности с наименьшей площадью. С помощью своего способа образования элемента поверхности он вывел важное условие, $r + \rho = 0$, а отсюда получил дифференциальное уравнение в частных производных минимальных поверхностей, найденное уже раньше другим способом Лагранжем [Misc. Taur., 1760/61 (1762)]. Частные интегралы этого уравнения дали ему в качестве примера минимальных поверхностей винтовую поверхность и катеноид. Принимая либо r, либо ρ равным бесконечности, Менье далее вывел дифференциальное уравнение развертывающихся поверхностей, данное уже Монжем, а в заключение доказал, что оба радиуса кривизны общих линейчатых поверхностей всегда бывают различного знака.

Несмотря на появление этих прекрасных работ, общее понятие кривизны поверхности осталось невыясненным вплоть до К. Гаусса (1828). Эйлер даже ошибочно принял, что всякий элемент поверхности можно рассматривать как сферический («Dioptrica», I, Петербург, 1769); это же случилось раньше с Лейбницем (письмо к Иоганну Бернулли от 29 июля 1698), а позднее также с Даламбером [«Encyclopédie méthodique», Париж, 1784, статья «Кривая» («Courbe»), отдел «Кривые поверхности» (Surfaces courbes)].

Кроме упомянутых работ общего характера в рассматриваемый промежуток времени появился еще ряд работ, посвященных частным вопросам и прежде всего определению поверхностей, обладающих заданными свойствами. Так, Эйлер в Nov. Comm. Petr., 1769, I (1770) исследовал парадокс, заключающийся в том, что поверхности, площадь которых является данной функцией x, y, не должны быть конгруэнтны, как это имеет место в аналогичном случае для плоских кривых. Эйлер нашел дифференциальное уравнение с частными производными

$$p^2 + q^2 = f(x, y)$$

и проинтегрировал его в случае

$$f(x, y) = m^2 + n^2.$$

При этом, кроме плоскости

$$z = a + mx + ny,$$

получались все развертывающиеся поверхности, возникающие при движении плоскости, сохраняющей постоянный угол с осью Oz.

В другой статье [Nov. Act. Petr., 1788 (1790); поступила в 1776] Эйлер занялся поисками поверхностей с постоянным отрезком нормали между поверхностью и плоскостью xOy. Дифференциальное уравнение

$$z\sqrt{1+p^2+q^2} = a$$

дало здесь «искривленные цилиндры» («cylindri incurvati»), которые позднее были названы поверхностями каналов и которые возникают, когда центр некоторого данного круга движется вдоль произвольной кривой в плоскости xOy, причем плоскость круга все время остается перпендикулярной к касательной в соответствующей точке кривой. Эйлер здесь особо отмечает появление таких произвольных функций. Он тотчас же обобщил вопрос, потребовав, чтобы отрезок нормали представлял собой некоторую функцию Z аргумента z, так что в указанном выше дифференциальном уравнении вместо a появляется Z. В образовании соответствующих поверхностей при этом вместо окружности участвует некоторая другая плоская кривая. Так получаются геометрические образы, ныне называемые «резными поверхностями» («Gesimsflächen»). Эйлер возвращался к обоим видам поверхностей еще в Nov. Act. Petr. 1792 (1797; поступило в 1777) и 1794 (1801; поступило в 1778).

Эйлер перенес на пространство также проблему ортогональных траекторий [Mém. Ac. St-Pét., 1815/16 (1820; поступило в 1782)], причем в нескольких примерах ему удалось провести решение полностью. В Mém. Ac. Turin, (2) I (1784/85) Монж довольно общим образом рассмотрел вид дифференциального уравнения с частными производными, соответствующего классу поверхностей, конечное уравнение которых содержит n произвольных функций.

Как видно из заметки, опубликованной впервые в «Посмертных сочинениях» (Opera posthuma, I, Петербург, 1862), Эйлер уже около 1770 нашел общие уравнения, выражающие условия изгибаемости поверхностей, в опубликовании которых выход его работы опередил Гаусс (1828).

Оставляя в стороне менее значительные работы, мы должны теперь перейти к главному и резюмирующему сочинению Монжа, которое появилось как раз в конце столетия, но продолжало оказывать большое влияние даже много позднее середины XIX столетия. Это — «Листы анализа, приложенного к геометрии», вышедшие в виде отдельных оттисков в 1794/95 (2-е изд. 1800/01; на титульном листе указано в первом издании — год III, во втором —

год IX) и предназначавшиеся в качестве пособия для Политехнической школы, основанной в том же III году Республики. Впоследствии они были объединены в книгу «Приложение анализа к геометрии» (1-е изд., Париж, 1807, затем 1809 и 1850). Сочинение это отличалось большим искусством в обращении с новыми пространственными образами, так же как и гибкостью аналитического исследования. Что касается содержания, то в него, наряду со многим новым, естественно, вошли результаты, опубликованные ранее, особенно открытия самого Монжа; отчасти им была придана другая форма. Здесь мы можем отметить лишь наиболее существенные пункты.

Прежде всего Монж последовательно ввел понятие семейства поверхностей, определяемого дифференциальным уравнением с частными производными (см. стр. 262). Наряду с цилиндрическими и коническими поверхностями, поверхностями вращения и каналов, в области уравнений первого порядка он рассмотрел еще прямые коноиды (например, винтовые поверхности), затем поверхности, у которых линии наибольшего спуска суть прямые постоянного наклона (об Эйлере см. стр. 259), и поверхности, возникающие при смещении некоторой поверхности вдоль данной пространственной кривой, лежащей на данной поверхности. Здесь впервые появилось в геометрической форме понятие характеристики как линии пересечения двух бесконечно близких поверхностей некоторого семейства. Все характеристики огибаются некоторой кривой, которую Монж называл «ребром возврата» (см. стр. 294) и которая представляет собой геометрическое место точек пересечения трех последовательных поверхностей. Затем Монж непосредственно из дифференциального уравнения

$$F(x, y, z, p, q)=0$$

вывел дифференциальное уравнение характеристик

$$P\,dy-Q\,dx=0,$$

где

$$P=\frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q=\frac{\partial F}{\partial q}.$$

Среди семейств поверхностей, определяемых дифференциальными уравнениями второго порядка, на первом месте стоят линейчатые поверхности, описываемые прямой, движущейся параллельно фиксированной плоскости и скользящей по двум данным пространственным кривым. Взяв уравнение направляющей плоскости в виде

$$Ax+By+Cz=0,$$

Монж прежде установил дифференциальное уравнение поверхности

$$(Cq+B)^2r-2(Cq+B)(Cp+A)s+(Cp+A)^2t=0,$$

а затем показал общим образом, что для дифференциального уравнения

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

дифференциальное уравнение характеристики будет

$$R\,dx^2 - S\,dx\,dy + T\,dy^2 = 0,$$

где $\frac{\partial\Phi}{\partial r} = R$ и т. д. В разбираемом случае это давало

$$(A\,dx + B\,dy + C\,dz)^2 = 0,$$

и, значит, характеристиками являлись образующие прямые поверхности. Далее, Монж вывел по-иному для тех же поверхностей три дифференциальных уравнения первого порядка, из которых независимыми являлись лишь два. Первые два имели вид

$$\frac{Cq + B}{Bp - Aq} = \varphi(Ax + By + Cz), \quad \frac{Cp + A}{Bp - Aq} = \psi(Ax + By + Cz).$$

Наконец, приводилось также конечное уравнение. Оно содержало две произвольные функции φ и ψ и имело вид

$$z = x\cdot\varphi(Ax + By + Cz) + y\cdot\psi(Ax + By + Cz).$$

Совершенно сходным образом Монж рассмотрел развертывающиеся поверхности (см. стр. 295), а за ними поверхности, возникающие при смещении данной поверхности (или же пространственной кривой) вдоль совершенно произвольной пространственной кривой. Семнадцатый и восемнадцатый номера «Листов» содержали открытие линий кривизны. Монж искал условие пересечения двух последовательных нормалей поверхности и для каждой точки поверхности нашел два взаимно перпендикулярных направления, для точек которых это имеет место.

Исследуя эти направления, он получил два ортогональных семейства линий кривизны и вывел их дифференциальные уравнения. Вместе с тем он определил для каждой точки оба главных радиуса кривизны. Но он не указал на связь его исследований с работами Эйлера и Менье (см. стр. 297). Монж нашел также семейства поверхностей, образованных нормалями, следующими вдоль линий кривизны, и двухполостную поверхность всех центров кривизны. Он геометрически доказал, что, с какой бы стороны ни смотреть на поверхность центров кривизны, видимые контуры обеих полостей всегда кажутся пересекающимися под прямыми углами. Кроме того, Монж установил уравнение лежащей на поверхности кривой, вдоль которой равны оба главных радиуса кривизны. Но он не заметил, что эта кривая всегда бывает мнимой и что, таким образом, на каждой поверхности имеются лишь отдельные точки такого рода, — мы их теперь называем омбилическими. Эти отношения прекрасно выявились на приведенном Монжем в качестве примера эллипсоиде. Указывая везде на возможные приложения теории, Монж предложил придать сводам залов Законодательного собрания форму эллипсоида: полосы свода при этом должны следовать линиям кривизны, а люстры — помещаться в омбилических точках. Дальнейшими примерами служили резные поверхности, у которых все линии одной из кривизн расположены в параллельных между собой плоскостях, общие поверхности каналов с произвольной направляющей пространственной кривой, у которых один из радиусов кривизны имеет постоянную величину, и особенно минимальные поверхности, для которых $r+\rho=0$. В последнем случае Монж упоминал работы Лагранжа, а о работах Менье не говорилось ни слова (ср. стр. 298). Монж нашел здесь существенное свойство характеристик этих поверхностей, выражающееся уравнением

$$dx^2+dy^2+dz^2=0,$$

и посредством сложного интегрирования получающихся дифференциальных уравнений характеристик пришел к конечным параметрическим уравнениям минимальных поверхностей, в которые входили мнимые величины. Геометрическим представлением о минимальных поверхностях Монж еще не обладал.

Из дифференциальных уравнений третьего порядка Монж прежде всего рассмотрел уравнение общих линейчатых поверхностей. Он вывел для них также дифференциальное уравнение второго порядка, содержащее произвольную функцию, затем уравнение первого порядка с двумя произвольными функциями, а также конечное уравнение с тремя функциями φ, ψ, π, которое записал в параметрической форме с параметром α:

$$y-\alpha x=\psi(\alpha), \qquad z-x\varphi(\alpha)=\pi(\alpha).$$

В качестве второго примера он взял поверхности, огибающие сферу переменного радиуса, центр которой движется по данной пространственной кривой. В работе также приводились многочисленные более частные примеры, пояснявшие общие теоремы. Заключение составили принадлежавшие Монжу открытия по теории пространственных кривых (см. стр. 293).

Дифференциальная геометрия получила применение и в картографии того времени. Ламберт в своих «Очерках об употреблении математики и ее приложении» (Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung, Berlin, 1772) дал дифференциальные формулы стереографической проекции. Для других видов отображения он лишь ясно разобрал требования общего характера. И здесь новые пути проложил Эйлер в одной работе о представлении шаровой поверхности на плоскости [Act. Ac. Petr., 1777, I (1778)]. Он поставил задачу найти координаты точки плоскости x, y как функции географических долготы t и широты u так, чтобы определяемое ими отображение удовлетворяло некоторым условиям. Затем он показал, что добиться конгруэнтности невозможно, и выдвинул требование, чтобы меридианы и параллельные круги перешли в ортогональные системы кривых, в частности, в систему линий, параллельных осям координат (что применяется в проекции Меркатора). Приведя пример отображения с сохранением площадей, он затем детальнее занялся отображением с сохранением углов. Условием ортогональности градусной сети является

$$pq + rs = 0,$$

где

$$\frac{\partial x}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = q, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = r, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = s.$$

Кроме того, должны соблюдаться условия

$$dx = p\,du + r\,dt\cos u, \qquad dy = r\,du - p\,dt\cos u.$$

Для интегрирования Эйлер впервые употребил здесь комплексные величины, составив выражение $dx + i\,dy$, с тем, чтобы правая часть этого выражения превратилась в произведение. Решение тогда имеет вид (Δ обозначает здесь символ функции):

$$x = \Delta\,[s^{\alpha}(\cos\alpha t - i\sin\alpha t)] + \Delta\,[s^{\alpha}(\cos\alpha t + i\sin\alpha t)],$$
$$iy = \Delta\,[s^{\alpha}(\cos\alpha t - i\sin\alpha t)] - \Delta\,[s^{\alpha}(\cos\alpha t + i\sin\alpha t)].$$

В заметке, непосредственно примыкавшей к этой статье, Эйлер показал, что стереографическая проекция является частным случаем рассмотренного им отображения. Для отображения шара с сохранением размеров площадей Эйлер привел в этой статье только частные решения, именно, для случая, когда градусная сеть переходит в две ортогональные системы кривых.

Построением географических карт и, в частности, отображением, обладающим консерватизмом углов, занялся подробно в одной несколько более поздней работе Лагранж (Nouv. Mém. Ac. Berl., 1779 (1781)]. Он установил общие формулы отображения

$$x + iy = f(u + it), \qquad x - iy = \varphi(u - it),$$

где f и φ представляли собой пока произвольные функции, и затем предложил выбирать f и φ так, чтобы меридианы и параллельные круги шара перешли в заданные ортогональные системы кривых на плоскости. Эту задачу он решил для различных случаев. Далее, он вычислил масштаб m. Если квадрат линейного элемента на шаре есть

$$ds^2 = du^2 + q^2dt^2,$$

то для определения m он получил выражение

$$\frac{1}{m^2} = q^2 f'(u + it)\,\varphi'(u - it).$$

Остается отметить еще одну работу Шуберта о географической проекции эллиптического сфероида (Nov. Act. Petr., 1787 (1789)]. Она заслуживает упоминания, во-первых, потому, что здесь впервые было употреблено, для отображения с консерватизмом углов, наименование «конформная проекция» (projectio conformis), а, во-вторых, из-за теоремы о том, что при проектировании такого сфероида из точки экватора на плоскость, перпендикулярную к радиусу-вектору этой точки, как меридианы, так и параллельные круги переходят в эллипсы, подобные меридиану эллипсоида. Когда меридиан является кругом, то получается известная теорема стереографической проекции.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

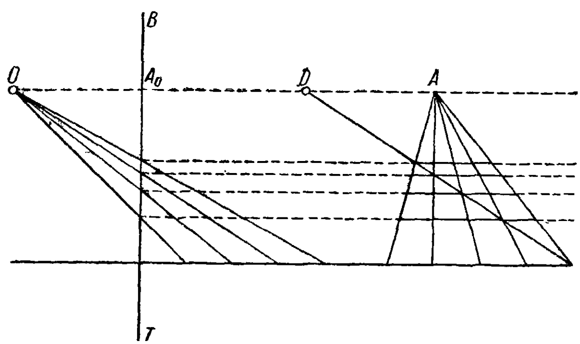
УЧЕНИЕ О ПЕРСПЕКТИВЕ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Перспектива

Хотя обе дисциплины, учение о перспективе и начертательная геометрия, принадлежат к той области, которую можно отнести к приложениям математики, однако в новейшее время они оказались столь тесно связанными с чистой геометрией, что мы считаем нужным изложить их развитие хотя бы в основных чертах. Нам придется при этом возвратиться несколько назад.

Возникновение начертательной геометрии целиком связано с практической деятельностью зодчих. Планы, составленные в горизонтальной проекции, известны еще по гробницам фараонов. Менее совершенно и больше на глаз рисовали вплоть до XVII столетия в вертикальной проекции, хотя хорошие вертикальные проекции капителей также встречаются уже на памятниках древнего Египта. Методы горизонтального и вертикального проектирования греки называли «ихнографией» и «ортографией». К ним присоединялась у греков «сценография», т. е. искусство так писать декорации, чтобы они казались зрителю возможно более близкими к действительности. Сценография явилась источником центральной перспективы. Приведенные три греческих термина не только сохранились до XVIII столетия, но многие учебники перспективы XVII и XVIII столетий содержали даже специальные приложения, излагавшие сценографию. Стереографическая проекция (слово это предложил Эгильон, см. стр. 308), представляющая собой частный случай перспективы, также возникла в древности. Изобрел ее, по-видимому, Гиппарх (около 150 до н. э.) и, во всяком случае, ее вполне уверенно применял Птолемей (около 150 нашей эры). Кроме стереографической проекции (ср. стр. 302—304), употребление которой, однако, осталось ограниченным областью астрономии, ни один из названных приемов не рассматривался сознательно как некий способ проектирования.

Дальнейшее теоретическое развитие выпало прежде всего на долю учения о перспективе. Уже в XIII столетии среди итальянских художников стала, сначала, впрочем, неосознанно, укрепляться мысль, что изображение возникает в результате пересечения пирамиды лучей, направленных из точки зрения, с картинной плоскостью. Отчасти они отправлялись в этом от сочинения Евклида «Оптика», обработанного Витело (XIII столетие) и распространявшегося под названием «Перспективы» в течение всего средневековья. В середине XIV столетия отдельные художники уже употребляли точку схода идущих в глубину параллельных линий пола. Вскоре за Италией такие представления распространились и в северных странах, и постепенно пришли к выводу, что все идущие в глубину параллельные линии всего изображаемого пространства должны пересекаться в одной точке схода. Тем самым была открыта и «главная точка» картины. Брунеллески в начале XV столетия присоединил к этому важное наблюдение, что для усиления иллюзии следует помещать глаз от картины на расстояние, соответствующее действительным соотношениям. Вскоре затем Л. Альберти в сочинении «О живописи» (Della pictura, 1435) ввел натянутую на раму и разделенную на квадраты вуалевую сетку, через которую следует смотреть на подлежащий изображению предмет. Одновременно Альберти привел построение сокращающихся изображений нескольких лежащих друг за другом равных отрезков. Благодаря этому была создана теоретическая основа для изображения часто применявшихся тогда разбитых на квадраты паркетов. На черт. 15 передано построение Альберти. *O* пред-



Черт. 15.

ставляет собой глаз, *BT* — профиль картинной плоскости, *A* — главную точку картины (масштабная точка *D* Альберти еще не употреблялась). Итальянские архитекторы и художники разработали эти основные идеи в целую систему, изложенную в труде «О перспективе в живописи» (De prospectiva pingendi, около 1480) Пьеро де'Франчески. В ней пространно описывался также способ рисования перспективного изображения предмета по его вертикальной и горизонтальной проекциям. На одном-единственном чертеже, который, возможно, был вставлен в книгу позднее, у Пьеро встречается и метод масштабных точек: чтобы получить перспективное изображение квадрата, отрезок AD на главном изображении наносят равным расстоянию A_0O, не пользуясь при этом дополнительным чертежом и не употребляя разделенной на квадраты сетки (см. черт. 15). Некоторые рисунки Леонардо да Винчи также свидетельствуют о применении этого метода. Однако крайне сомнительно, что тот отрезок, который нами обозначен AD, Леонардо рассматривал как «масштаб».

Этот метод масштабных точек должен был быть весьма в ходу во французской готике XV столетия, хотя применялся он там только ремесленным образом. Действительно, Виатор (Ж. Пелерен) в своем чисто практическом труде «О художественной перспективе» (De artificiali prospectiva, Туль, 1505, 2-е изд. 1509) с большим искусством пользовался исключительно им. Виатор уже знал также, что точки схода всех параллельных прямых, лежащих в предметной плоскости, находятся на линии горизонта, которую он всегда вычерчивал. Он даже применял точки схода восходящих параллельных прямых.

Краткое изложение А. Дюрера в его «Наставлении об измерении» (1525) и сочинение Д. Барбаро «Практика перспективы» (La pratica della perspectiva, Венеция, 1568) были составлены под влиянием Пьеро, а также, быть может, Леонардо да Винчи. Первым математиком, начавшим писать по этим вопросам, был Эгнацио Данти, составивший подробные комментарии к сочинению Дж. Бароцци, прозванного Виньола, «Два правила практической перспективы» (Le due regole della prospettiva pratica; написано около 1530, впервые опубликовано в Болонье (1582), затем нередко переиздавалось). Первым правилом Виньолы являлось изображение горизонтальной и вертикальной проекций, вторым — построение масштабных точек, которое благодаря этому впервые вошло в более широкое употребление и правильность которого доказал Данти. Два других математика, Ф. Коммандино и Дж. Бенедетти, напротив, отстали в этом отношении, ибо не пользовались вовсе точками схода и лишь дали теоретическое введение к приемам изображения предметов. Коммандино выполнил это в комментарии, приложенном к его изданию Planisphaerium (Венеция, 1558) Птолемея, а Бенедетти во второй части своего сочинения «Книга различных математических и физических размышлений» (Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber, Турин, 1580). Влияние Виатора сказалось лишь на некоторых, также чисто практических, французских учебниках перспективы.

Более теоретический характер имели «Шесть книг о перспективе» (Perspectivae libri sex, Пезаро, 1600) Гвидубальдо дель-Монте. Для построения обыкновенной перспективы здесь приводились 23 способа, разумеется, частью весьма родственных, и необычайно обстоятельно доказывалась во всех частных случаях теорема о точках схода горизонтальных параллелей. Кратко указывалось у Монте и обобщение теоремы на произвольные параллельные прямые пространства. Объемистое сочинение Эгильона «Шесть книг по оптике» (Opticorum libri VI, Антверпен, 1613) содержало также большой отдел, посвященный проекциям. Детально рассматривалась здесь «стереография» (стр. 305). Впрочем, учение о перспективе Эгильона находилось под сильным влиянием дель-Монте.

Самостоятельнее был С. Стевин, изложивший учение о перспективе в своих «Математических мемуарах» (Лейден, 1605; Oeuvres, 1634). Он рассмотрел в нескольких частных случаях задачу (не совсем оставленную, впрочем, без внимания его предшественниками) об определении положения глаза по фигуре и ее перспективе. В теоремах IV и V он установил весьма важное для дальнейшего предложение, которое в несколько более современной форме можно передать так: если картинная плоскость, вращаясь вокруг ребра, накладывается на горизонтальную плоскость, а наблюдатель одновременно поворачивается около точки опоры так, чтобы оставаться все время параллельным картинной плоскости, то глаз все время будет центром перспективы для изображений в горизонтальной и картинной плоскостях. В заключение Стевин привел расчет одного простого примера с числовыми данными.

Совершенно особое место занимает Ж. Дезарг. Руководствуясь исключительно практическими соображениями, он, однако, отпугнул всех практиков, с одной стороны, сжатостью изложения, с другой,— введением многочисленных новых обозначений. По-видимому, и личность его вызвала такую неприязнь, что даже ученик его, гравер по меди, А. Босс, стремившийся как устно, так и письменно распространять учение Дезарга («Общий способ г. Дезарга для употребления перспективы и т. д.» — Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective etc., Париж, 1647), был вынужден отказаться от преподавательской должности. Сам Дезарг вначале выпустил небольшое сочинение [«Образец одного из общих способов господина Жирара Дезарга из Лиона для употребления перспективы и т. д.» — (Exemple de l'une des manières universelles du S. G. D. L.[1]) touchant la pratique de la perspective etc., Париж, 1636]. Он использовал здесь частично новую идею определять положение предмета с помощью трех взаимно перпендикулярных и выраженных числами координат по отношению к ребру картинной плоскости, перпендикулярной к ней прямой и к предметной плоскости и показал, как построить для каждой координаты перспективный масштаб, с помощью которого можно было бы по точкам дать перспективное изображение предмета. К сочинению

[1]) Инициалы слов Sieur Girard Desargues Lyonnois.

были приложены некоторые чисто геометрические теоремы, относившиеся к изучению о перспективе. Среди них мы отметим теорему, носящую теперь имя Дезарга, о том, что точки пересечения трех сторон двух треугольников, перспективно расположенных в общей плоскости, лежат на одной прямой. Свои идеи Дезарг попытался разъяснить позднее в «Черновом наброске» (Brouillon project, Париж, 1640; см. ниже стр. 315), посвященном стереотомии, учению о перспективе и гномонике. Однако, по-видимому, эта попытка не увенчалась успехом. В 1643 г. он выпустил также «Учение о перспективе, обращенное к теоретикам» (Perspective adressée aux théoriciens), сохранившееся только благодаря тому, что Босс приложил его к своему сочинению о перспективе. С помощью своего метода Дезарг решил здесь ряд элементарных метрических задач, в частности, на перенесение углов. Это сочинение было, очевидно, обязано своим возникновением изданной в том же году в Париже «Теоретической и практической перспективе» (Perspective spéculative et pratique) Аллома и Э. Мигона, в которой последний уже установил на линии горизонта шкалу точек схода для различных угловых направлений прямых горизонтальной плоскости. Так как Дезарг желал пользоваться лишь главной точкой картины, но не другими точками схода, которые были ему, разумеется, также известны, то направленные против него с различных сторон полемические сочинения не были лишены основания, по крайней мере в этом отношении.

В семнадцатом столетии появилось еще много других сочинений о перспективе. В частности, ей отводился специальный отдел во всех математических книгах энциклопедического характера. Мы отметим здесь лишь шесть книг о перспективе, которые помещены в не раз упоминавшемся уже курсе Дешаля (т. II, 1674 и 1690, ср. стр. 244). В первой книге автор дал очень хороший стереометрический разбор основных задач. «Теоретическая и практическая перспектива» (Perspectiva theoretica ac practica, Амстердам, 1629; там же, 1628 на немецком; Гаага, 1614 на французском) С. Маролуа содержала решение числовых задач на определение величины угла зрения, а также на определение положения и формы перспективного изображения. Упомянем, кроме того, книгу «Замечательная перспектива или же искусственная магия чудесных явлений» (La perspective curieuse ou magie artificielle des effets merveilleux, Париж, 1638, другие французские издания и латинская обработка, 1663) Жана Франсуа Нисерона, особенно подчеркивавшую искажение изображений, а также большой труд «Дополненный и методический Евклид» (Euclides adauctus et methodicus, Турин, 1671 и 1676) Гварино Гварини. В 26-м отделе у Гварини излагались ортогональное проектирование на плоскость и стереографическое проектирование, а в 32-м отделе было подробно пояснено на чертежах изображение на плоскости кривых и среди них неразвертывающихся поверхностей, причем были привлечены сечения этих поверхностей.

С научной точки зрения много важнее было получившее значительно меньшую известность сочинение Лагира «Planiconiques», которое он сброшюровал со своим «Новым геометрическим методом» (1673, ср. стр. 317) приблизительно год спустя после его выхода. Пользуясь линией схода, лежащей в предметной плоскости, и накладывая предметную плоскость на картинную, он здесь действительно дал центрально-перспективное изображение на плоскости, пойдя тем самым дальше Стевина (стр. 308).

Впрочем, доказательство Лагира вряд ли позволяет думать, что ему была известна вышеприведенная теорема (Umklappungssatz) Стевина. Ход мыслей Лагира скорее следует связать с его личной, хотя и косвенной, зависимостью от Дезарга (ср. стр. 233).

По-видимому, прием Лагира впервые появился вновь в последнем из шести методов, приведенных в «Опыте о перспективе» (Essai de perspective, Гаага, 1711) В. с'Гравесанда для изображения точки, лежащей в предметной плоскости. При доказательстве с'Гравесанд пользовался также линией схода картинной плоскости и совершенно ясно представлял себе положение обеих линий схода относительно основания картины и линии горизонта. Он применял также сокращенный масштаб и общие точки схода. В целом книжечка представляла собой превосходное развитие упомянутой теоремы Стевина, с которой автор был, конечно, знаком, хотя Стевина и не упоминал.

Мы знаем, что в это же время и, несомненно, даже раньше Ньютон совершенно свободно пользовался центральной проекцией для изменения свойств кривых (стр. 266). Из английских ученых нам следует назвать еще Брук Тейлора, опубликовавшего в 1716 в Лондоне краткую «Линейную перспективу» (Linear perspective), вышедшую в улучшенном издании в 1719 под названием «Новые принципы линейной перспективы» (New principles of linear perspective, Лондон) и вновь выпущенную в еще более расширенном виде Дж. Кольсоном в 1749. Подобно с'Гравесанду Тейлор рассмотрел элементарные задачи и среди них те, в которые входят отрезки и углы. Он также употреблял обе линии схода, правда, не на одном и том же чертеже. Тейлор занимался, кроме того, практическими приложениями и решал обратные задачи на перспективу. Изложения с'Гравесанда и Тейлора во многих пунктах взаимно дополняли друг друга и совместно давали хорошее изложение учения о центральной перспективе на плоскости.

Маленькое сочинение Тейлора было переработано для практиков, а также вышло в итальянском (Рим, 1755) и французском (Амстердам, 1757) изданиях. Переводчик на итальянский язык, патер Жакье, снабдил свое издание некоторыми добавлениями, одно из которых касалось применения перспективы у Ньютона. К французскому изданию был приложен перевод специально посвященнного этому же вопросу сочинения Мердока (1746, см. стр. 274). Мы уже говорили об аналитических формулах Мердока для центрально-перспективного соответствия двух плоскостей, совпаиавших с формулами, данными в 1740 де-Гюа (стр. 272). Несколько позднее эти же формулы привел де-Лакайль в часто издававшихся «Начальных уроках по оптике» (Leçons élémentaires d'optique, 1-е изд. Париж, 1750). При этом Лакайль определенно относил изображаемую точку к трем взаимно перпендикулярным плоскостям, а в другом месте он даже вывел уравнение гиперболы, являющейся перспективой окружности. Кестнер также выпустил программу по «Общей аналитической теории перспективы и проектирования» (Perspectivae et projectionum theoria generalis analytica, Лейпциг, 1752).

В 1755 Э. Дзанотти опубликовал в Comm. Ac. Bonon. статью, в которой попытался свести все учение о перспективе к одному построению, носившему более общий характер, чем построения с'Гравесанда и Тейлора, поскольку он определил перспективу произвольной точки пространства совершенно общим образом. Вместе с тем он ввел и перспективу произвольной прямой, проходящей через точку. Однако его изложение обладало некоторыми недостатками и по существу не содержало новых мыслей, так же как и выпущенная позднее книга Дзанотти «Теоретико-практический трактат по перспективе» (Trattato teorico-pratico di prospettiva, Болонья, 1766).

«Свободная перспектива, или наставление, как составлять перспективную вертикальную проекцию свободных отрезков, не пользуясь при этом горизонтальной проекцией» (Die freye Perspective, oder Anweisung, Jeden Perspectivischen Aufriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen, Цюрих, 1759, также по-французски, 2-е изд., там же, 1774) И. Ламберта опять-таки преследовала вполне практические цели. Для непосредственного нанесения на чертеж изображений предметов, данных по положению и величине, Ламберт прежде всего развил идею, которую мы встретили уже у Мигона и которая имелась у Лакайля. Именно, на линии горизонта устанавливался «угломер», т. е. на ней отмечались точки, через которые проходят изображения горизонтальных прямых, образующих с основанием картины углы в 10, 20° и т. д. Свои результаты Ламберт распространил также на случай, когда картинная плоскость не перпендикулярна к предметной, на косо расположенные линии и на случай бесконечно удаленной точки зрения. Особенно замечательны рассуждения и примеры, приводимые им при разборе обратных задач на перспективу. Ко второму изданию Ламберт приложил ряд «Замечаний и дополнений», имевших почти такой же объем, как сама книга. Они содержат, главным образом, приложения; привлекалась в них и горизонтальная проекция. В начале излагалась краткая история учения о перспективе, а заключение составляло большое дополнение о решении задач при помощи одной линейки (ср. стр. 359).

Идеи и приемы Ламберта оказали особенное влияние на Карстена, который подобно другим авторам энциклопедических сочинений того времени (ср. стр. 245) включил учение о перспективе в круг математических дисциплин и посвятил ей свыше 800 страниц 7-й части (Грейфсвальд, 1775) своей «Системы математики». Однако, в отличие от Ламберта, Карстен ввел в свое изложение вычисления. В эту книгу вошли также теория конических сечений, рассматриваемых как проекции круга, и разбор различных проекций шара[1]). Ни Ламберт, ни Карстен не применяли метод наложения Стевина с использованием линий схода, который употребляли с'Гравесанд и другие (стр. 310). Примыкая к аналитической трактовке Карстена, Клюгель выпустил «Геометрическое развитие свойств стереографической проекции» (Eine geometrische Entwicklung der Eigenschaften der stereographischen Projektion, Галле, 1788).

§ 2. Начертательная геометрия

Мы совершенно не касались до сих пор начертательной геометрии, поскольку за рассматриваемое время эта дисциплина не сделала никаких успехов. Правда, начиная примерно с XVII столетия архитекторы были уже знакомы с вертикальными проекциями зданий, а художники позднего Возрождения, чтобы точно проследить все очертания головы и тела, рисовали их в проекциях на две (а также на три) плоскости, с равноотстоящими сечениями. Такие фигуры встречаются уже у Пьеро де-Франчески (около 1480, ср. стр. 306). Пьеро применял также столь употребительное и ныне вращение чертежа, чтобы перейти от данного изображения к другому. Однако и этот прием был оставлен, когда угас математический период развития искусства.

Ортогональная проекция получила, впрочем, практическое применение в строительном деле, именно в так называемой стереотомии, т. е. обтеске камней. «Архитектура» (Architecture, т. I, Париж, 1567) де-Лорма и «Архитектура сводов и т. д.» (L'architecture des voûtes ou l'art des traits, et coupe des voûtes, Париж, 1643, см. выше стр. 293) Ф. Дерана говорят о значительном мастерстве в этом отношении.

Дезарг впоследствии попытался создать теорию этой отрасли знания в своем «Черновом наброске универсального способа

[1]) Эти предметы отсутствовали в т. IV карстеновских «Оснований» (Anfangsgründe, 1780), которые можно рассматривать как второе издание «Системы».

г.Ж.Д.Л. ... для обтески камней в архитектуре и т. д.» (Brouillon project d'exemple d'une manière universelle du S.G.D.L. touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres en architecture etc., Париж, 1640). Хотя А. Босс и здесь составил пояснения к этому труду, попытка Дезарга не увенчалась успехом из-за новизны терминологии и трудности изложения. «Стереотомия» поднялась до уровня науки лишь в большом сочинении А. Фрезье «Теория и практика резки камней и дерева» (La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, два тома ин-кварто, Страсбург, 1737/39, 2-е издание в трех томах, 1754/69). Наряду с практическими отделами оно заключало в первом томе чисто математическую теорию поверхностей и тел, могущих встретиться при стереотомии (см. стр. 293). В книге Фрезье скромное место было отведено и проектированию на две плоскости, а рисование чертежей объяснялось в соответствии с их происхождением.

При этих обстоятельствах творцом современной систематической начертательной геометрии следует считать Гаспара Монжа, впервые в 1795 прочитавшего в основанной им Нормальной школе курс лекций об ортогональном проектировании на две плоскости. Действительно он не только решил все основные задачи на точки, прямые и плоскости, но систематически применил этот метод к пространственным кривым и поверхностям, столь успешно изучавшимся им также средствами анализа (см. стр. 293 и след.). Поэтому, когда Монж в 1798/99 опубликовал свою «Начертательную геометрию» (Géométrie descriptive, Париж, год VII), эта наука оказалась уже вполне разработанной дисциплиной. Открытия Монжа восходили, впрочем, к более раннему времени. Еще в 1765 он при черчении плана одной крепости внес в духе своей начертательной геометрии изменения в употребительные тогда приемы. Вообще, несмотря на чисто научный характер изложения, Монж неизменно имел в виду и практические цели, что было специально подчеркнуто в предисловии. Это проявилось и в большом внимании, уделенном им топографическим поверхностям. Упомянем при этом, что в кругах военных специалистов были тем временем разработаны методы проекций с числовыми отметками, следы которых можно найти еще у Гвидубальдо дель-Монте.

«Начертательная геометрия» Монжа, представлявшая собой большой том ин-кварто, содержала не все, что создал и разработал в этой области ее автор. Это видно из публикаций его учеников и задач, поставленных в Политехнической школе, создателем которой был тот же Монж. Среди таких дополнений отметим особо ряд приложений, опубликованных Б. Бриссоном в четвертом издании «Начертательной геометрии» (1820). Они относились к теории теней, в тесной связи с теорией развертывающих поверхностей (ср. стр. 295), и к перспективе.

Кроме Монжа, в XVIII столетии можно назвать еще лишь С. Лакруа. Свои «Очерки геометрии на плоскостях и кривых поверхностях» (Essais de géométrie sur les plans et les surfaces courbes, Париж, 1796, 2-е изд. 1801/02), также содержавшие основы начертательной геометрии, Лакруа написал под влиянием указаний, сделанных Монжем относительно своего метода в публичных лекциях. Прием Лакруа несколько методичнее, чем прием Монжа; он дал также приложения к перспективе, которые носили более общий характер, чем у Монжа, хотя и не представляли ничего существенно нового.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

НАЧАЛО РАЗВИТИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

После того как древние нашли основное свойство конических сечений из рассмотрения конуса (ч. II, гл. I), все остальное они стали получать из этого определяющего свойства и к конусу более не прибегали. Положение вещей не изменилось первоначально также в XVI и XVII столетиях, когда Григорием Сен-Винцентом, Мидоржем и многими другими были предприняты попытки заменить трудное учение о конических сечениях Аполлония более простыми изложениями, хотя кое-где в последние вплетались и стереометрические доказательства. Более свободное обращение с коническими сечениями, которое стало необходимым благодаря победе системы Коперника и которым особенно искусно владел Кеплер, тоже не принесло никаких новых теорем, кроме разве того, что парабола представилась теперь как предельный переходный случай между эллипсом и гиперболой.

Первый мощный толчок развитию новой области геометрии сообщила художественная перспектива, которая, как мы знаем, к началу XVII столетия поднялась уже на значительную высоту. Основоположником проективной геометрии мог быть только человек, являвшийся как весьма искусным практиком, так и геометром выдающейся оригинальности и творческой силы. Мы имеем ввиду Дезарга (ср. стр. 308). Его «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cone avec un plan), вышедший в Париже в 1639, содержал основные идеи проективной геометрии, а также ряд новых относящихся к ней теорем. Правда, судьба этого выдающегося сочинения была не менее печальна, чем участь перспективы Дезарга. Понятое лишь немногими, чему немало способствовали неудачная форма и многочисленные новые обозначения, оно пропало без вести, пока М. Шаль не нашел в 1845 его копию, сделанную в 1679 Лагиром[1]).

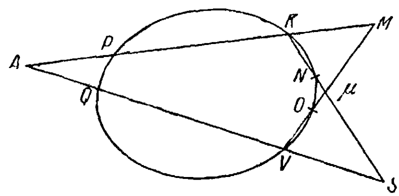
---

[1]) Недавно был обнаружен печатный экземпляр «Чернового наброска» Дезарга, более полный и точный, чем копия Лагира. Текст Дезарга воспроизведен в книге Р. Татона, указанной в списке литературы. — *Прим. ред.*

В «Черновом наброске» Дезарг применил центральную проекцию самым широким образом. Он ввел понятия пучка лучей и плоскостей, определил семейства параллельных прямых и соответственно плоскостей как пучки с бесконечно удаленным центром или соответственно прямой пересечения. Нанеся от точки A на прямой пары отрезков AB, AH; AC, AG; AD, AF, прямоугольники на которых имеют постоянную площадь, он ввел понятие (и термин) «инволюции». Он установил также условие того, что точки образуют инволюцию без применения точки A. Он провел различие между видами инволюционного соответствия и для гиперболического случая определил двойные точки. Затем он показал, что эти двойные точки гармонически расположены относительно отдельных пар точек B, H; C, G и т. д., и нашел некоторые теоремы о гармонических точках. Далее, он соединил произвольную точку плоскости со всеми парами точек инволюции и дал соответствующие теоремы для возникающей при этом инволюции лучей, в частности, теорему, что точки пересечения такого пучка любой прямой образуют инволюцию.

На этой основе Дезарг создал затем свое учение о конических сечениях. Он не проводил здесь различия между конусом и цилиндром. Коническое сечение определялось как парабола, гипербола или эллипс, в соответствии с тем, скольким образующим конуса параллельна секущая его плоскость: одной, двум или же ни одной. Каждая теорема, доказанная для круга и основывающаяся на инволюциях, согласно основным свойствам проектирования, имеет тогда место для любого конического сечения. Так, Дезарг доказал теорему, носящую его имя и в первой части высказанную еще Паппом (III столетие нашей эры), о том, что три пары прямых, которые можно провести через четыре точки и всякое проходящее через четыре точки коническое сечение, пересекаются любой прямой в парах точек, образующих инволюцию (наименование «полный четырехсторонник» принадлежит Карно, см. стр. 318). К этому выводу примыкал еще ряд теорем о полюсах и полярах конических сечений, со всеми частными случаями (касательная и точка касания, центр и бесконечно удаленная прямая), которые были распространены также на плоскость и шар и, правда, лишь в виде намеков, на другие тела (massifs), находящиеся в том же отношении к шару, как эллипсы к кругу. Для Дезарга был также вполне ясен перенос точечной инволюции с прямых на коническое сечение. Дезарг дал своим теоремам ряд приложений, среди которых мы отметим решение задачи, в которой требуется найти оси и т. д. конического сечения, возникшего при проектировании.

Полностью идеи и понятия Дезарга были усвоены и развиты далее лишь одним математиком — Блезом Паскалем. Уже 16 лет от роду Паскаль составил план сочинения о конических сечениях. Паскаль предполагал написать его на основе, заложенной Дезаргом, и работал над ним еще в 1654, но все же оставил незаконченным. Рукопись сочинения, которой располагал еще Лейбниц, с тех пор пропала. Об основных мыслях его мы в основном знаем лишь по наброску, который Паскаль опубликовал в Париже в 1640, придав изданию форму небольшой афиши под названием «Опыт о конических сечениях» (так поступил и Дезарг с несколькими своими утерянными позднее полемическими сочинениями). В первой и третьей леммах этот «Опыт» содержал называемую по имени автора теорему об окружности и общем коническом сечении, изложенную в следующем виде (черт. 16). Если две пары прямых, выходящих из точек M и S, пересекаются соответственно в A и μ и в K и V и если через точки K, V проходит коническое сечение, пересекающее пары прямых еще в точках P, O и N, Q, то три прямые MS, NO и PQ проходят через одну и ту же точку.



Черт. 16.

Немногие заметки, оставленные Лейбницем относительно большого сочинения Паскаля, показывают, что уже сам Паскаль сообщил своей теореме форму, употребляемую ныне. Среди других важных предложений, приведенных в «Опыте», встречается теорема, получившая впоследствии имя Карно; впрочем, Паскаль ограничился точками пересечения конического сечения со сторонами треугольника и четырехугольника. Согласно Лейбницу Паскаль определял также коническое сечение по пяти касательным и даже вообще по пяти каким-либо элементам.

Мы уже отмечали (стр. 233), что часть учений Дезарга воспринял также Лагир. И он попытался написать на основе работ Дезарга новую теорию конических сечений. Однако первый его опыт, «Новый геометрический метод для сечений конических и цилиндрических поверхностей и т. д.» (Nouvelle Méthode en Géométrie pour les Sections des Superficies Coniques, et Cylindriques etc., Париж, 1673) оказался в глазах современников столь трудным, что Лагир решил приложить к нему для разъяснения основ Planiconiques (ср. стр. 310). Но чертежи Лагира, хотя и точные, были столь неподходящими, что успеха все же он добиться не смог. Изложение и чертежи были улучшены им в большом труде «Учение в конических сечениях в девяти книгах» (Sectiones conicae in novem libros distributae, Париж, 1685). Лагир исходит здесь из теории поляр круга и с помощью проектирования переносит свойства последнего на конические сечения. Кроме того, Лагир упростил некоторые доказательства, так что в его работе можно все-таки усмотреть прогресс по сравнению с трудом Аполлония. Однако более общие идеи Дезарга о бесконечно удаленных элементах и инволюциях Лагир не смог воспринять, как не смог дать столь же значительное расширение результатов Дезарга, какое дал Паскаль. Впрочем, в свойства гармонических точек и лучей довольно глубоко проник еще Григорий Сен-Винцент («Геометрический труд» — Opus geometricum, 1647, составлен в 1625). Ф. ван-Скаутен для решения одной практической задачи во второй книге своих «Математических этюдов» (1656) также применил гармоническое свойство полного четырехсторонника[1]), бывшее, вероятно, известным уже в Древней Греции.

Основная теорема о выводе конических сечений с помощью проектирования была включена Лепуавром в его «Трактат о сечениях цилиндра и конуса» (Traité des sections du cylindre et du cône, Париж, 1704; 2-е изд., Монс, 1708). Из книги Лагира теория поляр попала в сочинение Дж. Майлнса «Начала конических сечений, доказанные новым способом» (Sectionum conicarum elementa nova methodo demonstrata, Оксфорд, 1702), а теорема Дезарга была известна по «Опыту» Паскаля Р. Симсону (см. его «Пять книг о конических сечениях» — Sectionum conicarum libri quinque, Эдинбург, 1735). Но этим и ограничились непосредственные влияния столь великолепно начатого Дезаргом движения за обновление античной геометрии, от которого в некоторых пунктах не был далек и Ферма.

Мы можем еще упомянуть, что Эйлер («Введение в анализ бесконечных величин», 1748; ср. стр. 276) увеличивал абсциссы и ординаты кривой в постоянном отношении, называя получающиеся при этом кривые «аффинными», и что у Дж. Уокера («Трактат о конических сечениях» — A Treatise on Conic Sections, Лондон, 1794) встречалось преобразование, которое мы бы теперь рассматривали как преобразование с помощью проективного пучка лучей. Дезаргова геометрия расцвела лишь в XIX столетии, и при этом без какого-либо знакомства с подготовительной работой ее создателя. Если обоснование Монжем начертательной геометрии можно назвать необходимой предпосылкой проективной геометрии (ср. стр. 313), то сочинение Л. Карно «О корреляции фигур в геометрии» (De la corrélation des figures en géométrie, Париж, 1801) и его «Геометрия положения» (Géométrie de position, Париж, 1803) уже явились скорее первыми ступенями к зданию, впервые воздвигнутому для этой науки Понселе в его «Трактате о проективных свойствах фигур» (Traité des propriétés projectives des figures, Париж, 1822).

---

[1]) Основывающаяся на нем теорема о полярах круга, с применением ее к построению касательных, была опубликована уже Вольдеком Веландом в «Математическом подношении» (Strena mathematica, Лейден, 1640).

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. Развитие тригонометрии до Эйлера

Отводя в этой части нашей книги особую главу тригонометрии, мы должны указать, что не собираемся изложить историю всех областей тригонометрии. Уже говоря о развитии анализа, мы не могли пройти мимо влияния, оказанного им на представление тригонометрических функций бесконечными рядами (стр. 120, 127), мимо связи последних с показательной функцией (стр. 146) и т. п. Эту область, отчасти уже затронутую ранее, мы можем кратко назвать «высшей тригонометрией». Здесь нам придется обратиться поэтому к истории «элементарной тригонометрии», точнее говоря, к «гониометрии» и «решению треугольников» (ср. Цейтен, ч. I, стр. 206—209, 218—221 и II, стр. 124—136).

Оказавшийся столь важным для развития учения о геометрических местах 1637 год не имел такого же значения для элементарной геометрии. В частности, сам Декарт ничего не сделал для тригонометрии как таковой. Как в его «Геометрии», так и в комментариях к ней тригонометрические функции углов фигуры выражались через отношения сторон связанных с ней прямоугольных треугольников.

Тем не менее тридцатые годы XVII столетия завершили в известной мере построение тригонометрии: мы имеем в виду создание логарифмических методов вычислений. Отметим, что в 1633 вышла «Британская тригонометрия» (Trigonometria Britannica) Бригса—Геллибранда, содержавшая во второй части наиболее употребительные приемы решения плоских и сферических треугольников, с учетом в первую очередь формул логарифмического характера. Наряду с аналогиями[1]) Непера Геллибранд применял формулы, определяющие половину угла по трем сторонам как для плоского (Ретик, ранее 1576, опубликовано в 1596), так и для сферического треугольника (Непер в Constructio, 1619). Случай

[1]) Греческое слово «аналогия» еще в XVII столетии часто употреблялось вместо латинского термина «пропорция».

трех данных углов в сферическом треугольнике Геллибранд приводил, впрочем, с помощью полярного треугольника к случаю трех данных сторон, не сообщая никаких формул. В таблицах, составлявших первую часть «Британской тригонометрии», авторы ввели десятичное деление градуса. Однако в опубликованной одновременно работе «Искусственная тригонометрия» (Trigonometria artificialis) Флакк снова пользовался старым шестидесятеричным делением и образовал тем самым основу всех позднейших таблиц.

Укажем еще на книгу П. Крюгера «Употребление логарифмической тригонометрии» (Praxis Trigonometriae logarithmicae, Данциг, 1634), принадлежащую также и к разбираемому нами периоду, поскольку новые издания ее вышли в 1648 и 1654. Крюгер применял неперовы аналогии в случаях сферических треугольников с данными a, b, γ и α, β, c вполне по-современному. Для плоского треугольника с тремя данными сторонами $a > b > c$ он привел длинное словесное указание, которое в наших обозначениях гласит, что прежде всего нужно определить вспомогательную величину x из уравнения

$$\log x = \log (b + c) + \log (b - c) - \log a,$$

а затем из уравнения

$$\log \cos \beta = \log \frac{1}{2} (a - x) - \log c$$

найти угол β и из уравнения

$$\log \cos \gamma = \log \left(x + \frac{a - x}{2}\right) - \log b$$

угол γ. Здесь x обозначает разность $p - q$ проекций сторон b, c на BC. Этот обход теоремы косинуса был характерен для всей тогдашней английской тригонометрии (соответствующие чертежи имелись, например, у Оутреда и Дж. Ньютона (см. стр. 322). Восходил он к Descriptio Непера (1614) и основывался, по существу, на теореме о том, что

$$(b + c)(b - c) = (p + q)(p - q),$$

которая была известна в различных формах еще древним грекам и арабам.

Как в алгебре, так и в тригонометрии нового времени прежде всего усовершенствована была форма. И здесь и там совершался постепенный переход от античного изложения с помощью пропорций и нередко длинных вычислительных рецептов к алгебраическому исчислению и уравнениям. В значительной мере этот прогресс был осуществлен теми же учеными, с которыми мы уже познакомились, когда говорили об алгебре. Так, П. Эригон (стр. 15) в четвертом и пятом томах «Курса математики» (1634, 2-е изд.

1644) распространил свою символику и на тригонометрию. В качестве образца мы приведем лишь форму, в которой он изложил теорему косинусов для плоскости. Нужно заметить при этом, что на чертежах Эригона в вершинах углов стояли большие буквы, которые часто сами обозначали эти углы, а в тексте — малые, и что D представляет собой основание высоты, проведенной из A. Теорема имела у Эригона следующий вид:

$$2.\ \sqsubset\!\sqsupset \cdot ab,\ bc\ \pi \square \cdot ab + \square \cdot bc \cdot \sim : \square \cdot ac\ 2|2\ \mathrm{rad} \cdot \pi \sin \angle bad,$$

т. е.

$$2.\ AB \cdot BC : (\overline{BC^2} + \overline{BA^2} - \overline{AC^2}) = 1 : \sin (BAD).$$

В Англии весьма способствовал более символическому изложению тригонометрии Р. Норвуд («Тригонометрия или учение о треугольниках» — Trigonometria or the Doctrine of Triangles, Лондон, 1631; 8-е изд. 1685). Он ввел впервые сокращенные обозначения для кофункций (наряду с s, t, sec у него имелись сокращения sc и tc для cos и ctg) и нередко опускал знак сокращения между этими символами и знаком угла, который тоже часто отмечал только одной буквой. Еще далее пошел У. Оутред. Правда, до выхода «Тригонометрии» Оутреда (Trigonometria, Лондон, 1657) появился «Очерк тригонометрии, изложенной для употребления юношества» (Idea trigonometriae demonstratae in usum juventutis, Оксфорд, 1654) Сет Уорда, где, между прочим, был введен знак угла $\angle$ (для множественного числа $\angle\angle$), а суммы и разности обозначались, как у Оутреда, соответственно, через Z и X; но Уорд это, несомненно, заимствовал у Оутреда. Теорему синусов Уорд записывал в виде $BC \cdot BD :: s,\ D \cdot s,\ C$ (аналогичные записи имелись уже у Норвуда). Теорему тангенсов, по существу открытую уже Т. Финком (1583), а в современном виде словесно высказанную впервые Виетом (1593), Уорд и Оутред записывали одинаково:

$$\frac{1}{2} Z\,\mathrm{crur} \cdot \frac{1}{2} X\,\mathrm{crur} :: t\,\frac{1}{2} Z \angle\angle \cdot t\,\frac{1}{2} X \angle\angle;$$

Уорд для ее написания применял также еще более современную форму. Замечательна еще форма, в которой Оутред привел формулу для половин углов плоского треугольника, где, как и выше, X cru [rum] обозначает разность двух боковых сторон (a, c) треугольника, B — основание (b), а q и Q — действия возведения в квадрат:

$$\square\ \mathrm{cru} \cdot \frac{B + X\,\mathrm{cru}}{2} \times \frac{B - X\,\mathrm{cru}}{2} :: Rq \cdot Q \cdot s\,\frac{1}{2}\,\mathrm{ang}.$$

Точный перевод ее гласит:

$$ac : \frac{b + a - c}{2} \cdot \frac{b - a + c}{2} = 1 : \sin^2 \frac{\beta}{2}.$$

Аналогично записывалась соответствующая формула для $\cos \frac{\beta}{2}$.

В сочинении Оутреда были даны также первые (геометрические) доказательства обеих аналогий Непера. Непер, а также Бригс и Геллибранд опубликовали только самые формулы, притом в логарифмическом виде.

Аналитический вывод неперовых аналогий дал впервые Джон Ньютон в большом труде «Британская тригонометрия» [Trigonometria Britanica (sic!), Лондон, 1658]. Впрочем, этот вывод, как и другие доказательства вычислительного характера, приведенные Ньютоном, был еще весьма громоздким. Сочинение Дж. Ньютона представляло собой значительно улучшенное и дополненное новое издание одноименной работы Бригса — Геллибранда. В нем, как и в несколько более ранней «Британской астрономии» (Astronomia Britannica) того же автора (Лондон, 1656/57), впервые регулярно употреблялись термины «косинус» и «котангенс». Для «синуса», «тангенса» и «секанса» это сделал еще Т. Финк (1583), так что теперь наименование тригонометрических функций было уже установлено, хотя и не стало пока общеупотребительным.

Упомянем здесь, что формулы, выражающие функции удвоенного угла через функции однократного[1]), были в это же время дополнены формулой, записываемой в наших обозначениях в виде

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Эту теорему привел Джон Пелль в своей книге «Споры об истинном измерении круга» (Controversiae de vera circuli mensura, Амстердам, 1647); там же она была доказана различными способами Робервалем и другими математиками. Более общее правило для $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и, кроме того, для $\operatorname{sc}(\alpha+\beta)$ впервые вывел (геометрически) Я. Герман в Acta Erud., 1706. Забегая вперед, добавим, что формула

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha)$$

появилась лишь во «Введении» Эйлера (1748) и что важные формулы, позволяющие рационально выразить $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\operatorname{tg} \alpha$, были установлены еще позднее И. Ламбертом в первой книге его «Очерков об употреблении математики», 1765.

Задачу об определении двух углов (β и γ) треугольника по третьему углу α и логарифмам сторон b и c впервые решил по словам Томаса Стрита (Astronomia Carolina, Лондон, 1661) Роберт Андерсон, введший для этой цели вспомогательный угол. Он,

[1]) Теоремы, соответствующие нашим формулам

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

установил еще Абу-л-Вафа (умер в 998) в своей версии «Альмагеста» Птолемея.

в переводе на наши обозначения, положил $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{c}$, вычислил φ и затем определил угол $\beta - \gamma$:

$$\operatorname{tg} 45^\circ : \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma).$$

Теорема была передана словесно; доказательство, предполагавшее известной теорему тангенсов, имело сложный геометрический характер. Отсюда этот прием перешел в большинство учебников.

Из энциклопедических изложений тригонометрии заслуживает упоминания благодаря ее большой ясности «Тригонометрия» (в книге II «Astronomia Britannica», Лондон, 1669) В. Уинга. Уинг опирался на Непера, Норвуда (стр. 321) и на неопубликованный, очевидно, труд по тригонометрии Ч. Скарборо. Для каждого случая он приводил пример, вычисленный с помощью логарифмов, но иногда опускал доказательства. Случай сферического треугольника с тремя данными сторонами был разобран Уингом на основе формулы

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(p+q)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-q),$$

как это нередко делали в то время вслед за Непером (Descriptio, 1614, стр. 320). Уинг пользовался сокращениями s., cs., t., ct. В «Компендии математики» (A mathematical Compendium, Лондон, 1674), составленном на основании заметок Дж. Мура, Н. Стефенсон писал S., Cos., T., Cot., но иногда производил сокращения и по-другому (si:, si. co., cos и т. д.). Дж. Валлис в «Трактате об угловых сечениях» (Treatise of angular sections, Оксфорд, 1684; приложение к его «Алгебре», 1685; лат. изд. Opera, II,1693) пользовался для обозначения синуса, косинуса, тангенса и котангенса соответственно буквами S, Σ, T и τ. С помощью этих обозначений он впервые придал основным формулам гониометрии вид уравнений вроде

$$S = \sqrt{:}\, R^2 - \Sigma^2 = \frac{\Sigma T}{R} = \frac{T}{R}\sqrt{:}\, R^2 - S^2 = \text{ и т. д.}$$

Нам чужды лишь «целый синус» (R), который долгое время еще продолжали применять, а также употребление функций секанса, косеканса, синус-верзуса ($= 1 - \cos$) и синус-верзуса дополнительного угла.

В то время как у самого Валлиса эти немаловажные новшества играли скорее подчиненную роль (ибо в печати он применил их лишь в одной небольшой статье), Джон Кесуэлл, опираясь на них, составил «Плоскую и сферическую тригонометрии» (Trigonometry both plain and spherical), которая также вышла в приложении к «Алгебре» Валлиса и в которой мы видим первое, более насыщенное формулами, изложение тригонометрии. В этой работе, например, формулы половинных углов по трем сторонам плоского треугольника были впервые выведены с помощью алгебраического преобразования теоремы косинусов. Большой прогресс в приемах Кесуэлла становится особенно ясным, если сравнить с его выводом громоздкие геометрические доказательства тех же формул, которые дал в своих «Математических этюдах» (кн. V) Ф. Скаутен.

Теорему косинусов сферической тригонометрии Кесуэлл вывел из трехгранника, накладывая боковую грань на основание. По-видимому, это был первый случай вывода тригонометрических формул с помощью методов начертательной геометрии. Затем Кесуэлл алгебраически преобразовал теорему, причем получил формулы сферической тригонометрии для половинных углов.

Обозначив основание треугольника, как и Оутред, через B, боковые стороны через m и n, полупериметр через ξ [1], он, например, нашел для тангенса половины угла при вершине пропорцию

$$S\xi \times S:\xi - B:.S:\xi - m:\times S:\xi - n::Rq\cdot Tq\cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{Ang.},$$

которая без труда переходит в современную форму

$$\sin s\cdot \sin (s-b):\sin (s-a)\cdot \sin (s-c) = 1:\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

Неперовы аналогии Кесуэлл сначала доказал искусственным образом геометрически, но затем он привел четыре теоремы из наследия священника Томаса Бекера, которые аналитически вывел из обычных теорем для прямоугольного треугольника и из которых затем получил с помощью выкладок также аналогии Непера.

Нам представляется случай сказать здесь несколько слов о «тригонометрических кривых» (см. стр. 285). Первой графически изображена была функция синуса. Роберваль вычертил ее график в связи с определением площади циклоиды (ср. стр. 105—106). Именно, он начертил внутри циклоиды и на ее основании, с помощью закрепленного в левом конце основания образующего круга, линию, названную им Trochoidis comes (или также socia — «спутницей трохоиды»), тождественную с полным оборотом синусоиды. Название «линия синусов» встречается впервые у французского иезуита Онорэ Фабри в сочинении «Геометрический труд о линии синусов и циклоиде» (Opusculum geometricum de linea sinuum et cycloide, Рим, 1659; перепечатан в принадлежащем тому же автору «Обзоре геометрии» — Synopsis geometriae, Лион, 1669), опубликованном им под псевдонимом А. Фарбиуса и вообще относящемся к предыстории исчисления бесконечно малых (см. стр. 101 и след.). Валлис в части II своей «Механики» (1670) правильно разобрал вопрос о знаках синуса во всех четырех квадрантах и вычертил два полных оборота синусоиды, отметив при этом, что их бесчисленно много. В другом месте он указал, что линия синусов служит гра-

[1]) Собственно говоря, это был знак «унции», похожий на букву ξ.

ницей развернутой на плоскость поверхности «цилиндрического копыта». Несколько позднее он нарисовал ветви линии секансов, но не заметил, что в вершинах они должны быть направлены горизонтально, и соединил обе половины под прямым углом. Дж. Грегори в своих «Геометрических этюдах» (1668, ср. стр. 110) представил часть тангенсоиды, лежащую в первом квадранте. Кривые секанса, тангенса и косинуса для первого квадранта были изображены на одном чертеже в «Геометрических лекциях» (Лондон, 1670, 2-е изд., 1674) И. Барроу. Однако линия секансов вычерчена там по крайней мере весьма неточно, а на других чертежах линия тангенсов даже просто неверна. Знаки тангенса в различных квадрантах впервые правильно установил, не приведя ни чертежа, ни доказательства, Ланьи [Mém. Ac. Paris, 1705 (1706?)]. Котес в «Различных произведениях», приложенных к «Гармонии мер» (опубликовано в 1722), дал правильные графики тангенса и секанса для двух оборотов. Но еще Ф. Майер, обладавший вообще весьма серьезными заслугами в области тригонометрии, считал синус и тангенс тупого угла положительными, а косинус и котангенс отрицательными [Comm. Ac. Petr., 1727 (1729)].

Большие успехи, достигнутые к этому времени в Англии, лишь постепенно укрепились на материке Европы. В Германии в XVII столетии не появилось ни одной сколько-нибудь значительной книги по тригонометрии, и неоднократно выходили только краткие изложения, предназначенные для землемеров и сообщавшие теоремы без доказательства; авторы некоторых даже не пользовались логарифмическими вычислениями. Из этих книг мы назовем только весьма употребительные «Таблицы универсальной математики» (Tabulae per universam mathesin, Виттенберг, 1664) Эгидия Штрауха и «Пандору математических таблиц» (Pandora mathematicarum tabularum, Франкфурт, 1684 и 1688) Грюнебергера, во введении к которым был дан обзор тригонометрических теорем. Быть может, стоит упомянуть, что автор «Ясной математики» (Mathesis enucleata, Нюрнберг, 1689, 1695 и 1711) Иоганн Штурм, кратко говоривший в ней и о тригонометрии, пропустил секансы как линии, без которых можно легко обойтись.

Несколько больше мы находим у французов. Прежде всего мы должны указать на известные уже нам большие энциклопедические работы Дешаля (ср. стр. 19 и 244) и Озанама. «Курс или мир математики» (1674, три тома; 1690, четыре тома) Дешаля заключал в первом томе полный обзор плоской и сферической тригонометрии, хотя еще в традиционной форме, с геометрическими доказательствами и без сокращенных обозначений. Задачу о вычислении двух углов β и γ по их сумме и отношению их синусов он рассматривал несколько иначе, чем Стрит (ср. стр. 322). Он полагал

$$\sin\beta : \sin\gamma = \operatorname{tg}\varphi : \operatorname{tg}\psi,$$

брал φ произвольным и отсюда с помощью логарифмов определял ψ. Выведя (разумеется, в старинной форме) из вышеприведенной пропорции новую:

$$\sin(\varphi+\psi):\sin(\varphi-\psi)=\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}:\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2},$$

он получает $\beta-\gamma$.

Еще лучше была изложена тригонометрия во втором томе «Курса математики» (1693) Озанама, отчасти опиравшегося на труды Дешаля. Для вычисления тригонометрических таблиц Озанам предложил прием, по существу совпадающий с так называемым интерполяционным методом Ньютона (ср. стр. 208). Хотя Озанам и примыкал тут непосредственно к способу, данному Бригсом, но разработал свой прием самостоятельным образом. Собственные таблицы Озанам взял у Флакка (стр. 320). Мы находим у него вновь формулу для $\operatorname{tg}2\alpha$, написанную по-современному теорему косинусов, а также формулу

$$\operatorname{tg}C=\frac{c\sin B}{a-c\cos B},$$

по существу бывшую известной еще Виету и Тихо Браге. Замечательна у Озанама оригинальная аналитическая трактовка задачи об определении сторон сферического треугольника по трем углам. Странным образом, ни Озанам, ни Дешаль не упоминали аналогий Непера, быть может, потому, что оба они еще не умели как следует с ними обращаться.

Добавим, что так называемая задача Потено, восходящая к Снеллю, была исследована как новая в рассматриваемый период Дж. Коллинсом (Phil. Trans., 1671). Далее, так называемая задача Гансена, тоже решенная уже Снеллем, была вновь разобрана Г. Мейером в книге «Учение о треугольниках» (Doctrina triangulorum, Базель, 1678)[1].

В дополнение к тем сведениям, которые мы привели в первой части относительно аналитического выражения и вычисления числа π (стр. 82, 109, 127, 143, 148 — 150), упомянем здесь о попытках произвести приближенное спрямление окружности с помощью геометрических средств. Особенно заслуживает внимания работа Христиана Гюйгенса «Открытия о величине круга» [De circuli magnitudine inventa[2]), Лейден, 1654]. Гюйгенс в ней впервые строго доказал неравенство

$$\frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi}<\varphi<\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3}+2\sin\frac{\varphi}{3},$$

[1]) Задача Потено состоит в определении расстояний некоторой точки земной поверхности от вершин данного треугольника по углам между прямыми, соединяющими эту точку с вершинами. Задача Гансена — родственная. — *Прим. ред.*

[2]) Слово inventa, несомненно, нужно считать стоящим в именительном падеже множественного числа.

приведенное Снеллем в его книге об измерении круга (Cyclometricus, 1621), и присоединил к нему, исходя из геометрических соображений, другие тригонометрические выражения, значительно более жестко ограничивающие дугу φ. С помощью своих формул он получил, выбрав $\varphi=\frac{\pi}{30}$, число π с девятью знаками. Впрочем, Гюйгенс не верил в возможность точной квадратуры круга, а Дж. Грегори в сочинении «Истинная квадратура круга и гиперболы» (Vera circuli et hyperbolae quadratura, Падуя, 1667, ср. стр. 118) даже пытался доказать невозможность ее. Но наряду с этим встречались многочисленные попытки настоящих «квадраторов»; мы назовем из них лишь Григория Сен-Винцента, который один привел в «Геометрическом труде» (1647, ср. стр. 104) четыре способа квадратуры круга.

Введение бесконечных рядов (ср. стр. 117 и след.) побудило вновь заняться формулами для $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$, уже ранее известными для отдельных целочисленных значений n, и распространить их на случай произвольного n. Основание этим исследованиям было положено главным образом Виетом, который вывел такие формулы вплоть до $n=10$. Он, как и Бюрги (в одной неопубликованной рукописи), уже заметил закон образования коэффициентов. Хотя Оутред по существу не пошел дальше результатов Виета, но выражения, помещенные в конце первого издания его «Ключа к математике» (1631), вплоть до $n=5$, уже значительно превосходили по алгебраической форме изложение Виета. Последний результат Оутреда здесь имел вид:

$$OAqc-5Radq\times AOc+5Radqq\times OA=Radqq\times OE,$$

что означает

$$(2\sin\alpha)^5-5(2\sin\alpha)^3+5\cdot 2\sin\alpha=2\sin 5\alpha.$$

Оутред здесь указывал, что радиус вообще можно положить равным 1; однако осуществил это лишь Эйлер (см. стр. 335). Во втором издании в 1648 (за ним последовал ряд других) Оутред дал соответствующую формулу для $\sin 7\alpha$. Он составил еще более обширный трактат о «сечениях угла» (опубликован в Opuscula math. hactenus inedita, Оксфорд, 1677). Там формула, соответствующая приведенной нами, гласила:

$$R^4)\,\alpha^4A-3R^2\alpha^2A+R^4A=E,$$

причем в ней нужно положить

$$A=2\sin\varphi,\ E=2\sin 5\varphi,\ \alpha=2\sin\frac{1}{2}(180^\circ-2\varphi)=2\cos\varphi.$$

Скобка служит знаком деления, а делитель стоит слева от нее[1]).

[1]) Этот способ записи и ныне употребителен в странах, где господствует английский язык.

В своем большом трактате о делении углов (см. стр. 323) Валлис по способу обозначения полностью примыкал к высоко ценимому им Оутреду. Прежде всего Валлис стремился найти решение уравнений деления углов и указал, что каждое такое уравнение имеет столько корней, какова его степень. Он даже верно различал положительные и отрицательные решения вплоть до $n=7$.

Первые общие формулы подобного рода мы находим в первом письме Ньютона к Лейбницу от 13 июня 1676. В качестве примера применения своего метода обращения рядов Ньютон привел там формулу для хорды дуги окружности диаметра d, относящейся к дуге, хорда которой равна x, как $n:1$. Эта формула гласит: хорда искомой дуги $=$

$$nx+\frac{1-nn}{2\times 3dd}xxA+\frac{9-nn}{4\times 5dd}xxB+\frac{25-nn}{6\times 7dd}xxC+$$
$$+\frac{49-nn}{8\times 9dd}xxD+\ldots$$

Она немедленно переходит в известную формулу для $\sin n\varphi$ (см. стр. 329), если положить $d=2$, $x=2\sin\varphi$ и учесть, что буквы A, B, C, ... всякий раз представляют собой весь предыдущий член. Вывод этой формулы с помощью рядов дал Муавр (Phil. Trans., 1698). Он заметил, как это сделал уже и Ньютон, что ряд является конечным лишь для нечетных целых n.

Не зная, по-видимому, об этих работах, Иоганн Бернулли опубликовал в Acta Erud. (1701) формулу

$$x=ab^{n-1}-\frac{n-2}{1}ab^{n-3}+\frac{n-3,\ n-4}{1,\ 2}ab^{n-5}-$$
$$-\frac{n-4,\ n-5,\ n-6}{1,\ 2,\ 3}ab^{n-7}+\ldots,$$

а также ее обращение; при этом a обозначало хорду однократной дуги в окружности радиуса 1, x — хорду n-кратной дуги, а $b=\sqrt{4-a^2}$. Эта формула, как видно, представляла собой только обобщение вышеприведенной формулы Оутреда. Для того чтобы придать ей современный вид, нужно положить

$$x=2\sin n\varphi,\quad a=2\sin\varphi,\quad b=2\cos\varphi.$$

Бернулли привел еще без доказательства ряды

$$x=nab^{n-1}-\frac{n,\ n-1,\ n-2}{1,\ 2,\ 3}a^3b^{n-3}+\ldots$$

и

$$y=b^n-\frac{n,\ n-1}{1,\ 2}a^2b^{n-2}+\ldots$$

и их обращения; здесь

$$2r=1,\quad b=\sqrt{1-a^2},\quad y=\sqrt{1-x^2}.$$

Доказательство этих формул попытался дать Я. Герман (Acta Erud., 1703). Но и он лишь вывел подобно Виету формулы для определенных n (до $n=9$), опираясь при этом на чертежи, и сделал отсюда заключения для произвольного n.

В Mém. Ac. Paris, 1702 (1704) Як. Бернулли, частью геометрически, частью пользуясь индукцией, вывел ряды, частные случаи которых также дал еще Виет; первый из этих рядов, как указал сам Як. Бернулли, совпадал с рядом Ньютона:

$$a=nx-\frac{n\cdot nn-1}{4\cdot 6}x^3+\frac{n\cdot nn-1\cdot nn-9}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5-\ldots,$$

$$b=2-\frac{nn}{4}xx+\frac{nn\cdot nn-4}{4\cdot 6\cdot 8}x^4-\frac{nn\cdot nn-4\cdot nn-16}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}x^6+\ldots,$$

где

$$a=2\sin n\varphi,\quad b=2\cos n\varphi,\quad x=2\sin\varphi.$$

Для образования $\operatorname{tg} n\varphi$ и $\operatorname{sc} n\varphi$ Ланьи [Mém. Ac. Paris, 1705 (1706?), ср. стр. 325] привел в словесной форме правила, которые получил, обобщая формулы для $n=2, 3, 4, 5$, выведенные им из чертежа. Герман установил в Acta Erud., 1706 соответствующие общие формулы, к которым, очевидно, пришел с помощью индукции от выражений для $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{sc}(\alpha+\beta)$ (см. стр. 322). Иоганн Бернулли путем действительно проведенных вычислений получил в Acta Erud., 1712 правило для $\operatorname{tg} n\varphi$, использовав при этом связь между арктангенсом и мнимым логарифмом, опубликованную им ранее в Mém. Ac. Paris, 1702 (1704). Формулу Германа он дал лишь в одном добавлении, причем положил в ней радиус круга равным 1. В Acta Erud., 1722 Бернулли сделал попытку доказать свои результаты без употребления мнимых величин, но, по существу, лишь подробнее провел индуктивный прием Германа, причем нашел формулу для $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)$. Ряд для хорд многократных углов был предложен также в Comm. Ac. Petr., 1728 (1732) Ф. Майером, который определил общий член его из выражений, выведенных для нескольких первых чисел, использовав здесь одну свою работу о фигурных числах, опубликованную в том же томе журнала.

Мы должны еще рассказать о четырех однородных по содержанию работах Ланьи; некоторые из них были довольно обширны. Они были посвящены «гониометрии», введенной им в качестве новой науки об измерении всех углов [Mém. Ac. Paris 1724 (1726), 1725 (1727), 1727 (1729) и 1729 (1731)]. Первая была почти целиком посвящена одному чисто геометрическому методу, который состоял в том, что отношение между соответствующей углу дугой и полуокружностью представлялось в форме цепной дроби с помощью накладывания дуги на полуокружность, остатка — на дугу и т. д., продолжающегося, пока остаток не окажется уже неприметным. Другой, чисто аналитический прием был подробнее приведен преимущественно во второй статье. По существу он заключался в употреблении ряда для арктангенса. Но для уточнения вычислений Ланьи почти повсюду ввел замечательные усовершенствования. Так, например, он определял меньший острый угол прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5 с точностью до $\frac{1}{60^{10}}$ градуса. В третьей статье он привел выражение для общего члена ряда, получающегося из ряда арктангенса при сложении каждых двух последовательных его членов, и определил границы погрешности, если ряд обрывается на некотором определенном члене. Здесь он вновь отметил (ср. стр. 82), что из возможности представить дугу с помощью бесконечного ряда, расположенного по степеням тангенса, следует невозможность «точного и геометрического» спрямления произвольной дуги окружности. Впрочем, он сам называл такой способ доказательства «метафизическим и трансцендентным», добавляя при этом, что иррациональность логарифмов, невозможность трисекции угла и отыскания двух средних пропорциональных доказать по-иному нельзя. В четвертой статье Ланьи указал, до каких пор следует продолжать вычисления при определении по его методу одного из острых углов прямоугольного треугольника по сторонам. Помещенная в том же томе пятая статья содержала еще некоторые дополнения.

Мы добавим здесь несколько замечаний о появившихся в разбираемый промежуток времени тригонометрических таблицах. Ни Озанам, ни Джон Ньютон не применили свои новые и удобные методы (отличавшиеся, впрочем, друг от друга довольно мало) к практическому вычислению таблиц. По-видимому, это впервые осуществил в начале XVIII столетия Абрагам Шарп, о чем рассказывается в шеститомном труде Ф. Мазера «Логарифмические писатели» (Scriptores logarithmici, Лондон, 1791—1807, т. III). Согласно этому источнику все вычисления Шарпа были опубликованы Гардинером в одном из многочисленных изданий «Математических таблиц» (Mathematical Tables, 3-е изд., 1741, 1-е изд., 1705) Шервина. Сам Шарп, по-видимому, сообщил свои приемы в книге «Усовершенствованная геометрия» (Geometry improved, Лондон, 1717) под псевдонимом А. С. Филомата. Таблицы Шервина были семизначными и содержали синусы, тангенсы и секансы, а также их логарифмы; интервалы между значениями углов равнялись одной минуте. Наряду с этими таблицами, господствовавшими все XVIII столетие, заслуживает упоминания лишь еще одно весьма практичное и богатое собрание также семизначных таблиц, а именно «Вычислитель» (The calculator, Лондон, 1747) Додсона.

Немаловажные успехи были сделаны еще до Эйлера в XVIII столетии и в решении треугольников. В первую очередь все более приближалась к современной форма, хотя иногда еще пропорции выражались словесно. Пример был подан и здесь И. Ньютоном в его «Универсальной арифметике» (1707, улучшенное издание 1722, 3-е изд. 1732). В проблеме X этого сочинения он занимается задачей о решении треугольника по основанию, сумме боковых сторон и углу при вершине. Ньютон проводит биссектрису угла и [если мы обозначим острый угол, образуемый ею с основанием ($=c$), через ε] устанавливает на свой манер пропорцию

$$c:(a+b)=\sin\frac{1}{2}\gamma:\sin\varepsilon.$$

Но так как $\varepsilon=90^\circ-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, то мы можем вместо $\sin\varepsilon$ написать $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ и получаем тогда одну из так называемых формул Молльвейде (Zachs Monatl. Korr., 1808). В проблемах XI и XII Ньютон задает три стороны, сам вводит строчные буквы, полагая, впрочем, $AB=a$, $AC=b$ и $BC=c$, и словесно устанавливает пропорцию, которую мы здесь напишем в современном обозначении сторон:

$$2ab:\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}=1:\sin\gamma$$

и которая впервые встречается здесь. Выводимые им дальше формулы для половинного угла и формула Герона для площади треугольника были хотя и не новы, но появились у него в привычной для нас форме.

В Германии в это время большое распространение получили сочинения Вольфа (ср. стр. 14, 19). Однако и в них еще не были использованы достижения англичан ни по содержанию, ни в отношении формы теорем. Следует только отметить вид, который сообщил Вольф правилу Непера для прямоугольного сферического треугольника. Если не говорить о том, что здесь встречался еще целый синус, этот вид совершенно таков же, как нынешний. Во Франции после сочинений Дешаля и Озанама появилась довольно объемистая книга Депарсье «Новые курсы тригонометрии» (Nouveaux traités de trigonométrie, 1741). Она содержала хорошие семизначные таблицы синусов, тангенсов и секансов, значения которых приводились с интервалом в одну минуту, и восьмизначные таблицы логарифмов синусов и тангенсов с интервалом 10 минут. Вообще же это сочинение не содержало ничего нового. Самое большее, можно упомянуть, что формула для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, в случае сферического треугольника, бывшая по существу известной еще Геллибранду (стр. 322), здесь приводилась в форме двух словесно выраженных пропорций:

$$\sin s:\sin(s-c)=\sin(s-b)\sin(s-a):x^2,$$
$$\sin(s-a):r=x:\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha.$$

Не лучше обстояло дело с книгами, опубликованными в то время в Италии. Можно было бы лишь отметить, что Бошкович опубликовал в 1737 в Риме «Построение сферической тригонометрии» (Trigonometriae sphericae constructio), в котором дал значительно упрощенное, по сравнению с прежним, графическое решение шести основных задач сферической тригонометрии.

Даже в Англии усовершенствования, достигнутые в символике, не полностью перешли в учебники. Весьма развитая символика встречается лишь в «Обзоре лауреатов математики» (Synopsis palmariorum matheseos, Лондон, 1706) У. Джонса. Джонс обозначал синус, тангенс, секанс, синус-верзус соответственно s, t, ſ, v, а их кофункции через *s*, *t*, *ſ*, *v*. Теорему сложения для синусов он, например, записывал в виде

$$\text{s},\ \overline{A \pm a} = \overline{s,\ a \times \text{s},\ A \pm s,\ A \times \text{s},\ a \div r}.$$

В Phil. Trans. за 1747 Джонс дал интересное собрание старых и новых формул, из которых мы отметим общие формулы для $\sin(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)$ и $\cos(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)$. Он привел также соответствующую формулу для тангенса, которую мы встретили уже у Иоганна Бернулли (1722, ср. стр. 329). Из этих формул он затем вывел в различных видах формулы для $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$, $\operatorname{tg} n\alpha$ и т. д. «Плоская и сферическая тригонометрия» (Trigonometry plane and spherical, 1748, 2-е изд. 1765) Томаса Симпсона содержала вещи, интересные в другом отношении. Хотя Симпсон употреблял сокращения, вроде sin., co.-sin., tang. и т. д., но писал он формулы только с помощью пропорций. Тем не менее мы находим уже в первом издании его книги прекрасные геометрические выводы обеих так называемых формул Мелльвейде и ряд теорем, вроде следующей:

$$(b+a):(p-q) = \cos\frac{\gamma}{2} : \sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

где p и q представляют собой отрезки, на которые делит высота треугольника сторону AB; впрочем, это предложение имелось уже в 1746 у Оппеля (см. стр. 334). Симпсон искусно пользовался и введением — с помощью геометрии — вспомогательного угла, примененного впервые Андерсеном (стр. 322). Он тригонометрически решил квадратное уравнение, подобно тому как это ранее сделал Кавальери в сочинении, заглавие которого начиналось словами «Компендий о правилах треугольника» (Compendio delle regole dei triangoli, 1638). В сферической тригонометрии он дал формулы, также содержавшие суммы и разности, составленные, однако, из элементов различных треугольников.

Посмертное сочинение иезуита Якова Креза, вышедшее пять лет спустя после кончины автора под названием «Видовой анализ тригонометрии» (Analysis speciosa Trigonometriae, Прага, 1720), отличалось не столько открытием новых предложений, сколько последовательным применением алгебраического исчисления. Хотя Креза был, очевидно, знаком с обозначениями англичан, он их не перенял. Например, вместо косинуса он писал Sinus secundus $= S2$ и т. д., но, с другой стороны, в формулах обозначал синус x или y. Так как тут же рядом эти буквы могли обозначать отрезки, то, естественно, наглядность нередко нарушалась. В некоторой степени формулы его усложнялись тем, что он пользовался почти исключительно синусом. Так, теорема о синусе суммы записывается у него в виде

$$S = \frac{y\sqrt{r^2 - x^2} + x\sqrt{r^2 - y^2}}{r}.$$

Подобные недостатки встречались также в статьях Ф. Майера, в которых он стремился улучшить аналитическую трактовку тригонометрии. Основной была его статья в Comm. Ac. Petr., 1727 (1729). Ошибки, допущенные им в вопросе о знаках тригонометрических функций для углов, бо́льших 90° (стр. 325), не имели большого значения, так как свои дальнейшие рассуждения он определенно относил лишь к острым углам. Усовершенствование, предложенное Майером, состояло в том, что вместо отдельных функций он писал просто буквы, которые ему, впрочем, приходилось употреблять в очень большом числе, ибо он не присоединял к ним аргументы. Так, теоремы о синусе, косинусе и тангенсе суммы и разности он писал в виде

$$\frac{Sc \pm Cs}{r}, \qquad \frac{Cc \mp Ss}{r} \qquad \text{и} \quad rr\,\frac{T \pm t}{Tt \mp rr}.$$

Большие буквы при этом всегда соответствовали большему углу. Майер придавал важное значение приведению формул к логарифмическому виду и геометрически вывел несколько таких формул, вроде

$$\frac{S - s}{c - C} = \frac{B}{A} = \frac{r}{Q}, \qquad \frac{S - s}{S + s} = \frac{q}{Q}$$

и т. д., где A, B, Q обозначают, соответственно, sin, cos и tg угла $\frac{\alpha+\beta}{2}$, a, b, q — те же функции угла $\frac{\alpha-\beta}{2}$[1]. Напротив, вспомогательный угол Андерсена (стр. 322) он ввел аналитически. Он привел в своих обозначениях и формулу $\operatorname{tg}\beta = \frac{b \sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$ (ср. стр. 326). Пропорций Майер уже не употреблял. Важным было его замечание, оставленное, впрочем, им без доказательства, что из теоремы косинусов сферической тригонометрии можно вывести все формулы как для косоугольного, так и для прямоугольного треугольников. Свой метод Майер применил еще в двух последующих статьях в Comm. Ac. Petr. [1729 (1735) и 1730/31 (1738)].

[1]) По содержанию эти формулы имелись уже у Виета (1579 и 1593).

Несмотря на большое неудобство, заключавшееся в том, что в случае новых аргументов приходилось вводить все новые буквы, к символике Майера примкнули некоторые ученые, как Д. Бернулли, Герман и Вольфганг Крафт [там же, 1729 (1735)]. Способ Майера применил даже француз Мопертюи [например, в своей «Навигационной астрономии» (Astronomie nautique, 1751)].

Наиболее выдающимся представителем тригонометрии до Эйлера был, однако, Ф. фон-Оппель. И он принадлежал к числу последователей Майера. В книге «Анализ треугольников» (Analysis triangulorum, ин-фолио, Дрезден и Лейпциг, 1746) Оппель поставил целью аналитически развить всю плоскую и сферическую тригонометрию из немногих предложений, выведенных геометрическим путем. Свое намерение он, действительно, осуществил, хотя буквенное обозначение Майера весьма затрудняет чтение его книги. В ней имелось и кое-что новое. Наиболее важно, пожалуй, что оба так называемых уравнения Молльвейде (стр. 332) приводились здесь в современной нам форме. Оппель вывел их посредством вычислений из геометрически доказанной теоремы тангенсов. Поскольку a обозначало у него целый синус, m, n — боковые стороны, AB — основание треугольника, а p, v представляли собой знаки синусов полусуммы или полуразности углов при основании, то равенства эти записывались в виде

$$v=(m-n)p:AB \text{ и } \sqrt{a^2-v^2}=(m+n)\sqrt{a^2-p^2}:AB.$$

Косинус Оппель вообще почти всегда выражал через синус. Среди имеющихся у него формул отметим такую:

$$4b^2c^2d^2=a^2(b+c+d)(b+c-d)(d+b-c)(c+d-b),$$

где b, c, d представляют собой синусы трех углов треугольника, а также выражение, приведенное им для синуса угла треугольника при данных трех высотах h, i, k:

$$a\sqrt{(ik+kh+hi)(ik+kh-hi)(hi+ik-kh)(kh+hi-ik)}:2kih^2.$$

Оппель первый вполне систематически (ср. сказанное выше о Кесуэлле, стр. 324, и о Бошковиче, стр. 332) основал сферическую тригонометрию на рассмотрении рассеченного у верхнего ребра трехгранника, обе боковые грани которого накладывались на плоскость основания. С помощью такого чертежа он вывел теоремы синусов и косинусов, заметил, что из этих двух теорем можно вывести все прочие формулы, и показал, как с помощью дополнительного треугольника можно получить для каждой формулы взаимную с ней. Он вывел очень много таких формул, не интересуясь, однако, их приведением к логарифмическому виду, так что, например, аналогии Непера у него отсутствовали.

§ 2. Заслуги Эйлера в преобразовании и дальнейших успехах тригонометрии

Понятно, что столь ярко выраженный аналитический гений, каким являлся Эйлер, раз занявшись вычислительной тригонометрией, должен был значительно продвинуть ее вперед. Повод обратиться к тригонометрии представился ему в уже неоднократно упоминавшемся нами «Введении в анализ» (1748). В восьмой главе его первого тома Эйлер впервые ввел в анализ угловые функции как числовые величины, с которыми можно производить вычисления, как со всякими другими, так, чтобы впредь они уже не оказывали влияния на размерность выражений. И хотя Эйлер и не определил нигде тригонометрические функции явно как отношения сторон прямоугольного треугольника, но всегда рассматривал их именно так (ср. стр. 147). Если отвлечься от несущественных мелочей, то изложение и символика Эйлера были вполне современными. Уже в одной работе в Comm. Ac. Petr., 1729 (1735) он записал теорему косинусов сферической тригонометрии в виде

$$\cos : BC = \cos : AB \cdot \cos : AC + \cos A \cdot sAB \cdot sAC;$$

целый синус, который все еще употребляло большинство прежних авторов, здесь уже был принят равным 1. Обозначения тригонометрических функций во «Введении» были таковы: $\sin.\ A.\ z$ или $\sin.\ z\,(A = \text{arcus})$, $\cos.\ A.\ z$ или $\cos. z$, $\text{tang}.\ z$, $\cot.\ z$ и т. д.

В начале названной главы были впервые систематически установлены формулы для $\sin\left(z + \frac{1}{2}\pi\right)$, $\sin(z+\pi)$ и т. д. Мы упоминали ранее (стр. 147), что здесь же приводилась так называемая теорема Муавра. Написав:

$$\cos.\ nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}\ \sin. z)^n + (\cos. z - \sqrt{-1}\ \sin. z)^n}{2},$$

Эйлер раскрыл скобки и получил таким путем формулу для $\cos nz$ (ср. стр. 329); аналогично он нашел формулу для $\sin nz$. Беря n бесконечно большим, а z бесконечно малым, так что $\cos z = 1$ и $\sin z = z$, он вывел из этих формул бесконечные ряды для синуса и косинуса. Отсюда он получил ряды для синуса, косинуса, тангенса и котангенса $\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$, отчасти опубликованные им уже в Comm. Ac. Petr., 1739 (1750). Затем он исчерпывающим образом показал, как можно использовать эти ряды для вычисления тригонометрических таблиц. Позднее в Nov. Comm. Ac. Petr., 1754/55 (1760) он вывел дальнейшие ряды для $\sin^n\varphi$, $\cos^n\varphi$, $\sin^m\varphi\ \cos^n\varphi$[1]), следующие по функциям углов, кратных φ. На

[1]) Запись $\sin^2\alpha$ для обозначения $(\sin\alpha)^2$ впервые встречается у Джонса (1706, ср. стр. 332).

связь между показательной и тригонометрическими функциями Эйлер натолкнулся уже в одной работе о рядах, помещенной в Comm. Ac. Petr., 1740 (1750). Соответствующую определяющую формулу для синуса он дал в Misc. Berol., 1743, но доказаны были формулы для синуса и косинуса только во «Введении». О результатах Котеса (1714/16, ср. стр. 146) Эйлер, очевидно, ничего не знал. Формулы

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \text{ и } \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$$

он получил во «Введении» из выражений

$$\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{xi}{n}\right)^n+\left(1-\frac{xi}{n}\right)^n\right] \text{ и } \frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{xi}{n}\right)^n-\left(1-\frac{xi}{n}\right)^n\right],$$

полагая $n=\infty$. К этому он присоединил еще формулу

$$x=\frac{1}{2i}\ln\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+i\operatorname{tg}x}{1-i\operatorname{tg}x}.$$

Определение $\sin(x+iy)$ и $\cos(x+iy)$ он впервые дал в Mém. Ac. Berl., 1749.

Суммирование рядов синусов и косинусов, аргументы которых растут в арифметической прогрессии, Эйлер произвел уже в Misc. Berol., 1748. Во «Введении» он вновь вернулся к этому вопросу с более общей точки зрения. Позднее (Opuscul. anal., Петербург, 1783) он занялся аналогичными рядами, аргументы которых образуют геометрическую прогрессию. Представлением тригонометрических функций в виде произведений Эйлер начал заниматься уже в Comm. Ac. Petr., 1734/35 (1740), где разложил в бесконечное произведение синус. То же самое он провел для синуса и косинуса $\frac{m}{n}\pi$ в Comm. Ac. Petr., 1740 (1750) и Misc. Berol., 1743. Все это вместе с некоторыми дополнениями было включено во «Введение», в 14-й главе которого он также детально занялся вопросом об умножении и делении углов, т. е. о тригонометрических функциях кратных углов. Мы указывали в первой части, что в этих разнообразных исследованиях Эйлер действовал более творчески, нежели критически. Это столь глубоко коренилось в его натуре, что он оставил без внимания возражения, сделанные ему главным образом Николаем I Бернулли уже в 1742 и 1743. Эйлер продолжал производить вычисления над любыми бесконечными рядами, распространял теоремы о конечных многочленах на бесконечные и придавал любые значения индексу n, в начале доказательства считавшемуся целочисленным. Несмотря на это, получаемые им результаты обычно бывали справедливы, хотя в некоторых случаях он пришел и к ошибочным выводам, как, например, в упоминавшейся статье в Nov. Comm. Ac. Petr., 1754/55 (1760).

Во втором томе «Введения» (глава 22-я) Эйлер применил к решению трансцендентных уравнений, вроде $s = \cos s$ или $s = \sin 2s$ и т. п., правило ложного положения. Как сообщает он сам, он придумал подобные задачи с целью посмотреть, нельзя ли приблизиться таким путем к квадратуре круга. Позднее, когда Ламберт уже доказал иррациональность π (стр. 148), Эйлер вновь занялся подобными рассмотрениями, подчеркивая, что работа Ламберта отнюдь еще не доказала невозможность квадратуры круга.

Прежде чем перейти к заслугам Эйлера в сферической тригонометрии, упомянем еще о двух тригонометрических разложениях, лежащих несколько в стороне. Эйлер нашел их, развивая предложенный Декартом и затем неоднократно открывавшийся вновь способ построения окружности данной длины (Декарт, Opuscula posthuma, Амстердам, 1701, ср. его Oeuvres, т. X). Это бесконечный ряд

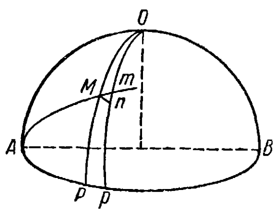
$$\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} + \ldots = \frac{1}{\varphi} - 2\operatorname{ctg} 2\varphi$$

[ср. Nov. Comm. Ac. Petr., 1760/61 (1763)] и бесконечное произведение

$$\cos\varphi \cos\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{4} \ldots = \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi},$$

которое Эйлер другим путем вывел уже в Comm. Ac. Petr., 1737 (1744).

Сферической тригонометрией Эйлер специально занялся в двух больших статьях, подойдя при этом к ней с различных точек зрения. В первой, помещенной в Mém. Ac. Berl., 1753 (1755) он совершенно общим образом построил сферическую тригонометрию как геометрию треугольников, составленных на поверхности сферы линиями кратчайшего расстояния. Эйлер исходил из прямоугольного треугольника, обозначив катет AP через x, катет PM через y, гипотенузу AM через s [черт. 17[1])]. Если O — полюс большого круга (экватора), на котором лежит AP, а Op — меридиан, бесконечно близкий к OP, то



Черт. 17.

$$Mm = ds, \quad mn = dy, \quad Pp = dx$$

и линия Mn, лежащая на параллельном круге широты y, равна $dx \cos y$, так что

$$ds = \sqrt{(dy)^2 + (dx \cos y)^2}.$$

1) Я несколько исправил здесь чертеж Эйлера.

Далее, Эйлер искал условия, при которых интеграл этого элемента дуги будет иметь минимальное значение, и получил, таким образом, 10 уравнений, возникающих из правила Непера (см. его «Descriptio», 1614). Здесь в первый раз появились обозначения, которые мы теперь склонны считать само собой разумеющимися и отсутствие которых часто придавало такой неудобный вид прежним работам. Мы имеем в виду обозначение трех сторон буквами a, b, c, а противолежащих вершин и углов треугольника буквами A, B, C. То, что мы обозначаем последние по большей части буквами α, β, γ, конечно, менее существенно. Греческие буквы были введены лишь в XIX столетии, хотя иногда α, β, γ применялись уже А. Кестнером в его «Основаниях арифметики, геометрии и тригонометрии» (Геттинген, 1759; 6-е изд. 1800). Новые обозначения позволили Эйлеру записать свои десять уравнений вполне в современном виде. Затем он получил из них шесть различных основных уравнений для прямоугольного треугольника.

Соответствующим образом Эйлер поступил и в случае общего сферического треугольника. Определив минимум одной из сторон, он прежде всего нашел пять фундаментальных уравнений, из которых затем вывел теорему синусов, обе теоремы косинусов и так называемое правило котангенса (впервые встречающееся у Виета); последнее появилось у него в форме

$$\sin a \operatorname{tg} C - \sin B \operatorname{tg} c = \cos a \cos B \operatorname{tg} C \operatorname{tg} c,$$

переходящей в употребляемую ныне при делении на $\operatorname{tg} C \operatorname{tg} c$. Эйлер записывал каждую теорему в трех видах, которые получаются друг из друга циклической перестановкой, хотя сам Эйлер ею не пользовался. О полярном треугольнике Эйлер не упоминал, и вообще, с точки зрения полноты, в статье имелось несколько малозначительных пробелов. Зато применения и преобразования фундаментальных теорем были в высшей степени богатые.

Среди прочего материала здесь имелись все формулы для половинных углов, правда, без сокращенных обозначений полусумм сторон и углов, затем четыре аналогии Непера—Бригса, употребление вспомогательного угла в теореме косинусов, причем последняя приводилась еще в новой форме:

$$\cos a = \frac{1}{4}\cos(A-b+c) + \frac{1}{4}\cos(A+b-c) - \\ - \frac{1}{4}\cos(A-b-c) - \frac{1}{4}\cos(A+b+c) + \frac{1}{2}\cos(b-c) + \\ + \frac{1}{2}\cos(b+c);$$

сообщалась и формула, полярная с приведенной.

Прибавим, что вслед за этой статьей Эйлер в том же томе Mém. Ac. Berl. поместил работу, подробно излагавшую тригонометрию на поверхности сфероида, особо учитывая вопросы, связанные с измерением земли (ср. сказанное на стр. 291 о Клеро). Аналогичные исследования были произведены позднее дю-Сежуром [Mém. Ac. Paris., 1778 (1781)].

Во второй статье по сферической тригонометрии [Comm. Ac. Petr., 1779 (1782)] Эйлер принял для построения системы ее формул элементарную основу. Он исходил здесь из трехгранника, который пересекал соответствующими плоскостями, с тем, чтобы после применить теоремы плоской тригонометрии (подобно Копернику). Он вывел таким образом теорему синусов, теорему косинусов для сторон и новую формулу, связывающую пять элементов:

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C,$$

отметив, что эти три формулы содержат в себе всю сферическую тригонометрию. Полученное здесь третье уравнение Эйлер подверг неоднократным преобразованиям. Он вывел из него так называемую формулу котангенсов, теорему косинусов для углов и, с помощью теоремы синусов, полярную с ней формулу. Лишь после этого он ввел полярный треугольник и объяснил его способ применения, привел, частично выведя их по-новому, логарифмические формулы и с полным правом заявил, что его статья дает полное (мы можем прибавить: первое полное) изложение системы сферической тригонометрии.

§ 3. Современники и последователи Эйлера

1. Развитие тригонометрии. Мы будем отправляться здесь от конца предыдущего параграфа, чтобы рассказать о некоторых достижениях, полученных независимо от Эйлера. Френсис Блек изложил в Phil. Trans., 1752 основные случаи сферической тригонометрии с помощью приема, представляющего собой упрощение одного способа, применявшегося еще арабами и Региомонтаном. С помощью этого же приема Лагранж в Journ. Éc. Polyt., 1799, а за ним и многие другие, вывел теорему косинусов. О попытках Патрика Мердока [Phil. Trans., 1758, II (1759)] и Кастильона [Mém. Ac. Berl., 1766 (1768)] доказать из теорем о половинных углах, не всегда приведенных в наиболее гибкой форме, другие, уже, впрочем, известные теоремы, мы можем лишь упомянуть. Пенгре, уже применявший символику Эйлера, распространил правила Непера для прямоугольного сферического треугольника на косоугольные, проведя в последних высоту [Mém. Ac. Paris, 1756 (1762)]. Однако эти правила Пенгре вместе с самими правилами Непера не включали случаи данных a, b, c и α, β, γ. Это побудило У. Фишера распространить их в Trans. R. Soc. Edinb., 1798 и на эти случаи, для чего он вывел четыре теоремы. Но и в такой форме прием Пенгре не приобрел никакого значения.

Действительный шаг вперед представляла статья Г. Гейнзиуса (Acta Erud., 1756), впервые исследовавшего на основе гониометрических формул двузначные случаи сферической тригонометрии, не прибегая при этом к геометрическим соображениям, причинившим большие затруднения еще Ретику и Ото. Любопытно, что он не пользовался символикой Эйлера и даже не научился из «Введения» правильно определять знак тангенса. По-видимому, сам Гейнзиус сознавал, что этот вопрос ему неясен, и исключил из своих формул тангенсы, благодаря чему все они были верными. Новую, хотя и не очень плодотворную идею предложил Даламбер (Misc. Taur., IV, 1760/69), попытавшись ввести в тригонометрию на шаре малые круги. К статье Даламбера примкнул Боссю в «Трактатах по дифференциальному и интегральному исчислениям» (Traités de calcul différentiel et de calcul intégral, Париж, 1798). Оба эти автора определили площади поверхностей двуугольников и треугольников, составленных дугами малых кругов.

Нас не удивит, что И. Ламберт обладал превосходными идеями и в области тригонометрии. В первом томе своих «Очерков об употреблении математики» (Берлин, 1765, ср. стр. 322) он высказал общие соображения о насущных задачах тригонометрии, которые действительно были решены 14 лет спустя Эйлером (см. стр. 339). Но и сам Ламберт достиг в отдельных пунктах значительных успехов. Так, например, он развил далее мысль, приведшую Непера к его правилу для прямоугольных сферических треугольников (стр. 338), но у шотландского математика еще только намеченную, и из рассуждений Ламберта мы видим, что он совершенно ясно понял подлинное основание этого правила, заключающееся в понятии группы. Отправляясь отсюда, Ламберт, пользуясь символикой Эйлера, установил важнейшие формулы гониометрии и затем дал очень искусное и почти исчерпывающее изложение тригонометрии косоугольного сферического треугольника. Основные предложения сферической тригонометрии и формулы для половинных углов он вывел, опуская в косоугольном треугольнике высоту и применяя формулы для получающихся в нем прямоугольных треугольников. Кроме того, он привел новые логарифмические преобразования теоремы косинусов и формулы котангенсов. Элементы треугольников он обозначал столь же последовательно, как Эйлер, с тем отличием, что у него большие и малые буквы поменялись ролями. Впрочем, в «Дополнениях к логарифмически-тригонометрическим таблицам» (Zusätze zu den logarithmisch-trigon. Tabellen, Берлин, 1770) он отошел от такого знакоупотребления в случае прямоугольных треугольников. Ламберт также рассматривал здесь тригонометрические функции как отношения, хотя подчеркивал это обстоятельство столь же мало, как и Эйлер. Например, он писал, совершенно сходно с нами, $k = h \sin a$, где k, h суть стороны и a — угол. В тех же «Дополнениях» и во втором томе своих «Очерков об употреблении математики» (Берлин, 1770) он дал приближенную формулу для дуги, лучшую, чем выражение Снелля (стр. 326), а именно[1])

$$\varphi = \frac{28 \sin \varphi + \sin 2\varphi}{18 + 12 \cos \varphi}.$$

Доказательством ее впервые снабдил Молльвейде (Zachs Monatl. Korr., XVI, 1807).

Мы прибавим здесь несколько замечаний относительно гиперболических функций. Они возникли уже в связи с квадратурой равносторонней гиперболы, хотя лишь Муавр установил, что при замене действительных величин мнимыми задачи на круг переходят в задачи на равностороннюю гиперболу (ср. стр. 44), а привести определяющие их уравнения выпало на долю В. Риккати (Opuscula, I, Болонья, 1757). Ламберт использовал уже известные зависимости между аргументами круговых и соответствующих им гиперболических функций для приведения более сложных выкладок с первыми к простому логарифмическому виду. После того, как он сначала вычислил таблицу гиперболических функций, он, в частности, дал такую формулу для случая, когда в сферическом треугольнике требуется определить по данным сторонам A и B угол a для каждого значения угла c [Mém. Ac. Berlin, 1768 (1770)].

Название «тригонометрические функции» употребил Г. С. Клюгель (Analytische Trigonometrie — «Аналитическая тригонометрия», Брауншвейг, 1770), который также первый явно ввел их как отношения сторон треугольников, как поступаем теперь мы. Переход тангенса для углов больше 90° от положительных значений к отрицательным, представлявший затруднения при геометрическом подходе (стр. 325), Клюгель очень просто разъяснил аналитически. В обозначениях он примыкал к Эйлеру. Мы встречаем у него впервые вывод теоремы о синусе суммы из формулы

$$\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

полученной прямо из треугольника. Он особо подчеркивал основоположное значение этой теоремы для всех предложений о сложении углов. Наряду с обыкновенными теоремами в его плоской тригонометрии встречалась и формула

$$\operatorname{tg} C = \frac{c \sin B}{a - c \cos B}$$

(стр. 326). Клюгель также первый включил в учебную книгу различные тригонометрические ряды, которые рассмотрел совершенно самостоятельно. Он дал первые основательные доказательства для сумм тригонометрических рядов, аргументы которых образуют

---

[1]) Эта формула встречается уже у Ньютона (письмо к Лейбницу от 13 июня 1676).

арифметическую прогрессию (см. об Эйлере на стр. 336). Самостоятельно изложена была у него и сферическая тригонометрия. Пользуясь трехгранником, он вывел основные уравнения для прямоугольного треугольника и впервые распространил их на треугольники, имеющие угол больше 90°. Далее следовали все известные теоремы о косоугольных треугольниках, причем всё, как и возвещало заглавие книги, излагалось аналитически. Для каждой формулы Клюгель с помощью полярного треугольника составлял полярную с ней. Начиная с 70-х годов XVIII столетия в тригонометрических работах аналитический метод стал господствующим, и книга Клюгеля сыграла в этом, быть может, немалую роль. Впрочем, прошло еще порядочно времени, прежде чем геометрические выводы исчезли из употребительных курсов.

В числе последователей Эйлера имелся ряд выдающихся математиков. Особенно многое сделал в области сферической тригонометрии петербургский академик А. И. Лексель. Он показал, что геометрическим местом вершин всех треугольников с общим основанием и равной площадью является малый круг [Act. Ac. Petr., 1781, 1 (1784)] и что произведения синуса стороны (или, соответственно, угла) и соответствующей высоты имеют постоянную величину d (или, соответственно, δ), где

$$d=2\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)},$$

$$\delta=2\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)},$$

причем

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c) \quad \text{и} \quad S=\frac{1}{2}(A+B+C)$$

[Act. Ac. Petr., 1782, 1 (1780)]. С помощью этих равенств, представляющих собой обобщения формулы Герона, он вывел изящные выражения для тангенсов сферических радиусов вписанного в треугольник и описанного кругов, установил формулы для $\cos\frac{1}{2}(A\pm B\pm C)$, доказал теорему, соответствующую в сферическом четырехугольнике, вписанном в круг, теореме Птолемея, а в одной статье в Act. Ac. Petr., 1782, II (1786) распространил на шар еще некоторые другие предложения планиметрии.

Выдающиеся заслуги Лексель имел и в полигонометрии. Уже Ламберт во втором томе своих «Очерков об употреблении математики» (1770) начал разрабатывать формулы непосредственно для четырехугольников. И. Майер (Tetragonometriae specimen I — «Опыт измерения четырехугольников», диссертация, Геттинген, 1773) и Ст. Бьернсен (Introductio in Tetragonometriam ad mentem Lambert — «Введение в измерение четырехугольников по Ламберту», Копенгаген, 1780) сделали попытку дополнить еще несовершенные и неполные выводы Ламберта. Однако разработать общий способ вычисления произвольных многоугольников удалось только Лекселю [Nov. Comm. Ac. Petr., 1775 (1775) и 1775 (1776)]. Проектируя многоугольник на две взаимно перпендикулярные оси, Лексель получил два легко понятных уравнения:

$$a \sin \alpha + b \sin (\alpha + \beta) + \ldots + l \sin (\alpha + \beta + \ldots + \lambda) = 0,$$
$$a \cos \alpha + b \cos (\alpha + \beta) + \ldots + l \cos (\alpha + \beta + \ldots + \lambda) = 0,$$

причем для обыкновенных многоугольников $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = 360°$. На этой основе получались главные уравнения плоской тригонометрии. Далее Лексель без труда развил результаты, найденные его предшественниками для четырехугольника, а введя еще одну диагональ, он впервые дал полное перечисление всех возможных случаев решения четырехугольников. Затем он дал еще одно решение так называемой задачи Гансена (ср. стр. 326), а также встречающейся в геодезии проблемы определения второй диагонали четырехугольника по одной диагонали и четырем сторонам.

Ряд статей по сферической тригонометрии опубликовали два других петербургских академика — Н. Фус и Шуберт [Nov. Act. Ac. Petr., 1784 (1788), 1785 (1788), 1786 (1789 и 1794 (1801)]. И. Т. Майер младший дал логарифмическую трактовку плоской теоремы косинусов (Gründlicher... Unterricht zur praktischen Geometrie — «Капитальный... курс практической геометрии», т. 1, Геттинген, 1777). Следует упомянуть и Кестнера с его «Геометрическими статьями» (Geometrische Abhandlungen, 1790/91), хотя он все еще употреблял целый синус. Неудачным в отношении формы было также построение сферической тригонометрии, данное в Mém. Ac. Paris, 1783 (1786) Ж. П. де-Гюа. Зато в другой статье, помещенной в том же томе и посвященной сферическим площадям, он дал для сферического избытка формулу

$$\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{ctg} \frac{c}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \csc \beta + \operatorname{ctg} \beta,$$

а также аналогичную формулу для случая трех данных сторон, которую, впрочем, можно найти уже у Эйлера [Act. Ac. Petr. 1778, II (1781)]. Лагранж содействовал успехам тригонометрии, применив к непосредственному решению уравнений ряды, что было особенно важно для практических целей астрономии и геодезии. В Mém. Ac. Berl., 1776 (1779) он, например, решил с помощью мнимых величин гониометрическое уравнение $\operatorname{tg} x = m \operatorname{tg} y$ относительно x в виде

$$x = y - \frac{1-m}{1+m} \sin 2y + \frac{1}{2}\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 \sin 4y - \frac{1}{3}\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^3 \sin 6y + \ldots$$

Это уравнение он связал с формулами для прямоугольного треугольника и с аналогиями Непера. Подобные разложения в ряды встречались, впрочем, еще у Ламберта (1777, опубликовано в Bodes

Astr. Jahrb., 1780), а затем у Деламбра (Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien — «Аналитические методы определения дуги меридиана», Париж, год VII, т. е. 1798/99).

Превосходной книгой, имевшей в романских странах почти такое же значение, как учебник Клюгеля в германских (стр. 341), оказалась опубликованная впервые в 1786 «Плоская и сферическая тригонометрия» (Trigonometria plana e sferica, итальянское и французское издание, Париж) Каньоли. Каньоли, правда, производил вычисления все еще над тригонометрическими линиями, но радиус круга брал равным единице, и если он не перенял обозначения элементов треугольника, введенные Эйлером, то вообще примкнул к нему полностью и всю свою работу построил на аналитической основе. Несмотря на то, что в этом направлении сделано было уже многое, ему все же удалось в ряде пунктов внести некоторые усовершенствования. Стоит упомянуть о его приведении к логарифмическому виду с помощью вспомогательного угла плоской теоремы косинусов (по способу Майера, ср. стр. 343), а также сферической теоремы косинусов (в Mem. Soc. Ital., 1794). Отметим еще вывод новых формул для сферических прямоугольных треугольников, имевших назначением бóльшую точность вычислений, и далее установление изящных формул, связывающих элементы сферического треугольника с элементами соответствующего ему треугольника, составленного из хорд. Независимо от Кестнера (Astronomische Abhandlungen — «Астрономические статьи», 1772), Каньоли решил уравнение

$$a \cos A + b \sin A = n$$

с помощью подстановок

$$a = m \cos B \quad \text{и} \quad b = m \sin B.$$

Во втором издании «Тригонометрии» (1808) он добавил важное отношение между шестью элементами сферического треугольника:

$$\sin c \sin a + \cos c \cos a \cos B = \sin A \sin C - \cos A \cos C \cos b,$$

а также вывод суммы тригонометрического ряда, о котором мы упоминали, говоря о Клюгеле (стр. 341), причем распространил суммирование на случай n-х степеней таких функций[1]).

С. Лакруа в своем «Элементарном курсе прямолинейной и сферической тригонометрии и т. д.» (Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique etc., Париж, 1798/99) в противоположность Каньоли ввел символику Эйлера, но зато почти всюду сохранил в формулах R (даже еще в восьмом издании, 1827, ср.

[1]) На основе работ Эйлера по тригонометрии в России было составлено выдающееся по своим достоинствам руководство его ученика М. Е. Головина — «Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами» (СПб., 1789). — *Прим. ред.*

стр. 245). Исходя из других положений, чем Лексель, и не зная о его работах, С. Люилье выпустил книгу «Полигонометрия или об измерении прямолинейных фигур» [Polygonométrie ou de la mésure des figures rectilignes etc., Женева 1789]. Прежде всего он n способами выразил площадь многоугольника, а отсюда получил основные соотношения между сторонами и углами. Кроме того, опять-таки пользуясь выражениями для площади, он пришел к двум формулам, совпадающим с формулами проекций Лекселя. Люилье применил свои теоремы к решению многоугольников: 1) по $n-1$ стороне и $n-2$ углам, 2) по углам и $n-2$ сторонам, 3) по сторонам и $n-3$ углам. В одной работе 1799 (опубликовано в Mém. Inst. Paris, 1805) Люилье распространил свои результаты на пространственные многоугольники и установил главное предложение полиэдрометрии, гласящее, что площадь каждой грани равна сумме произведений всех других граней на косинусы углов, образуемых ими с первой гранью. Впрочем, условия, необходимые для справедливости этой теоремы, у него еще отсутствовали.

Теорема о площади сферического треугольника [1]) была, согласно его собственноручной заметке, найдена в 1603 Гарриотом, а позднее распространена на многоугольную площадь. Она была впервые опубликована в книге Жирара «Новое открытие в алгебре» (1629, ср. стр. 219) и во «Всеобщем руководстве для измерения неба» Кавальери (Directorium generale uranometricum, Болонья, 1632). Так как эти книги пользовались довольно широким распространением и к тому же теорема была еще раз высказана Кавальери в его «Тригонометрии» (Trigonometria, 1643), то невероятно, чтобы Роберваль, в 1655 письменно заявивший свои претензии на первенство ее открытия, не знал о ней раньше. Формула площади для n-угольника была приведена также Яном Брожеком (Бросциус) в его работе «Защита Аристотеля и Евклида и т. д.» (Apologia pro Aristotele et Euclide etc.; Данциг, 1652). Кесуэлл положил сферический избыток треугольника равным E, длину большого круга шара радиуса R и площади поверхности G равной π и получил простое выражение

$$2\pi\Delta = EG = 2R\pi E, \quad \text{так что } \Delta = RE.$$

Як. Бернулли в Acta Erud., 1691 применил к определению площади сферического треугольника вновь открытое исчисление бесконечно малых. То же самое в более простой форме было сделано Эйлером в его первой статье по сферической тригонометрии (стр. 337). Позднее он опубликовал еще две специальные работы о вычислении площади сферических многоугольников [Act. Ac.

---

[1]) Одну такую задачу поставил еще Региомонтан (письмо к Родеру от 4 июля 1471).

Petr., 1778 (1781) и Nov. Act. Ac. Petr., 1792 (1797)], причем из второй мы приведем формулу для сферического избытка S:

$$\cos\frac{S}{2}=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Логарифмическую формулу

$$\cos\frac{1}{2}(A+B+C)=-\frac{d}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

из которой тотчас следует соответствующая формула для сферического избытка, дал впервые Лексель (ср. стр. 342). Согласно указанию Лежандра («Начала геометрии», Éléments de géométrie, 1-е изд., Париж, 1794), Люилье принадлежит не менее изящная формула для самого сферического избытка:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}.$$

2. Таблицы. Дифференциальная тригонометрия. Понятно, что во второй половине XVIII столетия часто употреблялись таблицы, вышедшие еще до 1750, особенно таблицы Гардинера (см. стр. 330). Благодаря Э. Пезена́ этот труд был переиздан (с семью знаками; Авиньон, 1770), причем были частично использованы вычисления Г. Мутона (ср. стр. 206). Многочисленные издания выдержали также появившиеся в небольшом формате «Таблицы логарифмов синусов и т. д.» Лакайля и Лаланда (Tables de logarithmes pour les sinus etc. (Париж, 1760). Одним из лучших собраний таблиц второй половины XVIII столетия были «Дополнения к логарифмически-тригонометрическим таблицам» (Берлин, 1770, ср. стр. 340) Ламберта. Среди прочего материала эти таблицы содержали таблицу алгебраических выражений для синусов через 3°, имевшую целью позволить более точные вычисления (объяснение во втором томе «Очерков» Ламберта и у Каньоли, 1794, ср. стр. 344), таблицу дуг окружности с 27-ю десятичными знаками, синусы и косинусы для очень малых углов и таблицу для интерполяции. Ламберт занимался также составлением таблицы синусов, имеющих рациональные значения. Подобная таблица, содержавшая, впрочем, ошибки, была вычислена по способу Ламберта его учеником И. Шульце, опубликовавшим ее в заслуживающем внимания двухтомном «Новом расширенном собрании логарифмических, тригонометрических и иных таблиц» (Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer Tafeln, Берлин, 1778).

Наибольшее распространение получили, однако, употребляющиеся и в наше время таблицы Георга Вега. Сначала Вега выпустил семизначные «Логарифмические, тригонометрические и иные... таблицы и формулы» (Logarithmische, trigonometrische und andere... Tafeln und Formeln, Вена, 1783), которым предшествовал перечень ошибок у Шульце, Гардинера-Пезена, Флакка и Питиска. В 1793 вышло его «Логарифмическо-тригонометрическое руководство», а в 1794 в Лейпциге — выдающийся труд «Полное собрание логарифмов и т. д.» (Thesaurus logarithmorum completus etc., in-folio), основные таблицы которого имели 10 знаков и который сам он характеризовал как новое издание таблиц Флакка. Однако еще лучшие были также употребляемые и ныне 7-значные таблицы Ф. Калле, выпущенные им в 1795 под названием «Портативные таблицы логарифмов» (Tables portatives de logarithmes, in-octavo). Во введении на 118 страницах был изложен метод вычисления таблиц, в некоторых частях имевших 15 и 20 знаков. Это собрание содержало также таблицы синусов и их логарифмов для десятичного деления углов. Из английских изданий следует упомянуть первые шестизначные таблицы С. Денна («Таблицы... правильных логарифмов» — Tables of correct... logarithms, Лондон, 1784) и особенно неоднократно переиздававшиеся «Математические таблицы» Ч. Геттона (Math. Tables, 1-е изд. 1785) с превосходной историей логарифмов, а также выдающийся трехтомный труд М. Тейлора («Tables of Logarithms», Лондон, 1792), содержавший в третьем томе семизначные логарифмы тригонометрических функций для значений с интервалом в одну секунду (только в нем имелось $3^1/_2$ миллиона цифр).

После революции, введшей во Франции с 1791 метрическую систему мер, там сделали серьезную попытку провести также десятичное деление углов. Под председательством Риш де-Прони и под руководством выдающихся математиков, таких, как Деламбр, Лагранж и Лежандр, было предпринято на этой основе вычисление огромного собрания таблиц, которое было действительно осуществлено и в рукописи занимало 17 фолиантов. Опубликовано оно, однако, не было, отчасти из финансовых соображений, отчасти потому, что десятичное деление углов все же не укоренилось. Работа эта содержала, среди прочего, натуральные синусы для десятичных долей квадранта с 25 знаками и логарифмы синусов и тангенсов стотысячных долей квадранта с 14 знаками, притом все это было снабжено большим интерполяционным аппаратом. Вскоре, впрочем, вышли меньшие по размерам таблицы такого рода, как, например, «Десятичные тригонометрические таблицы» Ж. Ш. Борда́, изданные Деламбром (Tables trigonométriques décimales... revues... et publiées par J. B. J. Delambre, Париж, год IX, т. е. 1800—01) и «Новые тригонометрические таблицы» (Nouvelles Tables trigonométriques, Берлин, 1799; имелся также немецкий заголовок) И. Ф. Гоберта и Хр. Людв. Иделера. Эти таблицы имели значение, ибо некоторые авторы, например Лежандр в своих «Началах геометрии» (1-е изд., Париж, 1794), положили в основу деление квадранта на сто частей.

Мы указывали уже в предыдущей части (стр. 157), что основоположные формулы дифференциальной тригонометрии дал Котес. Лакайль в Mém. Ac. Paris, 1741 (1744) подобно Котесу установил для астрономов 24 дифференциальные формулы для сферических треугольников с двумя заданными элементами. Подробно занялись этим предметом в своих учебниках также Клюгель и Каньоли (стр. 341 и 344), но лишь Бошковичу (Opera, IV, 1785) удалось выделить из многочисленных возможных зависимостей сферической тригонометрии основные равенства, которых он дал четыре. Они и теперь применяются в той же форме под названием «уравнений погрешности». Первое из них гласит:

$$da = \cos C\,db + \cos B\,dc + \sin B \sin c\,dA.$$

В сходном направлении шли попытки придать бо́льшую точность вычислениям или формулам, в которых встречаются синусы углов, близких к 90°, или косинусы весьма малых углов. И. Лайонс опубликовал в Phil. Trans., 1775 такой приближенный метод для сферических треугольников, родственный с методом Ньютона для алгебраических уравнений. Ламберт [в Bodes Astr. Jahrb., 1778 (1776)] и Каньоли в своей «Тригонометрии» (см. стр. 344) заменяли в таких случаях формулы, обладающие малой точностью, другими, в которых широко использовались половинные углы; для этой цели могли служить уже самые формулы для половинных углов. Для вычисления значений функций малых углов Ламберт применял также ряды. С помощью же рядов получил свои приближенные формулы

$$\sin x = x(\cos x)^{\frac{1}{3}} \text{ и } \operatorname{tg} x = \frac{x}{(\cos x)^{\frac{2}{3}}}$$

Н. Маскелайн, сообщивший их без доказательства во введении к названным выше таблицам логарифмов М. Тейлора (см. стр. 347). Вывод этих формул дал лишь И. Траллес в 1804 (Abh. Ak. Berl., 1804/11). В таблицах Калле (1795, ср. стр. 347) эти формулы впервые получили практическое применение. Вопросом о погрешности, возникающей при замене сферических треугольников с малыми острыми углами плоскими треугольниками, занимался уже Ж. Ж. Лаланд [Mém. Ac. Paris, 1763 (1766)]. Однако значительно большее практическое значение приобрело исследование о тригонометрических измерениях земной поверхности, произведенное Лежандром [Mém. Ac. Paris, 1787 (1789)]. Он привел там (носящую его имя, хотя на практике применявшуюся и ранее) теорему о том, что сферический треугольник, стороны которого по сравнению с радиусом сферы весьма малы, так что сферический избыток достигает лишь нескольких градусов, можно вычислять как плоский треугольник с теми же сторонами, если вычесть из каждого его угла одну треть сферического избытка. Доказательство этой теоремы сообщил и сам Лежандр во введении к «Аналитическим методам определения дуги меридиана» Деламбра, (1798/1799, Замечание III) и Лагранж в Journ. Éc. Polyt., 1798/99. Лежандр сделал тем самым важный вклад в тригонометрию на поверхности сфероида. Благодаря введению метрической системы эта дисциплина, начиная с 1791, приобрела более важное значение; Лежандр разработал ее далее еще в одной статье в Mém. Inst. Paris, 1806.

3. Система тригонометрии к концу XVIII столетия. К изложению непосредственных успехов тригонометрии мы присоединим краткий обзор формы, которую постепенно приняла система тригонометрии в учебниках. Мы неоднократно отмечали, что, за исключением Клюгеля, все прочие авторы еще вводили в качестве целого синуса радиус r, отчасти, правда, лишь с целью удовлетворить все еще сохранявшуюся потребность в однородности выражений. Только для упрощения формул часто r полагался равным единице. Отнюдь не было еще усвоено большинством математиков и определение знаков отрезков. Поэтому, как мы неоднократно подчеркивали, знаки функций углов, бо́льших 90°, отчетливо устанавливались лишь при помощи гониометрических формул, причем для тангенса особенно важной являлась пропорция

$$\operatorname{tg}\alpha : r = \sin\alpha : \cos\alpha.$$

Эта форма пропорции, а также применение радиуса r, часто продолжали сохраняться и в других случаях даже в XIX столетии. Зато получило почти всеобщее распространение современное обозначение функций, данное Эйлером. В больших книгах, вроде «Начал геометрии» (1794) Лежандра, «Теоретической математики» (Mathesis theoretica, Росток, 1760) и «Системы математики» (2-я часть, 2-е изд., Грейфсвальд, 1786) Карстена, функции отрицательных аргументов рассматривались совершенно правильно, начало чему положило уже «Введение в анализ» Эйлера.

Гониометрические формулы еще часто выводились каждая сама по себе и притом геометрически. Правда, Лежандр и Каньоли вывели основные формулы из теоремы сложения, но только Клюгель ясно выразил основоположное значение этой теоремы (ср. стр. 341). Обосновать самую теорему сложения и для углов, бо́льших 90°, счел необходимым один Лежандр. «Высшую тригонометрию» включил в свою работу, кроме Клюгеля, также еще Каньоли (стр. 344). Также поступили Карстен, А. Р. Модюи в своих «Началах сферической астрономии и т. д.» (Principes de l'Astronomie sphérique etc., Париж, 1765), а в особенно широком объеме Л. Бертран во втором томе своего труда, вышедшего под названием «Новое изложение элементарной части математики»

(Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, Женева, 1778).

Обозначение углов, предложенное Эйлером, переняли только Клюгель и Кестнер в позднейших изданиях «Оснований плоской и сферической тригонометрии» (Anfangsgründe der ebenen und sphärischen Trigonometrie, например, 6-е изд., 1800). У других авторов, в силу отсутствия единообразной символики, формулы были ненужным образом усложнены. Наиболее полная система формул для плоского треугольника, включая так называемые уравнения Молльвейде (стр. 334), выведенная при этом совсем по-современному, имелась у Каньоли. Однако даже вычисление плоских прямоугольных треугольников получило современный простой вид только в XIX столетии, когда отказались от целого синуса.

Сферическая тригонометрия излагалась в учебниках почти сплошь аналитически. Исключением явилась «Trigonométrie sphérique» (Париж, 1757) С. Валетта, который примкнул к «Построению сферической тригонометрии» Бошковича (см. стр. 332), нашел заново все, что входило в «Аналемму» Птолемея, и графически развил всю сферику. Во всех остальных книгах и после выхода второй работы Эйлера (стр. 339) сначала устанавливались все формулы для прямоугольного треугольника, а затем отдельно рассматривался косоугольный треугольник, который для этого разбивался с помощью высоты на два прямоугольных. Применение теорем к составляющим прямоугольным треугольникам давало после исключения высоты систему пяти уравнений, имевшуюся еще в «Началах арифметики и геометрии» (Elementa Arithmeticae et Geometriae, Геттинген, 1739) Зегнера и перешедшую во все позднейшие руководства. Многие авторы, имевшие особенно обширный круг читателей, довольствовались таким приемом. Общие теоремы о косоугольном треугольнике имелись, кроме Клюгеля и Каньоли, у Модюи и у Лаланда Astronomie, т. III, 1792). Каньоли и Модюи давали также аналогии Непера, вообще редко употреблявшиеся в учебниках. Известный еще Виету полярный треугольник также применялся отнюдь не всегда. Формулы плоских треугольников зато нередко выводились из сферических формул, для чего полагали радиус сферы бесконечно большим. Например, Модюи вывел из аналогий Непера так называемые уравнения Молльвейде.

В заключение мы сжато рассмотрим попытки построить всю тригонометрию на возможно более простой основе. Уже Кестнер в позднейших изданиях «Оснований» (например, 3-е изд., 1774) вывел главные формулы тригонометрии из теоремы синусов и того, что $A+B+C=180°$, а Оппель еще ранее показал, как можно получить все формулы сферической тригонометрии из теорем синусов и косинусов (ср. стр. 334). Еще ранее Ф. К. Майер (см. стр. 333) указывал на возможность достигнуть этого с помощью одной лишь теоремы косинусов. Осуществил эту возможность только де-Гюа в одной статье в Mém. Ac. Paris, 1783 (1786). Разрешив выражение, получающееся в сферической теореме косинусов, относительно $\cos A$, он нашел, что

$$\sin A = \frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin b\sin c}\text{ [1]};$$

из этой формулы и аналогичных выражений для $\sin B$ и $\sin C$ он сразу получил теорему синусов. Впрочем, другие теоремы он вывел очень сложным путем, и читать его статью тем труднее, что он применил в ней совершенно новую и тяжеловесную символику.

Отметим коротко, что в одной статье, представленной в 1796 [опубликована в Nov. Act. Ac. Petr., 1794 (1801)], аналогичную попытку предпринял Шуберт. Он хотел построить всю сферическую тригонометрию на теореме Менелая. Однако ему удалось этого достигнуть лишь путем весьма длинных вычислений.

Лагранж, начавший с того же, что и де-Гюа, благодаря значительно более искусному обращению с формулами, впервые придал выводу всех прочих тригонометрических равенств современный вид (Journ. Éc. Polyt., 1798/99). Прежде всего он доказал соотношение Эйлера

$$\cos a\sin b = \cos b\sin a\cos C + \sin c\cos A.$$

Привлекая еще аналогичную формулу

$$\cos b\sin a = \cos a\sin b\cos C + \sin c\cos B,$$

подставив отсюда выражение для $\cos b\sin a$ в первое выражение и применив еще теорему синусов для b, c, он получил теорему косинусов для углов. Столь же просто вывел он и правило котангенса. Лагранж подчеркивал, что с помощью этих четырех формул можно решить любую задачу, однако он также вывел, постоянно пользуясь полярным треугольником, все остальные известные уже нам формулы. Статья Лагранжа представляла собой достойное увенчание успехов тригонометрии на пороге XIX столетия.

---

[1]) Эта формула встречается уже у Бертрана в «Новом изложении элементарной части математики», т. II, Женева, 1778.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Издания классиков и словарей

За рассматриваемый нами промежуток времени элементарная геометрия как наука не сделала никаких существенных успехов и лишь в конце XVIII столетия в ней стали намечаться новые идеи. Зато она распространилась вширь, чему способствовали, с одной стороны, полные издания и переводы древнегреческих классиков, знакомившие с достигнутыми ранее результатами более широкие круги, а с другой, — то, что на базе трудов этих классиков были затем созданы новые, лучшие в методическом отношении руководства, которые легли в основу непрестанно распространявшегося преподавания геометрии. Кроме того, в этой области были произведены также многочисленные исследования частного характера, отчасти принесшие кое-что новое, отчасти заключавшиеся в установлении доказательств и решении задач, ставших затем общеупотребительными в наших школах.

Среди изданий классиков мы, разумеется, можем отметить лишь важнейшие. К ним относится реставрированная Ферма книга Аполлония «О плоских местах», поскольку она явилась предварительной стадией в создании его аналитической геометрии. Ферма пытался также восстановить «Поризмы» Евклида. Однако оба эти сочинения Ферма были опубликованы лишь посмертно в Varia Opera (1679). «Плоские места» Аполлония были исследованы далее в третьей книге «Математических этюдов» Скаутена (1656/57).

Тем временем в Англии И. Барроу выпустил «Начала» Евклида (Кембридж, 1655), а вскоре затем его «Данные» (Кембридж, 1657). Это издание «Начал» было весьма употребительным в Англии до начала XVIII столетия. Штурм опубликовал «Немецкого Архимеда» (Deutsche Archimed, Нюрнберг, 1670); «Исчисление песчинок» он издал в 1667. В Италии, во Флоренции в 1690 вышли «Начала» Евклида в издании В. Вивиани. Англичанин Э. Бернард составил план издания всех классиков, но даже греко-латинское издание всех сочинений Евклида было выпущено лишь Девидом Грегори в 1703 (Оксфорд)[1]).

Хорошим исследователем греческой математики был Р. Симсон. В 1749 он выпустил в Глазго реставрацию «Плоских мест» Аполлония, в 1756 там же — английский перевод «Начал» Евклида, снабженный им многочисленными дополнениями и критическими замечаниями и выдержавший восемь изданий. Он восстановил также книгу Аполлония «Об определенном сечении» и написал довольно большую работу о «Поризмах» Евклида. Обе были напечатаны впервые в Opera (Глазго, 1776; о «Поризмах» см. также статью Симсона в Phil. Trans., 1723).

Следует упомянуть здесь и о математических словарях, появившихся во второй половине XVII столетия. Первое издание «Словаря по математике, астрономии и геометрии» (Lexicon mathematicum, astronomicum et geometricum, Париж, 1668; другое существенно расширенное издание — Рим, 1690) Дж. Витали было, впрочем, почти исключительно астрономо-астрологическим. Дж. Моксон (Лондон, 1680) и Ж. Озанам (Париж, 1690) в общем давали только определения математических выражений. Вольф в «Математическом словаре» (Math. Lexicon, Лейпциг, 1716; 2-е изд., 1734, вышло без участия автора) приводил еще некоторые литературные указания. В Англии Э. Стон выпустил «Новый математический словарь» (A new Mathematical Dictionary, Лондон, 1726); во Франции вышли «Всеобщий словарь по математике и физике» (Dictionnaire universel de mathématique et de physique, Париж, 1753) А. Саверьена и носившая сходное название книга Ж. Лакомба (Париж, 1792). Упомянем еще английский «Математический и философский словарь» Ч. Геттона (A Math. and Philos. Dictionary, Лондон, 1785/96; 2-е изд., 1815).

Математике было отведено место и в энциклопедиях общего характера, как, например, в «Энциклопедии» Э. Чемберса (Cyclopaedia, два тома, Лондон, 1728; следующие издания в четырех томах, 1781/86 и в пяти томах, 1788/91), и особенно в большой «Энциклопедии», издававшейся Д. Дидро при участии Даламбера и вышедшей в 35 томах в 1751/80, а затем неоднократно переиздававшейся. Математические статьи «Энциклопедии» были собраны в «Методической энцикло-

[1]) В России «Начала» Евклида и некоторые предложения Архимеда вышли первоначально в виде перевода (с некоторыми изменениями) их сокращенной обработки: Elementa Geometriae planae et solidae. Quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata А. Таке (1-е изд., 1654). Это «Эвклидовы элементы... в осмь книг чрез профессора мафематики Андрея Фархварсона сокращенные, с латинского на российский язык хирургусом Иваном Сатаровым преложенные»(СПб., 1739) и «Архимедовы теоремы Андреем Таккветом езуитом выбранные... с латинского на российский язык хирургусом Иваном Сатаровым преложенные» (СПб., 1745). Позднее 1 — 6, 11 и 12 книги «Начал» были изданы в переводе с греческого П. И. Суворова и В. Н. Никитина: «Эвклидовых стихий осмь книг...» (СПб., 1784 и 1789). — *Прим. ред.*

педии, расположенной по порядку вопросов» (Encyclopédie méthodique par ordre des matières, Париж, 1784/89), в отделе «Математика». Здесь содержались и принципиально важные объяснения целого ряда понятий. В Германии предшественницей большого «Математического словаря» (Mathematisches Wörterbuch) Клюгеля, начавшего выходить в 1803, явилась «Энциклопедия или связное изложение наиболее общеполезных знаний» (Encyclopädie oder zusammenhängender Vortrag der gemeinnützigsten Kenntnisse, Берлин, 1782/84), изданная тем же Клюгелем при участии других лиц.

§ 2. Учебники

Франция оказалась первой страной, в которой при составлении учебников элементарной геометрии отошли от методов изложения Евклида. Уже П. Раме выступил в своем известном курсе математики (Scholae mathematicae, Базель, 1569) против последовательности изложения теорем у Евклида. Но так как последствия этой прогрессивной критики Евклида сказались главным образом лишь на переменах в преподавании, то для нас здесь будет достаточно обратить внимание на некоторые наиболее важные факты.

Во Франции вышли учебники элементарной геометрии А. Арно (Париж, 1667), Г. Пардиса (Париж, 1671) и Б. Лами (Париж, 1685; 4-е изд., 1710), далее П. Вариньона (1731; умер в 1722), А. К. Клеро (Париж, 1741) и де-Лашапелля (1746). Своеобразно расположил материал начал геометрии во втором томе «Нового изложения элементарной части математики» (1778) женевец Л. Бертран, оказавший влияние на построение третьего тома семитомного «Курса математики для Центральной школы четырех наций» (Cours de Mathématiques à l'École centrale des Quatre Nations, Париж, 1796/99; 25-е изд., 1897) С. Ф. Лакруа. Несмотря на свою малую последовательность, большое распространение во Франции и за границей получил также шеститомный «Курс математики» (1764/69, переиздавался вплоть до 1848) Э. Безу, шестой том которого был весь посвящен геометрии. Однако наибольшую славу завоевали благодаря своей строгости «Начала геометрии» (Éléments de géométrie, 1-е изд., Париж, 1794) А. Лежандра.

Если во французских учебниках элементарной геометрии, в соответствии с концепцией, подробно развитой Даламбером в «Энциклопедии», по большей части стремились усовершенствовать систему Евклида, то немецкие изложения, появившиеся в энциклопедических работах, уже названных выше на стр. 245, преследовали в первую очередь практические цели и приводили теоретические объяснения лишь в той мере, в какой это было необходимо для понимания связи между теоремами. Отдельно мы отметим лишь вторую часть «Оснований» А. Г. Кестнера (Геттинген, 1758; 6-е изд., 1800) и «Систему математики» (Грейфсвальд, 1767/77; 2-е изд., 1782/91) В. Карстена. Особое место занимали написанные Карстеном еще по-латыни «Начала универсальной математики» (Elementa matheseos universalis, Росток, 1756).

Из книг, вышедших в других странах, мы отметим «Основания геометрии» (Grondbeginsels der meetkunde, Амстердам, 1790) Я. ван-Свиндена, переведенную также на немецкий и пользовавшуюся широким распространением, и книгу С. Гурьева «Опыт о усовершении элементов геометрии» (С.-Петербург, 1798), за которой последовали в 1811 г. «Основания геометрии»[1]. Подобно Лакруа Гурьев особенно заботился об улучшении отделов элементарной геометрии, в которых приходится употреблять бесконечно малые величины.

Наряду с этими и другими руководствами, в которых, несмотря на их практическую направленность, излагалась и теория, основные сведения по элементарной геометрии распространяли в более широких кругах еще и многочисленные сочинения XVII и XVIII столетий, в которых ставилось целью обучить читателей исключительно «практической геометрии», что выражалось уже самыми их названиями. Под практической геометрией здесь понималось измерительное искусство в самом широком смысле слова, т. е. учение о мерах, применение его к измерению полей, зерновых и дровяных куч, бочек и т. д.; в более серьезные по уровню книги входило также измерение высоты башен, глубины колодцев и тому подобное. В учебниках перспективы, предназначенных для художников, также всегда имелось небольшое геометрическое введение. Впрочем, было бы бесполезно искать в этих книгах какие-либо научные достижения.

§ 3. Отдельные исследования по элементарной геометрии

Мы уже упоминали, что исследования, произведенные по элементарной геометрии в XVII и XVIII столетиях, обыкновенно касались совершенно простых вопросов. Поэтому мы займемся здесь лишь теми работами, которые содержали теоремы, неизвестные в древности. Так, например, отметим, что в сочинении «О максимумах и минимумах» (De maximis et minimis, около 1640) Э. Торричелли впервые появилось понятие о точке с наименьшей суммой расстояний от вершин треугольника. Далее, мы должны назвать работу «Статическое построение пересекающихся прямых линий» (De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio, Милан, 1678) Дж. Чева, где с помощью рассмотрения центров

[1] Первое издание «Оснований геометрии» Гурьева вышло в Петербурге в 1804—1807 (2 тома) в виде первой части «Морского учебного курса». — *Прим. ред.*

тяжести доказывалась теорема Менелая, которую автор считал новой, а также теорема, ныне носящая имя Чева. В школьных учебниках и теперь иногда встречается очень точное приближенное спрямление окружности, предложенное А. А. Коханским (Acta Erud., 1685). Кое-где можно найти также приближенное деление круга на любое число частей, опубликованное К. Ренальдини в книге «О математическом анализе и синтезе» (De resolutione et compositione mathematica, Падуя, 1668); оно восходило, впрочем, еще к А. де-Виллю (1628) и было дано в том же виде, что у Ренальдини, А. Боссом уже в 1665. Задача о продвижении куба через равный ему куб была, по-видимому, поставлена принцем Рупрехтом Пфальцским и решена им, Валлисом (Opera, II, 1693) и другими. В одной книжке Пардиса (см. стр. 354) была впервые после Ибн ал-Хайсама (X—XI столетия) открыта на Западе теорема о сумме луночек на катетах прямоугольного треугольника.

Пардис ошибочно приписывал эту теорему Гиппократу Хиосскому. Сам Гиппократ произвел квадратуру трех отдельных луночек. Дан. Бернулли («Математические этюды», Венеция, 1724) вывел условие, которому должны удовлетворять все алгебраически квадрируемые луночки, и добавил уравнение, немедленно дающее четвертую квадрируемую луночку. Г. Крамер [Mém. Ac. Berl., 1748 (1750)] установил общее уравнение для таких луночек и привел уравнения, получающиеся отсюда для простейших частных случаев. Уравнения эти, однако, оказались настолько сложными, что он смог найти лишь три луночки, бывшие известными уже Гиппократу. Известные до сих пор пять квадрируемых круговых луночек были впервые указаны М. Валлениусом в его «Диссертации» (Diss. gradualis lunulas quasdam circulares quadrabiles exhibens, Або, 1766), а затем вновь даны Л. Эйлером [Nov. Comm. Petr., 1771 (1772)] [1]). В работе Як. Бернулли «Решение тройной задачи и т. д.» (Solutio tergemini problematis etc., Базель, 1687) была решена так называемая задача Мальфатти для случая равнобедренного треугольника.

В области стереометрии прежде всего следует отметить открытие Декартом теоремы о многогранниках, обычно носящей имя Эйлера (около 1620, опубликовано в Oeuvres, т. X). Открытие Декарта, известное еще Лейбницу, было затем забыто. Эйлер привел эту теорему в Nov. Comm. Petr., 1752/53 (1758) в качестве новой и в следовавшей далее статье того же тома дал ее доказательство. Мы упомянем также Ферма, распространившего так

[1]) Т. Клаузен (Journ. reine angew. Math., 1840) высказал предположение, что в случае рационального отношения угловых мер дуг, ограничивающих луночки, других квадрируемых луночек, помимо пяти известных, не существует. Задача имеет алгебраический характер. Предположение Клаузена было строго подтверждено в работах советских ученых Н. Г. Чеботарева (1935 — 1936) и А. В. Дороднова (1947 и след.). — *Прим. ред.*

называемую задачу Аполлония о касании кругов на случай четырех шаров (около 1636). Эту задачу, ссылаясь на Ферма, исследовал позднее с помощью сферической тригонометрии Эйлер [Mém. Ac. St.-Pét., 1807/08 (1810), представлена 1779]. О так называемой пространственной теореме Пифагора мы уже говорили выше на стр. 255.

Более философский, чем математический характер носили сохранившие лишь исторический интерес рассуждения об угле касания. Они никогда не прекращались и в средние века, а в рассматриваемое нами время встречались у Клавия в его издании Евклида (Рим, 1574; ряд изданий), Валлиса (De angulo contactus —«Об угле касания», 1656; A defense of the angle of contact — «Защита угла касания», 1684), Гоббса (Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae — «Исследование и исправление современной математики», 1660) и В. Леото («Учение о круге» — Cyclomathia, 1662). К пограничным областям геометрии принадлежит также идея Лейбница о «Geometria characteristica» (запись 1679). Лейбниц имел при этом в виду символическое выражение геометрических предложений и доказательств. В его литературном наследии была найдена также статья «Универсальная математика» (Mathesis universalis), относящаяся к тому же кругу идей. Мысли Лейбница в некоторой мере связаны с современной топологией (Analysis situs). Приведенный латинский термин также принадлежит Лейбницу, употребившему его в письме к Гюйгенсу от 8/IX 1679. Прибавим, что в рассматриваемое нами время единственный (не считая указанной только что теоремы о многогранниках) вклад в «геометрию положения» был сделан Эйлером, решившим в Comm. Ac. Petr., 1736 (1741) так называемую задачу о мостах.

Мы возвратимся теперь к частным исследованиям по геометрии. Ряд новых и оригинальных теорем, иногда без доказательства, сообщил М. Стюарт в своем труде под названием «Некоторые общие теоремы и т. д.» (Some general theorems etc., Эдинбург, 1746). Кроме всего прочего, он доказал там теорему, часто называемую его именем и гласящую, что если точки A, B, C лежат на одной прямой, а D — любая другая точка, то всегда

$$AD^2 \cdot BC + BD^2 \cdot AC = AB \cdot AC \cdot BC + CD^2 \cdot AB.$$

Эту теорему сообщил Стюарту его учитель Р. Симсон, сам опубликовавший ее, впрочем, лишь в своей реставрации «Плоских мест» Аполлония (1749). Упомянем и про «Избранные упражнения для юных знатоков математики» (Select Exercises for young Proficients in the Mathematics, Лондон, 1752) Т. Симпсона. Ф. Ноде младший опубликовал в Misc. Berol., 1737 и 1743, две статьи о «тригоноскопии», под которой он понимал некоторые построения треугольников, вроде, например, задачи о построении треугольника по трем точкам оснований его высот. Разнообразные теоремы были опубликованы в то время в нескольких небольших популярных английских журналах. Так, У. Чеппл в Misc. Curiosa Math. (1746 ?) нашел, что расстояние между центрами вписанного и описанного кругов треугольника равно $\sqrt{R(R-2r)}$. То же самое независимо получил Эйлер в Nov. Comm. Ac. Petr., 1765 (1767). В одной из своих статей Nov. Comm. Ac. Petr., 1747/48 (1750) Эйлер привел также доказательства ряда старых и новых теорем. Одна из новых теорем гласила, что сумма квадратов четырех сторон четырехугольника равна сумме квадратов обеих диагоналей плюс учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины диагоналей.

«Геометрия» С. Маролуа (Géométrie, Арнгейм, 1616, нем. изд. Амстердам, 1618) показывает, что уже в XVII столетии занимались преобразованиями и делениями фигур, руководствуясь при этом по большей части практическими — геодезическими соображениями. Все задачи на деление многоугольников, вплоть до самых трудных, были уже решены В. Оутредом, правда, в несколько архаичной алгебраически-геометрической манере (опубликовано по его наследию только в Opuscula mathematica hactenus inedita, Оксфорд, 1677). Этому же предмету посвящена была книга Вильке «Новый и более легкий способ..., особенно выгодный для решения споров относительно границ» (Neue und erleichterte Methode ... besonders vorteilhaft auf die Entscheidung derer Gränzstreitgkeiten, Галле, 1757), которая, впрочем, основывалась на неопубликованной статье И. Тобиаса Майера старшего (ср. Gött. Gel. Nachr., 1755, 1757). При решении задачи здесь предполагалось использование лишь параллельной линейки (см. о Ламберте на стр. 359). Удовлетворяющим тем или иным условиям делением треугольника с помощью прямой занимались уже ранее С. Леклерк в «Практике геометрии» (Pratique de la géométrie, Париж, 1669) и Гинэ в «Приложении алгебры к геометрии» (Application de l'algèbre à la géométrie, Париж, 1705). Все названные авторы, за исключением Оутреда, имели в виду потребности землемерия. Это же относится к Л. Маскерони, что явствует уже из названия его книги «Задачи для землемеров» (Problemi per gli agrimensori, Павия, 1793), в которой многие основные задачи были решены только с помощью линейки. Небольшой указатель литературы по этому вопросу дал И. Тобиас Майер младший в третьей части своей широко распространенной «Практической геометрии» (Геттинген, 1777/83, 4-е изд., 1814/18; см. стр. 343). Об алгебраически-геометрической трактовке задач вообще см. выше стр. 216. Весьма полное изложение этого вопроса, с учетом работ всех своих предшественников, привел Иоганн Христиан Штурм в «Ясной математике» (1689, см. стр. 325).

При качении правильного многоугольника по прямой (или по конгруэнтному многоугольнику) последовательные местоположения какой-либо его вершины образуют многоугольник с площадью, в три раза (или соответственно в пять раз) большей, чем площадь данного. Эту теорему нашел уже Мопертюи, обобщивший ее также на площадь циклоиды и соответственно эпициклоиды [Mém. Ac. Paris, 1727 (1729)]. А. Мейстер распространил ее далее на правильные звездчатые многоугольники [Nov. Comm. Soc. Gotting., 1769/70 (1771)] и одновременно начал широкое исследование более общего вопроса о площадях фигур с самопересекающимся контуром. Мопертюи в приведенной выше работе опубликовал также ряд красивых теорем о диагоналях правильных многоугольников, часть которых приписывалась Лопиталю.

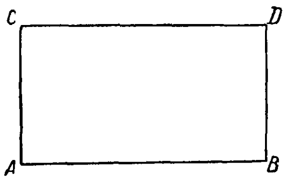
В восемнадцатом столетии часто возвращались к задаче Аполлония о соприкасающихся кругах; это относится, например, к Ламберту (письмо к Г. Голланду от декабря 1768), Эйлеру и Фусу [оба в Nov. Act. Ac. Petr., 1788 (1790)]. Эйлер показал, что точка пересечения высот, центр тяжести и центр описанного круга любого треугольника лежат на одной прямой; при этом он вычислил отношение расстояний между ними [Nov. Comm. Petr. 1765 (1767)]. Крамер в 1742 обобщил поставленную еще Паппом задачу о вписании в круг треугольника, стороны которого проходят через три точки, лежащие на одной прямой, на случай трех произвольных точек. В такой обобщенной форме он предложил задачу Дж. Ф. Кастильону, давшему ее геометрическое решение в Nouv. Mém. Ac. Berl., 1776 (1779). Тотчас за этим ту же задачу решили Лагранж (там же), Эйлер и Фус, перенесшие ее в пространство [Act. Ac. Petr., 1780, I (1783)], а также Лексель [Act. Ac. Petr., 1780, II (1784)]. Дальнейшее обобщение на случай многоугольника было полностью разобрано А. Джордано и Мальфатти (Mem. mat.-fis. Soc. It. sc., 1788), а на основе их работ также С. Люилье [Nouv. Mém. Ac. Berl., 1796 (1799)]. Упомянем еще теорему Уоллеса (Math. Repository, VII, 1799), утверждающую, что основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника из точки описанного круга, лежат на одной прямой. Эту теорему совершенно неосновательно связывают с именем Р. Симсона.

Оригинальным и выдающимся сочинением по элементарной геометрии является «Геометрия циркуля» (La Geometria del compasso, Павия, 1797) Л. Маскерони. В ней давался способ точного построения с помощью циркуля основных элементарных задач, и по крайней мере приближенного построения высших задач. С другой стороны, в последнем дополнении, приложенном Ламбертом «в заключение» второго издания его «Свободной перспективы» (Цюрих, 1774), все элементарные задачи решались только с помощью линейки, а в случае необходимости использовался еще заданный круг с заданным центром.

Совершенно новую область открыл Лексель. Это была сферика, не совпадавшая, однако, с простой сферической тригонометрией. Здесь главным образом разбирались предложения, в которых участвовали малые круги шаровой поверхности. Лексель, например, показал, что такой круг является геометрическим местом вершин сферического треугольника с заданными основанием и площадью [Act. Ac. Petr., 1781, I (1784), см. там же 1782, I—II (1786)]. Из его работ исходили затем Фус и Шуберт. Первый из них решил ряд задач на построение треугольников при максимальных и минимальных условиях [Nov. Act. Ac. Petr., 1785 (1788)]. Шуберт искал геометрическое место вершин треугольника, если при заданном основании отношение синусов (или косинусов) двух сторон или отношение синусов (или косинусов) половин сторон постоянно. В первом случае получается одна пространственная кривая 4-го порядка (см. стр. 288), во втором — большой круг сферы, а в третьем и четвертом — малые круги.

§ 4. Начатки неевклидовой геометрии

Трудности, кроющиеся в учении Евклида о параллельных прямых, уже давно побуждали геометров доказать так называемый пятый постулат. Однако первоначально все их старания приводили только к тому, что этот постулат лишь заменялся другим требованием, появлявшимся незаметно в каком-либо пункте «доказательства». Мы упомянем здесь попытки Клавия (Euclidis elementa, Рим, 1574 и позднее), Валлиса («О пятом постулате» — De postulato quinto, Opera, II, 1693, составлено 1663), Борелли (Euclides restitutus — «Восстановленный Евклид», Пиза, 1658), В. Джордано (Euclide restituto, Рим, 1680) и де-Малезье (Éléméns de géométrie — «Начала геометрии», Париж, 1705)[1]). Значительно глубже проник в логическую сторону дела Джироламо Саккери в книге «Евклид, очищенный от всех родимых пятен» (Euclides ab omni naevo vindicatus, Милан, 1733). Саккери исходил из рассмотрения четырехугольника $ABDC$ (черт. 18), в котором углы при вершинах A и B прямые и $AC = BD$. На основании конгруэнтности он доказал, что тогда и $\angle C = \angle D$, и затем обсудил три гипотезы, в которых предполагалось, что эти углы прямые, тупые или острые. Впрочем, Саккери еще не дошел до того, чтобы считать все три допущения равноправными, и пробует доказать, что единственно возможным является первое, соответствующее евклидовой геометрии. Зато он, например,



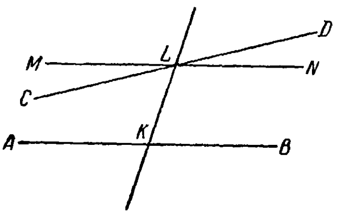
Черт. 18.

[1]) Как показали новые исследования, большие заслуги в разработке учения о параллельных принадлежали математикам стран Ближнего и Среднего Востока — Ибн ал-Хайсаму, Омару Хайяму и Насирэддину ат-Туси. Первый рассмотрел «четырехугольник Ламберта», о котором говорит далее Вилейтнер, и сделал попытку опровергнуть гипотезы острого и тупого

увидел, что три его гипотезы равнозначны трем возможностям для углов треугольника: их сумма соответственно равна $2d$, больше $2d$ или меньше $2d$. Вообще его результаты свидетельствуют о том, что он был остроумным логиком.

На работу Саккери почти никто не обратил внимания, но попытки доказать пятый постулат встречались все чаще и чаще. Прежде всего мы отметим одну статью о началах геометрии Даламбера (Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie, новое издание, т. 5, Амстердам, 1759), сыгравшую в этом направлении стимулирующую роль, а также диссертацию Клюгеля и Кестнера «Разбор наиболее замечательных попыток доказать теорию параллельных» (Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, Геттинген, 1763), содержавшую критику 30 работ, посвященных учению о параллельных.

Бертран во втором томе упомянутого выше учебника (стр. 354) попытался дать серьезное доказательство пятого постулата, исчезнувшее из элементарных руководств лишь в последние десятилетия XIX столетия. Основная идея его заключалась в том, что часть плоскости, лежащая в каком-нибудь углу, является конечной частью всей плоскости, между тем как полоса, заключенная между двумя параллельными, содержится во всей плоскости бесчисленное множество раз. Поэтому площадь в углу MLC (черт. 19), при достаточном продолжении прямых, не может быть частью полосы $MLKA$.



Черт. 19.

Доказательство это было принципиально недопустимо уже потому, что в нем применялись и сравнивались неопределенные бесконечные величины.

Много усилий, чтобы доказать пятый постулат, приложил также Лежандр в «Началах геометрии» (см. стр. 354). Первая попытка доказательства его не удовлетворила, и во втором издании (1799) он дал совершенно иное изложение, пробуя показать, что сумма углов треугольника не может быть ни больше, ни меньше двух прямых. Данное им доказательство первого предложения долгое время считалось совершенно строгим, ибо допущение возможности неограниченно продолжать прямую казалось самоочевидным.

углов, исходя из положения, что эквидистанта данной прямой есть прямая. Двое других рассмотрели «четырехугольник Саккери» и опровергали гипотезы острого и тупого углов, исходя из некоторых постулатов, которыми они явно заменяли постулат о параллельных Евклида. См. комментарии Б. А. Розенфельда и мои к трактатам Хайяма в Историко-математических исследованиях, вып. VI и статью Б. А. Розенфельда в том же издании, вып. XI. — *Прим. ред.*

Доказательством же второго предложения сам Лежандр, по его собственному признанию, не был удовлетворен.

Наиболее значительные результаты до открытия неевклидовой геометрии Николаем Ивановичем Лобачевским, Яношем Больаи и К. Ф. Гауссом (см. стр. 429) были получены в этом направлении Ламбертом. «Теория параллельных линий» (Theorie der Parallellinien) Ламберта, составленная в 1766, была опубликована лишь посмертно в Mag. r. ang. Math., 1786, ибо сам автор не был ею вполне удовлетворен. Ламберт, подобно Саккери, исходил из четырехугольника $ABDC$. Он полагал $\angle A = \angle B = d$, затем брал равным прямому $\angle C$ и рассматривал три гипотезы: 1) $\angle D = d$, 2) $\angle D > d$, 3) $\angle D < d$. Ламберт доказал, что первая гипотеза согласуется с пятым постулатом Евклида, относительно второй он думал, что можно привести ее к абсурду, но в случае третьей он молчаливо сделал допущение, предполагающее верность пятого постулата. Эта ошибка не помешала ему, однако, обнаружить затем, что гипотезы 2) и 3) ведут к принятию абсолютной меры длины и что в этих случаях площадь треугольника пропорциональна избытку или соответственно недостатку суммы его углов по сравнению с двумя прямыми. Увидев, что вторая гипотеза осуществляется на поверхности шара, он даже высказал предположение, что третья гипотеза можеть иметь место на мнимой сфере. Это было действительно доказано лишь в 1854 Риманом [Abh. Ges. Gött. 1866/67 (1868)].

История математики в первой половине XIX столетия

ГЛАВА ПЕРВАЯ

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Введение

Уже в восемнадцатом столетии прогресс математики был столь значителен, что те страницы, которые мы посвятили этому периоду, могли только бледно обрисовать богатство новых идей, выдвинутых Эйлером, Лагранжем, Лапласом и многими другими менее крупными математиками. Картина эта была тем бледнее и одностороннее, что мы обозревали только чистую математику — понятие, которое в современном смысле тогда совсем не существовало. Начиная с Ньютона, ученые разрабатывали математику в ее приложениях к проблемам механики, причем механику здесь следует понимать в самом общем смысле. Так, из более чем 850 статей и книг Эйлера около 300 было посвящено теоретической и 40 — прикладной механике, больше 100 — астрономии и приблизительно столько же — физике. Главные заслуги Лапласа и Даламбера также относились к области приложений.

Разделение математики на «чистую» и «прикладную» проявляется все яснее в XIX столетии. Гаусс — «princeps mathematicorum», деятельность которого протекала в первой половине прошлого века, еще объединял их с высоким совершенством. Новая чистая геометрия, с возникновением которой мы ознакомимся далее (см. стр. 404), также имела корни в практически направленной «Начертательной геометрии» Монжа. Но и Гаусса и другого крупнейшего представителя рассматриваемого времени Коши можно скорее отнести к числу современных «чистых» математиков, поскольку они придавали величайшее значение не только гибкости, но и точности как формы, так и выводов, чем Эйлер и, особенно, Лаплас в большей мере пренебрегали. В работах Гаусса и Коши появляется современная строгость, представляющая собой отличительный признак математики XIX столетия и напоминающая об эпохе расцвета Греции.

В первой половине XIX столетия почти во всех странах появились новые возможности для развития математического творчества: наряду с печатными органами научных обществ и академий, посвященными различным наукам, были основаны специально математические журналы. Во Франции первым был Journal de l'École polytechnique, который возник в год основания этого знаменитого института (1795); затем появились руководимые Жергонном (см. стр. 405) Annales des math. pures et appliquées (1810/31), которые сменились Journal d. math. p. et. appl. Лиувилля (с 1836 г. до настоящего времени). В Германии для публикации результатов все возрастающих математических исследований открылись существующие ныне Journal für reine und angew. Math., основанный в 1826 А. Крелле, и более элементарный, основанный в 1841, Archiv Грунерта (издание прекратилось в 1920). В Англии стал выходить Cambridge (and Dublin) math. Journal (1839/45/54) — предшественник известного Quarterly Journal (с 1855). В Бельгии можно назвать руководимый А. Кетле журнал Correspondance math. et phys. (1825/39). В Италии лишь к концу нашего периода стал выходить журнал Annali di scienze mat. e. fis. (1850/57) [1]).

Девятнадцатое столетие отличалось улучшением системы народного образования. Уже в конце XVIII столетия в некоторых странах было введено всеобщее обязательное обучение. Гимназии постепенно освобождались от богословского руководства; возникла специальная категория учителей гимназии, среди которых, правда, математики вначале играли очень скромную роль. Все же на физико-математические науки в гимназиях стали обращать все больше внимания, так что ученики смогли поступать в высшую школу не в полном математическом неведении. Значение высшей школы для науки, по сравнению с академиями, было в XVIII столетии еще довольно незначительно. Да и в начале XIX столетия оно еще весьма зависело от личности отдельных профессоров. Так, например, Гаусс почти совсем не занимался преподаванием, в то время как К. Г. Якоби, третий выдающийся представитель нашего периода, развернул с 1826 в Кенигсберге очень плодотворную педагогическую деятельность.

Только по истечении рассматриваемого периода университеты приобрели большое влияние на развитие науки.

§ 2. Арифметические вычисления

В области счета как такового в течение всего рассматриваемого нами периода были сделаны лишь небольшие успехи. Но стоит отметить, какое значение приписывали ему выдающиеся математики. Назовем Лагранжа, введшего в своих лекциях по элементарной математике (1794/95), влияние которых сказалось только

[1]) В России первые попытки издания математического журнала были предприняты К. Купфером («Учебный математический журнал», Ревель, 1833—1834) и затем М. М. Гусевым («Вестник математических наук», Вильнюс, 1861—1863). С 1866 стал выходить в Москве «Математический сборник», как орган Московского математического об-ва. — *Прим. ред.*

в XIX столетии, новый способ вычитания и уделявшего особенное внимание сокращенному умножению и делению. Фурье в «Анализе определенных уравнений» (Analyse des équations déterminées, Париж, 1831) употреблял своеобразный способ деления. Гаусс был одним из самых искусных и прилежных вычислителей всех времен и его методы счета во многом послужили образцом. Так, его манера складывать и вычитать слева направо стоящие друг под другом числа (письмо к Шумахеру, октябрь 1844) вошла в привычку большинства астрономов. Он был ревностным поборником большей точности сокращения десятичных дробей в таблицах (ср. Astr. Nachr., 1851). В «Арифметических исследованиях» (Disquisitiones arithmeticae, Лейпциг, 1801) Гаусс не только развил полную теорию периодических дробей, но и опубликовал полную таблицу периодов для всех простых чисел и степеней простых чисел до 100; лично для себя он продолжил ее даже до 1 000. В деле вычисления большой таблицы простых чисел крупные заслуги принадлежат гамбургскому вычислителю Ц. Дазе, который в 1844 вычислил также число π с 200 знаками. Он обработал 7-й, 8-й и отчасти 9-й миллионы (опубликовано в Гамбурге, 1862/65).

Бóльшие успехи сделала методика счета. Уже с конца XVIII столетия за устным счетом стали признавать самостоятельное значение (Ф. Келер, Anweisung, Лейпциг, 1797). В письменном счете появился так называемый австрийский метод вычитания и деления [упомянутый А. Биттнером в книге Handbuch, Прага, 1821 и разработанный в «Учебнике арифметики и алгебры» (Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Вена, 1849) И. Саломона]. Были уточнены и доступно обработаны методы сокращенного умножения и деления (Ом, System, т. I, Берлин, 1828; Ф. Вольф, «Теоретическое и практическое учение о числах», Theoretische und praktische Zahlenlehre, Берлин, 1828). На вычисления с именованными числами сильное воздействие оказали французские метрические меры (см. стр. 31). Они стимулировали (в Германии, правда, только после 1870) методическую разработку теории десятичных дробей. В тройном правиле был достигнут формальный успех благодаря применению так называемого «правила дроби» [1]) (высказанного

[1]) Правило дроби (der Bruchsatz) — прием решения задачи на составное тройное правило, при котором конструкция ответа в форме дроби производится шаг за шагом. Например:

a лошадей съедают b *кг* овса за c дней
сколько » » d » » » e » ?

Согласно правилу дроби поступают так: b *кг* овса достаточны для a лошадей (пишется a), 1 *кг* достаточен для $\frac{a}{b}$ лошадей и т. д. вплоть до ответа $\frac{a \cdot d \cdot c}{b \cdot e}$.

Этим разъяснением я обязан проф. К. Фогелю (Мюнхен), которому выражаю искреннюю благодарность. — *Прим. ред.*

впервые В. Штерном в «Курсе арифметики», Lehrg. des Rechenunterrichts, Карлсруэ, 1832).

Признак времени можно усмотреть в выдвижении вперед в общем образовательном материале счета. В начале столетия новые пути стал прокладывать в своем учебном заведении в Ивердоне педагог И. Г. Песталоцци, который устранил механическую выучку и развил идею воспитательного преподавания. Противоречие между устным и письменным счетом, созданное школой Песталоцци, сгладил прежде всего Дистервег («Методическое руководство», Meth. Handbuch, II ч. написана П. Гейзером, Эльберфельд, 1829/30, и многочисленные другие книги). Дистервег, как и Е. Генчель («Учебник новой народной арифметики», Lehrbuch des neuen Volksrechnens, Лейпциг, 1842), придавал особенно большое значение вычислениям в уме. А. Грубе (Schulblatt für die Provinz Brandenburg 1840; Leitfaden, Берлин, 1842), со своим принципом всестороннего изучения числа, более тонко разработал методику, основывавшуюся на идеях Гербарта.

Большого развития достигла коммерческая арифметика (контокоррент, процентные вычисления, сложные проценты), составляющая основу современной банковых расчетов. Знак $^0/_0$, до тех пор встречавшийся лишь в редких случаях, стал общепринятым, причем в этом знаке горизонтальная черта была заменена косой, отчего, правда, утратилось воспоминание о его происхождении из cto (= cento); тем самым стало возможным создать знак 0/00.

§ 3. Буквенное исчисление. Комплексные величины

Буквенное исчисление развивалось настолько постепенно, что никто не задумывался над тем, что оно нуждается в обосновании. Даже правило знаков и другие подобные положения, которым в обыкновенной числовой арифметике нет ничего соответствующего, были выделены только индуктивно. Если не считать единичных попыток (см. стр. 19—20), то размышлять над обоснованием алгебры стали только в начале XIX столетия. Так, в 1815 Сервуа ввел выражения «коммутативный» и «дистрибутивный», к которым позже Гамильтон добавил выражение «ассоциативный». Но только Дункан Ф. Грегори — внук одного племянника Дж. Грегори (XVII в.) — правильно осветил законы, к которым относятся эти наименования (1838). Дункан Грегори принадлежал к группе британцев, стремившейся в те времена основать «символическую алгебру». Первым из этих людей был Джордж Пикок. В 1830 он издал маленький «Трактат по алгебре» (Treatise on Algebra), который вновь вышел в Кембридже в 1842/45, разросшись до двух томов. Пикок уже высказал в несколько несовершенной форме «принцип перманентности», установленный Г. Ганкелем в 1867.

Работы Пикока были продолжены и распространены Августом де-Морганом, который был столь же остроумным логиком, как и математиком. Основными здесь являются преимущественно его работы по основаниям алгебры в Transactions of Cambr. Phil. Soc. за 1841—1847, хотя он и до этого издал небольшие учебники арифметики и алгебры[1]).

Пионером в распространении идей символической алгебры на исчисление комплексных величин был ирландец У. Р. Гамильтон, знаменитый также своими открытиями в области оптики. Свои взгляды на алгебру как «науку о чистом времени», т. е. науку об одном лишь порядке следования, и свою теорию комплексных чисел, как пар вещественных чисел, он изложил в Trans. Irisch Ac. (1837). Морган развил далее эту мысль в книге «Тригонометрия и двойная алгебра» (Trigonometry and double algebra, Лондон, 1849). Благодаря этим работам комплексные величины были строго введены не только геометрически (стр. 24), но и алгебраически. Коши в 1847 совершил то же самое по-другому — при помощи своей теории алгебраически эквивалентных функций.

Самые вычисления с комплексными величинами доставляли еще много хлопот в случаях произвольных степеней и логарифмов, вследствие бесконечнозначности этих операций в комплексной области. Хотя Эйлер в 1749 (1751) установил здесь правильные принципы, но еще Даламбер в 1761 (и позднее) поддерживал ошибочную точку зрения на логарифмы отрицательных чисел, высказанную Иоганном Бернулли. Очень хорошее изложение вопроса дал Мартин Ом во втором томе «Опыта совершенно последовательной системы математики» (Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik, Нюрнберг, 1823). До того в 1821 он опубликовал в Берлине особый труд о логарифмах. Однако у него еще отсутствовало понятие «главного значения функции», которое Коши ввел уже в 1821 в «Курсе алгебраического анализа» (Cours d'analyse algébrique). Относящиеся сюда работы Дж. Уоррена и Дж. Грэвса появились в 1829 в Phil. Transactions. Грэвс исследовал еще этот вопрос и в дальнейшем.

Работы Грэвса, который потом занялся изучением права, натолкнули Гамильтона на открытие кватернионов, первого систематического обобщения комплексных чисел, которое уже пытались найти почти все упомянутые исследователи этой области. Центральная идея возникла у Гамильтона в октябре 1843, а в следующем месяце он сделал сообщение в Ирландской Академии. В последующие годы в Philos. Magazine появились частные исследования с многочисленными геометрическими приложениями. Резюмирующие «Лекции о

---

[1]) Оригинальный и глубокий анализ основных арифметических действий дал Н. И. Лобачевский в труде «Алгебра или вычисление конечных» (Казань, 1834). — *Прим. ред.*

кватернионах» (Lectures on quaternions), объемом в 728 страниц, вышли только в 1853 в Дублине, родине Гамильтона. Вскоре Грэвс, А. Кэли и Киркман предложили новое обобщение, введя «октавы». Однако выяснилось, что далее следовать прямо по этому пути невозможно.

Между тем Герман Грассман, исключительно разносторонний учитель гимназии, опубликовал в 1844 в Лейпциге свое важное, но трудное и оставшееся почти незамеченным сочинение «Учение о линейной протяженности» (Die lineale Ausdehnungslehre). Оно содержало в чисто геометрической форме исчисление систем чисел весьма общего характера, так называемых «экстенсивных величин», состоящих из n единиц. Второе издание этого сочинения (Берлин, 1862), существенно переделанное и поставленное на более строгую основу, также осталось малоизвестным. Подобные же системы чисел представляют собой «алгебраические ключи» Коши («Упражнения по анализу», Exercices d'analyse etc., 4, Париж, 1847).

С геометрической точки зрения многие из упомянутых работ о комплексных числах, начиная с Весселя (см. стр. 24), представляли собой зачатки векторного исчисления, которое приобрело большое значение только в новейшее время (слово «вектор» ввел Гамильтон в 1846). Дж. Беллавитис создал чисто геометрический «метод эквиполленций» (Ann. delle sc. Lomb. — Ven., 1835/37). В том же направлении работали Барре де-Сен-Венан (1845/53) и Мэттью О'Брайен (1847/52). В «Барицентрическом исчислении» (Der barycentrische Calcul, Лейпциг, 1827) А. Ф. Мёбиуса, как ранее у Чева (ср. стр. 355), основным элементом являлась точка. Наиболее общая концепция была развита Грассманом.

§ 4. Комбинаторика. Определители

К 1800 г. школа комбинаториков (см. стр. 92) находилась еще в полном расцвете. Доказательством этого служат сборник статей, который издал в указанном году сам Гинденбург, и различные учебники — эльзаса Крампа (на французском языке, Кельн, 1808), где был введен знак $n!$, Л. Фишера и К. Краузе (Дрезден, 1812), затем Л. Эттингера (Фрейбург, 1827) и венского профессора А. Эттингсхаузена (Вена, 1826), впервые употребившего обозначение $\binom{m}{n}$[1]. Жергонн, который состоял в контакте с Крампом, также добился некоторых результатов в своих Annales (1811/12 и дальше), особенно в учении об инверсиях. Подробнее занялся (J. Éc. pol., 1815) вопросом о транспозиции элементов опреде-

[1]) В «Лекциях по высшей математике» (Vorles. über höhere Mathematik, I, 1827). Вместо этого обозначения у Эйлера мимоходом встречались $\left[\frac{m}{n}\right]$ и $\left(\frac{m}{n}\right)$.

лителя Коши, который ввел при этом известный определитель, равный произведению некоторых разностей и по существу восходящий к Вандермонду (см. стр. 54). В том же направлении (1838) работали М. Штерн, О. Терквем и др. В некоторых исследованиях с заданным произведением элементов участвовал Мёбиус (1832). Из частностей следует упомянуть комбинаторную задачу о 15 школьницах Киркмана (1847), потому что она была связана с более общей проблемой триад (Я. Штейнер, 1853). Отметим также теорему Ферма о том, что каждое целое положительное число может быть представлено суммой n n-угольных чисел, которую в общем виде доказал впервые Коши (Mém. Inst., Paris, 1813/15; для $n=3$ ее доказал Гаусс в 1801, а для $n=4$ — Лагранж в 1770, Эйлер в 1777, Гаусс в 1801). Хорошие работы по комбинаторике дали в течение нашего периода еще Г. Шерк (1825/28) и Гессель (1844).

Благодаря тому значению, которое постепенно получила теория определителей, деятельность комбинаториков приобрела общую цель. Новый импульс дало общее рассмотрение результантов, которое начал Бине (J. Éc. pol., 1813) и с большой полнотой провел затем Коши (независимо, там же, 1815). Коши нашел уже все главные свойства определителей, в частности, теорему умножения, причем он исходил из понятия знакопеременной функции (Риш де-Прони, J. Éc. pol., 1795/96). Коши употреблял и термин «детерминант», хотя еще не всегда. Это слово, которое впервые было введено Гауссом в «Арифметических исследованиях» (1801) для обозначения дискриминанта квадратичной формы, окончательно приобрело свое теперешнее значение в ряде фундаментальных работ по теории определителей Карла Густава Якоби в Journal f. Math., 1841. В Англии изучение этой отрасли математики было тогда же начато Артуром Кэли (с 1844), который ввел понятие косых и косо-симметрических определителей. Употребительная теперь квадратная схема с вертикальными чертами тоже исходила от него (двойные индексы — от Якоби). Но главная деятельность этого необыкновенно плодовитого математика и его соотечественника Дж. Сильвестра (с 1839) протекала уже во второй половине XIX столетия. Англичанин У. Споттисвуд написал уже небольшое введение в теорию определителей (Лондон, 1851). Но первым настоящим курсом этой дисциплины следует считать «Теорию определителей» (Teorica dei determinanti, Павия, 1854) Ф. Бриоски, за которой в Германии вскоре последовал употребительный и ныне учебник Рих. Бальцера (Лейпциг, 1857). Понятие определителя и основные теоремы содержались в «Учении о протяженности» Грассмана (см. стр. 370).

Приведем следующие подробности. Уже Бине и Коши распространили теорему умножения на матрицы, а Якоби указал, что если число строк m больше числа столбцов n, то произведение двух таких матриц (по строкам) равно нулю. Однако символическое исчисление матриц создал лишь Кэли (Phil. Trans., 1858), причем он вместе с тем указал на связь с кватернионами. Общее доказательство того, что взаимный определитель определителя n-го порядка равен $(n-1)$-й степени данного, дал Коши после того, как случай $n=3$ встретился уже у Лагранжа (1773) и у Гаусса (1801). Окаймленные определители рассматривал Сильвестр (1851). В Phil. Trans., 1842 и позднее он опубликовал свой так называемый «диалитический метод» исключения неизвестных. Якоби в одной из работ 1841 установил все основные теоремы о функциональных определителях, которые и в настоящее время носят его имя. Грассман изучал их методами своего учения о протяженности. Гоэне Вронский в своем полемическом сочинении против теории функций Лагранжа (Париж, 1812) привел носящий теперь его имя определитель, получивший весьма большое значение в анализе. Кенигсбержец О. Гессе ввел определитель, составленный из вторых частных производных функций, который также носит его имя (Journ. f. Math., 1844).

Алгебраическая теория форм и их инвариантов принадлежит ко второй половине XIX столетия (Сильвестр с 1851/52; потом, в особенности, Кэли). Но почву для нее уже подготовила теория определителей. В частности, одна работа О. Гессе (1844) о проблеме исключения содержала явные элементы метода инвариантов.

Добавим здесь еще, что ортогональное преобразование общей квадратичной формы в сумму квадратов было глубоко изучено Коши (Exerc. de math., 4, Париж, 1829) и Якоби (Journ. f. Math., 1834). Закон инерции вещественных квадратичных форм рассматривал Гаусс в своих лекциях о методе наименьших квадратов (1846/47), по которым с ним и ознакомился Б. Риман. Якоби нашел этот закон самостоятельно в 1847. Однако первым опубликовал его Сильвестр (Phil. Mag., 1852).

§ 5. Теория вероятностей

С комбинаторикой всегда чрезвычайно тесно соприкасалось исчисление вероятностей. Еще в XIX столетии об этом свидетельствовало «Исчисление вероятностей» (Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Берлин, 1852) Эттингера, который опубликовал работы на эту тему уже в 1837 в известиях Баварской Академии. Однако высшие отделы теории вероятностей, особенно в работах Лагранжа и Лапласа (ср. стр. 97), переросли рамки комбинаторики. Лаплас построил свои обширные исследования по теории вероятностей, главным образом, на уравнениях с конечными разностями, как обыкновенными, так преимущественно и частными. Эти исследования были изложены в сочинении «Аналитическая теория вероятностей» (Théorie analytique des probabilités, Париж, 1814, 3-е изд., 1820), резюмировавшем также работы его предшественников (правда, мало оцененные). Во втором (1814) и третьем изданиях Лаплас предпослал этому сочинению «Философский опыт о вероятностях» (Essai philosophique sur les probabilités). Книга Лапласа содержала мастерское изложение проблем распределения вероятностей, теорем Бернулли, Бейеса и Бюффона (см. стр. 95, 99—100), но в ней имелись и неясные места, написанные наспех.

В это же время Лакруа (Париж, 1816; 4-е изд., 1833) написал более простой учебник. «Нравственным ожиданием» обстоятельно и успешно занимался Пуассон в «Исследованиях о вероятности судебных решений» (Recherches sur la probabilité des jugements, Париж, 1837)[1]). Пуассон и А. де-Морган исследовали основания правила Бейеса (де-Морган в заслуживающей внимания статье в одной энциклопедии, 1845). Сочинение Лапласа охватывало все приложения теории вероятностей, особенно к вопросам статистики. Пуассон попытался и здесь внести существенные усовершенствования. Между прочим, он нашел парадокс Ж. Бьенеме (1839), чьи идеи дальше развил А. Курно в «Изложении теории случая и вероятностей» (Exposé de la théorie des chances et des probabilités, Париж, 1843). Основателем современной статистики явился бельгийский астроном А. Кетле (с 1833), написавший обширные «Письма о теории вероятностей» (Lettres sur la théorie des probabilités, Брюссель, 1846). Важные работы по смертности дали англичане Гомперц (1825) и Вульхауз (1839; Tables, Лондон, 1843), а также француз Ж. Фурье (по данным о Париже, 1821) и др. В России П. Л. Чебышев опубликовал «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» (Москва, 1845)[2]).

Уже Котес применил исчисление вероятностей к выравниванию наблюденных величин (1722; см. стр. 97), причем он придавал отдельным наблюдениям «веса». Метод наименьших квадратов впервые ввел без обоснования Лежандр в одной работе по определению орбит комет (Париж, 1805); ему же принадлежал и сам термин.

Гаусс пользовался этим методом еще в 1795, но опубликовал его лишь в «Теории движения небесных тел» (Theoria motus corporum coelestium, Гамбург, 1809), где вывел его, пользуясь исчислением вероятностей. При этом он установил носящий его имя закон ошибок, в основу которого положил известное предложение о средней арифметической. Другой вывод Гаусс дал в трех

---

[1]) О «нравственном ожидании» см. примечание на стр. 98. — *Прим. ред.*

[2]) В Journ. f. Math., 1846 Чебышев дал новое доказательство закона больших чисел Пуассона, обобщающего известный закон Я. Бернулли (Пуассон опубликовал свою теорему в упомянутых «Исследованиях о вероятности судебных решений»). Однако основоположные работы Чебышева по теории вероятностей лежат за пределами рассматриваемого времени. — *Прим. ред.*

статьях (1821, 1823, 1826) в Commentationes Gotting. Похожим на второй вывод Гаусса, но только менее совершенным, было доказательство Лапласа, опубликованное в его «Аналитической теории вероятностей» (1812), а затем дополненное и исправленное Пуассоном (1837) и другими. Проверку закона ошибок Гаусса в большем масштабе предпринял впервые астроном Бессель (1818, 1838). Этим вопросом занимались также многочисленные представители прикладной математики (И. Энке, 1831/34/36, 1853; О. Браве, 1846). Гаген изложил этот метод в «Основаниях исчисления вероятностей» (Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Берлин, 1837). Первый специальный учебник по выравниванию наблюдений написал Герлинг (Гамбург и Гота, 1843) для геодезических надобностей.

§ 6. Теория чисел

Прежде чем обратиться к алгебре, мы рассмотрим успехи теории чисел. Прежде всего отметим относящийся к началу рассматриваемого нами периода фундаментальный труд 24-летнего Гаусса «Арифметические исследования» (1801). Основанный исключительно на собственных исследованиях Гаусса, этот труд в своих первых разделах содержал, конечно, и результаты предшественников. Но методы и в этих разделах явились по большей части новыми и весьма важными для дальнейшего развития теории чисел. Так, Гаусс создал понятие сравнения и прежде всего исследовал сравнения первой и второй степени. С последними связаны были теория квадратичных вычетов и относящийся к ней закон взаимности (см. стр. 79), который Гаусс не только открыл самостоятельно, но и снабдил двумя строгими доказательствами. Позднее он предложил еще пять различных доказательств. Закон взаимности явился также центральным в книге «Опыт теории чисел» (1797/98, см. стр. 83) Лежандра, появившейся уже во время печатания работы Гаусса. Однако доказательство Лежандра не было безупречно.

Гаусс, далее, ввел в теорию чисел понятие индекса, при помощи которого решил двучленное сравнение $x^n \equiv A (\mathrm{mod}\ p)$. Он дал и прямой метод его решения. Совершенно заново создал Гаусс арифметическую теорию форм, в которой подробно занялся бинарными квадратичными формами. Эта теория позволила создать также новый метод решения уравнения Ферма $ax^2 + 1 = y^2$. Для тернарных квадратичных форм Гаусс рассмотрел только предварительным образом основные проблемы. Основываясь на своих новых методах, он смог полностью разработать теорию периодических десятичных дробей (см. стр. 367).

Быть может, самой поразительной в труде Гаусса была изложенная в последнем разделе совершенно новая теория деления круга. Уже 30 марта 1796 он занес в свой дневник заметку об открытии возможности элементарного построения правильного семнадцатиугольника. В «Исследованиях» он доказал, что уравнение деления круга $x^n-1=0$ после исключения корня $x=1$ сводится к квадратным уравнениям только для $n=2^{2^r}+1$ (n — простое число). Из этого следовало, что кроме деления на три и пять частей можно элементарно выполнить еще и деления на 17, 257, 65 537 частей. Впервые практически провел вычисление для $n=17$ Лежандр (в позднейших изданиях своих «Начал геометрии»); первое геометрическое построение выполнил согласно Гауссу фон-Пфлейдерер (1802).

Впоследствии Гаусс еще раз обратился к теории чисел в двух чрезвычайно важных больших работах о биквадратичных вычетах (Commentationes Gotting., 1828, 1832), из которых последняя содержала соответствующий закон взаимности. Будучи вынужден ввести здесь комплексные множители, он изложил свою геометрическую теорию комплексных чисел (см. стр. 24). В этих работах Гаусса таились зачатки теории числовых полей, которая развилась во второй половине XIX столетия из исследований Лежен-Дирихле (J. f. Mathem., 1841 и следующие) и Куммера (там же, 1844 и следующие). Между прочим, в наследии Гаусса (умер в 1855) нашлась полная теория сравнений высших степеней, частные случаи которых рассматривали прежде Коши (Exercices math. 4, Париж, 1829), Э. Галуа (опубликовано в 1830, 1846) и др. Следует еще упомянуть об определении числа классов квадратичных форм, которое Дирихле (конечно, не имея понятия о записках Гаусса) провел позднее точно таким же методом.

В 1816 и 1825 появились дополнения ко второму изданию «Опыта» Лежандра (1808). Все вместе вышло в свет третьим изданием в 1830 в двух больших томах in 4°, под названием «Теория чисел». В ясном и элементарном изложении здесь объединялись как собственные исследования автора, так и то, что было прежде сделано в различных областях теории чисел другими учеными. Открытия Гаусса были тоже отчасти учтены. В частности, Лежандр обстоятельно занялся уравнениями деления круга и усовершенствовал форму закона взаимности, введя очень удобное обозначение.

Одним из первых последователей Гаусса в теории чисел был Якоби. Вслед за опубликованием Гауссом его теоремы о биквадратичном законе взаимности Якоби нашел аналогичный закон для кубических вычетов (J. f. Mathem., 1839). Там же он опубликовал (1834) сочинение о кватернарных формах, теорию которых разрабатывал также Лиувилль (J. f. Mathem., 1845). Созданная Якоби теория эллиптических функций (1829; см. стр. 395) привела его к различным теоремам о представлении чисел в виде суммы квадратов (ср. Journ. f. Mathem., 1835, 1840).

И Коши внес свою лепту в теорию чисел. Он первый изучил общее неопределенное тернарное кубическое уравнение (Exercices math., 1, Париж, 1816) и дал теоремы о неопределенных тернарных квадратных уравнениях и о сравнениях с одинаковым модулем и общим решением. Когда Дирихле (J. f. Mathem., 1837) дал оценку для так называемых гауссовых сумм при помощи определенных интегралов, Коши смог показать (J. f. Mathem., 1840), что этот результат вытекает при переходе к пределу из одной формулы, установленной им уже в 1817. Затем Якоби открыл связь с эллиптическими функциями. Рядами, установленными Дж. Фареем в 1816 (Phil. mag.), Коши также занимался в этом же году.

Весьма важные дополнения, особенно в учении о тернарных квадратичных и бинарных кубических формах, внес Ф. Эйзенштейн (с 1844). При изучении последних он натолкнулся на первые коварианты. Из множества недостававших доказательств некоторые были восполнены позднее Смитом (Оксфорд). К концу рассматриваемого нами периода (1850/1851) теорией тернарных квадратичных форм стал заниматься Эрмит.

Однако глубже всех с «Исследованиями» Гаусса, без сомнения, ознакомился Дирихле, всегда носивший при себе совершенно истрепанный экземпляр этого сочинения. Дирихле был также преемником Гаусса по кафедре в Геттингене (1855). Свои необыкновенно многочисленные работы по теории чисел он начал с 1825 в Journ. f. Math. Там же (1828) он доказал справедливость большой теоремы Ферма (см. стр. 71) для $n \leqslant 5$. Работы Дирихле по названным его именем рядам, столь важным теперь в аналитической теории чисел, начались в 1838. Уже в 1837 он доказал, что всякая арифметическая прогрессия при некоторых условиях содержит бесконечное множество простых чисел. К этому он добавил в 1840, что каждая собственно примитивная квадратичная форма тоже содержит бесконечное множество простых чисел и что бесконечное множество из них может быть представлено линейной примитивной формой. «Лекции по теории чисел» (Vorlesungen über Zahlentheorie) Дирихле, являвшиеся результатом работы всей его жизни, были изданы только после его смерти (1859)' Дедекиндом (Брауншвейг, 1863).

Весьма выдающимся исследователем в теории чисел был также Э. Куммер. Уже Эйзенштейн рассматривал комплексные числа вида $a+b\rho$, где $\rho^3=1$. Обобщив эти идеи, Куммер ввел еще более общие комплексные числа, имеющие компонентами корни уравнения $x^n=1$ (с 1844). Разработка теории этих чисел привела его к введению «идеалов», и с помощью этого понятия ему удалось доказать большую теорему Ферма для $n \leqslant 100$ (Journ. f. Math., 1850). Некоторые сохранившиеся еще пробелы он восполнил в 1857 (Ak. Berl.). Куммер, не претендуя на то, получил за эту работу премию Парижской Академии. Уже в 1843 он предложил Дирихле мнимо полное доказательство теоремы Ферма.

Ранее того для $n=7$ теорема была доказана Ламе (C. R., 1839) и Лебегом (J. math., 1840). Согласно сообщению Лежандра (1823) София Жермен при некоторых условиях, ограничивающих x, y, z и n, дала доказательство для $n<100$, а Лежандр при тех же условиях довел его до $n<197$. Частные результаты нашел также Коши (C. R., 1847).

В изучении так называемого закона распределения простых чисел уверенными шагами и по строгому пути, а не по пути догадок, пошел Чебышев (Mém. St.-Pét., 1851, прочт. 1848 и J. math., 1852)[1]), который, кроме того, написал руководство «Теория сравнений» (СПб., 1849). После Чебышева с чрезвычайно плодотворной работой о распределении простых чисел выступил Б. Риман (Ak. Berl., 1859).

Лиувилль, который и прежде сделал ряд разнообразных открытий в теории чисел, получил новые результаты в двух направлениях. Он доказал в 1840 в своем журнале, что ни e, ни e^2 не могут быть квадратичными иррациональностями, а в работах 1844 и 1851 первый твердо установил существование трансцендентных иррациональных чисел.

Сюда же, хотя бы отчасти, относится более подробное исследование Лебегом (J. math., 1840) и Галуа (опубл. там же, 1846) связи между двумя периодическими непрерывными дробями, выражающими, как это нашли уже Эйлер и Лагранж, корни квадратного уравнения (см. стр. 67—68)[2]).

§ 7. Числовые уравнения

Числовым решением уравнений высших степеней в рассматриваемом нами периоде уже с ранней юности занимался Ж. Фурье. Носящую его имя теорему о числе действительных корней между двумя данными пределами он излагал своим ученикам в Политехнической школе уже с 1796 (опубликовано в 1820). Интересующему нас сейчас предмету была посвящена часть вышедшего вскоре после смерти Фурье «Анализа определенных уравнений» (Париж, 1831). Фурье не знал, что в существенных пунктах его уже опередил Мурайль (1768, см. стр. 63). Напротив, считать подлинным предшественником Фурье врача Ф. Бюдана, по имени которого часто называется теорема, нельзя, так как Бюдан начал разрабатывать свою сходную, но менее совершенную теорию только с 1807 (опубликовано в 1822). Теорему Фурье затмила более общая теорема, опубликованная женевцем Ж. Ш. Штурмом в Bull.

---

[1]) Подробнее об этих двух работах Чебышева см. в книге Б. Н. Делоне, указанной в списке литературы. — *Прим. ред.*

[2]) О работах по теории чисел русского математика В. Я. Буняковского см. статью И. Г. Мельникова, указанную в списке литературы. — *Прим. ред.*

mathém., 1829. Доказательство сам Штурм представил только в одной премированной работе 1835. Коши распространил теорему Штурма на комплексные корни (1831). Дополнения к ней дал также Сильвестр (1839 и позже).

П. Руффини (см. стр. 57) в одной также премированной работе (Модена, 1804), которая, однако, была совсем забыта, дал способ приближенного решения уравнений любой степени. Руффини опубликовал еще одну специальную работу о решении общих алгебраических уравнений (там же, 1813) и 2-томный труд «Алгебра и ее приложения» (Algebra e suo appendice, там же, 1807/08). Больше посчастливилось с этим же самым методом (который, кстати, был известен китайцам XIII столетия) англичанину Горнеру (впервые опубликовано в Phil. Trans., 1819). Со способом Горнера был родствен прием его соотечественника Т. Уеддла, особенно подходящий для уравнений высших степеней, в которых отсутствуют несколько членов (отдельное сочинение, Ньюкасл, 1842).

Премию по этой же теме получил также (Берлин, 1857; издано в Цюрихе 1837, дополнение в 1839) швейцарец К. Греффе, предложивший очень своеобразный способ, но и у Греффе имелись предшественники. Основная идея содержалась уже в «Аналитических этюдах» (1762) Варинга (см. стр. 50). Довольно сходно с Греффе разработал свой метод бельгиец Ж. Данделен (1826), что, однако, было совсем забыто[1]). Греффе одновременно находит все действительные и мнимые корни, без предварительного определения их числа и расположения. Некоторые особые случаи рассмотрел астроном Энке (1841).

В упомянутой работе Данделен обратил особенное внимание на решение трехчленных уравнений, теорию которых развили потом Гаусс (1840/1843) и Дж. Беллавитис (1846). Оба последних применили здесь логарифмы сумм, открытых впервые Ц. Леонелли (Supplém. logar., Бордо, 1802/03, ср. стр. 21). Гаусс уже в 1812 (Monatliche Korrespondenz) издал пятизначные таблицы этих логарифмов, определенно указав их творца. Поэтому называть логарифмы сумм гауссовыми нет никакого основания.

§ 8. Общая теория уравнений и групп

Современная теория уравнений ведет свое происхождение от восходящей к Вандермонду и особенно к Лагранжу (около 1770; см. стр. 53) идеи составлять уравнения для таких функций корней первоначального уравнения, которые при любой перестановке корней имеют определенное число значений. Для $n \leqslant 4$ получалась,

---

[1]) Независимо от Данделена и ранее Греффе тот же прием числового решения алгебраических уравнений предложил в «Алгебре или вычислении конечных» Н. И. Лобачевский (1834). — *Прим. ред.*

таким образом, резольвента низшей степени. Лагранж уже применил при этом носящую его имя теорему о том, что, как мы говорим, порядок подгруппы есть делитель порядка группы. Доказательство ее дал только П. Аббати в одной специальной работе (Модена, 1804).

Работа над уравнениями выше четвертой степени усиленно продолжалась. Преобразование уравнения пятой степени к трехчленной форме, данное в свое время Брингом (1786; см. стр. 41), осталось неизвестным. То же самое при помощи преобразования Чирнгауза получил Дж. Джеррард («Математические исследования», Mathematical Researches, Бристоль — Лондон, 1834) с целью приблизиться таким образом к алгебраическому решению общего уравнения пятой степени, которое он еще надеялся найти. Между тем молодой норвежец Н. Г. Абель в 1826 г. (Crelle's J.) окончательно доказал невозможность решения этой задачи[1]. О не вполне удачных попытках Руффини (также в книге от 1813) мы говорили выше (стр. 57). Но работы Руффини уже подготовляли алгебраическую теорию групп. Метод Джеррарда был впоследствии подробнее исследован Гамильтоном (1836) и Дж. Сильвестром. Последний представил левую часть уравнения еще и в виде суммы трех пятых степеней. Более позднее изложение доказательства невозможности решения, данное П. Вантцелем, репетитором в Политехнической школе в Париже (1845), было сходно во второй части с тогда еще неизвестным способом Руффини. Вантцель впервые строго доказал (J. mathém., 1837), что осуществить трисекцию угла элементарными средствами невозможно, а также что нельзя алгебраическим путем обойти неприводимый случай кубического уравнения (ср. стр. 48).

Абель нашел (J. f. math., 1829) еще более глубокие теоремы, например, что неприводимое уравнение простой степени всегда разрешимо в радикалах, если для всякой пары корней один выражается рационально через другой. Однако это — не необходимое условие. Абелевыми называются уравнения, все корни которых можно рационально выразить через один из них; такие уравнения решаются в радикалах.

Подлинным основоположником теоретико-группового метода исследования уравнений явился Э. Галуа, который в возрасте 21 года после краткой и бурно проведенной молодости пал в 1832 на дуэли из-за любовной истории[2]. Отчетливо сознавая значение своих открытий, он написал в последнюю ночь своей жизни письмо одному другу, в котором изложил свое научное завещание. Его беспорядочные рукописи выходили в свет лишь

---

[1] Неполное доказательство Абель дал в 1824.

[2] Галуа был участником революционного движения во Франции, и дуэль, на которой он погиб, была спровоцирована полицией. — *Прим. ред.*

постепенно (J. math., 1846). Галуа ввел термин «группа» уже в 1830 в Bulletin mathématique. Он указал для каждого уравнения группу подстановок, по которой можно узнать наиболее существенные свойства уравнения. Он различал простые и составные группы и ввел класс конечных групп, названных впоследствии «конгруэнцгруппами». Он также сделал существенный вклад в теорию так называемых модулярных уравнений. Впервые связно изложил его теорию Э. Бетти (Ann. mat., 1852).

Основателем теории конечных групп можно считать Коши. Понятие конечной группы он с исчерпывающей ясностью ввел уже в J. École polyt., 1815, где, кроме того, применил многие и до сих пор употребляемые термины, как, например, «транзитивный», «транспозиция» и т. д. Группу он еще называл «системой сопряженных подстановок» (Système de substitutions conjuguées). Коши привел в систему начальные теоретико-групповые идеи своих предшественников. Его дальнейшие работы по теории групп были опубликованы в Exercices d'analyse, 3, Турин, 1844 и в Compt. rend., 1845/46. В 1844 он доказал выдвинутую без доказательства уже Галуа теорему, так называемую теорему Коши, о том, что каждая группа, порядок которой делится на простое число p, содержит по крайней мере одну подгруппу порядка p. Коши сделал также первые шаги в переходе от групп подстановок к абстрактным группам. К теории групп можно подойти, отправляясь и от теории чисел. Зачатки подобных идей содержались в работах Эйлера о степенных вычетах (см. стр. 79) и в ранних, своевременно не опубликованных, заметках Гаусса (рукописи 1801).

Теорией симметрических функций корней алгебраического уравнения в рассматриваемом нами периоде занимались Гаусс (Comm. Gott., 1816) и Коши (Exerc. math., 1, 1826; 4, 1829). Мейер Гирш, как раньше Вандермонд (1771; см. стр. 54), дал их таблицу в своем «Задачнике» (Aufgabensammlung, Берлин, 1809). Особый случай представляли собой функции, названные Вронским алеф-функциями, которые изучал также Якоби (J. f. Math., 1841).

Кэли в J. math., 1846 выразил дискриминант целой алгебраической функции через суммы степеней корней.

Жергонн (J. math., 1813/14), дополнив работу Лапласа от 1772 (ср. стр. 54), разработал далее теорию линейных уравнений со многими неизвестными. Общим случаем этого рода занимались также Якоби (J. f. Math., 1841), Коши («Курс алгебраического анализа», Париж, 1821) и Грассман («Учение о протяженности, 1844). В другой работе (J. f. Mathem., 1835) Якоби выразил решения при помощи определенных интегралов, а Коши (C. R., 1847) — при помощи корней из единицы.

Работы по исключению переменных в ряде пунктов отправлялись от исследований Эйлера («Введение в анализ», 1748) и Безу (Mém. Ac. Paris, 1764; см. стр. 50). Так, например, Якоби (1836) углубил метод Эйлера — Безу; Коши (1847) распространил его на случай нескольких переменных. Диалитический метод Сильвестра (1840, см. стр. 372) в основном восходил к приему Ферма (около 1640, см. стр. 38). К нему же пришел Гессе (Crelle's J., 1844). Последний в том же томе Crelle's J. распространил метод Эйлера на три уравнения с двумя неизвестными. Миндинг (1841) применил ньютоновские разложения в ряды к составлению правила, по которому в случае двух неизвестных всегда можно определить степень результанта. Г. Лабати написал специальную книгу (Париж, 1832; 2-е изд., 1835) о новом методе исключения при помощи общего наибольшего делителя. Очень оригинален был метод Пуассона (J. École polyt., 1801/02) — составлять из двух уравнений с двумя неизвестными результант, который дает сразу обе неизвестные. Лиувилль в своем журнале (1847) систематически применял этот способ и распространил его на случай многих неизвестных. Основная идея этого приема встречалась, впрочем, уже у Варинга («Аналитические этюды», 1762; см. стр. 51). Для распространения парадокса Эйлера — Крамера (см. стр. 279) на несколько переменных Якоби в своей работе о функциональных определителях (1841; см. стр. 371) обобщил одну теорему «Оснований интегрального исчисления» Эйлера (1769), которую затем в самом общем виде сформулировал Бетти (1858). Другая формулировка ее исходила от Лиувилля (1841).

Гаусс (Abh. Gott. Ges., 1849) расширил свое первое доказательство основной теоремы алгебры (1799; см. стр. 42), одновременно доказав существование всех корней. Оба эти доказательства использовали геометрические понятия. Иначе обстояло дело во втором, чисто арифметическом доказательстве Гаусса [Comm. Gott., 1814/15 (1816)]. Третье доказательство Гаусса (там же) опиралось на свойства интегралов. По принципу второго доказательства был построен и вывод, предложенный Штаудтом (1845). Другие доказательства дали Арган («Опыт», 1806; см. стр. 24), Лежандр («Опыт», 2-е изд., 1808; см. стр. 83) и — не совсем безупречным образом — Коши (J. École polyt., 1820). Но Коши предложил еще одно доказательство (литографировано в 1831, опубликовано в J. Éc. polyt., 1837), основанное на совершенно иных идеях.

Эйзенштейну мы обязаны важной теоремой о неприводимости целой алгебраической функции (Crelle J., 1850); эта теорема также вытекала из одной теоремы о сравнениях Т. Шенемана (1846). Шенеман, Эйзенштейн и Серре (J. math., 1850), главные работы которого появились лишь после 1850, занимались также вопросом о приводимости уравнения деления круга (см. стр. 374).

ГЛАВА ВТОРАЯ

ВЫСШИЙ АНАЛИЗ

§ 1. Дифференциальное и интегральное исчисление. Ряды

В исчислении бесконечно малых стремительное движение вперед XVIII столетия в рассматриваемом нами периоде сменилось размышлениями над основами этой науки. Разработка этих основ ни по объему, ни по содержанию не опиралась на работы XVIII столетия. Изобретательность Гаусса была такова, как лишь у немногих его предшественников, и все же каждая из его многочисленных работ представляет собой образец изящества и строгости. Еще более широким было здесь влияние Коши, как автора целого ряда систематических изложений. С Коши началась так называемая арифметизация анализа. Особенно следует отметить его «Курс алгебраического анализа» (1821). В этом курсе он впервые предложил строгую теорию элементарных функций, которую в Германии первым воспринял О. Шлёмильх («Алгебраический анализ», Algebraische Analysis, Иена, 1845 и позднее). Дифференциальное исчисление Коши построил на понятии предела, которому отдавал предпочтение Даламбер (стр. 156). В интегральном исчислении Коши снова ввел для определенного интеграла от непрерывной на данном отрезке функции восходящее к Лейбницу определение с помощью суммы (J. École polyt., 1823), которое в работах И. Бернулли и Эйлера отошло совсем на задний план. Лишь в последнее время обратили внимание на третьего тонкого мыслителя — Б. Больцано — профессора философии религии в Праге, идеи которого, будь они своевременно оценены, могли бы ускорить поступательное движение математики. Уже в середине второго десятилетия XIX столетия Больцано не только имел ясные представления о сходимости рядов, но даже дал пример непрерывной, нигде не дифференцируемой функции, недавно найденной в его наследии. Своими «Парадоксами бесконечного» (Paradoxien des Unendlichen, опубликовано посмертно, Прага, 1850) он воздвиг себе памятник. В этой работе он явился предшественником Г. Кантора — творца теории множеств.

Из частностей следует упомянуть теорему Коши (C. R., 1846 мельком у Клеро, 1743; ср. стр. 167) о независимости криволинейного интеграла между двумя данными точками A и B от пути интегрирования, теорему Грина (случайно встречается в 1813 г. у Гаусса) из его работы о приложении анализа к теории электричества и магнетизма (An Essay on the application of mathematical analysis и т. д., Ноттингем, 1828), которая позволяет выразить интеграл по объему через интеграл по поверхности, и работы Гаусса о механических квадратурах (Comm. Gott., 1814/16), которые были продолжены Якоби (Journ. f. Math., 1826)[1]. Второй том «Упражнений по интегральному исчислению» (Exercices de calcul integral, Париж, 1814) Лежандра содержал много теорем об определенных интегралах. Там было введено современное обозначение гамма-функции (см. стр. 142). Этой функцией занимались, в частности, Гаусс, который определил ее из функционального уравнения (см. стр. 389)

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$$

(литературное наследие) и дал для нее одно важное определение в форме предела (Comm. Gott., 1813), и Коши (Exerc. d'anal., 2, Париж, 1841), который установил линейные зависимости между различными значениями $\ln\Gamma(a)$. И. Зольднер написал специальную книгу об интегральном логарифме $\mathrm{Li}(x)$ (Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, Мюнхен, 1809; ср. стр. 166). Гаусс в своей переписке с Бесселем (1810/12) преодолел трудности определения этой функции для вещественного $x>1$ при помощи комплексного пути интегрирования, которым он тогда уже свободно владел. Некоторые другие определенные интегралы вычислил Куммер (J. f. Mathem., 1837/40). Дирихле представил при помощи Г-функций несколько кратных интегралов (Berl. Abh., 1839). Обобщения дали Лиувилль (J. d. math., 1839), швейцарец И. Л. Раабе (J. f. Math., 1844) и др. Наконец, следует упомянуть разрывный множитель Дирихле (Berliner Berichte, 1834), который оказался очень полезным в теории рядов Фурье (см. стр. 385) и в теории потенциала.

Первое строгое исследование сходимости рядов произвел Гаусс в случае гипергеометрического ряда (Comm. Gott., 1812),

[1]) Известная теорема о преобразовании объемного интеграла от выражения типа дивергенции в поверхностный интеграл была высказана и доказана в «Заметке по теории тепла» (Note sur la théorie de la chaleur) М. В. Остроградского, представленной Петербургской Академии наук в 1828 и опубликованной в Mém. Acad. Pétersb., 1831. В 1834 Остроградский обобщил свою теорему на интегралы любой кратности и применил ее для вывода вариации n-кратного интеграла («Мемуар об исчислении вариаций кратных интегралов», Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples, Mém. Acad. Pétersb., 1835). — Подробнее см. статью В. И. Антроповой, указанную в списке литературы. — *Прим. ред.*

к которому с различных точек зрения подходил уже Эйлер (см., например, «Основания интегрального исчисления», т. I, СПб., 1768, 4-е приложение к т. 4, 1778; ср. стр. 387). В наследии Гаусса нашлись также две работы о сходимости рядов, в более ранней из которых (вероятно, от 1800/01) разбираются основные понятия теории множеств. Коши в своем «Курсе алгебраического анализа» (1821) рассмотрел вопрос о сходимости рядов общим образом. Он свел сходимость знакопеременных рядов к сходимости рядов, составленных из модулей их членов, установил впервые настоящие признаки сходимости и доказал теорему о том, что сумма ряда — произведения двух абсолютно сходящихся рядов равна произведению сумм обоих рядов. Эту теорему обобщил Абель (J. f. Math., 1826), в том же году подвергший в одном письме жестокой критике ходовое тогда учение о рядах. Как показало его наследие, Абель владел логарифмическими признаками. Коши продолжил свои исследования в Résumés anal. (Турин, 1833) и в Exercices d'analyse, в третьем томе которых (Турин, 1844) ввел понятие радиуса сходимости. Более тонкие критерии сходимости дал Раабе (Z. Phys. Math., 1832), а Куммер установил один весьма общий признак (J. f. Mathem., 1835). Шкалу все более тонких логарифмических признаков опубликовал впервые А. де-Морган в одном из выпусков своего «Дифференциального и интегрального исчисления» (Diff. a. Int.-Calculus, Лондон, 1839), затем, в несколько лучшей форме, О. Бонне (J. de math., 1842) и Ж. Бертран (там же)[1]).

Уже в первом издании своей «Теории аналитических функций» (1796/97) Лагранж дал точное выражение остаточного члена ряда Тейлора в виде определенного интеграла. В «Лекциях об исчислении функций» (Leçons sur le calcul des fonctions, 1801; J. Éc. pol., 1804) он применил к безупречному выводу ряда с приближенным выражением остаточного члена теорему о среднем значении, которая прежде использовалась лишь эпизодически. Ампер (J. Éc. pol., 1806) постарался внести сюда некоторые улучшения. Коши, опираясь на Ампера и на одну неизвестную работу Риш де-Прони от 1805, дал в своем «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, Париж, 1823) другие разложения, а в одном приложении привел остаточный член в форме, носящей его имя. Еще важнее, однако, что Коши впервые установил здесь точные условия сходимости ряда Тейлора к данной функции и в «Лекциях по дифференциальному исчислению» (Leçons sur le calcul différentiel, Париж, 1829) провел отчетливое различие между сходимостью этого ряда вообще и сходимостью к данной функции.

---

[1]) Новый признак сходимости ряда с положительными и убывающими членами установил в работе «Об исчезании тригонометрических строк» (Уч. зап. Казанского ун-та, 1834) Н. И. Лобачевский. — *Прим. ред.*

Вопросом о законности разложения функции двух переменных по шаровым функциям (см. стр. 152) занялся впервые Пуассон (Conn. des temps, 1831). Дирихле (1837) и Бонне (1850) сняли различные ограничения, наложенные Пуассоном. Задачу о разложении эмпирической функции по шаровым функциям решил Гаусс (1838/39). Нейманн (Astronom. Nachr., 1838) дал простой способ определения соответствующих констант. О. Родриг (1816), Дж. Айвори (1824) и Якоби (1827) независимо друг от друга представили простую шаровую функцию $P_n(z)$ в форме n-й производной. Нейманн дал важное интегральное выражение (J. f. Math., 1848) для шаровой функции второго рода (Эйлер, «Основания интегрального исчисления», 2, 1769; Abel, J. f. Mat., 1827). А. Кэли (J. de. math., 1848) распространил понятие шаровой функции на n переменных.

Из приложений математики выросли ряды Фурье, теорию которых их автор наметил уже в 1807 и 1811 (его работы получили премию на конкурсе Парижской Академии) и которые были им подробнее исследованы в «Аналитической теории тепла» (Théorie analytique de la chaleur, Париж, 1822). Доказательство сходимости, весьма нестрогое у Фурье, попытался дать Коши. Однако установить достаточные условия сходимости и показать, что при их соблюдении ряд Фурье действительно сходится к значению функции, удалось только Дирихле (Journ. f. Math., 1829 и соответственно 1837), который владел уже современным общим понятием произвольной функции во всей его общности[1]).

Понятие равномерной сходимости ввели почти одновременно Дж. Стокс (Cambr. Trans., 1848) и мюнхенец Л. Зейдель (Münch. Abh., 1848). Работы этих ученых удачно дополнили одна другую. Понселе (1835) присоединил к эйлеровой формуле элементарного преобразования ряда в лучше сходящийся («Основания дифференциального исчисления», 1755) доказательство сходимости, определив остаточный член. Еще более общую формулу дал для той же цели Куммер (1837). Якоби (1834) исследовал остаточный член так называемой эйлеровой формулы суммирования [Comm. Ac. Petr., 1732/33 (1738); см. стр. 142].

---

[1]) В упомянутой на стр. 384 статье и примыкающей к ней работе, напечатанной в Уч. зап. Казанского ун-та, 1835, Н. И. Лобачевский, используя свой признак сходимости, доказал теорему о разложимости функций в ряд Фурье при условиях, отличных от условий Дирихле. Попутно Лобачевский пришел, по существу, к так наз. принципу локализации, согласно которому сходимость и значение суммы ряда Фурье для данной функции в какой-либо точке зависят лишь от поведения функции в окрестности этой точки; несколько ранее этот принцип был установлен Остроградским в «Заметке по теории тепла» (1831), а позднее был вновь высказан Б. Риманом (1853). Заметим, что в статье 1834 Лобачевский сформулировал понятие функции с той же общностью, как это сделал Дирихле в 1837; впрочем, такое представление о функции давно уже носилось в воздухе и по существу восходит к Эйлеру. — *Прим. ред.*

Явление полусходимости ряда было замечено уже Эйлером [Comm. Ac. Petr., 1739 (1750)] в одном частном случае его формулы суммирования (см. стр. 141—142). Понятие и термин ввел Лежандр («Упражнения по интегральному исчислению», т. I, 1811). Лаплас в своем курсе теории вероятностей (см. стр. 372) показал, что и обыкновенное разложение по формуле Тейлора может привести к полусходящимся рядам. Расходящимися рядами, которые приобрели значение только к концу XIX столетия, занимался А. де-Морган (Cambr. Trans., 1844).

§ 2. Дифференциальные и функциональные уравнения

Что обыкновенные дифференциальные уравнения, вообще говоря, неразрешимы в элементарных функциях и даже в квадратурах, было разновременно обнаружено еще в XVIII столетии. Доказал это впервые Лиувилль на примере общего уравнения Риккати (1841; ср. стр. 170). В рассматриваемый нами период Коши (1836) и Якоби (1841) привели системы уравнений n-го порядка к интегрированию однородного линейного уравнения в частных производных. Якоби распространил на такие системы теорию интегрирующего множителя Эйлера (см. стр. 174). Б. Бриссон (1808) подчеркнул значение аналогии между однородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка и алгебраическим уравнением n-й степени. Коши воспринял и развил эти идеи в Exerc. de math., 2 (1827; ср. стр. 389). Для линейных систем он создал метод так называемого исчисления вычетов (1839). Коши впервые поставил теорию дифференциальных уравнений на незыблемую основу, предложив на своих лекциях в Парижской политехнической школе между 1820 и 1830 три метода, устанавливающих существование решений [опубликовано Ф. Муаньо в «Лекциях по дифференциальному и интегральному исчислению» (Leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral d'après Cauchy, Париж, 1844)] [1]).

Трудный вопрос представляла в то время теория особых решений, которая была систематически изложена Лагранжем сначала в работах 1774 (1776) и 1779 (1781) (см. стр. 176), а затем в «Лекциях об исчислении функций» (1801 и позднее). В связи с одним примером Лежандра [Mém. Par., 1790 (1797)] Пуассон дал преобразование, позволявшее выделить особое решение из уравнения (1806). Коши существенно уточнил характер исследований своим строгим анализом сходимости (опубликовано Ф. Муаньо в его «Лекциях»). Коши привел также первый пример решения, которое

---

[1]) Важное значение в построении теории линейных дифференциальных уравнений имело установление так называемой формулы Лиувилля, которую одновременно с французским математиком вывел также Остроградский (1839). — *Прим. ред.*

было одновременно и особым, и частным интегралом. Однако все еще существовало то затруднение, что задачи об определении особого решения дифференциального уравнения и об отыскании огибающей семейства кривых не совпадали. Рассмотрение этого вопроса внесло ряд поправок в теорию Лагранжа; особенно выделялись здесь работы Раабе (от 1848; опубликованы в 1854). Несколько ранее А. Курно открыл («Элементарный трактат по теории функций и исчислению бесконечно малых», Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal, Париж, 1841), что дискриминантное уравнение дифференциального уравнения может представлять собой геометрическое место точек заострения и что это даже более общий случай. Этот важный факт получил большую известность только тогда, когда его вновь открыл Морган (Cambr. Trans., 1854).

Из отдельных дифференциальных уравнений следует упомянуть уравнение функций Ламе, уравнение Бесселя и уравнение гипергеометрического ряда — все три линейные и второго порядка. Ламе (J. de math., 1837 и позднее), как и Якоби (1839), пришел при изучении одного вопроса термодинамики к эллиптическим координатам. Это натолкнуло Ламе на открытие носящих его имя функций (изложено в «Лекциях о функциях и т. д.», Leçons sur les fonctions inverses etc., Париж, 1857). Теорию функций Ламе развили далее Э. Гейне (с 1845) и Лиувилль (C. R., 1845), которые оба ввели функции Ламе второго разряда. При этом Лиувилль вывел разложение функции по произведениям Ламе, которое уже было дано последним (1839), из разложения по шаровым функциям (см. стр. 385).

Бесселевы функции, правда, лишь нулевого порядка, кроме самого Бесселя (1816/17; см. стр. 192), были получены также Фурье в его теории тепла (1822; см. стр. 385) и Пуассоном (J. Éc. pol., 1823). Весьма важные разложения в полусходящиеся ряды для функций нулевого порядка дал Пуассон, а для любого целочисленного порядка — Якоби (Astr. Nachr., 1849). Таблицы вычислили Бессель и, немного полнее, Гансен (Гота, 1843). Дальнейшие исследования относятся ко второй половине XIX столетия. Дифференциальное уравнение гипергеометрического ряда дал еще Эйлер в одной работе, относящейся к 1778 [Nov. Act. Petr., 1794 (1801)]. Точно таким же уравнением воспользовался Гаусс во второй части своей работы об этих рядах для построения их теории (см. стр. 383). Эта вторая часть, вводившая теоретико-функциональную трактовку линейных дифференциальных уравнений, при жизни Гаусса осталась неопубликованной.

Теорию дифференциальных уравнений в частных производных значительно продвинул вперед Пфафф, один из соавторов «Предложения о полиноме» Гинденбурга (см. стр. 92). Еще Эйлер объявил недопустимым («Основания интегрального исчисления», т. 3,

1770) дифференциальное уравнение, которое мы записываем в виде

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_i = 0,$$

если оно не удовлетворяется одним уравнением $f = \text{const.}$ (см. стр. 175). Но уже Монж (Mém. Par., 1784) заметил, что в общем случае ему всегда можно удовлетворить $m-1$ или даже меньшим числом уравнений, содержащих x_i. Пфафф показал (Berl. Abh., 1814/15), что при $m=2n$ или $2n-1$ уравнение всегда можно привести к форме

$$F_1 df_1 + F_2\,df_2 + \ldots + F_n\,df_n = 0$$

всего лишь с n дифференциальными элементами и тогда оно будет удовлетворено уже n уравнениями вида

$$\psi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0,$$

$$F_1 : F_2 : \ldots : F_n = \frac{\partial\psi}{\partial f_1} : \frac{\partial\psi}{\partial f_2} : \ldots : \frac{\partial\psi}{\partial f_n}.$$

Исследование «проблемы Пфаффа», т. е. интегрирования указанного уравнения при помощи возможно меньшего числа соотношений между x_i, привлекло многих. Якоби, который ввел это наименование, в нескольких томах J. f. Math. нашел важные дополнительные результаты в «проблеме Пфаффа» и вообще в теории уравнений с частными производными, которую он особенно широко применил в своих «Лекциях по динамике» (Vorlesungen über Dynamik), изданных только после его смерти (Берлин, 1866).

Со времени Якоби мы располагаем исчерпывающим методом формального интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с несколькими независимыми переменными или же системы таких уравнений. Пуассон еще прежде показал (J. Éc. pol., 1809), как можно из двух решений линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных получить третье. Грассман развил далее решение Пфаффа в своем «Учении о протяженности» (1862; см. стр. 370).

Решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка вида

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_m, p_1, p_2, \ldots, p_m) = 0 \quad \left(p_i \equiv \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$$

свели к обыкновенным дифференциальным уравнениям Лагранж для $m=2$ (Nouv. Mém. Berl., 1772) и Пфафф в приведенной работе для любого m. Методы решения были предложены Коши (1819) и Якоби, отправлявшимся от дифференциальных уравнений динамики.

Сюда же примыкали исследования Гамильтона (1834) о дифференциальном уравнении, называемом его именем[1]).

Символические операции над знаком дифференциала (Лагранж, 1772) восходят к Лейбницу, который усмотрел аналогию между структурой высших производных для произведений и разложением бинома (или же полинома) (стр. 130). Сервуа (Ann. math., 1814) впервые понял, что более глубокая причина этого параллелизма коренится в сохранении некоторых формальных законов при вычислениях с различными символическими операторами. Коши и здесь добавил немало формул (Exerc. de math., 2, Париж, 1827). Выдвинутую уже Лейбницем проблему о дифференциалах любого порядка разработал главным образом Лиувилль (1832). Символические методы существенно упростили формальную сторону теории линейных дифференциальных уравнений (Г. Либри, J. f. Math., 1836; Коши, Exerc. de math., 1, 1826). Идеи Сервуа были вновь восприняты, систематизированы и продолжены Р. Морфи (Phil. Trans., 1837), Дж. Булем (там же, 1844; ср. его же «Математический анализ логики», The mathematical analysis of logic, Кембридж, 1847) и другими англичанами.

Функциональные уравнения мимоходом появлялись уже у крупных математиков XVIII столетия. Напомним лишь, что Лаплас и Монж привели около 1775 несколько таких уравнений к уравнениям в конечных разностях (см. стр. 209—210). Более общую трактовку вопроса предложил Ч. Баббедж [Phil. Trans., 1815, затем в приложении к «Собранию примеров применения исчисления конечных разностей» (A collection of examples of the application on the calculus of finite differences) Дж. Гершеля, Кембридж, 1820]. Несколько основных примеров рассмотрел Коши в «Курсе алгебраического анализа», 1821, как-то:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

и

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

Баббедж дал многочисленные примеры, приводящие к уравнению $\psi_n(x)=x$, которое Жергонн (1821/22) назвал именем Баббеджа, где ψ_n обозначает n-кратную итерацию функции ψ. Важное для многих приложений уравнение $\varphi[\alpha(x)]=\varphi(x)+C$ восходит к Абелю (посмертно опубликованные сочинения). Один из первых примеров итерации с несколькими переменными представлял собой алгоритм арифметическо-геометрической средней [Лагранж, 1785 (1786); Гаусс, 1816/18].

[1]) Вилейтнер полностью оставляет в стороне разработку в рассматриваемое время методов математической физики. Об исследованиях Фурье, Остроградского и др. по теории тепла см. статью В. И. Антроповой, указанную в списке литературы. — *Прим. ред.*

§ 3. Вариационное исчисление. Исчисление конечных разностей. Интерполирование

В области вариационного исчисления первая половина XIX столетия, в противоположность крупным открытиям XVIII столетия, была представлена преимущественно работами, развивавшими и совершенствовавшими теорию. Одна работа Пуассона от 1833 примыкала к исследованиям Эйлера и Лагранжа, который сам продолжал свои изыскания, главным образом по теории функций (1812). Пуассон, как и Бертран (1841), занимался так называемой проблемой интегрируемости. Бертран нашел также (1842) лучшее доказательство для применения метода множителя Эйлера в изопериметрических задачах. Якоби дал (1837) лучшее определение второй вариации интеграла, распространимое и на высшие вариации. Вместе с тем он нашел одно важное преобразование второй вариации. Теоремы Якоби были частично доказаны Лебегом и Делоне (1841). Позднее (1857) исследования Якоби существенно дополнил Гессе.

Ряд новых изопериметрических задач и теорем открыл Я. Штейнер (J. f. Math., 1839 и позднее), который, правда, обосновал их только геометрически и отчасти неполно. Что кривые кратчайшего охвата на какой-либо поверхности должны иметь постоянную геодезическую кривизну, показал при помощи вариационного исчисления уже Миндинг (1830), впоследствии (1876/79) доказавший все предложения Штейнера. Значительные усовершенствования в вопросе о вариации двойного интеграла ввел в одной работе по капиллярности Гаусс (Comm. Gott., 1828/32), употребив для этого преобразование интегралов по поверхности в криволинейные (см. стр. 383). В работе 1833 Пуассон распространил исследование Гаусса на любые кратные интегралы. В том же направлении работали М. Остроградский (1835; см. стр. 383) и Коши (Exerc. d'anal., 3, 1844). В. Бруначчи (1810) и Делоне (1843) применили к двойному интегралу лежандрово исследование второй вариации в той форме, какую ему придал Лагранж. Надо еще упомянуть о связи вариационного исчисления с принципом Гамильтона (см. стр. 390).

По исчислению конечных разностей в рассматриваемый период появились три специальных учебника: третий том «Трактата по дифференциальному и интегральному исчислению» Лакруа (Париж, 1800; 2-е изд. 1819), «Собрание примеров» Гершеля (1820; см. стр. 389) и немецкий курс О. Шлёмильха (Галле, 1848). Книга Раабе (Цюрих, 1848) была посвящена изучению функции n-й степени, для целого x равной

$$1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+\ldots+(x-1)^{n-1};$$

он назвал ее функцией Бернулли в честь автора «Искусства предположений» (см. стр. 144). К этой же области вопросов отнссится формула суммирования Эйлера (см. стр. 142), остаточный член которой определил Якоби (1834). Линейные разностные уравнения с переменными коэффициентами рассматривались в упомянутых учебниках, а также Лапласом в «Небесной механике» (Mécanique céleste, Париж, 1805 и раньше), Абелем (1823) и Ж. Бине (1845). Лаплас не раз занимался системами с несколькими независимыми переменными, в частности, в своей книге по исчислению вероятностей (см. стр. 372). Применение символики было предметом особой заботы Лапласа, ее изложение нашло себе место в книге Арбогаста «Исчисление дериваций» (Du calcul des dérivations, Страсбург, 1800). Введение во Франции метрических мер дало толчок приложению конечных разностей к построению таблиц. В этом направлении работали Рищ де-Прони (Tables de cadastre, 1800/01 и Tables logarithmiques et trigonométriques, Париж, 1824), Деламбр, Лагранж и Лаплас (Mém. Inst., 1803/04) (ср. стр. 347). Деламбр издал (1800/01) тригонометрические таблицы, вычисленные на основе десятичного деления Ш. Борда. Одна более поздняя немецкая работа принадлежала астроному Энке (Berl. Astr. Jahrb., 1852). Примыкая к работам Гаусса (см. стр. 383), Энке предложил также новые формулы для механических квадратур (1837 и позднее).

Лагранж в «Элементарных лекциях по математике» (опубликовано в 1794/95; см. стр. 31) установил знаменитую интерполяционную формулу, которую назвали его именем, хотя она была известна уже Э. Варингу (1779; см. стр. 210). Совсем другим путем ее нашел около 1812 Гаусс в своей новой теории интерполирования. Впрочем, последняя была опубликована только в третьем томе его сочинений (Werke, Гёттинген, 1876), хотя кое-что из нее увидело свет ранее благодаря работам Энке (1830). Якоби в своей диссертации (Берлин, 1825) тоже занимался формулой Лагранжа. Гаусс своеобразным способом вывел из формулы Варинга — Лагранжа формулу Ньютона (см. стр. 207). Связь между этими формулами показал также Ампер (Ann. math., 1825/26). Сюда же относятся исследования Коши (1840), который привел одну интерполяционную формулу в форме интеграла (Exerc. math., 1, Париж, 1826).

Для приближенного представления периодических явлений применяется тригонометрическая интерполяция. Соответствующие формулы предложили впервые Клеро [1754 (1759)] и затем Лагранж (1762/65); Ламберт («Очерки», 1772; см. стр. 302) их только рекомендовал. Обосновал тригонометрическую интерполяцию, сначала для равноотстоящих аргументов, астроном Бессель (1815). Еще раньше нашли формулы Бесселя для одного специального случая Гаусс (1805) и Фурье (до 1807), которые их, однако, не опубликовали. Коши (1840) и Гаусс распространили эти формулы и на неравноотстоящие аргументы. У Коши (1841) они были приведены в комплексной форме. Бессель коснулся тригонометрической интерполяции функций двух переменных (1820/21 и позднее); Гансен, астроном из Готы, неоднократно применял ее при вычислении возмущений. Ею занимались еще Коши (1832/41, также 1845) и Лиувилль (1836). Большинство работ по гармоническому анализу графически заданной функции появилось позже. Но уже Лагранж дал важные теоремы относительно определения скрытой периодичности явлений [1772 (1775); 1783 (1780)].

§ 4. Теория функций комплексного переменного

В 1851 Риман опубликовал в Гёттингене свою диссертацию «Основы общей теории функций одной комплексной переменной величины» (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse). Этот труд можно, пожалуй, рассматривать как первый этаж здания теории функций, возникшей в XIX столетии. Но фундамент теории функций был заложен уже в первой половине столетия, главным образом Коши (ср. стр. 382). Исходным пунктом первой работы Коши от 1814 (опубликовано в 1825) послужило изучение перемены порядка интегрирования в двойных интегралах, причем автор отправлялся здесь от одной статьи Эйлера [1769 (1770)]. Результат, который, однако, был ясно выявлен отнюдь не сразу, был таков. Коши, систематически введя интегрирование в комплексной области, соединил два интеграла вдоль замкнутой кривой,

$$\int (u\,dx - v\,dy) = 0 \quad \text{и} \quad \int (v\,dx + u\,dy) = 0,$$

введенные Даламбером в его сочинении по гидродинамике (1752; см. стр. 167), в один:

$$\int (u + iv)(dx + i\,dy) = 0 \qquad \text{или} \qquad \int f(z)\,dz = 0,$$

для чего умножил второе слагаемое на множитель i («интегральная теорема Коши»). Первые шаги в этом направлении можно встретить у Даламбера [1746 (1748)] и Эйлера (статьи 1777 и 1781; опубликованы с 1793 до 1805). Лаплас также был вынужден уже в 1782 ввести мнимые пределы определенных интегралов [1782 (1785)], а при их вычислении он часто пользовался мнимыми подстановками [1809 (1810), 1810 (1811) и в книге по исчислению вероятностей, 1812]. К идеям Коши самостоятельно пришел Гаусс, как это видно из замечаний в его третьем доказательстве основной теоремы алгебры (1816; см. стр. 381). Еще определеннее выяснилось это после открытия одного его письма к Бесселю от декабря 1811. Коши, наверное, были известны те интеграции в комплексной области, которые произвел в нескольких работах его соотечественник Пуассон (1813 и позднее).

Введение понятия особых точек и круга сходимости (письмо к Г. Кориолису, 1837) было для Коши, продолжавшего разрабатывать этот предмет в многочисленных работах, необходимым следствием хода его идей. Элементы исчисления вычетов были налицо уже в 1814. «Интегральная формула Коши»

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

отчетливо высказана во втором томе его Exercices d'analyse (Париж, 1841; литографировано уже в 1831). Одновременно Коши вывел из вышеуказанной интегральной теоремы разложение в ряд комплексной функции (в том числе неявной). Существенную роль играл здесь так называемый ряд Лагранжа [1768 (1770)], использованный Якоби при представлении шаровых функций в виде производных (см. стр. 385). Коши заметил, что оценка остаточного члена вещественного степенного ряда существенно зависит от значений, которые функция принимает в комплексной области.

Теорема об интеграле по замкнутому контуру приобрела у Коши современную форму только в 1846 в работе, опубликованной в Comptes Rendus Парижской Академии. С интегрированием в комплексной области там было отчетливо связано понятие периода функции, также и для многозначных функций. Для однозначных функций на эту связь указал уже Гаусс в упомянутом письме к Бесселю. Исследования Коши, продолжавшиеся и позднее 1850, были существенно дополнены двумя его соотечественниками. П. Лоран дал (1843) разложение по целым положительным и отрицательными степеням функции, непрерывной и дифференцируемой в круговом кольце. В. Пюизе разложил (1850) по дробным степеням многозначные алгебраические функции (см. стр. 397) и этим прочно обосновал разложение в ряд Ньютона—Крамера (см. стр. 63) [1]).

§ 5. Эллиптические функции

Эллиптические интегралы появлялись при различных спрямлениях уже в XVII столетии (Валлис — 1655/59; Я. Бернулли — 1691). Особенное значение имели исследования Фаньяно о дугах лемнискат (с 1714, см. стр. 160). Свое сочинение «Математические произведения» (Produzioni matematiche, Пезаро, 1750) Фаньяно послал в Берлинскую Академию, где оно 23 декабря 1751 было передано на заключение Эйлеру. Якоби (письмо 1847) отметил этот день, как необыкновенно важный для истории математики, так как из этой проверки возникла теория эллиптических функций.

[1]) В сороковые годы начал цикл своих работ по общей теории аналитических функций К. Вейерштрасс, но его результаты в этом направлении были опубликованы значительно позднее. См. книги Ф. Клейна и А. И. Маркушевича в списке литературы. — *Прим. ред.*

В самом деле, Эйлер не только открыл теорему сложения эллиптических интегралов (см. стр. 161), но и высказал ее уже в общем виде, приближающемся к теореме Абеля (см. стр. 397). Он также пришел почти точно к нормальным формам Лежандра и признал эти интегралы самостоятельным видом трансцендентных функций. Примкнув к Эйлеру, заметные успехи сделал Лагранж (1768/69), связно изложивший свои открытия в «Теории аналитических функций» (1797). Оба ученых затронули уже общую проблему преобразования, а Лагранж открыл связь теоремы сложения со сферической тригонометрией. Напомним также преобразование Ландена (1775; см. стр. 163), переводящее друг в друга интегралы с различными модулями. Это преобразование вновь самостоятельно нашли Лагранж (1784/85), а затем, в другой форме, Гаусс (см. стр. 395).

Связующим звеном между двумя эпохами в истории этой отрасли науки служат работы Лежандра о дугах эллипсов, которые начались в 1786 и продолжались свыше 40 лет, до выхода большого труда «Трактат об эллиптических функциях и эйлеровых интегралах» (Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes, два тома и три приложения, Париж, 1825/28). «Эллиптическими функциями» Лежандр называл еще самые интегралы. В предисловии он справедливо утверждал, что, кроме Ландена, чье преобразование он распространил на все три рода интегралов, он один воспринял и проводил точку зрения Эйлера. Лежандр подверг все три рода интегралов тщательному исследованию. Он же дал дифференциальные уравнения и ряды для полных интегралов 1-го и 2-го рода. Для интегралов 3-го рода он нашел теорему о перестановке параметра и аргумента. Он преобразовал ряд высших интегралов в эллиптические, ввел новое преобразование третьей степени и уравнения, которые можно рассматривать как первые мультипликаторные и модулярные уравнения.

Между тем молодой Абель еще с 1823 начал изучать обращение интегралов 1-го рода, а в 1825 он, безусловно, уже был знаком с двойной периодичностью. В 1827 в J. f. Math. появилась его обширная фундаментальная работа, в поле зрения которой попали сразу и функции чисто мнимого аргумента, и на основе теоремы сложения — функции комплексных величин. Из уравнений, относящихся к проблемам умножения и деления, позднее возникли те исследования алгебраических уравнений, о которых мы уже говорили (см. стр. 379). При разложении в простые бесконечные ряды и произведения появились те функции, которые вскоре Якоби в «Новых основаниях теории эллиптических функций» (Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Кенигсберг, 1829) поставил в центре всей теории под именем тэта-функций.

Абель расширил преобразования Лежандра и открыл комплексное умножение. Тотчас подхватив идеи первых публикаций Якоби

(1827), Абель работал в соревновании с ним до конца своей короткой жизни (1802—1829). Особенно занимала Абеля алгебраическая сторона общей проблемы преобразования, и он установил для эллиптических функций теорему, названную его именем (см. стр. 397), причем модулярные уравнения, хотя и не под этим названием, играли существенную роль.

Первые работы Якоби, отправлявшегося от исследований Лежандра, были посвящены проблеме преобразования. Якоби сразу ввел вскоре ставшие классическими обозначения sin am, cos am, Δ am. Пользуясь ими, он систематически разработал в «Новых основаниях» всю область «эллиптических функций». При этом немедленно выявились основные инвариантные свойства модулярных функций. Особенное значение имело представление функций в виде отношений бесконечных произведений и введение тэта-функций, которые Якоби привел в форме тригонометрических рядов. При помощи их он смог выразить все эллиптические функции, а также и модуль. Одной из важнейших новых идей явилось представление интегралов 2-го и 3-го рода как функций интегралов 1-го рода. В частности, Якоби точнее разработал теорию арифметическо-геометрической средней и преобразования Ландена — Гаусса, опубликованную тем временем Гауссом (см. ниже). В «Новых основаниях» Якоби теория эллиптических функций нашла первоначальное завершение. Позднее Якоби в своих лекциях (впервые 1835/36), обработанных К. Борхардтом, поставил во главу теории тэта-функции.

Первые исследования Гаусса об арифметическо-геометрической средней — понятии, введенном Лагранжем (1784/85; см. стр. 389), — относились к его молодым годам (1797/99). Наряду с этим шло изучение обращений интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ и интеграла, встречающегося при спрямлении лемнискаты, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, как обобщений тригонометрических функций.

Гаусс разработал для них теорию, очень похожую на общую теорию Якоби, и вскоре заметил связь их с арифметическо-геометрической средней. Но уже в 1799 он распространил свою теорию на общие эллиптические функции и на эллиптические модулярные функции, а зимой 1800 открыл зависимость между арифметическо-геометрической средней и общим эллиптическим интегралом 1-го рода, — зависимость, которая получается посредством уже упомянутого преобразования. Только эта часть исследований Гаусса была опубликована в Comm. Gott. в 1818. Так Гаусс дошел до разложений, которые впоследствии К. Вейерштрасс (частично опубликовано в J. f. Math., 1840) в честь Абеля назвал Al-функциями. Но для себя самого Гаусс, исходя из представления обоих периодов с помощью арифметическо-геометрической средней, разработал еще одно построение эллиптических функций, независимое от интеграла 1-го рода и обоснованное значительно глубже. Этот путь вел также к тэта-функциям, и Гаусс уже в 1800 владел основной формулой Якоби, которая связывает представление тэта-функций в виде произведений с их представлением в виде рядов. Из заметок, найденных в наследии Гаусса (за 1808/09 и 1843), выяснилось, что он был хорошо знаком с умножением, делением и преобразованием эллиптических функций. О теории эллиптических модулярных функций он имел значительно более ясное понятие, чем Абель и Якоби. Не может подлежать никакому сомнению, что раннее открытие двойной периодичности лемнискатической функции позволило Гауссу понять необычайную важность комплексных величин, как чисел и как переменных. Если в «Арифметических исследованиях» (1801) и в диссертации (1799; см. стр. 42) это было выражено лишь неявно, то объяснялось это тем, что Гаусс стремился приспособить форму изложения к пониманию современников[1]). К сожалению, намеченный им большой труд о высших трансцендентностях (анонсированный уже в 1801 в «Исследованиях») не был написан.

Период от Абеля и Якоби до Римана (1851; см. стр. 392) характеризовался тем, что к теории эллиптических функций подошли с точки зрения концепции Коши (см. стр. 392—393). Прежде всего следует назвать Лиувилля (1844 и позднее), который в одном докладе 1847 уже поставил во главу теории параллелограмм периодов и исходил из понятия однозначной двоякопериодической функции. Эрмит начал свои глубокие исследования под влиянием Якоби в письмах к последнему от 1843/44, где он уже ввел принцип, носящий его имя. В 1849 Эрмит представил Парижской Академии работу, правда, оставшуюся ненапечатанной, которая содержала ряд, с точностью до множителя совпадавший с $\wp$-функцией Вейерштрасса.

В направлении Якоби работали еще Гудерманн (1838/51) и Ф. Ришело (1848/55). Г. Эйзенштейн, сочинения которого издал еще Гаусс (Берлин, 1847), находился одновременно под влиянием Якоби и теоретико-числовых взглядов Гаусса (J. f. Math., 1846/47; см. стр. 376). Так, например, из преобразования одной специальной эллиптической функции Эйзенштейн вывел закон взаимности для кубических и биквадрических вычетов. И у Эйзенштейна имелись функция Вейерштрасса $\wp$, затем функция $\wp'$ и бесконечное произведение для вейерштрассовой σ-функции. Последнее произведение использовал для обоснования теории эллиптических функций уже Кэли (1845). Якоби в 1828 (ср. стр. 395) дал при помощи

[1]) Так же обстояло дело с третьим доказательством основной теоремы алгебры (стр. 381), которое он вывел из первого с помощью комплексных величин.

эллиптических функций аналитическое решение так называемой проблемы замыкания Понселе для двух кругов (ср. стр. 408). В одном посмертно опубликованном сочинении Якоби при помощи эллиптического интеграла 3-го рода конформно отобразил на плоскость трехосный эллипсоид так, что его четыре омбилические точки стали углами прямоугольника.

§ 6. Алгебраические функции, их интегралы и обращения последних

Прежде чем говорить об обобщении эллиптических функций, мы должны сказать несколько слов об алгебраических функциях. Как мы уже упоминали (стр. 393), В. Пюизе (1850) посвятил им весьма важную работу, где устранил различные трудности, с которыми пришлось встретиться при разложениях этих функций в ряды Ньютону и Крамеру (см. стр. 63), оперировавшим только в вещественной области. Пюизе установил понятие цикла и доказал, что ряд сходится только до ближайшей точки разветвления или до точки бесконечного разрыва какой-либо представляемой рядом ветви. Риман, введя поверхности, названные его именем (диссертация, 1851), придал теории наглядную форму, дальнейшее развитие которой выходит за пределы рассматриваемого нами периода.

Если $f_n(x, y) = 0$ — уравнение алгебраического образа и $R(x, y)$ — рациональная функция переменных, связанных зависимостью $f = 0$, то интегралы $\int R(x, y)\,dx$ суть новые, связанные с образом, функции, которые для $n = 3$ и $n = 4$ сводятся к эллиптическим интегралам, для $n = 5$ и $n = 6$ подобные интегралы называются гиперэллиптическими, а для любого n — абелевыми интегралами. Уже Абель (1828) привел гиперэллиптические интегралы к трем родам. В том же направлении работал Ришело (1834/37).

Абель (1828; письмо к Лежандру) и Лиувилль (немного позднее, 1838) предприняли исследование формы интеграла с точки зрения его выразимости через элементарные функции. Наиболее блестящее достижение принадлежало самому Абелю, доказавшему совершенно общую теорему (1826; J. f. Math., 1828/29) о приводимости суммы абелевых интегралов с одинаковыми подынтегральными функциями, пределы которых связаны алгебраическими соотношениями, к определенному числу p таких интегралов. При этом он понял важное значение числа p, которое Риман впоследствии назвал «родом» образа $f_n(x, y) = 0$. Для гиперэллиптического случая и для одного общего класса двухчленных уравнений Абель сам детально рассмотрел свою теорему; кроме того, он дал ряд глубоких ее приложений. Примыкая к сформулированной Эйлером теореме сложения эллиптических интегралов (см. стр. 161), Якоби составил и проинтегрировал соответствующие дифференциальные уравнения для гиперэллиптического случая (1832/35), а затем, идя обратным путем (1842/46), дал доказательство теоремы Абеля.

Абель первый заметил (до 1825) многократную периодичность гиперэллиптических интегралов. К этому пришел посредством вычислений и Якоби (1832), а из последнего письма Галуа (1832; см. стр. 379) видно, что этот факт был известен и ему. Пюизе (1850) и Коши (1851) привело к тому же свойству интегрирование по комплексному пути. Абель и Галуа, а также Якоби (1846) распространили на общие алгебраические интегралы теорему о перестановке аргумента и параметра, открытую для эллиптических интегралов Лежандром (см. стр. 394). Вейерштрасс в своих «Очерках по теории абелевых интегралов» (Beiträge zur Theorie der Abelschen Integrale, Программа, Браунсберг, 1849) получил эту теорему из алгебраических тождеств, не обращаясь к свойствам периодов.

Задача обращения абелевых интегралов, названная именем Якоби, была поставлена Якоби в 1832 в J. f. Math. для гиперэллиптического случая, но уже для произвольного рода p. Пользуясь теоремой Абеля, он открыл, что для сохранения аналогии с тригонометрическими и эллиптическими функциями необходимо ввести p сумм, из p интегралов каждая. В J. f. Math., 1835 его привело к тем же идеям исследование многократно периодических функций. Для решения задачи обращения гиперэллиптического интеграла 1-го рода А. Гепель и И. Розенгайн одновременно (1847) пошли по пути, который избрал в своих лекциях об эллиптических функциях Якоби (см. стр. 395). Оба они построили 16 тэта-рядов двух переменных, соответственно четырем тэта-рядам одного переменного у Якоби, и из них получили обращения для сумм упомянутых интегралов, взятых по два, — Розенгайн точно придерживаясь своего образца, Гепель — более самостоятельно. Вейерштрасс впервые разрешил ту же задачу в своей браунсбергской программе (1849), причем он, исходя из дифференциальных уравнений, сначала вывел тэта-функции при помощи общих теорем теории функций. Трудности, связанные с обращением отдельного абелева интеграла, были преодолены только Риманом (1857). Эрмит в 1844 сделал попытку поставить проблему обращения Якоби для общих абелевых интегралов. Однако настоящая теория общих абелевых функций начинается только с работ Эрмита от 1855 и Римана от 1857.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Аналитическая геометрия

1. Общее развитие. Мы видели, что в четвертом томе большого «Курса математики» (Париж, 1798/99; ср. стр. 245, 354) Лакруа аналитическая геометрия приобрела современную форму даже в деталях. Термин «аналитическая геометрия» также имел там уже современный смысл. К книге Лакруа примыкал ряд сочинений того же типа: Лефрансе (1801), Био (1802), Бушарла (2-е изд., 1810), причем два последних занимались также поверхностями второго порядка. На заголовке новый термин «аналитическая геометрия» впервые появился в книге Гарнье «Начала аналитической геометрии» (Eléments de géométrie analytique, Париж, 1801). Из немецких авторов первый включил основные задачи на прямую и т. п. Мейер Гирш в своем «Сборнике геометрических задач» (Sammlung geometrischer Aufgaben, Берлин, 1807). Из учебных курсов следует назвать «Аналитическую геометрию» (Analytische Geometrie, Вена, 1823) И. Литтрова и «Начала аналитической геометрии» (Elemente der analytischen Geometrie, два тома, Лейпциг, 1839) А. Грунерта. Распространению аналитической геометрии в Германии способствовали и многочисленные учебники.

Дальнейших успехов в формальном рассмотрении, частично, впрочем, в приложении к более сложным проблемам (алгебраические кривые, поверхности второго порядка), достигли Жергонн и Э. Бобилье в работах, опубликованных в Ann. de math., особенно во второй половине второго десятилетия. Там, как и в «Исследовании различных методов решения геометрических проблем» (Examen des diffèrentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Париж, 1818), Ламе заложено основание метода сокращенных обозначений, которые с 1830 особенно культивировал Юлиус Плюкер. Уравнение пучка $mE+m'E'=0$ Ламе применял уже в 1816/17. Однако для решения задач, поставленных тем временем разросшейся проективной геометрией (см. стр. 404 и сл.), потребовались новые методы. Их создали А. Ф. Мёбиус и Ю. Плюкер, первый в «Барицентрическом исчислении» (1827), второй в «Аналитически-геометрических исследованиях» (Analytisch-geometrische, Entwicklungen, два тома, Эссен, 1828/31) и в «Системе аналитической геометрии» (System der analytischen Geometrie, Берлин, 1835). В деле укоренения и распространения новых приемов были велики также заслуги Л. Магнуса, выпустившего «Сборник задач и предложений аналитической геометрии» (Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Берлин, 1833/37), который представляет собой продолжение сборника Мейера Гирша.

Ввести в аналитическую геометрию понятие бесконечно удаленных элементов удалось впервые Мёбиусу при помощи созданных им барицентрических координат. Однако уравнение бесконечно удаленной прямой выступило у него только неявно. Однородное уравнение любой кривой в так называемых трилинейных координатах появилось лишь у Плюкера, и он впервые заменил в уравнении x, y на $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, причем $z=0$ дало уравнение бесконечно удаленной прямой. Плюкер же первый аналитически ввел для образования геометрических фигур любые пространственные элементы, применив на плоскости координаты прямой u, v, а затем, в приложении к поверхностям, координаты плоскости: u, v, w. Двойственность здесь получалась аналитически простой заменой x, y, z на u, v, w. Прямая в качестве элементарного пространственного образа появилась уже в «Системе геометрии в пространстве» (System der Geometrie des Raumes, Дюссельдорф, 1846), но систематически применена была так лишь в его посмертной книге «Новая геометрия пространства» (Neue Geometrie des Raumes, 1868/69).

Коллинеарное соответствие между двумя плоскостями выразил впервые Мёбиус в барицентрических координатах с помощью линейного преобразования. Для пространства то же самое сделал Плюкер в своей «Системе» (1846). Коррелятивное соответствие между двумя плоскостями было выражено Плюкером посредством билинейного уравнения, и тем самым был по-новому выведен принцип двойственности. Мёбиус (J. f. Math., 1828 и особенно 1833) применил этот метод специально к нулевой системе, причем каждой точке в пространстве соответствует проходящая через нее плоскость, и наоборот (мимоходом и у Г. Джорджини, 1828). Придавая уравнениям однородный вид, Плюкеру удалось ввести в аналитическую геометрию в качестве равноправных элементов бесконечно удаленные мнимые элементы, в частности, мнимые циклические точки и сферическую окружность, понятием которых мы обязаны Понселе (1822; см. стр. 405).

2. Отдельные факты. Как упомянуто выше, основные задачи на прямую систематически и в современной форме изложил впервые Лакруа (1798/99; см. стр. 398), а затем они были восприняты

Био и другими французами. Уравнение $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ дал впервые Крелле в «Сборнике статей и заметок по математике» (Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen, 1, Берлин, 1821). Соответствующая форма уравнения плоскости имелась уже в «Исследовании» Ламе (1818; см. стр. 399). Так называемая «нормальная формула» Гессе (1861) встречалась случайно уже у Люилье, принимавшего во внимание и знак, в его «Началах геометрического анализа и алгебраического анализа» (Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique, Париж, 1809) и у Магнуса (1833). Общая формула площади треугольника по трем произвольным вершинам имелась у Монжа (J. Éc. pol., 1809), который знал также, чтó характеризует равенство соответствующего выражения нулю. Кэли придал этому выражению (1843/45) вид определителя.

Общее условие пересечения трех прямых в одной точке дал Ламе (1818), а различные специальные случаи были рассмотрены и ранее. Соответствие между различными точками прямой и значениями параметра λ установили Коши (1826) и Мёбиус (1827), но только Ф. Иоахимсталь в J. f. Math., 1846 дал часто применяющиеся теперь формулы $x=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}$ и т. д. Мёбиус привел двойное отношение четырех точек в аналитической форме

$$\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}:\frac{x_4-x_1}{x_4-x_2},$$

указав шесть возможных различных значений. Нормальное уравнение плоскости, а также параметрическое представление прямой в пространстве были даны Коши в «Лекциях о приложениях исчисления бесконечно-малых в геометрии» (Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie, 1, Париж, 1826). Гаусс (1810) выразил в прямоугольных координатах площадь любого многоугольника. Магнус распространил эту формулу на косоугольные координаты (1833).

Методическое изложение свойств круга началось также с курса Лакруа (1798/99). Однако простая форма уравнения касательной $\alpha x+\beta y=r^2$ в точке (α, β) появилась только в задачнике Л. Пюиссана (1801). В примыкавших к трудам Лакруа французских учебниках (см. стр. 399) исследование круга было усовершенствовано далее. В теории конических сечений первая половина XIX столетия принесла с методической стороны и по содержанию столько нового, что мы можем выбрать здесь лишь немногое. При этом синтетические и аналитические исследования переплелись в этой области так тесно, что разграничить их весьма затруднительно. Ниже мы говорим лишь о работах, носивших преимущественно аналитический характер.

Канонические уравнения конических сечений $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ и т. д.}\right)$ имелись у Ламе (1818). Обыкновенные полярные уравнения и уравнения относительно вершины приводил уже Лакруа (1798). Простые уравнения касательных для канонических уравнений всех трех видов конических сечений появились у Био (1802). Обычный теперь способ рассмотрения сопряженных диаметров был заложен Лакруа и разработан другими французами. У Био мы находим формулу

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha'=-\frac{b^2}{a^2}.$$

Лефрансе (1801) дал для определения главных осей конического сечения

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+\ldots=0$$

квадратное уравнение

$$(\operatorname{tg}\alpha)^2+\frac{A-C}{B}\operatorname{tg}\alpha-1=0.$$

Затем Био нашел формулу

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2B}{A-C}.$$

Дискриминант коэффициентов, появившийся, правда, у Био, был использован только Гарнье (1808) и Грунертом (1839). Исчерпывающее рассмотрение всех случаев вырождения дал, после предварительных работ Ламе и Плюкера, Магнус (1833). Коши (Exerc. de math., 3, Париж, 1828) посоветовал приписывать к коэффициентам при xy, x и y множитель 2, который попадается уже у Я. Германа [1729/30 (1735)]. Двойные индексы рекомендовал Якоби (J. f. Math., 1834). Все это нашло свое отражение в «Системе» Плюкера (1835), где было дано и окончательное преобразование к главным осям, которое он еще усовершенствовал в J. f. Math., 1842.

Коши доказал для квадратичной формы n (однородных) переменных, что уравнение преобразования всегда имеет вещественные решения (Ex. de math., 4, Париж, 1829). Доказательство для $n=3$ дал уже Лагранж [1773 (1775)].

Бельгиец Данделен, отправляясь от одного предложения своего соотечественника А. Кетле, доказал (1822) важную теорему, что шары, вписанные в пересеченный плоскостью конус, определяют фокусы конических сечений. Иоахимсталь ввел в теории поляр подстановку $x=x_1+\lambda x_2$ и т. д. (1846, см. стр. 402). Шаль уже в 1827/28 занимался подобными и подобно расположенными коническими сечениями. Позднее этому же предмету уделил внимание Дж. Сальмон в «Трактате о конических сечениях» (Treatise on Conic Sections, Дублин, 1848), который во второй половине XIX столетия пользовался особенно большим влиянием в Германии благодаря переводу, данному В. Фидлером. Дж. Буль (1841) осветил с точки зрения теории инвариантов теоремы Аполлония о постоянстве площади треугольника, образованного двумя сопряженными полудиаметрами эллипса, а также суммы их квадратов. Теорема о постоянстве суммы величин, обратных квадратам сопряженных полудиаметров, восходит к Коши (1826). Бобилье (1828) доказал, что постоянна также сумма величин, обратных квадратам двух перпендикулярных диаметров.

Л. Карно дал знаменитую теорему («Геометрия положения», Géométrie de position, Париж, 1803) о пересечении трех сторон треугольника с коническим сечением, которую распространил затем на любой многоугольник («Опыт теории трансверсалей», Essai sur la théorie des transversales, Париж, 1806). Шаль в 1865 дал соответствующую взаимную теорему. Фрежье доказал (1814/16), что если прямой угол вращается вокруг некоторой точки P на коническом сечении, то прямая, соединяющая обе другие точки пересечения его сторон с коническим сечением, проходит через неподвижную точку на нормали в точке P. Эта теорема была неоднократно подвергнута расширению самим Фрежье и Понселе (ср. стр. 408). Ламе (1818), а затем Лежандр в своем труде об эллиптических функциях (1825; см. стр. 394) детально проанализировали вопрос о числе нормалей, проведенных к коническому сечению из внешней точки. Иоахимсталь предложил заслуживающее внимания построение нормалей (J. f. Math., 1843). В том же томе Кэли обобщил проблему нормалей, заменив мнимые циклические точки произвольной кривой второго класса.

Пучок конических сечений в аналитической форме появился у Ламе (Ann. math., 1816/17 и «Исследование», 1818). Там уже было приведено кубическое уравнение трех содержащихся в нем пар прямых, которое потом подробнее исследовал Якоби (J. f. Math., 1835). Швейцарец Штурм (Ann. math., 1826/27) распространил на три любых конических сечения пучка теорему Дезарга, которая первоначально относилась только к инволюции, определяемой на произвольной прямой коническим сечением и противолежащими сторонами вписанного в него четырехугольника (см. стр. 316). Характер конических сечений, принадлежащих пучку, исследовал впервые Мёбиус при помощи своего барицентрического исчисления (1827). Наименьший эллипс пучка определил уже Эйлер. Плюкер рассмотрел аналитически пучок кругов. Он назвал общую хорду «Chordale» в противоположность Штейнеру, употреблявшему термин «Potenzlinie» («радикальная ось» — термин Л. Готье, 1813).

Аналитическим подходом к сетям конических сечений, как и всеми рассмотрениями в линейных координатах, мы обязаны также Плюкеру (с 1830). Характер конических сечений сети исследовал Мёбиус. Фокусы их лежат на кривой третьего порядка (Терквем, 1845), которая обращается в строфоиду, если сеть содержит круг (Кетле, диссертация, Гент, 1819). Гаусс, открывший, что прямая центров конических сечений (Ньютон, 1687) содержит середины трех диагоналей положенного в основу четырехсторонника, определил наибольший эллипс сети (в письме 1810). Плюкер показал, что ортоптические круги образуют пучок. Магнус аналитически изучил (J. f. Math., 1832) так называемое преобразование Штейнера, при котором с точкой P внутри треугольника приводится в соответствие второй фокус того конического сечения, которое имеет одним из фокусов P и в которое вписан треугольник. Особенное внимание, которое уделял с 1837 Ламе софокусным коническим сечениям, также образующим сеть, привело его впоследствии (1859) к введению эллиптических координат и в пространстве. Якоби в своем курсе динамики (опубликовано в 1866) распространил это понятие на n измерений.

Брианшон установил («Мемуар о линиях 2-го порядка», Mémoire sur les lignes du 2[d] ordre, Париж, 1817), что система конических сечений, определяемая двумя точками и двумя прямыми и сама себе двойственная, содержит две различные последовательности конических сечений. Однако эти изыскания носили уже преимущественно синтетический характер, как и большинство исследований о других системах конических сечений (ср. стр. 409). Связки конических сечений аналитически изучал Гессе (J. f. Math., 1844). Он открыл, что полюсы, сопряженные относительно всех конических сечений связки, лежат на кривой третьего порядка, которую потом Л. Кремона назвал гессовой кривой сети. Гессе показал, что данной кривой третьего порядка соответствуют три различные связки конических сечений. Кривая третьего класса, огибающая прямые, соединяющие сопряженные полюса, носит имя Кэли (J. de math., 1844). Связка кругов, ортогональных данному кругу (терминология Плюкера), появилась уже у Л. Готье в 1813. Кэли (1845) и Гессе (1849) занимались системой конических сечений, двойственно соответствующей такой связке. Гессе аналитически доказал также теорему Штейнера, что вершины двух полярных треугольников конического сечения сами принадлежат некоторому коническому сечению. Ему принадлежат также более общие исследования о сопряженных конических сечениях (1853).

§ 2. Проективная геометрия

1. Общее развитие. Замечательные достижения Дезарга (1639; см. стр. 316) были совершенно позабыты. Не оставило следов даже то немногое, что из них извлек Лагир (особенно в 1685; см. стр. 317). Новые стимулы сообщила здесь практика. Центральную проекцию применяли при перспективном изображении, ортогональную проекцию — при горизонтальном проектировании и при обделке камней. Мы знаем, что Монж (1798/99) в блестящем труде систематизировал способы горизонтального и вертикального проектирования (см. стр. 313). В доказательствах здесь уже по-

явился «метод случайного положения», который впоследствии широко использовал Понселе в более удачной форме своего «принципа непрерывности».

Дальнейший импульс дали работы Лазаря Карно, который широко использовал и обобщил теорему Менелая о трансверсалях. Речь идет о трех сочинениях Карно, которые появились в 1801, 1803 и 1806 (см. стр. 318, 403). Под «корреляцией фигур» (1801) он понимал нечто, аналогичное «методу случайного положения». Этот принцип — выводить свойства более сложных фигур из простейших путем непрерывного перехода — он применил и в «Геометрии положения» (Париж, 1803). Специально теоремам о трансверсалях была посвящена его третья работа.

Сочинения Карно были, конечно, знакомы военному инженеру Виктору Понселе, когда он с Наполеоном отправился в Россию. Попав там в плен, он использовал свой досуг на обработку «Трактата о проективных свойствах фигур» (Traité des propriétés projectives des figures), который лег в основу новой проективной геометрии и появился в Париже в 1822. Понселе принципиально опирался здесь на центральную проекцию. Это позволило ему установить различие между проективными и метрическими свойствами. При этом особенно отчетливо выявилось значение двойных отношений, на которое обратил внимание уже Ш. Ж. Брианшон (1817; см. стр. 404). Были введены, как равноправные с конечными, бесконечно удаленные образы. Теорию поляр обновил еще Монж, а Брианшона она привела в 1806 к его знаменитой теореме. Понселе, посвятивший теории поляр отдельный «Мемуар» (Mémoire, 1824; опубликовано в 1829), увидел в ней принцип двойственности, который с более общей точки зрения развил Ж. Жергонн в трех работах, вышедших с 1827 по 1829. Впрочем, уже в 1824/25 Жергонн записывал теоремы, находящиеся в двойственном соответствии в виде двух смежных рядов. Вышеупомянутый принцип непрерывности Понселе использовал прежде всего для того, чтобы сохранить за своими теоремами силу и при наличии мнимых элементов. Он говорил тогда об «идеальных» точках пересечения, и смелое представление о мнимых циклических точках в бесконечности уже позволило ему, например, спроектировать в концентрические круги конические сечения с двойным касанием. Все эти понятия были распространены и на пространство.

Как ни был гениален метод Понселе, он все же не имел под собой прочного основания. Многое, впрочем, было рассмотрено непосредственно аналитически; в этом направлении работали Мёбиус и Плюкер (см. стр. 400). Первый подвел надежный фундамент под общее понятие коллинеарности в «Барицентрическом исчислении» (1827), и у него встречались начальные идеи о распределении свойств фигур по типу их геометрического родства (коллинеации, корреляции, подобия). Мёбиус и Плюкер (J. f. Math.,

1830) придали также наиболее общий вид принципу двойственности. Плюкер развил это подробнее в «Аналитически-геометрических исследованиях» (т. 2, 1831). В «Системе аналитической геометрии» (1835) он дал аналитическое обоснование мнимым элементам, после того как сделал это уже раньше для бесконечно удаленных (см. стр. 400). Принципиальное значение двойного отношения отчетливо выступило также лишь у Мёбиуса (см. стр. 401).

Отсутствие прочного основания не воспрепятствовало колоссальному развитию чистой геометрии. Большая заслуга в этом принадлежит Якобу Штейнеру в Германии и Мишелю Шалю во Франции. Штейнер, швейцарский пастух, который только в 19 лет научился у Песталоцци (см. стр. 368) читать и писать, благодаря своей необычайной геометрической интуиции достиг, даже не изучив латыни, положения профессора Берлинского университета. Хотя Шаль, несмотря на незнание немецкого языка, некоторые мысли получил из Германии, но развил он их самостоятельно, весьма плодотворно и притом в увлекательной форме. Позднейшие работы Штейнера представляли собой часто собрания полностью лишенных доказательств теорем о таких сложных образах, как общие алгебраические кривые и поверхности третьего порядка. Деятельность обоих ученых выходит за пределы середины XIX столетия. Штейнер умер в 1863 и его «Лекции по синтетической геометрии» (Vorlesungen über syntetische Geometrie), которые он читал с 1833, были изданы впервые в 1867. Шаль умер в 1880, но еще в этом же году выпустил второе издание «Трактата по высшей геометрии» (Traité de géométrie supérieure, 1 изд., 1852); его «Трактат о конических сечениях» (Traité des sections coniques) вышел в 1865.

Нас здесь интересуют ранние произведения обоих геометров. Штейнер впервые выступил со своим «Систематическим развитием зависимости геометрических образов друг от друга» (Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Берлин, 1832). Это сочинение содержало из пяти намеченных глав только одну, зато в ней давались принципиально новые положения. Это прежде всего введение основных образов (ряды точек, пучок лучей и т. д.), из которых Штейнер выводил высшие образы путем их проективного сопряжения. Теория конических сечений и поверхностей второго порядка была тем самым поставлена на совершенно новую основу. Проективное расположение везде выводилось из перспективного. Решающую роль играло при этом двойное отношение. В разработке этих принципов до 1850 наибольшие заслуги имел Ф. Зейдевиц (с 1846 в Arch. Math.). Он также получил проективным способом пространственные кривые третьего порядка и особо изучал коллинеарное родство.

Шаль уже опубликовал к тому времени некоторые синтетические работы о кривых и поверхностях второго порядка. Однако новые идеи выступают у него прежде всего в «Историческом обзоре происхождения и развития методов геометрии» (Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie), относящемся к 1830 и опубликованном вместе с многочисленными примечаниями в 1837. И он оперировал как главным орудием двойным отношением и инволюцией между шестью элементами основного образа первой ступени. Введение так называемой нулевой системы связывает его с Мёбиусом (см. стр. 400). В своем «Трактате по высшей геометрии» (1852) он систематически пользовался также мнимыми элементами.

Поскольку двойное отношение все еще определялось метрически, проективная геометрия, тесно связанная у Штейнера и Шаля с элементарной геометрией, отнюдь не стояла на собственной основе. Только Христиан фон-Штаудт дал ей независимую от метрики основу в «Геометрии положения» (Geometrie der Lage, Нюрнберг, 1849), которая по систематической основательности может быть сравнена с «Началами» Евклида, и в трех позднейших «Очерках по геометрии положения» (Beiträge zur Geometrie der Lage, там же 1856/60). Теорему Дезарга о гомологичных треугольниках, заново открытую Ф. Сервуа (1804), Штаудт доказал при помощи одних пространственных рассмотрений и, таким образом, смог обосновать проективную зависимость совсем без метрики. В «Очерках» он дал также вполне строгую чисто геометрическую теорию мнимых элементов, которые определил как двойные элементы некоторых инволюций. Совершенно общее определение полярной системы, у Штейнера встречавшееся лишь случайным образом, позволило Штаудту дальше рассматривать коническое сечение одновременно и как совокупность точек, и как совокупность касательных, причем он привлек мнимое коническое сечение, имеющее действительную полярную систему. Насколько возможно, он избегал понятий непрерывности и предела. Таким образом, проективная геометрия и геометрически была поставлена на самостоятельную основу.

2. Отдельные факты, в частности, касающиеся конических сечений. Инвариантность двойного отношения при проектировании была известна уже Паппу (конец III столетия), не сделавшему, однако, из этого никаких выводов. Основу исследований Штейнера представляла теорема о том, что четыре неподвижных элемента (точки или касательные) конического сечения образуют равные двойные отношения с каким-нибудь пятым подвижным образом. Названия «полюс» и «поляра» были даны Сервуа (Ann. math., 1810/11) и соответственно Жергонном (1812/13). Построение двойных элементов инволюции имелось уже у Понселе (1822). Штейнер, давший два различных вида этого построения, применял его систематически, особенно в «Геометрических построениях, осуществляемых посредством прямой линии и постоянной окружности» (Die geometrische Constructionen, ausgeführt

mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, Берлин, 1833), где был разработан вопрос о различии между линейными и квадратичными построениями.

Теорема Паскаля была распространена Штейнером (1832) на системы шестиугольников Паскаля. Эти исследования были продолжены, преимущественно аналитически, Плюкером, Гессе и Кэли. Киркман в 1850 открыл точки, названные его именем, что повлекло за собой дальнейшие исследования. В начале столетия геометров весьма занимала задача Кастильона (см. стр. 359). Карно упростил решение Лагранжа и распространил его на любой n-угольник. Т. Клаузен (1829) и Мёбиус (1830) заменили круг произвольным коническим сечением C. Брианшон в 1810 изучил случай, когда n точек лежат на прямой линии. Позднее Зейдевиц (Arch. Math., 1844) поставил вместо точек конические сечения, дважды касающиеся данного конического сечения C. Уже Понселе (Ann. math., 1817/18) двойственно перевел эту задачу. Замена C многоугольником возвращает к способу образования конического сечения, предложенному Брекенриджем и Маклореном (см. стр. 268). Понселе двойственно перевел, а также разработал и эту задачу (1822).

В том же «Трактате» (1822) Понселе исследовал задачу об определении n-угольника, вписанного в одно коническое сечение C и описанного около другого C'. Эта так называемая «проблема замыкания» вызвала много изысканий, которые частично были сделаны уже после 1850. Для двух кругов и $n=3$ задачу уже давно разрешил элементарно геометрическим путем У. Чеппл в 1746. Н. Фус (1794) установил условия для двух кругов при $n=4$, 5, 6, 7, 8. Формулы, которые в четырех последних случаях Фус дал только для симметричных многоугольников, действительны в любом случае. Тоже самое получил Штейнер (для $n=8$ с ошибкой) в 1827. Якоби при помощи эллиптических функций установил общие условия для любого n и двух кругов (J. f. Math., 1828). При этом получилась теорема Понселе, утверждающая, что при четном n все диагонали, соединяющие противоположные вершины, проходят через одну точку; ее оказалось возможным распространить и на конические сечения. Ф. Ришело (1829) дополнил метод Якоби—Понселе (1822), определил фокусы как вершины пучков, в которых каждые два сопряженных относительно конического сечения луча взаимно перпендикулярны. Так он нашел и мнимые фокусы. Штейнер показал в своих лекциях, что на основании того же определения фокусы являются двойными точками инволюций пар точек на обеих осях. Представление о том, что фокусы суть точки пересечения касательных, проведенных из мнимых циклических точек к коническому сечению, которое потом Плюкер (1831) распространил на высшие кривые, также было использовано уже Понселе, который вывел из него метрические свойства.

Б-1255

Уже Ньютон в 1671 занимался рассмотрением круга кривизны конического сечения в любой точке. Дж. Кейль (Phil. Trans., 1708/09) дал для этого круга интересное построение. В рассматриваемый нами период особенно много теорем в этой области дал Штейнер (1846), в том числе ту, что круги кривизны в точках A, B, C — вершинах наибольшего вписанного в эллипс треугольника (центр тяжести которого всегда совпадает с центром эллипса) — пересекаются на эллипсе в точке D, лежащей на одной окружности с A, B, C. Бельгиец М. Рейс (1837) дал одну общую теорему о радиусах кривизны в точках пересечения прямой с любой алгебраической кривой. Соответствующее двойственное свойство для конического сечения можно найти у Ж. Лиувилля (1841).

Штаудт (1847) синтетически исследовал пучок конических сечений с точки зрения связанных с ним условий вещественности. Штейнер в своих «Лекциях» вывел пучок конических сечений из пучка прямых посредством квадратичного преобразования, так называемого проективного вращения. Значение конического сечения, гармонического к двум коническим сечениям, рассматриваемым как геометрические места точек или прямых, выяснил Штаудт (Программа, Нюрнберг, 1831). Понселе (1822) определил коническое сечение C, образуемое полюсами прямой g относительно пучка конических сечений. Об этом «коническом сечении девяти точек» существует множество теорем, в особенности у Штейнера. Когда g удаляется в бесконечность, оно переходит в геометрическое место центров сечений пучка, которое в одном частном случае рассматривал уже Пфафф (1810). Если основными точками пучка являются три вершины треугольника и точка пересечения его высот, то все сечения пучка суть равносторонние гиперболы, а C — так называемый круг Фейербаха (ср. стр. 428), что показали Брианшон и Понселе (1820/21). Случай, когда пучок конических сечений содержит круг, подробнее рассмотрел Шаль (1838). Пучок самих кругов изучал в общем виде уже Понселе в «Трактате» (1822). Метрические свойства конических сечений пучка дали Зейдевиц (1849), а затем Штейнер (1858).

Понселе (1822) и Жергонн (1820/21) подробнее изучили также двойственное понятие сети конических сечений. Еще Ньютону было хорошо известно («Начала», 1687), что центры всех конических сечений сети лежат на одной прямой. В современных условиях это получается из общих теорем. Характер конических сечений сети синтетически исследовал Штейнер в «Лекциях»; Мёбиус сделал то же для пучка и сети посредством барицентрического исчисления (1827). Метрические свойства изучил Плюкер (1831). Штейнер дал также (1828/29) многочисленные теоремы о сети парабол. Фокусы образуют описанный круг основного треугольника, директрисы проходят через точку пересечения его высот.

Четыре основные прямые образуют четыре треугольника, описанные круги которых проходят через фокус соответствующей параболы (Понселе, 1822), в то время как точки пересечения высот лежат на ее директрисе (Штейнер, 1827). Центры описанных кругов сами лежат на одной окружности. То, что софокусные конические сечения образуют ось, следовало уже из определения фокусов, данного Понселе. Однако связанные с этими вопросами исследования были по большей части аналитическими (см. стр. 403). Теорему Дж. Айвори (Phil. Trans., 1809), который исходил из физических соображений, достаточно лишь упомянуть (ср. стр. 414). Дальнейшие теоремы о софокусных конических сечениях принадлежали Шалю (1860). Сюда же относятся предложения о подобных дугах одного и того же конического сечения (Дж. Мак-Куллах и Дж. Грэвс, 1841; Шаль, 1843; Штейнер, 1848).

Системам дважды касающихся конических сечений уделили внимание, кроме Понселе (см. выше), еще Жергонн (1820/21), Штейнер в своих «Лекциях» и А. Гепель (J. f. Math., 1848), последний с точки зрения проективного соответствия определяемых коническими сечениями рядов точек и сетей прямых. Штейнер в «Лекциях» вывел методом, напоминающим проективное вращение (см. стр. 409), из системы касательных конического сечения смешанную систему (гри точки, одна прямая), а на основании двойственности и другую систему (три прямые, одна точка). Понселе исследовал (1820/21) систему, двойственную самой себе (две точки, две прямые; см. стр 404). Штейнер в «Лекциях» разобрал случай, когда две прямые заменяются фокусом. Систему кругов, дважды касающихся конического сечения, в которой фокусы представляли особый случай, изучал также Штейнер (J. f. Mathem., 1848). В «Систематическом развитии» он занялся системой подобных конических сечений, описанных вокруг треугольника (1832), а в 1846 в J. f. Math. системой подобных конических сечений, вписанных в треугольник. Брианшон и Понселе (1820/21) нашли, что геометрическим местом центров системы равносторонних гипербол, вписанных в трехсторонник, будет круг, для которого этот трехсторонник будет полярным. Если трехсторонник сопряжен всем гиперболам, то центры системы лежат на окружности, проходящей через три вершины трехсторонника. Штейнер занимался в своих «Лекциях» также связками и системами конических сечений и соответствующими кривыми третьего порядка.

§ 3. Поверхности второго порядка

Многое из того, о чем мы рассказывали в предыдущих параграфах, было непосредственно распространено на пространство как аналитически, так и синтетически. Преобразованием пространственных координат для двух прямоугольных систем владел уже

Эйлер (1748). На исходе XVIII столетия у Монжа появились направляющие косинусы прямой, а около 1810 он ввел также синус трехгранного угла. Карно и Ливе (1806) распространили затем преобразование координат на системы, из которых одна косоугольна, а Франсе и Ашетт (1808/09) — на две косоугольные системы. Э. Бобилье распространил декартово понятие координат на несколько координат, связанных отношениями (1827/28). Более плодотворной была идея барицентрических координат Мёбиуса (1827; см. стр. 400) и общих тетраэдрических координат Плюкера (Journ. f. Math., 1830). Оба автора дали также соответствующие преобразования; Плюкер обстоятельно провел это в «Системе геометрии в пространстве» (1846). Л. Гессе (с 1844) с большим успехом применял однородные пространственные координаты.

Коши (1826) дал параметрическое представление прямой в пространстве, Мёбиус сделал это для плоскости в барицентрических координатах (1827). Так называемая нормальная форма уравнения плоскости Гессе (1861) появилась уже у Магнуса («Сборник задач», 2, 1837; ср. стр. 400). «Координаты плоскости» ввел Плюкер (J. f. Math., 1832). Шесть «плюкеровых» координат прямой, которые Плюкер позднее использовал в качестве основы своей «Новой геометрии пространства» (1869), имелись уже в «Учении о линейной протяженности» Грассмана (1844). Как и на плоскости, в пространстве были введены бесконечно удаленные и мнимые элементы, а также идея двойственного преобразования (см. стр. 405).

После Эйлера (1748; см. стр. 240) первых существенных успехов в классификации поверхностей второго порядка достигли Монж и Ашетт в «Приложении алгебры к геометрии» (Application de l'algèbre à la géométrie, Париж, 1805). Коши в «Лекциях о приложениях исчисления бесконечно малых в геометрии» (1826) и Магнус («Сборник задач», 2, 1837) занялись рассмотрением поверхностей с двойными точками. Плюкер произвел в «Системе» (1846) анализ вопроса в общих тетраэдрических координатах, рассмотрел общим образом поверхности второго класса в координатах плоскости и доказал их тождество с поверхностями второго порядка. У Плюкера имелись и несобственные поверхности второго класса (совокупность касательных плоскостей к коническому сечению). Основы проективной теории заключались в «Трактате» (1822) Понселе. Дюпен в «Исследованиях по геометрии» (Développements de géométrie, Париж, 1813) ввел в качестве «сопряженных касательных» касательные, расположенные гармонически к обеим образующим, проходящим через данную точку. Опираясь на это, Шаль (1814/16), Коши (1829), Якоби (1834) и Гессе (1838) подняли на высшую ступень проблему определения главных осей, ища сопряженные направления, общие для поверхности и некоторого шара. Уравнение третьей степени для направляющих косинусов главных осей дал уже Эйлер («Теория движения твердых тел», 1765), соответствующие уравнения для величин, обратных квадратам длин осей, установили Ашетт и А. Пети (Corresp. Éc. polyt., 1812). Коши в 1829 записал их в виде определителей. Различными способами было показано, что оба уравнения имеют только действительные решения. Коши заметил, что коэффициенты второго уравнения являются инвариантами относительно любого ортогонального преобразования координат и совместными инвариантами поверхности и изотропного конуса, хотя эти понятия еще отсутствовали. Канонические формы уравнений различных поверхностей дал Эйлер; более подробно они были приведены у Монжа и Ашетта, которые впервые снабдили их правильными чертежами. Многочисленные метрические свойства сопряженных диаметров установили Ливе (около 1805), Бине и Шаль (1815), а также Штейнер (1846).

Условия, при которых поверхность второго порядка есть поверхность вращения, вывел из известного дифференциального уравнения Монжа для поверхностей вращения (см. стр. 300) Ламе («Исследование», 1818), а Коши (1828) и Плюкер (1842) получили их из условия равенства двух осей. Магнус (1837) рассмотрел равносторонний конус, Плюкер (1846) — равносторонний гиперболоид, Штейнер («Систематическое развитие», 1832) — равносторонний гиперболический параболоид. Монж (в «Начертательной геометрии», 1794/95) предполагал уже известным, что конус касается поверхности второго порядка по плоской кривой; доказал он это в том же году в «Листах анализа» (ср. стр. 299). Плюкер в «Системе» (1846) ввел асимптотический конус. Различные теоремы о геометрических местах вершин описанных конусов были даны Ламе и Монжем; последний, в частности, показал, что вершины всех ортоптических конусов описывают сферу, которая согласно Магнусу и Плюкеру в случае параболоида вырождается в плоскость.

Проблема замыкания (см. стр. 408) для многогранника, вписанного в поверхность второго порядка и описанного около софокусной поверхности второго порядка, приводит к теореме сложения гиперэллиптических интегралов второго рода. Этим занимался Ж. Лиувилль (1847). Шаль изучил с различных точек зрения проблему нормалей. Между прочим, он доказал (Journ. f. Math., 1838), что шесть нормалей, которые можно провести из точки к поверхности второго порядка, принадлежат конусу второго порядка. Основания их он определил посредством пересечения с поверхностью третьего порядка. Ф. Иоахимсталь (1843) подробно разобрал соответствующее уравнение.

Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка играли роль уже в «Начертательной геометрии» Монжа. Намеченное там нитяное построение выполнил в 1830 Т. Оливье. Монж и

Ашетт в 1805 установили главные теоремы относительно обеих систем прямолинейных образующих. Дюпен в «Исследованиях по геометрии» (1813) рассматривал эти прямые как линии пересечения поверхности с касательной плоскостью, как асимптотические линии и т. д. У Штейнера (1832) образующие прямые поверхности являлись прямыми, соединяющими точки проективных рядов точек, или линиями пересечения проективных пучков плоскостей. Для отдельных поверхностей, как гиперболический параболоид (Мейер Гирш, 1807), подобное линейчатое образование применялось уже и прежде. Ф. Зейдевиц получил действительным образом (Arch. Math., 1847) любую поверхность второго порядка, даже с мнимыми образующими, посредством однозначного соответствия двух коллинеарных связок. Коши (1826) и Плюкер (1846) распространили далее аналитическую теорию прямых, лежащих на поверхности второго порядка.

Из отдельных теорем упомянем следующие. Монж в «Начертательной геометрии» показал, что с помощью трех прямых одной системы можно получить вторую систему образующих, заставляя прямую скользить вдоль этих трех прямых. Мёбиус доказал это посредством барицентрического исчисления. Жергонн (Ann. Math., 1826/27) поставил задачу о нахождении двух прямых, пересекающих четыре произвольно скрещивающиеся прямые; решил ее целый ряд математиков того времени. Штейнер показал (1827), что четыре высоты тетраэдра принадлежат одному гиперболоиду. Шаль доказал (1828/29), что четыре прямых, соединяющих соответственные вершины двух взаимно полярных тетраэдров, лежат на гиперболоиде. Ашетт (1826) уделил большое внимание тетраэдру из четырех образующих, все грани которого суть касательные плоскости. Магнус (1837) и Плюкер (1842) привели уравнение поверхности относительно такого тетраэдра к форме $Ax_1x_4+Bx_2x_3=$ $=0$. Данделен (1824/25) и Гессе (1842) распространили теоремы Паскаля и Брианшона на шестиугольник, составленный из образующих поверхности второго порядка.

Отправляясь от одного замечания во «Введении в анализ» Эйлера (1748; ср. стр. 276), Монж и Ашетт строго доказали (1805), что параллельные сечения поверхности второго порядка подобны и подобно расположены. Общим образом плоские сечения исследовал прежде всего Коши (1826). Монж и Ашетт открыли также семейства круговых сечений. Омбилическими точками занимался особенно Дюпен (1813). Дюпен (1809/13), Шаль (1814/16) и Ж. Дюрранд (1816/17) распространили задачу Аполлония о касании на плоские сечения поверхностей второго порядка. Частный случай, когда поверхность есть шар, разобрали Карно («Геометрия положения», 1803), Оливье (1814/16) и Штейнер (1826). Задачу Мальфатти для поверхностей второго порядка (см. стр. 427) синтетически исследовали Дюпен (1809/13) и Штейнер (1826), а аналитически — Кэли (1852).

Начиная с «Начертательной геометрии» Монжа, перенесена была на поверхности второго порядка и теория поляр. Здесь выделяются заслуги Жергонна (1810/11). Понселе подошел с проективной точки зрения (1822) к центру, диаметральным плоскостям и т. п. Мёбиус, Штейнер и, прежде всего, Плюкер (с 1830/32) занимались полярным соответствием относительно поверхностей второго порядка, как частным случаем общего двойственного соответствия, определенного пятью элементами в пространстве. В случае конуса его изучали Шаль (1830) и Магнус (1837), причем последний занимался и изотропным конусом. Уже Понселе пришел к сопряженному тетраэдру. Плюкер существенно углубил теорию Понселе (1842). Гессе, между прочим, установил теорему, что через восемь вершин двух таких тетраэдров проходит ∞^2 поверхностей второго порядка. Комплекс нормалей системы софокусных поверхностей второго порядка рассматривал, хотя еще и не под этим названием, Бине (1813). Дальнейшие теоремы здесь были даны А. Ампером (1821/22), Якоби (1834) и Шалем (1837).

Построением поверхности второго порядка, проходящей через девять данных точек, занимался Ламе («Исследование», 1818). Исчерпывающее решение задачи дал в 1842 Гессе. Другие решения исходили от Штейнера (посмертное наследие), Зейдевица (1847) и Шаля (1855). Штаудт («Геометрия положения», 1847) решил также предложенную Ламе задачу о построении поверхности по коническому сечению и четырем точкам. Иоахимсталь (1850), опираясь на более ранние работы других авторов, привел в виде определителя условие того, что пять точек лежат на одном шаре.

На софокусные поверхности второго порядка впервые натолкнулся Лаплас при изучении притяжения однородных эллипсоидов («Небесная механика», 1798/99; ср. стр. 152). В этой же связи позднее рассматривали их Дж. Айвори (1809) и Гаусс (1813). Геометрическое изучение началось с Дюпена (1813). Дюпен одновременно с Бине открыл ортогональность поверхностей таких семейств. Дальнейшие исследования, особенно о софокусных конусах и входящих в софокусную систему предельных конических сечениях, принадлежали Якоби (1834) и Шалю (1830/37). Б. Амио (1843) распространил на поверхности второго порядка понятия директрисы и направляющей плоскости. Эллиптические координаты, которые, как мы знаем (см. стр. 404), ввел Ламе (1837), широко применял Якоби (1839) для решения дифференциальных уравнений. Линии кривизны, по которым пересекаются софокусные поверхности, нашел Монж (1794, см. стр. 301), который уже признал в них пространственные кривые четвертого порядка. Дальнейшие исследования принадлежали Дюпену (1813). Он свел вопрос о главных радиусах кривизны в точке поверхности к определению осей диаметрального сечения. Отметим здесь еще теорию волновых поверхностей (4-го порядка) О. Френеля (1827), которой занимались также Ампер (1828), Гамильтон (1837), Плюкер (1839) и Кэли (1846).

Впервые применил к эллипсоиду аффинное соответствие, исходя из начертательно-геометрической точки зрения, Шаль (1814/16), хотя собственно уже теорема Айвори (см. стр. 410) покоилась на некотором аффинном преобразовании. Более общее изучение аффинных поверхностей второго порядка начал, однако, Мёбиус(1827), а коллинеарных, включая мнимые коэффициенты, — Плюкер (1846).

Уже Ливе мимоходом (1804/08) рассматривал центральные поверхности 2-го порядка, взаимно полярные относительно произвольной поверхности 2-го порядка, а общим их рассмотрением занимались затем Брианшон (1806), Шаль (1814/16) и Понселе (1824). Отсюда возник общий принцип двойственности в пространстве. Специальный случай взаимности по отношению к сфере радиуса i разобрали Понселе (1822) и Плюкер («Аналитически-геометрические исследования», 2, 1831). Преобразование посредством обратных радиусов, на которое особенно обратил внимание Лиувилль (1847), использовал случайно уже Дж. Стеббс (1843), чтобы из поверхности 2-го порядка вывести бициркулярную поверхность 4-го порядка. Магнус разработал много приложений в сферической геометрии (1832). Стереографическое изображение эллипсоида вращения рассмотрели сначала Френель (1805), а затем Ашетт в «Трактате о поверхностях второго порядка» (Traité des surfaces du 2[d] dégré, Париж, 1807); для общей поверхности 2-го порядка его исследовали Шаль (1814/16), Штейнер (1826) и Данделен (1827).

§ 4. Системы поверхностей второго порядка. Пространственные кривые третьего и четвертого порядков

Уже во «Введении в анализ» Эйлера (1748) указывалось, что проекция пересечения двух поверхностей 2-го порядка есть кривая 4-го порядка. Для Монжа понятие пространственной кривой 4-го порядка стало ясным при изучении сечений конусов, цилиндров и шаров в «Начертательной геометрии» (1794/95). Брианшон встретился (1806) с возможностью расщепления такой кривой на пару конических сечений. Ламе из своего уравнения пучка нашел (1818), что через линии пересечения двух поверхностей 2-го порядка можно провести четыре конуса второй степени. Понселе это доказал синтетическим путем (1822). Плюкер определил (1828/29) пучок, проходящий через восемь точек, которые, как заметил уже Ламе, не могут быть точками пересечения трех поверхностей 2-го порядка. В случае сети вместо конусов появляются четыре конических сечения (ср. стр. 409), которые уже обнаружил Понселе (1829). Понселе, а наряду с ним Плюкер (1828/29) и Шаль (1837) продолжили исследование понятия сети поверхностей 2-го порядка.

Дискриминант пучка имелся у Ламе. Если все четыре корня (соответствующие конусам) вещественны, то существует общий для всех поверхностей полярный тетраэдр, определение которого Коши (1829), Якоби (1834) и Плюкер (1846) свели к общему преобразованию обеих квадратичных форм в сумму квадратов. Сильвестр при помощи индукции установил здесь 13 возможных случаев (1851). Тем самым была разрешена также проблема касания двух поверхностей 2-го порядка, поставленная Понселе. Случай, когда поверхности 2-го порядка касаются вдоль целого конического сечения, рассмотрел Монж (1812). О. Гермес в своей диссертации (Бреславль, 1849) работал над пучком, взаимно соответствующим софокусной сети.

Понселе уже было знакомо (1829) двойственное соответствие между пространственной кривой 4-го порядка и развертывающейся поверхностью, которую можно описать около двух поверхностей 2-го порядка. Шаль открыл (1837) две двойные перспективные точки. Существование второго рода пространственных кривых 4-го порядка, являющихся ветвью линии пересечения поверхности 2-го порядка с поверхностью 3-го порядка, впервые заметил Дж. Сальмон (1850), который одновременно с Кэли предпринял классификацию кривых 4-го порядка первого рода по трем типам согласно их особенностям. Циклические кривые 4-го порядка первого рода рассматривались в специальных случаях и раньше, в частности, А. Фрезье в вопросах разрезки камней (Страсбург, 1737/39). К ним относится также окно Вивиани (1692). Одной из поверхностей 2-го порядка тогда обязательно является шар. В рассматриваемом нами периоде особенное внимание привлекли так называемые сферические конические сечения (Н. Фус, 1788, термин Магнуса 1825/26). Гудерман и М. Шаль (1831) посвятили им отдельные работы, причем первый разработал особый метод в «Аналитической сферике» (Analytische Sphärik, Кельн, 1830).

Ламе (1818) занимался также связкой поверхностей 2-го порядка; он нашел, что из восьми основных точек произвольны только семь. Плюкер (1828/29) распространил эту теорему на высшие поверхности (аналогия с парадоксом Крамера; см. стр. 279). Случаем поверхностей 2-го порядка занимались еще особенно Бобилье (1827/28), Магнус (1837) и Гессе (1840).

Пространственные кривые 3-го порядка подробно изучил Мёбиус в «Барицентрическом исчислении» (1832). Он выразил их в тетраэдрических координатах при помощи целых однородных функций с одним параметром, а также получил их общим образом как ветвь линии пересечения двух конусов 2-го порядка с общей прямой. Тетраэдры Мёбиуса (1828) являлись по отношению друг к другу одновременно вписанными и описанными. Они образуются с помощью четырех точек пространственной кривой 3-го порядка и четырех соответствующих соприкасающихся плоскостей.

Зейдевиц вывел (1847) свойства этих кривых (ср. стр. 413) из их проективного образования и классифицировал их согласно поведению в бесконечности. Некоторые свойства вывел Шаль в «Историческом обзоре» (1837) и позднее. Кэли (1845) показал, что при всяком проектировании этих линий появляется двойная точка, а также (1850) составил уравнение линейчатой поверхности 4-го порядка, образованной всеми касательными к пространственной кривой 3-го порядка.

§ 5. Высшие плоские кривые

Счастливое сотрудничество французских и немецких математиков, которое отчасти осуществлялось в форме взаимного участия их в журналах обеих стран, привело в рассматриваемый нами период к яркому расцвету древней теории конических сечений. Мы видели, как ученые пользовались здесь и усовершенствованными аналитическими, и новыми синтетическими методами. Вполне естественно, что при этом тотчас же перешли к пространству и начали всесторонне изучать совершенно новые образы поверхностей 2-го порядка, которые прежде рассматривались лишь иногда и почти исключительно как телесные фигуры (см. стр. 256 и след.). Переход к образам высшего порядка, хотя бы только в плоскости, представил существенно бóльшие и в первую очередь алгебраические трудности, преодолеть которые общим образом смогла лишь теория инвариантов пятидесятых годов (см. стр. 372). В этом отношении известной вехой явился здесь «Трактат о высших плоских кривых» Д. Сальмона (Treatise on the Higher Plane Curves, Дублин, 1852) в его различных изданиях и в переводах на немецкий и французский языки.

Однако и в первой половине столетия были сделаны немаловажные успехи, которыми мы в основном обязаны Плюкеру. Он приложил подробный обзор теории кривых 3-го порядка уже к своей «Системе аналитической геометрии» (1835), а в 1839 издал в Бонне оригинальную «Теорию алгебраических кривых» (Theorie der algebraischen Curven), которая, согласно заглавному листу, была основана на новой трактовке аналитической геометрии. Этот новый метод, кроме сокращенных обозначений (стр. 399), заключался еще в способе подсчета числа констант, от которых зависит кривая, и в сравнении этого числа с числом констант ее уравнения. Благодаря этому Плюкер сумел вскрыть довольно много ошибок Эйлера в перечислении кривых 4-го порядка (стр. 275), которых Плюкер дал 152 вида. Но и сам он не избежал ошибок, и в рассуждениях как его «Системы», так и «Теории» не достает проективной точки зрения, которая выступала только при исследовании образов 2-го порядка. Бесконечные ветви с их прямолинейными и криволинейными асимптотами различных порядков играли еще слишком большую роль. Зато благодаря последовательному применению мнимых элементов Плюкеру удалось привести в порядок систему девяти точек перегиба общей кривой 3-го порядка, и он сумел полностью перечислить все возможные особые точки кривых 4-го порядка (см. стр. 270) и выразить их уравнениями общего вида.

Важную роль играло при этом употребление идеи двойственного соответствия, впервые систематически приложенное к образованию кривых также Плюкером (с 1830), хотя уже до того Жергонн (1827/28 в Annales math.) установил понятие класса кривой, а Понселе в «Трактате» (1822; см. стр. 405) обнаружил двойственность двойных точек и двойных касательных, точек заострения и касательных перегиба. Для Плюкера было характерным образование кривой одновременно по касательной и точке касания. Так, он доказал, что точка возврата второго рода двойственна самой себе. Эту концепцию более определенно развил в своей «Геометрии положения» (1847) Штаудт, распространивший ее на пространственные кривые. Исследование уравнений в линейных координатах началось с «Аналитико-геометрических исследований» Плюкера (т. 2, 1831). Кэли (1847), Гессе (1850) и Сальмон (1851) продолжали разрабатывать эту проблему.

Однородная запись также была очень удобна для теории высших кривых. С ее помощью Плюкер прежде всего развил далее теорию поляр различных порядков (Journ. f. Math., 1830), над которой незадолго до того работал Бобилье (1827/28). Уравнение прямолинейной поляры (или касательной) здесь в первый раз появилось в форме

$$x_1 \frac{df}{dy_1} + x_2 \frac{df}{dy_2} + x_3 \frac{df}{dy_3} = 0.$$

Штейнер (1848, полностью напечатано лишь в 1854) развил теорию поляр еще дальше. Важнейшим достижением Плюкера явились, пожалуй, носящие его имя формулы, простейшая из которых была дана им без доказательства уже в 1834. В «Системе» и «Теории» он вывел их все при помощи принципов двойственности и непрерывности. Прямые аналитические доказательства дал Кэли (J. f. Mathem., 1846). Плюкер также (1839) сумел выяснить влияние, оказываемое n-кратной точкой и точкой возврата второго рода, на класс кривой.

Очень большое значение имело открытие в 1844 Гессе названной его именем кривой (см. стр. 404), которая пересекает кривые третьего порядка в их точках перегиба и, будучи сама кривой 3-го порядка, имеет в точках пересечения свои собственные точки перегиба. Распространение этого понятия на высшие кривые, привлечение двойственной кривой Штейнера и связывающей их обеих кривой Кэли были сделаны главным образом после 1850. Однако последнюю кривую для случая кривых 3-го порядка рассматривали уже сам Кэли в 1844/45 и Гессе в 1848. Для кривых 3-го порядка кривая Штейнера совпадает с кривой Гессе.

Для построения алгебраических кривых Грассман в «Учении о протяженности» от 1844 предложил линейчатый механизм, который, в частности, применил к кривым 3-го и 4-го порядков. Позже (1851) он, подобно Штейнеру (в упомянутой выше работе), строил всякие кривые также посредством проективных пучков кривых. Мёбиус приступил к классификации кривых — прежде всего 3-го порядка — с проективной точки зрения. Основные положения были высказаны уже в 1849, хотя вывод он дал только в 1852 одновременно с Сальмоном. Впрочем, применявшиеся здесь понятия парных и непарных ветвей кривой, замкнутого пути и т. д. были установлены уже Плюкером. Сальмон дал важную теорему (1851) относительно постоянства двойного отношения четырех касательных, которые можно провести к кривой 3-го порядка из какой-нибудь ее точки. Вывод одних форм кривых из других путем разделения и соединения в узлах переходных кривых также исходил от Плюкера, который применял его, в частности, к кривым 4-го порядка.

Грассман («Учение о протяженности», 1844) высказал мысль о представлении систем высших кривых с k параметрами в пространстве k измерений. Последнее понятие, мимоходом встречающееся уже у Декарта и, пожалуй, не совсем чуждое еще более ранним ученым, развивал почти одновременно с Грассманом А. Кэли.

Из отдельных кривых 3-го и 4-го порядков естественно отметить циркулярные и бициркулярные. Среди циркулярных кривых 3-го порядка упомянем фокальную кривую ван-Рееса (1829), у которой точка пересечения сопряженных мнимых асимптот (особый фокус) лежит на кривой. Она является обобщением построенной А. Кетле (Диссертация, Гент, 1819) строфоиды, которая обладает узлом со взаимно перпендикулярными касательными. Последняя послужила отправным пунктом для теоремы Данделена (см. стр. 402). Бициркулярные кривые 4-го порядка являются, между прочим, также подэрами (или инверсиями) центральных конических сечений, которые рассматривал Магнус в своем «Сборнике задач» (т. 1, 1833).

Отметим также некоторые открытые в рассматриваемый нами период трансцендентные кривые. При качении эллипса или гиперболы по прямой фокусы описывают кривые, названные именем Ш. Делоне, который пришел (1841) к ним, разыскивая меридианную кривую поверхности вращения с постоянной средней кривизной (см. стр. 422). О. Бонне немедленно добавил, что фокус параболы подобным же образом описывает цепную линию (см. стр. 286). Стоит упомянуть о появлении у Краузе («Пять опытов новой теории кривых линий», Novae theoriae linearum curvarum... specimina, quinque 1835), изучавшего «антилогу» с уравнением $s\tau = a$ (s — дуга, τ — угол касательной), и у Петерса («Новое учение о кривых», Neue Curvenlehre, Дрезден, 1838), исследовавшего кривую $s^2 = a^2\tau$, названную впоследствии клотоидой так называемых натуральных координат, которые мимоходом применялись уже Эйлером. Плюкер (1839) и Уэвелл (1849/51) также применяли эти координаты.

О высших пространственных кривых 3-го и 4-го порядков говорилось уже выше (см. стр. 416—417). Кэли (1845) установил для общей пространственной кривой формулы, соответствующие формулам Плюкера. Новые замечательные результаты в учении о высших поверхностях принесла только вторая половина XIX столетия. Впрочем, они намечались уже во многих рассмотренных работах. Понятие о коннексе, которому впоследствии Плюкер посвятил обширные исследования, встречалось, между прочим, уже в его «Аналитически-геометрических исследованиях» (1831).

§ 6. Дифференциальная геометрия

1. Пространственные кривые. В дифференциальной геометрии, как и в учении о высших кривых, в XVIII столетии был накоплен, особенно благодаря Монжу (см. ч. II, гл. 5), большой фонд знаний, исходя из которого можно было продвигаться далее. «Приложение анализа к геометрии» Монжа появлялось все в новых изданиях (считая с «Листов», 3-е изд., 1807; 4-е изд., 1809), из которых последним явилось пятое, существенно дополненное приложениями Ж. Лиувилля (1850). Несколько новых понятий (1805) ввел Ланкре, в том числе понятия углов смежности и кручения пространственной кривой (называл он их иначе). Вместе с тем он нашел теорему о том, что эти углы равны у кривой, образуемой центрами кривизны асимптотической линии. Затем Ланкре при помощи квадратур определил пространственные эволюты, после того как их дифференциальные уравнения дал Монж (1785), и заново ввел плоские эволюты. Якоби точно доказал (1835), что центры кривизны пространственной кривой не образуют пространственной эволюты. Ланкре принадлежат также понятие спрямляющей плоскости и первые исследования о спрямляющей поверхности (ср. стр. 294).

Другая важная работа была написана Барре де-Сен-Венаном (1845). Он ввел термин бинормаль и дал простые формулы для элементов соприкасающейся сферы, а также для угла между радиусами круга кривизны и соприкасающейся сферы. Далее он аналитически доказал теорему о том, что каждая кривая с постоянным отношением углов смежности и кручения есть винтовая линия (синтетическое доказательство нашел Бертран в 1848); обратная теорема была известна уже Ланкре. Сен-Венан также показал, что каждая плоскость, проходящая через точку P кривой, пересекает развертывающуюся поверхность касательных по кривой, имеющей в P точку заострения. Поставленный им вопрос о том, может ли на поверхности главных нормалей некоторой кривой существовать другая кривая с теми же прямыми в качестве главных нормалей, привел к важным исследованиям, первое из которых принадлежало Бертрану (1850). Бертран прежде всего доказал, что соответствующие точки кривых располагаются на равном расстоянии и что это вообще возможно лишь тогда, когда кривизна и кручение первоначальной кривой связаны линейной зависимостью.

Формулы для направляющих косинусов касательной, главной нормали и бинормали и их производных по длине дуги составил впервые Фред. Френе (Thèse, Тулуза, 1847). Их часто называют также формулами Ж. Серре, нашедшего их самостоятельно (опубликовано в 1851). Серре, деятельность которого началась только к концу рассматриваемого нами периода[1]), мы должны упомянуть и в связи с его исследованиями о кривых постоянной кривизны и постоянного кручения (письмо; опубликовано в 1850 в пятом издании «Приложения» Монжа и J. de math., 1851), из которых первые линии были определены впервые Оссианом Бонне (1848).

2. Поверхности. Среди работ по теории поверхностей столь значительно выделялись, несмотря на свою сжатость, «Общие исследования о кривых поверхностях» (Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comm. Gott., 1828) Гаусса, что мы рассмотрим их прежде всего. Сначала Гаусс ввел сферическое изображение, которое мимоходом применил уже Родриг (1815) в одном исследовании о кривизне поверхностей. Гаусс вновь нашел, что элемент поверхности сферического изображения относится к соответствующему элементу данной поверхности, как единица к произведению обоих главных радиусов кривизны. Огромное достижение Гаусса заключалось в том, что он ввел по определению это отношение как полную кривизну поверхности в данной точке, что позволило ему разделить свойства поверхностей на такие, которые связаны с определенной формой поверхности в пространстве, и такие, которые остаются неизменными при любом изгибании. При изгибании сохраняется полная кривизна поверхности в каждой точке. Теорему о том, что у двух наложимых одна на другую поверхностей полная кривизна в соответственных точках одинакова, Гаусс сам назвал «theorema egregium» («славная теорема»). Из гауссова понятия полной кривизны последовали также многочисленные важные

---

[1]) Мы отметим еще его учебник алгебры (1-е изд., Париж, 1849), который в позднейших изданиях и в немецком переводе много содействовал распространению теории Галуа (см. стр. 379).

теоремы о геодезических линиях. Однако все это не было бы возможно в декартовых координатах, пользуясь которыми работал над геодезическими линиями еще Лагранж в своих «Лекциях об исчислении функций» (1806). Гаусс же, наоборот, с самого начала положил в основу представления поверхностей и линий на них две вспомогательные переменные p и q — метод, который он применил уже при общем решении задачи конформного отображения (1825). Введение так называемых коэффициентов первой и второй квадратичной форм придало гауссову представлению его окончательный вид. Правда, из трех основных уравнений, связывающих эти величины, Гаусс составил только одно; но два других, которые носят имена Г. Майнарди (1856) или Д. Кодацци (1860), легко выводятся из формул Гаусса [1]).

Важные новые понятия ввел еще до того Дюпен в «Исследованиях по геометрии» (1813; см. стр. 411), в том числе главные касательные, сопряженные касательные в некоторой точке поверхности, которые гармонически делятся главными касательными (см. стр. 411), и индикатрису (с приложением к построению теней поверхностей). Там же он доказал, что поверхности, образующие триортогональную систему, пересекаются по линиям кривизны. Исследования Дюпена о названных его именем циклидах относятся к 1822 («Приложения геометрии и механики к морскому делу и т. д.», Applications de géométrie et de mécanique à la marine etc.). Свойства циклид тесно связаны со свойствами прямолинейных конгруэнций, которые были впервые исследованы Э. Малюсом [1806 (1808)]. Гамильтон (см. стр. 369) точно определил (1830) условие, при котором такая непрерывная система ∞^2 прямых есть конгруэнция нормалей некоторой поверхности (ср. стр. 414). Бертран дал здесь еще дополнения (1844), подробнее исследовав соотношения между углами бесконечно близких нормалей поверхности. Ш. Штурм добавил (1845) теорему о том, что эти нормали пересекают две скрещивающиеся прямые, проходящие через центры главных кривизн.

Для плоских линий кривизны существует важная теорема Иоахимсталя (1846), которую Бонне (1853) распространил на неплоские линии. Иоахимсталь исследовал (1848, Progr. franz. Gymn. Berl.), поверхности, у которых одно семейство линий кривизны лежит на плоскостях некоторого пучка, в то время как другое образуют сферические кривые, центры соответствующих сфер которых находятся на оси пучка. Миндинг (1839) нашел три типа поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны,

[1]) Уравнения Майнарди—Кодацци были выведены еще в 1853 в кандидатской диссертации «Об изгибании поверхностей» (Über die Biegung der Flächen) К. М. Петерсона, учившегося тогда в Дерптском университете. Эта диссертация осталась в свое время неопубликованной (см. работы С. Д. Россинского в списке литературы). — *Прим. ред.*

а Лиувилль в четвертом примечании к пятому изданию «Приложения» Монжа (1850) рассматривал поверхности вращения любой постоянной кривизны. Миндинг также доказал, что две поверхности равной постоянной кривизны всегда наложимы одна на другую. Он разобрал все случаи изгибания поверхностей вращения непостоянной кривизны, наложенных на другую такую поверхность (1838). Понятие геодезической кривизны появилось уже у Бонне (1848), но точнее исследовал его и ввел под этим названием только Лиувилль (1850, см. выше). «Общие исследования» Гаусса были в переводе добавлены к «Приложению» Монжа в издании 1850. Следует хотя бы упомянуть еще работу Пуассона (J. Éc. polyt., 1832) о кривизне поверхностей.

Уже Монж начал разрабатывать (1787) теорию поверхностей минимальных прямых, исходя из свойств обоих главных радиусов кривизны, но полученный им мнимый результат помешал ему продвинуться здесь глубже (см. стр. 302). Серре (1848) обратил специально внимание на существование мнимых поверхностей постоянной кривизны и указал, что они содержатся в числе поверхностей Монжа. Шаль (1839) установил важные теоремы о неразвертывающихся линейчатых поверхностях. Между прочим, ему мы обязаны понятием линии сжатия.

Из установленных уже Монжем и Лагранжем формул для минимальных поверхностей (см. стр. 298) Г. Шерку удалось вывести (1830/35) новые примеры вещественных минимальных поверхностей. Одна из них носит и теперь его имя. Э. Каталан доказал (1842), что линейчатая поверхность только тогда может быть вещественной минимальной, когда она является плоской или же обыкновенной винтовой поверхностью.

§ 7. Начертательная геометрия

Вся первая половина XIX столетия прошла под влиянием сочинений Монжа (см. стр. 313) и его учеников. «Начертательная геометрия» Монжа появилась до 1847 в семи изданиях, аналогичное сочинение Лакруа (см. стр. 313) вышло седьмым изданием в 1840. Опущенные в сочинении Монжа, в силу чисто внешних обстоятельств, отделы (построение теней, перспектива, разрезка камней) были дополнены Ашеттом и Бриссоном частью в виде самостоятельных работ (первый в 1813), частью в виде приложений к этому труду. Ашетт, доведший до конца рассмотрение трехгранника, начатое уже Лакруа, издал также собственный «Трактат по начертательной геометрии» (Traité de géométrie descriptive, Париж, 1822), содержавший много исследований о поверхностях и их касании, а также о кривизне пространственных кривых. Мы уже неоднократно отмечали, какое значение для развития проективной геометрии приобрело изучение Монжем высших образов в начертательной геометрии. На результаты Монжа опирался также Леруа в сочинениях по начертательной геометрии (Париж, 1836) и по стереотомии (1844). Первая более значительная немецкая книга Г. Шрейбера (Карлсруэ, 1928/29) была составлена определенно по Монжу. Оба сочинения Леруа были переведены на немецкий язык. Несколько самостоятельнее были затем «Учебник начертательной геометрии» (Lehrbuch der deskriptiven Geometrie (1-е изд., Нюрнберг, 1841) Б. Гуглера и «Новые по большей части задачи» (Grossenteils neue Aufgaben, Цюрих, 1845) Л. Мосбругера. Последний опубликовал также известное построение осей эллипса своего коллеги Ритца. Во Франции новые методы, в частности, для пересечения поверхностей, дал Т. Оливье в «Курсе начертательной геометрии» (Cours de géométrie descriptive, Париж, 1843/44, с несколькими приложениями, выходившими до 1847).

Из других видов проектирования отметим свободную перспективу, наиболее выдающимся представителем которой был Кузинери, разработавший ее в «Перспективной геометрии» (Géométrie perspective, Париж, 1828) как самостоятельный метод геометрического представления. Ж. Адемар в «Линейной перспективе» (Perspective linéaire, Париж, 1838) склонялся больше к укоренившейся во Франции еще с времен Дезарга (см. стр. 308) косоугольной аксонометрии, которая нашла обширную область приложений в кристаллографии (Гауи в 1802 и особенно в 1822; В. Гайдингер в Mineralogie Ф. Мооса, 1822/24; К. Науманн в 1826). Ортогональная аксонометрическая проекция появилась в изометрическом варианте впервые у В. Фариша (1820). О. Меллингер распространил этот способ (1844), введя двуосноизометрическую проекцию. Общие основы теории дал лишь Ю. Вейсбах, шедший при этом вычислительным путем («Учение об изометрических проекциях», Isometrische Projektionslehre, Золотурн, 1840). Перспектива, ошибочно называемая рельефной (И. Брейзиг, 1798), так как она не может применяться при настоящем рельефе, с геометрической точки зрения есть не что иное, как пространственная коллинеация и как таковая была рассмотрена уже Понселе в его «Трактате» (1822, см. стр. 405).

§ 8. Элементарная тригонометрия

Заголовок этого раздела должен указать на то, что мы здесь исключаем, как уже известное, все, что касается теории функций и анализа, и будем заниматься только дальнейшей историей решения плоских и сферических треугольников. Здесь может идти речь только об уточнениях в уже имевшейся теории (см. ч. II, гл. 8). Недостатком тогдашней тригонометрии являлось еще то обстоятельство, что функции и формулы часто определялись и устанавливались только для углов меньше 90°. Л. Карно в своих сочинениях — «О корреляции геометрических фигур» (De la corrélation des figures en géométrie, 1801) и «Геометрии положения» (1803) — дал при помощи созданной им теории «обратных» величин исчерпывающий способ определения знака в последующих квадрантах. Отсюда он вывел универсальный характер теорем о суммах и разностях тригонометрических функций, относительно которых определенно установил, что они содержат в себе все другие формулы. Затем он построил всю плоскую тригонометрию, основываясь на теореме о проекциях. Общепринятую теперь идею — рассматривать синус и косинус как координаты точки круга с радиусом единица и на этом основании определять их знак, — высказал впервые Био (1802; см. стр. 399), а затем еще определеннее Грунерт в статье Goniometrie, в приложении к словарю Клюгеля (1836; ср. стр. 354). Другими путями к общему обоснованию плоской тригонометрии шли Лежандр в «Тригонометрии», приложенной к его «Началам геометрии» (самое позднее с 1804), и Коши, который в «Курсе алгебраического анализа» (1821) оригинально построил всю систему на теореме синусов.

Гаусс в немецком переводе «Геометрии положения» Карно (два тома, Альтона, 1810), сделанном Шумахером, распространил формулы сферической тригонометрии на углы до 180°. В «Теории движения небесных тел» (Theoria motus corporum coelestium, 1809), где он также сообщил равенства, называемые либо его именем, либо именем Деламбра, Гаусс наметил распространение формул сферической тригонометрии на стороны и углы любой величины. Это же предпринял позднее (1846) Мёбиус (до 360°). Ш. Штурм (1824/25) и И. Раабе (1827) вывели главные формулы сферической тригонометрии при помощи пространственных координат. Этот путь существенно упростил Л. Пюиссан в своей «Геодезии» (Géodésie, 1842). На теорему о проекциях опирался Феррони (1805), который в то же время вывел плоскую тригонометрию как частный случай из сферической. Ф. Мот исходил (1828/29) из алгебраических теорем (об определителях), которые установил Лагранж в своей работе о тетраэдрах (1773; см. стр. 254). Шмейсер (1823) и Бретшнейдер (1835) попытались заменить обычные основные формулы новыми, причем первый шел геометрическим путем, а второй аналитическим. Книги по сферике Шульца (Лейпциг, 1828) и Гудерманна (Мюнстер, 1835) были чисто геометрическими. Беллавитис в «Лекциях по начертательной геометрии» (Lezioni di geometria descrittiva, Падуя, 1852) применил столь обычный теперь путь, выведя основные сферические формулы из рассеченного трехгранника с налагающимися гранями (см. стр. 423, ср. стр. 334).

О более тонкой разработке, которой подверглась система тригонометрических формул еще в первой половине XIX столетия, мы можем сказать только самое важное. Сюда относятся формулы Деламбра (1807), о которых мы уже упоминали, говоря о Гауссе, и которые были также самостоятельно выведены (1808) астрономом Мольвейде. Одновременно Мольвейде опубликовал и формулы плоской тригонометрии, несправедливо носящие его имя (см. стр. 331—332). В наследии Гаусса оказалось еще несколько формул для всех шести элементов сферического треугольника, связь которых с объемом пирамиды обнаружил сам Гаусс. Наиболее богатые собрания формул привели Ж. Деламбр в «Астрономии» (Astronomie, Париж, 1814) и Гудерманн в «Элементарной сферике» (Niedere Sphärik, 1835). Очень изящная формула, выражающая сферический избыток по трем сторонам, была дана, согласно утверждению Лежандра, Люилье. Сорлен (1825) впервые ясно подчеркнул господствующую в сферической тригонометрии полярность; он особенно отметил значение круговых перестановок, которые мимоходом попадаются уже у Лейбница. Многие работы были посвящены доказательству теоремы Лежандра о малых сферических треугольниках (см. стр. 348). Мы упомянем из них одну, принадлежащую Буценгейгеру (1818), заслуги которого перед тригонометрией не исчерпываются этой работой. А. Кетле (1820) нашел формулу для площади треугольника, образованного тремя малыми кругами шара.

Карно мы обязаны важными работами по полигонометрии и полиэдрометрии (1806; см. стр. 343, 345). Ш. Штурм (1824) и Люилье (1828) привели их к более удобной форме. Необычный алгоритм сделал недоступной «Сферическую полигонометрию» (Sphärische Polygonometrie, Гейдельберг, 1836) Антона Мюллера; напротив, общие теоремы о размерах многоугольников и многогранников Штаудта (1842) привлекли большое внимание. К направлению Карно примыкали работы по тетрагонометрии Бретшнейдера (1842/43).

Гиперболическая тригонометрия разрабатывалась особенно благодаря исследованиям по неевклидовой геометрии (см. стр. 429). Грунерт в специальной книге (Берлин, 1833) предпринял систематическое изучение сфероидальной тригонометрии, основанной Клеро (1733) и Эйлером (1753; см. стр. 339). Такую же книгу Грунерт издал и по локсодромической тригонометрии (Лейпциг, 1849).

§ 9. Элементарная геометрия

Когда в 1853 И. Грунерт писал в приложении к «Словарю» (Wörterbuch) Клюгеля статью «Треугольник», количество существовавших теорем было уже такое, что ими легко было бы заполнить целую книгу. Поэтому ясно, что в нашем изложении, где элементарная геометрия составляет лишь скромную часть всей обозреваемой математики, мы должны ограничиться самым необходимым.

Влияние проективной геометрии на элементарные учебники проявилось вскоре в более строгом подразделении последних, прекрасным примером чего служила «Система элементарной геометрии» (Lehrgebäude der niederen Geometrie, Иена, 1844) Бретшнейдера. В эти учебники перешла и часть материала проективной геометрии. К. Ф. А. Якоби, сам написавший интересный обзор учения о треугольниках (Programm, Пфорта, 1825), поместил в своем и ныне достойном внимания переводе «Основания геометрии» (Grondbeginsels der Meetkunde) Я. ван-Свиндена (Elemente der Geometrie, Иена, 1834) множество теорем Карно, Жергонна и Штейнера. Введенный Карно («Геометрия положения», 1803) полный четырехсторонник, о котором много теорем высказал Штейнер (1827), применявшиеся Монжем в «Начертательной геометрии» (1798/99) точки и оси подобия, гармоническое деление, полюсы и поляры круга и др. стали прочным достоянием элементарных книг.

К уже известным теоремам прибавилось много других теорем, открытых великими творцами проективной геометрии. Мы отметим, как новую область исследования, только элементарные задачи на максимумы и минимумы, а из них, в частности, изопериметрические задачи. Люилье (1782 и 1789) посвятил им две специальные книги; Лежандр включил основные теоремы в свои «Начала геометрии» (многочисленные издания с 1794 до новейшего времени), так же поступил и Мейер Гирш в «Сборнике задач» (т. 1, 1805). Существенными успехами в этой области мы обязаны Штейнеру (с 1827; см. стр. 406). Он распространил (1826) так называемую «проблему замыкания» (см. стр. 408) на случай, когда многоугольник заменяется определенной цепью кругов и обобщил ее на сферическую поверхность и на плоские сечения поверхностей второго порядка. Неоднократно применялись преобразования посредством обратных радиусов (см. стр. 415) и стереографическая проекция (см. стр. 302). Плюкер доказал, что и при первом из них сохраняются углы (1833/34). Понселе показал в «Трактате» (1822), что вместо линейки и циркуля можно пользоваться одной линейкой, если, кроме того, задан неподвижный круг. Эти же мысли провел в одном специальном сочинении и Штейнер (см. стр. 407). Штаудт построил таким способом (1842) правильный 17-угольник (ср. стр. 375). Ашетт (1804) геометрически исследовал обобщение задачи Аполлония о касании окружностей на четыре шара, которую аналитически изучал еще около 1640 Ферма. Л. Готье в 1813 дал полное решение как плоской, так и пространственной задачи Аполлония при помощи введенных им самим новых понятий радикальной оси, радикального центра и осей подобия. Жергонн дал (1816) сходное решение. Нейманн и Штейнер (1826) заменили касание кругов пересечением под заданным углом.

Совершенно новую задачу поставил Дж. Мальфатти (1803). Надо найти три таких круга, чтобы каждый из них касался двух других и вместе с тем двух сторон заданного треугольника. Сам

Мальфатти без доказательства дал алгебраическое решение. К той же задаче (1810/11) пришли Жергонн и Т. де-Лавернед. Пригодное построение нашел впервые при помощи тригонометрии Лемус (1819/20). В 1826 Штейнер опубликовал без доказательства изящное построение, явившееся толчком для многочисленных попыток доказательства.

Важные исследования были произведены в вопросе о площадях и объемах. Ф. Больаи в «Опыте» (Tentamen, 1832/33, см. стр. 430) и П. Гервин (J. f. Math., 1833) доказали, что два равновеликих многоугольника всегда могут быть разложены на конгруэнтные части. Гаусс дал формулу для вычисления площади произвольно построенного многоугольника (1810; см. стр. 425). Правильными звездчатыми многоугольниками и соответствующими многогранниками занялся в одной важной работе (1810) Пуансо, который добавил к двум звездчатым многогранникам Кеплера (1613) два недостававших. Очень большое значение имело прочное установление Мёбиусом ориентации геометрических образов (1827). Вычисление объема любой косоусеченной призмы провел уже Мейер Гирш в «Сборнике задач» (т. 2, 1809). Его формула была улучшена и дополнена Штейнером (1837). Штейнер показал также (1842), что объемы тел, основаниями которых служат любые параллельные многоугольники (обелиски и призматоиды), могут быть вычислены по правилу Симпсона (стр. 164) даже при кривых боковых поверхностях определенного вида. Другим способом то же самое доказал Э. Август (Программа, Берлин, 1849).

О треугольнике и его свойствах выпустили еще специальные работы Крелле (Берлин, 1816), К. Фейербах (Нюрнберг, 1822), Л. Шульц фон-Штрасницкий (Вена, 1827), Х. Нагель (Лейпциг, 1836), К. Адамс (Винтертур, 1846) и А. Виганд (Галле, 1848). В этих сочинениях и в параллельно им опубликованных статьях содержалась уже большая часть так называемой современной геометрии треугольников. Особенно известным оказалось сочинение Фейербаха, так как «круг Фейербаха» стал прочным достоянием элементарной математики. Сам этот круг нашли еще раньше наряду с Понселе и Брианшоном (1820/21; см. стр. 409) и некоторые английские математики. Но Фейербаху принадлежала теорема о том, что этот круг касается вписанного круга треугольника и вневписанных кругов его. Известность приобрели и «пары точек Нагеля». Сюда же относится точка, названная именем Э. Гребе (Arch. Math., 1847), которая, впрочем, и тогда уже не была вполне новой, а недавно была переименована в честь Э. Лемуана (1873), положившего начало новому расцвету геометрии треугольников.

Фейербах оставил в рукописи, правда, незаконченной, довольно большое сочинение о тетраэдре, где он независимо от Мёбиуса применял тетраэдрические координаты. Выдержка из рукописи появилась в Нюрнберге в 1827 г. Из многочисленных других исследований о тетраэдре упомянем только работы Карно (1803/06) и Штейнера (1827), из которых последний особенно уделял внимание восьми вневписанным шарам.

§ 10. Неевклидова геометрия

Наиболее важное достижение в рассматриваемом нами периоде в области элементарной геометрии не принадлежало к школьному материалу. Это было создание неевклидовой геометрии, построенной на новом постулате о параллельных. Прежде всего следует указать на предварительные работы Саккери и Ламберта (см. стр. 360—362). Прибавим к этому, что Лежандр в различных изданиях своих «Начал геометрии» неоднократно пытался строго доказать евклидов постулат о параллельных или, что то же самое, показать, что сумма $\sum$ углов треугольника не может быть меньше $2d$. Что $\sum$ не может быть больше $2d$, он доказал, как ему представлялось, безупречно. Однако при этом он предположил как нечто самоочевидное, что прямая имеет бесконечную длину. Хотя Лежандр приложил много усилий, чтобы восполнить пробелы, обнаруженные в его доказательствах, тем не менее в 1833 он вынужден был объявить, что эти доказательства все еще оставляют желать лучшего.

Тем временем юрист Швейкарт заметил, что возможно построить геометрию с $\sum < 2d$ и в начале 1819 письменно сообщил об этом Гауссу. Однако для последнего это не являлось новостью. Не позднее 1816 Гаусс после тщетных долгих трудов, в которых принимал участие его друг — венгр Фаркаш Больаи, понял истинное положение вещей, овладел важнейшими теоремами и прежде всего развил соответствующую гиперболическую тригонометрию. Но об этом узнали только после его смерти, ибо он старательно избегал здесь всякой гласности. Как Гаусс писал в 1829 Бесселю, он боялся «крика беотийцев, который поднимется, если он выскажет свои воззрения целиком». К сожалению, Гаусс сделал и мало заметок. Ф. Тауринус, племянник Швейкарта, продолжил его идеи и, хотя все еще верил в истинность евклидова постулата о параллельных, развил следствия для случая $\sum < 2d$, построив независимо от Ламберта полную сферическую тригонометрию для сферы с мнимым радиусом («Первые начала геометрии», Geometriae prima elementa, Кельн, 1826).

Слава первого опубликования системы неевклидовой геометрии принадлежит русскому ученому Н. И. Лобачевскому. В «Казанском вестнике» (1829/30) была напечатана под названием «О началах геометрии» обработка его более ранней статьи, представленной Университету в 1826 г. Система Лобачевского была та же, что у Гаусса и Тауринуса. Лобачевский полностью разработал свою теорию (элементарно-геометрически, тригонометрически и в координатах) и посвятил ей несколько сочинений (вплоть до 1855), в том числе изданные на немецком языке «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Берлин, 1840). Янош Больаи, сын Фаркаша Больаи, несмотря на предостережения своего отца, безуспешно потратившего два десятилетия на эти вопросы, также тем временем глубоко занялся ими и около 1823 достиг цели. Изложение его результатов на латинском языке было присоединено в виде «Приложения» (Appendix) к «Опыту введения юношества... в начала чистой математики» (Tentamen iuventutem... in elementa matheseos purae... introducendi; Марош Вашаргели, 1832) его отца. Гаусс в своих письмах отзывался с величайшей похвалой о работах Больаи и Лобачевского, однако не дал о них публичного отзыва [1]).

Еще при жизни Гаусса и в его присутствии Б. Риман прочел в 1854 в Гёттингене свою пробную доцентскую лекцию «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen опубликовано в 1868), поднявшую вопрос на новую, существенно более высокую ступень. Он предположил, что пространство хотя и неограничено, но конечно; при этом прямая приобрела конечную длину и стала возможной неевклидова геометрия с $\sum > 2d$, которая в известном смысле интерпретируется как геометрия на поверхности сферы. В своих весьма общих рассмотрениях пространств с произвольным числом измерений (см. стр. 419) Риман вводил в этих пространствах различную меру кривизны, которая существенно обусловливала характер их геометрии. Значение этих идей Римана полностью раскрылось лишь позднее, после того как А. Эйнштейн (1916) воспользовался ими для установления основ своей общей теории относительности.

[1]) Подробнее о работах Лобачевского, Больаи и Гаусса по неевклидовой геометрии, их сравнении и значении в последующем развитии математики см. в работах В. Ф. Кагана и др., указанных в списке литературы. — *Прим. ред.*

Библиография

I. Общие сочинения по истории математики

Archibald R. C., Outline of the history of mathematics, 6-е изд. 1949. (Краткий очерк; в примечаниях много ценных библиографических указаний.)

Bell E. T., The development of mathematics, 2-е изд., Нью-Йорк — Лондон, 1945. (Рассмотрено развитие основных направлений, понятий, проблем до современности.)

Bortolotti E., Storia della matematica elementare. — Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, III_2, Милан, 1950, 539 — 750.

Brunschvicg L., Les étapes de la philosophie mathématique, 3-е изд., Париж, 1929.

Boutroux P., L'idéal scientifique des mathématiciens, Париж, 1920.

Васильев А. В., Математика, вып. 1 (1725 — 1826 — 1863) (очерк истории математики в России до начала 60-х годов XIX в.), Птгр., 1920.

Гнеденко Б. В., Очерки по истории математики в России, М. — Л., 1946.

Hoffman J. E., Geschichte der Mathematik, ч. I (до Ферма и Декарта); ч. II (до открытия исчисления бесконечно малых); ч. III (до времен французской революции), Берлин, 1953 — 1957. (Весьма сжатое, но насыщенное большим и тщательно проверенным фактическим материалом изложение; в тексте и именном указателе многочисленные библиографические справки.)

Cantor M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. II (1200 — 1668); т. III (1668 — 1758); т. IV (1759 — 1799) (при участии V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajory, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti, C. R. Wallner), 3-е изд., Лейпциг, 1907 — 1913. Ср. многочисленные поправки и замечания в Bibliotheca mathematica, 3-я серия: Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors Vorlesungen; в каждом томе даны указания на все замечания, сделанные ранее.

Cajory F., A history of mathematics, 2-е изд., Нью-Йорк, 1929. (История математики доведена до начала XX столетия.)

Cajory F., A history of mathematical notations, т. I — II, Нью-Йорк, 1928 — 1929 (том I посвящен обозначениям элементарной математики, т. II — высшей).

Кеджори Ф., История элементарной математики. Перев. с англ. под ред., с примечаниями и прибавлениями И. Ю. Тимченко, 2-е изд., Одесса, 1917.

Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. I. Перев. с нем. Б. Лившица, А. Лопшица, Ю. Рабиновича, Л. Тумермана, М. — Л., 1937.

Колмогоров А. Н., Математика. — Большая Советская Энциклопедия, 2-е изд., т. 26, 1954, 464 — 483. (Среди прочего содержит периодизацию истории математики и краткий исторический очерк, доведенный до современности. Характеризуя основные периоды, автор показывает, как обогащалось новым содержанием определение математики, данное Ф. Энгельсом в «Анти-Дюринге».)

Loria G., Storia delle matematiche dall' alba della civiltà al secolo XIX. 2-е изд., Милан, 1950.

Mikami Y., The development of mathematics in China and Japan, Лейпциг, 1912.

Severi F. e Conforto E., Caratteri e indirizzi della matematica moderna. — Enciclopedia delle mathematiche elementari e complementi, III_2, Милан, 1950, 751—813.

Smith D. E., History of mathematics, тт. I—II, 2-е изд., Бостон — Лондон, 1928—1930.

Smith D. E. — Mikami Y., A history of Japanese mathematics, Чикаго, 1914.

Struik D. F., A concise history of mathematics, тт. I—II, Нью-Йорк, 1948. (Популярный очерк, изложение доведено до начала XX в.)

Tropfke J., Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung, 2-е изд., тт. I—VII, Берлин и Лейпциг, 1921—1924; 3-е изд., тт. I—IV, 1930—1940.

Unger F., Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart, Лейпциг, 1888.

Цейтен Г. Г., История математики в XVI и XVII веках. Перев. с нем. П. Новикова. Обработка, примечания и предисловие М. Выгодского, 2-е изд., М. — Л., 1938.

Юшкевич А. П., Математика и ее преподавание в России XVII — XIX веков. — Математика в школе, 1947 (№ 1—6); 1948 (№ 1—5); 1949 (№ 1, 3).

Юшкевич А. П., Главы по истории математики в кн. «История естествознания в России», т. I, вып. I—II, М. — Л., 1957; I, 26—48, 215—272, II, 33—89 (изложение доводится до середины XIX в.).

Вилейтнер Г., Хрестоматия по истории математики, составленная по первоисточникам (арифметика и алгебра, геометрия и тригонометрия, аналитическая и синтетическая геометрия, исчисление бесконечно малых). Пер. П. С. Юшкевича и А. П. Юшкевича, 2-е изд., М. — Л., 1935.

Lecat M., Erreurs des mathématiciens des origines à nos jours. Брюссель и Лувен, 1935.

Весьма богаты историческими сведениями и библиографией Encyklopädie der mathemathischen Wissenschaften, тт. 1—6, Лейпциг, 1898—1934 (2-е изд. с 1952) и Encyclopédie des sciences mathématiques, Париж — Лейпциг, 1904 и след., а также Enciclopedia delle mathematiche elementari e complementi, тт. 1—3, Милан, 1930—1950.

Исторические и библиографические данные содержатся в статьях по математике (Алгебра, Геометрия, Дифференциальное исчисление, Интегральное исчисление, Математика, Функция и т. п.) в «Большой Советской Энциклопедии», 2-е изд., М., 1949—1958.

Сжатые биографические сведения с библиографией дает:

Poggendorff J. C., Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften (т. I A — L; т. II M — Z, Лейпциг, 1863, и ряд последующих дополнительных томов).

Müller F., Gedenktagebuch für Mathematiker. 3-е изд., Лейпциг, 1912.

Зарубежная вспомогательная литература по истории математики с большой полнотой указана у
Loria G., Guida allo studio della storia delle matematiche. 2-е изд., Милан, 1946.

В этом труде, однако, почти не учтена литература на русском языке.

О работах советских ученых по истории математики см. в сборниках:

Математика в СССР за тридцать лет, М. — Л., 1948.

Математика в СССР за сорок лет, т. I — II, М., 1959, а также в библиографических трудах:

История естествознания. Литература, опубликованная в СССР (1917—1947), М.—Л., 1949.

История естествознания. Литература, опубликованная в СССР (1948—1950), М., 1955.

Большую ценность для изучения истории математики в России имеют труды:

Бобынин В. В., Русская физико-математическая библиография, тт. I—III (до 1816 г.), М., 1886—1897.

Динзе О. В. и Шафрановский К. И., Математика в изданиях Академии наук СССР, 1728—1935, М. — Л., 1936.

Из журналов по истории науки особенно важны:

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (основаны М. Кантором в 1877), 30 томов.

Archives Internationales d'Histoire des Sciences (издаются с 1947 г.).

Bulletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche (основан Б. Бонкомпаньи в 1868; с 1898 изд. Дж. Лориа).

Bibliotheca mathematica (издававшаяся Г. Энестремом). 1-я серия, 1884—1886; 2-я серия, 1887—1899; 3-я серия, 1900—1916.

Isis (основан Дж. Сартоном в 1914). Содержит, в частности, богатейшую библиографию.

Историко-математические исследования (ежегодные сборники под ред. Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича, с 1948).

Osiris (непериодические сборники, основаны Дж. Сартоном в 1936).

Scripta mathematica. Выходят с 1932.

Труды Института истории естествознания, тт. I—IV, М., 1947—1952.

Труды Института истории естествознания и техники, тт. 1, 5, 10, 15, 17, 19, 22 (1954—1959).

Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем, под ред. В. В. Бобынина (1885—1898; 1899—1904).

Реферативные журналы, в которых имеются отделы истории математики:

Математика;

Mathematical Review;

Zentralblatt für Mathematik.

II. Сочинения по истории отдельных математических наук; биографии

Ahrens W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele, 2-е изд., 2 тома, Лейпциг, 1910—1918.

Boyer C. B., The concepts of the calculus. 2-е изд., 1949.

Boyer C. B., History of analytic geometry, Нью-Йорк, 1956.

Braunmühl A. v., Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2 тома, Лейпциг, 1900—1903.

Brill A. und Nöther M., Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. — Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 3, Берлин, 1894.

Burckhardt H., Entwicklungen nach oscillierenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der Mathematischen Physik. — Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 10, Лейпциг, 1908.

Васильев А. В., Целое число. Исторический очерк. Птрг., 1922.

Гуссов В. В., Работы русских ученых по теории гамма-функций. — Ист.-матем. иссл., V, 1953, 421—472.

Гуссов В. В., Развитие теории цилиндрических функций в России и СССР. — Ист.-матем. иссл., VI, 1954, 355—475.

Grosse H., Historische Rechenbücher des 16 und 17. Jahrhunderts und die Entwicklung ihrer Grundgedanken bis zur Neuzeit. Лейпциг, 1901.

Dickson L. E., History of the theory of numbers, 3 тома, 2-е изд., Вашингтон, 1934.

Engel F. und Stäckel P., Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Лейпциг, 1895.

Enneper A., Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. 2-е изд., Галле, 1890.

Kötter E., Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). — Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 5, Лейпциг, 1901.

Каган В. Ф., Основания геометрии. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии. Одесса, 1907.

Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. I — II. М. — Л., 1949—1956.

Coolidge J. L., A history of geometrical methods. Оксфорд, 1940.

Coolidge J. L., A history of the conic sections and quadric surfaces, Оксфорд, 1945.

Landau E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 2 тома, Лейпциг, 1909 (содержит историю и библиографию вопроса).

Ланков А. В., К истории развития передовых идей в русской методике математики, М., 1951.

Лихин В. В., Теория функций и чисел Бернулли и ее развитие в трудах отечественных математиков. — ИМИ, вып. XII, 59—134.

Loria G., Il passato e il presente delle principali theorie geometriche. — Storia e bibliografia. 4-е изд., Падуя, 1931.

Loria G., Curve piani speciali algebriche e trascendenti, 2 тома, 3-е изд., Милан, 1930. Нем. перевод: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. 2-е изд., 2 тома, Лейпциг, 1911.

Loria G., Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti. 2 тома, Болонья, 1925.

Loria G., Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri, Милан, 1921.

Маркушевич А. И., Очерки по истории теории аналитических функций, М. — Л., 1951.

Matthiessen L., Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen, 2-е изд., Лейпциг, 1896.

Muir Th., The theory of determinants in the historical order of its development, тт. 1—5, Лондон, 1906—1930.

Poudra N. G., Histoire de la perspective ancienne et moderne, Париж, 1864.

Reiff R., Geschichte der unendlichen Reihen, Тюбинген, 1889.

Sachse A., Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Funktionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen, Abh. z. Gesch. d. math. Wiss., 3, 1880.

Стройк Д. Д., Очерк истории дифференциальной геометрии. Пер. с англ. М. Г. Шестопал, под ред. Э. Кольмана, М. — Л., 1941.

Тимченко И. Ю., Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций, т. I — до начала XIX столетия. Одесса, 1899. (В книге собран огромный материал с очень полным указанием источников.)

Todhunter I., A history of the progress of the calculus of variations during the 19-th century, Кембридж и Лондон, 1861.
Todhunter I., A history of the mathematical theory of the probability from the time of Pascal to that of Laplace. Кембридж и Лондон, 1865.
Czuber E., Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. — Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 7, Лейпциг, 1899.
Шаль М., Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов, М., 1871 и 1883.

Из работ историко-биографического характера или посвященных отдельным лицам отметим:

Башмакова И. Г. и Юшкевич А. П., Леонард Эйлер. — Ист.-матем. иссл., VII, 1955, 453—512.
Bell E. T., Men of mathematics. Нью-Йорк, 1937 (Среди других — Декарт, Ферма, Б. Паскаль, Ньютон, Лейбниц, Бернулли, Эйлер, Лагранж, Лаплас, Монж, Фурье, Понселе, Гаусс, Коши, Лобачевский, Абель, Якоби, Гамильтон, Галуа, Сильвестер, Кэли, Вейерштрасс, С. Ковалевская, Буль, Эрмит, Кронекер, Риман, Куммер, Дедекинд, Г. Кантор).
Bertrand J., D'Alembert, Париж, 1889.
Brunet P., A. P. Clairaut. Париж, 1951.
Bjerknes, N. H. Abel, Tableau de sa vie et de son action scientifique. Париж, 1885.
Вавилов С. И., Исаак Ньютон, 2-е изд., М. — Л., 1945.
Worbs E., C. F. Gauss, 2-е изд., Лейпциг, 1955.
Гнеденко Б. В., Михаил Васильевич Остроградский, М., 1952.
Депман И. Я., Замечательные славянские вычислители Г. Вега и Я. Ф. Кулик. — Ист.-матем. иссл., VI, 1954, 573—608.
Dickstein S., Hoëne Wronski. Jego źycie i dzieła, Краков, 1896.
Каган В. Ф., Лобачевский, 2-е изд., М. — Л., 1948.
Cajory F., The Works of W. Oughtred. — Monist, 25, 1915.
Кольман Э., Бернард Больцано. М., 1955.
Coolidge J. L., The mathematics of great amateurs, Оксфорд, 1949. (Среди других биографии Непера, Б. Паскаля, А. Арно, де-Витта, Гудде, Броункера, Лопиталя, Бюффона, Дидро, Горнера и Больцано).
Loria G., M. Chasles e la teoria delle sezioni coniche. — Osiris, I, 1936.
Loria G., J. Liouville and his work. — Scripta mathematica, IV, 1936.
Milhaud G., Descartes savant, Париж, 1921.
Михайлов Г. К., Леонард Эйлер. — Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1955, I, 3—26.
Morgan A., Essays on the life and work of Newton, Чикаго, 1914.
More L. T., Isaac Newton, a biography, Нью-Йорк, 1934.
Nielsen N., Géomètres français sous la Révolution. Копенгаген, 1929.
Пекарский П., История имп. Академии наук в Петербурге, т. I. СПб., 1870 (содержит, среди прочего, биографии работавших в Петербургской Академии Я. Германа, Хр. Гольдбаха, Д. Бернулли, Н. Бернулли, Г. В. Крафта, Л. Эйлера).
Prasad G., Some great mathematicians of the nineteenth century. 2 тома. Бенарес, 1933—1934: (т. I — Гаусс, Коши, Абель, Якоби, Вейерштрасс, Риман; т. II — Кэли, Эрмит, Кронекер, Бриоски, Кремона, Дарбу, Г. Кантор, Миттаг-Леффлер, Клейн, Пуанкаре).
Прудников В. Е., В. Я. Буняковский — ученый и педагог, М., 1954.
Прудников В. Е., Русские математики-педагоги, М., 1957 (Краткие биографии Л. Ф. Магницкого, С. К. Котельникова, С. Я. Румовского, Н. Г. Курганова, М. Е. Головина, Т. Ф. Осиповского и многих других).
Scott J. F., The mathematical works of John Wallis, Лондон, 1938.
Смирнов В. И., Даниил Бернулли, в книге: Бернулли Д., Гидродинамика или записки о силах и движении жидкостей. Пер. В. С. Гохмана, комм.

и ред. А. И. Некрасова и К. К. Баумгарта, статья В. И. Смирнова, Л., 1959, 433—501.
Taton R., L'oeuvre mathématique de G. Desargues, Париж, 1951.
Taton R., L'oeuvre scientifique de Monge, Париж, 1951.
Turnbull H. W., The mathematical discoveries of Newton, Лондон и Глазго, 1945.
Tweedie Ch., James Stirling. A sketch of his life and works, along with his scientific correspondence, Оксфорд, 1922.
Walker H. M., Abraham de Moivre. — Scripta mathematica, II, 1934.
Fleckenstein J. O., Johann und Jacob Bernoulli, Базель, 1949.
Speiser A., Die Basler Mathematiker. Базель, 1939.
Spiess O., Die Mathematiker Bernoulli. Базель, 1948.
Spiess O., Leonhard Euler. Ein Beitrag zum Geistesgeschichte des 18. Jahrhundert. Лейпциг, 1929.
Юшкевич А. П., Академик С. Е. Гурьев и его роль в развитии русской науки. — Труды Инст. ист. естеств., I, 1947, 219—268.
Юшкевич А. П., Эйлер и русская математика в XVIII в. — Труды Инст. ист. естеств., III, 1949, 45—116.

Биографические сведения, характеристика научного творчества в целом и в отдельных направлениях содержатся в статьях, приложенных к указанным далее изданиям сочинений классиков математики, а также в следующих сборниках:

James Gregory. Tercentenary memorial volume. Containing his correspondence with John Collins and his hitherto unpublisched mathematical manuscripts. Ed. by H. W. Turnbull, Лондон, 1938.
Исаак Ньютон. 1643—1727. Сборник статей к 300-летию со дня рождения. Под ред. С. И. Вавилова. М. — Л., 1943.
Московский университет — памяти Исаака Ньютона. 1643—1943. Сборник статей. М., 1946.
Festschrift z. Feier d. 200. Geburtstages L. Eulers (Abh. Gesch. d. math. Wiss., 25), Лейпциг, 1907.
Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти Леонарда Эйлера, М. — Л., 1935.
Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР. Под редакцией М. А. Лаврентьева, А. П. Юшкевича, А. Т. Григорьяна. М., 1958.
Сборник статей к 200-летию со дня рождения Ж.-Л. Лагранжа, М. — Л., 1937.
Гаспар Монж. Сборник статей к двухсотлетию со дня его рождения. Под ред. В. И. Смирнова. Л., 1947.
N. H. Abel. Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Христиания, 1902.
Карл Фридрих Гаусс. Сборник статей, под общей ред. И. М. Виноградова, М., 1956.
C. F. Gauss, Gedenkband anlässlich des 100. Todestages am 23 Februar 1955. Hsg. von H. Reichardt. Лейпциг, 1957.
М. В. Остроградский. Празднование столетия со дня его рождения, Полтава, 1902 (речи А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова и др.).
Научное наследие П. Л. Чебышева. Вып. I. Математика; вып. II. Теория механизмов. М. — Л., 1945.

III. Собрания сочинений, новые издания классиков, переписка

Abel N. H., Oeuvres complètes, publiées par Sylow et S. Lie, 2 тома, Париж, 1881.
Argand R., Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions mathématiques, Париж, 1874.

Bernoulli Jac., Opera, 2 тома, Женева, 1744.
Bernoulli Joh., Opera omnia, 4 тома, Лозанна и Женева, 1742.
Bernoulli Joh., Lectiones de calculo differentialium. Verhandlungen der Naturforsch. Gesellschaft in Basel, т. 34, 1—12.
Bolzano B., Schriften (издаются с 1930 в Праге).
Barrow J., Geometrical lectures, ed. by J. M. Child. Чикаго, 1916.
Cauchy A., Oeuvres complètes, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences, 28 томов. Париж, 1882—1932.
Cayley A., The collected mathematical Papers, 13 томов, Кембридж, 1889—1898.
Desargues G., Oeuvres réunies et analysées par N. G. Poudra, 2 тома, Париж, 1864.
(Точный текст «Чернового наброска» Дезарга воспроизведен в книге Р. Татона, указанной на стр. 438.)
Descartes R., Oeuvres complètes, éd. Ch. Adam et P. Tannery, 12 томов, Париж, 1897—1910 («Геометрия» — в т. 6; т. 12 — обширная биография, написанная Ш. Адамом).
Euler L., Opera omnia. — Издаются Швейцарским обществом естествоиспытателей (Schweizerische Naturforsch. Gesellschaft) под ред. F. Rudio, A. Speiser и др. Выходят в трех сериях с 1911 г. До сих пор вышли в первой серии — математической — тт. 1—28, во второй серии — механико-астрономической — тт. 1—5, 10, 12—15, в третьей серии — физической — тт. 1—4 (во многих томах этого издания имеются ценные вступительные статьи с описанием и критическим обзором их содержания).
Fagnano G. C., Opere matematiche, 3 тома, Рим, 1911.
Fermat P., Oeuvres, éd. P. Tannery et Ch. Henry, 4 тома, Париж, 1891—1912. (Основные сочинения — в т. I; франц. пер. — в т. III. Дополнительный том «Supplément aux tt. I—IV» издал по новым обнаруженным материалам M. C. de Waard, Париж, 1922).
Fourier J. B., Oeuvres publiées par G. Darboux, 2 тома, Париж, 1888—1890.
Galilei G., Opere. Ed. nazionale. Ed. A. Favaro, 20 томов, Флоренция, 1929—1939.
Galois E., Oeuvres mathématiques, publiées par E. Picard, Париж, 1897.
Gauss C. F., Werke, hrsg. von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 12 томов, 1863—1933.
Grassmann H., Gesammelte mathematische und physikalische Werke, 3 тома, Лейпциг, 1894—1911.
Huygens Chr., Oeuvres complètes, publiées par la Société hollandaise des sciences. 20 томов, Гаага, 1888—1940.
Jacobi K. G., Gesammelte Werke, hrsg. von C. W. Borchardt, A. Clebsch, K. Weierstrass, 8 томов, Берлин, 1881—1891.
Kepler Ioh., Opera omnia, ed. Chr. Frisch, 7 томов, Франкфурт и Эрланген, 1858—1871.
Lagrange J. L., Oeuvres, éd. J. A. Serret et G. Darboux, 14 томов, Париж, 1867—1892.
Lambert J. H., Opera mathematica, ed. A. Speiser, т. I, Цюрих, 1946; т. II, 1948.
Laplace P. S., Oeuvres complètes, 14 томов, Париж, 1878—1912.
Leibniz G. W., Mathematische Schriften, hrsg. von C. I. Gerhardt, 7 томов, Галле, 1849—1863 (включает научную переписку Лейбница).
Leibniz G. W., Opuscules et fragments inédits, éd. L. Couturat, Париж, 1903.
Лобачевский Н. И., Полное собрание сочинений. Гл. ред. В. Ф. Каган, 5 томов, М. — Л., 1946—1951. (издание содержит вступительные статьи и комментарии, незаменимые при изучении творчества Лобачевского).

Newton Is., Opera quae exstant omnia, ed. S. Horsley, 5 томов, Лондон, 1779—1785.
Остроградский М. В., Избранные труды. Ред. В. И. Смирнова, статья Б. В. Гнеденко и И. А. Марона, примечания В. И. Антроповой, И. Б. Погребысского, Н. Н. Полякова, Е. Я. Ремеза, В. И. Смирнова, Г. М. Фихтенгольца, Л., 1958.
Остроградский М. В., Полное собрание сочинений, т. II. Лекции алгебраического и трансцендентного анализа. М.—Л., 1940.
Pascal Bl., Oeuvres, publiées par L. Brunschvicg, P. Boutroux et F. Gazier, 14 томов, Париж, 1908—1914.
Plücker J., Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen, 2 тома, Лейпциг, 1895—1896.
Riccati J., Opere, 4 тома, Лукка, 1761—1765.
Riemann B., Gesammelte mathematische Werke. Лейпциг, 1896.
Ruffini P., Opere matematiche, тт. 1—2, Палермо, 1915—1943.
Steiner J., Gesammelte Werke, тт. 1—2, Берлин, 1881—1882.
Torricelli E., Opere. Ed. G. Loria e G. Vassura, 4 тома, Фраенца, 1919—1944.
Чебышев П. Л., Полное собрание сочинений, 5 томов, М. — Л., 1944—1951. (Издание содержит комментарии к отдельным работам Чебышева; большое значение при изучении последних имеет сборник «Научное наследие П. Л. Чебышева», указанный на стр. 438.)
Wallis J., Opera mathematica, 3 тома, Оксфорд, 1695—1699.
Wessel C., Essai sur la représentation analytique de la direction. Publié avec les préfaces de H. Valentiner et H. T. N. Thiele, Копенгаген, 1897.
Weierstrass K. F., Mathematische Werke, 7 томов, Берлин, 1894—1927.
Wronsky H., Oeuvres mathématiques, 4 тома, Париж, 1925.
Biot J. F. et Lefort F., Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysi promota etc. (оригинал 1712 и 1722), Париж, 1856.

Важнейшие источники по вопросу об открытии исчисления бесконечно малых. Переписка отдельных ученых

Leibniz G. W. et Bernoulli Joh. Commercium philosophicum et mathematicum (1694—1716), 2 тома, Лозанна и Женева, 1745.
Gerhardt C. I., Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern. т. I (единственный), Берлин, 1898.
Bernoulli Joh. et A. de Moivre, Переписка, Verhandl. d. Naturforsch. Gesellschaft in Basel, т. 43, 1933.
Rigaud S. P., Correspondence of scientific men of the 17-th century, ed. S. J. Rigaud, 2 тома, Оксфорд, 1841.
Edleston I., Correspondence of I. Newton and Cotes etc., Лондон, 1850.
Lambert J. H., Deutscher gelehrter Briefwechsel, hrsg. von J. Bernoulli, 5 томов, Берлин, 1781—1784.
Fuss P. H., Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du 18-ème siècle, 2 тома, СПб., 1843. (Первый том содержит переписку Л. Эйлера с Хр. Гольдбахом, второй — ряд писем Иог. I, Дан., Ник. I Бернулли, Эйлера и др.).
Halley E., Correspondence and papers of Edmund Halley, Оксфорд, 1932.
Briefwechsel von Johann Bernoulli, hrsg. von O. Spiess, т. I, Базель, 1955. (Основную часть составляет переписка Бернулли с Лопиталем.)

Переписка Декарта, Ферма, Паскаля, Гюйгенса, Лейбница, Галилея, Лобачевского, Чебышева опубликована в приведенных собраниях сочинений.

Колоссальная и весьма важная переписка Л. Эйлера (сохранилось более 2800 писем) издана лишь в незначительной части, например, помимо указанной выше публикации П. Г. Фуса, часть переписки

с Ж. Даламбером напечатана в Bulletino di bibliografia e storia delle scienze matem. e fis., т. XIX (1886), часть переписки с И. (I) Бернулли в Bibl. math. (3), 4 (1903), (3), 5 (1904) и (3) 6 (1905), переписка с И. Г. Ламбертом в Abhandl. der Preuss. Akad. der Wissenschaften, 1924. Phys.-math. Klasse, № 2, переписка с Я. В. Брюсом и Дж. Стирлингом. — Ист.-матем. иссл., X, 1957 и т. д.

В русском переводе имеются

Больаи Я., Appendix. Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную... Перевод, вступит. статья и примеч. В. Ф. Кагана, М. — Л., 1950.

Больцано Б., Парадоксы бесконечного. Перевод под ред. И. В. Слешинского, Одесса, 1911.

Больцано Б., Чисто-аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения (в книге Э. Кольмана, см. стр. 437).

Галилей Г., Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки... Перев. С. Н. Долгова. Редакция, предисловие и примечания А. Н. Долгова, М. — Л., 1934.

Галуа Э., Сочинения. Перев. Н. Н. Меймана. Редакция и примечания Н. Г. Чеботарева. С приложением статьи П. Дюпюи, Жизнь Эвариста Галуа, М. — Л., 1936.

Гаусс К. Ф., Отрывки из писем и черновые наброски, относящиеся к неевклидовой геометрии. Перев. В. Ф. Кагана и А. П. Нордена. В сб. «Об основаниях геометрии» под ред. А. П. Нордена, М., 1956, 101—120.

Гаусс К. Ф., Общие исследования о кривых поверхностях. Пер. П. Краснова под ред. К. А. Поссе. В сб. «Об основаниях геометрии», 123—161.

Гюйгенс Х., Три мемуара по механике. Перев., ред. и примеч. К. К. Баумгарта, Л., 1951.

Дедекинд Р., Непрерывность и иррациональные числа. Пер. С. Шатуновского, 3-е изд., Одесса, 1914.

Декарт Р., Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. Перевод, примечания и статья А. П. Юшкевича, М. — Л., 1938.

«Геометрия» издана также в книге:

Декарт Р., Рассуждение о методе. С приложениями: Диоптрика, Метеоры, Геометрия. Ред. Г. Г. Слюсарева и А. П. Юшкевича, Л., 1953.

Кавальери Б., Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. Перевод со вступительной статьей и примечаниями С. Я. Лурье, М. — Л., 1940.

Кеплер И., Новая стереометрия винных бочек. Перевод Г. Н. Свешникова. Вступительная статья М. Я. Выгодского, М. — Л., 1934.

Карно Л., Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. Перев. Н. М. Соловьева. Редакция и вступительная статья А. П. Юшкевича. 2-е изд., М. — Л., 1936.

Коши О., Алгебраический анализ, перев. Ф. Эвальди, В. Григорьева, А. Ильина, Лейпциг, 1864.

Коши А., Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, перев. В. Я. Буняковского. СПб., 1831.

Лаплас П., Опыт философии теории вероятностей. Перевод под ред. А. К. Власова, М., 1908.

Лежен-Дирихле П., Лекции по теории чисел, пер. А. И. и С. И. Каменецких под ред. Б. И. Сегала, М. — Л., 1936.

Лейбниц Г. В., Избранные отрывки из математических сочинений. Сост. и пер. А. П. Юшкевич. — Успехи матем. наук, 1948, 3, 1 (23), 150—204.

Листинг И. Б., Предварительные исследования по топологии. Пер. под ред. Э. Кольмана, М., 1932.

Лопиталь Г. Ф., Анализ бесконечно малых. Пер. Н. В. Леви. Редакция, вступительная статья и примечания А. П. Юшкевича. М. — Л., 1935.

Миндинг Ф., Статьи о внутренней геометрии поверхностей. В сб. «Об основаниях геометрии», 162—179.

Монж Г., Начертательная геометрия. Пер. В. Ф. Газе, ред. и статья Д. И. Каргина, Л., 1947.

Монж Г., Приложение анализа к геометрии. Пер. В. А. Гуковской. Редакция, предисловие и примечания М. Я. Выгодского, М. — Л., 1936.

Ньютон И., Всеобщая арифметика. Перевод, статья и комментарии А. П. Юшкевича, М. — Л., 1948.

Ньютон И., Математические начала натуральной философии. Перевод с примечаниями и пояснениями А. Н. Крылова. 2-е изд., М. — Л., 1936 (в «Собрании трудов» акад. А. Н. Крылова, т. VII).

Ньютон И., Математические работы. Перевод, вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, М. — Л., 1937.

«О квадратуре круга». С приложением истории вопроса, составленной Ф. Рудио. Перевод под редакцией и с примечаниями С. Н. Бернштейна. М. — Л., 1934. — Содержание: Архимед, «Измерение круга»; Х. Гюйгенс, «О найденной величине круга»; И. Г. Ламберт, «Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга»; Лежандр А. М., «Доказательство того, что отношение окружности к диаметру и его квадрат суть иррациональные числа».

Петерсон К. М., Об изгибании поверхностей. Комментарии С. Д. Россинского. — ИМИ, вып. V, 1952, стр. 85—133.

Риман Б., Сочинения. Перев. под ред., со статьей и примечаниями В. Л. Гончарова, М. — Л., 1948.

Эйлер Л., Введение в анализ бесконечно малых, т. I. Перевод Е. Л. Пацановского. Редакция, вступительная статья и примечания С. Я. Лурье, М. — Л., 1936.

Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, Перев., статья и примеч. М. Я. Выгодского, М. — Л., 1949.

Эйлер Л., Интегральное исчисление, т. I. Перев. С. Я. Лурье и М. Я. Выгодского, М., 1956; т. II, перев. И. Б. Погребысского, М., 1957; т. III, перев. Ф. И. Франкля, М., 1958.

Эйлер Л., Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. Перевод Я. М. Боровского. Редакция, статья и примечания Н. С. Кошлякова. М. — Л., 1934.

Эйлер Л., Универсальная арифметика. 2 тома. Перевод П. Иноходцева и И. Юдина. СПб., 1768—1769.

В серии Оствальда (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig und Berlin) опубликовано большое число немецких переводов и текстов классических работ Лейбница, Ньютона, И. и Я. Бернулли, Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Коши, Фурье, Якоби, Штейнера, Грина и др. Эти переводы снабжены небольшими статьями и пояснительными замечаниями. Перечислить их здесь невозможно; каталог ранее вышедших приложен почти к каждому выпуску этой серии.

IV. Дополнительная литература к части 1

К гл. I (Арифметика)

Bosmans H., La première édition de la «Clavis mathematica» d'Oughtred. — Ann. Soc. scient. Bruxelles, 35, 1911, 24—78.

Lampe E., Zur Entstehung der Begriffe der Exponentialfunktion und der logarithmischen Funktion eines komplexen Arguments bei Leonhard

Euler. — Abh. z. Gesch. d. math. Wiss., 25 (Festschrift z. Feier d. 200. Geburtstages Leonhard Fulers. Лейпциг, 1907), 117—137.
Eneström G., Die geometrische Darstellung imaginärer Grössen bei Wallis. — Bibl. math. (3), 7, 1907, 263—269.
Таннри Ж. и Мольк Ж., Основные принципы арифметики. «Новые идеи в математике», № 4, «Учение о числе», пер. П. С. Юшкевича. СПб., 1913.
Mitchell V. G. and Strain M., The number e. — Osiris, I, 1936.
Молодший В. Н., Основы учения о числе в XVIII веке, М., 1953.
Хованский А. Н., Работы Л. Эйлера по теории цепных дробей. — Ист.-матем. иссл., X, 1957, 305—326.
Cajory F., History of the logarithmic slide rule, New York. 1909.

К гл. II (Алгебра)

Башмакова И. Г., О доказательстве основной теоремы алгебры. — Ист.-матем. иссл., X, 1957, 257—304.
Башмакова И. Г., Об одном вопросе теории алгебраических уравнений в трудах И. Ньютона и Э. Варинга. — ИМИ, вып. XII, стр. 431—456.
Burkhardt H., Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini. — Zeitschr. Math. Phys., 37, Suppl., 1892, 119—159.
Cajory F., Fouriers improvement of the Newton — Raphson method of approximation anticipated by Mourraille. — Bibl. math., (3), 11, 1911, 132—137.
Loria G., Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebraiche. — Bibl. math. (2), 5, 1891, 99—112; (2), 7, 1893, 47—50.
Мордухай-Болтовской Д. Д., Два основных источника методов решения уравнений. — Известия Сев.-Кавк. гос. ун-та, III (XV), 1928, 36—46.
Мордухай-Болтовской Д. Д., Первые шаги буквенной алгебры.— Известия Сев.-Кавк. гос. ун-та, III (XV), 1928, 66—83.
Pierpont J., Zur Geschichte der Gleichung 5. Grades (bis 1858). — Monatsh. f. Math., 6, 1895, 15—68.
Успенский Я., Очерк истории логарифмов, Птгр., 1923.
Чеботарев Н. Г., О значении работ Лагранжа по теории чисел и алгебре. Сборник «Ж. Л. Лагранж», 85—104 (см. стр. 440).

К гл. III (Теория чисел)

Archibald R. C., Goldbach's theorem. — Scripta mathematica, III, 1935, 44—50, 153—161 (доходит до работы Л. Г. Шнирельмана).
Baumgart O., Über die quadratischen Reziprozitätsgesetze. — Zeitschr. f. Math. u. Phys., 30, 1885, 169—236, 241—277.
Башмакова И. Г., Обоснование теории делимости в трудах Е. И. Золотарева. — Ист.-матем. иссл. II, 1949, 233—351.
Венков В. А., О работах Эйлера по теории чисел. — Сборник «Леонард Эйлер», М. — Л., 1935, 81—87.
Wertheim G., Pierre Fermat's Streit mit John Wallis. Ein Beitrag zur Geschichte der Zahlentheorie. — Abh. z. Gesch. d. math. Wiss., 9, 1889.
Гельфонд А. О., Очерк истории и современного состояния теории трансцендентных чисел. — Естествознание и марксизм, 1930, 1 (5), 33—55.
Гельфонд А. О., Трансцендентные числа. Труды Второго всесоюзного математического съезда, т. I. Л. —М., 1935, 141—164.

Гельфонд А. О., Роль работ Л. Эйлера в теории чисел. Сб. «Леонард Эйлер», М., 1958, 80—97.
Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М. — Л., 1947.
Делоне Б. Н., Работы Гаусса по теории чисел. — Сб. «Карл Фридрих Гаусс», М, 1956, 11—112.
Копеп Н., Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$. Лейпциг, 1901.
Мельников И. Г., Эйлер и его арифметические работы. — Ист.-матем. иссл., X, 1957, 211—218.
Мельников И. Г. и Киселев А. А., К вопросу о доказательстве Эйлером теоремы существования первообразного корня. — Ист.-матем. иссл. X, 1957, 229—256.
Pringsheim A., Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und Π. — Stzgsber. (math.-phys.) Akad. Wiss., München, 28, 1898, 325—337.

К гл. IV (Комбинаторика и теория вероятностей)

Бирман К. Р., Задачи генуэзского лото в работах классиков теории вероятностей. — Ист.-матем. иссл,. X, 1957, 649—670.
Гнеденко Б. В., О работах Леонарда Эйлера по теории вероятностей, теории обработки наблюдений, демографии и страхованию. Сб. «Леонард Эйлер», М., 1958, 184—208.

К гл. V (Предыстория исчисления бесконечно малых)

Bortolotti E., L'infinito ed il limite nel Rinascimento italiano. — Bolletino della Unione matematica italiana, XVII, 1939.
Bortolotti E., I primi algorithmi infiniti nelle opere dei matematici italiani del secolo XVII. — Bolletino della Unione matematica italiana, XVII, 1939.
Bortolotti E., L'opera geometrica di Evangelista Torricelli (в кн. E. Torricelli, Opere, т. IV, 301—337).
Wallner C. R., Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs von Cavalieri bis Wallis. — Bibl. math. (3), 4, 1903, 28—47.
Wallner C. R., Über die Entstehung des Grenzbegriffs. — Bibl. math (3), 4, 1903, 246—259.
Wallner C. R., Entwicklungsgeschichtliche Momente bei Entstehung des Infinitesimalrechnung. — Bibl. math. (3), 4, 1904, 113—124.
Wieleitner H., Das Fortleben der Archimedischen Infinitesimalmethoden bis zum Beginn des XVII. Jahrhunderts. — Quellen und Studien. (B) I, 1930.
Hofmann J. E., Das Opus Geometricum des Gregorius a. S. Vincentio und seine Einwirkung auf Leibniz, Берлин, 1941.
Rosenfeld L., R. F. de-Sluse et le problème des tangentes. — Isis, 10, 419—434.
Scriba C. J., James Gregory's frühe Schriften zur Infinitesimalrechnung. Гессен, 1957.
Walker E., A Study of the Traité des indivisibles of Gilles Personne de Roberval, Нью-Йорк, 1932.
Fellman E. A., Die mathematischen Werke von Honoratius Fabry, Physis, I, 1959.
Zeuthen H. G., Notes sur l'histoire der mathématiques. IV. Sur les quadratures avant le calcul intégral et en particulier sur celle de Fermat; VII. Barrow, Le maître de Newton. — Bull. de l'Acad. des Sciences de Danemark, 1895, 37—80; 1897, 567—606.
Child J. M., The Lectiones Geometricae of Isaac Barrow. — Monist, 26, 1916.

К гл. VI (Открытие исчисления бесконечно малых)

Vivanti G., Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Saggio storico. 2-е изд., Неаполь, 1901.
Hofmann J. E., Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672—76), Мюнхен, 1949.
Mahnke D., Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis. — Abh. Ak. Wiss., Berlin, 1925, Phys. math. Kl., I.
Mahnke D., Zur Keimesgeschichte der Leibnizschen Differentialrechnung. — Sitzber. d. Gesellsch. z. Beförderung d. ges. Naturw. z. Marburg, 67. Берлин, 1932.
Fleckenstein J. O., Der Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton, Базель, 1956.
Zeuthen H. G., Notes sur l'histoire des mathématiques. — V. Sur le fondement mathématique de l'invention du calcul infinitésimal. — VI. Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton. — Bull. de l'Acad. des Sciences de Danemark, 1895. 193—278.
Штыкан А. Б., Интегрирующий механизм Лейбница. — Усп. матем. наук, VII, 1 (47), 1952, 191—194.

К гл. VII (Разработка исчисления бесконечно малых)

Braunmühl A., Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung bei Newton und Cotes. — Bibl. math. (3), 5, 1904, 355—365.
Burkhardt H., Über den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit von 1750—1860. — Math. Ann., 70, 1911, 169—206 (Gratulationsschrift zum 60. Geburtstage von Alfred Pringsheim, Leipzig, 1910, 41—78).
Eneström G., Die erste Herleitung von Differentialen trigonometrischer Funktionen. — Bibl. math., (3), 9, 1919, 200—205.
Eneström G., Über die erste Aufnahme der Leibnizschen Differentialrechnung. — Bibl. math. (3), 9, 1909, 300 — 320.
Eneström G., Über eine von Euler aufgestellte allgemeine Konvergenzbedingung. — Bibl. math. (3), 6, 1906, 186—189.
Hofmann J. E., Über Jacob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimal-Mathematik, Женева, 1956.
Hofmann J. E., Um Eulers erste Reihenstudien. В сб. Sammelband der zu Ehren Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften vorgelegten Abhandlungen, u. Red. v. K. Schröder, Берлин, 1959, 139—208.
Landau E., Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion. — Bibl. math. (3), 7, 1907, 69—79.
Pringsheim A., Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes. — Bibl. math. (3), 1, 1900, 433—479.
Pringsheim A., Über ein Eulersches Konvergenzkriterium. — Bibl. math. (3), 6, 1906, 252—256.
Stäckel P., Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen. — Bibl. math. (3), 8, 1908, 37—60.
Stäckel P., Integrationen durch imaginäres Gebiet. Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionentheorie. — Bibl. math. (3), 1, 1900, 109—128.
Stäckel P., Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im 18. Jahrhundert. — Bibl. math. (3), 2, 1901, 111—121.
Юшкевич А. П., О возникновении понятия об определенном интеграле Коши. — Труды Инст. ист. естеств., 1, 1947, 373—411.

По истории идей обоснования анализа в XVIII в. см.:
К. Маркс, Математические рукописи. — Сб. «Марксизм и естествознание». М., 1933, 4—61.
Выгодский М. Я., Математическая строгость в XVIII в. — Труды совещ. по истории естеств. 24—26 дек. 1946, М.—Л., 1948, 183—190.
Cajory F., A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse, Чикаго—Лондон, 1919.
Колмогоров А. Н., Ньютон и современное математическое мышление. — Сб. «Московский университет — памяти Исаака Ньютона», М., 1946, 27—42.
Крамар Ф. Д., Вопросы обоснования анализа в трудах Валлиса и Ньютона. — Ист.-матем. иссл., III, 1950, 486—508.
Лузин Н. Н., Ньютонова теория пределов. — Сб. «Исаак Ньютон», М.—Л., 53—74.
Лурье С. Я., Предшественники Ньютона в философии бесконечно малых. — Сб. «Исаак Ньютон», М.—Л., 1943, 75—98.
Маркушевич А. И., Основные понятия математического анализа и теории функций в трудах Эйлера. Сб. «Леонард Эйлер», М., 1958, 98—132.
Мордухай-Болтовской Д. Д., Генезис и история теории пределов (XVIII в.). — Изв. Сев.-Кавк. гос. ун-та, III (XV), 1928.
Рыбников К. А., О так называемых творческих и критических периодах в истории математического анализа. — Ист.-матем. иссл., VII, 1955, 643—655.
Рыбников К. А., О роли алгоритмов в истории обоснования математического анализа. — Труды Инст. ист. ест. и техн., 17, 1957, 287—299.
Рыбников К. А., Об алгебраических корнях дифференциального исчисления. — Ист.-матем. исслед., XI, 1958, 583—592.
Харди Г., Расходящиеся ряды, перев. Д. А. Райкова, М., 1951 (содержит ценные исторические справки).
Juschkewitsch A. P., Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis. В сб. Sammelband der zu Ehren Leonhard Eulers... vorgelegten Abhandlungen, Берлин, 1959, 224—244.
Яновская С. А., О математических рукописях К. Маркса. — Сб. «Марксизм и естествознание», М., 1933, 136—180.
Яновская С. А., Мишель Ролль как критик анализа бесконечно малых. — Труды Инст. ист. естеств., I, 1947, 327—346.

К гл. VIII (Дифференциальные уравнения)

Rothenberg S., Geschichtliche Darstellung der Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen totaler Differentialgleichungen von der ersten Ordnung mit zwei variablen Grössen. — Abh. z. Gesch. d. math. Wiss., 20, 3. Stück, 1908 (Inaug. — Diss. Techn. Hochsch., Мюнхен, 1908).
Симонов Н. И., О научном наследии Л. Эйлера в области дифференциальных уравнений. — Ист.-матем. иссл., VII, 1954, 513—595.
Симонов Н. И., О первых исследованиях Ж. Даламбера и Л. Эйлера по теории линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. — Ист.-матем. иссл., IX, 1956, 789—803.
Симонов Н. И., Об исследованиях Л. Эйлера по интегрированию линейных уравнений и систем линейных уравнений с частными производными. — Ист.-матем. иссл., X, 1957, 327—362.
Симонов Н. И., Прикладные методы анализа у Эйлера, М., 1957.
Франкль Ф. И., Об исследованиях Л. Эйлера в области теории уравнений в частных производных. — Ист.-матем. иссл., VII, 1954, 596—624.
Eneström G., Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants. — Bibl. math. (2), 11, 1897, 43—50.

К гл. IX (Вариационное исчисление, исчисление конечных разностей и интерполирование)

А л е к с а н д р о в а Н. В., Некоторые вопросы истории вариационного исчисления в XVIII—XIX вв., Труды Ин-та ист. естеств. и техн., т. 22, 1959, 251—271.
B r a u n m ü h l A., Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation. — Bibl. math. (3) 2, 1901, 86—96.
H o f m a n n J. E. und W i e l e i t n e r H., Die Differenzenrechnung bei Leibniz. Mit Zusätzen von D. Mahnke Берлин, 1931.
C a r a t h é o d o r y G., The beginning of research in the calculus of variations. — Osiris, III. 1937.
K n e s e r A., Euler und die Variationsrechnung. — Abh. z. Gesch. d. math. Wiss., 25 (Festschr. z. Feier d. 200. Geburtstages Leonhard Eulers), 21—60.
Р ы б н и к о в К. А., Первые этапы развития вариационного исчисления. — Ист.-матем. иссл., II, 1949, 355—498.
S t ä c k e l P., Variierte Kurven bei Daniel Bernoulli und Leonhard Euler. Arch. f Gesch. d. Naturw. und d. Technik, 1, 1909, 293—300. (Festschr. Moritz Cantor anlässlich seines achtzigsten Geburtstages gewidmet. Лейпциг, 1909, 1—8.)

V. Дополнительная литература к части II

К гл. I (Аналитическая геометрия на плоскости)

W e i n r e i c h W., Die Fadenzeichnung der Hyperbel mit Bemerkungen über die Gärtnerkonstruktion des Ellipse. — Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 26, 1918, 284—291.
W i e l e i t n e r H., Marino Ghetaldi und die Anfänge der Koordinatengeometrie. — Bibl. math. (3), 13, 1912/13, 242—247.
W i e l e i t n e r H., Über zwei algebraischen Einleitungen zu Descartes «Geometrie», Blätter (bayer.) Gymn. Schulw., 49, 1913, 299—313.
W i e l e i t n e r H., Zur Erfindung der analytischen Geometrie. — Zeitschr. math. nat. Unt., 47, 1916, 414—426.
W i e l e i t n e r H., Über den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme. — Bibl. math. (3), 14, 1913/14, 193—243.
З у б о в В. П., Трактат Николая Орема «О конфигурации качеств», Ист.-матем. иссл., XI, 1958, 601—731.
V o n G e e r P., Johan de-Witt als wiskundige. — Niew Arch. Wisk. Genoots. Amsterdam (2), 11, 1914, 98—126.
C o o l i d g e J., The origin of analytic geometry. — Osiris, I, 1936.
L o r i a G., Pour une histoire de la géometrie analytique. — Verh. 3. Int. Math. Kongr. Heidelberg (1904), Лейпциг, 1905, 562—574.
М о р д у х а й-Б о л т о в с к о й Д. Д., Из прошлого аналитической геометрии. — Труды Инст. ист. естеств., IV, 1952, 216—235.
Я н о в с к а я С. А., Геометрия Декарта. — «Фронт науки и техники», 1937, 6, 25—35.

К гл. II (Аналитическая геометрия пространства и поверхности)

W i e l e i t n e r H., Die Anfänge der analytischen Raumgeometrie. — Zeitschr. math. nat. Unt., 49, 1918, 73—79.

К гл. III (Общая теория кривых высшего порядка)

Braunmühl A., Historische Studie über die organische Erzeugung ebenen Curven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts. — Katalog math. u. math.-phys. Modelle usw., herausgeg. v. W. Dyck., Мюнхен, 1892, 54—88.

Wieleitner H., Zwei Bemerkungen zu Stirlings «Lineae tertii ordinis Neutonianae». — Bibl. math. (3), 14, 1913/14, 55—62.

Глаголев Н. И., Ньютон как геометр. — Сб. «Московский университет — памяти Исаака Ньютона», М., 1946, 71—80.

Делоне Б. Н., Эйлер как геометр. Сб. «Леонард Эйлер», М., 1958, 133—183.

Розенфельд Б. А., Геометрические преобразования в работах Леонарда Эйлера. — Ист.-матем. иссл., X, 1957, 371—422.

Turrière É., La notion de transcendance géometrique chez Descartes et Leibniz. L'interscendance leibnizienne et l'hypertranscendance. — Isis. 2, 1914, 106—124.

К гл. IV (Специальные кривые)

(Hahn-) Nugel Frieda, Die Schraubenlinien, Diss., Галле, 1912. (Содержит точные литературные указания и учитывает историю вопроса.)

Gomes Teixeira F., Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches. I—II, III, Коимбра, 1908/09, 1915 (Obras, IV—V, VII).

К гл. V (Дифференциальная геометрия)

Müller Franz Joh., Studien zur Geschichte der theoretischen Geodäsie, Аугсбург, 1918.

Stäckel P., Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien. — Ber. Ges. Wiss. Leipz. (math.-phys. Kl.), 45, 1893, 444—467.

Eneström G., Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques. — Bibl. math. (2), 13, 1899, 19—24.

К гл. VI (Учение о перспективе и начертательная геометрия)

Wieleitner H., Die Behandlung der Perspektive bei Murdoch. — Bibl. math. (3), 14, 1913/14, 320—355.

Wieleitner H., Zur Erfindung der verschiedenen Distanzkonstruktionen in der malerischen Perspektive. — Repert. für Kunstwiss., 42, 1920, 249—262.

Panofsky E., Dürers Kunsttheorie, Берлин, 1915.

Schuritz H., Die Perspektive in der Kunst Dürers, Diss. Tech. Hochschule Darmstadt [1916]. Франкфурт-на-Майне, 1919.

К гл. VII (Первые ростки проективной геометрии)

Amodeo F., I trattati delle sezioni coniche da Apollonio a Simson. — Ann. R. Ist. tech., Napoli, 1905, 19—69.

Amodeo F., Nuova analisi del trattato delle coniche di Gerard Desargues etc. Rend. R. Acc. Sc. Fis. e. Mat., Napoli (3), 12, 1906, 232—262.

Chrzaszczewski St. (St. Haller), Desargues Verdienste um die Begründung der projectivischen Geometrie, Arch. Math. Phys. (2), 16, 1898, 119—149.

Frajese A., Alle origini della geometria proiettiva. — Bolletino della Unione matematica italiana, XVIII, 1940.
Kötter E., Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). — Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 5, 1901.
Patterson Boyd C., The origin of the geometric principle of inversion. — Isis XIX, 1933 (от Данделена до Мёбиуса).
Taton R., L' «Essay pour les Coniques» de Pascal. — Revue d'histoire des sciences of de leurs applications, т. VIII, 1, 1955, 1—18.
Wieleitner H., Über die «Plani-coniques» von de La Hire, Arch. Gesch. Nat. u. Techn., 5, 1913, 49—55.
Wieleitner H., Über die ursprüngliche Form des Pascalschen Lehrsatzes, Mitt. Gesch. Med. u. Naturw., 14, 1915, 157—162.

К гл. VIII (Тригонометрия)

Braunmühl A., Die Entwicklung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie. — Bibl. math. (3), 1, 1900, 64—74.
Braunmühl A., Zur Geschichte der Entstehung des sogenannten Moivreschen Satzes. — Bibl. math. (3), 2, 1901, 97—102.
Braunmühl A., Zur Geschichte der Trigonometrie im 18. Jahrhundert. a) Die sogenannten Mollweideschen Gleichungen. b) Graphische Ableitung der Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie. — Bibl. math. (3), 2, 1901, 103—110.

К гл. IX (Элементарная геометрия)

Бобынин В. В., Элементарная геометрия и ее деятели во второй половине XVIII века. — Журн. Мин. нар. просв., 1907, ч. XII, отд. II, 53—113; 1908, ч. XIII, отд. II, 1—50.
Bopp K., Antoine Arnauld, der grosse Arnauld als Mahtematiker. — Abh. Gesch. math. Wiss., 14, 1902, 187—337.
Brückner M., Vielecke und Vielfläche. Theorie und Geschichte, Лейпциг, 1900.
Wieleitner H., Die «Elements de Geometrie» des Paters Pardies. — Arch. f. Gesch. der Naturw. u. d. Technik, 1, 1909, 436—442 (Festschr. M. Cantor gewidmet, 144—150).
Wieleitner H., Zur Geschichte der quadrierbaren Kreismonde. — Wissensch. Beilage zum Jahresbericht des neuen Realgymnasiums München. f. das Schuljahr 1933—1934.

VI. Дополнительная литература к III части

Антропова В. И., Публичные лекции по интегральному исчислению М. В. Остроградского. — Труды Инст. ист. ест. и техн., 5, 1955, 304—320.
Антропова В. И., К истории интегральной теоремы М. В. Остроградского. — Труды Инст. ист. ест. и техн., 17, 1957, 226—269.
Антропова В. И., О работах Фурье, Остроградского и Пуассона по теплопроводности в жидкостях. — Вопр. ист. ест. и техн., 3, 1957, 49—61.
Башмакова И. Г. и Юшкевич А. П., «Алгебра или вычисление конечных» Н. И. Лобачевского. — Ист.-матем. исслед., II, 1949, 72—128.
Гнеденко Б. В., О работах Н. И. Лобачевского по теории вероятностей. — Ист.-матем. исслед., II, 1949, 129—136.

Депман И. Я., Карл Михайлович Петерсон и его кандидатская диссертация. — ИМИ, вып. V, 1952, 134—164.

Каган В. Ф., Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи. — Труды Инст. ист. естеств., II, 1949, 323—389.

Лунц Г. Л., О работах Н. И. Лобачевского по математическому анализу. — Ист.-матем. иссл., II, 1949, 9—71.

Мельников И. Г., О работах В. Я. Буняковского по теории чисел. — Труды Инст. ист. ест. и техн., 17, 1957, 270—286.

Норден А. П., Вопросы обоснования геометрии в работах Н. Н. Лобачевского. — Ист.-матем. исслед., XI, 1958, 97—132.

Ремез Е. Я., О математических рукописях акад. М. В. Остроградского. — Ист.-матем. иссл., IV, 1951, 9—98.

Розенфельд Б. А., Интерпретации геометрии Лобачевского. — Ист.-матем. исслед., IX, 1956, 169—208.

Россинский С. Д., Карл Михайлович Петерсон. — Успехи матем. наук, 1949, IV, 5 (33) 1—13.

Рыбкин Г. Ф., Мировоззрение Лобачевского, Успехи матем. наук, 1951, VI, 3 (43), 18—30.

Рыбкин Г. Ф., Материалистические черты мировоззрения М. В. Остроградского и его учителя Т. Ф. Осиповского. — Успехи матем. наук, 1952, VII, 2 (48), 123—144.

Яновская С. А., Передовые идеи Н. И. Лобачевского — орудие борьбы против идеализма в математике, М.—Л., 1950.

Именной указатель

Вилейтнер Генрих.
История математики от Декарта
до середины XIX столетия.
Редактор *А. П. Баева.*
Технический редактор *С. Н. Ахламов.*
Корректор *Е. А. Белицкая.*

Сдано в набор 1/VI 1959 г. Подписано к печати 4/XII 1959 г. Бумага 60 × 92¹/₁₆. Физ. печ. л. 29,25. Условн. печ. 29,25. Уч.-изд. л. 30,22. Тираж 8000 экз. Т-11087. Цена 16 р. 60 к. Заказ № 1326.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет народного хозяйства. Управление полиграфической промышленности. Типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького. Ленинград, Гатчинская, 26.