

*Х. Вильгельмссон, Я. Вейланд*

## **КОГЕРЕНТНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ**

Приведены результаты исследований по нелинейной теории плазмы, выполненных в последние годы в Институте теории электромагнитного поля Чалмерского технологического университета (Гётеборг, Швеция) под руководством известного шведского физика члена Королевской Академии наук проф. Х. Вильгельмссона. Систематизированы и описаны особенности когерентного взаимодействия типа волна — волна по сравнению с нелинейным взаимодействием волн со случайными фазами. Затронуты также вопросы теории нелинейного взаимодействия частично когерентных волн и прослеживается переход от нелинейной системы с когерентными волнами к системе волн со случайными фазами. Издание специально дополнено авторами для перевода на русский язык.

Рассчитана на специалистов, интересующихся проблемами нелинейного взаимодействия в физике плазмы, оптике, радиофизике и физике твердого тела. Полезна также аспирантам и студентам старших курсов физико-математических факультетов.

### Содержание

Предисловие к русскому изданию	3
Предисловие редактора английского издания	6
Предисловие авторов к английскому изданию	7
Предисловие авторов к русскому изданию	8
Система единиц и обозначения	9
<b>Глава 1. Введение</b>	<b>10</b>
Список литературы	16
<b>Глава 2. Простые примеры нелинейных явлений</b>	<b>17</b>
Параметрическая неустойчивость	17
Три изменяющиеся амплитуды	18
Учет кубической нелинейности	19
Задачи	22
Список литературы	22
<b>Глава 3. Теория связанных волн</b>	<b>23</b>
Вывод уравнений связанных волн	23
Задачи	27
Список литературы	28
Дополнительная литература	28
<b>Глава 4. Энергия поля в диспергирующей среде</b>	<b>28</b>
Общие выражения для энергии поля волны	28
Энергия продольных и поперечных волн	31
Задачи	33
Рекомендуемая литература	33
<b>Глава 5. Формулировка теории нелинейного взаимодействия волн в представлении нелинейных токов</b>	<b>33</b>
Нелинейные уравнения поля и дисперсионные вклады высших порядков	34

Линейное затухание и неустойчивость	37
Связанные уравнения для волн	37
Задачи	39
Список литературы	39
Дополнительная литература	39
<b>Глава 6. Трехволновое взаимодействие в плазме</b>	<b>40</b>
Гидродинамическое описание	40
Кинетическое описание	43
Обсуждение результатов	44
Задачи	44
Список литературы	45
Дополнительная литература	45
<b>Глава 7. Энергетические соотношения</b>	<b>52</b>
Задачи	56
Список литературы	56
Дополнительная литература	56
<b>Глава 8. Волны с отрицательной энергией</b>	<b>56</b>
Система плазма — пучок	56
Эффекты высшего порядка	58
Неконсервативные системы	59
Задачи	60
Список литературы	60
Дополнительная литература	60
<b>Глава 9. Решения уравнений связанных волн</b>	<b>61</b>
Метод нелинейного потенциала	61
Пространственно-временная эволюция	67
Задачи	67
Список литературы	68
Дополнительная литература	68
<b>Глава 10. Критерий устойчивости и асимптотическое поведение системы трех взаимодействующих волн</b>	<b>68</b>
Общие свойства решений системы уравнений связанных волн для стационарной среды	68
Решение для нестационарной среды	72
Преобразование инерциальных систем отсчета и проблема устойчивости трехволнового взаимодействия	73
Задачи	75
Список литературы	75
Дополнительная литература	75
<b>Глава 11. Нелинейное взаимодействие волн с различным затуханием при взрывной неустойчивости</b>	<b>75</b>
Приближенное решение для стационарной среды	76
Решение для нестационарной среды	77
Асимптотические разложения	78

Частные случаи	78
Задачи	78
Список литературы	78
Дополнительная литература	78
<b>Глава 12. Влияние затухания на взаимодействие волн с энергиями одного знака</b>	<b>79</b>
Решение для трех затухающих волн	79
Решение для одной затухающей волны	82
Задачи	87
Список литературы	87
<b>Глава 13. Взрывная неустойчивость системы двух электромагнитных и трех плазменных волн</b>	<b>87</b>
Уравнения движения	87
Интегралы движения и аналитические решения системы связанных уравнений	88
Задача	90
Список литературы	90
<b>Глава 14. Нелинейные эффекты третьего порядка и стабилизация взрывной неустойчивости</b>	<b>90</b>
Общая характеристика взаимодействия волн при учете нелинейных эффектов третьего порядка	91
Вывод связанных уравнений с учетом нелинейных токов третьего порядка	93
Решение для недиссипативной среды	95
Задачи	103
Список литературы	103
Дополнительная литература	103
<b>Глава 15. Роль затухания при учете нелинейных эффектов третьего порядка</b>	<b>104</b>
Приближенный учет линейного затухания	105
Коэффициенты связи второго порядка с различными фазовыми углами	111
Задачи	118
Список литературы	118
<b>Глава 16. Численный анализ взрывной неустойчивости в системе плазма — пучок</b>	<b>118</b>
Используемые модели и предположения	118
Гидродинамическая модель	120
Кинетическая модель	121
Численный анализ коэффициентов связи	122
Численные значения параметров	123
Результаты численного анализа	123
Численное решение связанных уравнений	128
Обсуждение результатов	130
Задачи	130
Список литературы	131

Дополнительная литература	131
<b>Глава 17. Дисперсионные эффекты второго порядка</b>	<b>131</b>
Постановка задачи	131
Качественный анализ решения	132
Влияние начальных условий	134
Временная эволюция осцилляции	135
Резонансное взаимодействие осцилляции	135
Учет затухания	135
Волны с энергией одного знака	136
Предельный случай малых $\delta_j$	136
Обсуждение результатов	137
Задачи	138
Список литературы	138
<b>Глава 18. Взаимодействие волн с конечной шириной спектра в пространстве волновых векторов</b>	<b>139</b>
Волновые пакеты	139
Время когерентности	140
Взаимодействие волновых пакетов	140
Уравнения и интегралы движения для системы трех волновых пакетов	142
Сравнение с когерентным трехволновым взаимодействием	145
Уширение и распад волны накачки при проникновении в плазму	148
Эволюция разброса фаз	151
Обсуждение результатов	153
Список литературы	153
Дополнительная литература	154
<b>Глава 19. Нелинейное возбуждение волн в плазме при наличии сильного внешнего электромагнитного излучения</b>	<b>155</b>
Воздействие мощного излучения на плазму	155
Исследования вынужденного излучения	156
Возбуждение нарастающих волн и модуляция профилей плотности плазмы	157
Список литературы	161
Дополнительная литература	162
<b>Глава 20. Параметрическое возбуждение гибридных резонансов в плазме, содержащей ионы примеси</b>	<b>168</b>
Исходные уравнения	168
Дисперсионное уравнение и его решения	170
Инкременты и пороги	172
Задачи	175
Список литературы	175
Дополнительная литература	176
<b>Глава 21. Нерезонансное взаимодействие типа волна — волна и взаимодействие частиц с волнами</b>	<b>177</b>
Список литературы	180

Дополнительная литература	180
<b>Глава 22. Конвективное движение частиц, обусловленное нелинейными эффектами, и аномальная диффузия плазмы</b>	<b>181</b>
Нелинейное возбуждение конвективных ячеек	182
Аномальная диффузия	183
Обсуждение	185
Список литературы	186
<b>Глава 23. Экспериментальное исследование нелинейных эффектов в плазме</b>	<b>186</b>
Ранние исследования	187
Лабораторные эксперименты	188
Численные эксперименты	190
Список литературы	192
Дополнительная литература	195
<b>Глава 24. Направления развития нелинейных плазменных исследований</b>	<b>195</b>
Список литературы	199
<i>Приложение I. Некоторые типы волн в плазме</i>	202
Изотропная плазма	202
Магнитоактивная плазма	202
Список литературы	204
Дополнительная литература	204
<i>Приложение II. Вывод уравнений связанных волн в рамках кинетического описания плазмы</i>	204
<i>Приложение III. Вывод уравнений, описывающих модуляционную неустойчивость</i>	207
<i>Приложение IV. Математические методы нелинейной теории возмущений</i>	209
Список литературы	210
Ответы к задачам	211
<b>Алфавитно-предметный указатель</b>	<b>216</b>
Алфавитно-предметный указатель	
Аннигиляция 96	— турбулентное 153
Аномальное рассеяние 156	— четырехволновое 93, 160
Ансамбль фаз 13	Вистлер 203
Асимптотическое разложение 78	Вынужденное рассеяние 14, 155—157
— решение 69, 112	— — комбинационное 14, 15, 158, 187, 190, 191
Вектор Умова—Пойнтинга 28	— — комптоновское 14, 180
Взаимодействие волна—волна 10, 15, 177	— — Мандельштама—Бриллюэна 14, 15, 156, 168, 191
— волна—частица 15, 177—181	Волны альфвеновские 161, 203
— волн нерезонансное 177	— биений 177, 179
— параметрическое 14, 174, 188	— верхнегибридные 15, 168, 171
— плазма—пучок 188	— высокочастотные 188, 189, 207
— продольных волн 41—43, 206	
— — и поперечных волн 26, 42	

- ионно-звуковые 156, 157, 160, 189
- ионно-пучковые 188
- квазимонохроматические 28, 30
- ленгмюровские 24
- накачки 189
- необыкновенные 158, 203
- нижнегибридные 168, 171—174, 203
- низкочастотные 188
- плазменные 118, 125, 157, 202
- поперечные 23—25, 31, 36, 40—42
- продольные 23, 31, 40, 54, 87
- пучковые 127, 128
- с нулевой энергией 119
- — отрицательной энергией 12, 56—60, 75, 87, 118, 199
- — положительной энергией 74, 75
- ударные 210
- уединенные (солитоны) 196, 210
- электромагнитные 23, 28, 87, 197—199, 202—204
- Волны электромагнитные
  - обыкновенные 168, 171, 173, 203
- Время взаимодействия 10
  - — характеристическое 10, 63, 69, 141
  - взрыва 19, 65, 69, 102
  - когерентности 20, 140
  - отклика 29
- Гамильтониан 52, 55, 92, 101, 209, 210
- Гармонический осциллятор 210
- Гидродинамическая модель 40, 118—120
- Гидродинамические уравнения 24
- Глубина проникновения 192
- Граничные условия 157
- Групповая скорость 36, 198
- Дебаевское волновое число 157
- Динамический фазовый угол 53, 68
- Дисперсия 29, 90
- Дисперсионная функция плазмы 121
- Дисперсионные осцилляции 13, 131, 134—138
- Диссипация линейная 128, 168
  - нелинейная 94, 106, 117, 199
- Доплеровский сдвиг 41, 55, 73
- Дрейфовое движение 40
- Закон сохранения заряда 169
  - — импульса 55, 159
  - — числа квантов 159
  - — энергии 52, 54, 55, 147, 159
- Затухание бесстолкновительное 197
  - столкновительное 75, 127, 129
  - Ландау линейное 15, 37, 75, 127, 174
  - — нелинейное 15, 177—180
  - нелинейное эффективное 94, 117
- Захват плазмонов 158
  - частиц 192
  - электронов 191
- Излучение высокочастотное 14
  - лазерное 156, 190
  - мощное 155
  - электромагнитное 155
- Инверсная населенность 12, 87
- Инерциальное удержание 155
- Интеграл столкновений 43, 120
- Кавитон 155, 189, 198
- Каноническое преобразование 209
- Колебания:
  - ленгмюровские нелинейные 196
  - нормальные 25—27, 36, 44, 205, 210
  - общее определение 36
  - кинетическое описание 204
  - плазменные релятивистские 196
- Коллапс 92, 198
- Конденсация плазмонов 157, 198
- Корреляция фаз 139, 144
- Критерий устойчивости 53, 68
- Кросс-модуляция 196
- Лагранжиан 44
- Лазерный синтез 14, 15, 155, 175, 189
- Ленгмюровская турбулентность 198
- Локализация фаз 61, 65, 110, 114

- Люксембург-горьковский эффект 196  
Маятник 17  
— нелинейный 83—86  
Метод когерентных фаз 10, 104  
— Боголюбова — Крылова —  
Митропольского 85, 209  
— обратной задачи рассеяния 210  
— Пуанкаре 209  
— связанных волн 11, 24, 36, 210  
Модели столкновений 125, 130  
Молекулы с инверсной  
населенностью 87  
Накачка 157, 189  
— импульсная 199  
Насыщение 20, 90  
Небесная механика 209  
Некогерентное рассеяние 188  
Нелинейная оптика 10, 61  
Нелинейное дисперсионное  
соотношение 35  
Нелинейный сдвиг частоты 13, 90,  
94, 100, 105  
Неопределенность фаз 138, 146  
Неустойчивость абсолютная 157  
— взрывная 10, 61—63, 86, 112, 129,  
198  
— двухпотоковая 119  
— — осцилляционная 157  
— модуляционная 157, 159, 161, 198  
— параметрическая 14, 17, 18, 188  
Нормировка амплитуд 53, 54  
Плазма:  
бесстолкновительная 23, 168,  
177  
ионосферная 196  
космическая 198  
лабораторная 190  
лазерная 91, 148, 156, 190  
магнитоактивная 14  
неоднородная 157  
разреженная 198  
термоядерная 155, 168  
холодная 122  
— нагрев 160, 188  
— турбулентность 15, 157, 160,  
197  
Плазмой 158, 198  
Плотность:  
критическая 157, 191  
модуляция 157, 207, 208  
— низкочастотная 158, 209, 210  
профиль самосогласованный  
192  
Порог для взрывной неустойчивости  
70, 91, 128, 129  
— — нелинейного взаимодействия  
63, 144, 156, 168, 198  
— — параметрической  
неустойчивости 18  
Поляризация 29, 40, 42  
— круговая 42  
Пондеромоторная сила 158, 208  
Приближение линейное 23, 35, 37  
— квазистатическое 158, 159  
— случайных фаз 10, 135, 142  
Примеси 15, 168, 172, 174  
Примесные ионы 15, 168  
Проблема народонаселения 17, 21  
— секулярности 209  
Проводимость второго порядка 37  
— третьего порядка 91, 93  
Пространственно-временная  
корреляционная функция 189  
Процесс адиабатический 44, 130, 207,  
208  
— изотермический 44, 130, 208  
Пучок:  
релятивистский 189  
— инъекция 197  
— тепловая скорость 123—126,  
128  
частиц 160, 191  
Радиационное давление 157, 158, 160  
Рассеяние света на свете 187  
Резонансное поглощение 198  
— уширение 92  
Резонансы Тонкса—Даттнера 187  
Резонатор 198

- Рекомбинация 21  
 Ренормировка 53, 158  
 Самомодуляция 189  
 Сдвиг волнового числа 160  
 Система ионный пучок—плазма 188  
 — отсчета 73  
 — пучок — плазма 13, 56, 92, 118—  
 130, 189  
 Солитонов формирование 157—160,  
 198  
 Солитоны 196, 201  
 — ионно-звуковые 188  
 — ленгмюровские 198  
 Солнечный ветер 196  
 Соотношения Мэнли—Роу 52, 79,  
 132, 142, 144  
 — симметрии 41, 54, 102, 132  
 Состояние когерентное (квантово-  
 механическое) 209  
 — стационарное 157  
 — турбулентное 10, 198  
 Среда анизотропная 29  
 — диспергирующая 29, 35, 57  
 — изотропная 28  
 Статистический ансамбль 66  
 Теория возмущений 23, 210  
 — связанных волн 23  
 Токи второго порядка 34  
 — высших порядков 33  
 — индуцированные 28, 34  
 — нелинейные 34, 35  
 — третьего порядка 91, 93  
 Точка отсчета 122  
 — плазменного резонанса 198  
 — резонансная 122  
 Уравнение Больцмана 23, 121, 204  
 — Вольтерра 22  
 — Кортвега—де Вриза 196  
 — связанных волн 27, 52—54, 93—  
 96, 127—129, 143  
 — Шредингера нелинейное 160  
 Условие когерентности 140—142,  
 153  
 Уширение фаз 13, 148  
 Фазовое пространство 66  
 Флуктуации в плазме 15, 197  
 Флуктуационно-диссипативная  
 теорема 197  
 Фокусировка фаз 13, 148, 150  
 Функция:  
 дисперсионная 32, 36, 121, 131  
 диэлектрического отклика 197  
 распределения 40, 120  
 — максвелловская с дрейфом  
 121  
 эллиптическая 12, 61, 64, 80,  
 84, 98, 101—103  
 — модуль 63, 80  
 Частичная когерентность 11, 13,  
 139—149  
 Частота ионная циклотронная 199  
 — столкновений 120, 124, 127, 178  
 196  
 — — эффективная 188  
 — циклотронная 170  
 — электронная плазменная 24, 189  
 Эволюция нелинейной системы 72,  
 77  
 Электрический диполь 29  
 Энергия волны 23—27, 54, 61, 73—  
 75, 79, 119  
 — взаимодействия эффективная 106,  
 134  
 — кинетическая 56, 158  
 — поля 28, 31, 35, 56—59  
 — потенциальная 159  
 — свободная 73  
 Эффекты дисперсионные 34, 37, 170  
 — — второго порядка 131—138  
 — — высших порядков 23, 56, 210  
 — стохастические 198  
 — фазовые 11, 20



## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Когерентное взаимодействие волн принадлежит к числу тех фундаментальных проблем нелинейной теории плазмы, решение которых существенно не только для термоядерных, космических или астрофизических исследований, но и для задач нелинейной оптики, радиоэлектроники, акустики и акустоэлектроники. Область приложений теории нелинейного взаимодействия волн и частиц простирается от изучения турбулентного состояния и нелинейной динамики плазмы до разработки новых методов генерирования, усиления и преобразования волновых полей различной физической природы.

Многие особенности нелинейных процессов в плазме можно выявить на примере простой трехволновой системы, детальному рассмотрению которой посвящена настоящая книга. Основное внимание в ней сосредоточено на описании когерентных взаимодействий, и в соответствии с этим в качестве метода описания выбран метод фиксированных фаз, что характерно скорее для нелинейной оптики, чем для физики плазмы. Но в отличие от нелинейной оптики в схему рассмотрения включены волны с отрицательной энергией и связанные с ними неустойчивости, ярким примером которых может служить взрывная неустойчивость. Таким образом, в книге Х. Вильгельмссона и Я. Вейланда удачно сочетаются идеи и методы нелинейной оптики, электроники и физики плазмы, и это делает ее ценным дополнением к существующей литературе по нелинейным явлениям (см. список литературы к гл. 1).

Книга написана на основе оригинальных научных результатов, полученных в последние годы в Институте теории электромагнитного поля и физики плазмы Чалмерского технологического университета (Гётеборг, Швеция) под руководством видного шведского физика члена Королевской Академии наук проф. Х. Вильгельмссона. Институт проводит исследования при широком участии крупных специалистов по физике плазмы из многих стран мира, в том числе из Советского Союза. Поэтому представленные в книге научные результаты фактически выходят далеко за рамки деятельности одного института и дают достаточно полное представление о современном состоянии проблемы когерентных взаимодействий в плазме на мировом уровне.

Вместе с тем книга преследует и иную, по существу чисто педагогическую цель: на простых примерах и по возможности простыми средствами показать читателю, не искушенному в тео-

рии нелинейных процессов, физическую суть и практическое значение проблемы когерентных взаимодействий. Именно с этой целью в книге первые шесть глав целиком посвящены предварительному изучению проблемы трехволнового взаимодействия. Здесь рассмотрены характерные типы нелинейных уравнений с неустойчивыми решениями, в рамках гидродинамического описания иллюстрируется применение методов теории связанных волн к решению проблем нелинейных взаимодействий в плазме, обсуждаются энергетические аспекты рассматриваемых проблем.

В следующих семи главах дана общая постановка задачи трехволнового когерентного взаимодействия и детально обсуждаются нелинейные решения, приводящие к взрывной неустойчивости системы. Далее произведен учет нелинейных эффектов третьего порядка и показано, что при таком учете результаты теории когерентно взаимодействующих волн вступают в качественное противоречие с результатами теории случайных фаз. В связи с этим в гл. 18 развивается теория нелинейного взаимодействия частично когерентных волн и прослежен непрерывный переход от нелинейной системы с когерентными состояниями к системе волн со случайными фазами.

Связь проблем трехволнового взаимодействия и параметрического воздействия мощного высокочастотного излучения на плазму рассмотрена в гл. 19 и 20. Отличительной особенностью этой части работы является учет влияния примесей, существенный для термоядерных приложений теории. В гл. 21 и 22 показана возможность применения используемого в книге общего формализма к теории взаимодействия типа волна—частица и аномальной диффузии плазмы.

В заключительной части книги содержится обзор экспериментальных исследований нелинейных эффектов в плазме (гл. 23) и современных тенденций дальнейшего развития исследований по нелинейной теории плазмы (гл. 24).

Одно из достоинств книги Х. Вильхельмссона и Я. Вейланда — обилие расчетного материала, который часто не просто иллюстрирует изложение, но выступает в качестве единственного средства показа сложной картины когерентных взаимодействий во всей ее полноте. Систематизация этого материала тем более важна, что до сих пор он был разбросан по многочисленным научным статьям и труднодоступным техническим отчетам различных лабораторий.

Большую смысловую нагрузку несут списки дополнительной литературы к тем главам книги, которые посвящены изложению оригинальных результатов. Построенные в хронологическом порядке, эти списки позволяют проследить в динамике весь процесс становления того или иного направления нелинейных плазменных исследований, начиная от момента его зарождения и заканчивая 1978—1979 гг. Тем самым авторам удалось в значительной степени скомпенсировать принципиальную невозможность отражения в книге небольшого объема почти необозримого множества

конкретных научных результатов, относящихся к теме книги. Разумеется, это стало возможным лишь благодаря хорошему знанию мировой научной литературы, характерному для школы проф. Х. Вильхельмссона, и тщательности, проявленной авторами при составлении списков. Приятно отметить, что работы советских авторов нашли в этих списках должное отражение.

Несмотря на то что со времени выхода в свет на английском языке прошло около трех лет (срок немалый, если иметь в виду бурные темпы развития современной физики плазмы), книга в настоящем переводе остается практически столь же актуальной, как и в год ее опубликования издательством Pergamon Press (1977 г.). Очень важно, что этого удалось достичь не использованием традиционных для переводов подстрочных примечаний и комментариев, а благодаря деятельному участию авторов в подготовке русского издания книги. Специально для русского издания ими написана гл. 22, внесены многочисленные изменения в основной текст книги, в особенности в гл. 2, 5, 8 и 16, а также существенно дополнены списки основной и дополнительной литературы (главным образом за счет работ, опубликованных после сдачи в печать английской рукописи, т. е. в 1976—1979 гг.)

Пользуюсь случаем поблагодарить Х. Вильхельмссона и Я. Вейланда за конструктивный и в высшей степени полезный вклад в подготовительную работу, связанную с изданием их книги на русском языке, а также за их неизменный интерес к исследованиям плазмы в СССР и деятельность, направленную на поддержание и расширение творческих научных контактов между шведскими и советскими специалистами по физике плазмы.

Можно надеяться, что благодаря простоте и доступности изложения, универсальности рассматриваемых уравнений и методов их решения, разнообразию и большому количеству фактического материала предлагаемая книга станет ценным пособием для всех, кто сталкивается в своей работе с проблемами когерентных взаимодействий, и в особенности для тех, кто только приступает к изучению теории таких взаимодействий.

Академик Б. Б. Кадомцев

*Москва, июнь 1980 г.*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА АНГЛИЙСКОГО ИЗДАНИЯ

Физика плазмы переживает в настоящее время период интенсивного развития. В значительной степени этому способствует поиск альтернативных источников энергии, в том числе разработка термоядерных реакторов. Активизация экспериментальных исследований сопровождается дальнейшим развитием теоретических представлений. Стало ясно, что одной из основных теоретических проблем физики плазмы является адекватное описание турбулентности плазмы. Несмотря на то что попытки такого описания были в целом до сих пор не очень успешными, теоретическое исследование нелинейных систем дало много интересных, а возможно, и многообещающих результатов. Авторы настоящей книги внесли значительный вклад в эту область, и я надеюсь, что все специалисты по физике плазмы, особенно теоретики, с интересом встретят появление их труда, посвященного нелинейным взаимодействиям волн в плазме. Желаю Х. Вильгельмссону и Я. Вейланду столь заслуженного ими успеха.

Д. Тер Хаар

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Когерентное взаимодействие волн в плазме является в последние годы основным объектом исследовательской программы Института теории электромагнитного поля Чалмерского технологического университета (Гётеборг, Швеция). Сотрудниками института выполнено значительное число работ в этой области и установлены плодотворные научные контакты с лабораториями США, СССР, Японии и других стран.

Авторы выражают искреннюю признательность всем лицам, проявившим деятельный интерес к этой работе, в особенности проф. Ф. Энгельману, проф. В. Н. Цытовичу, проф. Л. Стенфло, а также д-рам Д. Андерсону, Х. Густавссону, К. Остбергу. Мы высоко ценим сотрудничество с лабораториями Евратома, занимающимися термоядерными исследованиями. Один из нас (Х. В.) пользуется случаем поблагодарить д-ра Т. Консоли (Лаборатория термоядерного синтеза, Гренобль, Франция) и проф. К. Такаяму (Институт физики плазмы Нагойского университета, Нагоя, Япония), в лабораториях которых была выполнена заключительная часть работы над книгой. Авторы особенно благодарны проф. Д. Тер Хаару за интерес к их исследованиям и за эффективную помощь в издании настоящей книги.

Большой благодарности заслуживает тщательная работа миссис Агнеты Манхеймер по перепечатке рукописи и мисс Патриции Бреннан по изготовлению рисунков. Мы с признательностью отмечаем также высокий класс библиотечного обслуживания, проявленный миссис Дороти Заурман.

Исследования, результаты которых отражены в книге, выполнены при поддержке Шведского комитета по атомным исследованиям, Шведского комитета по естественнонаучным исследованиям, Управления по техническому развитию Швеции. На последнем этапе они проводились в рамках соглашения между Евратомом и Шведским национальным комитетом по разработке энергетических источников.

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В последнее десятилетие резко возрос интерес к нелинейным явлениям в плазме. Экстенсивное развитие теории в этом направлении, постановка новых лабораторных и численных экспериментов подтвердили существование и продемонстрировали влияние на динамику плазмы различных нелинейных эффектов, в том числе и при таких значениях параметров плазмы, которые пока не достигнуты в лабораторных условиях. Одновременно исследования нелинейных эффектов развивались и в других важных областях знания, что привело к плодотворному обмену идеями и концепциями между учеными, работающими в этих областях.

Благодаря соглашению между Академией наук СССР и Королевской Академией наук Швеции в последние годы успешно развивается сотрудничество советских и шведских специалистов по физике плазмы. В Швеции было организовано несколько симпозиумов и рабочих совещаний, в которых наряду с советскими и шведскими физиками принимали участие также ученые США, Японии и некоторых европейских стран. В задачу этих встреч входило прежде всего изучение нелинейных явлений в плазме. Авторы благодарны за сотрудничество советским специалистам, в особенности проф. В. Н. Цытовичу и проф. В. И. Карпману, которые несколько раз посетили Чалмерский технологический университет и внесли очень существенный вклад в работу указанных совещаний.

Мы признательны акад. Б. Б. Кадомцеву, акад. Р. З. Сагдееву, чл.-кор. АН УССР А. Г. Ситенко и проф. И. П. Якименко за интерес к нашим научным исследованиям и помощь, оказанную при подготовке русского издания книги.

Х. Вильгельмссон, Я. Вейланд  
Гётеборг, Швеция, 1979

## Система единиц и обозначения

В книге использована Международная система единиц (СИ). Обозначения, как правило, общепринятые, кроме тех, которые специально разъясняются в тексте. В частности, векторы обозначены  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{v}$ , а их абсолютные величины как  $E$ ,  $v$  и т. д. Комплексные величины снабжены черточкой:  $\bar{E}$ ,  $\bar{v}$  и т. п. Однако такие величины, как нормальное колебание и амплитуда, обозначаются обычным образом:  $a$ ,  $A$  и т. п. Операция усреднения по малым временным масштабам отмечена с помощью угловых скобок. Например,  $\langle W \rangle$  означает среднее значение плотности энергии. Наконец, вместо громоздких выражений типа  $(\partial D_j / \partial \omega)_{\omega=\omega_j}$  используется упрощенная запись  $\partial D_j / \partial \omega_j$ .

## ГЛАВА 1

### ВВЕДЕНИЕ

С начала 60-х годов интерес к изучению нелинейных эффектов неуклонно возрастает. Понимание многих явлений нелинейной природы имеет фундаментальное значение для физики плазмы и современной оптики. Не менее важно оно и для развития технологии будущего, особенно в связи с попытками использования горячей плазмы в качестве источника энергии и разработкой новых типов электрооптических приборов. Достаточно упомянуть аномальные эффекты нелинейного происхождения, которые определяют диффузию и проводимость горячей плазмы. Без учета нелинейных эффектов невозможно общее рассмотрение эволюции плазменных неустойчивостей. Благодаря явлению нелинейной связи возникают и поддерживаются турбулентные состояния плазмы. Особый интерес вызывают нелинейные эффекты, сопутствующие нагреву плазмы в установках лазерного термоядерного синтеза и проникновению мощного электромагнитного излучения в плазму, не говоря уже о явлениях, имеющих различные приложения в физике космической плазмы и астрофизике.

Нелинейные эффекты в плазме можно классифицировать по типу взаимодействия (волна — частица или волна — волна) и по степени нелинейности. Нелинейность естественно считать слабой, если обусловленное ею изменение амплитуды волны является медленным по сравнению с быстрыми гармоническими колебаниями. В противном случае говорят о сильной нелинейности.

В настоящей книге рассматривается, в основном, взаимодействие типа волна — волна при слабой нелинейности. Следует отметить, что это, с одной стороны, допускает вполне общую и строгую математическую постановку задачи, а с другой — представляет несомненный интерес в практическом отношении, так как нелинейности в плазме нередко можно считать слабыми (особенно в высокочастотной области спектра).

При исследовании нелинейных взаимодействий типа волна — волна применяют два основных метода описания: метод фиксированных фаз и метод случайных фаз. При использовании первого метода предполагается, что время когерентности взаимодействующих волн значительно превышает характерное время взаимодействия. В противном случае необходим второй метод. Эти альтернативные предположения соответствуют, очевидно, физически различным ситуациям. Для когерентных взаимодействий фазовые эффекты очень существенны, тогда как при некогерентном взаимодействии они утрачивают силу.



Метод фиксированных фаз получил широкое распространение в нелинейной оптике [1], тогда как для плазменных исследований характерно интенсивное использование метода случайных фаз [2—6]. Между тем интуитивно ясно, что нелинейные взаимодействия когерентного типа должны наблюдаться также и в плазменной среде. Лабораторные [7] и численные [8] эксперименты подтверждают это предположение, указывая одновременно на возможность значительного влияния фазовых эффектов на нелинейную динамику плазмы. Например, под влиянием мощного излучения в плазме возникают вынужденные рассеяние и распад. Так как эти нелинейные процессы развиваются под воздействием когерентной волны, эффекты когерентности могут быть существенными в течение всего времени взаимодействия. Следует ожидать, что они особенно ярко проявятся в нелинейных процессах с экстремально малыми временами эволюции, примером которых может служить взрывная неустойчивость.

Таким образом, проблема когерентного взаимодействия волн в плазме заслуживает сама по себе детального рассмотрения. Кроме того, такое рассмотрение должно обеспечить необходимый базис для изучения общего случая взаимодействия частично когерентных волн.

Книга начинается с рассмотрения простейших примеров нелинейных явлений различной природы, иллюстрирующих некоторые характерные особенности нелинейных уравнений того же типа, что и уравнения, встречающиеся при постановке электродинамической задачи нелинейного описания плазмы. В частности, обсуждаются причины существования устойчивых и неустойчивых решений некоторых идеализированных модельных уравнений. Одно из таких уравнений возникает в связи с проблемой роста народонаселения, который, как оказывается, при определенных условиях также может иметь некоторую тенденцию к взрывному поведению (гл. 2).

При выводе нелинейных динамических уравнений в случае слабой нелинейности возникают трудности, связанные с наличием так называемых секулярных слагаемых. Для устранения этих трудностей обычно используют общий метод Боголюбова — Крылова [9, 10] или метод многовременных последовательных приближений в форме [11], представляющий собой фактически одну из модификаций метода Боголюбова — Крылова. Мы будем придерживаться, в основном, метода связанных волн [12]; согласно ему, исходные уравнения записываются относительно линейных комбинаций полевых величин (нормальных колебаний), вид которых полностью определяется типом волны и средой распространения. Этот метод продемонстрирован в гл. 3 на примере вывода соотношений, описывающих трехволновое взаимодействие в горячей бесстолкновительной плазме (в гидродинамическом приближении).

Чтобы исследовать энергетический баланс между взаимодействующими волнами, необходимы выражения для энергии волн, распространяющихся в материальной среде. Такие выражения

выводятся в гл. 4 для квазимонохроматической волны в изотропной среде с частотной дисперсией. Там же приведены уравнения нелинейного взаимодействия в представлении нелинейных токов. Использование этого представления, во-первых, полезно с точки зрения простоты интерпретации нелинейных взаимодействий и, во-вторых, позволяет учесть дисперсионные эффекты высшего порядка, которые не описываются в рамках метода связанных волн (гл. 5).

Далее рассмотрены примеры трехволнового взаимодействия на основе гидродинамической и кинетической моделей плазмы (гл. 6). При этом допускается наличие постоянного магнитного поля, ориентированного вдоль направления распространения волн (для простоты рассмотрение ограничено случаем, когда волновые векторы всех взаимодействующих волн коллинеарны).

Гл. 7 и 8 посвящены общему рассмотрению системы трех когерентно взаимодействующих волн, включая пример волн с отрицательной энергией и связанных с ними неустойчивых решений взрывного типа. Наличие таких решений означает возможность увеличения амплитуд всех взаимодействующих волн до бесконечности за конечное время. Подобные состояния могут иметь место в действительности, хотя предельные значения амплитуд в реальных условиях, конечно, ограничены из-за существования различных физических механизмов насыщения.

Аналитические решения системы связанных уравнений выражаются через эллиптические функции (гл. 9). В дальнейшем (гл. 10) более детально исследовано условие устойчивости трехволновой системы с учетом эффектов диссипации, что представляет особый интерес, поскольку коэффициенты связи при таком учете становятся комплексными. Оказывается, что если векторы, отвечающие комплексным коэффициентам связи, лежат в одной полуплоскости, то трехволновая система нелинейно-неустойчива, причем этот вывод обладает свойством инвариантности относительно преобразования инерциальных систем отсчета.

В экспериментальном отношении наиболее интересен тот случай, когда линейные затухания взаимодействующих волн различны. Тогда возможны как решения взрывного типа (гл. 11), так и нелинейно-устойчивые решения (гл. 12). При исследовании этих решений используются аналитические и численные методы, что в конечном счете позволяет получить достаточно полное представление об эволюции рассматриваемых систем, несмотря на отсутствие строгих решений.

Взаимодействие двух трехволновых систем, имеющих одну общую волну (т. е. фактически пятиволновое взаимодействие), рассмотрено в гл. 13. Предполагается, что одна из этих систем содержит две поперечные и одну продольную волну, а другая — три продольные волны. Допускается, что благодаря наличию в среде источников свободной энергии (таких, например, как молекулярная подсистема с инверсной населенностью) отрицательной энергией могут обладать не только продольные, но и по-

перечные волны. Подобное взаимодействие приводит к усилению излучения в оптическом и микроволновом диапазонах.

В следующих двух главах (гл. 14, 15) изложены результаты исследования когерентного взаимодействия волн с учетом нелинейных эффектов третьего порядка. Метод нелинейного потенциала позволяет легко интерпретировать физическую природу получаемых решений. При эволюции взрывного типа нелинейные эффекты обеспечивают возможность насыщения, причем благодаря учету нелинейного сдвига частоты возникает своеобразная эволюционная картина типа повторяющихся пиков конечной величины. Такая картина является прямым следствием когерентного характера взаимодействия (в приближении случайных фаз наблюдается плавный выход на уровень насыщения). Еще одно существенное различие результатов когерентного и некогерентного описаний заключается в том, что инкремент колебаний при когерентном взаимодействии равен квадрату аналогичной величины для системы волн со случайными фазами.

Типичным примером физической системы, в которой могут одновременно распространяться волны с положительной и отрицательной энергией, служит система плазма — пучок. Гидродинамическое и кинетическое описание когерентного взаимодействия волн в такой системе даны в гл. 16. Там же приведены многочисленные расчетные результаты, описывающие зависимости коэффициента связи от скорости частиц и плотности пучка, а также от температурных и столкновительных эффектов. Эти результаты показывают, что при типичных значениях параметров плазмы и пучка возможность развития взрывной неустойчивости в рассматриваемой системе не исключается, но для ее реализации требуются большие начальные электрические поля.

При определенных условиях на временное развитие системы когерентно взаимодействующих волн могут оказывать влияние дисперсионные эффекты второго порядка. В частности, благодаря им иногда возбуждается колебательный процесс нового типа — так называемые дисперсионные осцилляции, появление которых связано, главным образом, с необходимостью удовлетворения начальным условиям для вторых производных по времени относительно полевых величин. Влияние дисперсионных осцилляций может быть значительным, если их частота того же порядка, что и частота волны (гл. 17).

В природе взаимодействующие волны обычно частично когерентны. Поэтому традиционно используемые методы исследования нелинейных взаимодействий (метод когерентного описания и метод случайных фаз) следует рассматривать лишь как альтернативные приближения к реальной физической картине. Если в определенный момент одна волна обладает некоторым распределением фаз, а фазы остальных волн фиксированы, то в процессе нелинейной эволюции системы распределение фаз также будет изменяться. В итоге могут наблюдаться такие интересные эффекты, как уширение и фокусировка фаз. В связи с этим в гл. 18 рассмотрена

возможность описания нелинейного взаимодействия волн с конечной шириной спектра в пространстве волновых чисел. Приведенные там данные численного анализа показывают, как уширение фаз, связанное первоначально с одним волновым пакетом, постепенно переносится на другие пакеты, так что по прошествии достаточного времени все пакеты имеют примерно одинаковое распределение фаз. Результирующее стационарное состояние соответствует приближению хаотических фаз. Таким образом, метод, использованный в гл. 18, позволяет проследить непрерывный переход от нелинейной системы когерентных волн к системе волн со случайными фазами.

К классу наиболее интересных нелинейных эффектов в плазме принадлежат те явления, которые наблюдаются при воздействии на плазму мощного электромагнитного излучения. Это прежде всего различные процессы вынужденного рассеяния: индуцированное рассеяние, вынужденное рассеяние Мандельштама—Бриллюэна, комбинационное и комптоновское рассеяния. Исследования этих процессов имеют непосредственное отношение к проблеме лазерного термоядерного синтеза, так как предполагается, что нелинейная связь между волнами характерна для плазменной короны, образующейся при воздействии лазерного излучения на термоядерную мишень. Эксперименты пока оставляют открытым вопрос о количественном вкладе этих процессов в энергобаланс установок, тем не менее необходимость возможно более глубокого понимания таких процессов представляется вполне очевидной. Можно ожидать, что по мере дальнейшего развития диагностической техники, повышения интенсивности лазерного излучения и проведения все более широких численных экспериментов откроются новые возможности для сравнения теоретических предсказаний с экспериментальными данными [13, 14] (гл. 19).

Аналогичная ситуация имеет место и при нагреве плазмы высокочастотным излучением (в частности, излучением, частота которого близка к нижней гибридной частоте). Ожидается, что такой способ нагрева ионов будет эффективным в тороидальных установках, но в настоящее время далеко не ясно, в какой степени процесс нагрева будет зависеть от нелинейных эффектов. В проведенных лабораторных и численных экспериментах [15—17] нелинейные эффекты наблюдались, но только будущие исследования с излучениями большой мощности прольют дополнительный свет на эту проблему и помогут окончательно решить вопрос о влиянии различных процессов на нагрев плазмы.

В силу сказанного понятен интерес к проблеме взаимодействия мощного электромагнитного излучения с магнитоактивной плазмой (гл. 20). В принципе метод связанных волн, использованный в гл. 6 при рассмотрении нелинейного взаимодействия волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, пригоден также и в случае поперечного (а следовательно, и произвольного) распространения волн. Однако в гл. 20 с иллюстративной целью используется иной метод, а именно параметрический подход,

в рамках которого исследуется взаимодействие сильной электромагнитной волны накачки, распространяющейся перпендикулярно к направлению магнитного поля, с необыкновенной волной (нижнегибридной или верхнегибридной) и другой обыкновенной волной. При этом учитывают не только динамику электронов и ионов (ионов водорода или его изотопов в термоядерной плазме), но также и влияние тяжелых примесных ионов с высокой степенью ионизации (например, ионов кислорода, углерода, молибдена). Наличие таких примесных ионов очень существенно сказывается на свойствах термоядерной плазмы из-за их высоких зарядовых чисел. В гл. 20 приведены выражения для инкрементов и порогов развития неустойчивости при взаимодействии рассматриваемого вида, а также обсуждается зависимость этих величин от расстройки частоты. В частном случае, при отсутствии магнитного поля, полученные выражения описывают вынужденные процессы рассеяния Мандельштама—Бриллюэна и комбинационного рассеяния с учетом влияния примесей.

Формализм теории взаимодействия волна—волна применим также и для нелинейного взаимодействия двух волн с частицами плазмы. Это иллюстрируется в гл. 21, где показано, что нерезонансное взаимодействие двух волн с третьей при учете затухания Ландау последней можно интерпретировать как взаимодействие волна—частица между первичными волнами и частицами, скорости которых совпадают с фазовой скоростью волны биений (нелинейное затухание Ландау).

Рассмотрение когерентного нелинейного взаимодействия волн завершается гл. 22, в которой затронут вопрос аномальной диффузии частиц плазмы, связанной с нелинейным возбуждением конвективных движений этих частиц.

Следует подчеркнуть, что главное внимание в книге уделено тому классу нелинейных явлений, который, по мнению авторов, не нашел до настоящего времени должного освещения в литературе. В последнее десятилетие выполнено также значительное число экспериментальных работ по нелинейному взаимодействию волн. Краткий обзор этих работ содержится в гл. 23.

Отметим также, что рассмотрение многих вопросов в книге тесно связано с такими интересными проблемами, как образование солитонов [18], флуктуации в плазме [19—24], турбулентность плазмы [3—5], но этим вопросам посвящено большое число работ, и поэтому мы почти не будем их касаться, за исключением краткого обсуждения проблемы образования солитонов в гл. 19. Вместе с тем в конце книги (гл. 24) приведены сводка основных направлений нелинейных плазменных исследований и весьма обширный список литературы, который включает работы по всему спектру современных проблем теории нелинейного взаимодействия волн в плазме, столь интенсивно развивающейся в последние годы [25—30].

Значительное внимание в современной физике плазмы уделяется проблеме стохастичности частиц и полей [31]. В связи

с этим полезно заметить, что простые уравнения трехволнового взаимодействия, которые подробно анализируются в настоящей книге, могут приводить к описанию таких характерных явлений стохастической природы, как бифуркация и странные аттракторы (см. с. 403—423 в [31]).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бломберген Н.** Нелинейная оптика. М., Мир, 1966.
2. **Галеев А. А., Сагдеев Р. З.** — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 7. М., Атомиздат, 1973, с. 3.
3. **Цытович В. Н.** Нелинейные эффекты в плазме. М., Наука, 1967.
4. **Davidson R. C.** *Methods in Nonlinear Plasma Theory.* N. Y. — Lond., Academic Press, 1972.
5. **Кадомцев Б. Б.** — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, с. 188.
6. **Hasegawa A.** *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects.* Berlin—Heidelberg, Springer, 1975.
7. **Krása J., Pekárek L., Perkin R. M.** — In: Proc. XII Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Eindhoven, 1975, p. 121.
8. **Forslund D. W., Kindel J. M., Lindman E. L.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 30, p. 739.
9. **Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.** Введение в нелинейную механику. Киев, Изд-во АН УССР, 1937.
10. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1974.
11. **Frieman E. A.** — *J. Math. Phys.*, 1963, v. 4, p. 410.
12. **Люиселл У.** Связанные и параметрические колебания в электронике. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
13. **Kruer W. L., Estabrook K. G., Sinz K. H.** — *Nucl. Fusion*, 1973, v. 3, p. 952.
14. **Yamanaka S., Yamanaka T., Sasaki T., Mizui J., Kang H. B.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1974, v. 32, p. 1038.
15. **Hooke W. M., Bernabei S.** — *Ibid.*, 1972, v. 28, p. 407.
16. **Chang R. P. H., Porkolab M.** — *Ibid.*, 1973, v. 31, p. 1241; 1974, v. 32, p. 1227.
17. **Emery M. H., Joyce G., Shohet J. L.** — *Plasma Phys.* 1975, v. 17, p. 757.
18. **Карман В. И.** Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., Наука, 1973.
19. **Ситеико А. Г.** Электромагнитные флуктуации в плазме. Харьков, Изд-во Харьковского ун-та, 1965.
20. **Ишимару С.** Основные принципы физики плазмы. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1975.
21. **Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситеико А. Г., Степанов К. М.** Электродинамика плазмы. М., Наука, 1974.
22. **Ichimaru S., Yakimenko I. P.** — *Phys. Scripta*, 1973, v. 7, p. 198.
23. **Electrodynamics of Nonequilibrium Plasmas.** — *Ibid.*, p. 5; *Ibid.*, 1975, v. 11, p. 5.
24. **Климонтович Ю. Л.** Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М., Наука, 1975.
25. **Силин В. П.** Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М., Наука, 1973.
26. **Кадомцев Б. Б.** Коллективные явления в плазме. М., Наука, 1975.
27. **Ситеико А. Г.** Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме. Киев, Наукова думка, 1977.
28. **Plasma Physics: Nonlinear Theory and Experiments.** Ed. by H. Wilhelmsson. Nobel Foundation Symp. N. 36. N. Y., Plenum Press, 1977.
29. **Porkolab M., Chang R. P. H.** — *Rev. Mod. Phys.*, 1978, v. 50, p. 745.
30. **Solitons in Physics.** Ed. by H. Wilhelmsson. — *Phys. Scripta*, 1979, v. 20, p. 291.
31. **Intrinsic Stochasticity in Plasma.** Ed. by G. Laval and D. Gressillon. Orsay (France), Ed. Phys., 1979.

## ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Природа и жизнь настолько богаты нелинейными явлениями, что их примеры можно найти практически всюду. Процессы, протекающие в живых организмах, нередко зависят от нелинейных эффектов. Экономическое развитие, определяемое спросом и предложением, описывается нелинейными соотношениями относительно таких динамических переменных, как уровни производства, потребления и численность населения. Теоретический анализ подобного рода систем во многом напоминает анализ динамических процессов в плазме.

Нелинейные эффекты могут определять устойчивость или неустойчивость тех или иных систем. Переменные, описывающие систему, иногда достигают экстремально больших значений в результате внешних воздействий (как в случае маятника) или испытывают параметрическое усиление при условии, что возмущающая сила имеет определенный период и подходящую фазу, т. е. согласована во времени с рассматриваемой системой. При определенных значениях периода и фазы взаимодействующих волн в плазме могут возникать резонансные эффекты, и тогда динамические явления приобретают особенно яркий характер. На высшей стадии развития таких эффектов происходит когерентное взаимодействие волн.

Судя по библейским преданиям, важность когерентных взаимодействий была осознана еще в XIV в. до нашей эры, когда стены Иерихона рухнули в результате коллапса звуковых колебаний. А создание когерентных пучков света с помощью стимулированного излучения в нашем веке — самая совершенная реализация идеи когерентного взаимодействия из всех, которые когда-либо знал мир.

Когерентное взаимодействие волн в плазме и взаимодействие внешнего когерентного излучения с плазмой — тема, которую по самой природе нельзя рассматривать как тривиальную. Поучительно начать изучение этой темы с нескольких простых примеров нелинейностей, предназначенных для демонстрации существенных особенностей анализа тех проблем, которые будут обсуждаться в дальнейшем.

### Параметрическая неустойчивость

Рассмотрим прежде всего связанные уравнения, описывающие параметрическую неустойчивость. Пусть динамические переменные  $n_1$  и  $n_2$  подчиняются уравнениям

$$dn_1/dt = c_1 n_0 n_2; \quad (2.1a)$$

$$dn_2/dt = c_2 n_0 n_1, \quad (2.1b)$$

где  $n_0$  — постоянный параметр и все величины вещественные. Для больших значений  $t$  решение системы имеет вид

$$\left. \begin{aligned} n_1 &\sim \exp [n_0 \sqrt{c_1 c_2} t]; \\ n_2 &\sim \exp [n_0 \sqrt{c_1 c_2} t]. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

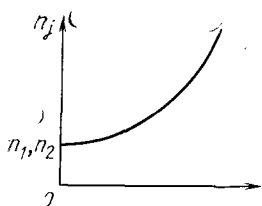


Рис. 2.1. Экспоненциальное нарастание двух параметрически связанных динамических величин с одинаковыми начальными значениями

В предположении, что  $c_1$  и  $c_2$  положительны, это решение описывает экспоненциальное нарастание (рис. 2.1), скорость которого увеличивается с усилением связи и ростом параметра  $n_0$  [1]. Если же  $c_1$  и  $c_2$  отрицательны, то при малых  $t$  обе амплитуды будут сначала убывать. Однако по прошествии некоторого времени одна из амплитуд станет отрицательной, а другая начнет экспоненциально расти (лишь при очень специальном выборе начальных условий может наблюдаться иное поведение).

При наличии затухания вместо уравнений (2.1) следует писать

$$\left. \begin{aligned} dn_1/dt + b_1 n_1 &= c_1 n_0 n_2; \\ dn_2/dt + b_2 n_2 &= c_2 n_0 n_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где  $b_1$  и  $b_2$  — линейные коэффициенты затухания динамических переменных  $n_1$  и  $n_2$ . Из системы (2.3) видно, что решения вида  $n_{1,2} \sim \exp(\lambda t)$  существуют при выполнении соотношения

$$(\lambda + b_1)(\lambda + b_2) = c_1 c_2 n_0^2, \quad (2.4)$$

из которого следует, что экспоненциально нарастающие решения ( $\lambda > 0$ ) возможны лишь при условии  $b_1 b_2 < c_1 c_2 n_0^2$ . Таким образом, существует пороговое значение параметра  $n_0$ , начиная с которого развивается неустойчивость, а именно

$$n_0 = (b_1 b_2 / c_1 c_2)^{1/2}. \quad (2.5)$$

Это выражение определяет порог параметрической неустойчивости, обусловленный наличием линейного затухания. Более общие случаи рассмотрены в гл. 9.

### Три изменяющиеся амплитуды

Предположим теперь, что параметр  $n_0$  также подчиняется уравнению типа (2.1), т. е.

$$dn_0/dt = c_0 n_1 n_2, \quad (2.1.в)$$

а величины  $n_1$  и  $n_2$  по-прежнему удовлетворяют уравнениям (2.1а) и (2.1б). Кроме того, будем считать, что на начальной стадии процесса  $n_0 \gg n_1, n_2$  и все коэффициенты связи  $c_j$  — величины одного порядка. Тогда изменение  $n_0$  относительно мало и поведе-



ние  $n_1$  и  $n_2$  примерно такое же, как на рис. 2.1. Однако при положительных  $c_1$  и  $c_2$  величины  $n_1$  и  $n_2$ , постепенно увеличиваясь, на определенной стадии процесса достигнут значений, сравнимых с  $n_0$ . На этой стадии пренебрежение изменением  $n_0$  становится незаконным, тогда в схему рассмотрения необходимо включить уравнение (2.1в). Возможны два случая:  $c_0 > 0$  и  $c_0 < 0$ .

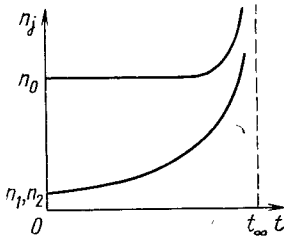


Рис. 2.2. Переход от экспоненциального нарастания к взрывному

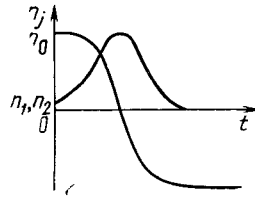


Рис. 2.3. Насыщение параметрической неустойчивости и самосоглазованное нелинейное взаимодействие трех динамических величин

Если  $c_0 > 0$ , то  $n_0$  будет увеличиваться со временем, что, в свою очередь, приведет к увеличению скорости нарастания переменных  $n_1$  и  $n_2$  (рис. 2.2). В конечном счете получим так называемую взрывную неустойчивость [2], когда все амплитуды увеличиваются до бесконечности за конечное время  $t_\infty$  по закону

$$n_j \sim (t_\infty - t)^{-1}. \quad (2.6)$$

Если  $c_0 < 0$ , то  $n_0$ , а вместе с ним и скорости роста  $n_1$  и  $n_2$  будут уменьшаться, что вызовет насыщение параметрической неустойчивости (рис. 2.3). При дополнительном условии  $n_1(0) = n_2(0)$  для больших  $t$  получим стационарное решение.

### Учет кубической нелинейности

Пусть все  $c_j = c > 0$  и все  $n_j = n$ . Тогда исходное нелинейное уравнение, записанное с учетом кубического слагаемого, имеет вид

$$dn/dt = bn + cn^2 + dn^3. \quad (2.7)$$

Рассмотрим частный случай, когда на начальной стадии процесса доминирует квадратичное слагаемое, а кубическим слагаемым можно пренебречь. Тогда влияние линейного слагаемого сводится к изменению времени развития взрывной неустойчивости (рис. 2.4) согласно соотношению

$$t_\infty = (1/b) [1 - \exp(-bt_\infty)], \quad (2.8)$$

где  $t_\infty$  — время развития неустойчивости при  $b = 0$ .

Однако с увеличением амплитуды  $n$  кубическое слагаемое становится все более существенным и в конечном счете при  $d < 0$  приводит к стабилизации неустойчивости (рис. 2.5). Если линейное слагаемое на уровне насыщения относительно мало, то этот уровень определяется следующим приближенным выражением:

$$n_{\text{нас}} \approx -c/d + b/c. \quad (2.9)$$

Учитывая запаздывание в стабилизирующем слагаемом, т. е. переходя к немарковскому описанию [1], получаем осциллирующий режим приближения к асимптотическому значению  $n$ . При этом эффект насыщения удобно описывать, вводя в квадратичное слагаемое переменный коэффициент вида

$$c(t) = c[1 + (d/c)n(t - \tau)], \quad (2.10)$$

где  $\tau$  — время задержки стабилизирующего механизма. Эффект запаздывания не влияет на равновесный уровень насыщения, но приводит к колебаниям значений  $n$  с периодом порядка  $4\tau$  (рис. 2.6). Решение, качественный вид которого показан на рис. 2.6,

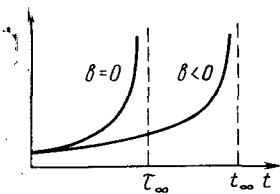


Рис. 2.4. Увеличение времени развития взрывной неустойчивости при введении отрицательно определенного нелинейного слагаемого

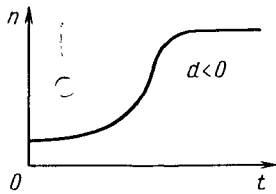


Рис. 2.5. Насыщение взрывной неустойчивости при учете кубической нелинейности

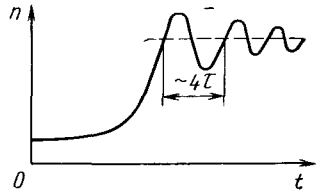


Рис. 2.6. Насыщение взрывной неустойчивости при учете отрицательно определенной части квадратичного слагаемого, пропорциональной  $n(t - \tau)$ . Приближение к асимптотическому значению обусловлено линейным слагаемым

представляет особый интерес, так как оно имеет ту же структуру, что и при стабилизации взрывной неустойчивости в результате трехволнового когерентного взаимодействия [3]. Задержка описывает фазовый эффект. При  $\tau \rightarrow 0$  этот эффект исчезает, так что  $\tau$  можно рассматривать как время когерентности.

Простые уравнения типа (2.1) или (2.7) описывают многие явления в физике, химии, биологии и т. п. В последующих главах подобные уравнения исследуются в связи с проблемой нелинейного взаимодействия волн. Весьма специфично применение этих уравнений к проблеме роста народонаселения. Модельное уравнение, описывающее изменение численности населения Земли, мож-

но представить в виде

$$dn/dt = c(t)n^2 + b(t)n, \quad (2.11)$$

где  $c(t) > 0$  [4]. Решив это уравнение, получим

$$n(t) = n(0) \exp \left[ \int_0^t b(t') dt' \right] \left\{ 1 - n(0) \int_0^t dt'' c(t'') \exp \left[ \int_0^{t''} b(t') dt' \right] \right\}^{-1}. \quad (2.12)$$

Соотношение (2.12) указывает на возможность взрыва, момент которого определяется уравнением

$$n(0) \int_0^{t_\infty} dt'' c(t'') \exp \left[ \int_0^{t''} b(t') dt' \right] = 1. \quad (2.13)$$

Из равенства (2.13) видно, что для исключения возможности взрывного поведения его левая часть должна оставаться меньшей единицы при любых временах. Конечно, в явном виде решение  $n(t)$  можно получить лишь при известных коэффициентах  $c(t)$  и  $b(t)$ . Задача усложняется еще и тем обстоятельством, что при больших амплитудах коэффициент  $c(t)$  становится функцией  $n$  типа (2.10). Поэтому необходимо численное интегрирование (2.11), которое и было выполнено в работе [5]. В результате показано, что изменение численности населения Земли за последние 325 лет с неожиданной высокой степенью точности описывается уравнением (2.11) при постоянных коэффициентах  $c$  и  $b$  ( $c > 0$ ,  $b < 0$ ). Там же оценен уровень насыщения, обусловленный кубическим слагаемым типа (2.10).

Еще один пример использования уравнения (2.11) (на этот раз с отрицательными  $c$  и  $b$ ) — проблема изменения плотности свободных электронов в атмосфере Земли. Слагаемые правой части тогда описывают процессы рекомбинации электронов на ионах и прилипания электронов к нейтральным атомам соответственно. Такие процессы приводят к уменьшению плотности свободных электронов, причем слагаемое, пропорциональное  $n^2$ , формально возникает в результате перемножения электронных и ионных плотностей  $n_e = n_i = n$ .

Уравнения вида (2.11) с отрицательным  $c$  и положительным  $b$  использовались также для моделирования динамики численности популяций, которая сначала экспоненциально растет, а затем насыщается из-за влияния слагаемого второго порядка [6]. При наличии двух популяций между ними может устанавливаться определенная связь (например, одна популяция может поглощать другую). Такая ситуация моделируется двумя уравнениями, связанными посредством квадратичных перекрестных слагаемых, причем одно уравнение содержит положительное линейное и отрицательное нелинейное слагаемые, а знаки соответствующих слагаемых второго уравнения противоположны. Это — знаменитые уравнения хищников и жертв [7], имеющие осциллирующие решения для обеих популяций. Недавно было показано [8], что при

учете нескольких популяций из модели Вольтерра [7] может быть получена (при определенных условиях) модель [6].

Наконец, следует упомянуть о попытках обобщения задачи Вольтерра на случай динамических переменных, изменяющихся не только во времени, но и в пространстве. Было показано, в частности, что для определенного класса начальных пространственных распределений переменных можно найти точные решения этой задачи [9]. В работах [10, 11] рассмотрена пространственно-временная эволюция произвольных начальных возмущений относительно равновесных нелинейных решений обобщенных уравнений Вольтерра. Полученные результаты имеют очень широкую область применимости.

Знакомство с примерами нелинейных уравнений и их приложений в различных областях можно продолжить, прочитав обширный обзор [12], а также статью [13].

### Задачи

2.1. Объяснить характерную особенность порога параметрической неустойчивости (2.5) (обращение в нуль при  $b_1=0$  или  $b_2=0$ ) и дать качественное описание явления при условии, что один из коэффициентов затухания очень большой, а второй равен нулю (считать, что  $c_1, c_2$  и  $n_0 > 0$ ).

2.2. Пусть коэффициенты  $b_1$  и  $b_2$  в (2.3) одинаковы и равны  $b$  и амплитуда накачки  $n_0$  возрастает по закону а)  $n_0 = n_0(0) \exp(\nu t)$ ; б)  $n_0 = n_0(0) / (1 - t/t_\infty)^p$ . Найти асимптотические зависимости  $n_1$  и  $n_2$  при  $t \rightarrow \infty$  и обсудить результаты [накачка типа б) требуется для получения оптимального сжатия в лазерных термоядерных установках с  $p=15/8$  для вырожденного электронного газа].

2.3. С помощью системы уравнений (2.1) выразить максимальные значения  $n_1$  и  $n_2$  через начальные значения переменных при условии, что  $n_1(0) = n_2(0)$ ,  $c_1 = c_2$  и  $c_0 < 0$ .

2.4. Дать качественное объяснение результатов при использовании вместо (2.10) коэффициента

$$c(t) = c [1 + (d/c) dn(t - \tau)/dt]$$

в следующих случаях: а)  $\tau=0$ ; б)  $\tau > 0$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Minorsky N. Nonlinear Oscillations. Princeton, Van Nostrand, 1962.
2. Sturrok P. A. — Phys. Rev. Lett., 1966, v. 16, p. 270.
3. Weiland J., Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1973, v. 5, p. 222.
4. Wilhelmsson H. — Ibid., 1972, v. 5, p. 116.
5. Weiland J., Wilhelmsson H. — Ibid., 1974, v. 10, p. 257.
6. Verhulst P. F. — Acad. Roy. Soc. Ltr. Belgique, 1845, v. 18, p. 1; 1847, v. 20, p. 1.
7. Volterra V. Lecons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie. Cah. Sci. VIII. Paris, Gauthier-Villars, 1931.
8. Zwanzig P. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1973, v. 70, p. 3048.
9. Goel N. S., Maitra S. C., Montroll E. W. — Rev. Mod. Phys., 1971, v. 43, p. 231.
10. Montroll E. W. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1972, v. 69, p. 2532.
11. Hirota R. — In: Proc. of Workshop on Contact Transformations. Ed. by R. M. Miura. Nashville, Vanderbilt Univ., 1974.
12. Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1977, v. 16, p. 156.
13. Wilhelmsson H., Bondeson A., Lisak M. — Ibid., 1979, v. 20, p. 352.

## ТЕОРИЯ СВЯЗАННЫХ ВОЛН

При исследовании динамики плазменных систем обычно используют гидродинамическое или более детальное кинетическое описание. В первом исходная система уравнений включает гидродинамические уравнения движения, во втором — уравнение Больцмана. Эти уравнения описывают систему с различных точек зрения, но имеют общую черту — все они нелинейны. Нелинейный характер этих уравнений приводит к математическим трудностям, в целях устранения которых часто ограничиваются рассмотрением только малых пространственно-временных возмущений и пренебрегают произведениями различных величин, т. е. линеаризуют исходные уравнения.

Такая аппроксимация нередко оказывается оправданной, но она заведомо непригодна для описания неустойчивых систем или в окрестностях резонансов, связанных, например, с наличием тепловых флуктуаций.

В линейном приближении можно определить собственные волны, частоты и волновые векторы которых связаны линейным дисперсионным соотношением. Оно характеризует как среду, так и волну рассматриваемого типа. В линейном приближении произведения осциллирующих величин не учитываются, и поэтому возмущения среды, обусловленные одной волной, не влияют на другую волну, т. е. волны оказываются несвязанными. Связь между волнами в нелинейной теории возникает именно благодаря учету взаимного влияния волн через среду распространения. Такой учет приводит, вообще говоря, к бесконечной иерархии вкладов высших порядков во взаимодействие, и в результате физический механизм необычайно усложняется. Чтобы описать эти явления математически, необходимо предположить, что взаимодействие является достаточно слабым, т. е. относительное влияние различных вкладов довольно быстро уменьшается с увеличением их порядка.

Пренебрегая произведениями всех осциллирующих величин, кроме парных, получим приближение второго порядка. Если при этом осциллирующие величины второго порядка удовлетворяют дисперсионному соотношению, то они могут инициировать появление третьей волны. Такая ситуация описывается системой трех взаимодействующих волн.

### Вывод уравнений связанных волн

Для демонстрации метода описания когерентных взаимодействий приведем здесь, следуя работе [1], вывод уравнений связанных волн, описывающих взаимодействие двух поперечных электромагнитных волн и одной продольной плазменной волны [2]. Будем

исходить из следующих динамических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + N_0 \nabla \mathbf{v} &= -\nabla(n\mathbf{v}); \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0; \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + e\mathbf{E}/m + (u^2/N_0) \nabla n &= -(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} - \\ - (e/m)\mathbf{v} \times \mathbf{B} - (u^2/N_0^2) n \nabla n; \\ \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - (1/\mu_0) \nabla \times \mathbf{B} - eN_0 \mathbf{v} &= en\mathbf{v}, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где  $-e$  и  $m$  — заряд и масса электрона;  $N_0$ ,  $n$  и  $\mathbf{v}$  — невозмущенная плотность плазмы, возмущение плотности электронов и их скорость;  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — напряженность электрического поля и магнитная индукция;  $u$  — тепловая скорость электронов. Уравнения (3.1) записаны в предположении, что плазма однородна в невозмущенном состоянии и движением ионов можно пренебречь.

В линейном приближении правые части уравнений (3.1) обращаются в нуль и поиск нетривиальных решений вида

$$A_j \exp [i(\omega_j t - k_j x)] \quad (3.2)$$

приводит к соотношению

$$(\omega_j^2 - \omega_p^2 - k_j^2 u^2) (\omega_j^2 - \omega_p^2 - k_j^2 c^2) = 0,$$

которое выражает равенство нулю детерминанта линейной системы алгебраических уравнений относительно амплитуд  $A_j$ . Таким образом, частота и волновое число могут быть связаны одним из следующих дисперсионных уравнений:

$$\omega_j^2 = \omega_p^2 + k_j^2 u^2 \quad (3.3)$$

или

$$\omega_j^2 = \omega_p^2 + k_j^2 c^2, \quad (3.4)$$

где  $\omega_p = (N_0 e^2 / m \varepsilon_0)^{1/2}$  — электронная плазменная частота;  $c$  — скорость света. Уравнения (3.3) и (3.4) описывают продольные (или ленгмюровские) и поперечные (или электромагнитные) волны соответственно.

При учете нелинейных слагаемых в (3.1) решение уже не может иметь вид (3.2). В этом случае мы будем рассматривать временную эволюцию пространственных фурье-компонент, основываясь на использовании метода связанных волн. В качестве объекта исследования удобно выбрать не какую-либо из динамических переменных, а их линейную комбинацию, которую будем обозначать  $a$  и называть нормальным колебанием. Вид этой величины можно установить подстановкой линейной комбинации динамических переменных  $\bar{n}$ ,  $\bar{E}$  с неизвестными коэффициентами в соотношение

$$\frac{da}{dt} = i\omega a. \quad (3.5)$$

Производная по времени исключается из этого соотношения с помощью линеаризованных гидродинамических уравнений, записанных с учетом гармонической зависимости от координаты  $x$  ( $\partial/\partial x \rightarrow -ik$ ). Используя затем дисперсионное соотношение и при-

равнивая нулю множители при каждой из динамических переменных, можно найти все коэффициенты, требующиеся для определения нормального колебания  $a$ . Определенная таким способом величина  $a$  обладает тем свойством, что соотношение (3.5) на линейном уровне удовлетворяется для произвольных и независимых изменений динамических переменных во времени. Величина  $\omega$ , фигурирующая в (3.5), есть не что иное, как решение дисперсионного уравнения, отвечающее  $k$ -й компоненте Фурье. При решении задачи в терминах нормальных колебаний не требуется знание линейных соотношений между динамическими переменными, что является преимуществом этого метода.

Рассмотрим сначала поперечные волны. Предполагая, что волна поляризована в направлении  $y$ , получаем из (3.1):

$$\left. \begin{aligned} \partial v_y / \partial t + eE_y / m &= (e/m) v_x B_z - v_x \partial v_y / \partial x; \\ \partial B_z / \partial t + \partial E_y / \partial x &= 0; \\ \epsilon_0 \partial E_y / \partial t + (1/\mu_0) \partial B_z / \partial x - eN_0 v_y &= env_y. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Определим теперь величину

$$a_T = \bar{v}_y + (i\omega_T \epsilon_0 / eN_0) \bar{E}_y + (ik_T / \mu_0 eN_0) \bar{B}_z, \quad (3.7)$$

где  $\omega_T$  и  $k_T$  удовлетворяют уравнению (3.4), а динамические переменные типа  $\bar{v}_y$  связаны с реальными физическими величинами соотношениями вида  $v_y = (1/2)(\bar{v}_y + \bar{v}_y^*)$ . Дифференцируя (3.7) по времени и используя линейные части уравнений (3.6) с учетом равенства  $\partial/\partial x = -ik_T$ , получаем соотношение типа (3.5). Это означает, что  $a_T$  имеет смысл поперечного нормального колебания. Если, однако, при исключении производных по времени учесть нелинейные слагаемые в (3.6), то вместо (3.5) будем иметь

$$\frac{\partial a_T}{\partial t} - i\omega_T a_T = \left( \frac{e}{m} v_x B_z + \frac{i\omega_T}{N_0} nv_y - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_{k_T}, \quad (3.8)$$

где индекс  $k_T$  напоминает о том, что при записи правой части следует использовать координатную зависимость вида  $\exp(-ik_T x)$ . Отметим, что при наличии нескольких поперечных волн при определении нормальных колебаний согласно (3.7) в правой части всякий раз необходимо записывать поля, относящиеся лишь к одной из волн.

В тех же предположениях для продольных волн получим:

$$\left. \begin{aligned} \partial n / \partial t + N_0 \partial v_x / \partial x &= -(\partial/\partial x)(nv_x); \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{eE_x}{m} + \frac{u^2}{N_0} \frac{\partial n}{\partial x} &= -\frac{e}{m} v_y B_z - \frac{u^2}{N_0^2} n \frac{\partial n}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}; \\ \epsilon_0 \partial E_x / \partial t - eN_0 v_x &= env_x. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Продольное нормальное колебание определяется соотношением

$$a_L = \bar{n} + (N_0 \omega_L / k_L u^2) \bar{v}_x + (ieN_0 / mk_L u^2) \bar{E}_x, \quad (3.10)$$

а нелинейное уравнение, аналогичное (3.8), имеет вид

$$\frac{\partial a_L}{\partial t} - i\omega_L a_L = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (nv_x) + \frac{ie^2 N_0}{mk_L u^2 \epsilon_0} nv_x - \frac{\omega_L N_0}{k_L u^2} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{e}{m} v_y B_z - \frac{u^2}{N_0^2} n \frac{\partial n}{\partial x} \right) \right]_{k_L}. \quad (3.11)$$

Рассмотрим теперь взаимодействие трех волн: двух поперечных (с частотами  $\omega_{T_0}$  и  $\omega_{T_1}$  и волновыми векторами  $k_{T_0}$  и  $k_{T_1}$ ) и одной продольной (с частотой  $\omega_L$  и волновым вектором  $k_L$ ). Исходными уравнениями для такого рассмотрения служат два уравнения типа (3.8), соответствующие двум различным фурье-компонентам поперечного поля, и уравнение (3.11) для продольной волны.

Представим реальные физические величины, фигурирующие в правых частях этих уравнений, в виде сумм

$$v_y = (1/2) (\bar{v}_y^{(0)} + \bar{v}_y^{(1)}) + \text{к. с.} \quad (3.12)$$

и т. д., где  $\bar{v}_y^{(0)}$  изменяется в пространстве как  $\exp(-ik_{T_0}x)$  и к. с. означает комплексно-сопряженную величину. Рассмотрение волновых полей как пространственных фурье-компонент приводит к условию

$$k_{T_0} = k_{T_1} + k_L, \quad (3.13)$$

при выполнении которого в правых частях (3.8) и (3.11) имеются слагаемые с той же координатной зависимостью, что и в левых частях. Далее, для того чтобы избежать усреднения взаимодействия (с нулевым средним) из-за наличия быстрых гармонических колебаний вынуждающих сил, следует потребовать выполнения соотношения

$$\omega_{T_0} = \omega_{T_1} + \omega_L. \quad (3.14)$$

Однако при учете нелинейного взаимодействия фурье-компоненты по пространственным переменным отнюдь не являются фурье-компонентами по времени, поэтому соотношение (3.14) не обязательно должно быть строгим. Действительно, динамические переменные имеют вид

$$\bar{v}_y^{(j)} = \bar{v}_{y0}^{(j)}(t) \exp(i\omega_j t),$$

а это при учете условия слабого взаимодействия

$$|(\partial/\partial t) [\ln \bar{v}_{y0}^{(j)}(t)]| \ll \omega_j \quad (3.15)$$

означает, что  $\bar{v}_y^{(j)}$  состоит из набора частот, близких к  $\omega_j$ . Для нахождения нелинейных уравнений относительно нормальных колебаний  $a_j$  необходимо выразить все динамические переменные через  $a_j$ . Это можно сделать с помощью линеаризованной системы (3.1). В результате получим соотношения вида

$$\bar{v}_y = A_{v_y}(\omega_T, k_T) a_T, \quad (3.16)$$



которые следует подставить в правые части (3.8) и (3.11). Удерживая затем только резонансные слагаемые, удовлетворяющие условиям согласования (3.13) и (3.14), приходим к системе уравнений связанных волн:

$$\left. \begin{aligned} \partial a_{T_0} / \partial t - i\omega_{T_0} a_{T_0} &= c_{1L} a_{T_1} a_L; \\ \partial a_{T_1} / \partial t - i\omega_{T_1} a_{T_1} &= c_{0L} a_{T_0} a_L^*; \\ \partial a_L / \partial t - i\omega_L a_L &= c_{01} a_{T_0} a_{T_1}^*, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

где

$$c_{1L} = \frac{i\omega_{T_0} k_L^2 u_p^2 \omega_p^2}{4N_0 \omega_L^2 \omega_{T_1}^2}; \quad c_{01} = \frac{iN_0 \omega_L \omega_p^4}{4u^2 \omega_{T_1}^2 \omega_{T_0}^2}; \quad c_{0L} = \frac{i\omega_{T_1} k_L^2 u^2 \omega_p^2}{4N_0 \omega_L^2 \omega_{T_0}^2}.$$

Если в однородной неограниченной среде могут распространяться волны только трех типов, то рассмотренные выше пространственные фурье-компоненты полностью определяют возможные возмущения, и мы приходим к системе трех волн, амплитуды которых изменяются во времени вследствие нелинейного взаимодействия. Разумеется, систему (3.17) можно обобщить на случай четырех или более взаимодействующих волн. Точно так же можно снять введенное здесь исключительно для упрощения выкладок предположение о том, что все волны распространяются в одном направлении. При произвольных направлениях распространения волн вместо (3.13) следует писать

$$\mathbf{k}_{T_0} = \mathbf{k}_{T_1} + \mathbf{k}_L.$$

Наконец, систему (3.17) можно обобщить для учета нелинейных эффектов более высокого порядка.

Следует подчеркнуть, что и в относительно простой форме (3.17) эту систему можно использовать для описания трехволновых взаимодействий во многих физических задачах при различных наборах взаимодействующих волн. Конечно, в каждом конкретном случае необходимо вводить соответствующие нормальные колебания  $a_j$  и коэффициенты  $c_{jh}$ , для чего требуются специальные расчеты. Пример такого расчета для кинетической модели плазмы [3] приведен в Приложении II.

При дальнейшем изложении использовано обозначение  $a_j$  для нормального колебания и  $A_j$  — для его амплитуды, т. е.

$$a_j = A_j \exp(i\omega_j t). \quad (3.18)$$

### Задачи

3.1. Рассмотреть взаимодействие между пучковой волной (волной, которая возбуждается в пучке, распространяющемся в стационарной плазме) и двумя плазменными волнами. Пучок характеризуется скоростью  $V_b$  и плотностью, определяемой плазменной частотой пучка  $\omega_{pb}$ . Диэлектрическая проницаемость системы имеет вид

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2 u_p^2} - \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - kV_b)^2 - k^2 u_b^2},$$

где  $\omega_p$  — плазменная частота стационарной плазмы;  $u_p$  — тепловая скорость плазмы;  $u_b$  — тепловая скорость электронов пучка.

Получить выражения для нормальных колебаний в случае продольных волн, распространяющихся параллельно или антипараллельно направлению скорости пучка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Sjölund A., Stenflo L. — Physica, 1967, v. 35, p. 499.
3. Stenflo L. — Plasma Phys., 1970, v. 4, p. 585.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Lashmore-Davies C. N. — Plasma Phys., 1975, v. 17, p. 281.  
 Hung N. T. — J. Plasma Phys., 1975, v. 14, p. 347.

## ГЛАВА 4

### ЭНЕРГИЯ ПОЛЯ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Энергию, распространяющуюся в плазме, удобно выражать через диэлектрическую проницаемость  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ , зависящую в общем случае как от частоты  $\omega$ , так и от волнового вектора  $\mathbf{k}$ .

В дальнейшем (гл. 6, 7, 10) будет показано, что вид энергии волн, принимающих участие в нелинейном взаимодействии, решающим образом влияет на характер нелинейной связи между волнами. Энергия волн может быть положительной или отрицательной в зависимости от свойств среды и типа волны. Соотношение знаков энергий взаимодействующих волн часто бывает достаточным для вывода об устойчивости или неустойчивости рассматриваемой системы волн.

Цель настоящей главы — обсуждение общих выражений для энергии поля волны, распространяющейся в диспергирующей среде, а также энергетических соотношений для продольных и поперечных волн, которые часто используются при рассмотрении когерентных нелинейных взаимодействий.

### Общие выражения для энергии поля волны

Предположим, что среда является изотропной в пространстве и диспергирующей во времени, а распространяющаяся в ней волна — квазимонохроматической. Из уравнений Максвелла имеем

$$\nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -(\mathbf{H}\partial\mathbf{B}/\partial t + \mathbf{E}\partial\mathbf{D}/\partial t) - \mathbf{E}\mathbf{J}, \quad (4.1)$$

т. е. дивергенция вектора Умова — Пойнтинга определяется суммой двух вкладов, один из которых ( $\mathbf{E}\mathbf{J}$ ) есть не что иное, как энергия внешнего источника, а второй связан с энергией поля соотношением

$$-dW/dt = -(\mathbf{H}\partial\mathbf{B}/\partial t + \mathbf{E}\partial\mathbf{D}/\partial t). \quad (4.2)$$

При постоянных  $\epsilon$  и  $\mu$  это соотношение легко интегрируется и в результате получается хорошо известное выражение для энергии электромагнитного поля

$$W = (1/2) (\epsilon\epsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2). \quad (4.3)$$

Однако в общем случае диспергирующих сред связь между векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ , а также  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{H}$  значительно усложняется. Так, диэлектрическая проницаемость описывает макроскопический отклик среды на внешнее поле, который выражается в появлении поляризации, стремящейся уменьшить полное поле в среде (эффект экранирования). Поляризация может возникать, например, вследствие смещения электронных оболочек атомов или изменения ориентации постоянных электрических диполей, имеющих в среде. В плазме заряженные частицы могут свободно двигаться, и поэтому эффект экранирования обуславливается индуцированными токами. Из-за инерционности масс движущихся частиц процесс поляризации всегда занимает определенное время, отличное от нуля (так называемое время отклика). Ему соответствует некоторая частота, присущая рассматриваемой среде и для плазмы совпадающая с плазменной частотой. Если частота внешнего поля превышает характерную частоту, то экранирующее облако не успевает следовать за изменениями поля и диэлектрическая проницаемость уменьшается.

Таким образом, из-за конечности времени отклика поляризация среды в определенный момент времени зависит от поля в предшествующие моменты (временная или частотная дисперсия). Аналогично можно прийти к выводу о зависимости поляризации в данной точке от поля в других точках (пространственная дисперсия). Объединив эти эффекты, получим пространственно-временную дисперсию.

При учете только временной дисперсии связь между векторами поляризации и напряженности электрического поля выражается соотношением вида

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^t \kappa(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad (4.4)$$

которое записано в предположении, что поле включается в момент  $t=0$ , а начальной поляризацией можно пренебречь. Переходя к фурье-компонентам во времени, получаем

$$\bar{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \kappa(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}_\omega(\mathbf{r}),$$

что дает

$$\bar{\mathbf{D}}_\omega(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}_\omega(\mathbf{r}). \quad (4.5)$$

В общем случае анизотропной среды с пространственно-временной дисперсией вместо (4.5) следует писать

$$\bar{\mathbf{D}}_{\omega i}(\mathbf{k}) = \epsilon_0 \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \bar{E}_{\omega j}(\mathbf{k}),$$

где  $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  — тензор диэлектрической проницаемости в фурье-представлении.

Аналогичные соотношения существуют между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , однако для плазмы нет необходимости выписывать такие формулы, так как магнитная проницаемость плазмы обычно близка к единице и можно просто положить  $\mu = 1$ .

Предположим теперь, что в плазме, описываемой материальным уравнением (4.5), распространяется квазимонохроматическая волна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (1/2)\bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t) + \text{к. с.}, \quad (4.6)$$

у которой амплитуда изменяется медленно по сравнению с быстрыми осцилляциями поля на частоте  $\omega_0$ . В дальнейшем нам потребуется также обозначение

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t).$$

Из (4.5) следует, что

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}_\omega(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) d\omega$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}_\omega(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (4.7)$$

Ввиду медленного изменения  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$  во времени значение  $\bar{\mathbf{E}}_\omega(\mathbf{r})$  отлично от нуля лишь в малой окрестности  $\omega_0$ . В этой окрестности справедливо представление

$$\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \approx \omega_0 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega_0) + (\omega - \omega_0) (\partial/\partial \omega) [\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)]_{\omega=\omega_0},$$

подстановка которого в (4.7) дает

$$\begin{aligned} \partial \bar{\mathbf{D}}/\partial t = \varepsilon_0 \left\{ i\omega_0 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega_0) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)]_{\omega=\omega_0} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} i(\omega - \omega_0) \bar{\mathbf{E}}_\omega(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) d\omega \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Учитывая, что  $\bar{\mathbf{E}}_\omega(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{E}}_{0\omega-\omega_0}(\mathbf{r})$ , интеграл в (4.8) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} i(\omega - \omega_0) \bar{\mathbf{E}}_\omega(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) d\omega = \\ & = \exp(i\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} i(\omega - \omega_0) \bar{\mathbf{E}}_{0\omega-\omega_0}(\mathbf{r}) \exp[i(\omega - \omega_0)t] d(\omega - \omega_0) = \\ & = \exp(i\omega_0 t) \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}_{0\omega-\omega_0}(\mathbf{r}) \exp[i(\omega - \omega_0)t] d(\omega - \omega_0) = \\ & = 2\pi \exp(i\omega_0 t) \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \varepsilon_0 \left\{ i\omega_0 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega_0) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)]_{\omega=\omega_0} \exp(i\omega_0 t) \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\}. \quad (4.9)$$

Заметим, что соотношение (4.9) можно вывести также из соответствующего выражения для монохроматических полей

$$\partial \bar{\mathbf{D}} / \partial t = i\omega_0 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t),$$

рассматривая  $\omega$  как оператор  $\omega_0 - i(\partial/\partial t)$  и выполняя разложение в ряд Тейлора в окрестности  $\omega = \omega_0$ . При этом, однако, необходимо считать, что оператор  $i(\partial/\partial t)$  действует только на амплитуду  $\bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}, t)$ . Это означает, что к частоте  $\omega_0$  добавляется сдвиг, обусловленный изменением во времени амплитуды волны.

Зная соотношение между  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  и  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ , можно приступить к интегрированию (4.2). Поля, фигурирующие в (4.2), вещественны, поэтому

$$\mathbf{E} \partial \mathbf{D} / \partial t = (1/2) (\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{E}}^*) (1/2) (\partial \bar{\mathbf{D}} / \partial t + \partial \bar{\mathbf{D}}^* / \partial t).$$

При усреднении этого выражения быстро осциллирующие слагаемые  $\bar{\mathbf{E}} \partial \bar{\mathbf{D}} / \partial t$  и  $\bar{\mathbf{E}}^* \partial \bar{\mathbf{D}}^* / \partial t$  обращаются в нуль. Сумма двух других слагаемых после подстановки (4.9) сводится к виду

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)] \left( \bar{\mathbf{E}}_0^* \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_0}{\partial t} + \bar{\mathbf{E}}_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_0^*}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^*, \end{aligned}$$

если дополнительно предположить, что  $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$  — вещественная функция частоты. Теперь интегрирование (4.2) легко выполняется и при  $\mu = \mu_0$  дает следующий результат:

$$\langle W \rangle = (1/4) [\varepsilon_0 (\partial/\partial \omega) (\omega \varepsilon) \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^* + \mu_0 \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{H}}^*]. \quad (4.10)$$

Если же  $\mu$  является функцией частоты, то выражение для магнитной энергии записывается в той же форме, что и для электрической энергии. При учете пространственной дисперсии в качестве  $\varepsilon$  следует взять функцию  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ , зависящую как от частоты, так и от волнового вектора.

Отметим, что при существенном увеличении сдвига частоты волны из-за нелинейного взаимодействия необходимо учитывать большее число членов в разложении Тейлора, что усложняет окончательное выражение для энергии волны.

### Энергия продольных и поперечных волн

На основании общего выражения (4.10) нетрудно записать энергетические соотношения для продольных и поперечных волн. Магнитное поле продольных волн равно нулю, и поэтому для них

$$\langle W \rangle = (1/4) \varepsilon_0 (\partial/\partial \omega) (\omega \varepsilon_L) \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^*. \quad (4.11)$$

Учитывая еще дисперсионное уравнение для этих волн  $\varepsilon_L = 0$ , окончательно получим

$$\langle W \rangle = (\varepsilon_0/4) \omega (\partial \varepsilon_L / \partial \omega) \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^*.$$

Напряженность магнитного поля поперечных волн выражается через напряженность электрического поля из уравнений Максвелла:

$$| \bar{\mathbf{H}} | = (k/\omega \mu_0) | \bar{\mathbf{E}} |,$$

и, таким образом,

$$\bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{H}}^* = (k/\omega \mu_0)^2 \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^*. \quad (4.12)$$

Подставляя это соотношение в (4.10), находим

$$\langle W \rangle = (1/4) [\varepsilon_0 (\partial/\partial \omega) (\omega \varepsilon) + \mu_0 (k/\omega \mu_0)^2] \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^*, \quad (4.13)$$

что можно также переписать в виде

$$\langle W \rangle = (\varepsilon_0/4) [(\partial/\partial \omega) (\omega \varepsilon) + (k^2 c^2 / \omega^2)] \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^*$$

или

$$\langle W \rangle = (\varepsilon_0/4) (\partial/\partial \omega) [(1/\omega) (\omega^2 \varepsilon - k^2 c^2)] \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^*. \quad (4.14)$$

Наконец, вспоминая дисперсионное уравнение для поперечных волн  $\varepsilon_T = k^2 c^2 / \omega^2$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{1}{\omega} (\omega^2 \varepsilon_T - k^2 c^2) \right] &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon_T - k^2 c^2) - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 \varepsilon_T - k^2 c^2) = \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon_T). \end{aligned}$$

Таким образом, для поперечных волн

$$\langle W \rangle = (\varepsilon_0/4) (1/\omega) (\partial/\partial \omega) (\omega^2 \varepsilon_T) \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^*. \quad (4.15)$$

Заметим, что соотношения (4.11) и (4.14) можно представить единой формулой

$$\langle W \rangle = (1/4) [\partial D(\omega, \mathbf{k}) / \partial \omega] \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^*, \quad (4.16)$$

где  $D(\omega, \mathbf{k})$  — так называемая дисперсионная функция, которая в случае продольных волн записывается следующим образом:

$$D(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_0 \omega \varepsilon, \quad (4.17)$$

а для поперечных волн — как

$$D(\omega, \mathbf{k}) = (\varepsilon_0/\omega) (\omega^2 \varepsilon - k^2 c^2). \quad (4.18)$$

Введенная таким образом функция  $D(\omega, \mathbf{k})$  удобна тем, что она непосредственно определяет дисперсионное уравнение

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (4.19)$$

Отметим в заключение, что при записи выражения (4.10) для энергии поля использована нормировка (4.6) для комплексной ам-

плитуды волны. Именно такую нормировку обычно применяют при записи энергетических соотношений, тогда как при исследовании взаимодействия волн множитель  $1/2$  в (4.6) часто опускают.

### Задачи

4.1. Рассчитать среднюю скорость уменьшения энергии поля, обусловленного наличием мнимой части диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ .

4.2. Получить выражение для потока энергии волн, используя соотношение (4.16) для плотности энергии и определение групповой скорости.

### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Hines C. O. — J. Geophys. Res., 1951, v. 56, p. 63, 197, 207, 535.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.

Askne J. Res. Rep. Lab. Electronics, N 91. Chalmers Univ. of Technology, Göteborg, 1968.

Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме. Пер. с англ. М., Мир, 1971.

Yeh K. C., Liu C. H. Theory of Ionospheric Waves. N. Y. — Lond., Academic Press, 1972.

Witham G. B. Linear and Nonlinear Waves. N. Y., Wiley, 1974.

## ГЛАВА 5

# ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ТОКОВ

Связанные трехволновые уравнения можно вывести различными способами. В гл. 3 использован подход, основанный на введении понятия нормальных колебаний, т. е. некоторых линейных комбинаций динамических переменных. В терминах этих колебаний и были записаны связанные уравнения.

Альтернативный подход к описанию нелинейного взаимодействия волн основан на рассмотрении нелинейных токов в уравнениях поля. При таком подходе используются разложения дисперсионной функции в окрестности значений параметров, характеризующих гармоническую волну, что приводит к более точным соотношениям между нормальными колебаниями и электрическими полями. Результаты обоих подходов идентичны в том случае, когда производные дисперсионной функции по частоте и (или) волновому вектору всех порядков, кроме первого, не учитываются.

Поскольку описать нелинейное взаимодействие с помощью нелинейных токов довольно просто, а также в связи с тем, что в дальнейшем (гл. 17) нам понадобятся некоторые результаты, касающиеся дисперсионных эффектов второго порядка, приведем здесь упомянутую альтернативную формулировку теории нелинейного взаимодействия волн.

## Нелинейные уравнения поля и дисперсионные вклады высших порядков

Индукцированный ток в линейном приближении записывается как

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{E}$  — напряженность полного электрического поля, обусловленного всеми волнами в плазме. При слабой нелинейности вместо (5.1) можно записать разложение вида [1]

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)} + \dots, \quad (5.2)$$

где токи высших порядков пропорциональны произведениям напряженностей электрических полей различных волн. Подставив это разложение в уравнения Максвелла, получим с точностью до членов второго порядка:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t; \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t + \mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)}. \quad (5.4)$$

Используя фурье-преобразование и исключая магнитное поле с помощью уравнения (5.3), приходим к следующему уравнению для электрического поля:

$$\frac{c^2}{\omega^2} [\mathbf{k} (\mathbf{k} \bar{\mathbf{E}}_\omega) - k^2 \bar{\mathbf{E}}_\omega] = -\bar{\mathbf{E}}_\omega + \frac{4\pi i}{\omega \varepsilon_0} (\bar{\mathbf{J}}_\omega^{(1)} + \bar{\mathbf{J}}_\omega^{(2)}). \quad (5.5)$$

В первом порядке имеем

$$\bar{\mathbf{J}}_\omega^{(1)} = \sigma^{(1)} \bar{\mathbf{E}}_\omega \equiv i\omega \bar{\mathbf{P}}_\omega,$$

где введен вектор поляризации  $\bar{\mathbf{P}}_\omega$ , связанный с вектором  $\bar{\mathbf{E}}_\omega$  обычным соотношением

$$\varepsilon \varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}}_\omega = \varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}}_\omega + \bar{\mathbf{P}}_\omega.$$

Учитывая это соотношение, находим

$$\sigma^{(1)} = i\omega \varepsilon_0 (\varepsilon - 1),$$

что после подстановки в (5.5) дает

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left[ \frac{\mathbf{k} (\mathbf{k} \bar{\mathbf{E}}_\omega)}{k^2} - \bar{\mathbf{E}}_\omega \right] = -\varepsilon \bar{\mathbf{E}}_\omega + \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \bar{\mathbf{J}}_\omega^{(2)}. \quad (5.6)$$

Отсюда имеем

$$\omega \varepsilon \varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}}_{\omega L} = i \bar{\mathbf{J}}_{\omega L}^{(2)} \quad (5.7)$$

для продольных волн и

$$(\omega \varepsilon - k^2 c^2 / \omega) \varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}}_{\omega T} = i \bar{\mathbf{J}}_{\omega T}^{(2)} \quad (5.8)$$

для поперечных волн.

Соотношения (5.7) и (5.8) можно представить в общей форме

$$D(\omega, k) \bar{\mathbf{E}}_\omega = -i N. L., \quad (5.9)$$



где  $N.L.$  обозначает нелинейную вынуждающую силу. Формула (5.9) является нелинейным дисперсионным соотношением. В линейном приближении оно сводится к виду  $D_j(\omega_j, k_j) = 0$ , тогда как при учете нелинейного изменения  $\bar{E}$  во времени следует писать  $\omega = \omega_j - i(\partial/\partial t)$  и разлагать  $D(\omega, k)$  в ряд Тейлора в окрестности  $\omega = \omega_j$  (ср. с приведенным в гл. 4 выводом выражений для энергии поля в диспергирующей среде). В результате получим [1, 2]

$$\left( \frac{\partial D_j}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 D_j}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right) \bar{E}_j = N.L., \quad (5.10)$$

где  $\bar{E}_j$  — медленно меняющаяся амплитуда волны. При учете пространственного изменения разложение следует проводить также в окрестности  $k = k_j$  и получать тем самым пространственные производные  $\bar{E}_j$ .

Если нелинейное взаимодействие слабое, т. е.  $|i(\partial/\partial t)| \ll \omega_j$ , то обычно достаточно удержать только первое слагаемое в (5.10). Тогда, записывая нелинейный ток второго порядка в виде некоторой функции произведения электрических полей, приходим к системе уравнений трехволнового взаимодействия того же типа, что и (3.17). Отсюда следует, что множитель  $\partial D_j/\partial \omega$  будет всегда входить в знаменатель коэффициента связи.

В предыдущей главе было показано, что энергия поля волны определяется соотношением

$$\langle W_j \rangle = (1/4) (\partial D_j/\partial \omega) \bar{E}_j \bar{E}_j^*. \quad (5.11)$$

Если система находится в состоянии теплового равновесия, то всегда  $\partial D_j/\partial \omega > 0$ . В термодинамически-неравновесных системах знак коэффициента связи может изменяться на противоположный, что приводит к важным особенностям нелинейного взаимодействия волн (см. гл. 7 и 9).

При учете пространственного изменения поля вместо (5.10) будем иметь (в первом порядке)

$$[(\partial D/\partial \omega) \partial/\partial t - (\partial D/\partial k) \partial/\partial z] \bar{E}_j = N.L. \quad (5.12)$$

Здесь предполагается, что волна распространяется в направлении оси  $z$ . Учитывая, что  $D(\omega(k), k) = 0$ , получаем

$$(\partial D/\partial \omega) \partial \omega/\partial k + \partial D/\partial k = 0. \quad (5.13)$$

Таким образом,

$$\frac{\partial D/\partial k}{\partial D/\partial \omega} = - \frac{\partial \omega}{\partial k} = -v_g,$$

что дает

$$(\partial/\partial t + v_g \partial/\partial z) \bar{E}_j = (\partial D/\partial \omega)^{-1} N.L. \quad (5.14)$$

Последнее соотношение указывает на то, что рассмотрение пространственно-однородных, но нестационарных, и наоборот, стационарных, но пространственно-неоднородных распределений поля сводится к решению аналогичных уравнений с тем отличием, что

во втором случае коэффициент связи имеет дополнительный множитель  $v_g$ .

Описание нелинейного взаимодействия в представлении нелинейных токов обладает преимуществом физической наглядности, но вместе с тем необходимость введения производных высшего порядка в левой части (5.10) является некоторым недостатком такого подхода. Напомним, что в теории связанных волн фигурируют только производные первого порядка от нормальных колебаний. Так происходит потому, что в этой теории не используются линейные соотношения между динамическими переменными, соответствующие гармонической временной зависимости.

Рассмотрим теперь связь между описанными подходами. Подставляя в (5.9) соотношение  $E_\omega = \bar{f}(\omega) A_\omega$ , находим

$$D(\omega, k) \bar{f}(\omega) A_\omega = -iN \cdot L. \quad (5.15)$$

Как видно, амплитуде  $A_\omega$  отвечает новая дисперсионная функция  $D(\omega, k) \bar{f}(\omega)$ . Условие исчезновения производных высшего порядка можно записать в виде

$$(\partial/\partial\omega) [D(\omega, k) \bar{f}(\omega)] = k', \quad (5.16)$$

где  $k'$  — постоянная. Используя это соотношение, получаем

$$A_\omega = (1/k') (\omega - \omega_j)^{-1} D(\omega, k) \bar{E}_\omega \quad (5.17)$$

или после разложения в окрестности  $\omega_j$

$$A = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[ \frac{\partial D(\omega, k)}{\partial \omega} \bar{E} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 D(\omega, k)}{\partial \omega^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \dots \right]. \quad (5.18)$$

При записи (5.18) принято  $k' = \varepsilon_0$  и, кроме того, подразумевается, что коэффициенты разложения заданы при  $\omega = \omega_j$ .

Формула (5.18) определяет общее соотношение между  $A$  и  $\bar{E}$ , вытекающее из требования обращения в нуль производных высших порядков в левых частях уравнений движения, записанных с использованием  $A$ , и в этом смысле может рассматриваться как определение  $A$ . В линейном приближении, удерживая лишь первый член в правой части (5.2), имеем

$$A = (1/\varepsilon_0) [\partial D(\omega, k)/\partial \omega] \bar{E}, \quad (5.19)$$

что дает

$$A_L = (\partial/\partial\omega) (\omega \varepsilon_L) \bar{E} \quad (5.20)$$

для продольных волн и

$$A_T = (1/\omega) (\partial/\partial\omega) (\omega^2 \varepsilon_T) \bar{E} \quad (5.21)$$

для поперечных волн.

Учитывая дисперсионное уравнение для продольных волн ( $\varepsilon_L = 0$ ), (5.20) можно представить в виде, аналогичном (5.21). В то же время (5.21) нельзя записать в форме (5.20), поскольку дисперсионное уравнение поперечных волн есть  $\varepsilon_T = k^2 c^2 / \omega^2$ .

Отметим, что определение  $A$  зависит от выбора постоянной  $k'$ . Выше мы положили  $k' = \varepsilon_0$  для того, чтобы соотношения между  $A_T$ ,  $A_L$  и  $\bar{E}$  имели привычный вид (5.20) и (5.21).

## Линейное затухание и неустойчивость

Если в линейном приближении учесть диссипацию энергии волны, обусловленную, например, столкновениями или затуханием Ландау, то при вещественных  $k_j$  дисперсионное уравнение

$$D(\omega_j, \mathbf{k}_j) = 0 \quad (5.22)$$

будет иметь комплексные решения

$$\omega_j = \omega_{rj} + iv_j. \quad (5.23)$$

Для временной зависимости вида  $\exp(i\omega_j t)$  случай  $v_j > 0$  соответствует затуханию волны, а  $v_j < 0$  — линейной неустойчивости.

При учете нелинейного взаимодействия имеем

$$D(\omega, \mathbf{k}_j) = D(\omega_j, \mathbf{k}_j) + (\omega - \omega_j) \left[ \partial D(\omega, \mathbf{k}) / \partial \omega \right]_{\omega = \omega_j}. \quad (5.24)$$

Подставим вместо  $\omega$  оператор, включающий производную по времени и действующий на амплитуду волны в соответствии с (5.9). Вспоминая, что наличие мнимой части  $v_j$  также приводит к зависимости амплитуды волны от времени, можно записать

$$\omega = \omega_{rj} - i\partial/\partial t, \quad (5.25)$$

где  $\partial/\partial t$  описывает полное временное изменение амплитуды. Тогда получим

$$\omega - \omega_j = -i\partial/\partial t - iv_j \quad (5.26)$$

и далее

$$\partial \bar{E}_j / \partial t + v_j \bar{E}_j = (\partial D / \partial \omega)^{-1} \text{N. L.} \quad (5.27)$$

Это соотношение обобщает (5.10) на случай учета линейного затухания или нарастания. Из-за наличия мнимой части  $v_j$  множитель  $(\partial D / \partial \omega)^{-1}$  дает вклад в мнимую часть коэффициента связи. Этот вклад можно рассчитать также при рассмотрении проводимости во втором порядке.

### Связанные уравнения для волн

Для простоты ограничимся учетом только первого слагаемого в (5.10) и пренебрежем возможностью линейного затухания или нарастания. Возвратившись к соотношению (5.10), перепишем его в следующем виде:

$$D(\omega, \mathbf{k}) \bar{E}_\omega = i \bar{J}_\omega^{(2)}.$$

Напомним, что нижний индекс  $\omega$  введен для обозначения пространственно-временной фурье-компоненты (для фурье-компонент по пространственным переменным будем использовать индекс  $k$ ). Для дальнейшего упрощения предположим, что спектр по  $k$  состоит из дискретного набора линий. Тогда

$$\bar{J}_\omega^{(2)} = \sum_{\mathbf{k}_j} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{i_j}^{(2)} \bar{E}_{\omega_i} \bar{E}_{\omega_j} d\omega_i d\omega_j,$$

где присутствуют только компоненты, удовлетворяющие соотношениям

$$\omega_i + \omega_j = \omega; \quad (5.28)$$

$$\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j = \mathbf{k}. \quad (5.29)$$

Удерживая первое слагаемое в разложении (5.10), получаем

$$\exp(i\omega_k t) (\partial D / \partial \omega) \partial \bar{E}_{0k} / \partial t = -\bar{J}_k^{(2)}. \quad (5.30)$$

Смысл величины  $\bar{E}_{0k}$  ясен из определения

$$\bar{E}_k(t) = \bar{E}_{0k}(t) \exp(i\omega_k t). \quad (5.31)$$

При  $|\partial/\partial t| \ln \bar{E}_{0k} | \ll \omega_k$  будем иметь

$$\bar{J}_k^{(2)} = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{(2)} \bar{E}_{k_i} \bar{E}_{k_j}, \quad (5.32)$$

где  $\sigma_{ij}$  надо рассчитывать при частотах  $\omega_{k_i}, \omega_{k_j}$ . Из (5.30) — (5.32) следует, что

$$\frac{\partial \bar{E}_{0k}}{\partial t} = -\frac{1}{\partial D / \partial \omega} \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{(2)} \bar{E}_{0k_i} \bar{E}_{0k_j} \exp[i(\omega_{k_i} + \omega_{k_j} - \omega_k)t]. \quad (5.33)$$

Ясно, что условие взаимодействия (5.28) может быть выполнено лишь при частотных спектрах  $E_{0k}, E_{0k_i}, E_{0k_j}$ , достаточно широких для того, чтобы перекрывалась расстройка

$$\Delta\omega = \omega_{k_i} + \omega_{k_j} - \omega_k.$$

Предполагая это условие выполненным, видим, что вклад во взаимодействие дают только те слагаемые из (5.33), для которых  $\Delta\omega \ll 1/\tau$ , где  $\tau$  — время взаимодействия.

Рассмотрим подробнее взаимодействие трех волн вида

$$E_j = (1/2) \bar{E}_j(t) \exp\{i(\omega_j t + \mathbf{k}_j \mathbf{r})\} + \text{к. с.}$$

В этом случае сумма в (5.33) содержит всего одно слагаемое, удовлетворяющее условию резонанса

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad (5.34)$$

и мы приходим к уравнениям:

$$\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial t} = -\frac{\sigma_{12}^{(2)}}{\partial D_0 / \partial \omega} \bar{E}_1 \bar{E}_2 \exp\{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0)t\}; \quad (5.35a)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_1}{\partial t} = -\frac{\sigma_{01}^{(2)}}{\partial D_1 / \partial \omega} \bar{E}_0 \bar{E}_2^* \exp\{i(\omega_0 - \omega_1 - \omega_2)t\}; \quad (5.35б)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_2}{\partial t} = -\frac{\sigma_{02}^{(2)}}{\partial D_2 / \partial \omega} \bar{E}_0 \bar{E}_1^* \exp\{i(\omega_0 - \omega_1 - \omega_2)t\}. \quad (5.35в)$$

Отметим, что в (5.35б) и (5.35в) фигурируют комплексно-сопряженные величины  $\bar{E}_2^*$  и  $\bar{E}_1^*$ , а расстройка частоты входит в эти

соотношения с отрицательным знаком. Как видно, система уравнений связанных волн (5.35) аналогична системе (3.17), но записана с помощью медленно меняющихся амплитуд электрических полей. Эту систему можно легко обобщить на случай различных направлений. Например, для волн с достаточно широким спектром по  $k$  необходимо удерживать не один, а несколько членов в правой части (5.33). Система уравнений, полученная таким образом (см. гл. 18), описывает эффекты резонансного уширения и эволюции к термодинамически-равновесному состоянию. Ее можно использовать также для альтернативной формулировки пространственно-временного взаимодействия.

### Задачи

5.1. Множитель  $N.L.$  в правой части (5.9) возникает при учете членов второго порядка в разложении тока по электрическому полю. Объяснить физический смысл этого множителя при условии, что энергия сохраняется.

5.2. Как видно из (5.18), соотношение между  $A$  и  $\bar{E}$  (вообще между  $A$  и любой полевой величиной) содержит производные высшего порядка от  $\bar{E}$ . Они (а следовательно, и соотношение между  $A$  и  $\bar{E}$ ) могут изменяться во времени. Проследить связь между этим фактом и выводом, содержащимся в гл. 3.

5.3. Рассмотрим модель плазмы, в которой движение электронов подчиняется уравнению

$$\partial v / \partial t + v \partial v / \partial x = - (e/m) E.$$

Предположим, что все величины изменяются только в направлении  $x$  и что это изменение обусловлено волнами с частотами  $\omega$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и волновыми векторами  $k$ ,  $k_1$  и  $k_2$ , такими, что  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  и  $k = k_1 + k_2$  ( $\partial / \partial x = -ik_j$ ). В линейном приближении получим проводимость первого порядка

$$\sigma^{(1)} = -ie_0 \omega_p^2 / \omega \quad (\bar{J}_k^{(1)} = -eN \bar{v}_k).$$

Найти проводимость второго порядка  $\sigma^{(2)}$ , описывающую вклад в  $\bar{J}_k$  квадратичных относительно поля слагаемых вида  $E_{k_1}$ ,  $E_{k_2}$ .

5.4. Пусть  $\bar{E} = g(\omega) A^{(2)}$ , где  $g(\omega)$  определено так, что  $D(\omega, k)g(\omega) = = k''(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_1)$ . Записать уравнение для амплитуды  $A^{(2)}$ , аналогичное (5.10), в предположении, что  $D(\omega_0, k) = 0$  и  $\omega_1$  произвольно.

5.5. Выразить величину  $\partial \langle W \rangle / \partial t$  через амплитуды  $E$  и  $A$  (или их произведение) и проинтегрировать ее в первом приближении по дисперсионным эффектам.

5.6. Получить уравнение движения для случая комплексных частот  $\omega_j = \omega_r + iv_j$ , используя разложения в окрестности вещественной части частоты.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Цытович В. Н.** Нелинейные эффекты в плазме. М., Наука, 1967.
2. **Askne J.** Dissertation. Göteborg, Chalmers Univ. of Technology, 1970; Intern. J. Electronics, 1972, v. 32, p. 573.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Jackson E. A., Raether M.** — Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 1378.  
**Harker K. J., Crawford F. W.** — J. Plasma Phys., 1974, v. 11, p. 435.

**ТРЕХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ПЛАЗМЕ**

В гл. 3 рассматривалась простейшая модель взаимодействия двух поперечных и одной продольной волны. Обсудим теперь гидродинамическую и кинетическую модели. Последняя дает более детальное описание, так как в ней учитывается распределение частиц по скоростям. Однако гидродинамическое описание нагляднее, поскольку оперирует непосредственно с такими основными параметрами плазмы, как плотность, давление и т. п.

**Гидродинамическое описание**

Рассмотрим прежде всего гидродинамическую модель, следуя работе [1]. Эта модель описывает плазму, частицы которой совершают дрейфовое движение при наличии магнитного поля. Будем пользоваться следующими обозначениями:  $q_\sigma, m_\sigma$  — заряд и масса частиц сорта  $\sigma$ ;  $N_{0\sigma}, n_\sigma$  — равновесная и возмущенная плотности частиц;  $v_{d\sigma}$  — дрейфовая скорость частиц;  $v_\sigma$  — возмущение скорости частиц;  $u_\sigma$  — тепловая скорость частиц;  $\omega_{p\sigma} = (N_{0\sigma}q_\sigma^2/m_\sigma\epsilon_0)^{1/2}$  — плазменная частота;  $\omega_{H\sigma} = (q_\sigma/m_\sigma) |B_0|$  — гирочастота;  $B_0$  — постоянное магнитное поле;  $\bar{E}$  и  $\bar{B}$  — возмущения электрического и магнитного полей. Предположим, что все динамические переменные изменяются только вдоль направления магнитного поля, и примем это направление за  $x$ . Тогда нормальное колебание для поперечных волн запишем в виде [1]\*

$$a_{T\pm} = \frac{i}{\epsilon_0} \sum_{\sigma} \frac{q_{\sigma} N_{0\sigma} (\bar{v}_{y\sigma} \pm i\bar{v}_{z\sigma})}{\omega_{\pm} - kv_{d\sigma} \pm \omega_{H\sigma}} + \bar{E}_y \pm i\bar{E}_z \mp \mp \frac{i}{k} \left[ \omega_{\pm} - \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega_{\pm} - kv_{d\sigma} \pm \omega_{H\sigma}} \right] (\bar{B}_y \pm i\bar{B}_z). \quad (6.1)$$

Индекс  $\pm$  введен здесь для обозначения право- и левополяризованных волн соответственно. Частоты этих волн  $\omega_{\pm}$  удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$\epsilon_T = 1 - \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2 (\omega_{\pm} - kv_{d\sigma})}{(\omega_{\pm} - kv_{d\sigma} \pm \omega_{H\sigma}) \omega_{\pm}^2} = \frac{k^2 c^2}{\omega_{\pm}^2}. \quad (6.2)$$

Аналогичные результаты для продольных волн имеют вид

$$a_L = i \sum_{\sigma} \frac{q_{\sigma}}{\epsilon_0} \frac{v_{d\sigma} (\omega_L - kv_{d\sigma}) + ku_{\sigma}^2}{(\omega_L - kv_{d\sigma})^2 - k^2 u_{\sigma}^2} n_{\sigma} + + i \sum_{\sigma} \frac{q_{\sigma}}{\epsilon_0} \frac{N_{0\sigma} \omega_L}{(\omega_L - kv_{d\sigma})^2 - k^2 u_{\sigma}^2} \bar{v}_{x\sigma} + \bar{E}_x; \quad (6.3)$$

\* В этой главе предполагаем, что  $E = \sum_k [\bar{E}_k \exp(ikx) + \bar{E}_k^* \exp(-ikx)]$ ,

т. е. используем нормировку  $\bar{E}_k, \bar{v}_k$  и т. п., отличную от принятой в гл. 3.

$$\varepsilon_L = 1 - \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{(\omega_L - kv_{d\sigma})^2 - k^2 u_{\sigma}^2} = 0, \quad (6.4)$$

где  $\omega_L$  — частота продольной волны.

**Взаимодействие трех продольных волн.** В изотропной плазме единственно возможным трехволновым процессом является взаимодействие ионно-звуковой волны с двумя плазменными (ленгмюровскими) волнами. Другие процессы запрещены из-за нарушения условий согласования частот и волновых чисел. Для анизотропной плазмы класс разрешенных процессов значительно шире. Один из важных представителей этого класса — взаимодействие трех ленгмюровских волн при наличии потоков заряженных частиц. Потоки вызывают доплеровское смещение частоты и, кроме того, могут быть причиной возникновения волн с отрицательной энергией [2].

Коэффициенты связи для этого случая можно получить тем же способом, что и в гл. 3; они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} c_{12} &= \omega_0 \frac{c}{\omega_1 (\partial\varepsilon/\partial\omega_1) \omega_2 \partial\varepsilon/\partial\omega_2}; \\ c_{02} &= -\omega_1 \frac{c}{\omega_0 (\partial\varepsilon/\partial\omega_0) \omega_2 \partial\varepsilon/\partial\omega_2}; \\ c_{01} &= -\omega_2 \frac{c}{\omega_0 (\partial\varepsilon/\partial\omega_0) \omega_1 \partial\varepsilon/\partial\omega_1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

где

$$\begin{aligned} c &= \sum_{\sigma} \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \omega_{p\sigma}^2 \{[(\omega_0 - k_0 v_{d\sigma})^2 - k_0^2 u_{\sigma}^2][(\omega_1 - k_1 v_{d\sigma})^2 - k_1^2 u_{\sigma}^2] \times \\ &\quad \times [(\omega_2 - k_2 v_{d\sigma})^2 - k_2^2 u_{\sigma}^2]\}^{-1} \{k_0 (\omega_1 - k_1 v_{d\sigma}) (\omega_2 - k_2 v_{d\sigma}) + \\ &\quad + k_1 (\omega_0 - k_0 v_{d\sigma}) (\omega_2 - k_2 v_{d\sigma}) + k_2 (\omega_0 - k_0 v_{d\sigma}) (\omega_1 - k_1 v_{d\sigma}) - u_{\sigma}^2 k_0 k_1 k_2\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

и

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega_j} = 2 \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2 (\omega_j - k_j v_{d\sigma})}{[(\omega_j - k_j v_{d\sigma})^2 - k_j^2 u_{\sigma}^2]^2}. \quad (6.7)$$

Последнее соотношение получается в результате дифференцирования (6.4). Асимметрия знаков коэффициентов связи объясняется следующим выбором резонансных условий:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad k_0 = k_1 + k_2.$$

Используя соотношение  $a_j = \omega_j (\partial\varepsilon/\partial\omega_j) \bar{E}_j$ , нетрудно получить коэффициенты связи для электрических полей

$$v_{k1} = \pm c/(\partial\varepsilon/\partial\omega_j), \quad (6.8)$$

где знак «плюс» соответствует волне с наибольшей энергией. Величина  $c$  тесно связана с диэлектрической проницаемостью второ-

го порядка, которую можно определить как коэффициент при произведении электрических полей в правой части нелинейного дисперсионного соотношения (5.9).

**Взаимодействие продольной волны с двумя поперечными волнами, распространяющимися вдоль магнитного поля.** Этот тип нелинейных процессов осуществляется, например, при взаимодействии лазерного излучения с плазмой, когда одна из поперечных волн совпадает с падающей, другая — с отраженной лазерной волной, а в качестве продольной можно взять плазменную или ионно-звуковую волну.

Введем индексы 0 и 1 для поперечных волн (индекс  $L$  поперечной относится к продольной волне) и предположим, что резонансные условия имеют вид:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_L; \quad k_0 = k_1 + k_L.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} c_{1L} &= \omega_0 \frac{c}{\omega_1^{-1} (\partial/\partial\omega_1) (\omega_1^2 \epsilon_T) \omega_L \partial\epsilon_L/\partial\omega_L}; \\ c_{0L} &= -\omega_1 \frac{c}{\omega_0^{-1} (\partial/\partial\omega_0) (\omega_0^2 \epsilon_T) \omega_L \partial\epsilon_L/\partial\omega_L}; \\ c_{01} &= -\omega_2 \frac{1}{2} \frac{c}{\omega_0^{-1} (\partial/\partial\omega_0) (\omega_0^2 \epsilon_T) \omega_1^{-1} (\partial/\partial\omega_1) (\omega_1^2 \epsilon_T)}, \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

где

$$c = \frac{\delta_{01}^{\text{пол}}}{\omega_0 \omega_1} \sum_{\sigma} \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{(\omega_L - k_L v_{d\sigma})^2 - k_L^2 v_{d\sigma}^2} \frac{\omega_1 - k_1 v_{d\sigma}}{\omega_1 - k_1 v_{d\sigma} \pm \omega_{H\sigma}} \times \\ \times \frac{\omega_0 - k_0 v_{d\sigma}}{\omega_0 - k_0 v_{d\sigma} \pm \omega_{H\sigma}} \left[ k_L \pm \omega_{H\sigma} \left( \frac{k_0}{\omega_0 - k_0 v_{d\sigma}} - \frac{k_1}{\omega_1 - k_1 v_{d\sigma}} \right) \right]. \quad (6.10)$$

Коэффициент  $\delta_{01}^{\text{пол}}$  напоминает о том, что поперечные волны должны быть поляризованы одинаково (лишь при таком условии коэффициент связи  $c$  не обращается в нуль). Величина  $\partial\epsilon_L/\partial\omega_L$  имеет вид (6.7) при  $j=L$ , а для расчета величины  $\omega_T^{-1} (\partial/\partial\omega_T) \times (\omega_T^2 \epsilon_T)$  следует переписать (6.2) как

$$\epsilon_T = 1 - \frac{1}{\omega_{\pm}^2} \sum_{\sigma} \left[ \omega_{p\sigma}^2 \mp \frac{\omega_{H\sigma} \omega_{p\sigma}^2}{\omega_{\pm} - k v_{d\sigma} \mp \omega_{H\sigma}} \right],$$

что дает

$$\frac{1}{\omega_T} \frac{\partial}{\partial\omega_T} (\omega_T^2 \epsilon_T) = 2 \left[ 1 \mp \sum_{\sigma} \frac{\omega_{H\sigma} \omega_{p\sigma}^2}{2\omega_T (\omega_T - k_T v_{d\sigma} \pm \omega_{H\sigma})^2} \right], \quad T = 0, 1.$$

Множитель  $1/2$  в коэффициенте  $c_{01}$  отвечает взаимодействию волн круговой поляризации.



## Кинетическое описание

Кинетические аналоги выражений (6.1) и (6.3) можно найти в работе [3]. Используя обозначение  $F_0 = F_0(v_x^2, v_y^2 + v_z^2)$  для равновесной функции распределения по скоростям и  $\bar{f}$  — для ее малого возмущения, запишем эти выражения в следующем виде:

$$a_{\pm} = \frac{iq}{\varepsilon_0} \int \frac{(v_y \pm iv_z) [\bar{f} - (iq/m\omega)(\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{B}}) \partial F_0 / \partial \mathbf{v}]}{\omega - kv_x \pm \omega_H} d\mathbf{v} + \bar{E}_y \pm i\bar{E}_z \mp (ikc^2/\omega)(B_y \pm iB_z) \quad (6.11)$$

и

$$a_L = -\frac{iq\omega}{\varepsilon_0 k} \int \frac{\bar{f}}{\omega - kv_x} d\mathbf{v}. \quad (6.12)$$

При этом дисперсионное уравнение есть условие существования нетривиального решения системы уравнений

$$\omega \bar{\mathbf{E}} + \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{E}}) + \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \int \frac{\mathbf{v}}{\omega - kv} \left[ \bar{\mathbf{E}} + \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{E}})}{\omega} \right] \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = 0. \quad (6.13)$$

При учете столкновений на основе использования модели Батнагара — Гросса — Крука [4]

$$(\partial \bar{f} / \partial t)_{\text{CT}} = -\bar{v} \bar{f} + \bar{v} (\bar{n} / N_0) F_0, \quad (6.14)$$

где  $\bar{v}$  — эффективная частота столкновений. Для такой модели [5]

$$a_L = c_k \left[ \int \frac{\bar{f}}{\omega + iv - kv_x} d\mathbf{v} + \bar{n} \frac{iv}{kN_0} \int \frac{\partial F_0 / \partial v_x}{\omega + iv - kv_x} d\mathbf{v} \right]. \quad (6.15)$$

Постоянную  $c_k$  выбирают так, чтобы выполнялось соотношение  $a_L = \omega (\partial \varepsilon_L / \partial \omega) \bar{\mathbf{E}}$ :

$$c_k = -\frac{iq\omega}{k\varepsilon_0} \left[ 1 - \frac{iv}{N_0} \int \frac{F_0}{\omega + iv - kv_x} d\mathbf{v} + \frac{iv}{N_0} \left( \frac{\omega}{k} - v_d \right) \times \int \frac{\partial F_0 / \partial v_x}{\omega + iv - kv_x} d\mathbf{v} \right]^{-1}. \quad (6.16)$$

Взаимодействие трех продольных волн вида (6.15) описывается стандартной системой (3.17) со следующими коэффициентами связи:

$$c_{jk} = \frac{q^2 c_k (r_{jk} + r_{kj})}{m^2 \omega_p^2 \omega_j (\partial \varepsilon / \partial \omega_j) \omega_k \partial \varepsilon / \partial \omega_k}, \quad (6.17)$$

где

$$r_{jk} = -ik \int d\mathbf{v} \frac{[\omega_p^2 + iv(\omega_j - k_j v_d)] \partial F_0 / \partial v_x - ik_j v F_0}{(\omega_k + iv - k_k v_x)^2 (\omega_j + iv - k_j v_x)} - \frac{v(\omega_j - k_j v_d)}{2\omega_p^2} \int d\mathbf{v} \frac{(\omega_k - k_k v_d)^2 \partial^2 F_0 / \partial v_x^2}{\omega_k + iv - k_k v_x} \quad (6.18)$$

и

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{\omega_p^2}{kN_0} \left[ 1 - \frac{iv}{N_0} \int \frac{F_0}{\omega + iv - kv_x} dv + \right. \\ \left. + \frac{iv}{N_0} \left( \frac{\omega}{k} - v_d \right) \int \frac{\partial F_0 / \partial v_x}{\omega + iv - kv_x} dv \right]^{-1} \int \frac{\partial F_0 / \partial v_x}{\omega + iv - kv_x} dv. \quad (6.19)$$

### Обсуждение результатов

Как видно из (6.5) и (6.9), уравнения для амплитуд нормальных колебаний  $A_j$  можно привести к общей форме

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} = \pm \frac{\omega_j c}{(\partial D_k / \partial \omega_k) \partial D_L / \partial \omega_L} A_k A_L. \quad (6.20)$$

Такая форма уравнения удобна при рассмотрении законов сохранения, которое проводится в следующей главе.

При использовании приведенных в этой главе выражений для коэффициентов связи не следует забывать о принятой нормировке комплексных амплитуд, которая влияет, конечно, и на вид энергетических соотношений. В частности, выражения для энергии волн, приведенные в гл. 4, соответствуют нормировке амплитуд, введенной в гл. 3.

Касаясь сравнения гидродинамического и кинетического подходов, отметим, что кинетическое описание позволяет более точно учесть температурные эффекты, тогда как в приближении холодной плазмы оба подхода эквивалентны. Можно показать также [2, 6], что в первом порядке по температуре результаты, полученные на основе обоих подходов, полностью согласуются, если при расчете давления в гидродинамическом приближении рассматривать волновое движение как адиабатический процесс. В цитированных работах [7—12] использовались и некоторые другие модели. Эти работы посвящены рассмотрению проблемы взаимодействия волн в астрофизическом аспекте [7, 8], столкновительному возбуждению волн [9], выводу уравнений движения из лагранжиана [10], взаимодействию волн, распространяющихся под произвольными углами относительно направления внешнего магнитного поля [11] и трехволновому взаимодействию при наличии внешнего высокочастотного электрического поля [12] (см. также список дополнительной литературы).

### Задачи

6.1. Доказать, что величины (6.1) и (6.2) имеют смысл нормальных колебаний.

6.2. Получить в первом приближении соотношение между величинами  $a_{\pm}$  и  $\bar{E}_{\pm}$ , где  $\bar{E}_{\pm} = \bar{E}_y \pm i\bar{E}_z$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wilhelmsson H. — J. Plasma Phys., 1969, v. 3, p. 215; Proc. Symp. on Beam-Plasma Interactions. The Netherlands, Utrecht, 1969.
2. Stenflo L., Wilhelmsson H., Östberg K. — Phys. Scripta, 1971, v. 3, p. 231.
3. Stenflo L. — J. Plasma Phys., 1970, v. 4, p. 585.
4. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. — Phys. Rev., 1954, v. 94, p. 511.
5. Stenflo L. — Plasma Phys., 1970, v. 12, p. 509.
6. Östberg K. Dissertation. Göteborg, Chalmers Univ. of Technology, 1973.
7. Wilhelmsson H. — In: Astronomical Notes N. 8. Göteborg, Univ., 1963.
8. Harker K. J., Crawford F. W. — J. Geophys. Res., 1969, v. 74, p. 5029.
9. Stenflo L. — Plasma Phys., 1972, v. 14, p. 713.
10. Dysthe K. B. — Intern. J. Electronics, 1970, v. 29, p. 401.
11. Larsson J., Stenflo L. — Beitr. Plasma Phys., 1973, Bd 13, S. 169.
12. Stenflo L. — Plasma Phys., 1974, v. 16, p. 677.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Ахизер А. И., Любарский Г. Я.** К нелинейной теории колебаний электронной плазмы. — Докл. АН СССР, 1951, т. 80, с. 193.
- Bernstein I. B., Greene J. M., Kruskal D.** Exact Nonlinear Plasma Oscillations. — Phys. Rev., 1957, v. 108, p. 546.
- Sturrock P. A.** Action Transfer and Frequency Shift Relations in the Nonlinear Theory of Waves and Oscillations. — Ann. Phys., 1960, v. 9, p. 422.
- Kino G. S.** Parametric Amplifier Theory for Plasmas and Electron Beams. — J. Appl. Phys., 1960, v. 31, p. 1449.
- Wilhelmsson H.** Stationary Nonlinear Plasma Oscillations. — Phys. Fluids, 1961, v. 4, p. 335.
- Dawson J., Oberman C.** High Frequency Conductivity and Emission and Absorption Coefficients of a Fully Ionized Plasma. — Ibid., 1962, v. 5, p. 517.
- Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З.** Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1962, т. 32, с. 1291.
- Dawson J., Oberman C.** Effect of Ion Correlations on High-Frequency Plasma Conductivity. — Phys. Fluids, 1963, v. 6, p. 394.
- Kino G. S., Krenz J. H.** Parametric Oscillations and Harmonic Generation in a Plasma Discharge. — Appl. Phys. Lett., 1963, v. 3, p. 53.
- Aamodt R. E., Drummond W. E.** Resonant Wave-Wave Scattering of Plasma Oscillations. — Phys. Fluids, 1964, v. 7, p. 1816.
- Platzman P. M., Buchsbaum S. J., Tzoar N.** Light-off-Light Scattering in a Plasma. — Phys. Rev. Lett., 1964, v. 12, p. 573.
- Коврижных Л. М., Цытович В. Н.** О взаимодействиях продольных и поперечных волн в плазме. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1964, т. 46, с. 2212.
- Platzman P. M., Tzoar N.** Nonlinear Interaction of Light in a Plasma. — Phys. Rev., 1964, v. 136, p. A11.
- Kroll N. M., Ron A., Rostoker N.** Optical Mixing as a Plasma Density Probe. — Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 83.
- Горбунов Л. М., Пустовалов В. В., Силин В. П.** Нелинейное взаимодействие электромагнитных волн в плазме. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1964, т. 47, с. 1437.
- Горбунов Л. М., Силин В. П.** Нелинейное взаимодействие плазменных волн. — Там же, с. 200.
- Силин В. П.** Параметрический резонанс в плазме. — Там же, 1965, т. 48, с. 1679.
- Алиев Ю. М., Силин В. П.** Теория колебаний плазмы, находящейся в высокочастотном электрическом поле. — Там же, с. 901.
- Montgomery D.** On the Resonant Excitation of Plasma Oscillations with Laser Beams. — Physica, 1965, v. 31, p. 693.
- Du Bois D. F., Goldman M. V.** Radiation-Induced Instability of Electron Plasma Oscillations. — Phys. Rev. Lett., 1965, v. 14, p. 544.

- Stern R. A. Harmonic Generation and Frequency Mixing at Plasma Resonance.—*Ibid.*, p. 538.
- Cheng H., Lee Y. C. Interaction of Light with Light in a Plasma.—*Ibid.*, p. 426.
- Du Bois D. F. Nonlinear Scattering of Radiation from Plasmas.—*Ibid.*, p. 818.
- Goldman M. V., Du Bois D. F. Stimulated Incoherent Scattering of Light from Plasmas.—*Phys. Fluids*, 1965, v. 8, p. 1404.
- Цытович В. Н., Шварцбург А. Б. К теории нелинейного взаимодействия волн в магнитоактивной анизотропной плазме.—*Жури. эксперим. и теорет. физ.*, 1965, т. 49, с. 797.
- Алиев Ю. М., Силин В. П., Уотсон К. Параметрический резонанс в плазме, находящейся в магнитном поле.—*Там же*, т. 50, с. 943.
- Горбунов Л. М., Силин В. П. О неустойчивости плазмы в сильном высокочастотном поле.—*Там же*, т. 49, с. 1973.
- Chang D. B., Drummond W. E. Interaction of Plasmons.—*Phys. Fluids*, 1966, v. 9, p. 2254.
- Stern R. A., Tzoar N. Parametric Coupling Between Electron-Plasma and Ion-Acoustic Oscillations.—*Phys. Rev. Lett.*, 1966, v. 17, p. 903.
- Lee Y. C., Su C. H. Theory of Parametric Coupling in Plasmas.—*Phys. Rev.*, 1966, v. 152, p. 129.
- Goldman M. V. Parametric Plasmon-Photon Interaction.—*Ann. Phys.*, 1966, v. 38, p. 95, 117.
- Stern R. A., Tzoar N. Resonant Excitation of Plasma Oscillations by Transverse Electromagnetic Waves.—*Phys. Rev. Lett.*, 1966, v. 16, p. 785.
- Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме.—*Успехи физ. наук*, 1966, т. 90, с. 435.
- Цытович В. Н. Нелинейная неустойчивость оптических частот в частично ионизованной плазме.—*Жури. эксперим. и теорет. физ.*, 1966, т. 51, с. 1385.
- Захаров В. Е. Об устойчивости волн в нелинейных средах с дисперсией.—*Там же*, с. 1107.
- Tzoar N. Nonlinear Excitation of Density Fluctuations in Electron-Phonon Systems.—*Phys. Rev.*, 1967, v. 164, p. 518.
- Sjölund A., Stenflo L. Parametric Coupling Between Ion Waves and Electromagnetic Waves.—*Appl. Phys. Lett.*, 1967, v. 10, p. 201.
- Sjölund A., Stenflo L. Parametric Coupling Between Transverse Electromagnetic and Longitudinal Electron Waves.—*Physica*, 1967, v. 35, p. 499.
- Sjölund A., Stenflo L. Parametric Coupling Between Electron and Ion Waves.—*J. Appl. Phys.*, 1967, v. 38, p. 2676.
- Sjölund A., Stenflo L. Nonlinear Coupling in Magnetized Plasma.—*Z. Phys.*, 1967, Bd 204, S. 211.
- Jackson E. A. Parametric Effects of Radiations on a Plasma.—*Phys. Rev.*, 1967, v. 153, p. 235.
- Etievant C., Fidone I., Perulli M. Nonlinear Processes in Beam-Plasma Systems.—*Plasma Phys.*, 1967, v. 9, p. 151.
- Dupree T. H. Nonlinear Theory of Drift-Wave Turbulence and Enhanced Diffusion.—*Phys. Fluids*, 1967, v. 10, p. 1049.
- Du Bois D. F., Goldman M. V. Theory of Four-Plasmon Parametric Excitation and Comparison with Experiment.—*Phys. Rev. Lett.*, 1967, v. 19, p. 1105.
- Nishikawa K. Instability of a Weakly Ionized Plasma Induced by an Alternating Electric Field.—*Progr. Theor. Phys.*, 1967, v. 37, p. 769.
- Du Bois D. F., Goldman M. V. Parametrically Excited Plasma Fluctuations.—*Phys. Rev.*, 1967, v. 164, p. 207.
- Bodner S. E., Aamodt R. E. Nonlinear Dynamics of Harmonic Loss-Cone Flute Modes.—*Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1968, p. 1528.
- Davidson R., Goldman R. Diffusion of Electron Plasma Oscillations in a Large-Amplitude Ion Wave Background.—*Ibid.*, p. 1530.
- Lamborn B. N. A Wave Interaction at the Cyclotron Frequency.—*Ibid.*, p. 1534.
- Etievant C., Ossakow S., Ozizmir E., Su C. H., Fidone I. Nonlinear Interaction of Electromagnetic Waves in a Cold Magnetized Plasma.—*Phys. Fluids*, 1968, v. 11, p. 1778.

- Harker K. J., Crawford F. W.** Nonlinear Interaction of Cyclotron Harmonic Waves. — *J. Appl. Phys.*, 1968, v. 39, p. 5959.
- Sugihara R.** Interaction Between an Electromagnetic Wave, Plasma Waves and Ion Acoustic Wave. — *Phys. Fluids*, 1968, v. 11, p. 178.
- Nishikawa K. J.** Parametric Excitation of Coupled Waves. I. General Formulation. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1968, v. 24, p. 916.
- Nishikawa K. J.** Parametric Excitation of Coupled Waves. II. Parametric Plasmon Photon Interaction. — *Ibid.*, p. 1152.
- Wong A. Y., Goldman M. V., Hai F., Rowberg R.** Parametric Excitation from Thermal Fluctuations at Plasma-Drift Wave Frequencies. — *Phys. Rev. Lett.*, 1968, v. 21, p. 518.
- Harker K. J., Crawford F. W.** Nonlinear Interactions Between Whistlers. — *J. Geophys. Res.*, 1969, v. 74, p. 5029.
- Porcolab M., Chang R. P. H.** Resonant Scattering of Cyclotron Harmonic Plasma Waves. — *Phys. Fluids*, 1969, v. 12, p. 1697.
- Porcolab M., Chang R. P. H.** Nonlinear Decay Instability and Parametric Amplification of Cyclotron-Harmonic Plasma Waves. — *Phys. Rev. Lett.*, 1969, v. 22, p. 26.
- Cano R., Etievant C., Fidone I., Granata G.** Nonlinear Decay Processes of Three Electromagnetic Waves in a Warm Magnetized Plasma. — *Nucl. Fusion*, 1969, v. 9, p. 223.
- Harker K. J., Crawford F. W.** Nonlinear Interaction Between Extraordinary Waves in a Cold Plasma. — *J. Appl. Phys.*, 1969, v. 40, p. 3247.
- Weyl G., Goldman M. V.** Parametric Excitation of Drift Waves in a Resistive Plasma. — *Phys. Fluids*, 1969, v. 12, p. 1097.
- Tam C. K. W.** Amplitude Dispersion and Nonlinear Instability of Whistlers. — *Ibid.*, p. 1028.
- Якименко И. П.** О нелинейных эффектах при рассеянии электромагнитных волн в ограниченной плазме. — *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, 1969, т. 12, с. 495.
- Булгаков А. А., Ханкина С. И., Яковенко В. М.** Нелинейное взаимодействие спиральных и звуковых волн в плазме твердого тела. — *Физика твердого тела*, 1969, т. 11, с. 2749.
- Stenflo L.** Effect of Dissipation on Nonlinear Coupling Phenomena. — *Phys. Scripta*, 1970, v. 2, p. 50.
- Stenflo L.** Optical Mixing by Mobile Carriers in Semiconductors. — *Phys. Rev.*, 1970, v. B1, p. 2821.
- Dysthe K. B., Franklin R. N.** Nonlinear Interaction of Coherent Electrostatic Plasma Waves. — *Plasma Phys.*, 1970, v. 12, p. 705.
- Dysthe K. B.** Nonlinear Interaction of Positive and Negative Energy Waves. — *Intern. J. Electronics*, 1970, v. 29, p. 401.
- Porcolab M., Chang R. P. H.** Nonlinear Decay and Instability of a Nonuniform Finite Amplitude Plasma Wave. — *Phys. Fluids*, 1970, v. 13, p. 2054.
- Dougherty J. P.** Lagrangian Methods in Plasma Dynamics. I. General Theory of the Method of the Averaged Lagrangian. — *J. Plasma Phys.*, 1970, v. 4, p. 761.
- Weyl G.** Optical Mixing in Magnetoactive Plasma. — *Phys. Fluids*, 1970, v. 13, p. 1802.
- Chang R. P. H., Porcolab M.** Backward-Scattering Instability of Cyclotron Harmonic Waves in Nonlinear Decay Processes. — *Ibid.*, p. 2766.
- Sanmartin J. R.** Electrostatic Plasma Instabilities Excited by a High-Frequency Electric Field. — *Ibid.*, p. 1533.
- Sato T.** Nonlinear Theory of the Cross-Field Instability — Explosive Mode Coupling. — *Ibid.*, 1971, v. 14, p. 2426.
- Stenflo L., Wilhelmsson H., Östberg K.** Nonlinear Instabilities in Streaming Plasmas. — *Phys. Scripta*, 1971, v. 3, p. 231.
- Stenflo L.** Nonlinear Interaction Between Three Ordinary Electromagnetic Waves. — *J. Plasma Phys.*, 1971, v. 5, p. 413.
- Stenflo L.** Nonlinear Interaction of Electrostatic Waves in a Plasma. — *Ann. Phys.*, 1971, v. 27, p. 289.

- Nonlinear Theory of the Interaction of Relativistic Beams with a Plasma/** N. S. Erokhin, V. I. Kurilko, M. B. Levin et al. — In: Proc. 4th Intern. Conf. on Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion. Madison, 1971, p. 135.
- Piliya A. D.** Decay Instability in Weakly Inhomogeneous Plasma. — In: Proc. 10th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Oxford, 1971, p. 320.
- Boyd T. J. M., Turner J. G.** Nonlinear Interactions in Plasmas. — *Ibid.*, p. 322.
- Hopman H. J.** Evidence for Explosive Three-Wave Interactions. — *Ibid.*, p. 323.
- Chang J., Raether M., Tanaka S.** Experimental Observation of Wave Coupling in Beam-Plasma System. — *Phys. Rev. Lett.*, 1971, v. 27, p. 1263.
- Stenflo L.** Nonlinear Excitation due to Collisional Effects. — *J. Geophys. Res.*, 1971, v. 76, p. 5349.
- Fukai J., Harris E. G.** Plasmons and the Linear and Nonlinear Two-Stream Instabilities. — *Phys. Fluids*, 1971, v. 14, p. 1748.
- Dum C. T., Ott E.** Nonlinear Explosive Ion Beam-Plasma Interaction. — *Plasma Phys.*, 1971, v. 13, p. 177.
- Klozenberg J. P.** Nonlinear Plasma Waves. — *Phys. Fluids*, 1971, v. 14, p. 94.
- Gratz H.** Resonant Three-Wave Coupling in a Magnetoplasma. — *Ibid.*, p. 2006.
- Sato T.** Nonlinear Theory of the Cross-Field Instability — Explosive Mode Coupling. — *Ibid.*, p. 2426.
- Bajwa G. S., Srivastava K. M.** Parametric Oscillations of a Hot Magnetized Plasma. — *Ibid.*, p. 2436.
- Stenflo L.** Kinetic Theory of Three-Wave Interactions in a Magnetized Plasma. — *Plasma Phys.*, 1972, v. 7, p. 107.
- Chin Y. C.** Nonlinear Interaction of Plasma Waves in a Cold Magnetized Plasma. — *Planet. Space Sci.*, 1972, v. 20, p. 711.
- Anderson W. C., Burman R.** On Coupled Fields in Warm Stratified Plasmas. — *Czechosl. J. Phys.*, 1972, v. 22, p. 763.
- Carlile R. N.** Nonlinear Instability of Bernstein Modes Pumped by an Electromagnetic Wave. — *Phys. Fluids*, 1972, v. 15, p. 1803.
- Martin P., Fried B. D.** Mode-Coupling and Wave-Particle Interaction for Unstable Ion-Acoustic Waves. — *Phys. Fluids*, 1972, v. 15, p. 2275.
- Кормилицев В. М., Якименко И. П.** Нелинейное взаимодействие волн в цилиндрическом столбе магнитоактивной плазмы. — *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, 1972, т. 15, с. 652.
- Mix L. P., Litzenberger L. N., Bekefi G.** Nonlinear Coupling of Ion-Acoustic Waves in a Collisionless Plasma. — *Phys. Fluids*, 1972, v. 15, p. 2020.
- Ossakow S. L., Ott E., Haber I.** Nonlinear Evolution of Whistler Instabilities. — *Ibid.*, p. 2314.
- Kruer W.** Efficient Energy Transfer Between Fast and Slow Electron Plasma Oscillations. — *Ibid.*, p. 2423.
- Алиев Ю. М., Градов О. М., Кирий А. Ю.** К теории параметрического резонанса в неоднородной плазме. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1972, т. 63, с. 1254.
- Register A.** Nonlinear Stabilization of  $E \times B$  Electron Drift Instability with  $T_i \sim T_e$ . — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 30, p. 86.
- Fu K. Y.** Energy Conversion Between Longitudinal and Transverse Waves by Mode-Mode Coupling in a Relativistic Plasma. — *Plasma Phys.*, 1973, v. 15, p. 1221.
- Nishikawa K., Lee Y. C., Kaw P. K.** Nonlinear Stabilization of Oscillating Two-Stream Instability. — *Phys. Fluids*, 1973, v. 16, p. 1380.
- Kruer W. L., Valeo E. J.** Nonlinear Evolution of the Decay Instability in a Plasma with Comparable Electron and Ion Temperatures. — *Ibid.*, p. 675.
- Gentle K. W., Lohr J.** Experimental Determination of the Nonlinear Interaction in a One Dimensional Beam-Plasma System. — *Ibid.*, p. 1464.
- Arnush D., Nishikawa K., Fried B. D., Kennel C. F., Wong A. Y.** Theory of Double Resonance Parametric Excitation in Plasmas. — *Ibid.*, p. 2270.
- Weinstock J., Bezerides B.** Nonlinear Saturation of Parametric Instabilities: Spectrum of Turbulence and Enhanced Collision Frequency. — *Ibid.*, p. 2287.
- Karplyuk K. S., Oraevskii V. N., Pavlenko V. P.** Dynamics of the Nonlinear Interaction of Magnetohydrodynamic Waves. — *Plasma Phys.*, 1973, v. 15, p. 113.

- Stenflo L., Yu M.** Collision-Induced Nonlinear Excitation. — *Phys. Rev.*, 1973, v. B7, p. 1458.
- Stenflo L.** Three-Wave Interactions in Cold Magnetized Plasma. — *Planet. Space Sci.*, 1973, v. 21, p. 391.
- Chakraborti N. B., Basu B. N.** Difference Frequency Generation Using Nonlinear Interaction Between a Modulated Electron Beam and Collisionless Plasma. — *Intern. J. Electronics*, 1973, v. 34, p. 65.
- Godfrey B. B., Taggart K. A., Clifford E. R.** Computer Simulations of the Saturation of the Parametric Instability in the Weak Turbulence Regime. — *Phys. Fluids*, 1973, v. 16, p. 2279.
- Van Hoven G., Phelps D. A.** Direct Coupling of Electromagnetic Waves and Electrostatic Waves in Plasma: Theory. — *Ibid.*, p. 495.
- Phelps D. A., Van Hoven G., Rynn N.** Direct Nonlinear Coupling of Electromagnetic Waves and Electrostatic Waves in Plasma: Experiment. — *Ibid.*, p. 1078.
- Stone F. T., Serafim P. E., Levi E.** Parametric Interaction among Plasma Waves Propagating along a Static Magnetic Field. — *Ibid.*, p. 921.
- Chang C. T., Chu D. S., Lee P. S., Lee Y. C.** Collisional Effect on the Saturation Amplitude of Nonlinearly Excited Plasma Waves. — *Phys. Lett.*, 1973, v. 42A, p. 479.
- Schmidt G.** Resonant Excitation of Electrostatic Modes with Electromagnetic Waves. — *Phys. Fluids*, 1973, v. 16, p. 1676.
- Заславский Г. М.** Нелинейные волны и их взаимодействие. — *Успехи физ. наук*, 1973, т. 111, с. 395.
- Bonnedal M., Wilhelmsson H.** Nonlinear Interaction of Waves in an Active Molecular Plasma. — *J. Plasma Phys.*, 1974, v. 12, p. 81.
- Selim A. A.** Nonlinear Effects of Two Modified Ordinary Monochromatic Waves. — *Ibid.*, p. 287.
- Векштейн Г. Е.** Нелинейные эффекты в задаче об аномальном сопротивлении плазмы. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1974, т. 66, с. 588.
- Киценко А. Б., Ломивадзе Д. Г., Степанов К. Н.** Параметрическое возбуждение электронных циклотронных колебаний плазмы в переменном электрическом поле. — Там же, т. 66, с. 611.
- Michelsen P., Hirschfield J. L.** Nonlinear Excitation of Ion Acoustic Waves. — *Phys. Fluids*, 1974, v. 17, p. 2205.
- Kamilov K., Khakimov F. Kh., Stenflo L., Tsytovich V. N.** The Enhancement of the Interaction Between Transverse and Longitudinal Waves by Turbulent Plasmon Condensation. — *Phys. Scripta*, 1974, v. 10, p. 191.
- Becker G.** Mode Coupling in Dynamic Stabilization of MHD Modes. — *Plasma Phys.*, 1974, v. 16, p. 261.
- Yadlovsky E. J., Goldan P. D.** Experimental Observations of the Parametric Decay Instability. — *Phys. Fluids*, 1974, v. 17, p. 1443.
- Mangeimer W. M., Ott E.** Parametric Instabilities Induced by the Coupling of High and Low Frequency Plasma Modes. — *Ibid.*, p. 1413.
- Jamin E., Parkinson D., Rogister A., Bornatici M.** Nonlinear Theory of Absolute Whistler Instabilities in Finite  $\beta$  Plasmas. — *Ibid.*, p. 419.
- Khan T. P.** Parametric Instabilities in a Beam-Plasma System. — *Ibid.*, p. 1284.
- Harms K. D., Hasselberg G., Rogister A.** Parametric Excitation of Ion Bernstein Waves in a Plasma with Two Ion Species. — *Nucl. Fusion*, 1974, v. 14, p. 657.
- Stenzel R. L., Wong A. Y., Kim H. C.** Conversion of Electromagnetic Waves to Electrostatic Waves in Inhomogeneous Plasmas. — *Phys. Rev. Lett.*, 1974, v. 32, p. 654.
- Stern R. A., Decker J. F., Platzman P. M.** Decay Instability of the Ion Beam Mode. — *Ibid.*, p. 359.
- Quon B. H., Wong A. Y., Ripin B. H.** Backscattering Decay Processes in Electron Beam-Plasma Interactions Including Ion Dynamics. — *Ibid.*, p. 406.
- Лоладзе Ц. Д., Рухадзе А. А., Чоговадзе М. Е.** Нелинейная теория возбуждения электромагнитных волн в диэлектрической среде нерелятивистским электронным пучком. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1974, т. 67, с. 875.

- Lashmore-Davies C. N.** Parametric Up-Conversion of Langmuir Waves into Transverse Electromagnetic Waves. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 289.
- Larsson J.** Three-Wave Interaction in a Magnetized Vlasov Plasma. — J. Plasma Phys., 1975, v. 14, p. 467.
- Larsson J., Stenflo L.** On the Nonlinear Interaction Between Whistlers and Alfvén Waves. — J. Geophys. Res., 1975, v. 80, p. 2325.
- Lashmore-Davies C. N.** The Coupled-Mode Approach to Nonlinear Wave Interactions and Parametric Instabilities. — Plasma Phys., 1975, v. 17, p. 281.
- Falk L. R., Tsyтович V. N.** Analytic Theory of Strong Nonlinear Wave Coupling in Plasma. — Phys. Scripta, 1975, v. 11, p. 285.
- Bornatici M.** Parametric Backscattering and Absorptive Instabilities in Homogeneous Unmagnetized Plasmas. — J. Plasma Phys., 1975, v. 14, p. 105.
- Giles M. J.** On the Interaction of Wave Beams in Plasmas. — Ibid., p. 19.
- Franklin R. N., Hamberger S. M., Lampis G., Smith G. J.** Nonlinear Behaviour of a Finite Amplitude Plasma Wave. I. Electron Trapping Effects. II. Wave-Wave Interactions. — Proc. Roy. Soc., 1975, v. A347, p. 1.
- Mangeimer W. M., Papadopoulos K.** Interpretation of Soliton Formation and Parametric Instabilities. — Phys. Fluids, 1975, v. 18, p. 1397.
- Moisan M., Leprince P. H.** Experimental Evidence of Parametric Instabilities in an Unmagnetized Plasma Subjected to a Strong H. F. Electric Field. — Beitr. Plasma Phys., 1975, Bd 15, S. 83.
- Gratzl H.** Relativistic Instability Driven at the Subharmonic. — Plasma Phys., 1975, v. 17, p. 1043.
- Canobbio E.** Parametrically Unstable Ion Sound Waves. — Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 1045.
- Tsutsui M., Yamaishi H., Matsumoto H.** Nonlinear Wave-Wave Interaction Between Large Amplitude Electron Bernstein Waves and Ion Acoustic Waves. — Phys. Lett., 1975, v. 55A, p. 31.
- Chakraborty B.** Parametric Interactions of Four Electromagnetic Waves due to Relativistic and Others Nonlinear Effects in Plasmas. — Phys. Rev., 1975, v. A12, p. 2153.
- Баранчук Н. С., Кармелюк М. А., Левитский С. М., Филоненко Е. Г.** Нелинейное взаимодействие волн в плазменном волноводе. — Журн. техн. физ., 1975, т. 45, с. 751.
- Киценко А. Б., Клима Р., Панченко В. И., Степанов К. Н.** Параметрическое возбуждение дрейфово-циклотронных колебаний неоднородной плазмы, содержащей ионы двух сортов. — Там же, с. 543.
- Файнштейн С. М.** О взрывной неустойчивости альфвеновских волн в системе потоков — плазма. — Там же, с. 1334.
- Долженко О. В., Зосимов А. В.** К теории взаимодействия релятивистского пучка малой плотности с электростатическими колебаниями плазмы. — Там же, с. 1207.
- Новиков А. А., Рабинович М. И., Файнштейн С. М.** О трансформации продольных волн в поперечные в слое магнитоактивной плазмы. — Там же, с. 1321.
- Зейгер С. Г., Пелюхова Е. Б.** Исследование задачи самосинхронизации трех мод параметрическим методом. — Там же, с. 1240.
- Chen H. C., Fejer J. A.** Saturation Spectrum of the Parametric Decay Instability in the Presence of an External Magnetic Field. — Phys. Fluids, 1975, v. 18, p. 1809.
- Papadopoulos K.** Nonlinear Stabilization of Beam-Plasma Interactions by Parametric Effects. — Ibid., p. 1769.
- Назарян А. Х.** Взаимодействие электромагнитных волн в плазме в условиях аномального скин-эффекта. — Журн. техн. физ., 1975, т. 45, с. 954.
- Власов В. В., Панченко В. И., Рожков А. М., Степанов К. Н., Вареник В. И.** Параметрическая неустойчивость неоднородной плазмы в скрещенных полях. — Там же, с. 986.
- Пиля А. Д., Федоров В. И.** Трехволновые процессы в неоднородной плазме при наличии точек отсечки. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1975, т. 68, с. 987.
- Галеев А. А., Зеленый Л. М.** Метастабильные состояния диффузионного нейтрального слоя и взрывная фаза суббури. — Письма ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 393.



- Пастухов В. П.** Распадная неустойчивость в зеркальной ловушке. — Физика плазмы, 1975, т. 1, с. 393.
- Liu C. S., Aamodt R. E.** Explosive Instability of Drift-Cone Modes in Mirror-Machines. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 95.
- Jancel R.** Kinetic Analysis of the Resonant Three-Wave Coupling in Weakly Dissipative Plasmas. — Phys. Scripta, 1976, v. 13, p. 373.
- Wilhelmsson H.** Wave-Wave Interaction in Plasmas. Invited Paper at the 12th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Eindhoven, 1975; Physica (the Netherlands), 1976, v. 82c, p. 52.
- Leer E.** Parametric Excitation of Standing Electromagnetic Waves. — Phys. Scripta, 1976, v. 13, p. 47.
- Verheest F.** Possible Nonlinear Wave-Wave Coupling Between Three or Four Waves in Plasmas. — Plasma Phys., 1976, v. 18, p. 225.
- Tsintsadze N. L., Tsikarishvili E. G.** Parametric Instabilities in Relativistic Plasma. — Astrophys. Space Sci., 1976, v. 3, p. 191.
- Sedlacek Z.** The Method of the Averaged Hamiltonian and Two-Stream Explosive Instability. — J. Plasma Phys., 1976, v. 15, p. 1.
- Verheest F., Lewak G. J.** Nonlinear Interaction Between Two Electrostatic Harmonics in a Plasma. — J. Plasma Phys., 1976, v. 15, p. 91.
- Nakamura S., Uyama T., Kubo H., Mitani K.** Experiments of Explosive Instability in an Ion Beam-Plasma System. — Nucl. Fusion Res. Jap., 1976, v. 35, p. 21.
- Kent G., Thomas D., Kent P.** Electromagnetic Wave-Wave Interactions in a Bounded Magnetoplasma. — Intern. J. Electronics, 1976, v. 40, p. 105.
- Walsh J. E., Hagelin J. S.** Van der Pol's Equation and Nonlinear Oscillations in a Beam-Plasma System. — Phys. Fluids, 1976, v. 19, p. 339.
- Nishikawa K., Liu C. S.** General Formalism of Parametric Excitation. — Advances Plasma Phys., 1976, v. 6, p. 3.
- Liu C. S., Kaw P. K.** Parametric Instabilities in Homogeneous Unmagnetized Plasmas. — Ibid., p. 83.
- Liu C. S.** Parametric Instabilities in Inhomogeneous Unmagnetized Plasma. — Ibid., p. 121.
- Kaw P. K.** Parametric Excitation of Electrostatic Waves in Magnetized Plasma. — Ibid., p. 179.
- Kaw P. K.** Parametric Excitation of Electromagnetic Waves in Magnetized Plasmas. — Ibid., p. 207.
- Kruer W. L.** Saturation and Nonlinear Effects of Parametric Instability. — Ibid., p. 237.
- Yamamoto T., Nishio Y., Tsukishima T.** Excitation of Ion-Acoustic Wave by Power-Modulated Electromagnetic Wave in a Weakly Ionized Plasma. — Phys. Fluids, 1976, v. 19, p. 483.
- Buzzi J. M., Hirshfield J. L.** Nonlinear Harmonic Generation of Ion-Acoustic Waves with Dispersion. — Ibid., p. 554.
- Ikezi H., Chang R. P. H., Stern R. A.** Nonlinear Evolution of the Electron Beam-Plasma Instability. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 1047.
- Dagazian R. Y.** Nonlinear Coupling of Kink Modes in Tokamaks. — Nucl. Fusion, 1976, v. 16, p. 123.
- Aliev Yu. M., Gradov O. M., Sunder D.** Parametric Excitation of Plasma Instabilities by Two Monochromatic Pump Waves. — Beitr. Plasma Phys., 1976, Bd 15, S. 345.
- Tsuru T.** Nonlinear Resonance Phenomena of Electron Plasma Oscillations by Beam Modulation. — J. Phys. Soc. Jap., 1976, v. 40, p. 548.
- Nakamura S., Mitani K.** Experiments on Explosive Instability in an Ion Beam-Plasma System. — Ibid., p. 1219.
- Fichtel M.** Effect of the Ponderomotive Force on the Wave Conversion Efficiency. — Plasma Phys., 1976, v. 18, p. 401.
- Bertrand P., Gros M., Bauman G.** Nonlinear Plasma Oscillations in Terms of Multiple Water-Bag Eigenmodes. — Phys. Fluids, 1976, v. 19, p. 1183.
- Weibel E. S.** Emission of Longitudinal Waves from the Interaction of Two Beams of Transverse Radiation. — Ibid., p. 1237.
- Turner J. G., Boyd T. J. M.** Parametric Decay of Whistler Waves. — Phys. Scripta, 1976, v. 14, p. 175.

- Buzzi J. M., Hirshfield J. L.** Nonlinear Harmonic Generation of Ion-Acoustic Waves with Dispersion. — *Phys. Fluids*, 1976, v. 19, p. 554.
- Gros M., Bertrand P., Bauman G.** Nonlinear Resonant Mode Coupling in a Three-Dimensional Guiding Centre Water-Bag Plasma. — *Plasma Phys.*, 1977, v. 19, p. 811.
- Kim H.** Approximate Theory of Large-Amplitude Wave Propagation. — *J. Plasma Phys.*, 1977, v. 17, p. 519.
- Cavalli A., Greenly J. B., Walsh J. E.** Accessibility of Equilibria in an Electron Beam-Plasma System. — *Phys. Fluids*, 1977, v. 20, p. 1325.
- Yamamoto T.** Nonlinear Saturation of a Single Wave by Particle Trapping. — *Plasma Phys.*, 1977, v. 19, p. 27.
- Jonson J. A.** Nonlinear Saturation of the Buneman Instability. — *Phys. Lett.*, 1977, v. 60A, p. 27.
- Sugaya R., Sugaya M., Nomoto H.** Experimental Observation of Explosive Instability due to a Helical Electron Beam. — *Phys. Rev. Lett.*, 1977, v. 39, p. 27.
- Aamodt R. E., Lee Y. C., Liu C. S., Rosenbluth M. N.** Nonlinear Dynamics of Drift-Cyclotron Instability. — *Ibid.*, p. 1660.
- Sugaya R., Sugaya M., Nomoto H.** Observation of Nonlinear Landau Damping of Electrostatic Waves in an Electron Beam-Plasma System. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1977, v. 42, p. 1373.
- Sedlacek Z.** Computation of Two-Stream Explosive Instability Including Harmonic Generation and Distribution Function Evolution. — *Phys. Lett.*, 1978, v. 64A, p. 393.
- Pavlenko V. P.** Nonlinear Wave Amplification in a Beam-Plasma System. — *Plasma Phys.*, 1978, v. 20, p. 771.
- Kritz A. H., Lashmore-Davies C. N.** The Effect of the Energy Equation on the Onset of Parametric Instabilities. — *Ibid.*, p. 605.
- Boyd T. J. M., Turner J. G.** Three- and Four-Wave Interactions in Plasmas. — *J. Math. Phys.*, 1978, v. 19, p. 1403.
- Dysthe K. B., Mjølhus K., Trulsen J.** Nonlinear Mixing as a Plasma Density Probe. — *J. Geophys. Res.*, 1978, v. 83, p. 1985.

## ГЛАВА 7

### ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

При теоретическом описании когерентного взаимодействия волн желательно иметь такую форму представления основных соотношений, которая сохранялась бы при описании нелинейных процессов самой различной физической природы. Подобную форму можно найти с помощью подходящей нормировки амплитуд взаимодействующих волн. Ниже введен формализм, широко используемый в дальнейшем и в общем виде пригодный для описания систем взаимодействующих волн с комплексными коэффициентами связи.

В пренебрежении диссипацией исходная система связанных уравнений сильно упрощается и позволяет легко получить условие сохранения энергии волн, соотношения Мэнли—Роу, а также обобщенные интегралы движения, в которых учитывается возможность рассогласования частот. Гамильтониан системы определяется суммой энергии отдельных волн и энергии взаимодействия.

Из приведенных в этой главе энергетических соотношений следует вывод, что можно одновременно увеличивать амплитуды всех трех взаимодействующих волн (взрывная неустойчивость) без нарушения закона сохранения энергии. Такая возможность реализу-

ются в том случае, когда энергия волны с наибольшей частотой противоположна по знаку энергиям двух других волн.

Перепишем систему уравнений (3.17) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \partial a_0 / \partial t - i\omega_0 a_0 &= c_{12}^* a_1 a_2; \\ \partial a_1 / \partial t - i\omega_1 a_1 &= c_{02} a_0 a_2^*; \\ \partial a_2 / \partial t - i\omega_2 a_2 &= c_{01} a_0 a_1^*. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Далее, следуя работе [1], положим  $a_j = A_j(t) \exp(i \operatorname{Re} \omega_j t)$ . Тогда вместо (7.1) получим:

$$\left. \begin{aligned} \partial A_0 / \partial t + \operatorname{Im}(\omega_0) A_0 &= c_{12}^* A_1 A_2 \exp(-i\Delta\omega t); \\ \partial A_1 / \partial t + \operatorname{Im}(\omega_1) A_1 &= c_{02} A_0 A_2^* \exp(i\Delta\omega t); \\ \partial A_2 / \partial t + \operatorname{Im}(\omega_2) A_2 &= c_{01} A_0 A_1^* \exp(i\Delta\omega t), \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

где  $\Delta\omega = \operatorname{Re} \omega_0 - \operatorname{Re} \omega_1 - \operatorname{Re} \omega_2$  мало по предположению. С помощью подстановок  $A_j = u_j \exp(i\phi_j)$ ;  $c_{ij} = v_{ij} \exp(i\theta_{ij})$ ;  $v_j = \operatorname{Im} \omega_j$  систему (7.2) можно преобразовать в эквивалентную ей систему для вещественных величин  $u_j = |A_j|$ ;  $v_{ij} = |c_{ij}|$ ,  $\phi_j$  и  $\theta_{ij}$ :

$$\left. \begin{aligned} \partial u_0 / \partial t + v_0 u_0 &= v_{12} u_1 u_2 \cos(\Phi + \theta_{12}); \\ \partial u_1 / \partial t + v_1 u_1 &= v_{02} u_0 u_2 \cos(\Phi + \theta_{02}); \\ \partial u_2 / \partial t + v_2 u_2 &= v_{01} u_0 u_1 \cos(\Phi + \theta_{01}); \\ \partial \Phi / \partial t &= \Delta\omega - v_{12} (u_1 u_2 / u_0) \sin(\Phi + \theta_{12}) - \\ &- v_{02} (u_0 u_2 / u_1) \sin(\Phi + \theta_{02}) - v_{01} (u_0 u_1 / u_2) \sin(\Phi + \theta_{01}). \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Здесь  $\Phi = \phi_0 - \phi_1 - \phi_2 + \Delta\omega t$ .

Отметим также, что с помощью перенормировки вида

$$\left. \begin{aligned} u_0 &\rightarrow (v_{01} v_{02})^{1/2} u_0; \\ u_1 &\rightarrow (v_{01} v_{12})^{1/2} u_1; \\ u_2 &\rightarrow (v_{02} v_{12})^{1/2} u_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

все коэффициенты связи в системе (7.3) приводятся к единице. Такая операция целесообразна при нахождении решений и критериев устойчивости для системы (7.3), но при выводе энергетических соотношений удобнее использовать непосредственно систему (7.3).

Для недиссипативной среды  $v_j = 0$  и коэффициенты связи — вещественные величины. Это означает, что в качестве фазового угла  $\theta_{ij}$  следует взять 0 или  $\pi$  в зависимости от знака соответствующего коэффициента связи. В результате система (7.3) упрощается:

$$\left. \begin{aligned} \partial u_0 / \partial t &= s_{12} v_{12} u_1 u_2 \cos \Phi; \\ \partial u_1 / \partial t &= s_{02} v_{02} u_0 u_2 \cos \Phi; \\ \partial u_2 / \partial t &= s_{01} v_{01} u_0 u_1 \cos \Phi; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \Delta \omega - \left( s_{12} v_{12} \frac{u_1 u_2}{u_0} + s_{02} v_{02} \frac{u_0 u_2}{u_1} + s_{01} v_{01} \frac{u_0 u_1}{u_2} \right) \sin \Phi, \end{aligned} \right\} (7.5)$$

где  $s_{jk}$  — знаковый множитель коэффициента связи  $c_{jk}$ . Абсолютные величины  $c_{jk}$  и  $v_{jk}$  зависят от нормировки  $u_j$ . В частности, при выводе энергетических соотношений удобно считать  $u_j = |\bar{E}_j|$ . Тогда

$$\langle W_j \rangle = (1/4) (\partial D_j / \partial \omega_j) u_j^2$$

и с помощью (7.5) нетрудно получить следующее выражение для производной полной энергии волны:

$$\frac{dW}{dt} = 2 \left( s_{12} \frac{\partial D_0}{\partial \omega_0} v_{12} + s_{02} \frac{\partial D_1}{\partial \omega_1} v_{02} + s_{01} \frac{\partial D_2}{\partial \omega_2} v_{01} \right) u_0 u_1 u_2 \cos \Phi.$$

Отсюда следует общее условие сохранения энергии

$$s_{12} \frac{\partial D_0}{\partial \omega_0} v_{12} + s_{02} \frac{\partial D_1}{\partial \omega_1} v_{02} + s_{01} \frac{\partial D_2}{\partial \omega_2} v_{01} = 0. \quad (7.6)$$

Для продольных волн это условие сводится к виду

$$(-\omega_0 + \omega_1 + \omega_2) c = 0, \quad (7.7)$$

так как  $\partial D_j / \partial \omega_j = \omega_j \partial \epsilon_j / \partial \omega_j$  и, кроме того, согласно (6.8)

$$s_{kl} v_{kl} = \mp c / (\partial \epsilon / \partial \omega).$$

Для поперечных волн

$$s_{kl} v_{kl} = \mp \omega_j c / [(1/\omega_j) \partial (\omega_j^2 \epsilon) / \partial \omega_j],$$

т. е. связанные нелинейные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \bar{E}_j}{\partial t} = \mp \frac{\omega_j c}{\partial D_j / \partial \omega_j} \bar{E}_k \bar{E}_l \exp(\mp i \Delta \omega t). \quad (7.8)$$

Нетрудно, однако, убедиться, что и в этом случае условие сохранения энергии сводится к (7.7).

Отметим, что до сих пор не делалось никаких предположений относительно знаков  $\partial D_j / \partial \omega_j$  и, следовательно, условие (7.7) справедливо при произвольном соотношении знаков энергий взаимодействующих волн. Кроме того, при использовании нормировки вида

$$u_j = \left\{ (1/\omega_j) (\partial D_j / \partial \omega_j) \bar{E}_j \bar{E}_j^* \right\}^{1/2} \quad (7.9)$$

все три коэффициента связи  $v_{jk}$  в (7.5) становятся одинаковыми.

С законом сохранения энергии тесно связаны соотношения Мэнли — Роу [2]

$$\left. \begin{aligned} (s_{12}/v_{12}) u_0^2 - (s_{02}/v_{02}) u_1^2 &= M_1; \\ (s_{02}/v_{02}) u_1^2 - (s_{01}/v_{01}) u_2^2 &= M_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Здесь  $M_1$  и  $M_2$  — постоянные, определяемые начальными условиями. Соотношения (7.10) легко получить из системы (7.5). Она имеет еще три интеграла движения

$$u_0 u_1 u_2 \sin \Phi - (\Delta\omega/2) (s_{kl}/v_{kl}) u_j^2 = \Gamma, \quad (7.11)$$

в чем нетрудно убедиться, домножив каждое из уравнений для  $d\phi_j/dt$  на  $-u_j (du_j/dt)$ , а каждое из уравнений для  $du_j/dt$  на  $u_j (d\phi_j/dt)$  и просуммировав затем все полученные уравнения.

При наличии рассогласования частот энергия волн согласно (7.6) может и не сохраняться. Тем не менее и в этом случае можно ввести гамильтониан

$$H = \sum_j s_j \omega_j u_j^2 + 2v (u_0^2 u_1^2 u_2^2)^{1/2} \sin(\theta_0 - \theta_1 - \theta_2), \quad (7.12)$$

при записи которого использована нормировка (7.9). Множитель  $s_j$  в (7.12) определяет знак энергии волны типа  $j$  и  $\theta_j = \phi_j + \omega_j t$ . Выбрав в качестве канонических переменных  $u_j^2$  и  $s_j \theta_j$ , можно убедиться в том, что из гамильтониана (7.12) действительно следует система (7.5). Первое слагаемое в (7.12) есть не что иное, как сумма энергий взаимодействующих волн, тогда как второе слагаемое обусловлено нелинейным взаимодействием волн и может быть поэтому названо энергией взаимодействия. Учитывая вид интегралов движения (7.11), видим, что в условиях точного резонанса каждая из частей гамильтониана сохраняется по отдельности. Если же имеется рассогласование частот, то сохраняется лишь вся сумма в целом.

Из соотношения (7.6) следуют важные свойства коэффициентов связи. Если знаки энергий и частот всех взаимодействующих волн одинаковы, то один из коэффициентов связи должен иметь знак, противоположный двум другим. Это означает, что соответствующая амплитуда изменяется в направлении, противоположном направлению изменения остальных амплитуд, т. е. происходит обмен энергиями между волнами. Если же знак энергии волны с наибольшей частотой противоположен знаку энергий двух других волн, то все коэффициенты связи могут иметь одинаковые знаки, а это означает возможность одновременного увеличения амплитуд всех трех взаимодействующих волн без нарушения закона сохранения энергии. При наблюдении такого процесса в произвольной инерциальной системе отсчета частоты претерпевают доплеровский сдвиг и могут изменять знак. Однако тип взаимодействия должен быть инвариантен относительно перехода от одной инерциальной системы координат к другой. Отсюда вытекает возможность изменения знака энергии волны при преобразовании системы координат [3] (см. также гл. 10).

Отметим в заключение, что так же, как условие согласования частот приводит к закону сохранения энергии, условие согласования волновых векторов отвечает закону сохранения импульса.

## Задачи

7.1. Выразить скорость уменьшения полной энергии волн через коэффициенты затухания  $\nu_j$ , дисперсионные функции  $D_j$  для электрического поля и амплитуды нормальных колебаний в случае системы трех затухающих волн с  $\theta_{ij} \approx 0, \pm\pi$  (влиянием затухания на  $D_j$  и  $c_{jk}$  пренебречь).

7.2. Записать соотношения Мэнли—Роу с помощью энергий волн  $W_j$  и частот  $\omega_j$  в предположении, что имеют место резонансные условия, использованные в гл. 7.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wilhelmsson H., Stenflo L., Engelmann F. — J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 1738.
2. Coppi B., Rosenbluth M. N., Sudan R. N. — Ann. Phys., 1969, v. 55, p. 207.
3. Davidson R. C. Methods in Nonlinear Plasma Theory. N. Y. — Lond., Academic Press, 1972.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Manley J. M., Rowe H. E. — Proc. I. R. E., 1956, v. 44, p. 904.  
Dysthe K. B. — Intern. J. Electronics, 1970, v. 29, p. 401.  
Kaufman A. N., Stenflo L. — Plasma Phys., 1975, v. 17, p. 403.

## ГЛАВА 8

### ВОЛНЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Типичная система, в которой могут существовать волны с отрицательной энергией, — плазма с потоками заряженных частиц. Для упрощения ограничимся рассмотрением энергии волны в дрейфующей плазме и покажем, как эту энергию можно расщепить на энергию электрического поля в вакууме и энергию движения частиц (электронов) в волне. Появление отрицательной энергии связано с наличием слагаемого, пропорционального произведению осцилляций плотности и скорости электронов, которое становится отрицательным, если плотности и скорости колеблются в противоположных фазах. При определенной скорости дрейфа именно это слагаемое оказывается доминирующим. Рассмотрим также взаимный переход свободной энергии среды (в данном случае энергии дрейфа) и энергии поля волны, включая эффекты высшего порядка.

### Система плазма — пучок

Выражение (4.10) для энергии поля волны указывает на то, что в термодинамически-равновесной среде эта энергия всегда положительна. Если же невозмущенное состояние среды неравновесно, то энергия может быть отрицательной. Интересным примером такой среды является система плазма—пучок. Если волны возбуждаются только в пучке, то вместо плазменно-пучковой системы

можно рассмотреть плазму с дрейфом заряженных частиц. Продольная диэлектрическая проницаемость такой системы имеет вид

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \omega_{pb}^2 / (\omega - kV_b)^2, \quad (8.1)$$

где  $\omega_{pb}$  и  $V_b$  — плазменная частота и скорость частиц пучка (температурные эффекты не учитываются).

Дифференцируя (8.1) по частоте и используя затем дисперсионное соотношение  $\varepsilon = 0$ , получаем

$$\partial\varepsilon/\partial\omega = 2\omega_{pb}^2/(\omega - kV_b)^3 = 2/(\omega - kV_b) = \pm 2/\omega_{pb}.$$

Знак «минус» в этом выражении соответствует волне с отрицательной энергией. Физический смысл такой волны заключается в том, что при ее распространении высвобождается кинетическая энергия пучка. Рассмотрим этот процесс подробнее, основываясь на уравнениях Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t.$$

В отличие от подхода, использованного в гл. 4, будем считать электроны свободными частицами, движущимися в вакууме и дающими вклад в ток  $\mathbf{J}$ . Тогда

$$\nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H}(\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H}\partial\mathbf{B}/\partial t - \mathbf{E}\partial\mathbf{D}/\partial t - \mathbf{E}\mathbf{J},$$

или

$$-\nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E}\mathbf{J} + (\partial/\partial t)(1/2)(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2). \quad (8.2)$$

Как видно, дивергенция вектора Умова — Пойнтинга расщепляется на две части; одна характеризует производную энергии поля в вакууме, а другая — скорость изменения кинетической энергии электронов. Вместе с тем энергия продольных волн определяется полученным ранее общим выражением

$$\langle W \rangle = (\varepsilon_0/4) (\partial/\partial\omega) (\omega\varepsilon) \bar{E} \bar{E}^*. \quad (8.3)$$

Предположим, что волна, как и пучок, распространяется в положительном направлении осн  $x$ . В этом случае линеаризованные уравнения движения и непрерывности имеют вид:

$$\partial\bar{v}/\partial t + V_b \partial\bar{v}/\partial x = -(e/m) E; \quad (8.4)$$

$$-e\partial\bar{n}/\partial t + \partial\bar{J}/\partial x = 0, \quad (8.5)$$

где  $\bar{J} = -e(V_b\bar{n} + \bar{v}N_0)$  — линеаризованный ток;  $N_0$  — невозмущенная плотность электронов и ионов в плазме;  $\bar{v}$  и  $\bar{n}$  — возмущения скорости и плотности электронов (влиянием волны на ионы пренебрегаем). Предполагая пространственно-временную зависимость вида  $\exp[i(\omega t - kx)]$ , находим связь между динамическими переменными

$$\bar{E} = -(m/e) i(\omega - kV_b) \bar{v} \quad (8.6)$$

и

$$\bar{v} = [(\omega - kV_b)/kN_0] \bar{n}. \quad (8.7)$$

Подставляя (8.6) и (8.1) в (8.3), учитывая при этом дисперсионное соотношение и используя выражение для плазменной частоты  $\omega_p^2 = N_0 e^2 / \epsilon_0 m$ , получаем

$$\langle W \rangle = (1/2) [\omega N_0 m / (\omega - kV_b)] \bar{v} \bar{v}^*, \quad (8.8)$$

что можно переписать в виде

$$\langle W \rangle = (1/2) m N_0 \bar{v} \bar{v}^* + (1/2) m [N_0 k V_b / (\omega - kV_b)] \bar{v} \bar{v}^*,$$

или после подстановки (8.7) и симметризации

$$\langle W \rangle = (1/2) m N_0 \bar{v} \bar{v}^* + (1/4) m V_b (\bar{v} \bar{n}^* + \bar{n} \bar{v}^*). \quad (8.9)$$

Это и есть окончательное выражение для энергии продольных волн, записанное в комплексных переменных.

Нетрудно убедиться, что первое слагаемое в (8.9) соответствует удвоенному значению энергии электрического поля в вакууме. Действительно,

$$\langle W_e \rangle = (1/4) \epsilon_0 \bar{E} \bar{E}^* = (1/4) \epsilon_0 (m/e)^2 (\omega - kV_b)^2 \bar{v} \bar{v}^*, \quad (8.10)$$

что с помощью дисперсионного соотношения  $\omega_p^2 = (\omega - kV_b)^2$  приводится к требуемому виду

$$\langle W_e \rangle = (1/4) m N_0 \bar{v} \bar{v}^*. \quad (8.11)$$

Таким образом, можно записать

$$\langle W \rangle = \langle W_e \rangle + \langle W_k \rangle, \quad (8.12)$$

где

$$\langle W_k \rangle = (1/4) m N_0 \bar{v} \bar{v}^* + (1/4) m V_b (\bar{v} \bar{n}^* + \bar{v}^* \bar{n}). \quad (8.13)$$

Согласно (8.12) этой величине следует придать смысл кинетической энергии частиц, обусловленной наличием волны.

Переходя к вещественным величинам  $v = (1/2) (\bar{v} + \bar{v}^*)$ ,  $n = (1/2) (\bar{n} + \bar{n}^*)$ , упростим (8.13):

$$\langle W_k \rangle = (1/2) m N_0 v^2 + m V_b v n. \quad (8.14)$$

Это есть не что иное, как та часть полной энергии частиц

$$W_T = (1/2) m (N_0 + n) (V_b + v)^2, \quad (8.15)$$

которая имеется только при наличии волны и при усреднении по периоду колебаний не обращается в нуль. Второе слагаемое в (8.14) ответственно за возможность появления отрицательной энергии: при сдвиге фаз между  $n$  и  $v$  на  $\pi$  оно отрицательно, причем при достаточно больших  $V_b$  становится доминирующим.

Отметим в заключение, что из выражения EJ в (8.2) можно получить как производную по времени  $W_k$ , так и дивергенцию плотности потока кинетической энергии [1].

### Эффекты высшего порядка

До сих пор мы ограничивались линейным приближением, предполагая, что величины изменяются по гармоническому закону, а скорость пучка  $V_b$  постоянна. В первом порядке по нелинейности



необходимо исходить из уравнения

$$\partial v / \partial t + V_0 \partial v / \partial x + (e/m) E = -v \partial v / \partial x, \quad (8.16)$$

являющегося нелинейным аналогом уравнения (8.4). Подставляя в правую часть (8.16) линейное решение, видим, что  $\partial v / \partial t$  в первом порядке по нелинейности приобретает компоненту, колеблющуюся с частотой  $2\omega$ . Если теперь это решение снова подставить в правую часть (8.16), то появятся третья и четвертая гармоники (второй порядок по нелинейности) и т. д. При этом члены первого порядка пропорциональны  $kvv$ , члены второго порядка —  $(-k^2 vvv)$  и т. д. При взаимодействии нескольких волн, имеющих различные частоты, получим слагаемые вида  $-k_i k_j v_k v_k v_{-k}$ , где  $k_j$  — волновое число волны  $j$ . Сумма таких слагаемых дает стационарный вклад в  $\partial v / \partial t$ :

$$- \sum_{kk'} kk' v_{k-k'} v_k v_{-k},$$

знак которого противоположен знаку скорости дрейфа. В результате скорость дрейфа, а вместе с ней и запас кинетической энергии пучка могут уменьшаться. Это — один из возможных механизмов стабилизации взрывной неустойчивости, так как при уменьшении свободной энергии диэлектрические свойства среды изменяются таким образом, что коэффициенты связи перестают удовлетворять условиям, необходимым для развития неустойчивости. Уменьшение скорости пучка означает также, что плазменная система релаксирует к состоянию термодинамического равновесия.

### Неконсервативные системы

Волны с отрицательной энергией, рассмотренные в настоящей главе, соответствуют вещественным корням дисперсионного уравнения  $\epsilon = 0$ . При учете линейного затухания или нарастания выражение (8.3) для энергии в общем случае утрачивает силу и может рассматриваться как приближенно верное лишь при достаточно малой мнимой части  $\omega$ . В работе [2] показано, что для плазменно-пучковой волны с максимальным инкрементом разложение  $\epsilon$  в окрестности вещественной частоты вообще не является сходящимся. Тем не менее с помощью разложения в окрестности комплексного корня уравнения  $\epsilon = 0$  [3] удалось установить, что такая волна имеет положительную энергию. Это вызвало дискуссию по проблеме устойчивости системы трех взаимодействующих волн [4—6]. В работе [2] обращается внимание на то, что знак энергии волны может сильно зависеть от характера возмущения (в частности, от того, возмущается первоначально амплитуда или фаза волны).

В работе [7] предложен более прямой метод определения энергии волны. Суммируя энергию поля и частиц в случае плазменно-пучковой волны с комплексной частотой, можно показать, что в пренебрежении осциллирующими слагаемыми

$$W = \frac{\epsilon_0}{4} \left\{ 1 + \frac{\omega_p^2}{|\omega|^2} + \frac{\omega_{pb}^2}{|\omega - kV_b|^2} \left[ 1 + 2\text{Re} \frac{kV_b}{\omega - kV_b} \right] \right\} |\bar{E}|^2. \quad (8.17)$$

Отсюда для волны с максимальным инкрементом получаем

$$W = (3/4) \epsilon_0 \delta |\bar{E}|^2, \quad (8.18)$$

где  $\delta = (\omega_{pb}^2/2\omega_p^2)^{1/2} \ll 1$  — малый параметр. Таким образом, эта волна имеет небольшую положительную энергию. Однако если рассматривать ее как суперпозицию нескольких волн (т. е. учитывать ширину полосы), то среди этих волн будут и волны с отрицательной энергией.

### Задачи

8.1. Для холодной плазменно-пучковой системы диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2 - \omega_{pb}^2/(\omega - kV_b)^2.$$

При каких условиях можно пренебречь вкладом стационарной плазмы  $\omega_p^2/\omega^2$  для волн с отрицательной энергией и  $\omega > 0$ ?

8.2. Определить диэлектрическую проницаемость для случая холодной плазмы с дрейфом частиц при учете столкновений посредством введения силы трения —  $\nu m v$  ( $\nu$  — эффективная частота столкновений).

8.3. Решить дисперсионное уравнение  $\epsilon = 0$ , где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость из предыдущей задачи, и найти разность фаз величин  $v$  и  $n$ .

8.4. Предположим, что возмущения плотности плазмы и скорости частиц имеют вид  $n = n_0 \cos \omega t$ ;  $v = v_0 \cos(\omega t + \Phi)$ . При каких значениях  $\cos \Phi$  плотность средней кинетической энергии будет отрицательной?

8.5. Может ли электромагнитная волна в плазменно-пучковой системе иметь отрицательную энергию?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дикасов В. М., Рудаков Л. И., Рютов Д. Д. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1965, т. 48, с. 913.
2. Ishida A. — J. Phys. Soc. Jap., 1976, v. 41, p. 292.
3. Schmidt G. — Phys. Fluids, 1976, v. 19, p. 1218.
4. Jackson E. A., Raether M. — Ibid., p. 925.
5. Schmidt G. — Ibid.
6. Davydova T. A., Pavlenko V. P., Shamrai K. P., Taranov V. B. — Plasma Phys., 1978, v. 20, p. 373.
7. Kirk J., Weiland J. — Phys. Lett., 1977, v. 64A, p. 215.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Sturrok P. A. — J. Appl. Phys., 1960, v. 31, p. 2052.  
 Кадомцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1964, т. 47, с. 2266.  
 Bers A., Gruber S. — Appl. Phys. Lett., 1965, v. 6, p. 27.  
 Hall L. S., Heckrotte W. — Phys. Fluids, 1966, v. 9, p. 1496.  
 Цыгович В. Н. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1966, т. 51, с. 1385.  
 Namasaki S., Krall N. A. — Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 1441.  
 Dum C. T., Ott E. — Plasma Phys., 1971, v. 13, p. 177.  
 Княшко С. В., Рабинович М. И., Реутов В. П. — Журн. техн. физ., 1973, т. 42, с. 2458.

- Кролл Н. А., Трайвеллис А. В. Основы физики плазмы. Пер. с англ. М., Мир, 1975.
- Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. М., Атомиздат, 1975.
- Вдови Ю. А., Ермаченко В. М., Мацкевич В. К. — Квантовая электроника, 1975, т. 2, с. 902.
- Сыцько Ю. И., Яковленко С. И. — Там же, с. 657.
- Davydova T. A., Shamrai K. P. — Plasma Phys., 1978, v. 20, p. 293.

## ГЛАВА 9

### РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СВЯЗАННЫХ ВОЛН

Продолжим начатое в гл. 7 описание нелинейного взаимодействия волн с произвольной комбинацией энергий. Как хорошо известно из нелинейной оптики [1], где все волны несут положительную энергию, аналитическое решение системы связанных уравнений в отсутствие диссипации выражается через эллиптические функции Якоби. Можно ожидать, что формально такой же вид будет иметь и решение системы, соответствующей неустойчивой ситуации, так как эта система отличается от оптических уравнений лишь иным набором знаков нелинейных слагаемых.

При получении и исследовании аналитических решений связанных уравнений динамику системы удобно описывать уравнением, которое формально соответствует движению частицы в нелинейном потенциальном поле. При таком описании координата частицы пропорциональна отклонению среднего значения амплитуды волны от начального ее значения. Выражение для потенциала можно записать с учетом рассогласования частот и произвольных начальных значений амплитуд взаимодействующих волн. В общем случае это выражение имеет вид полинома третьей степени относительно усредненных амплитуд. Начальные значения амплитуд определяют нули этого полинома, а набор знаков энергий взаимодействующих волн имеет решающее значение для вида потенциала. Картина взаимодействия при такой интерпретации становится очень наглядной. В частности, легко выявляется влияние начальных фаз и рассогласования частот, а также локализация фазы, сопровождающая увеличение амплитуды волны при взрывной неустойчивости.

При рассмотрении характерных примеров нелинейного взаимодействия будет использован также метод фазовой плоскости, весьма полезный для углубления представлений о динамике взаимодействия.

#### Метод нелинейного потенциала

При исследовании аналитических решений системы (7.3) воспользуемся нормировкой (7.4). Предположим, что среда является недиссипативной, так что  $\nu_j = 0$  и  $\theta_{ij} = 0$ ,  $\pi$ . Тогда исходная система

уравнений запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= s_{12} u_1 u_2 \cos \Phi; \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} &= s_{02} u_0 u_2 \cos \Phi; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= s_{01} u_0 u_1 \cos \Phi; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \Delta \omega - \left( s_{12} \frac{u_1 u_2}{u_0} + s_{02} \frac{u_0 u_2}{u_1} + s_{01} \frac{u_0 u_1}{u_2} \right) \sin \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Интегралы движения этой системы:

$$\left. \begin{aligned} s_{12} u_0^2 - s_{02} u_1^2 &= M_1; \\ s_{02} u_1^2 - s_{01} u_2^2 &= M_2 \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

и

$$u_0 u_1 u_2 \sin \Phi - (\Delta \omega / 2) u_j^2 = \Gamma_j. \quad (9.3)$$

Из соотношений (9.2) следует, что

$$s_{12} [u_0^2(t) - u_0^2(0)] = s_{02} [u_1^2(t) - u_1^2(0)] = s_{01} [u_2^2(t) - u_2^2(0)]. \quad (9.4)$$

Рассмотрим следующие два случая:  $s_{01} = s_{02} = -s_{12}$  и  $s_{12} = s_{02} = s_{01}$ . Первый из них соответствует взаимодействию волн с энергиями одного знака, детальный анализ которого дан в работе [1]. Во втором случае возможны решения взрывного типа, главные особенности которых установлены в работе [2]. Полностью эта задача решена в эллиптических функциях в [3], а при учете затухания и при  $\theta_{ij} = 0$  — в работе [4].

Без ограничения общности можно принять  $s_{01} = s_{02} = 1$  и положить  $s = s_{12}$ . Следуя процедуре, аналогичной использованной в работе [5], определим величину

$$x(t) = s [u_0^2(t) - u_0^2(0)] = u_j^2(t) - u_j^2(0), \quad j = 1, 2. \quad (9.5)$$

Далее с помощью уравнения для  $u_1$  получим

$$\frac{\partial u_1^2}{\partial t} = 2u_0 u_1 u_2 \cos \Phi = \pm 2 \sqrt{u_0^2 u_1^2 u_2^2 (1 - \sin^2 \Phi)}, \quad (9.6)$$

где знак правой части определяется знаком  $\cos \Phi$ . Наконец, введем в (9.6) величину  $x(t)$  и используем при этом интеграл движения (9.3), полагая  $\Gamma_1 = \Gamma$ . В результате придем к следующему дифференциальному уравнению относительно переменной  $x(t)$ :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \pm 2 \sqrt{[sx + u_0^2(0)] [x + u_1^2(0)] [x + u_2^2(0)] - \{\Gamma + (\Delta \omega / 2) [x + u_1^2(0)]\}^2}, \quad (9.7)$$

или после возведения в квадрат

$$(1/2) (\partial x / \partial t)^2 + \pi(x) = 0, \quad (9.8)$$

где

$$\begin{aligned} \pi(x) &= 2 \{ -sx^3 - [u_0^2(0) + su_1^2(0) + su_2^2(0) - (1/4) (\Delta \omega)^2] x^2 - \\ &- [su_1^2(0) u_2^2(0) + u_0^2(0) u_1^2(0) + u_0^2(0) u_2^2(0) - [(\Delta \omega)^2 / 2] u_1^2(0) - \Gamma \Delta \omega] x + \\ &+ \Gamma^2 + (\Delta \omega / 2)^2 u_1^4(0) + \Gamma \Delta \omega u_1^2(0) - u_0^2(0) u_1^2(0) u_2^2(0) \}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Уравнение (9.8) описывает движение в потенциальном поле  $\pi(x)$ , причем величина  $(1/2) (\partial x/\partial t)^2$  имеет смысл кинетической энергии этого движения. Область возможных значений  $x$  определяется условием  $\pi(x) \leq 0$  и  $\partial x/\partial t$  обращается в нуль при  $\pi(x) = 0$ .

В частном случае  $\Delta\omega = 0$  и  $\Gamma = 0$  уравнению  $\pi(x) = 0$  удовлетворяют три вещественных корня:  $x_1 = -u_0^2(0)$ ,  $x_2 = -u_1^2(0)$  и  $x_3 = -u_2^2(0)$ . Поэтому потенциальные кривые имеют вид, показанный на рис. 9.1 и 9.2 (начальные значения амплитуд упорядочены на

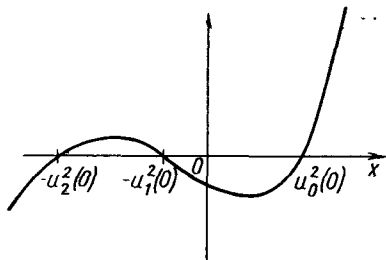


Рис. 9.1. Вид потенциальной функции  $\pi(x)$  при  $\Delta\omega = \Gamma = 0$  и  $s = -1$ ;  $x$  может осциллировать между  $u_0^2(0)$  и  $-u_1^2(0)$

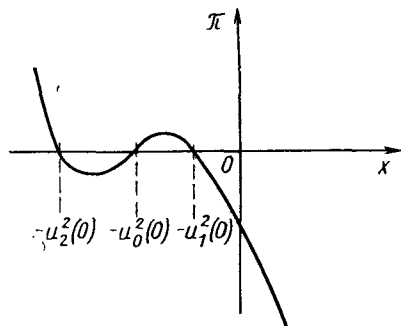


Рис. 9.2. Вид потенциальной функции  $\pi(x)$  при  $\Delta\omega = \Gamma = 0$  и  $s = 1$ ;  $x$  может принимать неограниченно большие значения в области  $x > -u_1^2(0)$  (взрывная неустойчивость)

рисунках произвольным образом). Следует обратить особое внимание на качественное различие в ходе этих кривых. При  $s = -1$  величины  $u_j^2$  одновременно положительны в области  $-u_j^2(0) < x < u_0^2(0)$ ,  $j = 1, 2$ , тогда как при  $s = 1$  подобная область определяется условием  $x > u_j^2(0)$ ,  $j = 0, 1, 2$ .

При  $\Gamma \neq 0$  потенциальные кривые модифицируются (в частности, изменяются точки их пересечения с осью абсцисс). Однако при  $s = -1$  все три корня остаются вещественными, а это по-прежнему означает наличие осциллирующих решений, которые описывают колебания  $x$  в области, ограниченной двумя большими корнями. При  $s = 1$  два корня могут быть комплексными, но неограниченный рост  $x$  при отрицательном  $\pi(x)$ , как и раньше, указывает на возможность развития взрывной неустойчивости. Если начальное значение  $\partial x/\partial t$  отрицательно, то  $x$  сначала уменьшается, достигая минимума, равного наибольшему из корней уравнения  $\pi(x) = 0$ , а затем начинает неограниченно возрастать.

При увеличении  $\Delta\omega$  и  $s = -1$  корни  $x_1$  и  $x_2$  будут сближаться, т. е. роль эффекта нелинейного взаимодействия постепенно утратится. Если же  $s = 1$ , то оба корня могут стать положительными и

тогда условия развития неустойчивости не будут выполнены. Нетрудно понять причину этих явлений, сравнивая характерное время нелинейного взаимодействия  $\tau_{вз}$  с характерным временем  $\tau_{\Delta\omega}$ , обусловленным наличием рассогласования частот. Естественно ожидать, что при  $\tau_{вз} \gg \tau_{\Delta\omega}$  рассогласование частот приведет к нарушению взаимодействия. Следовательно, влияние рассогласования частот можно преодолеть, уменьшая время взаимодействия, а для этого необходимо увеличивать начальные значения амплитуд. Эти рассуждения указывают на пороговый характер рассматриваемых эффектов.

Перейдем теперь от качественного рассмотрения к нахождению аналитического решения для амплитуд  $u_j$ . Для этого перепишем (9.7) в следующем виде:

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{-\pi(x)}}, \quad (9.10)$$

т. е. в форме эллиптического интеграла. Обращая этот интеграл, можно выразить  $x$  как функцию  $t$  в терминах эллиптических функций. Будем предполагать в дальнейшем, что уравнение  $\pi(x) = 0$  имеет корни  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , упорядоченные так, что  $x_1 \geq x_2 \geq x_3$  (если эти корни вещественны). Тогда вместо (9.10) можно записать

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{s(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}},$$

что дает при  $s = -1$

$$x(t) = (x_2 - x_1) \operatorname{sn}^2[(x_1 - x_3)^{1/2} t + \psi, k] + x_1, \quad (9.11)$$

где  $k = \sqrt{(x_1 - x_2)/(x_1 - x_3)}$  — модуль эллиптической функции и

$$\psi = \operatorname{sn}^{-1}\{[x_1/(x_1 - x_2)]^{1/2}, k\}.$$

Используя еще соотношения (9.5), получаем

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \sqrt{u_0^2(0) - x(t)}; \quad u_1(t) = \sqrt{u_1^2(0) - x(t)}; \quad u_2(t) = \\ &= \sqrt{u_0^2(0) - x(t)}, \end{aligned} \quad (9.12)$$

т. е. результат работы [1].

При  $s = 1$  необходимо различать два случая. В первом из них все три корня  $x_1, x_2$  и  $x_3$  вещественны и решение имеет вид

$$x(t) = (x_1 - x_3) \operatorname{sn}^2[(t_\infty - t)(x_1 - x_3)^{1/2}, k] + x_3, \quad (9.13)$$

где  $k = [(x_2 - x_3)/(x_1 - x_3)]^{1/2}$ , а величина  $t_\infty$  определяет время развития взрывной неустойчивости и может быть найдена из начального условия  $x(0) = 0$ :

$$t_\infty = (x_1 - x_3)^{-1/2} \operatorname{sn}^{-1}\{[(x_3 - x_1)/x_3]^{1/2}, k\}. \quad (9.14)$$

Во втором случае один из корней вещественный, а два других — комплексно сопряженные. Обозначив вещественный корень

$x_1$ , запишем  $-\pi(x) = (x-x_1)(x^2-2bx+c)$ , где  $b$  и  $c$  — вещественны, причем  $c > b^2$ . Введя еще величину  $G = (x_1^2 - 2bx_1 + c)^{1/2}$ , получим решение вида

$$x(t) = 2G/[1 + \operatorname{cn}(2\sqrt{G}t + \phi, k)] - (G - x_1), \quad (9.15)$$

где

$$k = \left(\frac{G+b-x_1}{2G}\right)^{1/2}; \quad \phi = \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{G+x_1}{G-x_1}, k\right)$$

и

$$t_\infty = \frac{2K - \phi}{2\sqrt{G}}; \quad K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}. \quad (9.16)$$

Подставляя (9.13) и (9.15) в соотношения

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \sqrt{x(t) + u_0^2(0)}; \quad u_1(t) = \sqrt{x(t) + u_1^2(0)}; \quad u_2(t) = \\ &= \sqrt{x(t) + u_2^2(0)}, \end{aligned} \quad (9.17)$$

находим решение для амплитуд  $u_j$  при различных знаках энергии волн [3].

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из приведенных решений. Если все начальные амплитуды равны и, кроме того,  $\Gamma = \Delta\omega = 0$ , то при  $s = -1$  модуль эллиптической функции равен 1, т. е. эта функция сводится к  $\operatorname{th} x$ . При  $s = 1$  амплитуды  $u_j(t)$  согласно (9.17) остаются равными при всех  $t$ , причем

$$u_j(t) = 1/[u_j^{-1}(0) - t], \quad (9.18)$$

откуда видно, что в этом случае

$$t_\infty = 1/u_j(0).$$

Используя решения для амплитуд и уравнение (9.3), нетрудно исследовать также временную зависимость фазы  $\Phi$ . При  $s = -1$  и  $\Delta\omega = 0$  эта зависимость имеет осциллирующий характер, так как в процессе взаимодействия  $\sin \Phi$  не изменяет знак. Если одновременно  $\Delta\omega = 0$  и  $\Gamma = 0$ , то квадраты двух амплитуд могут принимать минимальное значение, равное нулю. При этом производная фазы стремится к бесконечности, а производная амплитуды претерпевает разрыв. Если же амплитуды могут принимать отрицательные значения, то фазу  $\Phi$  можно считать равной нулю в течение всего времени взаимодействия. Наконец, при взрывной неустойчивости фаза асимптотически стремится к нулю за время развития неустойчивости  $t_\infty$ . Такое характерное поведение фазы при взрывной неустойчивости известно как эффект локализации фазы [2, 6, 7].

Если  $\Phi(0) = 0$ , то из (9.3) следует, что  $\Gamma = 0$  и, следовательно, фаза  $\Phi$  остается равной нулю в течение всего времени нелинейного взаимодействия. Это соответствует максимальной скорости раз-

вития взрывной неустойчивости. Если же  $\Phi(0) \neq 0$ , то в процессе взаимодействия фаза монотонно уменьшается до нуля, что видно как из соотношения (9.3) при  $\Delta\omega=0$ , так и из уравнения для производной

$$\partial\Phi/\partial t = -\Gamma(1/u_0^2 + 1/u_1^2 + 1/u_2^2). \quad (9.19)$$

Эти качественные выводы хорошо согласуются с данными численного анализа, выполненного в работе [7]. На рис. 9.3 приведены временные зависимости величины  $x = u_j^2 - u_j^2(0)$  при различном выборе начальных фаз. Как видно, время развития взрывной не-

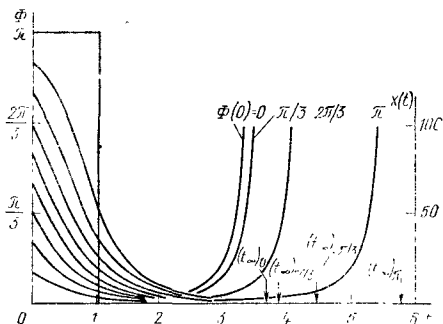


Рис. 9.3. Эффект локализации фазы и взрывное нарастание амплитуды при  $s=1$  и различных начальных значениях фазы  $\Phi(0)$ . Начальные значения амплитуд:  $u_0(0)=0,6$ ;  $u_1(0)=0,09$ ;  $u_2(0)=0,85$

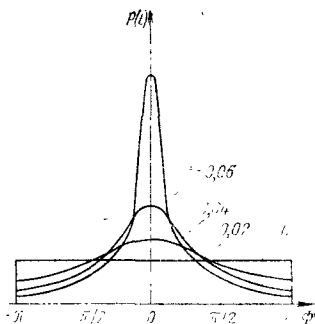


Рис. 9.4. Зависимость вероятностного распределения фаз от времени. В начальный момент все фазы равновероятны

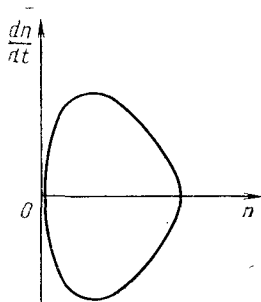


Рис. 9.5. Взаимодействие трех волн с энергиями одного знака на фазовой плоскости ( $s=-1$ ,  $n=u_j^2$ )

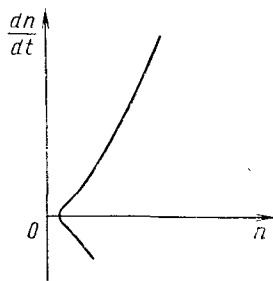


Рис. 9.6. Взрывная неустойчивость на фазовой плоскости ( $s=1$ )



устойчивости возрастает с увеличением отклонения начальной фазы от нуля. На рис. 9.4 показано вероятностное распределение фаз в различные моменты времени  $t$  при условии, что в начальный момент все фазы равновероятны. Такая картина описывает эволюцию статистического ансамбля трехволновых систем, плотность которых в начальный момент не зависит от  $\Phi$ .

При классификации дифференциальных уравнений по наличию сингулярных точек и неустойчивых решений [8] часто используют метод фазовой плоскости [9]. В качестве независимой переменной выбирают амплитуду  $n$  и строят зависимость производной от  $n$  (в этом смысле фазовую плоскость можно рассматривать как вырожденное фазовое пространство, используемое в статистической теории многочастичных систем). Характерной особенностью периодических решений ( $s=-1$ ) является замкнутость соответствующих им кривых на фазовой плоскости (рис. 9.5). Пример противоположной неустойчивой ситуации ( $s=1$ ) показан на рис. 9.6 (начальная фаза выбрана так, что амплитуда сначала убывает, а затем начинает возрастать).

### Пространственно-временная эволюция

До сих пор речь шла только о временной эволюции. Аналогично можно рассмотреть пространственную эволюцию системы, находящейся в стационарном состоянии. В общем случае необходимо учитывать как временную, так и пространственную эволюцию. Решение задачи в такой постановке дано в работе [10], где приведены как численные, так и аналитические результаты, полученные с использованием метода обратной задачи рассеяния. В частности, найдено строгое аналитическое выражение для коэффициента отражения плазмы при стимулированном рассеянии электромагнитных волн. Ниже мы коснемся этих проблем и, кроме того, рассмотрим нелинейные эффекты высшего порядка, учет которых необходим при описании процесса нелинейного взаимодействия в области  $t \geq t_\infty$ .

#### Задачи

9.1. Сформулировать условия получения стационарного решения для потенциальной функции (см. рис. 9.1) при  $\Delta\omega = \Gamma = 0$ .

9.2. Рассмотреть случай  $u_1^2(0) = u_2^2(0)$ ,  $\Delta\omega = 0$ ,  $\Gamma^2 \geq 0$ . Какой тип энергии соответствует  $\Gamma^2 \geq 0$ ?

9.3. Обобщить решение (9.18) на случай, когда все волны имеют одинаковый коэффициент затухания  $\nu$ .

9.4. Вместо того чтобы выражать все амплитуды через переменную  $x$ , можно выразить их через какую-либо одну амплитуду. В предположении, что  $u_0^2 + u_1^2 = M_{01}$  и  $u_0^2 + u_2^2 = M_{02}$  а) найти потенциал  $\pi(u_0^2)$  для случая  $\Delta\omega = 0$  и  $s = -1$ ; б) выразить модуль  $k$  эллиптической функции для  $s = -1$  через корни  $a_1 \geq a_2 \geq a_3$  уравнения  $\pi(u_0^2) = 0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S. — Phys. Rev., 1962, v. 15, p. 1918.
2. Engelmann F., Wilhelmsson H. — Z. Naturforsch., 1969, Bd 24a, S. 206.
3. Coppi B., Rosenbluth M. N., Sudan R. N. — Ann. Phys., 1969, v. 55, p. 207.
4. Wilhelmsson H., Stenflo, L., Engelmann F. — J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 1738.
5. Östberg K. Dissertation. Göteborg, Chalmers Univ. of Technology, 1973.
6. Sturrok P. A. — Phys. Rev. Lett., 1966, v. 16, p. 270.
7. Wilhelmsson H., Östberg K. — Phys. Scripta, 1970, v. 1, p. 267.
8. Poincaré H. — J. math., 1881, v. 3, p. 7.
9. Minorsky N. Nonlinear Oscillations. Princeton, Van Nostrand, 1962.
10. Bers A., Kaup D. J., Reiman A. H. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 182.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Wilhelmsson H., Watanabe M., Nishikawa K. Theory for Space-Time Evolution of Explosive-Type Instability. — Phys. Lett., 1977, v. 60A, p. 311.
- Chu F. Y. E., Karney C. F. Solution of Three-Wave Resonant Equations with One Wave Heavily Damped. — Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 1728.

## ГЛАВА 10

### КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЛН

Устойчивость недиссипативной системы определяется, как мы убедились выше, соотношением знаков вещественных коэффициентов связи. При учете диссипации эти коэффициенты становятся комплексными, причем отклонение от вещественных значений описывается фазовыми углами  $\theta_{kl}$ . Замечательно, однако, что эти углы фигурируют в исходной системе (7.3) только в комбинации с динамическим фазовым углом  $\Phi$ . Основываясь на этом наблюдении, можно сформулировать общий критерий устойчивости диссипативной системы [1], значение которого особенно велико в связи с тем, что полное аналитическое решение системы связанных уравнений с произвольными углами  $\theta_{ij}$  получить не удастся.

В настоящей главе исследуются устойчивость нелинейной трехволновой системы и общий характер эволюции амплитуд  $u_j$  и фазы  $\Phi$  в зависимости от значений фазовых углов  $\theta_{kl}$ . Затронута также проблема обобщения результатов на случай зависящих от времени коэффициентов связи и линейной диссипации. Кроме того, выведены интегралы движения для различных частных случаев диссипативных систем. Наконец, на примере системы плазма — пучок показана инвариантность рассматриваемых физических явлений относительно выбора инерциальной системы отсчета.

#### Общие свойства решений системы уравнений связанных волн для стационарной среды

Как и в предыдущей главе, воспользуемся нормировкой (7.4), но при записи системы (7.3) не будем пренебрегать диссипацией. Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \partial u_0 / \partial t + v_0 u_0 &= u_1 u_2 \cos(\Phi + \theta_{12}); \\ \partial u_1 / \partial t + v_1 u_1 &= u_0 u_2 \cos(\Phi + \theta_{02}); \\ \partial u_2 / \partial t + v_2 u_2 &= u_0 u_1 \cos(\Phi + \theta_{01}); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \Delta \omega - \frac{u_1 u_2}{u_0} \sin(\Phi + \theta_{12}) - \frac{u_0 u_2}{u_1} \sin(\Phi + \theta_{02}) - \\ &- \frac{u_0 u_1}{u_2} \sin(\Phi + \theta_{01}). \end{aligned} \right\} (10.1)$$

Пытаясь определить условия, при которых возможны неустойчивые решения системы (10.1), прежде всего заметим, что необходимой предпосылкой для развития взрывной неустойчивости является наличие нелинейного нарастания. Но из системы (10.1) видно, что любая амплитуда будет увеличиваться вместе с парой других лишь при условии, что в произвольно заданный момент времени все  $\theta_{ij}$  удовлетворяют неравенству  $\cos(\Phi + \theta_{ij}) > 0$ . Это означает, в свою очередь, что для развития взрывной неустойчивости необходимо, чтобы *все*  $\theta_{ij}$  принадлежали одной полуплоскости.

Заметим далее, что если все  $\Phi + \theta_{ij}$  лежат в правой полуплоскости, то  $\partial \Phi / \partial t$  уменьшается с увеличением  $\Phi$ , причем это уменьшение имеет характер монотонного стремления к нулю, если и при  $\partial \Phi / \partial t \rightarrow 0$  величина  $\Phi + \theta_{ij}$  все еще остается в правой полуплоскости. Такое поведение естественно ожидать при больших амплитудах, когда членами  $v_j u_j$  и  $\Delta \omega$  можно пренебречь.

Запишем теперь асимптотическое решение как

$$u_j = f_j(t) / (t_\infty - t), \quad (10.2)$$

где  $f_j(t)$  — функция, медленно меняющаяся по сравнению с  $1/(t_\infty - t)$  в окрестности  $t_\infty$ . Подставляя (10.2) в (10.1), получаем асимптотические значения  $f_j$ :

$$\left. \begin{aligned} f_0^2(t_\infty) &= \{ \cos[\Phi(t_\infty) + \theta_{02}] \cos[\Phi(t_\infty) + \theta_{01}] \}^{-1}; \\ f_1^2(t_\infty) &= \{ \cos[\Phi(t_\infty) + \theta_{01}] \cos[\Phi(t_\infty) + \theta_{12}] \}^{-1}; \\ f_2^2(t_\infty) &= \{ \cos[\Phi(t_\infty) + \theta_{02}] \cos[\Phi(t_\infty) + \theta_{12}] \}^{-1}. \end{aligned} \right\} (10.3)$$

Полагая еще  $\partial \Phi / \partial t = 0$  в (10.1) и используя при этом (10.2) и (10.3), можно найти также следующее полезное асимптотическое выражение:

$$\operatorname{tg}[\Phi(t_\infty) + \theta_{12}] + \operatorname{tg}[\Phi(t_\infty) + \theta_{02}] + \operatorname{tg}[\Phi(t_\infty) + \theta_{01}] = 0. \quad (10.4)$$

Слагаемые  $v_j u_j$  и  $\Delta \omega$  оказывают большое влияние на пороговые значения амплитуд и время взрыва  $t_\infty$ . Сам факт существования порога при  $v_j \neq 0$  вытекает из того, что характер временной эволюции амплитуды  $u_j$  определяется соотношением нелинейного и диссипативного слагаемых; если в какой-то момент времени первое из них превышает второе, то в дальнейшем будет происходить увеличение амплитуды, доминирующая роль первого слагаемого еще более усилится и в конечном счете разовьется взрывная не-

**устойчивость.** Прямо противоположная картина наблюдается тогда, когда в начальный момент доминирует слагаемое  $v_j u_j$ .

Влияние  $\Delta\omega$  на динамику процесса нелинейного взаимодействия осуществляется через фазу  $\Phi$ , в которой появляется дополнительное слагаемое  $\Delta\omega t$ . Если за характерное время взаимодействия это слагаемое способно привести к изменению знака  $\cos(\Phi + \theta_{kl})$ , то взрывная неустойчивость развиваться не будет. Используя время взрыва при  $\Delta\omega = 0$  в качестве меры характерного времени взаимодействия, можно оценить пороговое значение  $\Delta\omega$ :

$$\Delta\omega \leq \pi/t_\infty. \quad (10.5)$$

Для исследования зависимости  $t_\infty$  от  $v_j$ ,  $\Delta\omega$  и  $u_j(0)$  полезно ввести подстановку

$$n_j = k u_j; \quad t' = (1/k) t, \quad (10.6)$$

с помощью которой система (10.1) записывается в переменных  $n_j$  и  $t'$ , но при этом  $v_j$  и  $\Delta\omega$  умножаются на  $k$ . Рассматривая вначале случай  $v_j = \Delta\omega = 0$ , видим, что при увеличении начального значения амплитуды  $u_j$  в  $k$  раз время взрыва уменьшается также в  $k$  раз. При  $v_j$  и  $\Delta\omega$ , отличных от нуля, такое же уменьшение достигается при одновременном увеличении  $v_j$  и  $\Delta\omega$  в  $k$  раз.

Если все  $v_j = v$  и  $\Delta\omega$  пренебрежимо мало, то с помощью подстановки

$$U_j = u_j \exp(vt); \quad \tau = (1/v) [1 - \exp(-vt)] \quad (10.7)$$

можно получить систему (10.1) относительно переменных  $U_j$  и  $\tau$ , в которой, однако, слагаемые  $v U_j$  отсутствуют. Обозначая время взрыва для этой системы  $\tau_\infty$ , получаем

$$t_\infty = - (1/v) \ln(1 - v\tau_\infty). \quad (10.8)$$

Это соотношение описывает влияние частоты  $v$  на время развития неустойчивости, а также дает критическое значение

$$v_c = 1/\tau_\infty, \quad (10.9)$$

начиная с которого неустойчивые решения уже невозможны.

Когда все  $v_j$  различны, задача намного труднее в математическом отношении. Но при дополнительном предположении  $\theta_{ij} = 0$  анализ сильно облегчается благодаря существованию интеграла движения, который при  $\Delta\omega = 0$  имеет вид

$$u_0 u_1 u_2 \sin \Phi = \Gamma \exp[-(v_0 + v_1 + v_2) t]. \quad (10.10)$$

В другом идеализированном случае, когда все  $v_j$  равны, а  $\theta_{ij}$  различны, существует интеграл движения вида

$$[u_0^2 \sin(\theta_{02} - \theta_{01}) + u_1^2 \sin(\theta_{01} - \theta_{12}) + u_2^2 \sin(\theta_{12} - \theta_{02})] \exp(2vt). \quad (10.11)$$

Идеализированность примеров, описываемых соотношениями (10.10) и (10.11), связана с тем, что углы  $\theta_{ij}$  и частоты  $v_j$ , строго говоря, нельзя выбирать независимо. Именно вследствие зависимости между  $\theta_{ij}$  и  $v_j$  устойчивый режим с  $\theta_{ij} = 0, \pm\pi$  может перейти в неустойчивый [2], когда все  $\theta_{ij}$  попадают в одну полуплоскость (рис. 10.1, а). Результаты численного анализа приведены на

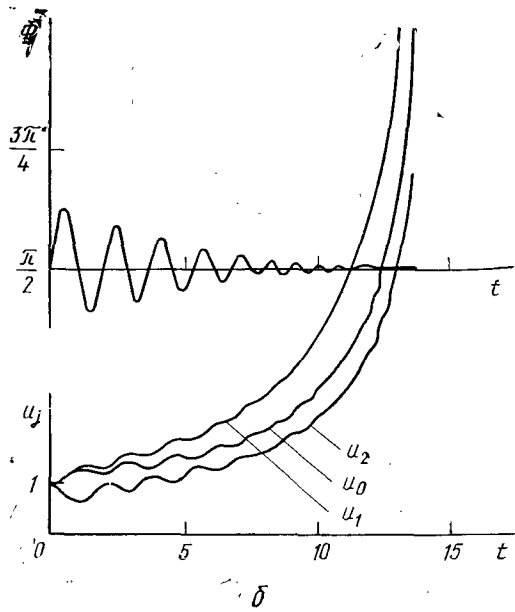
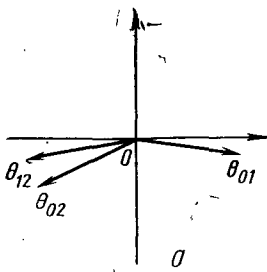


Рис. 10.1. Локализация комплексных векторов  $\exp(i\theta_{ij})$  в одной полуплоскости (а), а также эволюция амплитуд взрывного типа и локализация фаз при  $\theta_{ij}$ , изображенных на рис. 10.1, а для  $\nu_j=0,01$ ,  $\Delta\omega=0$  (б)

рис. 10.1, б. Если же какие-либо два из углов  $\theta_{ij}$  отличаются в точности на  $\pi$  (рис. 10.2, а), то получается предельно устойчивое решение, пример которого показан на рис. 10.2, б. Наконец, при

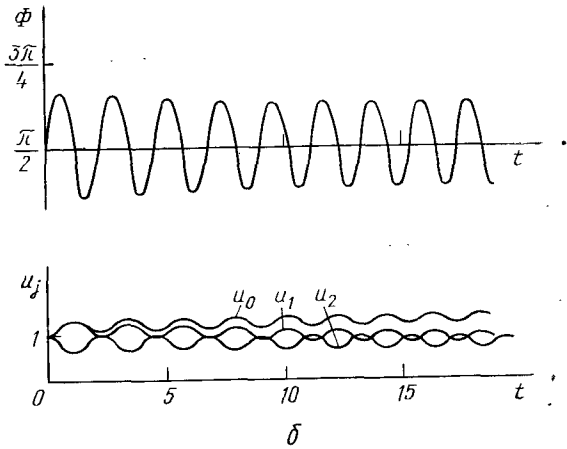
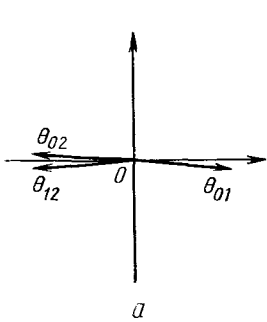


Рис. 10.2. Конфигурация векторов  $\exp(i\theta_{ij})$  в случае, когда два угла  $\theta_{ij}$  отличаются в точности на  $\pi$  (а), и вид решения при фазовых углах, изображенных на рис. 10.2, а для  $\nu_j=0,01$  (б)

произвольном расположении углов в разных полуплоскостях (рис. 10.3, а) амплитуды затухают, но фазы могут испытывать сильные осцилляции (рис. 10.3, б).

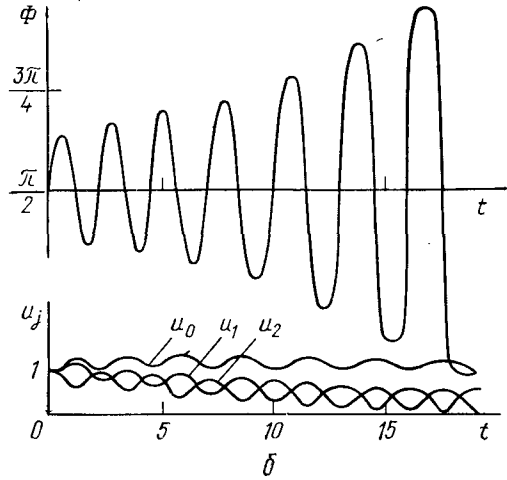
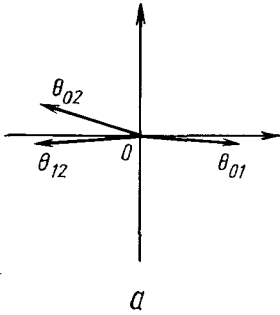


Рис. 10.3. Локализация комплексных векторов  $\exp(i\theta_{ij})$  в различных полуплоскостях (а) и вид решения при фазовых углах, изображенных на рис. 10.3, а, для  $v_j=0,01$  (б)

### Решение для нестационарной среды

Приведенный выше критерий устойчивости допускает обобщение на случай зависящих от времени величин  $v_j(t)$  и  $c_{ij}(t)$  [3]. При этом система (10.1) приобретает вид

$$\partial u_j / \partial t + v_j(t) u_j = g_{kl}(t) u_k u_l \cos[\Phi + \theta_{kl}(t)], \quad (10.12)$$

где

$$g_{kl}(t) = |c_{kl}(t)/c_{kl}(0)|. \quad (10.13)$$

При  $t \rightarrow \infty$  эта система имеет асимптотическое решение

$$u_j = f_j(t)/(t_\infty - t),$$

причем

$$f_i^2(t_\infty) = g_{ik}^{-1}(t_\infty) \{ \cos[\Phi(t_\infty) + \theta_{jk}(t_\infty)] \cos[\Phi(t_\infty) + \theta_{jl}(t_\infty)] \}^{-1}, \quad (10.14)$$

все  $\cos[\Phi(t_\infty) + \theta_{ij}(t_\infty)] > 0$  и

$$\operatorname{tg}[\Phi(t_\infty) + \theta_{12}(t_\infty)] + \operatorname{tg}[\Phi(t_\infty) + \theta_{02}(t)] + \operatorname{tg}[\Phi(t_\infty) + \theta_{01}(t_\infty)] = 0. \quad (10.15)$$

При  $v_j(t) = v(t)$ ,  $g_{ij}(t) = g(t)$  и  $\theta_{ij} = 0$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ) можно получить также точное решение системы (10.12), так как с помощью подстановок

$$U_j = u_j \exp \left[ \int_0^t v(t') dt' \right]; \quad (10.16)$$

$$\tau = \int_0^t \exp \left\{ - \int_0^{t'} [v(t'') + \eta(t'')] dt'' \right\} dt', \quad (10.17)$$

где

$$\eta(t) = - (d/dt) [\ln g(t)], \quad (10.18)$$

эта система приводится к стандартному виду для недиссипативной среды с  $g(t) = 1$ . Отсюда следует, в частности, что время развития неустойчивости  $t_\infty$  можно найти из соотношения

$$\tau_\infty = \int_0^{t_\infty} \exp \left\{ - \int_0^{t'} [v(t'') + \eta(t'')] dt'' \right\} dt', \quad (10.19)$$

где  $\tau_\infty$  — время развития взрывной неустойчивости для недиссипативной системы с  $g(t) = 1$  [ср. с (2.11)]. При увеличении  $v(t'')$  и  $\eta(t'')$  величина  $t_\infty \rightarrow \infty$ , т. е. неустойчивый режим становится невозможным.

### Преобразование инерциальных систем отсчета и проблема устойчивости трехволнового взаимодействия

Возвращаясь к случаю недиссипативной среды, напомним, что необходимым и достаточным условием существования неустойчивых решений системы (9.1) является положительность всех коэффициентов связи или, что то же самое, противоположность знака энергии волны с наибольшей частотой знакам энергий остальных волн. Покажем, что это условие не нарушается при преобразованиях инерциальных систем отсчета.

Рассмотрим в качестве примера систему плазма — пучок. В покоящейся системе координат диэлектрическая проницаемость такой системы имеет вид

$$\epsilon(\omega, k) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 - \omega_{pb}^2/(\omega - kV_b)^2, \quad (10.20)$$

где  $\omega_{pe}$  и  $\omega_{pb}$  — плазменные частоты стационарной и движущейся подсистем соответственно;  $V_b$  — скорость движущейся подсистемы в выбранной системе отсчета. Если перейти к системе отсчета, движущейся относительно первоначальной системы со скоростью, параллельной скорости  $V_b$ , то плазма будет выглядеть как двухпоточковая система и вместо (10.20) получим

$$\epsilon(\omega, k) = 1 - \omega_{pb_1}^2/(\omega - kV_{b_1})^2 - \omega_{pb_2}^2/(\omega - kV_{b_2})^2. \quad (10.21)$$

Энергия волны в этой системе

$$\langle W \rangle = (\epsilon_0/4) (\partial/\partial\omega) (\omega\epsilon),$$

где

$$\frac{\partial}{\partial\omega} (\omega\epsilon) = \omega \frac{\partial\epsilon}{\partial\omega} = \frac{2\omega_{pb_1}\omega}{(\omega - kV_{b_1})^2} + \frac{2\omega_{pb_2}\omega}{(\omega - kV_{b_2})^2}. \quad (10.22)$$

Общий вид функции (10.21) при фиксированном  $k > 0$  и положительных  $V_{b_1}$  и  $V_{b_2}$  показан на рис. 10.4. Корни 1 и 3 соответствуют волнам с отрицательной энергией, а 2 и 4 — волнам с положительной энергией. Согласно критерию взрывной неустойчивости,

в качестве волны с наибольшей частотой можно выбрать волну, соответствующую корню 3, тогда две другие волны должны соответствовать корню 2 (для простоты в дальнейшем будем писать волна 1, 2 и т. д. — *Прим. перев.*). Следует помнить, однако, что волны имеют разные волновые числа  $k$  и поэтому фактически им соответствуют разные диаграммы типа показанных на рис. 10.4. Запишем резонансные условия

$$k_0 = k_1 + k_2; \quad \omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \quad (10.23)$$

и попытаемся решить дисперсионное уравнение с тем, чтобы установить соотношение между  $\omega_j$  и  $k_j$ . В общем случае задача сводится к уравнению четвертой степени относительно  $\omega$ , но если

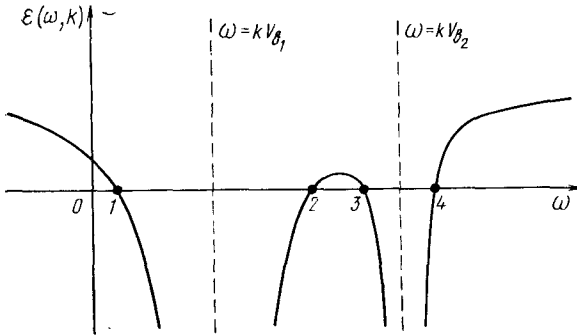


Рис. 10.4. Общий вид диэлектрической проницаемости  $\epsilon(\omega, k)$  при фиксированном  $k$  в случае холодной двухпотоковой системы со скоростями  $V_{b_1}$  и  $V_{b_2}$ .

скорости потоков достаточно разнесены, то при отыскании корней 1 и 2 можно пренебречь влиянием второго пучка, а при нахождении корней 3 и 4 — влиянием первого пучка. Тогда

$$\omega_0 \approx k_0 V_{b_2} - \omega_{pb_2}; \quad \omega_1 \approx k_1 V_{b_1} + \omega_{pb_1}; \quad \omega_2 \approx k_2 V_{b_1} + \omega_{pb_1}, \quad (10.24)$$

что с учетом законов сохранения (10.23) приводит к соотношению

$$k_0 V_{b_1} + 2\omega_{pb_1} = k_0 V_{b_2} - \omega_{pb_2}. \quad (10.25)$$

В том же приближении имеем

$$\left. \begin{aligned} [(\partial/\partial\omega)(\omega\epsilon)]_0 &= -2\omega_0/\omega_{pb_2}; \\ [(\partial/\partial\omega)(\omega\epsilon)]_1 &= 2\omega_1/\omega_{pb_1}; \\ [(\partial/\partial\omega)(\omega\epsilon)]_2 &= 2\omega_2/\omega_{pb_1}. \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

Заметим теперь, что при переходе от одной инерциальной системы к другой скорости  $V_{b_1}$  и  $V_{b_2}$  изменяются на одну и ту же величину, а это означает, что соотношение (10.25) инвариантно относительно такого преобразования. Однако частоты не остаются неизменными: по мере уменьшения  $V_{b_1}$  и  $V_{b_2}$  они убывают и в конечном счете могут стать отрицательными. При  $k_2 > k_1$  первой приобретает отрицательное значение частота  $\omega_2$ . В этой ситуации



волны 2 и 0 имеют отрицательную энергию, а волна 1 — положительную, но условие взрывной неустойчивости продолжает выполняться, так как именно волна 1 имеет наибольшую частоту. При дальнейшем уменьшении  $V_{b_1}$  и  $V_{b_2}$  становится отрицательной частота  $\omega_0$ . Однако условие неустойчивости выполняется и при этом, так как теперь энергии волн 0 и 1 положительны, а энергия волны 2 отрицательна, и как раз эта волна имеет максимальную частоту. Наконец, при отрицательном  $\omega_1$  наибольшую абсолютную частоту будет снова иметь волна 0, причем ее энергия положительна, а энергии волн 1 и 2 отрицательны, что и требуется для развития взрывной неустойчивости.

### Задачи

10.1. На рис. 10.2 показано решение для случая, когда две фазы  $\theta_{ij}$  различаются в точности на  $\pi$ . При этом  $\Phi$  осциллирует около значения, близкого к  $\pi/2$ . Это означает, что фаза  $\Phi + \theta_{12}$ , соответствующая третьей волне, в среднем находится в правой полуплоскости. Возможно ли подобное при осцилляции фазы  $\Phi$  в окрестности значения  $-\pi/2$ ?

10.2. Когда все  $v_j = v$ , но все  $\theta_{ij}$  различны, существует решение, при котором  $\Phi$  постоянно. Найти это решение.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wilhelmsson H., Stenflo L., Engelmann F. — J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 1738.
2. Jarmen A., Stenflo L., Wilhelmsson H., Engelmann F. — Phys. Lett., 1969, v. 28A, p. 748.
3. Wilhelmsson H. — Phys. Rev., 1972, v. A6, p. 1973.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Stenflo L., Weiland J., Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1970, v. 1, p. 46.  
 Jackson E. A. — J. Math. Phys., 1972, v. 13, p. 1189.  
 Wang P. K. C. — J. Math. Phys., 1972, v. 13, p. 943.

## ГЛАВА 11

### НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН С РАЗЛИЧНЫМ ЗАТУХАНИЕМ ПРИ ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В плазме распространяется много волн различных типов (особенно при наличии внешнего магнитного поля). Их свойства могут сильно различаться из-за разных скоростей распространения волн, и, что не менее важно, волны иногда имеют существенно различные диссипативные характеристики. Затухание разных волн может не только сильно отличаться по величине, но и иметь разную физическую природу (затухание Ландау для коллективных волн типа плазменных или ионно-звуковых волн и столкновительное затухание для поперечных электромагнитных волн). Следовательно, коэффициенты, описывающие линейное затухание (или нарастание) в системе связанных нелинейных уравнений, в общем случае должны быть различными.

Проблема описания трехволнового взаимодействия при таком

предположении оказывается далеко не тривиальной. Общее аналитическое решение соответствующей системы уравнений получить не удастся и приходится прибегать к приближенным методам, использование которых часто приводит к полезным результатам. При этом удобно отдельно рассматривать режим взрывной неустойчивости и нелинейно-устойчивый режим.

В этой главе рассмотрен пример взрывной неустойчивости в предположении, что различие между коэффициентами затухания достаточно мало для того, чтобы можно было получить приближенное решение, правильно описывающее характер нелинейной эволюции системы (критерием правильности служит сравнение с результатами прямого машинного анализа исходной системы связанных уравнений). Исследуется также возможность обобщения теории на случай нестационарной среды и получения асимптотических разложений с помощью метода интегрирования по частям.

### Приближенное решение для стационарной среды

Если линейное затухание всех взаимодействующих волн различно, то с помощью преобразований вида (10.7) не удастся перейти к системе, в которой все  $\nu_j = 0$ . Тем не менее для взрывной неустойчивости можно найти приближенное решение, идея которого заключается в следующем [1]. Вследствие взаимодействия каждая волна подвергается влиянию не только собственного затухания, но и затухания остальных волн. При больших амплитудах это перемешивание затуханий становится очень эффективным, и в результате каждая волна испытывает некоторое усредненное затухание. Однако на начальной стадии (до того как нелинейные слагаемые станут определяющими) волна фактически испытывает лишь свойственное ей затухание. В связи с этим вначале различаются и скорости эволюции различных волн, но в дальнейшем благодаря эффекту перемешивания они выравниваются, что в конечном счете приводит к единому моменту взрыва для рассматриваемой системы.

Из этого рассмотрения следует, что для построения решения можно по-прежнему использовать преобразование амплитуд типа (10.7), но при этом необходимо учитывать временную зависимость затухания каждой волны. Что же касается преобразования времени, то его можно определить одинаково для всех волн, так как численные эксперименты показывают, что упомянутое выше время перемешивания очень мало. В результате получим приближенное решение вида

$$u_j(t) = U_j(\tau) \exp \left[ - \int_0^t h_j(t') dt' \right], \quad (11.1a)$$

где

$$\tau = \int_0^t \exp \left[ - \int_0^{t'} \sigma(t'') dt'' \right] dt'; \quad (11.1b)$$

$$h_j(t) = \mu - (\mu - \nu_j) (d/dt) [(1 - t/t_\infty)^\alpha t]; \quad (11.2)$$

$$\mu = (1/3) (\nu_0 + \nu_1 + \nu_2) \quad (11.3)$$

и  $1 < \alpha < 2$  [2]. Если амплитуды одинаковы по порядку величины, то для простоты можно положить  $\sigma(t) = \mu$ . Однако тогда, когда амплитуды существенно различны, лучшие результаты получаются при несколько ином выборе  $\sigma(t)$  [3]:

$$\sigma(t) = (\nu_0 u_0 + \nu_1 u_1 + \nu_2 u_2) / (u_0 + u_1 + u_2). \quad (11.4)$$

Сравнительный анализ численных результатов, полученных на основе использования решения (11.1а) и исходной системы (10.1), выполнен в работе [2]. На рис. 11.1, а, б показаны результаты

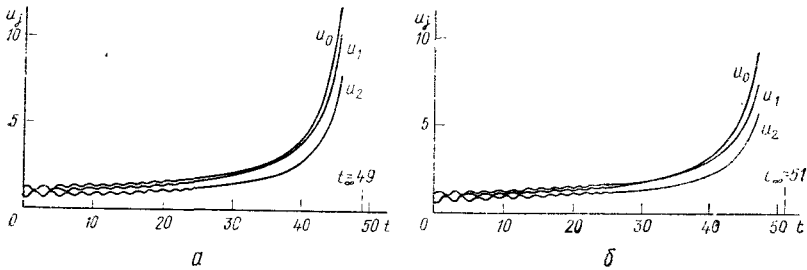


Рис. 11.1. Численное решение системы (10.1) при  $\Delta\omega=0$ ;  $\theta_{12}=-\pi+\pi/60$ ;  $\theta_{02}=-\pi+\pi/100$ ;  $\theta_{01}=\pi/100$ ;  $\nu_0=0,05$ ;  $\nu_1=0,02$ ;  $\nu_2=0,02$  (а) и решение для того же случая, что и на рис. 11.1, а, но при  $\sigma(t)=\mu$  и  $\alpha=1,5$  (б)

расчетов для  $\Delta\omega=0$  при условии, что углы  $\theta_{ij}$  слегка отличаются от  $\pi$  [расчеты по (11.1а) проводились при  $\sigma(t)=\mu$ ].

### Решение для нестационарной среды

Форма решения (11.1) указывает на возможность его использования и тогда, когда частоты  $\nu_j$  являются функциями времени. К такому случаю можно свести также пример зависящих от времени коэффициентов связи. Это достигается с помощью преобразований

$$\left. \begin{aligned} g_{ij}(t) &= |c_{ij}(t)/c_{ij}(0)|; \\ \eta_j(t) &= -(d/dt) \ln |g_{jl}(t)g_{jk}(t)|^{1/2}; \\ \nu_j(t) &= u_j(t) \exp \left[ -\int_0^t \eta_j(t') dt' \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

Отметим, что причины возникновения временной зависимости коэффициентов связи могут быть весьма разнообразными: нестационарность основных параметров плазмы, влияние волны на среду, нелинейности высших порядков и т. п., так что получение решения для нестационарной среды представляет значительный интерес.

## Асимптотические разложения

При  $\theta_{ij}=0$  решение можно выразить в виде функции от  $\Phi$ :

$$u_j(t) = \exp(-v_j t) \left[ 2\Gamma \int_0^t \exp[(v_j - v_k - v_l)t] \operatorname{ctg} \Phi dt + u_j^2(0) \right]^{1/2}. \quad (11.6)$$

Используя затем асимптотическое решение в окрестности времени развития взрывной неустойчивости

$$u_j(t) = k_j \exp(-\mu t) / [\exp(-\mu t) - \exp(-\mu t_\infty)], \quad (11.7)$$

можно найти  $\operatorname{ctg} \Phi$  и проинтегрировать (11.6) по частям. В результате получим более точное решение  $u_j(t)$ . Продолжая этот процесс, можно построить асимптотическое разложение, которое сводится к точному решению при  $v_j = \mu$  [2].

## Частные случаи

Ряд частных случаев взаимодействия волн с учетом затухания рассмотрен в работах [4, 5]. В первой из них показано, что система всегда неустойчива, если затухает лишь одна волна и все начальные амплитуды равны. Аналогичный вывод получен и в работе [6], где начальное значение амплитуды затухающей волны полагали равным нулю. Тогда  $\Gamma=0$ , а амплитуды незатухающих волн удовлетворяют соотношению

$$u_0^2 - u_1^2 = c^2.$$

С помощью замены

$$u_0 = c \operatorname{ch} \psi; \quad u_1 = c \operatorname{sh} \psi; \quad u_2 = \partial \psi / \partial t$$

получаем уравнение

$$\partial^2 \psi / \partial t^2 + v \partial \psi / \partial t - (1/2) c^2 \operatorname{sh} 2\psi = 0 \quad (11.8)$$

с начальными условиями

$$\psi(0) = \operatorname{ch}^{-1} [u_0(0)/c]; \quad \partial \psi(0) / \partial t = 0.$$

В общем случае это уравнение решить не удастся. Однако при  $v/u_0(0) \gg 1$  [ $u_0(0) > u_1(0)$ ] можно показать, что учет затухания приводит к увеличению времени развития взрывной неустойчивости в отношении  $v/u_0(0)$ .

## Задачи

11.1. Система связанных уравнений, описывающая параметрическое взаимодействие, может иметь неустойчивый характер в том смысле, что лишь одна из волн является затухающей (см. гл. 2). Сохраняется ли этот характер в приближении (10.1), если а)  $\sigma(t) = \mu$ ; б)  $\sigma(t) = \Sigma v_j u_j / \Sigma u_j$ ?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1970, v. 2, p. 113.
2. Weiland J. — J. Plasma Phys., 1972, v. 7, p. 375.
3. Weiland J. — Phys. Scripta, 1973, v. 7, p. 230.
4. Jungwirth K. — Czechosl. J. Phys., 1972, v. B22, p. 756.
5. Fuchs V. — J. Math. Phys., 1975, v. 16, p. 1388.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Wilhelmsson H. — Phys. Rev., 1972, v. A6, p. 1973.  
Nakach R., Wilhelmsson H. — Ibid., 1976, v. A14, p. 451.

**ВЛИЯНИЕ ЗАТУХАНИЯ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН  
С ЭНЕРГИЯМИ ОДНОГО ЗНАКА**

Для учета затухания при взаимодействии волн с энергиями одного знака метод, изложенный в предыдущей главе, непригоден из-за асимметрии исходной системы уравнений, обусловленной тем, что коэффициент связи для волны с наибольшей частотой противоположен по знаку коэффициентам остальных волн. В результате амплитуда одной волны может оказаться большой как раз в тот момент, когда две другие амплитуды малы, а это означает неадекватность рассматриваемой ситуации представлению об усредненном затухании. Метод, предназначенный специально для взаимодействия волн с энергиями одного знака, предложен в работе [1].

**Решение для трех затухающих волн**

Исходная система уравнений в этом случае сводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \partial u_0 / \partial t + v_0 u_0 &= -u_1 u_2 \cos \Phi; \\ \partial u_1 / \partial t + v_1 u_1 &= u_0 u_2 \cos \Phi; \\ \partial u_2 / \partial t + v_2 u_2 &= u_0 u_1 \cos \Phi; \\ \partial \Phi / \partial t &= (u_1 u_2 / u_0 - u_0 u_2 / u_1 - u_0 u_1 / u_2) \sin \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

Эта система имеет интеграл движения

$$u_0 u_1 u_2 \sin \Phi = \Gamma \exp [-(v_0 + v_1 + v_2) t]. \quad (12.2)$$

В частном случае  $\Gamma \approx 0$ , рассмотрением которого мы здесь ограничимся, получим

$$u_0 u_1 u_2 \sin \Phi \approx 0. \quad (12.3)$$

Найдем искомое решение, отправляясь от решения для недиссипативной среды. При  $\Gamma = 0$  потенциал  $\pi$  можно представить в следующей форме:

$$\pi(n_0) = (M_1 - n_0)(M_2 - n_0)n_0, \quad (12.4)$$

где введено обозначение  $n_j = u_j^2$ , а величины

$$M_1 = n_0 + n_2; \quad M_2 = n_0 + n_1 \quad (12.5)$$

представляют собой константы Мэнли—Роу. Подставляя (12.4) в (9.8) и используя решение (9.11), получаем

$$n_0(t) = M_2 \operatorname{sn}^2(M_1^{1/2} t; k), \quad (12.6)$$

где

$$k = (M_2/M_1)^{1/2}$$

и предполагается, что  $n_1(0) < n_2(0)$ , т. е.  $M_1 \geq M_2$ .

Возвращаясь к проблеме учета затухания, введем величины

$$m_1(t) = n_0 + n_2; \quad m_2(t) = n_0 + n_1, \quad (12.7)$$

которые, в отличие от (12.5), являются функциями времени и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dm_1}{dt} + 2v_2 m_1 = (v_2 - v_0) 2n_0; \quad \frac{dm_2}{dt} + 2v_1 m_2 = (v_1 - v_0) 2n_0. \quad (12.8)$$

Эти уравнения вытекают из исходной системы (12.1). Отметим важное свойство величин  $m_1$  и  $m_2$ : их зависимость от времени обусловлена исключительно наличием затухания.

Из структуры (12.8) видно, что при равных  $v_j$  эта система интегрируется непосредственно. Но при различных  $v_j$  для ее решения требуется знать  $n_0$ . Оценка этого значения, полученная с помощью решения исходной системы на аналоговой вычислительной машине, показывает, что можно использовать решение вида

$$n_0 = (1/2) N_0(t) (1 \pm \cos \Omega t), \quad N_0(0) = M_2, \quad (12.9)$$

где вместо эллиптической функции фигурирует косинус (такая замена правомерна при  $k \ll 1$ ).

Для того чтобы  $\Gamma$  равнялось нулю при произвольной фазе  $\Phi(0)$ , необходимо положить  $n_0(0) = 0$  или  $n_1(0) = 0$ . Знак «плюс» в (12.9) соответствует  $n_1(0) \approx 0$ , знак «минус» —  $n_0(0) \approx 0$ . Численный анализ показывает, что характер затухания амплитуды  $n_0$  такой же, как у меньшей из амплитуд  $n_1$  и  $n_2$ . Предположим для определенности, что начальное значение  $n_2$  больше  $n_1$ . Тогда  $n_0$  будет следовать за  $n_1$  на протяжении всего времени взаимодействия при том, однако, условии, что волна  $n_2$  обладает меньшим затуханием, чем волна  $n_1$ . Если же имеет место обратное, то синхронность  $n_0$  с  $n_1$  возникает лишь по истечении некоторого переходного времени  $t_0$ , когда амплитуда  $n_2$  станет меньше  $n_1$ . Эти результаты численного анализа дают основание положить

$$N_0(t) = \begin{cases} M_2 \exp [-(v_0 + v_1) t], & 0 \leq t \leq t_0; \\ M_{2a} \exp [-(v_0 + v_2) t], & t \geq 0, \end{cases} \quad (12.10)$$

где  $M_{2a} = M_2 \exp [(v_2 - v_1) t_0]$ .

Подставляя (12.9) в (12.8) и интегрируя результирующую систему, получим следующие решения:

1)  $t \leq t_0$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} m_1(t) &= \left( M_1 - \frac{M_2}{1 + \alpha} \right) \exp(-2v_2 t) + \\ &+ \frac{M_2}{1 + \alpha} \exp [-(v_0 + v_1) t] + f_1(t); \\ m_2(t) &= M_2 \exp [-(v_0 + v_1) t] + f_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

где  $\alpha = (v_1 - v_2)/(v_0 - v_2)$ ;

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \pm [(v_2 - v_0)/(\Omega^2 + 4v_2^2)^{1/2}] N_0(t) \sin(\Omega t); \\ f_2 &= \pm [(v_1 - v_0)/(\Omega^2 + 4v_1^2)^{1/2}] N_0(t) \sin(\Omega t); \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

2)  $t > t_0$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} m_1(t) &= M_{2a} \exp[-(v_0 + v_2)t] + f_1(t); \\ m_2(t) &= \frac{M_{2a}}{1 + \beta} \exp[-(v_0 + v_2)t] + \frac{\beta M_{2b}}{1 + \beta} \exp(-2v_1 t) + f_2(t), \end{aligned} \right\} (12.13)$$

где  $\beta = (v_2 - v_1)/(v_0 - v_1)$ ;  $M_{2b} = M_2 \exp[(v_1 - v_0)t_0]$ .

В дальнейшем будем считать, что

$$|v_{1,2} - v_0| \ll \Omega. \quad (12.14)$$

При этом условии вкладом величин  $f_{1,2}$  в  $m_1$  и  $m_2$  можно пренебречь, так как  $|f_{1,2}(t)| \ll N_0(t)$ . Для получения искомого приближенного решения остается подставить  $m_1$  и  $m_2$  в (12.6) вместо постоянных  $M_1$  и  $M_2$ , что дает

$$\left. \begin{aligned} n_0(t) &= n_{01} \operatorname{sn}^2 [n_{02}' t, (n_{01}/n_{02})^{1/2}]; \\ n_1(t) &= m_2(t) - n_0(t); \\ n_2(t) &= m_1(t) - n_0(t). \end{aligned} \right\} (12.15)$$

Здесь  $n_{01}$  и  $n_{02}$  ( $n_{01} < n_{02}$ ) — корни уравнения

$$(m_1 - n_0)(m_2 - n_0) = 0, \quad (12.16)$$

т. е.

$$n_{01} = \begin{cases} m_2, & t \leq t_0; \\ m_1, & t > t_0, \end{cases}$$

или с учетом (12.11) и (12.13)

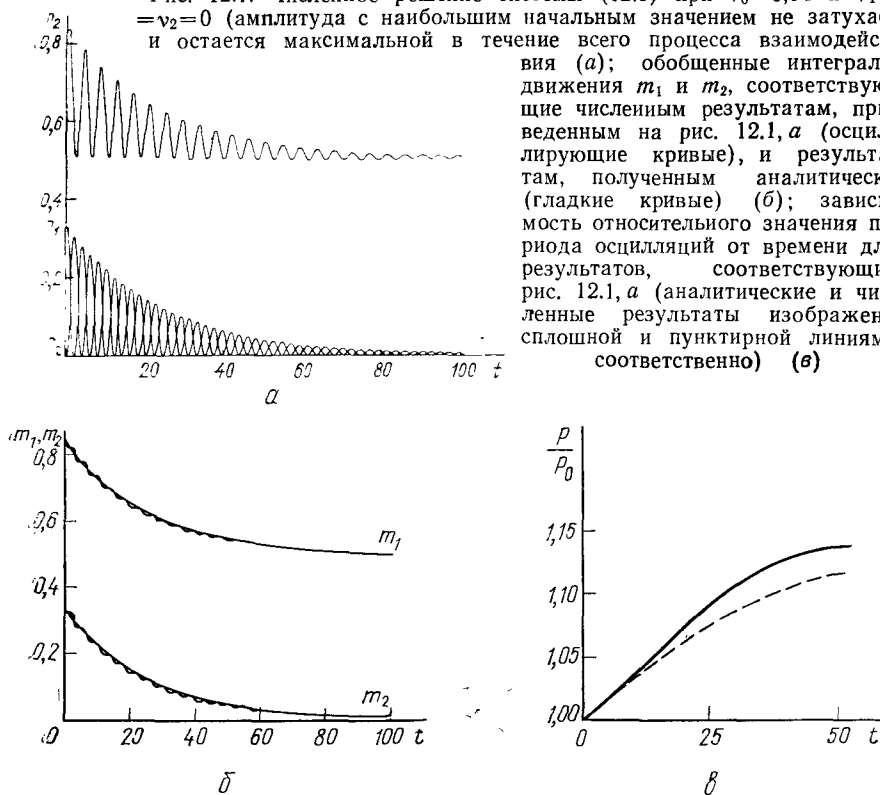
$$n_{01} = \begin{cases} M_2 \exp[-(v_0 + v_1)t], & t \leq t_0; \\ M_{2a} \exp[-(v_0 + v_2)t], & t \geq t_0. \end{cases}$$

Таким образом, получена огибающая  $n_0(t)$  в полном соответствии с результатами машинного эксперимента.

Напомним, что замена эллиптической функции косинусом в (12.6) допустима, строго говоря, лишь при условии  $k = (n_{01}/n_{02})^{1/2} \ll 1$ . Но при  $t = t_0$  мы имеем  $m_1 = m_2$  и, следовательно,  $k = 1$ . Это указывает на неправомерность гармонической аппроксимации в окрестности  $t = t_0$ .

На рис. 12.1, а показано решение для  $t_0 = 0$ . В процессе взаимодействия  $n_2$  выходит на некоторый постоянный уровень, тогда как  $n_0$  и  $n_1$  затухают, причем характер затухания обеих амплитуд одинаков, несмотря на то, что  $v_1 = 0$ . Рисунок 12.2, а соответствует случаю, когда затухание отсутствует только у волны  $n_2$ . Тогда время перехода отлично от нуля,  $n_0$  и  $n_2$  затухают, а  $n_1$  выходит на постоянный ненулевой уровень. На рис. 12.1, б и 12.2, б данные численных расчетов  $m_1$  и  $m_2$  сравниваются с аналитическими результатами. Как и следовало ожидать, расхождение между

Рис. 12.1. Численное решение системы (12.1) при  $v_0=0,04$  и  $v_1=v_2=0$  (амплитуда с наибольшим начальным значением не затухает и остается максимальной в течение всего процесса взаимодействия (а); обобщенные интегралы движения  $m_1$  и  $m_2$ , соответствующие численным результатам, приведенным на рис. 12.1, а (осциллирующие кривые), и результатам, полученным аналитически (гладкие кривые) (б); зависимость относительного значения периода осцилляций от времени для результатов, соответствующих рис. 12.1, а (аналитические и численные результаты изображены сплошной и пунктирной линиями соответственно) (в))



аналитическими и точными результатами для  $m_1$  увеличивается в окрестности  $t_0$ .

### Решение для одной затухающей волны

Другой подход к проблеме учета затухания при трехволновом взаимодействии предложен в работе [2] в связи с рассмотрением частного случая одной затухающей волны. К нему приводит идеализация довольно обычной ситуации, когда волна с наименьшей частотой затухает значительно сильнее остальных волн. Предполагается, что  $\Gamma=0$ , т. е.  $\sin \Phi=0$ , и используется такая нормировка, при которой исходная система уравнений имеет вид

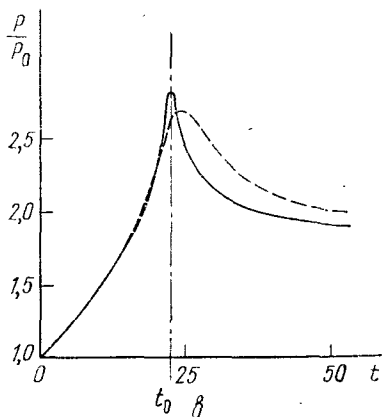
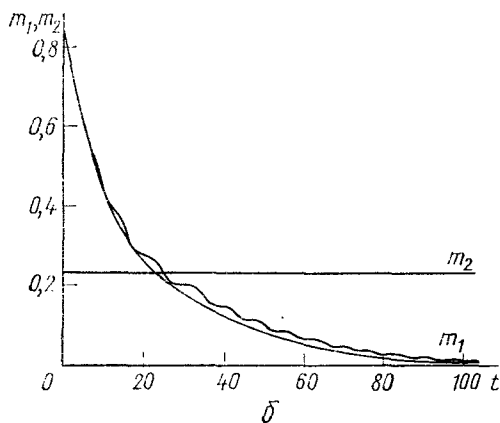
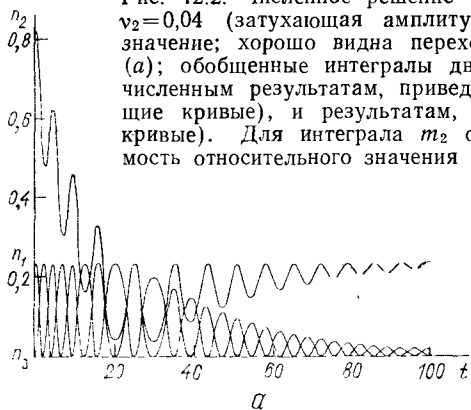
$$du_0/dt = -u_1u_2; \quad (12.17a)$$

$$du_1/dt = u_0u_2; \quad (12.17б)$$

$$du_2/dt + \rho u_2 = u_0u_1. \quad (12.17в)$$



Рис. 12.2. Численное решение системы (12.1) при  $v_0=v_1=0$  и  $v_2=0,04$  (затухающая амплитуда  $n_2$  имеет максимальное начальное значение; хорошо видна переходная область, в которой  $n_2 \approx n_1$ ) (а); обобщенные интегралы движения  $m_1$  и  $m_2$ , соответствующие численным результатам, приведенным на рис. 12.2, а (осциллирующие кривые), и результатам, полученным аналитически (гладкие кривые). Для интеграла  $m_2$  обе кривые совпадают (б); зависимость относительного значения периода осцилляций от времени для результатов, соответствующих рис. 12.2, а (аналитические и численные результаты показаны сплошной и пунктирной линиями соответственно). При  $m_1=m_2$  аналитическое значение периода обращается в бесконечность (в)



Сумма  $u_0^2 + u_1^2$  по-прежнему является интегралом движения, причем в силу выбранной нормировки  $u_0^2 + u_1^2 = 1$ . Поэтому можно ввести функцию  $\psi(t)$ , такую, что

$$u_0 = \sin \psi; \quad u_1 = \cos \psi. \quad (12.18)$$

Тогда при

$$u_2 = -\partial\psi/\partial t \quad (12.19)$$

(12.17а) и (12.17б) выполняются автоматически, а уравнение (12.17в) можно переписать в виде

$$\partial^2 y/\partial t^2 + \rho \partial y/\partial t + \sin y = 0, \quad (12.20)$$

где  $y=2\psi$ . Полагая  $u_2(0)=0$ , получаем начальные условия для (12.20):

$$y(0) = 2 \arcsin u_0(0); \quad \partial y(0)/\partial t = 0. \quad (12.21)$$

Уравнение (12.20) есть не что иное, как уравнение нелинейных колебаний маятника с затуханием, и поэтому его решение

не выражается в известных функциях. Но при  $\rho=0$  решение этого уравнения имеет хорошо известный вид

$$y = 2 \arcsin [k \operatorname{sn}(t + \phi, k)], \quad (12.22)$$

с помощью которого находим

$$u_2 = -(1/2) \partial y / \partial t = -k \operatorname{cn}(t + \phi, k).$$

Выберем начальные условия так, чтобы  $u_2(0)$  равнялось нулю и амплитуда  $u_2$  на начальной стадии процесса увеличивалась. При таком выборе  $\phi = K(k)$  и окончательное решение для незатухающих колебаний приобретает вид

$$u_0 = k \operatorname{sn}(t + K, k); \quad u_1 = \operatorname{dn}(t + K, k); \quad u_2 = -k \operatorname{cn}(t + K, k). \quad (12.23)$$

В силу (12.23) амплитуды  $u_j$  подчиняются соотношениям  $u_0^2 + u_1^2 = 1$ ;  $u_0^2 + u_2^2 = k^2$ ,  $u_0(0) = k$ . Если  $k$  мало, т. е.  $u_0(0) \ll u_1(0)$ , то получаем приближение слабой нелинейности. В этом случае эллиптические функции можно заменить тригонометрическими.

Если же  $k$  не мало, то процесс взаимодействия на начальной стадии имеет сильнонелинейный характер. Однако оказывается, что при учете затухания такой процесс постепенно выйдет на слабонелинейный режим. Более того [3], при  $\rho < 2$  амплитуда  $y$  будет совершать затухающие колебания, а при  $\rho > 2$  — монотонно уменьшаться до нуля. Наличие такого предельного значения  $\rho$  следует сравнить с достаточным условием для осуществления направленного переноса энергии, найденным в работе [4] на основе более общего рассмотрения.

В слабонелинейном приближении уравнение (12.20) упрощается:

$$\partial^2 y / \partial t^2 + \rho \partial y / \partial t + y = 0. \quad (12.24)$$

Это уравнение имеет следующие точные решения:

$\rho < 2$ , тогда

$$y = y_0 \exp(-\rho t/2) [\cos(\delta t/2) + (\rho/\delta) \sin(\delta t/2)]; \quad (12.25)$$

$$u_2 = (y_0/\delta) \exp(-\rho t/2) \sin(\delta t/2),$$

где  $\delta = (4 - \rho^2)^{1/2}$ ;

$\rho = 2$ , тогда

$$y = y_0 (1 + t) \exp(-t); \quad (12.26)$$

$$u_2 = (y_0/2) \exp(-t);$$

$\rho > 2$ , тогда

$$y = y_0 \exp(-\rho t/2) [\operatorname{ch}(\Delta t/2) + (\rho/\Delta) \operatorname{sh}(\Delta t/2)]; \quad (12.27)$$

$$u_2 = (y_0/\Delta) \exp(-\rho t/2) \operatorname{sh}(\Delta t/2),$$

где  $\Delta = (\rho^2 - 4)^{1/2}$ .

Учитывая вид решений уравнения (12.20) при слабой нелинейности и отсутствии затухания, можно получить решения этого уравнения при  $\rho \ll 2$ :

$$u_0 = m \operatorname{sn}(t + K, m); \quad u_1 = \operatorname{dn}(t + K, m); \quad u_2 = -m \operatorname{cn}(t + K, m), \quad (12.28)$$

где  $m = u_0(0) \exp(-\rho t/2)$ .

Обратим внимание на то, что это решение представляет собой частный случай (12.15). Кроме того, оно имеет тот же вид, что и решение, полученное в [5] методом Боголюбова—Крылова.

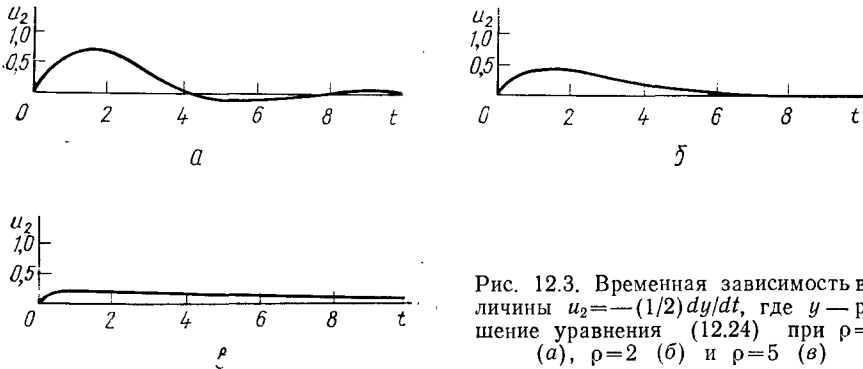


Рис. 12.3. Временная зависимость величины  $u_2 = -(1/2) dy/dt$ , где  $y$  — решение уравнения (12.24) при  $\rho=1$  (а),  $\rho=2$  (б) и  $\rho=5$  (в)

Наоборот, при сильном затухании, т. е. при  $\rho \gg 2$ , можно воспользоваться разложением по степеням  $1/\rho$ , с помощью которого исходное уравнение (12.20) преобразуется к виду

$$\partial y / \partial t = -(1/\rho) \sin y - (1/\rho^2) (\partial y / \partial t) \cos y, \quad (12.29)$$

а на основе этого уравнения можно уже получить следующие выражения для амплитуд:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= f/(1+f^2)^{1/2}; & u_1 &= f/(1+f^2)^{1/2}; \\ u_2 &= [1 - \exp(-\rho t)] f/\rho(1+f^2), \end{aligned} \right\} \quad (12.30)$$

где

$$f = [u_0(0)/u_1(0)] \exp(-t/\rho).$$

Интересно отметить, что релаксация к асимптотическому состоянию происходит как при  $\rho \ll 2$ , так и при  $\rho \gg 2$  медленнее, чем при  $\rho=2$ . Увеличение времени релаксации при  $\rho \gg 2$  объясняется тем, что из-за малости амплитуды  $u_2$  нелинейное взаимодействие при этом неэффективно. Решение для сильно затухающей волны рассмотрено также в [6].

Временные зависимости амплитуды  $u_2$ , полученные в результате численного интегрирования уравнения (12.20), приведены на рис. 12.3, а—в.

Пусть теперь  $\Gamma \neq 0$ . Отличительной особенностью этого примера является положительная определенность амплитуд  $u_j$ . В этом

можно убедиться, рассматривая потенциал  $\pi(x)$  или обобщая уравнение (12.20) на случай  $\Gamma \neq 0$ :

$$\partial^2 y / \partial t^2 + \rho \partial y / \partial t + \sin y = 16\Gamma^2 \exp(-2\rho t) \cos y / \sin^3 y. \quad (12.31)$$

При получении этого уравнения, как и ранее, использовались определения (12.18) и  $y=2\psi$ . Тем не менее

$$\partial \psi / \partial t = -u_2 \cos \Phi \quad (12.32)$$

и интеграл движения имеет вид

$$\Gamma = -(1/4) \sin y (\partial y / \partial t) \operatorname{tg} \Phi \exp(\rho t). \quad (12.33)$$

Из (12.31) видно, что при стремлении  $y$  к нулю резко увеличивается  $\partial^2 y / \partial t^2$  и в итоге  $y$  снова начинает возрастать. Результаты численного интегрирования уравнения (12.31) при  $y(0)=1,6$ ,  $\partial y(0) / \partial t=0,2$ ,  $\Phi(0)=0,8$  и  $\Gamma=-0,05$  показаны на рис. 12.4, а, б.

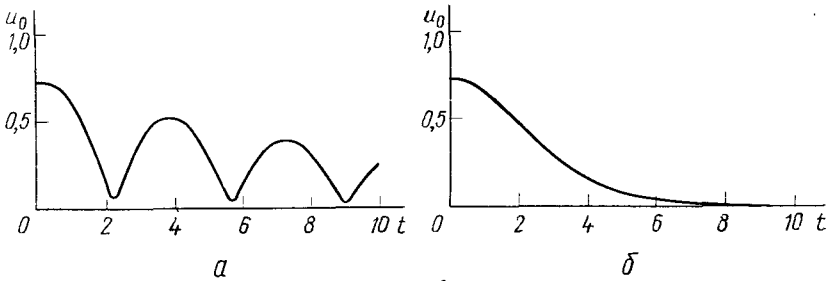


Рис. 12.4. Временная зависимость величины  $u_0 = \sin(y/2)$ , где  $y$  — решение уравнения (12.31) при  $\Gamma = -0,05$ ,  $\rho = 0,2$  (а) и  $\rho = 2$  (б)

Следует обратить внимание на отличие от нуля минимумов на рис. 12.4, а и аperiodический характер зависимости амплитуды  $u_0$  при  $\rho = 2$  (см. рис. 12,4, б).

Отметим в заключение возможность обобщения полученных результатов на случай, когда две волны ( $u_0$  и  $u_2$ ) затухают одинаково ( $v_1 = v_2 = v$ ). Введем подстановки  $n_0 = u_0 \exp(vt)$ ,  $u_1 = u_1 \exp(vt)$  и, как и прежде, положим  $n_0 = \sin \psi$ ,  $n_1 = \cos \psi$ ,  $u_2 = -\partial \psi / \partial t$  и  $y = 2\psi$ . В результате вместо (12.20) получим

$$\partial^2 y / \partial t^2 + \rho \partial y / \partial t + \exp(-2vt) \sin y = 0. \quad (12.34)$$

Наличие экспоненциального множителя в последнем слагаемом приводит к усложнению анализа в области промежуточных времен. Однако при больших  $t$  этим слагаемым можно пренебречь. При  $\Gamma \neq 0$  правая часть (12.34) приобретает тот же вид, что и в (12.31).

## Задачи

12.1. Объяснить на основании результатов теории нелинейного маятника существование двух незатухающих волн на начальной стадии процесса, а также существование времени перехода для случая, показанного на рис. 11.2, *a*, когда волна с положительным коэффициентом связи первоначально сильно возбуждена по сравнению с остальными волнами.

12.2. Установить вид движения нелинейного маятника, отвечающий эволюционной картине, которая изображена на рис. 2.3. Как изменится этот вид, если ввести затухание волны? Что произойдет, если наряду с этим считать затухающими также волны  $\theta$  и  $1$ , причем коэффициенты затухания равны? Рассмотреть отдельно случаи, когда эти волны затухают сильнее, слабее волны  $2$  и так же, как волна  $2$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sävenstedt T., Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1975, v. 11, p. 304.
2. Fuchs V., Beaudry G. — J. Math. Phys., 1975, v. 16, p. 616.
3. Minorsky N. Nonlinear Oscillations. Princeton, Van Nostrand, 1962.
4. Wang P. K. C. — J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 911.
5. Cap F. F. Rep. X-640-71-396 NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, 1971.
6. Tang C. L. — J. Appl. Phys., 1966, v. 37, p. 2945.

## ГЛАВА 13

### ВЗРЫВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ДВУХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ТРЕХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

Три связанные волны образуют систему низшего порядка по нелинейному взаимодействию. В общем случае одна или несколько волн трехволновой системы могут быть связаны с другими волнами в плазме, что приводит к возникновению многоволновой системы взаимодействующих волн. Например, две резонансные трехволновые системы являются взаимно связанными, если они имеют одну общую волну. Подобная связь может реализоваться, в частности, при наличии трех продольных и двух поперечных волн, что и рассматривается в этой главе. При определенных ограничениях на начальные условия систему связанных уравнений удастся проинтегрировать, используя метод нелинейного потенциала. Допускается наличие в рассматриваемой системе источников свободной энергии (например, молекул с инверсной населенностью [1—5]), так что поперечные волны также могут переносить отрицательную энергию, а это, в свою очередь, может усиливать излучение в оптическом и микроволновом диапазонах.

### Уравнения движения

Рассмотрим две подсистемы, одна из которых содержит три продольные волны, а другая — две поперечные и одну продольную волны. Предположим, что связь между подсистемами осуще-

ствляется через общую продольную волну. Тогда резонансные условия имеют вид

$$k_{0L} = k_{1L} + k_{2L}; \quad k_{0T} = k_{1T} + k_{2L}. \quad (13.1)$$

Частоты взаимодействующих волн удовлетворяют аналогичным соотношениям. Используя подходящую нормировку, запишем уравнения движения следующим образом:

$$\partial u_{0L}/\partial t = u_{1L}u_{2L} \cos \Phi_I; \quad (13.2a)$$

$$\partial u_{1L}/\partial t = u_{0L}u_{2L} \cos \Phi_I; \quad (13.2б)$$

$$\partial u_{2L}/\partial t = u_{0L}u_{1L} \cos \Phi_I + \Lambda u_{0T}u_{1T} \cos \Phi_{II}; \quad (13.2в)$$

$$\partial u_{0T}/\partial t = \Lambda u_{1T}u_{2L} \cos \Phi_{II}; \quad (13.2г)$$

$$\partial u_{1T}/\partial t = \Lambda u_{0T}u_{2L} \cos \Phi_{II}; \quad (13.2д)$$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial t} = - \left( \frac{u_{1L}u_{2L}}{u_{0L}} + \frac{u_{0L}u_{2L}}{u_{1L}} + \frac{u_{0L}u_{1T}}{u_{2L}} \right) \sin \Phi_I - \Lambda \frac{u_{0T}u_{1T}}{u_{2L}} \sin \Phi_{II}; \quad (13.2e)$$

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial t} = - \Lambda \left( \frac{u_{1T}u_{2L}}{u_{0T}} + \frac{u_{0T}u_{1L}}{u_{1T}} + \frac{u_{0L}u_{1T}}{u_{2L}} \right) \sin \Phi_{II} - \frac{u_{0L}u_{1L}}{u_{2L}} \sin \Phi_I, \quad (13.2ж)$$

где

$$\Phi_I = \Phi_{0L} - \Phi_{1L} - \Phi_{2L}; \quad \Phi_{II} = \Phi_{0T} - \Phi_{1T} - \Phi_{2L}. \quad (13.3)$$

Отметим, что для двух трехволновых подсистем амплитуды не удастся нормировать так, чтобы все коэффициенты связи были равны единице: остается в общем случае отличный от единицы коэффициент  $\Lambda$ , который служит мерой связи между подсистемами.

### Интегралы движения и аналитические решения системы связанных уравнений

Система (13.2) имеет следующие интегралы движения:

$$\left. \begin{aligned} u_{0L}^2 - u_{1L}^2 &= M_1; \\ u_{0T}^2 - u_{1T}^2 &= M_2; \\ u_{2L}^2 - u_{1T}^2 - u_{1L}^2 &= M_3; \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

$$u_{0L}u_{1L}u_{2L} \sin \Phi_I + \Lambda u_{0T}u_{1T}u_{2L} \sin \Phi_{II} = \Gamma. \quad (13.5)$$

Аналитическое решение системы (13.2) удастся получить для  $\Gamma=0$ . При этом имеет место еще один интеграл движения

$$u_{0T}u_{1T} \sin \Phi_{II} = \Gamma_1, \quad (13.6)$$

в чем нетрудно убедиться на основе уравнений (13.2г), (13.2д), (13.2, ж), (13.5).

Выразив  $\cos \Phi_I$  и  $\cos \Phi_{II}$  через амплитуды и  $\Gamma_1$ , перепишем уравнения (13.2а) и (13.2г) в виде

$$\partial u_{0L}^2 / \partial t = 2u_{2L} (u_{0L}^2 u_{1L}^2 - \Lambda^2 \Gamma_1)^{1/2}; \quad (13.7а)$$

$$\partial u_{0T}^2 / \partial t = 2\Lambda u_{2L} (u_{0T}^2 u_{1T}^2 - \Gamma_1)^{1/2}. \quad (13.7б)$$

Наконец, введя обозначения  $x = u_{0L}^2$ ,  $y = u_{0T}^2$  и используя (13.4), получим уравнение

$$dy/dx = \Lambda [y(y - M_2) - \Gamma_1^2]^{1/2} / [x(x - M_1) - \Lambda^2 \Gamma_1^2]^{1/2}. \quad (13.8)$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными, и его интегрирование позволяет найти  $y$  как функцию  $x$ . Для простоты положим  $M_2 = 0$ . Тогда

$$y = \left[ \left( \frac{A^2 G^2(x) - \Gamma_1^2}{2AG(x)} \right)^2 + \Gamma_1^2 \right]^{1/2} = D(x), \quad (13.9)$$

где

$$G(x) = [2(x^2 - M_1 x - \Lambda^2 \Gamma_1^2)^{1/2} + 2x - M_1]^\Lambda; \quad (13.10)$$

$$A = \frac{y_0 + (y_0^2 - \Gamma_1^2)^{1/2}}{[2(x_0^2 - M_1 x_0 - \Lambda^2 \Gamma_1^2)^{1/2} + 2x_0 - M_1]^\Lambda}; \quad (13.11)$$

$$x_0 = x(0), \quad y_0 = y(0).$$

Теперь (13.7а) можно представить в виде

$$dx/dt = 2u_{2L} (x^2 - M_1 x - \Lambda^2 \Gamma_1^2)^{1/2}. \quad (13.12)$$

Учитывая еще, что

$$u_{2L} = [x + D(x) + M_3 - M_1]^{1/2}, \quad (13.13)$$

приходим к уравнению

$$(1/2) (dx/dt)^2 + \pi(x) = 0, \quad (13.14)$$

где

$$\pi(x) = -2[x + D(x) + M_3 - M_1](x^2 - M_1 x - \Lambda^2 \Gamma_1^2). \quad (13.15)$$

Переменные в этом уравнении также разделяются, что позволяет записать его точное решение:

$$t = \int_{x(0)}^x \frac{dx}{\sqrt{-2\pi(x)}}. \quad (13.16)$$

При надлежащем выборе  $\Lambda$  и  $\Gamma_1$  можно аппроксимировать  $\pi(x)$  полиномом третьей степени относительно  $x$ . Обозначая корни этого полинома  $x_1 > x_2 > x_3$ , получаем из (13.16)

$$x(t) = \frac{x_1 - x_3}{\operatorname{sn}^2[(x_1 - x_3)^{1/2} (t_\infty - t), K]} + x_3, \quad (13.17)$$

где

$$K = [(x_2 - x_3)/(x_1 - x_3)]^{1/2};$$

$$t_{\infty} = (x_1 - x_3)^{-1/2} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{(1 - K^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}; \quad (13.18)$$

$$\alpha_0 = \arcsin [(x_1 - x_3)/(x_0 - x_3)].$$

Остальные амплитуды, а также фазы  $\Phi_I$  и  $\Phi_{II}$  можно найти с помощью интегралов движения.

#### Задача

13.1. Рассмотреть случай трехволновой системы, в которой обе поперечные волны имеют положительную энергию, а продольная волна того же типа, что и волна, рассмотренная в гл. 13. Определить, какие волны неустойчивы в этом случае при выполнении резонансных условий (13.1). Может ли волна с отрицательной энергией играть роль волны накачки для поперечных волн?

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цытович В. Н. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1966, т. 51, с. 1385.
2. Wilhelmsson H., Pavlenko V. P. — Phys. Scripta, 1973, v. 7, p. 213.
3. Tsytovich V. N., Wilhelmsson H. — Ibid., p. 251.
4. Bonnedal M., Wilhelmsson H. — J. Plasma Phys., 1974, v. 12, p. 81.
5. Tsintsadze N. L., Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1975, v. 11, p. 316.

#### ГЛАВА 14

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И СТАБИЛИЗАЦИЯ ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Эта глава посвящена, главным образом, проблеме стабилизации взрывной неустойчивости за счет нелинейных эффектов третьего порядка. Исследуется влияние этих эффектов на устойчивые во втором приближении трехволновые системы. Подчеркнем с самого начала, что рассмотрение ограничено временной эволюцией. Не затрагиваются также вопросы совместного учета нелинейности и дисперсии.

Вначале обсуждается роль нелинейных эффектов третьего порядка, а затем дан формальный анализ, основанный на использовании обобщенных уравнений связанных волн. Этот анализ указывает на существование нелинейного сдвига частоты, при наличии которого динамика фаз претерпевает сильное изменение в области больших амплитуд взаимодействующих волн. Как видно из обобщенного интеграла движения (14.11), в этой области добавочное нелинейное слагаемое может компенсировать обычное. Тогда резко изменяется фаза и наступает насыщение. За точкой насыщения амплитуда быстро уменьшается: ее зависимость от времени весьма близка к зеркальному отражению кривой развития взрывной неустойчивости до насыщения.



Рассматриваемый эффект исследуется на простом примере системы трех волн с первоначально равными амплитудами. В этом случае получают аналитическое решение солитонного типа. Если же начальные значения амплитуд различны, то наблюдается интересный эффект периодического повторения пиков насыщения (взрывов).

Обобщен также метод нелинейного потенциала, изложенный в гл. 9, и детально исследованы свойства новой потенциальной функции, которая представляет собой полином четвертой степени относительно квадратов амплитуд. В отсутствие затухания уравнение для нелинейного потенциала решено как при одинаковых, так и при различных знаках энергий взаимодействующих волн.

### **Общая характеристика взаимодействия волн при учете нелинейных эффектов третьего порядка**

Второе приближение теории нелинейного взаимодействия волн, которое использовалось в предыдущих главах, обычно является достаточным для описания энергообмена между волнами различных типов при условии, что знаки энергий этих волн совпадают. Можно ожидать, однако, что эффекты третьего порядка окажут существенное влияние на процесс нелинейного взаимодействия при взрывной неустойчивости, поскольку в этом случае амплитуды неограниченно увеличиваются. То же следует сказать о плазме, находящейся под воздействием сильных внешних полей (как, например, при лазерном облучении мишеней).

Анализ, проведенный в гл. 3, можно уточнить, включив в рассмотрение осциллирующие части амплитуд, обусловленные наличием нерезонансных слагаемых. Комбинация этих амплитуд с нерезонансными слагаемыми приводит к резонансам высшего порядка. Однако окончательные уравнения проще получить, формулируя задачу в терминах нелинейных токов (см. гл. 5). При учете нелинейных токов третьего порядка эти уравнения будут содержать произведения амплитуд трех электрических полей, а это означает, что коэффициент связи третьего порядка выразится через проводимость третьего порядка. Такая процедура выглядит чисто математической и в каждой конкретной физической задаче требуется расчет проводимости с учетом всех существенных для нее физических процессов.

Как будет показано ниже, учет эффектов третьего порядка обычно приводит к стабилизации взрывной неустойчивости без каких-либо дополнительных условий, тогда как для стабилизации за счет линейного затухания необходимо превышение некоторого порогового значения.

Проблема стабилизации взрывной неустойчивости интенсивно исследовалась в последние годы. В работе [1] развита теория нелинейного сдвига частоты и в результате найдено предельное значение амплитуды для системы трех продольных волн, распростра-

няющихся перпендикулярно внешнему магнитному полю. Несколько позднее [2] был предложен механизм стабилизации желобковой неустойчивости в зеркальных ловушках, который сводится к появлению сдвига мнимой части частоты при резонансном уширении из-за случайного движения частиц поперек магнитного поля. Такой механизм может быть эффективным только для волн со случайными фазами. В 1970 г. была предсказана возможность стабилизации взрывной неустойчивости на основе рассмотрения гамильтониана для трехволновой системы с учетом нелинейного сдвига частоты [3]. В работе [4] представлены результаты численного эксперимента по взаимодействию трех циклотронных волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю. Эти результаты (в частности, зависимость энергии от комбинированной фазы  $\Phi$ ) хорошо согласуются с выводами теории, в которой учитывается нелинейный сдвиг частоты. Было показано также, что стабилизация наступает при электрических полях, значительно возмущающих орбиты частиц.

Подробный анализ связанных уравнений, описывающих взрывную неустойчивость при учете нелинейного сдвига частоты, проведен в работах [5]. В первой из них получено решение солитонного типа, а во второй — решение типа повторяющихся взрывов (последнее имеет место при более общих начальных условиях и выражается через эллиптические функции). В дальнейшем это исследование было продолжено в направлении учета линейного затухания и мнимой части нелинейного сдвига частоты. В работах [6, 7] содержатся результаты численного решения общей системы нелинейных уравнений, записанных с точностью до членов третьего порядка малости включительно, а также некоторые аналитические результаты, относящиеся к учету линейного затухания и исследованию асимптотического поведения.

В 1973 г. на основе рассмотрения пространственно-временной эволюции системы трех взаимодействующих волновых пакетов было показано [8], что неустойчивость взрывного типа может приводить к локальным «коллапсам», т. е. к сингулярностям поля волны. В этом случае нелинейный сдвиг частоты недостаточен для стабилизации неустойчивости. Амплитуды, однако, могут ограничиваться за счет эффекта нелинейного затухания.

Несколько иной подход к проблеме стабилизации взрывной неустойчивости развит в работе [9], где рассмотрена система с источником свободной энергии в виде потока частиц и при этом учтено влияние волн на распределение частиц. Увеличение амплитуды приводит к уширению распределения частиц и уменьшению свободной энергии. В конечном счете наступает стабилизация неустойчивости из-за изменения диэлектрических свойств плазмы. Аналогичное исследование для волн со случайными фазами проведено в работе [10].

В [11] рассчитаны максимальные значения амплитуд при учете нелинейного сдвига частоты в плазменно-пучковой системе с двумя плазменными и одной ионно-звуковой волной.

## Вывод связанных уравнений с учетом нелинейных токов третьего порядка

При получении связанных уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие в третьем приближении, будем исходить из формулировки теории, приведенной в гл. 5. Учитывая нелинейный ток с точностью до членов третьего порядка включительно, записываем

$$D_j(\omega, \mathbf{k}) \bar{E}_j = i\bar{J}_j^{(2)} + i\bar{J}_j^{(3)}. \quad (14.1)$$

Положим  $\omega = \omega_j - i(v_j + \partial/\partial t)$  и разложим левую часть в окрестности  $\omega = \omega_j$ :

$$(\partial D_j / \partial \omega_j) (\partial \bar{E}_j / \partial t + v_j \bar{E}_j) = -\bar{J}_j^{(2)} - \bar{J}_j^{(3)}. \quad (14.2)$$

Здесь  $v_j$  соответствует мнимой части частоты и не зависит от взаимодействия волн, а нелинейные токи имеют ту же пространственную зависимость и почти ту же временную зависимость, что и амплитуды  $E_j$ . Следовательно,

$$\bar{J}_j^{(2)} = \sum_{(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_k = \mathbf{k}_j)} \sigma_{ij} \bar{E}_i \bar{E}_k \quad (14.3)$$

и

$$\bar{J}_j^{(3)} = \sum_{(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_k + \mathbf{k}_l = \mathbf{k}_j)} \sigma_{ihl} \bar{E}_i \bar{E}_k \bar{E}_l. \quad (14.4)$$

Вклад токов третьего порядка отвечает учету четырехволнового взаимодействия. Но так как в нашем распоряжении имеются только три волны, две из четырех волн должны совпадать. Легко показать, что резонансное условие  $\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_k + \mathbf{k}_l = \mathbf{k}_j$  удовлетворяется, если поля двух из волн  $i, k, l$  комплексно-сопряженные, а  $\mathbf{k}_j$  — волновой вектор третьей волны. При этом

$$J_j^{(3)} = E_j \sum_k \sigma_{-kkj} \bar{E}_k \bar{E}_k^*, \quad k = 0, 1, 2. \quad (14.5)$$

Соотношений (14.2) и (14.5) достаточно для вывода связанных уравнений с учетом нелинейных величин третьего порядка. В качестве амплитуды  $\bar{E}$  можно взять любую полевую величину или нормальное колебание. Ниже будет использовано представление нормальных колебаний. Учитывая, что проводимость может быть мнимой даже в бесстолкновительной плазме, сохраним мнимую единицу  $i$  при записи добавочной части коэффициента связи. Результирующая система нелинейных уравнений принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_0}{\partial t} + v_0 A_0 &= c_{12}^* A_1 A_2 - i A_0 \sum_{k=2}^2 \alpha_{0k} |A_k|^2; \\ \frac{\partial A_1}{\partial t} + v_1 A_1 &= c_{02} A_0 A_2^* - i A_1 \sum_{k=0}^2 \alpha_{1k} |A_k|^2; \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} + v_2 A_2 &= c_{01} A_0 A_1^* - i A_2 \sum_{k=0}^2 \alpha_{2k} |A_k|^2. \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

Нелинейные слагаемые третьего порядка в этой системе вносят зависящий от амплитуд сдвиг частоты, причем он может быть как вещественным, так и комплексным. Введем величины

$$\begin{aligned}c_{kl} &= |c_{kl}| \exp(i\theta_{kl}) \equiv v_{kl} \exp(i\theta_{kl}); \\A_j &= |A_j| \exp(i\phi_j) \equiv u_j \exp(i\phi_j); \\ \Phi &= \phi_0 - \phi_1 - \phi_2\end{aligned}$$

и перепишем (14.6):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_j}{\partial t} + v_j u_j - u_j \sum_{k=0}^2 \text{Im} \alpha_{jk} u_k^2 &= v_{kl} u_k u_l \cos(\Phi_{kl} + \theta_{kl}); \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \sum_{k=0}^2 \text{Re} \alpha_{jk} u_k^2 &= \mp v_{kl} \frac{u_k u_l}{u_j} \sin \Phi_{(kl) + \theta_{kl}}.\end{aligned}$$

Знак «минус» во втором уравнении отвечает волне 0, знак «плюс» — волнам 1 и 2.

Удобно еще раз переписать эту систему, используя обозначения

$$\left. \begin{aligned}\beta_j &= \text{Re} \alpha_{j0} - \text{Re} \alpha_{j1} - \text{Re} \alpha_{j2}; \\ \delta\omega &= \sum_{k=0}^2 \beta_k u_k^2; \quad \delta v_j = - \sum_{k=0}^2 \text{Im} \alpha_{jk} u_k^2.\end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

В результате получим:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + (v_0 + \delta v_0) u_0 = v_{12} u_1 u_2 \cos(\Phi + \theta_{12}); \quad (14.8a)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (v_1 + \delta v_1) u_1 = v_{02} u_0 u_2 \cos(\Phi + \theta_{02}); \quad (14.8b)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (v_2 + \delta v_2) u_2 = v_{01} u_0 u_1 \cos(\Phi + \theta_{01}); \quad (14.8b)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \delta\omega &= -v_{12} \frac{u_1 u_2}{u_0} \sin(\Phi + \theta_{12}) - v_{02} \frac{u_0 u_2}{u_1} \sin(\Phi + \theta_{02}) - \\ &- v_{01} \frac{u_0 u_1}{u_2} \sin(\Phi + \theta_{02}).\end{aligned} \quad (14.8r)$$

Несмотря на то что эта система выведена в предположении точного согласования частот ( $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ ), уравнение (14.8r) выглядит так же, как при рассогласовании частот (из-за наличия  $\delta\omega$ ). Именно поэтому величине  $\delta\omega$  следует придать смысл нелинейного сдвига частоты. В то же время  $\delta v_j$  играет в системе (14.8) роль мнимой части частоты и определяет поэтому эффективное нелинейное затухание.

Заметим, что используемый метод разложения по степеням напряженности поля можно применять, лишь если эффекты высших порядков пренебрежимо малы при умеренных значениях амплитуд. Поэтому должно выполняться условие  $\text{Re} \alpha_{jk}, \text{Im} \alpha_{jk} \ll v_{jk}$ .

## Решение для недиссипативной среды

Начнем с рассмотрения случая, когда можно пренебречь величинами  $v_j$  и  $\delta v_j$ . При этом  $\theta_{ij} \approx 0$ ,  $\pi$  и исходная система записывается в форме, аналогичной (7.5):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= s_{12} v_{12} u_1 u_2 \cos \Phi; \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} &= s_{02} v_{02} u_0 u_2 \cos \Phi; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= s_{01} v_{01} u_0 u_1 \cos \Phi; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \delta \omega &= - \left( s_{12} v_{12} \frac{u_1 u_2}{u_0} + s_{02} v_{02} \frac{u_0 u_2}{u_1} + s_{01} v_{01} \frac{u_0 u_1}{u_2} \right) \sin \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

где  $v_{ij} > 0$  и  $s_{ij}$  — знаковый множитель.

Соотношения Мэнли—Роу сохраняют вид (7.10), т. е.

$$\left. \begin{aligned} (s_{12}/v_{12}) u_0^2 - (s_{02}/v_{02}) u_1^2 &= M_{01}; \\ (s_{02}/v_{02}) u_1^2 - (s_{01}/v_{01}) u_2^2 &= M_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

но интеграл движения (7.11) изменяется следующим образом:

$$u_0 u_1 u_2 \sin \Phi + \frac{1}{4} \sum_k s_{ij} \frac{\beta_k}{v_{ij}} u_k^4 = \Gamma, \quad k = 0, 1, 2; \quad i, j \neq k. \quad (14.11)$$

Заметим, что слагаемое третьего порядка входит в это уравнение точно так же, как и рассогласование частоты в (7.11). Но это слагаемое более высокого порядка малости по амплитудам, чем произведение  $u_0 u_1 u_2 \sin \Phi$ , и, следовательно, его влияние существенно только при больших амплитудах.

Как и в гл. 9, сохраним знаковый множитель только для волны с максимальной частотой, т. е. положим  $s_{12} = s$ ,  $s_{02} = s_{01} = 1$ . Кроме того, используем нормировку (7.4), преобразуя тем самым коэффициенты связи второго порядка к единице. В результате получим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= s u_1 u_2 \cos \Phi; \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} &= u_0 u_2 \cos \Phi; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= u_0 u_1 \cos \Phi; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \delta \omega &= - \left( s \frac{u_1 u_2}{u_0} + \frac{u_0 u_2}{u_1} + \frac{u_0 u_1}{u_2} \right) \sin \Phi \end{aligned} \right\} \quad (14.12)$$

с интегралами движения

$$s u_0^2 - u_1^2 = M_{01}; \quad u_1^2 - u_2^2 = M_{12} \quad (14.13)$$

и  $(\beta_k/v_{ij} \rightarrow \beta_k)$

$$u_0 u_1 u_2 \sin \Phi + (1/4) (s \beta_0 u_0^4 + \beta_1 u_1^4 + \beta_2 u_2^4) = \Gamma. \quad (14.14)$$

**Решение солитонного типа.** Простейшее решение системы (14.12) имеет место при  $s=1$ ,  $M_{01}=M_{12}=\Gamma=0$ , что соответствует неустойчивой системе волн с равными амплитудами  $u_j = u$ . Такая

система описывается уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^2 \cos \Phi; \quad (14.15)$$

$$u^3 \sin \Phi + \gamma u^4 = 0, \quad (14.16)$$

где  $\gamma = (1/4)\Sigma\beta_j$ .

Подставляя (14.16) в (14.15), получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm u^2 \sqrt{1 - \gamma^2 u^2}, \quad (14.17)$$

из которого следует, что  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  при

$$u = 1/\gamma. \quad (14.18)$$

Выражение (14.18) определяет, очевидно, максимальное значение амплитуды. Решение уравнения (14.17) есть

$$u(t) = 1/\sqrt{\gamma^2 + (t_1 - t)^2}, \quad (14.19)$$

где

$$t_1 = u^{-1}(0) \sqrt{1 - \gamma^2 u^2(0)}. \quad (14.20)$$

В пределе  $\gamma \rightarrow 0$  (14.19) переходит в (9.18).

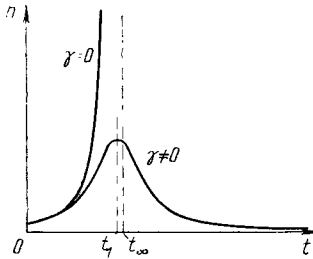


Рис. 14.1. Численное решение уравнения (14.19). При  $\gamma=0$  наблюдается неограниченный рост амплитуды, а при  $\gamma \neq 0$  реализуется решение солитонного типа ( $n=u^2$ )

Решение вида (14.19) представляет собой солитон с единственным максимумом, амплитуда которого стремится к нулю при больших  $t$  (рис. 14.1). Время достижения максимального значения амплитуды несколько меньше времени развития взрывной неустойчивости  $t_\infty = 1/u(0)$  при  $\gamma=0$ . Уменьшение амплитуды за точкой максимума соответствует коллапсу (аннигиляции) трех волн. Следует заметить, что такое поведение возможно и в случае  $\gamma=0$  при надлежащем выборе начальных условий. Необходимо, чтобы суммарная энергия волн в начальный момент была равна нулю (как раз это условие рассматривается в настоящем разделе). Кроме того, должно быть  $\Gamma=0$ , что означает равенство нулю энергии взаимодействия. Из этих рассуждений вытекает, что при иных начальных условиях (если амплитуды в начальный момент различны) возможно периодическое решение (рис. 14.2).

**Формулировка и решение задачи в рамках метода нелинейного потенциала.** Чтобы рассмотреть более общий, чем в предыдущем разделе, случай, введем величину

$$x(t) = s[u_0^2(t) - u_0^2(0)] = u_j^2(t) - u_j^2(0), \quad j = 1, 2.$$

Амплитуды  $u_j$  ( $j=1,2$ ) удовлетворяют уравнениям

$$\partial u_j^2 / \partial t = \pm 2 \sqrt{u_0^2 u_1^2 u_2^2 (1 - \sin^2 \Phi)}, \quad (14.21)$$

а интеграл движения (14.14) принимает вид

$$u_0 u_1 u_2 \sin \Phi = \Gamma' - \gamma x^2 - \delta x, \quad (14.22)$$

где  $\gamma = (1/4)(s\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)$ ;  $\delta = (1/2)\Sigma\beta_j u_j^2(0)$  и  $\Gamma' = \Gamma - (1/4) \times$

$$\times [s\beta_0 u_0^4(0) + \beta_1 u_1^4(0) + \beta_2 u_2^4(0)] = u_0(0) u_1(0) u_2(0) \sin \Phi(0).$$

Возведем (14.21) в квадрат и исключим  $\sin \Phi$  с помощью (14.22). Тогда получим

$$(1/2)(\partial x / \partial t)^2 + \pi(x) = 0. \quad (14.23)$$

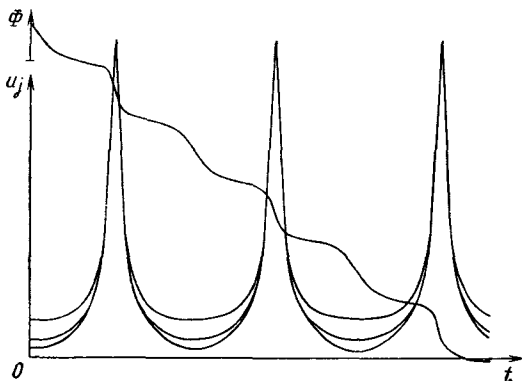


Рис. 14.2. Решение типа повторяющихся взрывов

По форме (14.23) совпадает с (9.8), но потенциал имеет иной вид:

$$\pi(x) = 2 \{ \gamma^2 x^4 - (s - 2\delta\gamma) x^3 - [u_0^2(0) + s u_1^2(0) + s u_2^2(0) + 2\gamma\Gamma' - \delta^2] x^2 - [s u_1^2(0) u_2^2(0) + u_0^2(0) u_2^2(0) + u_0^2(0) u_1^2(0) - 2\delta\Gamma'] x - \Gamma_1^2 \}, \quad (14.24)$$

где  $\Gamma_1 = u_0(0) u_1(0) u_2(0) \cos \Phi(0)$ . Перепишем (14.24) как

$$\pi(x) = \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad (14.25)$$

и учтем, что обычно  $\gamma, \delta \ll 1$ , так что

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 &\approx -2s; \\ \alpha_2 &\approx -2[u_0^2(0) + s u_1^2(0) + s u_2^2(0)]; \\ \alpha_1 &\approx -2[s u_1^2(0) u_2^2(0) + u_0^2(0) u_2^2(0) + u_0^2(0) u_1^2(0)]. \end{aligned} \right\} \quad (14.26)$$

Таким образом, нелинейный потенциал  $\pi(x)$  может существенно изменяться при учете нелинейных эффектов третьего порядка за счет появления нового слагаемого  $2\gamma^2 x^4$ .

**Общее решение.** Уравнение (14.23) легко решается методом разделения переменных, что дает

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{-2\pi(x)}} = t. \quad (14.27)$$

Как и в гл. 9, это решение выражается через эллиптические функции, но теперь его вид зависит от того, имеет уравнение  $\pi(x) = 0$  все вещественные корни или два комплексных и два вещественных корня.

Рассмотрим сначала случай четырех вещественных корней. Обозначим их  $x_j$  и упорядочим так, что  $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$ . Тогда

$$x(t) = \frac{h_1}{l_1 + \operatorname{sn}^2[\psi_1(t), k_1]} + x_4, \quad (14.28)$$

где

$$h_1 = (x_1 - x_4) \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_2}; \quad l_1 = \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_2}; \quad k_1 = \left[ \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_2 - x_4)(x_1 - x_3)} \right]^{1/2}.$$

Кроме того, в (14.28) использована функция

$$\psi_1(t) = (2\gamma/\eta_1)t + \phi_1, \quad (14.29)$$

где

$$\eta_1 = -2[(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)]^{-1/2},$$

а  $\phi_1$  определяется условием  $x_1(0) = 0$ , т. е.

$$\phi_1 = \operatorname{sn}^{-1} \left[ \left( \frac{h_1 + x_4 l_1}{-x_4} \right)^{1/2}, k_1 \right].$$

Период эллиптической функции, а следовательно, и всего решения равен  $4K_1$ , где

$$K_1 = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k_1^2 s^2)}}.$$

Для двух комплексных корней из четырех перепишем  $\pi(x)$  как

$$\pi(x) = -2\gamma^2 (x_1 - x)(x - x_2)(x^2 - 2bx + c), \quad (14.30)$$

где  $x_1 > x_2$ ,  $c > b^2$ , и введем новые величины

$$G_1 = (x_1^2 - 2bx_1 + c)^{1/2}; \quad G_2 = (x_2^2 - 2bx_2 - c)^{1/2}.$$

Тогда решение будет иметь вид

$$x(t) = \frac{h_2}{l_2 + 1 - \operatorname{cn}[\psi_2(t), k_2]} + b, \quad (14.31)$$



где

$$h_2 = 2(x_1 - x_2) \frac{G_1 G_2}{(G_1 - G_2)^2}; \quad l_2 = 2 \frac{G_2}{G_1 - G_2}; \quad b = \frac{x_2 G_1 - x_1 G_2}{G_1 - G_2};$$

$$k_2 = \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{G_1 G_2} [x_1 x_2 - b(x_1 + x_2) + c] \right] \right\}^{1/2}$$

и

$$\Psi_2(t) = 2(\gamma/\eta_2)t + \phi_2, \quad \eta_2 = -(G_1 G_2)^{-1/2}. \quad (14.32)$$

Фазовая постоянная, как и ранее, определяется условием  $x(0) = 0$ , из которого следует, что

$$\phi_2 = \operatorname{cn}^{-1} \left[ \frac{h_2 + b(l_2 + 1)}{b}, k_2 \right].$$

Период равен  $4K_2$ , где

$$K_2 = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k_2^2 s^2)}}.$$

Полученное решение охватывает весь возможный набор начальных условий и коэффициентов связи. Однако структура и корни потенциала  $\pi(x)$  при  $s=1$  и  $s=-1$  требуют дополнительного анализа.

**Свойства нелинейного потенциала.** Как отмечалось в предыдущем разделе, учет нелинейных эффектов третьего порядка приводит к появлению в потенциальной функции дополнительного слагаемого  $2\gamma^2 x^4$ . Так как оно всегда положительно, потенциал  $\pi(x)$  должен быть положительным при больших значениях аргумента  $x$ . Отсюда следует, что при  $s=1$  в области больших  $x$  появляется новый корень уравнения  $\pi(x)=0$ , который определяет, очевидно, максимально возможное значение  $x$ . Существование такого максимума указывает на возможность стабилизации неустойчивости. При  $s=-1$  новый корень возникает в области больших отрицательных  $x$ , что и служит причиной преобразования решения от (9.11) к (14.28) или (14.31). Из вида корней, найденных в гл. 9  $[-u_2^2(0), -u_1^2(0)$  и  $u_0^2(0)]$ , следует, что тогда, когда какая-либо из начальных амплитуд имеет порядок  $\gamma^{-1}$ , соответствующий ей корень претерпевает значительное изменение из-за учета величин третьего порядка.

Качественная зависимость  $\pi(x)$  для этого случая показана на рис. 14.3. Предположим, что  $u_0(0) \gg u_{1,2}(0)$  и  $\Phi(0) = 0$ . Тогда в первом порядке по  $\gamma^2$  (14.24) дает

$$x_1 = u_0^2(0) [1 - \gamma^2 u_0^2(0)], \quad (14.33)$$

что согласуется с ранее полученной оценкой. Так как наличие слагаемого  $2\gamma^2 x^4$  всегда приводит к увеличению  $\pi(x)$ , а  $x_1$  согласно (14.33) уменьшается при значениях  $u_0(0)$ , близких к  $1/\gamma$ , нелинейное взаимодействие при этом слабее, чем во втором приближении.

лижении. Отметим, что при  $s=-1$  уравнение  $\pi(x)=0$ , как правило, имеет четыре вещественных корня. Однако при очень больших  $\alpha_2$  корни  $x_3$  и  $x_4$  могут быть комплексными. Действительно, пренебрегая в (14.25) слагаемым  $\alpha_1 x + \alpha_0$ , получаем

$$x_{3,4} = -(1/2) \alpha_3 / \alpha_4 \pm (1/2 \alpha_4) (\alpha_3^2 - \alpha_2 \alpha_4)^{1/2},$$

откуда следует, что корни  $x_3$  и  $x_4$  будут комплексными (и притом комплексно-сопряженными) при  $\alpha_2 \alpha_4 \gg \alpha_3^2$ , или с учетом (14.26)

$$u_1^2(0) + u_2^2(0) - u_0^2(0) > 1/\gamma^2.$$

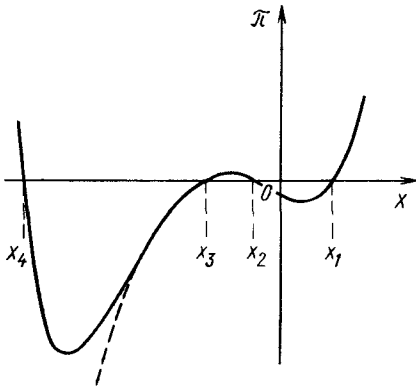


Рис. 14.3. Потенциал  $\pi(x)$  при  $s=-1$ . Корень  $x_4$  возникает вследствие учета нелинейного сдвига частоты. Величина  $x$  может осциллировать между  $x_1$  и  $x_2$ . Пунктирная кривая качественно иллюстрирует поведение  $\pi(x)$  во втором приближении ( $\gamma=0$ )

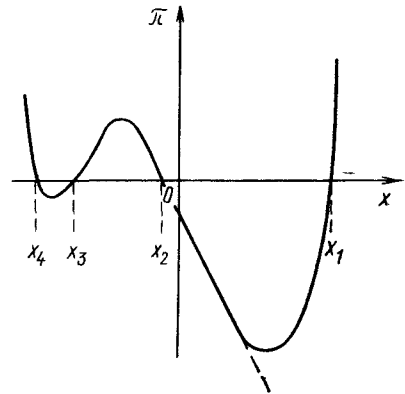


Рис. 14.4.  $\pi(x)$  при  $s=1$ . Учет нелинейного сдвига частоты приводит к появлению корня  $x_1$ . Величина  $x$  может осциллировать между  $x_1$  и  $x_2$ . Пунктирная кривая соответствует расчету потенциала во втором приближении

Случаю  $s=1$  соответствует потенциал, показанный на рис. 14.4. Если все  $u_j(0)$  равны, то с точностью до членов первого порядка по  $\gamma$

$$x_1 \approx 1/\gamma^2 + 2\gamma\Gamma - u_j^2(0); \quad (14.34)$$

$$x_2 \approx \Gamma^{2/3} [1 - (2/3) \gamma\Gamma^{1/3}] - u_j^2(0). \quad (14.35)$$

Два других корня могут быть вещественными только при дополнительном условии  $\Gamma=0$ . Тогда (14.34) и (14.35) соответствуют решению солитонного типа, а потенциал  $\pi(x)$  принимает вид, изображенный на рис. 14.5. Корень  $x_2 = -u_j^2(0)$  определяет точку перегиба функции  $\pi(x)$ . По аналогии с механическим движением в потенциальном поле можно заключить, что  $x$  будет асимптотически стремиться к значению  $-u_j^2(0)$ , а следовательно, ампли-

туда будет стремиться к нулю. При двух комплексных корнях кривая  $\pi(x)$  имеет вид, приведенный на рис. 14.6. Аналогия с механическим движением указывает на то, что при потенциалах  $\pi(x)$  типа показанных на рис. 14.3, 14.4 и 14.6 амплитуда должна осциллировать между значениями, соответствующими корням  $x_1$  и  $x_2$ . Если  $s=1$ , то  $x_1$  велико и происходит стабилизация неустойчивости.

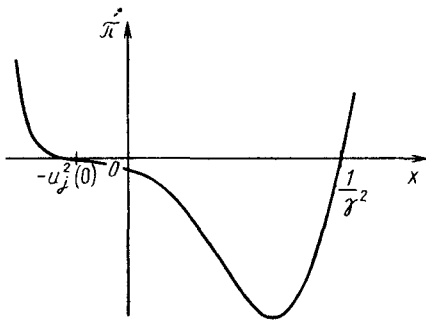


Рис. 14.5. Потенциал  $\pi(x)$  для трех совпадающих корней

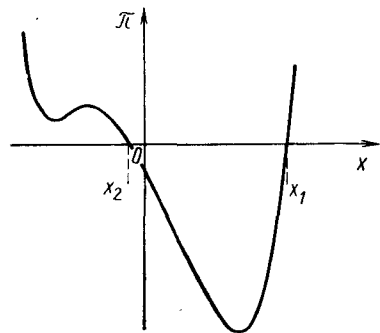


Рис. 14.6. Потенциал  $\pi(x)$  при  $s=1$  для двух вещественных и двух комплексных корней

**Гамильтониан третьего порядка.** Получим теперь систему уравнений типа (14.9), отправляясь от гамильтониана рассматриваемой системы волн, вычисленного в третьем приближении теории возмущений. Пусть максимальную частоту имеет волна  $\theta$ ,  $s_{02}=s$ ,  $s_{01}=s_2$  и  $s_{12}=-s_0$ , где  $s_j$  — знак энергии волны  $j$ . Нормируя амплитуды так, что  $v_{jh}=V$ , получаем гамильтониан вида

$$H = \sum_j s_j \omega_j u_j^2 + 2V (u_0^2 u_1^2 u_2^2)^{1/2} \sin \Phi - \sum_{jk} \gamma_{jk} u_k^2 u_j^2, \quad (14.36)$$

где  $\Phi = \theta_0 - \theta_1 - \theta_2$ ,  $\theta_j = \phi_j + \omega_j t$ .

Выбирая в качестве канонических переменных  $q_j = s_j \theta_j$  и  $p_j = u_j^2$ , приходим к системе уравнений

$$\frac{du_j}{dt} = \mp s_j V u_k u_l \cos \Phi; \quad (14.37a)$$

$$\frac{d\Phi_j}{dt} + \sum_k s_j (\gamma_{jk} + \gamma_{kj}) u_k^2 = s_j V \frac{u_k u_l}{u_j} \sin \Phi. \quad (14.37b)$$

Знак «минус» в (14.37a) соответствует волне с максимальной частотой. Учитывая, что  $\text{Re} \alpha_{jh} = s_j (\gamma_{jh} + \gamma_{hj})$ , находим следующее условие симметрии для коэффициентов связи третьего порядка:

$$s_j \alpha_{jh} = s_k \alpha_{kj}. \quad (14.38)$$

**Предельные переходы ко второму приближению.** Представляет интерес исследование предельного перехода от решения для  $\beta_j \neq 0$  (настоящая глава) к решению для  $\beta_j = 0$  (см. гл. 9). Нач-

нем с (14.28) при  $s = -1$ . Заметив, что при  $\gamma \rightarrow 0$  оба слагаемых в (14.28) стремятся к  $\pm\infty$ , перепишем его в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{h_1 + x_4 \{l_1 + \operatorname{sn}^2[\psi_1(t), k_1]\}}{l_1 + \operatorname{sn}^2[\psi_1(t), k_1]} = \\ &= \frac{x_1(x_2 - x_4)/(x_1 - x_2) + x_4 \operatorname{sn}^2[\psi_1(t), k_1]}{(x_2 - x_4)/(x_1 - x_2) + \operatorname{sn}^2[\psi_1(t), k_1]} \end{aligned}$$

Отсюда при  $x_4 \rightarrow \infty$  имеем в полном согласии с (9.11)

$$x(t) = x_1 - (x_1 - x_2) \operatorname{sn}^2[\psi_1(t), k_1],$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \left( \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \right)^{1/2}; \quad \psi_1(t) = (x_1 - x_3)^{1/2} t + \phi_1; \\ \phi_1 &= \operatorname{sn}^{-1} \left[ \left( \frac{x_1}{x_1 - x_2} \right)^{1/2}, k_1 \right]. \end{aligned}$$

При  $s = 1$  и  $\gamma \rightarrow 0$  к бесконечности стремится корень  $x_1$ , что дает

$$h_1 = x_2 - x_4; \quad l_1 = 0; \quad k_1 = (x_3 - x_4)/(x_2 - x_4).$$

Учитывая, что  $\gamma \approx (x_1)^{-1/2}$ , получаем

$$\psi_1(t) \rightarrow - \frac{2x_1^{1/2}(x_2 - x_4)^{1/2}t}{x_1^{1/2}2} + \phi_1 = \phi_1 - (x_2 - x_4)^{1/2}t.$$

Таким образом, решение принимает вид

$$x(t) = \frac{x_2 - x_4}{\operatorname{sn}^2[\phi_1 - (x_2 - x_4)^{1/2}t, k_1]} + x_4,$$

где  $\phi_1 = \operatorname{sn}^{-1} \{ [-(x_2 - x_4)/x_4]^{1/2}, k_1 \}$ . При этом время развития взрывной неустойчивости определяется соотношением

$$t_\infty = (x_2 - x_4)^{-1/2} \phi_1.$$

Перенумерация корней приводит к полученным ранее выражениям (9.13) и (9.14).

Рассмотрим еще переход от (14.31) к (9.15). При  $\gamma \rightarrow 0$  имеем  $G_1 \approx x_1 \approx 1/\gamma^2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} h_2 &\rightarrow 2G_2; \quad l_2 \rightarrow 0; \quad b \rightarrow x_2 - G_2; \\ k_2 &\rightarrow \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x_2 - b}{G_2} \right) \right]^{1/2} = \left( \frac{G_2 + b - x_2}{2G_2} \right)^{1/2}; \\ \psi_1(t) &\rightarrow -2\gamma \sqrt{x_1 G_2} t + \phi_2 \rightarrow -2\sqrt{G_2} t + \phi_2. \end{aligned}$$

В результате находим

$$x(t) = \frac{2G_2}{1 - \operatorname{cn}(\phi_2 - 2\sqrt{G_2}t, k_2)} + x_2 - G_2,$$

где  $\phi_2 = \operatorname{cn}^{-1} [(G_2 + x_2)/(x_2 - G_2), k_2]$ ,

или

$$x(t) = \frac{2G_2}{1 + \operatorname{cn}(2\sqrt{G_2}'t - \phi_2', k_2)} + x_2 - G_2,$$

где  $\phi_2' = \phi_2 + 2K$ ,  $K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k_2^2s^2)}}$ ,

что дает

$$\phi_2' = -\operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{G_2 + x_2}{G_2 - x_2}, k_2\right) \text{ и } t_\infty = \frac{2K + \phi_2'}{2\sqrt{G_2}}.$$

Поскольку  $x_2 \rightarrow x_1$  и  $\phi_2' \rightarrow -\phi$ , видим, что полученный здесь предельный результат идентичен (9.15).

### Задачи

14.1. Описать различия между соотношениями (14.1) и (7.11) и выделить среди них наиболее важные для физики явления.

14.2. Установить физический смысл  $\Gamma^2$  в случае, когда все амплитуды равны и  $s=1$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fukai J., Krishan S., Harris E. G. — Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p. 910.
2. Dum C. T., Sudan R. N. — Ibid., p. 1149.
3. Dysthe К. В. — Intern. J. Electronics, 1970, v. 29, p. 401.
4. Byers J. A., Rensink M. E., Smith J. L., Walters G. M. — Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 826.
5. Oraevskii V. N., Wilhelmsson H., Kogan E. A., Pavlenko V. P. — Phys. Scripta, 1973, v. 7, p. 217; Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 49.
6. Weiland J., Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1973, v. 7, p. 222.
7. Weiland J. — Ibid., 1974, v. 9, p. 343.
8. Захаров В. Е., Манаков С. В. — Письма ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 413.
9. Hamasaki S., Krall A. — Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 1441.
10. Caponi M., Davidson R. C. — Ibid., p. 1463.
11. Davydova T. A., Pavlenko V. P., Shamrai K. P. — Plasma Phys., 1975, v. 17, p. 671.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Sitenko A. G. Fluctuations in Plasma and Nonlinear Susceptibilities. — Phys. Scripta, 1973, v. 7, p. 190.
- Falk L., Kocherga O. D. The Contribution to Nonlinear Frequency Shifts from Diffusion in Velocity Space. — Ibid., 1974, v. 9, p. 237.
- Рабинович М. И., Реутов В. П., Цветков А. А. О слиянии волновых импульсов и пучков при взрывной неустойчивости. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 67, с. 525.
- Ситенко А. Г. Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме. Киев, Наукова думка, 1977.

## РОЛЬ ЗАТУХАНИЯ ПРИ УЧЕТЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Настоящая глава посвящена исследованию системы связанных уравнений при одновременном учете линейного затухания и нелинейных эффектов третьего порядка. Это исследование развивается по пути постепенного усложнения рассматриваемых проблем, начиная от сравнительно простого случая, когда фазовые углы, описывающие мнимые части коэффициентов связи, полагаются равными нулю. Тогда учет влияния линейного затухания сводится к замене решения солитонного типа решением типа повторяющихся взрывов. В асимптотическом пределе больших  $t$  это решение определяет амплитуду насыщения, для описания которой введено понятие эффективного коэффициента связи третьего порядка, зависящего от коэффициента линейного затухания и мгновенного значения амплитуды при взрыве. Показано, что начальные условия не влияют на асимптотическое значение амплитуды.

Для наглядного изображения временной эволюции рассматриваемой системы использован метод фазовой плоскости.

Далее исследуется влияние фазовых углов для коэффициентов связи второго порядка (сначала в отсутствие, а затем и при наличии линейной диссипации). Эта по существу довольно сложная проблема решена на общем уровне с последующим детальным и систематическим обсуждением результатов. В частности, найдено интересное решение, описывающее возможность экспоненциального увеличения амплитуд двух волн при одновременном выходе на асимптотический предел амплитуды третьей волны. Изучена динамика процесса локализации фазы и показано ее определяющее влияние на эволюцию системы.

Важно подчеркнуть, что практически все особенности решений, найденных в этой главе, существенно обусловлены когерентным взаимодействием и полностью утрачиваются в приближении случайных фаз.

При наличии затухания проводимости как второго, так и третьего порядка имеют вещественные части. При этом коэффициенты связи комплексные, что можно учесть введением мнимых частей  $\nu_j$  частот  $\omega_j$ . Результирующая система, вообще говоря, приобретает вид (14.8). Однако в предположении  $\nu_j \ll \omega_j$  получим  $\text{Im } \alpha_{jk} \ll \ll \text{Re } \alpha_{jk}$ , так что влияние величин  $\delta\nu_j$  будет сказываться при больших амплитудах по сравнению с влиянием  $\delta\omega$ . Поэтому в первом приближении величинами  $\delta\nu_j$  можно просто пренебречь. Кроме того, пренебрегают также различием между фазовыми углами  $\theta_{ij}$ , а при надлежащем выборе  $\Phi(0)$  можно считать, что  $\theta_{ij} \approx 0$ . Такое предположение нередко соответствует действительности (ср. с гл. 16).

## Приближенный учет линейного затухания

Основываясь на интерпретации взаимодействия волн как движения в поле потенциала  $\pi(x)$ , можно ожидать, что при учете затухания кинетическая энергия частиц будет постепенно уменьшаться, так что в конечном итоге частицы окажутся на дне потенциальной ямы. Это означает выход амплитуд на постоянный асимптотический уровень, что и происходит на самом деле. Такая картина должна иметь место и в случае полученного в предыдущей главе решения солитонного типа. Отсюда следует, что при учете затухания решение солитонного типа переходит в решение осциллирующего типа (рис. 15.1).

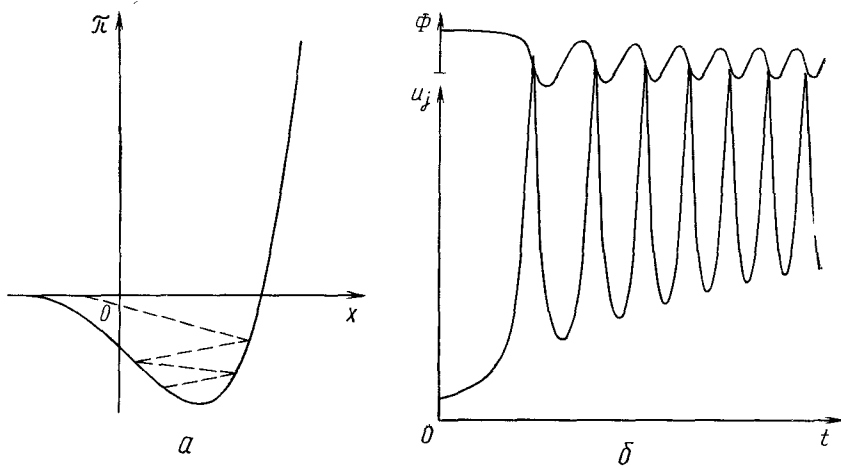


Рис. 15.1. Потенциальная функция  $\pi(x)$ , соответствующая решению солитонного типа в отсутствие диссипации; пунктирная кривая дает представление о постепенном уменьшении амплитуды колебаний при наличии диссипации (а), а также временная зависимость амплитуд  $u_j$  и фазы  $\Phi$  при  $v_j=0,1$  и  $\Gamma=0$  (в отсутствие диссипации решение имеет вид солитона) (б)

Математическое описание этого явления достаточно трудно даже при условии, что все  $v_j=v$  и все  $\theta_{ij}=0$ . Дело в том, что из-за наличия нелинейного сдвига частоты систему связанных уравнений не удастся преобразовать к виду, соответствующему недиссипативной среде, и поэтому на первый взгляд представляется невозможным найти обобщенный интеграл движения (14.14). Тем не менее упомянутый интеграл движения удастся представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u_0 u_1 u_2 \sin \Phi + (1/4) \sum \beta_j u_j^4 &= \Gamma \exp [-(v_0 + v_1 + v_2)t] + \\
 + \frac{1}{4} \exp [-(v_0 + v_1 + v_2)t] &\int_0^t \exp [(v_0 + v_1 + v_2)t] \sum \beta_j (v_0 + v_1 + \\
 + v_2 - 4v_j) u_j^4 dt. & \quad (15.1)
 \end{aligned}$$

Как видно, интеграл в правой части (15.1) пропорционален как  $\beta_j$ , так и  $v_j$ . Более того, его начальное значение равно нулю, так что при малых  $t$  этим интегралом можно пренебречь. Соотношение (15.1) без интегрального члена можно получить и иным способом. Положим для простоты  $v_j = v$  и  $u_j = u$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \partial u^2 / \partial t + 2v u^2 &= 2u^3 \cos \Phi; \\ (\partial / \partial t) (u^3 \sin \Phi) + v u^3 \sin \Phi &= -4\gamma u^5 \cos \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

С помощью преобразования  $\bar{u} = u \exp(vt)$  и  $\tau = (1/v)[1 - \exp(-vt)]$  перейдем к уравнениям

$$d\bar{u}^2/d\tau = 2\bar{u}^3 \cos \Phi; \quad (15.3a)$$

$$(d/d\tau) (\bar{u}^3 \sin \Phi) = -\gamma [1 - v\tau] \bar{u}^5 \cos \Phi. \quad (15.3b)$$

Эта система отличается от аналогичной системы для недиссипативной среды наличием множителя  $1 - v\tau = \exp(-vt)$ . Учитывая, однако, что правая часть (15.3b) существенно отлична от нуля только вблизи максимума амплитуды, можно вместо  $\gamma(1 - v\tau)$  ввести новый коэффициент  $\gamma_{\text{эф}}$ , считая, что он принимает постоянные значения, соответствующие различным максимумам амплитуды, и пренебрегая его изменением в пределах каждого максимума. Однако это довольно грубое приближение, что не является неожиданным, так как значительный вклад должно давать интегрирование по области максимума.

Чтобы использовать аналогию со случаем недиссипативной среды, полезно ввести в рассмотрение величину  $\Gamma_{\text{эф}}$ , определив ее так, что

$$\Gamma_{\text{эф}}(t) = \exp[-(v_0 + v_1 + v_2)t] \times \\ \times \left\{ \Gamma + \frac{1}{4} \int_0^t \exp[(v_0 + v_1 + v_2)\tau] \sum_j \beta_j (v_0 + v_1 + v_2 - 4v_j) u_j^4 d\tau \right\}. \quad (15.4)$$

Как ясно из (14.34) и (14.35), изменение  $\Gamma_{\text{эф}}$  сказывается, в основном, на минимальных значениях амплитуд. Если все  $v_j = v > 0$  и все  $\beta_j$  имеют одинаковый знак, то максимум амплитуды уменьшается при любом знаке  $\beta_j$ . Однако относительное изменение сильно зависит от значений  $\Gamma_{\text{эф}}$ ,  $v_j$  и  $\beta_j$ .

Из (15.4) видно также, что даже при  $\Gamma = 0$  величина  $\Gamma_{\text{эф}}(t)$  не обращается в нуль при  $t \neq 0$ . Это означает, что когда все  $u_j = u$ , решение солитонного типа переходит в решение осциллирующего типа. Можно объяснить также временные зависимости фаз, показанные на рис. 14.2 и 15.1, б. Для этого запишем (15.1) как

$$\sin \Phi = [-(1/4) \sum \beta_j u_j^4 + \Gamma_{\text{эф}}(t)] / u_0 u_1 u_2. \quad (15.5)$$

Отсюда следует, что если числитель не изменяет знак за период колебаний, то функция  $\Phi$  является осциллирующей. Когда все  $\beta_j > 0$  и все  $v_j = v > 0$ ,  $\Gamma_{\text{эф}}(t)$  уменьшается с течением времени, пока числитель не станет отрицательным. Поэтому при слабом затухании может наблюдаться переход от монотонного изменения фазы к осцилляторному [1]. Такой переход может служить причиной вре-



менной задержки нелинейной эволюции амплитуд. Различные типы временных зависимостей фаз рассмотрены в работе [2].

**Расчет  $\Gamma_{\text{эф}}$ .** Из выражения (15.4) видно, что  $\Gamma_{\text{эф}}$  может существенно изменяться в пределах каждого максимума. Рассмотрим это изменение в условиях, соответствующих рис. 15.1, б, когда все  $u_j = u$  и все  $v_j = v$ :

$$\Gamma_{\text{эф}}(t) = \exp(-3vt) \left[ \Gamma - \gamma v \int_0^t \exp(3vt) u^4 dt \right].$$

Вблизи максимума амплитуды  $u$  можно аппроксимировать решением солитонного типа (14.19), т. е. положить

$$u^2 = [\gamma_{\text{эф}}^2 + (t - t_1)^2]^{-1}.$$

Величина  $\gamma_{\text{эф}}$  введена здесь для учета уменьшения максимального значения амплитуды (при рассмотрении первого максимума можно считать  $\gamma_{\text{эф}} \approx \gamma$ ). Для изменения  $\Gamma_{\text{эф}}$  в пределах некоторого максимума имеем

$$\Delta\Gamma_{\text{эф}} = -\gamma v \exp(-3vt) \int_{t_0}^t \exp(3vt) \frac{dt}{[\gamma_{\text{эф}}^2 + (t - t_1)^2]^2},$$

где  $t_0 < t_1 < t$ . Учитывая, что  $\gamma_{\text{эф}}$  мало, можно записать

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{\text{эф}} &\approx -\gamma v \int_{t_0}^t \frac{dt}{[\gamma_{\text{эф}}^2 + (t - t_1)^2]^2} \approx \\ &\approx -\frac{\gamma v}{\gamma_{\text{эф}}^3} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t - t_1}{\gamma_{\text{эф}}} \Big|_{t_0}^t \approx -\frac{\gamma v \pi}{2\gamma_{\text{эф}}^3}. \end{aligned}$$

Полученное выражение для  $\Delta\Gamma_{\text{эф}}$  приближенно верно и при более общих начальных условиях, когда начальные амплитуды различны, поскольку на максимальных значениях амплитуд такое обобщение начальных условий сказывается мало.

Используем теперь величину  $\Delta\Gamma_{\text{эф}}$  для расчета максимальных и минимальных значений амплитуд. При  $\partial u / \partial t = 0$  имеем уравнение

$$v^2 u^4 + (1/2) \pi (u^2) = 0$$

или

$$\gamma u^2 - u^6 + (v^2 - 2\gamma\Gamma_{\text{эф}}) u^4 + \Gamma_{\text{эф}}^2 = 0.$$

Так как  $2\gamma\Delta\Gamma_{\text{эф}} \gg v^2$ , во всех представляющих интерес случаях можно использовать ту же потенциальную функцию, что и при  $v=0$ . Тогда из (14.34) и (14.35) получим

$$u_{\text{макс}}^2 \approx 1/\gamma^2 + 2\gamma\Gamma_{\text{эф}}; \quad u_{\text{мин}}^2 \approx \Gamma_{\text{эф}}^{2/3} [1 - (2/3) \gamma\Gamma_{\text{эф}}^{1/3}].$$

Рассмотрим динамику образования максимумов и минимумов при  $v=0,1$ ;  $\gamma=0,06$  и  $\Gamma=0$  (см. рис. 15.1, б). Для первого максимума имеем  $u_{\text{макс}} \approx 16,6$  и  $\Gamma_{\text{эф}} = \Delta\Gamma_{\text{эф}} = -43,5$ . Так как  $\Gamma=0$ ,  $u_{\text{мин}} \approx 3,5$  для первого минимума и  $u_{\text{макс}} \approx 16,5$  для второго максимума. При расчете второго максимума необходимо использовать  $\gamma_{\text{эф}} = 1/16,5$ , но это значение все еще близко к  $\gamma$ , так что получаем

$u_{\min} \approx 4,4$  для второго минимума и  $u_{\max} \approx 16,3$  для третьего максимума.

Следует обратить внимание на хорошее согласие этих результатов с данными численного анализа (см. рис. 15.1, б): максимальное расхождение (второй минимум) не превышает 4%. Рассмотренный метод расчета максимумов и минимумов можно рекомендовать для решений типа чередующихся максимумов. Если амплитуда выходит на стационарный уровень, то при расчетах значений  $\Gamma_{\text{эф}}$  следует использовать именно стационарное значение амплитуды.

**Асимптотический режим.** Соотношение (15.4) указывает на то, что информация о начальных условиях, которая содержится в  $\Gamma$ , с течением времени постепенно утрачивается из-за наличия экспоненциального множителя  $\exp[(-v_0 + v_1 + v_2)t]$ . Это приводит к тому, что асимптотические значения амплитуд не зависят от начальных условий. Асимптотические значения амплитуд и фаз можно рассчитать непосредственно на основе (14.8), полагая  $\delta v_j = 0$ ,  $\partial u_j / \partial t = 0$  и  $\partial \Phi / \partial t = 0$ . При нормировке (7.4) получим:

$$u_j = \sqrt{v_R v_l} / \cos \Phi; \quad (15.6)$$

$$\Phi = \mp \pi/2 + (1/2) \arcsin 2\Delta + 2\pi n, \quad (15.7)$$

где

$$\Delta = \frac{v_1 v_2 \beta_0 + v_0 v_2 \beta_1 + v_1 v_0 \beta_2}{\beta_0 + \beta_1 + \beta_2}, \quad (15.8)$$

а знаки «минус» и «плюс» отвечают  $\Delta > 0$  и  $\Delta < 0$  соответственно.

На рис. 15.2 и 15.3 представлены результаты численного реше-

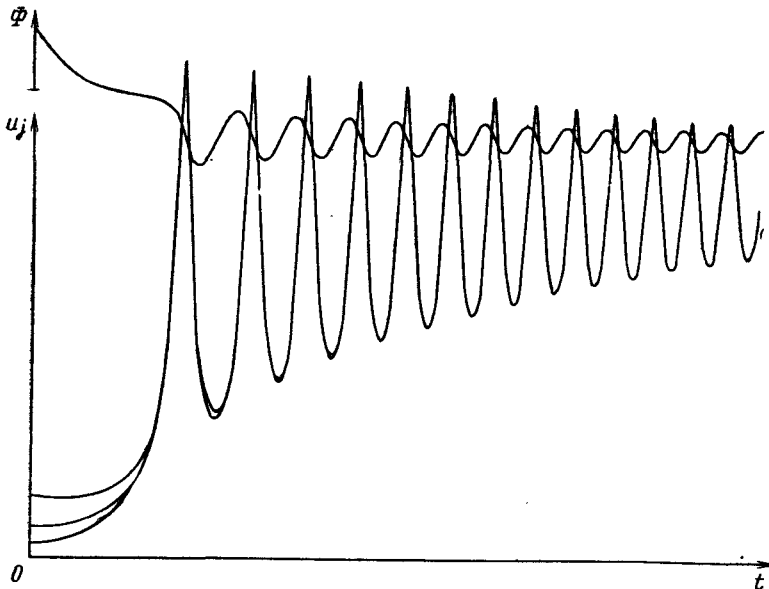


Рис. 15.2. Временная зависимость амплитуд  $u_j$  и фазы  $\Phi$  для всех  $v_j = 0,2$ , но различных начальных значений всех амплитуд

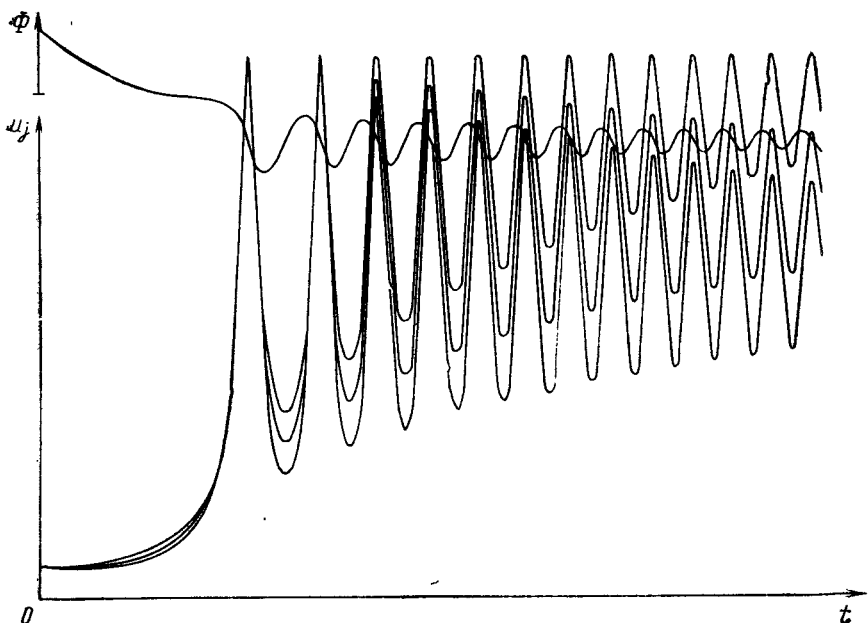


Рис. 15.3. Временная зависимость амплитуд  $u_j$  и фазы  $\Phi$  при  $\nu_0=0,1$ ,  $\nu_1=0,2$  и  $\nu_2=0,3$  (начальные значения всех амплитуд равны)

ния. Интересно сравнить также фазовые траектории для недиссипативной (рис. 15.4) и диссипативной (рис. 15.5) сред.

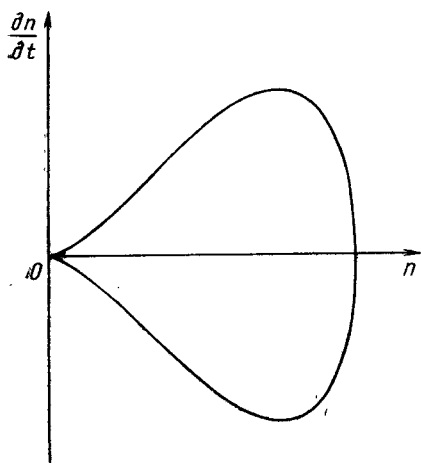


Рис. 15.4. Фазовая траектория, отвечающая решению периодического типа в отсутствие диссипации ( $n=u^2$ )

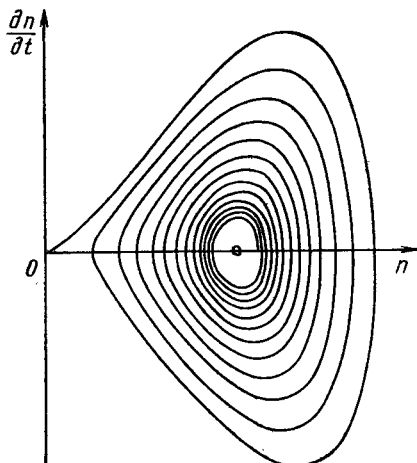


Рис. 15.5. Фазовая траектория при наличии диссипации, иллюстрирующая приближение к стационарному значению  $n(n=u^2)$

**Эффективное нелинейное затухание.** Нелинейное затухание аналогично линейному в том смысле, что оно приводит к установлению стационарного значения амплитуды (рис. 15.6). При  $\nu_j = \nu$  и  $\delta\nu_j = \delta\nu$  это значение определяется соотношением

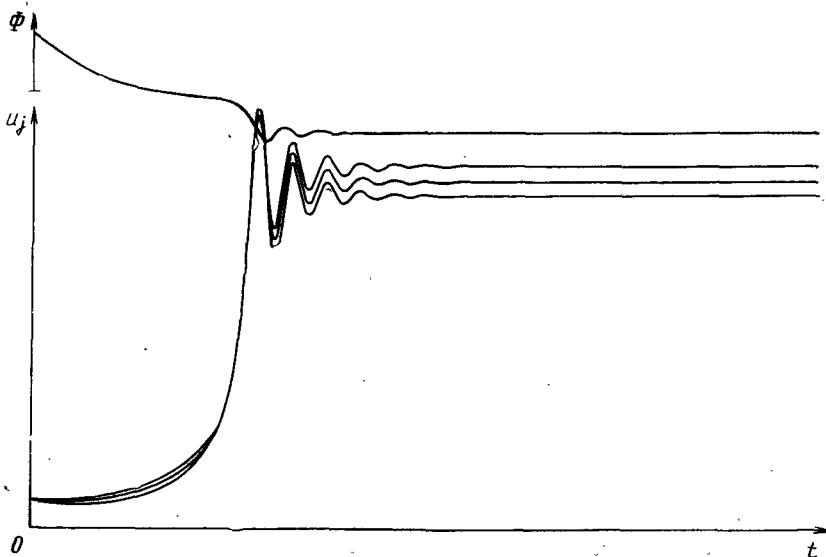


Рис. 15.6. Временная зависимость амплитуд  $u_j$  и фазы  $\Phi$  при одинаковом для всех амплитуд эффективном нелинейном затухании и различных линейных затуханиях ( $\text{Im}\alpha_j = 0,05$ ;  $\nu_0 = 0,1$ ;  $\nu_1 = 0,2$ ;  $\nu_2 = 0,3$ )

$$u_j = -(3/4\gamma) \sin \Phi, \quad (15.9)$$

где

$$\Phi = \mp \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + (16/9)\gamma^2}} + \arcsin \frac{(32/9)\gamma^2\nu + \xi}{\sqrt{\xi^2 + (16/9)\gamma^2}} \right\} \quad (15.10)$$

и  $\xi = -\sum \text{Im}\alpha_j$ .

Знак «минус» в (15.10) следует брать при  $\xi > 0$ , знак «плюс» — при  $\xi < 0$ . Формулы (15.9) и (15.10) выведены в предположении  $\alpha_j^{\xi} = \alpha_j$ .

**Локализация фазы.** В случае взрывной неустойчивости при отсутствии диссипации и  $\beta_j = 0$  фаза  $\Phi$  асимптотически стремится к нулю, причем это асимптотическое значение не зависит от начальных условий (эффект локализации фазы в окрестности нуля). При учете нелинейного сдвига частоты это характерное поведение фазы наблюдается до амплитуд порядка  $1/\gamma$ , затем происходит резкое уменьшение  $\Phi$  (если  $\beta_j > 0$ ) и в точке максимума амплитуды  $\Phi = -\pi/2$ . За этой точкой амплитуда уменьшается и, следовательно,  $\cos \Phi < 0$ . Но при этом  $\sin \Phi$  принимает те же значения, что и до максимума, т. е. решение оказывается симметричным относительно максимума.

## Коэффициенты связи второго порядка с различными фазовыми углами

Перейдем к рассмотрению общего случая [3], когда фазовые углы коэффициентов связи второго порядка отличны от нуля и не равны между собой. Такое положение реализуется при учете мнимых составляющих частот взаимодействующих волн. Чтобы не слишком усложнять задачу с самого начала, предположим, что можно пренебречь линейным затуханием, обусловленным наличием этих мнимых частей. Тогда получим следующую систему исходных уравнений:

$$\frac{du_0}{dt} = u_1 u_2 \cos(\Phi + \theta_{12}); \quad (15.11a)$$

$$\frac{du_1}{dt} = u_0 u_2 \cos(\Phi + \theta_{02}); \quad (15.11b)$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_0 u_1 \cos(\Phi + \theta_{01}); \quad (15.11v)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \delta\omega = & -\frac{u_1 u_2}{u_0} \sin(\Phi + \theta_{12}) - \frac{u_0 u_2}{u_1} \sin(\Phi + \theta_{02}) - \\ & - \frac{u_0 u_1}{u_2} \sin(\Phi + \theta_{01}). \end{aligned} \quad (15.11r)$$

Отметим, что систему такого вида можно получить и при условии, что мнимые добавки к частотам различных волн почти одинаковы, так что можно применить преобразование (10.7) и пренебречь членами, пропорциональными  $\gamma v$ .

Система (15.11) не приводит к соотношениям типа (15.1). Замечая, однако, что стабилизирующее действие  $\delta\omega$  существенно связано с возможностью изменения фазы  $\Phi$  на величину, приближенно равную  $\pi$  (при этом нелинейный член меняет знак), мы вправе полагать, что такой механизм стабилизации неустойчивости менее эффективен при  $\theta_{ij} \neq 0$ . Это предположение полностью подтверждается численным решением (15.11), результаты которого показаны на рис. 15.7. Видно, что две амплитуды неограниченно нарастают, в то время как третья выходит на постоянный уровень, причем величина  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  остается ограниченной. Это означает, что в уравнении (15.11r) должно быть слагаемое, компенсирующее рост величины  $\delta\omega$ . Такая компенсация может осуществляться за счет того из слагаемых правой части (15.11r), которое содержит в знаменателе амплитуду, асимптотически стремящуюся к постоянной.

Рассмотрим несколько подробнее асимптотический режим для процесса, изображенного на рис. 15.7. Подставим в

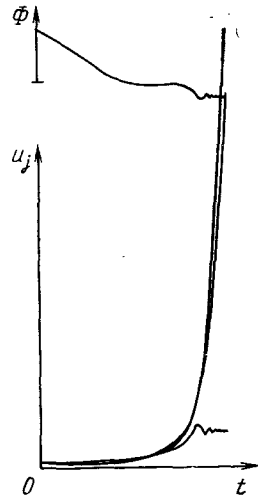


Рис. 15.7. Экспоненциальное решение [для  $F(\Phi)$  первого типа] при  $\theta_{12}=0$ ,  $\theta_{02}=\pi/4$  и  $\theta_{01}=-\pi/4$

(15.11) величины  $u_i = k_i \exp(\alpha t)$  ( $i = k, l$ ),  $u_j = b$  и введем обозначение

$$\rho_l = \cos(\Phi_a + \theta_{kl}), \quad l = 0, 1, 2, \quad (15.12)$$

где  $\Phi_a$  — асимптотическое значение фазы, которое определяется из условия  $\partial u_j / \partial t \approx 0$ , что эквивалентно  $\rho_j \approx 0$ . В результате получим решение вида

$$u_i = k_i \exp(b \sqrt{\rho_k \rho_l}), \quad i = k, l, \quad (15.13)$$

где

$$k_k / k_l = (\rho_k / \rho_l)^{1/2}. \quad (15.14)$$

При этом из (15.11 г) вытекает равенство

$$u_j = b = -[\text{sign} \sin(\Phi_a + \theta_{kl})] \sqrt{\rho_k \rho_l} / (\rho_k \beta_k + \rho_l \beta_l). \quad (15.15)$$

Используя интеграл движения (10.11), т. е.  $u_0^2 \sin(\theta_{02} - \theta_{01}) + u_1^2 \sin(\theta_{01} - \theta_{12}) + u_2^2 \sin(\theta_{12} - \theta_{02})$ , который имеет место и для системы (15.11), можно записать также

$$k_k / k_l = \sqrt{-\sin(\theta_{kl} - \theta_{jl}) / \sin(\theta_{jk} - \theta_{kl})}.$$

Таким образом, мы в состоянии аналитически описать асимптотическую часть решения типа изображенного на рис. 15.7.

Однако следует иметь в виду и иную, отличную от рассмотренной, возможность получения конечных значений  $\partial \Phi / \partial t$  при неограниченном увеличении амплитуд. Она реализуется тогда, когда  $\beta_j$  имеют различные значения. При этом решении имеет взрывной характер:

$$u_j = [\sqrt{\rho_k \rho_l} (t_\infty - t)]^{-1}. \quad (15.16)$$

Подставляя последнее выражение в  $\delta \omega$  и удовлетворяя требованию ограниченности  $\delta \omega$ , получаем

$$\beta_0 / \rho_1 \rho_2 + \beta_1 / \rho_0 \rho_2 + \beta_2 / \rho_0 \rho_1 = 0. \quad (15.17)$$

Это соотношение определяет асимптотическое значение фазы

$$\Phi_a = \text{arctg} \left( \frac{\beta_0 \cos \theta_{12} + \beta_1 \cos \theta_{02} + \beta_2 \cos \theta_{01}}{\beta_0 \sin \theta_{12} + \beta_1 \sin \theta_{02} + \beta_2 \sin \theta_{01}} \right) + 2\pi n, \quad (15.18)$$

которое в общем случае отлично от значения, полученного во втором приближении.

Для описания локализации фазы удобно ввести следующую асимптотическую фазовую функцию:

$$F(\Phi) = \beta_0 \cos(\Phi + \theta_{12}) + \beta_1 \cos(\Phi + \theta_{02}) + \beta_2 \cos(\Phi + \theta_{01}). \quad (15.19)$$

С помощью этой функции формулы (15.15) и (15.17) можно переписать в виде

$$u_j = b = -\text{sign}[\sin(\Phi_a + \theta_{kl})] \sqrt{\rho_k \rho_l} / F(\Phi_a)$$

и, поскольку  $\rho_l = 0$ ,  $(\Phi_a) = 0$ ,

$$F(\Phi_a) = 0.$$

Исследуем характер локализации фазы в зависимости от вида

функции  $F(\Phi)$ . Если амплитуды увеличиваются экспоненциально, то

$$\text{sign}[\sin(\Phi_a + \theta_{kl})] F(\Phi_a) < 0,$$

так как  $b > 0$  и  $p_i > 0$ . При этом все  $\theta_{ij}$  принадлежат одной полуплоскости в соответствии с тем, что мы имеем дело с системой, неустойчивой во втором порядке. Упорядочим фазовые углы так, что  $\theta_{12} \geq \theta_{02} \geq \theta_{01}$  (рис. 15.8, а). Тогда получим два возможных

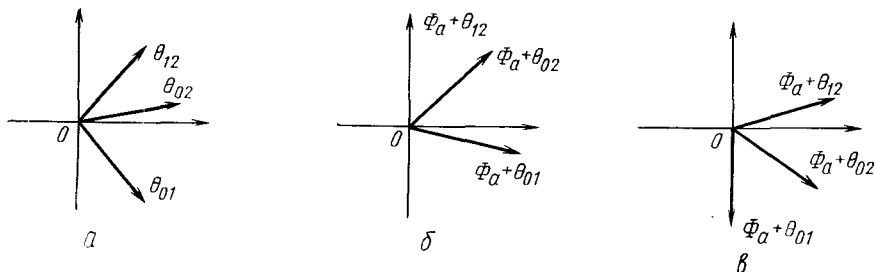


Рис. 15.8. Локализация векторов  $\exp(i\theta_{ij})$  в одной полуплоскости (а), конфигурация векторов  $\exp[i(\Phi_a + \theta_{ij})]$ , демонстрирующая локализацию фазы при  $u_0 = \text{const}$  (б) и при  $u_2 = \text{const}$  (в)

значения  $\Phi_a$ , при которых одна амплитуда постоянна, а две неограниченно увеличиваются. Первая из них соответствует  $u_0 = \text{const}$  ( $\Phi_a = \pi/2 - \theta_{12} + 2\pi n$ ), а вторая —  $u_2 = \text{const}$  ( $\Phi_a = -\pi/2 - \theta_{01} + 2\pi n$ ). Эти возможности показаны на рис. 15.8, б и 15.8, в соответственно.

При исследовании влияния  $\delta\omega$  на локализацию фазы основной интерес представляет интервал  $-\pi/2 - \theta_{01} \leq \Phi \leq \pi/2 - \theta_{12}$ . Замечая, что функция  $F(\Phi)$  может иметь в этом интервале не более одного нуля, получаем четыре возможных типа этой функции.

1.  $F(\Phi)$  положительно определена во всем интервале; единственно возможная локализация:  $-\pi/2 - \theta_{01}$  (рис. 15.9, а).

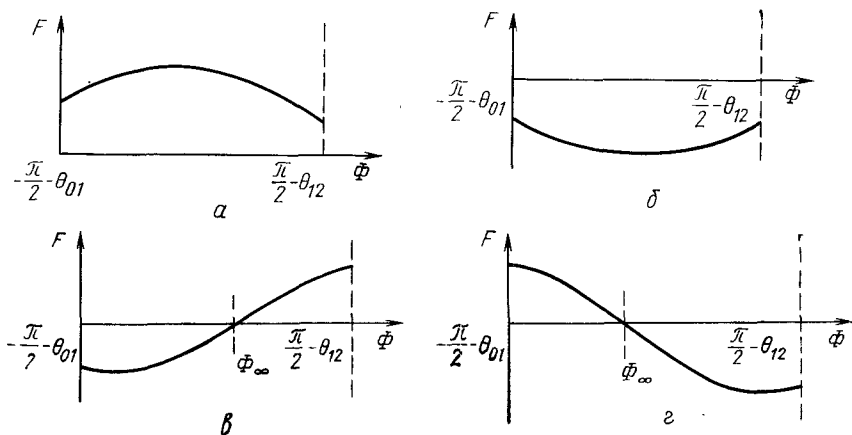


Рис. 15.9. Различные типы функции  $F(\Phi)$

2.  $F(\Phi)$  отрицательно определена во всем интервале; единственно возможная локализация:  $\pi/2 - \theta_{12}$  (рис. 15.9, б).

3.  $F(\Phi)$  изменяет знак таким образом, что единственно возможным решением является взрывная неустойчивость, т. е.  $F(\Phi) \rightarrow 0$  (рис. 15.9, в).

4.  $F(\Phi)$  изменяет знак так, что возможна любая локализация фазы (рис. 15.9, г).

Для того чтобы определить, какой из перечисленных типов реализуется при заданной комбинации величин  $\beta_j$  и  $\theta_{ij}$ , перепишем  $F(\Phi)$  следующим образом:

$$F(\Phi) = R \cos(\Phi + \Omega),$$

где

$$R \equiv (A^2 + B^2)^{1/2}; \quad \Omega = \pm \arccos A/(A^2 + B^2)^{1/2};$$

$$A = \beta_0 \cos \theta_{12} + \beta_1 \cos \theta_{02} + \beta_2 \cos \theta_{01};$$

$$B = \beta_0 \sin \theta_{12} + \beta_1 \sin \theta_{02} + \beta_2 \sin \theta_{01}.$$

Теперь можно указать пределы изменения  $\Omega$ , соответствующие функциям  $F(\Phi)$  различных типов:

- 1)  $\theta_{01} \leq \Omega \leq \theta_{12}$ ;
- 2)  $\pi + \theta_{01} \leq \Omega \leq \pi + \theta_{12}$ ;
- 3)  $\pi + \theta_{12} \leq \Omega \leq 2\pi + \theta_{01}$ ;
- 4)  $\theta_{12} \leq \Omega \leq \pi + \theta_{01}$ .

**Динамический процесс локализации фазы.** Нелинейный сдвиг частоты  $\delta\omega$  начинает существенно влиять на динамику фазы в тот момент, когда во втором приближении фаза уже принимает асимптотическое значение (см. гл. 10). Более того, для амплитуд имеет место приближенное выражение вида

$$u_j \approx [\sqrt{\cos(\Phi + \theta_{jl}) \cos(\Phi + \theta_{jk})} (t_\infty - t)]^{-1}, \quad (15.20)$$

где все  $\cos(\Phi + \theta_{kl}) > 0$ . Это означает, что  $\delta\omega$  имеет тот же знак, что и функция  $F(\Phi)$ . Предположим, что  $\delta\omega$  и  $F(\Phi)$  отрицательны. Тогда по мере роста  $|\delta\omega|$  производная  $\partial\Phi/\partial t$  становится положительной и  $\Phi$  также начинает увеличиваться. В результате амплитуды  $u_j$  могут выходить на новый асимптотический уровень типа (15.20), но с другими значениями  $\Phi$  и  $t_\infty$ . Если при этом  $F(\Phi)$  все еще сохраняет отрицательный знак, то по-прежнему  $\delta\omega < 0$  и  $\Phi$  продолжает увеличиваться. Но в тот момент, когда  $\Phi$  будет проходить точку  $\pi/2 - \theta_{12}$ ,  $u_0$  уменьшится и слагаемое с  $u_j$  в знаменателе начнет возрастать быстрее, чем  $\delta\omega$ . Это вызовет возврат  $\Phi$  к значению  $\pi/2 - \theta_{12}$ , и в конечном счете получаются экспоненциальные решения при  $u_0 = \text{const}$ . Используя аналогичные аргументы, можно убедиться, что при положительных  $\Phi$  и  $\delta\omega$  фаза  $\Phi$  уменьшается до тех пор, пока  $F(\Phi)$  не изменит знак или  $\Phi$  не достигнет значения  $-\pi/2 - \theta_{01}$ . Общее правило, следовательно, заключается в том, что в случае экспоненциальных решений  $\Phi$  всегда стремится к асим-



птотическому значению, которое соответствует мгновенному знаку  $F(\Phi)$ . Имея это в виду, можно легко понять динамику процессов для каждого из четырех рассмотренных выше типов функции  $F(\Phi)$ .

Функция  $F(\Phi)$  первого типа не изменяет знак, фаза стремится к значению  $-\pi/2 - \theta_{01}$ , и амплитуды экспоненциально увеличиваются (см. рис. 15.7). Второй тип отличается от первого лишь тем, что предельное значение фазы равно  $\pi/2 - \theta_{12}$  (рис. 15.10). В третьем случае  $\Phi$  стремится к тому асимптотическому значению, которое всякий раз оказывается в противоположной стороне от точки  $\Phi_{\infty}$ .

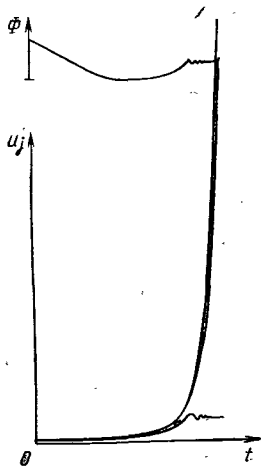


Рис. 15.10. Экспоненциальное решение для  $F(\Phi)$  второго типа при  $\theta_{12}=0$ ,  $\theta_{02}=\pi/4$ ,  $\theta_{01}=-\pi/4$

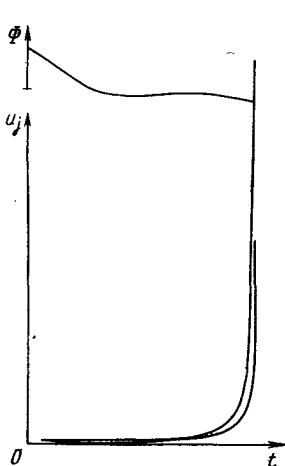


Рис. 15.11. Взрывная неустойчивость для  $F(\Phi)$  третьего типа при  $\theta_{12}=0$ ,  $\theta_{02}=\pi/4$  и  $\theta_{01}=-\pi/4$

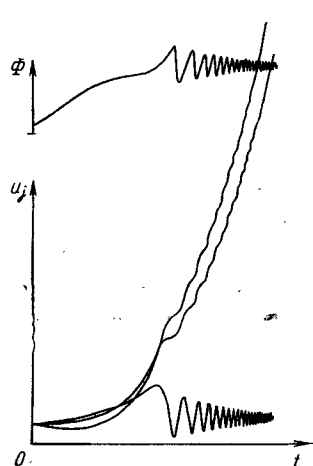


Рис. 15.12. Экспоненциальное решение для  $F(\Phi)$  четвертого типа при  $\theta_{12}=0$ ,  $\theta_{02}=\pi/4$  и  $\theta_{01}=-\pi/4$

Это приводит к осцилляциям фазы около точки  $\Phi_{\infty}$  и, как следствие, к неустойчивому решению взрывного типа (рис. 15.11). Наконец, при  $F(\Phi)$  четвертого типа снова получаем экспоненциально нарастающие амплитуды, так как фаза  $\Phi$  стремится к асимптотическому значению (рис. 15.12).

**Учет линейного затухания.** Возможность получения неустойчивых решений сохраняется и при наличии линейного затухания. В асимптотическом пределе, когда  $u_j \approx b$ , система уравнений приобретает вид:

$$\partial u_k / \partial t + \nu_k \mu_k = b u_l \rho_k; \quad (15.21a)$$

$$\partial u_l / \partial t + \nu_l \mu_l = b u_k \rho_l; \quad (15.21b)$$

$$\nu_l \mu_j = u_k u_l \cos(\Phi_a + \theta_{kl}); \quad (15.21в)$$

$$\beta_k \mu_k^2 + \beta_l \mu_l^2 = -(u_k u_l / b) \sin(\Phi_a + \theta_{kl}). \quad (15.21г)$$

Подставим в эти уравнения  $u_i = k_i \exp(at)$ ,  $i = k, l$ , и определим затем величины  $k_k/k_l$ ,  $a$  и  $b$ . Окончательный результат расчета да-  
ется следующими выражениями:

$$k_k/k_l = \{[p_k + (v_l - v_k) \beta_l]/[p_l + (v_k - v_l) \beta_k]\}^{1/2}; \quad (15.22)$$

$$\alpha = -(1/2)(v_l + v_k) + [(1/4)(v_l - v_k)^2 + b^2 p_k p_l]^{1/2}; \quad (15.23)$$

$$b = [(k_k/k_l) \beta_k + (k_l/k_k) \beta_l]^{-1}. \quad (15.24)$$

Как видно, коэффициенты нарастания амплитуд  $u_k$  и  $u_l$  равны и возрастают с увеличением разницы между  $v_l$  и  $v_k$ . Из соотноше-  
ний (15.23) и (15.24) вытекает следующее выражение для крити-  
ческого значения  $v$ , при котором коэффициент нарастания ампли-  
туд обращается в нуль:

$$v_k v_l = b^2 p_k p_l = p_k p_l / [(k_k/k_l) \beta_k + (k_l/k_k) \beta_l]^2. \quad (15.25)$$

Это выражение указывает на то, что при малых коэффициентах  
связи третьего порядка решения экспоненциального типа возмож-  
ны даже при наличии сильного линейного затухания. Из (15.21в)  
видно также, что асимптотическое значение фазы остается таким  
же, как и при  $v_j = 0$ . Учитывая еще уравнение (15.21г), видим, что  
и процесс локализации фазы протекает точно так же, как при  
 $v_j = 0$ .

На рис. 15.13 показаны результаты численного решения для  
одинаково затухающих волн. При превышении критического зна-  
чения  $v$  получается равновесное решение того же типа, что и при  
 $\theta_{ij} = 0$  (рис. 15.14). Критическое значение  $v$  существует и для ре-  
шений взрывного типа, но его трудно определить.

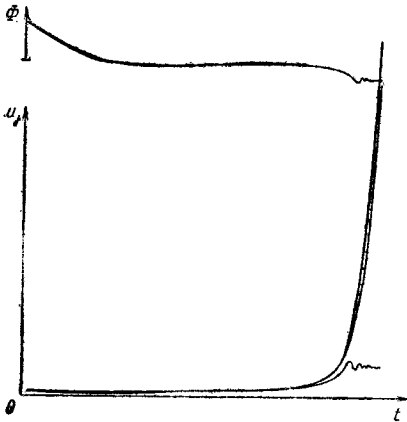


Рис. 15.13. Экспоненциальное реше-  
ние для всех  $v_j = 0,5$ ;  $\theta_{12} = 0$ ,  $\theta_{02} =$   
 $= \pi/4$  и  $\theta_{01} = -\pi/4$

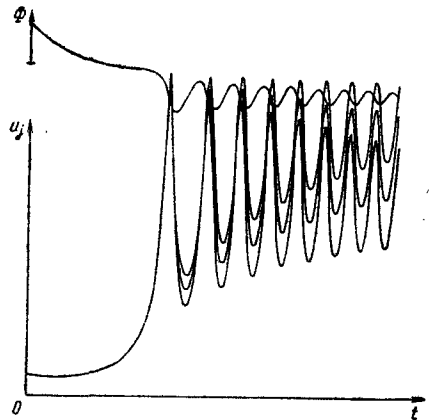


Рис. 15.14. Стационарное решение в  
случае, когда величина, характеризую-  
щая затухание ( $v_j = 0,5$ ), превышает  
пороговое значение и  $\theta_{12} = 0$ ,  $\theta_{02} =$   
 $= \pi/300$ ,  $\theta_{01} = -\pi/300$

При равновесии амплитуды имеют следующее асимптотическое значение:

$$u_j = \sqrt{v_k v_l / \rho_k \rho_l}. \quad (15.26)$$

Подставив это значение в (15.21г), можно получить соотношение для определения асимптотического значения фазы. Оно имеет вид кубического уравнения относительно  $\text{tg } \Phi_a$ .

**Эффективное нелинейное затухание.** В тех случаях, когда стабилизирующее действие нелинейного сдвига частоты  $\delta\omega$  утрачивается из-за наличия затухания, неустойчивость все же можно стабилизировать за счет эффективного нелинейного затухания  $\delta\nu_j$ . Для этого требуется, однако, чтобы нелинейное затухание было положительным, а это не всегда так [4]. На рис. 15.15 показан пример решения первого типа, когда одна из амплитуд стабилизируется вследствие нелинейного сдвига частоты, а две другие — за счет эффективного нелинейного затухания. Определить асимптотические значения этих амплитуд в общем случае очень сложно, но если предположить, что для нелинейного затухания  $\nu$  намного меньше критического значения (15.25), то при определении уровня насыщения можно учесть только нелинейное затухание, что даст

$$u_j = \frac{\rho_j \sqrt{\xi_k \xi_l \rho_k \rho_l}}{\xi_1 \xi_2 \rho_0 + \xi_0 \xi_2 \rho_1 + \xi_0 \xi_1 \rho_2}, \quad (15.27)$$

где  $\xi_k = -\text{Im } \alpha_{jk}$ ,  $j = 0, 1, 2$ .

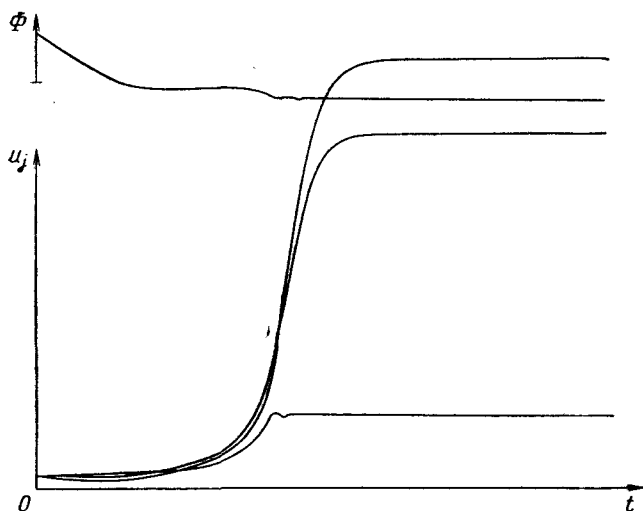


Рис. 15.15. Стационарное решение при одинаковом для всех амплитуд эффективном нелинейном затухании;  $\text{Im } \alpha_j = 0,08$ ;  $\theta_{12} = 0$ ,  $\theta_{02} = \pi/4$  и  $\theta_{01} = -\pi/4$

Асимптотическое значение фазы определить не удастся, если только решение не имеет вида, изображенного на рис. 15.15, когда уровень амплитуды, стабилизируемый за счет нелинейного затухания, намного ниже уровней остальных амплитуд. При этом асимптотическое значение фазы такое же, как и в отсутствие эффективного линейного затухания.

Отметим в заключение, что эффективное нелинейное затухание можно рассматривать как частный случай зависящего от времени затухания, введенного в работе [5].

### Задачи

15.1. Определить число затухающих волн, требующихся для того, чтобы потенциал имел конечное значение, когда все  $\theta_{ij}=0$ .

15.2. Установить, какая из амплитуд ( $u_1$  или  $u_2$ ) имеет большее асимптотическое значение в случае, показанном на рис. 15.9 б, при  $v_1=v_2$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weiland J., Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1973, v. 7, p. 222.
2. Byers J. A., Rensink M. E., Smith J. L., Walters J. M. — Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 826.
3. Weiland J. — Phys. Scripta, 1974, v. 9, p. 343.
4. Stenflo L. — Ibid., 1970, v. 2, p. 50.
5. Wilhelmsson H. — Phys. Rev., 1972, v. A6, p. 1973.

## ГЛАВА 16

### ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМЕ ПЛАЗМА — ПУЧОК

Попытка понять физический механизм нелинейной неустойчивости плазмы обычно сопряжена с необходимостью численного анализа нелинейных коэффициентов связи. В этой главе такой анализ проведен для плазменно-пучковой системы, в которой, в принципе, может развиваться взрывная неустойчивость. Использовано гидродинамическое и кинетическое описания и сравниваются результаты обоих подходов. С помощью решения численным методом связанных уравнений показано, что при реалистических значениях параметров плазмы и пучка начальное значение электрического поля, необходимое для развития взрывной неустойчивости, имеет порядок  $10^5$  В/м, а взрывное время —  $10^2$  мс.

#### Используемые модели и предположения

Рассмотрим конкретный пример численного анализа неустойчивой трехволновой системы, опираясь, в основном, на результаты работы [1]. Исследуемая система представляет собой три взаимодействующие плазменные волны, распространяющиеся параллельно направлению скорости пучка в плазменно-пучковой системе. Энергия одной из волн отрицательна, энергии двух других — поло-

жительны, причем эти волны распространяются в направлении, противоположном скорости первой волны. Для сравнения будем использовать как макроскопическую недиссипативную модель, так и кинетическую модель с учетом столкновительных эффектов. Предположим, что электронный пучок нейтрализуется пучком ионов, которые, однако, не принимают участия в волновом движении.

В гидродинамической модели дисперсионное уравнение имеет вид

$$\varepsilon(\omega, k) = 0, \quad (16.1)$$

где

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 - \omega_{pb}^2/(\omega - kV_{0b})^2 \quad (16.2)$$

( $V_{0b}$  — скорость пучка;  $\omega_{pe}$  и  $\omega_{pb}$  — плазменные частоты для стационарной плазмы и пучка соответственно). Температурные эффекты в (16.2) не учитываются.

Общий вид зависимости диэлектрической проницаемости от  $\omega$  показан на рис. 16.1. Уравнение (16.1) имеет четыре корня. Если

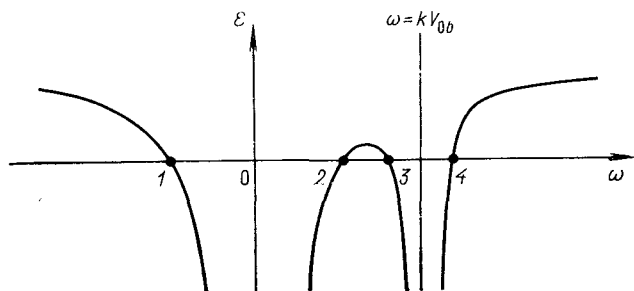


Рис. 16.1. Качественный вид зависимости диэлектрической проницаемости от частоты

два из них (2 и 3) комплексны, то это случай двухпотоковой неустойчивости [2, 3]. Мы, однако, будем рассматривать только случай четырех вещественных корней, который реализуется при

$$kV_{0b} > \omega_{pe} [1 + (\omega_{pb}/\omega_{pe})^{2/3}]^{3/2}. \quad (16.3)$$

Знак энергии волны определяется знаком производной  $\partial(\omega\varepsilon)/\partial\omega$  или, ввиду (16.1), знаком  $\omega(\partial\varepsilon/\partial\omega)$ . Отсюда следует, что волна, соответствующая корню 3, может иметь отрицательную энергию, тогда как волны, соответствующие корням 1, 2 и 4, имеют положительную энергию. Полезно отметить также, что в предельном случае совпадающих корней 2 и 3 можно получить волну с нулевой энергией [4]. Ниже рассмотрено взаимодействие трех волн, отвечающих корням 1, 2 и 3.

Будем считать выполненными следующие резонансные условия [1]:

$$\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0; \quad k_0 + k_1 + k_2 = 0. \quad (16.4)$$

Резонансные условия в такой форме можно получить, изменяя знаки  $\omega_j$  и  $k_j$  — пар величин, относящихся к волне с наибольшей частотой. Таким образом достигается более симметричная запись аналитических результатов без нарушения физической сущности решаемой задачи.

Как отмечалось выше, при описании нелинейного взаимодействия в рассматриваемой системе используются два подхода. Первый основан на применении гидродинамической модели при учете температурных эффектов с помощью включения в уравнения движения газокINETического давления. Это — частный случай рассмотрения трех продольных связанных волн [5] (см. также гл. 6). Второй подход опирается на кинетическую модель [6] с интегралом столкновений Батнагара — Гросса — Крука

$$(\partial f / \partial t)_{\text{CT}} = -\nu f + \nu (n / N_0) F_0, \quad (16.5)$$

где  $F_0$  и  $f$  — невозмущенная функция распределения и ее возмущение;  $N_0$  и  $n$  — средняя и возмущенная плотности частиц плазмы;  $\nu$  — эффективная частота соударений.

### Гидродинамическая модель

Для упрощения вычислений введем следующие безразмерные величины:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m}_j &= m_j / m_e; & \tilde{q}_j &= q_j / q_e; & \tilde{N}_j &= N_{0j} / N_{0e}; \\ \tilde{V}_{0j} &= V_{0j} / u_e; & \tilde{u}_j &= u_j / u_e; & u_e &= (kT_e / m_e)^{1/2}; & \tilde{\omega}_s &= \omega_s / \omega_{pe}; \\ \tilde{\omega}_{pj} &= \omega_{pj} / \omega_{pe} = \tilde{N}_j \tilde{q}_j / m_j; & \tilde{k}_s &= k_s u_e / \omega_{pe}. \end{aligned} \right\} \quad (16.6)$$

Используя эти величины, запишем условия резонанса

$$\sum_s \tilde{\omega}_s = 0; \quad \sum_s \tilde{k}_s = 0,$$

дисперсионное уравнение

$$\varepsilon(\tilde{\omega}_s, \tilde{k}_s) = 1 - \sum_j \frac{\tilde{\omega}_{pj}^2}{(\tilde{\omega}_j - \tilde{k}_s \tilde{V}_{0j})^2 - \tilde{k}_s^2 u_e^2} = 0 \quad (16.7)$$

и коэффициенты связи

$$c_s = \frac{q_e}{m_e u_e} \tilde{\omega}_s \left( \prod_{r \neq s} \tilde{\omega}_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tilde{\omega}_r} \right)^{-1} \sum_i \left\{ \frac{\tilde{q}_j \tilde{\omega}_{pj}^2}{\tilde{m}_j} \prod_r [(\tilde{\omega}_r - \tilde{k}_r \tilde{V}_{0j})^2 - \tilde{k}_r^2 u_e^2]^{-1} \left[ \sum_r \frac{\tilde{k}_r}{\tilde{\omega}_r - \tilde{k}_r \tilde{V}_{0j}} \prod_r (\tilde{\omega}_r - \tilde{k}_r \tilde{V}_{0j}) - \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \tilde{k}_3 u_e^2 \right] \right\}. \quad (16.8)$$

## Кинетическая модель

Кинетическое описание основано на использовании уравнений Больцмана для каждой компоненты

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + v \frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{q_j}{m_j} E \frac{\partial F_j}{\partial v} = \left( \frac{\partial f_j}{\partial t} \right)_{\text{ст}}, \quad F_j = F_{0j} + f_j, \quad (16.9)$$

и уравнения Пуассона

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_j n_j, \quad (16.10)$$

где в качестве пространственной переменной выбрана координата  $x$ .

Решая линеаризованное уравнение (16.9), получаем для пространственно-временных компонент Фурье

$$n_j = \int f_j dv = - \frac{i q_j N_{0j}}{m_j} A_j B_j E, \quad (16.11)$$

где

$$A_j = \left( 1 - \frac{i v_j}{N_{0j}} \int \frac{F_{0j}}{\omega + i v_j - k v} dv \right)^{-1} \quad (16.12)$$

и

$$B_j = \frac{1}{N_{0j}} \int \frac{\partial F_{0j} / \partial v}{\omega + i v_j - k v} dv. \quad (16.13)$$

При выводе (16.11) использовано выражение (16.5) для интеграла столкновений.

С помощью (16.11) можно найти дисперсионное уравнение

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{1}{k_j} \sum_j \omega_{pj}^2 A_j B_j = 0 \quad (16.14)$$

и коэффициенты связи

$$c_s = \omega_s \left[ \prod_{r \neq s} \left( \omega_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_r} \right)^* \right]^{-1} \sum_j \frac{q_j \omega_{pj}^2 A_{js}}{m_j N_{0j}} \times \\ \times \sum_{r \neq s} \int \frac{\partial F_{0j} / \partial v - i v_j A_{jr}^* B_{jr}^* F_{0j}}{(\omega_s - i v_j - k_s v)^2 (\omega_r^* - i v_j - k_r v)} dv, \quad (16.15)$$

где

$$\omega_s \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_s} = - \frac{\omega_s}{k_s} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 A_{js}}{N_{0j}} \int \frac{\partial F_{0j} / \partial v + i v_j A_{js} B_{js} F_{0j}}{(\omega_s + i v_j - k_s v)^2} dv. \quad (16.16)$$

Если в качестве невозмущенной функции распределения выбрать максвелловскую функцию с дрейфом

$$F_0(v) = (N_0 / u \sqrt{2\pi}) \exp \{ - (v - V_0)^2 / 2u^2 \}, \quad (16.17)$$

то все интегралы в (16.12), (16.13), (16.15) и (16.16) можно выразить через дисперсионную функцию плазмы [7]

$$G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{x-\xi} dx \quad (16.18)$$

и ее аналитическое продолжение [1]. В дальнейшем будем использовать единое обозначение  $G(\xi)$  для обеих этих функций.

### Численный анализ коэффициентов связи

При расчете коэффициентов связи прежде всего необходимо определить резонансные точки для частот и волновых векторов. Эти точки удовлетворяют следующим пяти уравнениям:

$$\sum \operatorname{Re} \tilde{\omega}_s = 0; \quad (16.19)$$

$$\sum \tilde{k}_s = 0; \quad (16.20)$$

$$\varepsilon(\omega_s, k_s) = 0, \quad s = 0, 1, 2. \quad (16.21)$$

Таким образом, любую из шести величин  $\omega_s, k_s$  ( $s=0, 1, 2$ ) можно взять в качестве параметра, тогда все остальные величины будут определяться с помощью (16.19) — (16.21). Мы пользовались схемой расчета, включающей следующие процедуры:

- 1) задание  $\tilde{k}_0$ ;
- 2) определение  $\tilde{\omega}_0 = \tilde{\omega}_0(\tilde{k}_0)$  по (16.21);
- 3) запись (16.19) в виде уравнения относительно  $k_2$

$$F(\tilde{k}_2) = \operatorname{Re} \tilde{\omega}_0(\tilde{k}_0) + \operatorname{Re} \tilde{\omega}_1(-\tilde{k}_0 - \tilde{k}_2) + \operatorname{Re} \tilde{\omega}_2(\tilde{k}_2) = 0 \quad (16.22)$$

и решение этого уравнения методом итераций;

- 4) определение  $\tilde{k}_1$  по формуле  $\tilde{k}_1 = -\tilde{k}_0 - \tilde{k}_2$ ;
- 5) определение  $\tilde{\omega}_1(k_1)$  и  $\omega_2(k_2)$  по (16.21).

В гидродинамической модели  $\varepsilon(\tilde{\omega}, \tilde{k})$  имеет вид полинома относительно  $\tilde{\omega}$ , корни которого можно найти стандартными методами. Но в кинетической модели существует трудность, связанная с выбором начальных значений при итерационной процедуре. Мы выбирали эти значения, исходя из решения дисперсионного уравнения в низкотемпературном приближении. Такой выбор целесообразен тогда, когда влияние столкновительных и температурных эффектов сравнительно невелико.

Грубую оценку резонансных величин можно получить на основе рассмотрения холодной плазмы при наличии пучка малой плотности. Именно, при  $|k_1|, |k_2| > \omega_{pe}/V_{0b}$

$$\omega_0 \approx -\omega_{pe} \operatorname{sign} k_0; \quad \omega_1 \approx \omega_{pe} \operatorname{sign} k_1; \quad \omega_2 \approx k_2 V_{0b}.$$

Подстановка этих значений в (16.19) — (16.21) дает при отрицательных  $k_0$ :

$$k_1 = -k_0 + 2\omega_{pe}/V_{0b}; \quad k_2 = -2\omega_{pe}/V_{0b};$$

$$\omega_0 = \omega_{pe}; \quad \omega_1 = \omega_{pe}; \quad \omega_2 = -2\omega_{pe}.$$



При положительных  $k_2$  дело сводится к изменению знаков всех частот и волновых чисел, т. е. в физическом отношении решение остается неизменным. Приведенное значение  $k_2$  и было использовано в качестве начального при решении (16.22) методом итераций.

### Численные значения параметров

Введем индексы  $j=i, e$  для ионов и электронов стационарной плазмы,  $j=b$  для электронов пучка и положим

$$\tilde{v}_j = v_j / \omega_{pe}. \quad (16.23)$$

Расчеты будем проводить для  $\tilde{q}_i = -1$ ,  $\tilde{m}_i = 1840$ ,  $u_e = 0,92 \cdot 10^5$  м/с ( $T_e = 560$  К),  $\tilde{u}_i = 1,6 \cdot 10^{-2}$ . Кроме того, в качестве исходных данных выберем  $\tilde{k}_0 = -0,93 \cdot 10^{-3}$ ;  $\tilde{u}_b = 1$  или 15;  $\tilde{\omega}_{pb} = 3,2 \cdot 10^{-2}$  ( $\tilde{N}_b = 10^{-3}$ );  $\tilde{V}_{ob} = 7,7 \cdot 10^2$ . В гидродинамической модели будем полагать  $\tilde{v}_e = 0$ , в кинетической —  $\tilde{v}_e = 0$  или  $\tilde{v}_e = 0,01$ .

Приведенные здесь безразмерные параметры соответствуют, например, следующим значениям физических величин:  $u_i = 1,5 \cdot 10^3$  м/с ( $T_i = 270$  К);  $k_0 = -4,0 \cdot 10^2$  м $^{-1}$ ;  $\omega_{pe} = 5,6 \cdot 10^{10}$  с $^{-1}$ ;  $v_e = 5,6 \cdot 10^8$  с $^{-1}$  ( $N_{oe} = 10^{18}$  м $^{-3}$ );  $\omega_{pb} = 1,8 \cdot 10^9$  с $^{-1}$ ;  $V_{ob} = 10^8$  м/с ( $N_b = 10^{15}$  м $^{-3}$ );  $u_b = 1,4 \cdot 10^6$  м/с ( $T_b = 1,3 \cdot 10^5$  К).

Такие значения параметров реализуются в экспериментальных условиях [8].

### Результаты численного анализа

Расчетные зависимости коэффициентов связи и мнимых составляющих частот от различных параметров показаны на рис. 16.2—16.5.

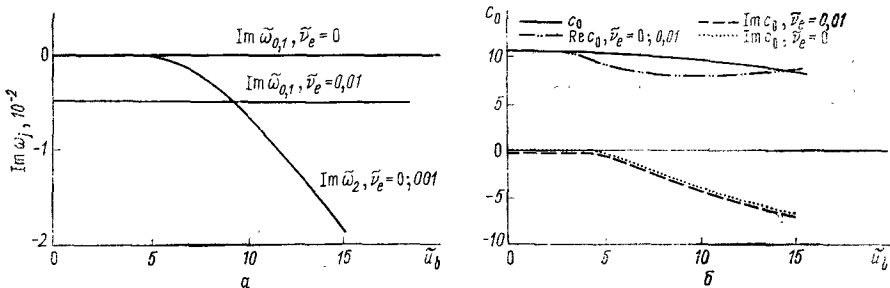


Рис. 16.2. Зависимости величины, характеризующей линейное затухание (а), коэффициентов связи плазменных волн (б) от тепловой скорости частиц пучка (сплошные кривые рассчитаны в гидродинамическом приближении);  $\tilde{k}_0 = -0,93 \cdot 10^{-3}$ ,  $\tilde{N}_b = 10^{-3}$ ,  $\tilde{V}_{ob} = 7,7 \cdot 10^2$

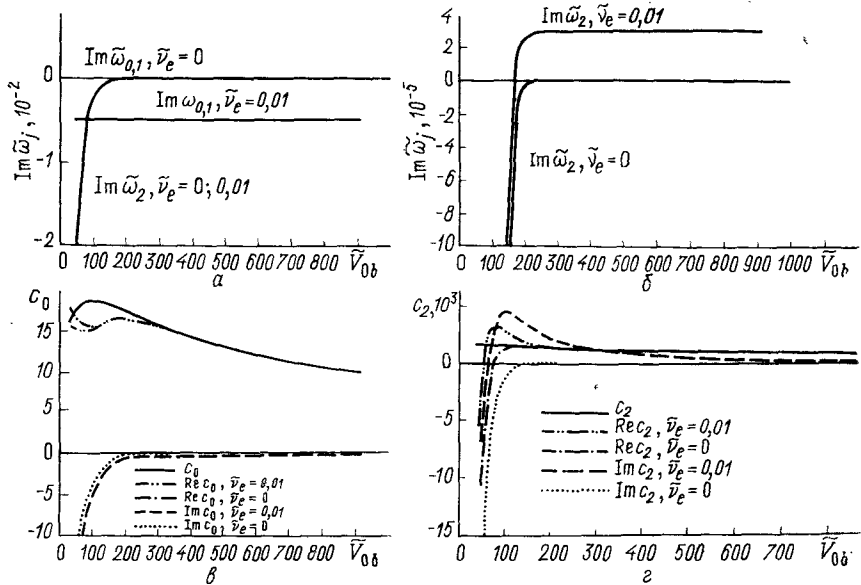


Рис. 16.3. Зависимости величины, характеризующей линейное затухание (а, б), коэффициентов связи плазменных (в) и пучковых (г) волн от скорости пучка (сплошные кривые на рис. 16.3, в, г отвечают гидродинамическому приближению);  $\tilde{k}_0 = -0,93 \cdot 10^{-3}$ ,  $\tilde{N}_b = 10^{-3}$ ,  $\tilde{u}_b = 1$

**Зависимость от тепловой скорости частиц пучка.** Дисперсионное уравнение (16.14) можно переписать следующим образом:

$$\varepsilon(\omega_s, k_s) = 1 - \frac{1}{k_s^2} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{2u_j^2} A_{js} G'_{js} = 0, \quad (16.24)$$

где

$$A_{js} = \left( 1 + \frac{iv_j}{\sqrt{2}} \frac{G'_{js}}{k_s u_j} \right)^{-1}. \quad (16.25)$$

Без учета движения ионов

$$\varepsilon(\omega_s, k_s) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2k_s^2 u_e^2} \frac{G'_{es}}{1 + iv/\sqrt{2} k_s u_e} - \frac{\omega_{pb}^2}{2k_s^2 u_b^2} G'_{bs}. \quad (16.26)$$

Поскольку

$$|\xi_{es}| = |(\omega_s + iv)/\sqrt{2} k_s u_e| \gg 1, \quad (16.27)$$

можно воспользоваться асимптотическим разложением  $G(\xi_{es})$  [7]. В результате получим

$$\varepsilon(\omega_s, k_s) \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_s^2} \left( 1 - i \frac{v}{\omega_s} \right) - \frac{\omega_{pb}^2}{2k_s^2 u_b^2} G'_{bs}. \quad (16.28)$$

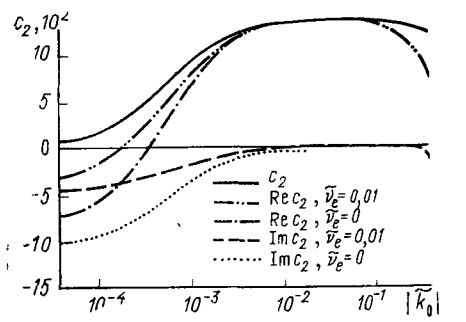
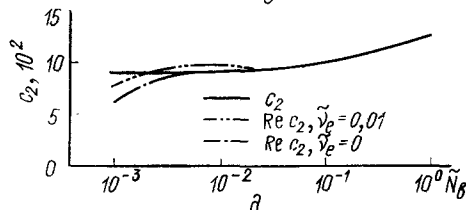
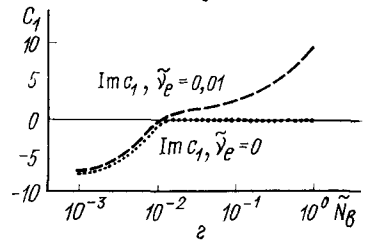
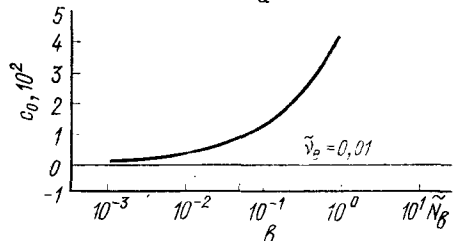
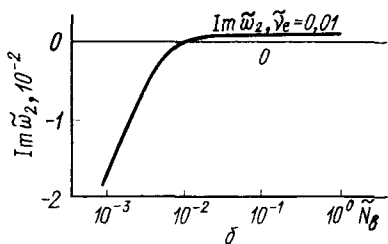
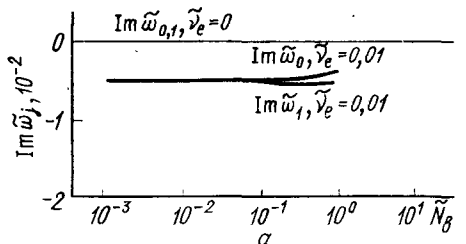


Рис. 16.4. Зависимости величины, характеризующей линейное затухание (а, б), коэффициентов связи плазменных (в, г) и пучковых (д) волн от плотности пучка (сплошные кривые на рис. 16.4, г, д отвечают гидродинамическому приближению; гидродинамические и кинетические значения на рис. 16.4, в совпадают);  $\tilde{k}_0 = -0,93 \cdot 10^{-3}$ ;  $\tilde{u}_b = 15$ ;  $\tilde{V}_{0b} = 7,7 \cdot 10^2$

Рис. 16.5. Зависимость коэффициента связи пучковой волны от волнового числа плазменной волны  $|\tilde{k}_0|$  (сплошная кривая рассчитана в гидродинамическом приближении);  $\tilde{N}_b = 10^{-3}$ ,  $\tilde{u}_b = 15$ ,  $\tilde{V}_{0b} = 7,7 \cdot 10^2$

Для плазменных волн

$$\omega_s = \omega_{1,2} = \omega_{pe} (1 + \delta_1 + i\delta_2), \quad (16.29)$$

где  $|\delta_1|, |\delta_2| \ll 1$ . Величины  $\delta_1$  и  $\delta_2$  можно определить с помощью (16.27) и (16.28) при  $\epsilon = 0$ , что в конечном счете дает

$$\omega_s = \omega_{pe} + i0,5\nu. \quad (16.30)$$

Эта формула полностью согласуется с данными рис. 16.2, а.

Отметим, что для получения  $\delta_1 \neq 0$  необходимо учесть движение ионов, наличие электронного пучка и столкновительные члены порядка  $\nu^2/\omega_e^2$

При рассмотрении пучковой волны необходимо различать низкотемпературный и высокотемпературный пределы. В первом случае

$$|\xi_{b2}| = \left| \frac{\tilde{\omega}_2 - \tilde{k}_2 \tilde{V}_{0b}}{\sqrt{2} \tilde{k}_2 \tilde{u}_b} \right| \gg 1, \quad (16.31)$$

и последнее слагаемое в (16.26) приобретает вид

$$(\omega_{pb}^2/2k_s^2 u_b^2) G'_{b2} = \omega_{pb}^2/(\omega_2 - k_2 V_{0b})^2.$$

Предполагая еще, что

$$k_2 \approx -2\omega_{pe}/V_{0b}, \quad |\text{Im } \omega_2| \ll \nu,$$

и используя тот же способ, что и для плазменных волн, находим

$$\tilde{\omega}_2 = k_2 V_{0b} (1 - \tilde{\omega}_{pb}/\sqrt{3} - i\nu\tilde{\omega}_{pb}/12\sqrt{3}). \quad (16.32)$$

Наличие отрицательной мнимой части в (16.32) указывает на возможность так называемой резистивной неустойчивости [9, 10], которая развивается вследствие того, что при отборе энергии от волны с отрицательной энергией ее амплитуда нарастает. Коэффициент нарастания определяется величиной

$$-\text{Im } \tilde{\omega}_2 \approx 3,1 \cdot 10^{-5}.$$

В высокотемпературном пределе соотношение (16.31) утрачивает силу. Однако из асимптотического вида  $G(\xi)$  следует, что температурные эффекты существенны лишь при условии  $|\xi_{b2}| \leq 4$ . Из (16.32) видно, что

$$|\xi_{b2}| \approx (\tilde{V}_{0b}/\tilde{u}_b) \sqrt{\tilde{N}_b/3}. \quad (16.33)$$

Таким образом, учет температуры пучка необходим при

$$\tilde{u}_b > (\tilde{V}_{0b}/4) \sqrt{\tilde{N}_b/3} \approx 3,5, \quad (16.34)$$

что подтверждается данными рис. 16.2, а.

Наконец, учитывая, что относительная плотность пучка мала ( $N_{0b} \ll N_{0e}$ ), получаем

$$|\partial \epsilon / \partial \omega_2| \gg |\partial \epsilon / \partial \omega_0|, \quad |\partial \epsilon / \partial \omega_1|. \quad (16.35)$$

Это дает для коэффициентов связи

$$|c_2| \gg |c_0|, \quad |c_1|.$$

Из рис. 16.2, б следует, что влияние температуры пучка на коэффициенты связи становится заметным при  $\tilde{u}_b \approx 3,5$ , причем если  $\nu = 0,01 \omega_{pe}$ , то  $c_s$  не является вещественным в пределе  $\tilde{u}_b \rightarrow 0$ .

Эффект влияния температуры пучка существен в области  $10 < \tilde{u}_b < 15$ , где фазовая скорость пучковой волны в системе отсчета, связанной с пучком, имеет тот же порядок величины, что и тепловая скорость частиц пучка, т. е. наблюдается резонанс волны с частицами пучка.

**Зависимость от направленной скорости пучка.** Плазменные волны при условии (16.27) не испытывают влияния пучка и температуры стационарной плазмы (см. рис. 16.3, а). Для пучковой волны учет температуры пучка важен при

$$\tilde{V}_{ob} \leq 4\sqrt{3} \tilde{u}_b / \sqrt{\tilde{N}_b} \approx 200, \quad (16.36)$$

тогда как при более высоких скоростях ( $\tilde{V}_{ob} > 200$ ) мнимая составляющая частоты обусловлена только наличием соударений. В результате может развиваться слабая линейная неустойчивость с инкрементом

$$-\text{Im} \omega_2 \approx \omega_{pe} \tilde{v} \tilde{\omega}_{pb} / 6\sqrt{3}. \quad (16.37)$$

О влиянии  $\tilde{v}$  на величину  $\text{Im} \omega_2$  можно судить по кривым, приведенным на рис. 16.3, б.

При  $\tilde{V}_{ob} \geq 200$  и  $\tilde{v} = 0$  коэффициенты связи вещественны, причем их гидродинамические и кинетические значения практически совпадают. При  $\tilde{v} \neq 0$  мнимые части коэффициентов  $c_0$  и  $c_1$  малы, а мнимая часть  $c_2$  относительно велика. В области  $\tilde{V}_{ob} \leq 200$  влияние температурных эффектов значительно, коэффициенты связи  $c_0$  и  $c_1$  имеют одинаковый порядок величины (см. рис. 16.3, в), а коэффициент  $c_2$  относительно мал (см. рис. 16.3, г).

**Зависимость от плотности пучка.** Если  $\tilde{N}_b \leq 10^{-2}$ , то справедливо соотношение (16.30), но при увеличении  $\tilde{N}_b$  и  $\tilde{v} \neq 0$  наблюдается некоторое влияние пучка на плазменные волны (см. рис. 16.4, а). Пучковая волна испытывает сильное влияние температурных эффектов при  $\tilde{N}_b \leq 1,6 \cdot 10^{-2}$  (затухание Ландау). Предельное значение  $\tilde{N}_b$ , при котором температурные эффекты становятся несущественными, можно получить из (16.33) при  $|\xi_{b2}| \approx 4$ :

$$\tilde{N}_b = 16,3 (\tilde{u}_b / \tilde{V}_{ob}) \approx 1,8 \cdot 10^{-2}, \quad (16.38)$$

что прекрасно согласуется с результатами численного анализа (см. рис. 16.4, б).

Зависимости коэффициентов связи от плотности пучка очень похожи: они возрастают с увеличением  $\tilde{N}_b$  и при  $\tilde{N}_b \approx 1$  достигают того же порядка величины, что и  $c_2$ . Для получения доминирующего вклада нелинейных слагаемых при умеренных значениях начальных амплитуд необходимо использовать очень плотные пучки (см. рис. 16.4, в, г). Как и следовало ожидать, влияние температурных эффектов на коэффициенты связи утрачивается при  $\tilde{N}_b \geq 1,8 \cdot 10^{-2}$ . Более того, в области высоких плотностей пучка мнимые части этих коэффициентов пренебрежимо малы по сравнению с вещественными (см. рис. 16.4, д).

При малых плотностях пучка ( $\tilde{N}_b \sim 10^{-3}$ ) можно пренебречь зависимостью частот  $\omega_0$  и  $\omega_1$  от параметров пучка и пользоваться

приближенной формулой (16.30). Расчет показывает, что при этом  $|\tilde{k}_0| \leq 0,25$ . Однако пучковая волна испытывает сильное влияние температуры пучка при любых значениях  $|\tilde{k}_0|$ , так как  $\tilde{u}_b$  велико ( $\tilde{u}_b = 15$ ). В результате коэффициенты связи также сильно зависят от кинетических эффектов, причем при  $|\tilde{k}_0| \geq 0,1$  для правильного описания этих эффектов требуется учет температуры как пучка, так и плазмы. В определенных областях изменения параметров кинетические и столкновительные эффекты становятся настолько значительными, что могут приводить к изменению знаков коэффициентов связи. Например, знак  $Re c_2$  изменяется из-за кинетических эффектов при  $|\tilde{k}_0| \sim 10^{-4}$  и из-за столкновений — при  $|\tilde{k}_0| \approx 2,5 \cdot 10^{-4}$  (см. рис. 16.5).

### Численное решение связанных уравнений

Для исследования эволюции амплитуд и фаз при тех значениях коэффициентов связи и линейного затухания, которые обсуждались выше, необходимо численное интегрирование связанных уравнений.

Известно, что в пределе холодной бесстолкновительной плазмы в рассматриваемой системе может развиваться взрывная неустойчивость [1]. При учете столкновительных и кинетических эффектов для ее развития требуется, чтобы начальные амплитуды превосходили некоторый пороговый уровень (см. гл. 10). Этот уровень возрастает при усилении диссипативных эффектов и снижается при увеличении силы связи. Последнее может быть достигнуто с помощью увеличения плотности пучка (см. рис. 16.4, в, г).

Отметим, что при численном интегрировании системы связанных уравнений удобно пользоваться нормировкой (7.4).

На рис. 16.6, а, б приведены результаты численного решения, при получении которого использованы коэффициенты связи, приве-

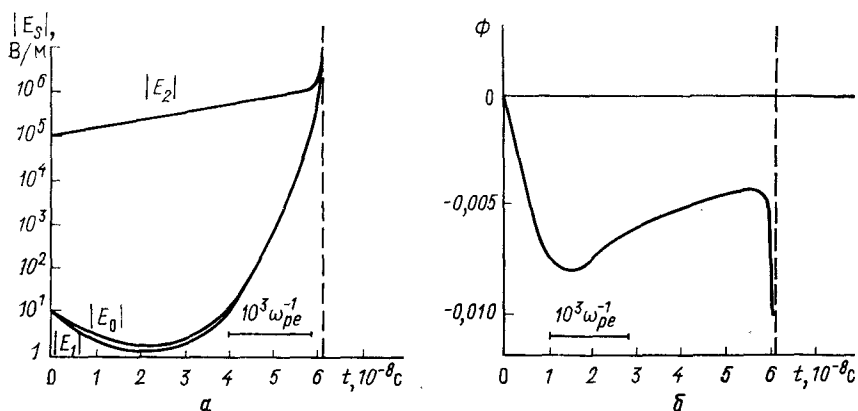


Рис. 16.6. Временная эволюция амплитуды  $|E_s|$  (а) и фазы  $\Phi$  (б) при резистивной неустойчивости

денные на рис. 16.4, *a* — *z*. Предполагалось, что плотности пучка и плазмы одинаковы, т. е.  $\tilde{n}_b = 1$  и  $\tilde{v} = 0,01$ . При этом решения дисперсионного уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_0 &= 1,8 + i 4,03 \cdot 10^{-3}; & \tilde{\omega}_1 &= 1,0\bar{6} + i 5,23 \cdot 10^{-3}; \\ \tilde{\omega}_2 &= -2,24 - i 7,10 \cdot 10^{-4},\end{aligned}$$

что дает для производных  $\partial \varepsilon / \partial \omega$ :

$$\begin{aligned}\partial \varepsilon / \partial \tilde{\omega} &= 1,52 + i 1,14 \cdot 10^{-3}; & \partial \varepsilon / \partial \tilde{\omega} &= 1,61 - i 1,46 \cdot 10^{-3}; \\ \partial \varepsilon / \partial \tilde{\omega} &= 1,26 + i 4,11 \cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

Переход от приведенных здесь безразмерных величин к реальным физическим величинам осуществляется с помощью плазменной частоты  $\omega_{pb} = 5,6 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ .

Расчет амплитуд выполнялся в предположении слабого взаимодействия, т. е. при условии

$$\Delta | \bar{E}_s | / | \bar{E}_s | \ll 1; \quad \Delta | \phi_s | \ll 1, \quad (16.39)$$

где  $\Delta$  означает изменение за временной интервал порядка  $\omega_{pe}^{-1}$ . Так как характерное время взаимодействия уменьшается с возрастанием уровня амплитуд, (16.39) эквивалентно определенному ограничению на этот уровень [для сравнения с (16.39) на рисунках показана величина  $\omega_{pe}^{-1}$ ]. Были выбраны следующие начальные значения фаз и амплитуд:

$$\Phi(0) = 0; \quad | \bar{E}_0 | = | \bar{E}_1 | = 10 \text{ В/м}; \quad | \bar{E}_2 | \sim 10^5 \text{ В/м}.$$

Поскольку фазовые углы коэффициентов связи малы, величина (10.10) практически является интегралом движения. Поэтому фаза  $\Phi$  остается близкой к нулю в течение всего времени взаимодействия (см. рис. 16.6, *б*) и осцилляции амплитуды отсутствуют (см. рис. 16.6, *а*). На начальной стадии процесса амплитуды волн *0* и *1* убывают, а амплитуда волны *2* увеличивается из-за наличия резистивной неустойчивости. При  $t \approx 24$  нс нелинейные слагаемые начинают играть доминирующую роль в эволюции волн *0* и *1*, и при  $t \approx 61$  нс наступает взрыв. Асимптотическое значение фазы удовлетворяет уравнению

$$\sum \text{tg} [\Phi(t_\infty) + \theta_{ij}] = 0, \quad (16.40)$$

что дает для рассматриваемого случая  $\Phi(t_\infty) = -0,01$ . Это значение хорошо согласуется с расчетными результатами (см. рис. 16.6, *б*).

Численное интегрирование связанных уравнений проводилось также при учете затухания всех трех волн, а именно при  $\text{Im} \tilde{\omega}_0 = \text{Im} \omega_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\text{Im} \tilde{\omega}_2 = 2,32 \cdot 10^{-3}$  ( $\theta_{ij}$  оставались близкими к нулю). Оказалось, что порог неустойчивости в этом случае располагается между  $2,71 \cdot 10^5$  и  $2,72 \cdot 10^5$  В/м. Для сравнения: оценка порога по (11.1) дает значение  $2,5 \cdot 10^5$  В/м.

## Обсуждение результатов

Расчет зависимости коэффициентов связи для трехволновой системы от скорости и плотности пучка, а также от температурных и столкновительных эффектов показывает, что в области реальных значений параметров плазмы и пучка существует значительное расхождение между результатами макроскопического и кинетического описаний. В низкотемпературной области это расхождение объясняется тем [11], что волновое движение в кинетической модели рассматривается как адиабатический процесс, тогда как в макроскопической модели оно трактуется в рамках изотермического описания.

В работах [12, 13] также рассматривались трехволновые системы типа тех, которые проанализированы в настоящей главе. Первая из этих работ содержит предварительные результаты экспериментального исследования взрывной неустойчивости. Работа [14] посвящена теоретическому исследованию неустойчивости типа конуса потерь в зеркальных ловушках.

В работе [15] опубликованы результаты экспериментов по изучению неустойчивости в системе ионный пучок — плазма, которые согласуются с предсказаниями нелинейной теории взрывной неустойчивости трех когерентно взаимодействующих волн. Эти результаты вызывают особый интерес в связи с проблемой нагрева плазмы, так как они показывают, что энергия отбирается как от пучка, так и от поля накачки.

### Задачи

16.1. Рассмотрим холодную плазменно-пучковую систему с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu)} - \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - kV_b)(\omega - kV_b - i\nu)}.$$

Пусть в такой системе взаимодействуют три волны: пучковая волна  $0$  с положительной энергией, пучковая волна  $1$  с отрицательной энергией и плазменная волна  $2$ , причем резонансные условия имеют вид

$$\operatorname{Re} \omega_0 = \operatorname{Re} \omega_1 + \operatorname{Re} \omega_2; \quad k_0 = k_1 + k_2,$$

где все  $\operatorname{Re} \omega_j > 0$ . Предположим также, что любая из волн распространяется параллельно или антипараллельно пучку и что в линейном приближении пучковая и плазменная волны испытывают влияние только пучка и стационарной плазмы соответственно.

Определить  $k_2$  при всех перечисленных условиях.

16.2. Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(\omega, k)$ , указанная в предыдущей задаче, соответствует холодной плазменно-пучковой системе, в которой электроны пучка и плазмы характеризуются одной и той же частотой столкновений  $\nu$ . Найти для этого случая продольное нормальное колебание  $a$  и установить соотношение между  $a$  и  $E$ .

16.3. Рассчитать коэффициенты связи для взаимодействия между плазменными и пучковыми волнами в холодной плазменно-пучковой системе при учете частоты столкновений  $\nu$ . При расчете использовать те же резонансные условия, что и в задаче 16.1.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Östberg K.** Dissertation. Chalmers Univ. of Technology, Göteborg, 1973.
2. **Clemmov P. C., Dougherty J. P.** Electrodynamics of Particles and Plasmas. Lond., Addison Wesley, 1969.
3. **Ott E.** — Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 442.
4. **Tsyтович V. N., Wilhelmsson H.** — Phys. Scripta, 1973, v. 7, p. 251.
5. **Wilhelmsson H.** — J. Plasma Phys., 1969, v. 3, p. 215.
6. **Stenflo L.** — Ibid., v. 12, p. 509.
7. **Fried B. D., Conte S. D.** The Plasma Dispersion Function. N. Y., Academic Press, 1961.
8. **Böhmer H., Chang J., Raether M.** — Plasma Phys., 1969, v. 11, p. 645.
9. **Birdsall C. K., Brewer G. R., Haeff A. V.** — Proc. IRE, 1953, v. 41, p. 865.
10. **Musha T., Agu M.** — J. Phys. Soc. Jap., 1969, v. 26, p. 541.
11. **Stenflo L., Wilhelmsson H., Östberg K.** — Phys. Scripta, 1971, v. 3, p. 231.
12. **Hopman H. J.** — Stanford Rep. SU-IPR 402, 1970.
13. **Harris E. G.** Thermonuclear Division Annual Progress Rep., Oak Ridge Nat. Lab., 1976.
14. **Liu C. S., Aamodt R. E.** — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 95.
15. **Nakamura S.** — J. Phys. Soc. Jap., 1977, v. 42, p. 280.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

**Wilhelmsson H.** — Phys. Scripta, 1970, v. 2, p. 113.

## ГЛАВА 17

### ДИСПЕРСИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Настоящая глава посвящена исследованию эффектов, связанных с учетом вторых производных дисперсионных функций по частоте. Сформулированы уравнения движения для амплитуд и фаз взаимодействующих волн и найдены интегралы движения, содержащие дисперсионные слагаемые второго порядка. Наличие таких слагаемых приводит к наложению дополнительных быстрых осцилляций на обычные нелинейные решения. Определен период этих колебаний и показано, что их амплитуды могут при определенных условиях увеличиваться в результате нелинейного взаимодействия. Особенностью этого процесса является то, что нарастание возможно как при разных, так и при одинаковых знаках энергий взаимодействующих волн.

Дисперсионные осцилляции, которые выглядят как своеобразная «рябь» на обычных нелинейных зависимостях, вносят элемент неопределенности в эволюцию амплитуд и фаз и могут поэтому интерпретироваться как результат индетерминированности начальных условий (см. также гл. 18).

### Постановка задачи

Как отмечалось в гл. 5, общее динамическое уравнение для пространственно-однородного электрического поля имеет вид

$$\left( \frac{\partial D_j}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 D_j}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right) \bar{E}_j = N.L, \quad (17.1)$$

где  $D_j = D_j(\omega, k)$  — дисперсионная функция плазмы; N.L. — сумма резонансных нелинейных слагаемых.

Следует заметить, что во многих работах учитывается только первая производная в (17.1). Как правило, это связано с тем, что значение производных быстро убывает с увеличением их порядка. В некоторых случаях, однако,  $\partial D_j / \partial \omega$  мало [1, 2] и вторая производная оказывается доминирующей. Более того, даже тогда, когда  $\partial^2 D_j / \partial \omega^2$  мало по сравнению с  $\partial D_j / \partial \omega$ , могут быть реализованы такие условия, при выполнении которых членами второго порядка пренебрегать нельзя. Поэтому возникает задача построения теории нелинейного взаимодействия волн с учетом дисперсионных эффектов второго порядка [3, 4].

Вводя величину

$$\delta_j = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_j / \partial \omega^2}{\partial D_j / \partial \omega} \quad (17.2)$$

и основываясь на уравнениях типа (17.1), можно получить следующие уравнения движения:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \delta_j \left[ u_j \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \frac{\partial u_j}{\partial t} \right] = \mp s_j u_k u_l \cos \Phi; \quad (17.3a)$$

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \delta_j \left[ \frac{1}{u_j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right)^2 \right] + s_j \sum \beta_{jk} u_k^2 = s_j \frac{u_k u_l}{u_j} \sin \Phi. \quad (17.3b)$$

Знак «минус» в (17.3a) соответствует волне 0, нижний — волнам 1 и 2. Множитель  $s_j$  определяет, как и ранее, знак энергии волны  $j$ , а  $\beta_{jk} = s_j \operatorname{Re} \alpha_{jk}$  (ср. с гл. 14).

Из уравнений (17.3) следует, что рассматриваемая трехволновая система имеет интегралы движения

$$\left. \begin{aligned} u_0^2 \left( 1 - 2\delta_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right) + s_0 s_1 u_1^2 \left( 1 - 2\delta_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) &= M_{01}; \\ u_1^2 \left( 1 - 2\delta_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) - s_1 s_2 u_2^2 \left( 1 - 2\delta_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right) &= M_{12}; \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

$$u_0 u_1 u_2 \sin \Phi - \frac{1}{2} \sum s_j \delta_j \left[ u_j^2 \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{1}{4} \sum_{jk} \beta_{jk} u_j^2 u_k^2 = \Gamma. \quad (17.5)$$

При выводе (17.5) использована симметричность матрицы  $\beta_{kj}$ , которая вытекает из условия сохранения энергии взаимодействия. Соотношения (17.4) имеют смысл обобщенных соотношений Мэнли — Роу и выражают закон сохранения энергии волнового движения. При учете дисперсионных эффектов второго порядка эта энергия определяется соотношением

$$\langle W_j \rangle = \frac{1}{4} \frac{\partial D_j}{\partial \omega} \left( 1 - 2\delta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right) \bar{E}_j \bar{E}_j^*. \quad (17.6)$$

### Качественный анализ решения

Можно ожидать, что при малых  $\delta_j$  дисперсионные эффекты второго порядка в целом слабо возмущают решение с  $\delta_j = 0$ . Одна-

ко их влияние может оказаться значительным в тех областях, где первая производная относительно мала. Кроме того, не следует упускать из вида, что введение высших производных влечет за собой введение новых начальных условий, т. е. в конечном счете появление дополнительных степеней свободы.

На рис. 17.1 представлено численное решение задачи о взаимодействии волн с положительной и отрицательной энергиями в условиях стабилизации взрывной неустойчивости за счет нелинейного сдвига частоты. Обращает на себя внимание характерная осцилляторная структура решения вблизи минимумов невозмущенного решения и заметное различие максимальных значений амплитуд. Из (17.5) видно, что дисперсионные эффекты второго порядка могут как усиливать, так и ослаблять стабилизирующее действие нелинейного сдвига частоты. В последнем случае система может остаться неустойчивой даже при учете сдвига частоты (рис. 17.2),

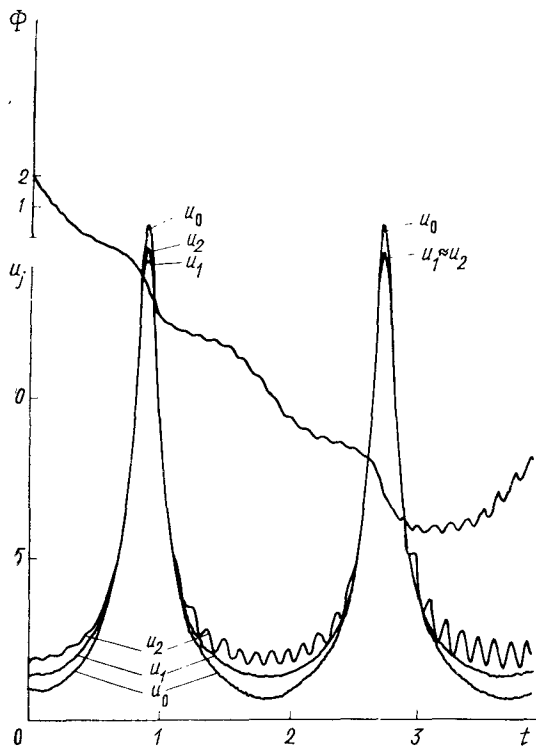


Рис. 17.1. Взаимодействие между волнами с положительной и отрицательной энергиями ( $\delta_0 = -0,005$ ;  $\delta_1 = -0,01$ ;  $\delta_2 = -0,02$ ;  $\beta_{jk} = -0,03$ )

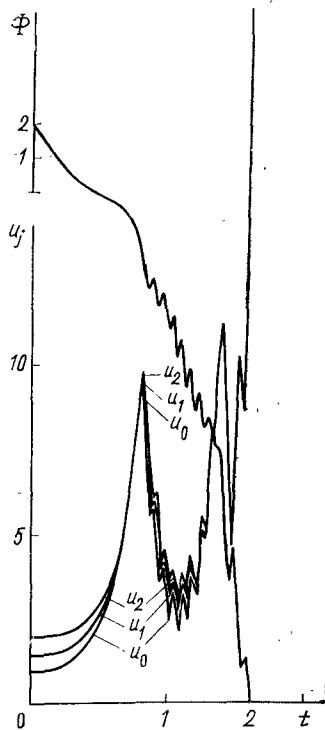


Рис. 17.2. Развитие взрывной неустойчивости при взаимодействии волн с энергиями различных знаков ( $\delta_0 = -0,01$ ;  $\delta_1 = \delta_2 = 0,01$ ;  $\beta_{jk} = -0,05$ )

если величина  $\delta_j$  удовлетворяет условиям  $\text{sign } \delta_0 = \text{sign } \beta_{0k}$  и  $\text{sign } \beta_{jk} = -\text{sign } \delta_j$  ( $j=1,2$ ).

### Влияние начальных условий

Наиболее типичным проявлением дисперсионных эффектов второго порядка служат быстрые осцилляции (см. рис. 17.1). Они обусловлены наличием дополнительных степеней свободы и часто могут быть подавлены при надлежащем выборе начальных условий.

Так как рассматриваемые осцилляции хорошо проявляются в основном вблизи минимумов невозмущенных решений, для их изучения достаточно решить следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \partial u_j / \partial t - \delta_j [u_j \partial^2 \phi_j / \partial t^2 + 2(\partial \phi_j / \partial t) \partial u_j / \partial t] &= 0; \\ \partial \phi_j / \partial t + \delta_j [(1/u_j) \partial^2 u_j / \partial t^2 - (\partial \phi_j / \partial t)^2] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.7)$$

Эта система имеет интегралы движения

$$\left. \begin{aligned} M_j &= u_j^2 (1 - 2\delta_j \partial \phi_j / \partial t); \\ \Gamma_j &= (\delta_j / 2) [u_j^2 (\partial \phi_j / \partial t)^2 + (\partial u_j / \partial t)^2]. \end{aligned} \right\} \quad (17.8)$$

Первый из этих интегралов отвечает закону сохранения волновой энергии, второй — закону сохранения энергии взаимодействия.

Исключая  $\phi_j$  из (17.8), получаем решение для  $n_j = u_j^2$ :

$$n_j = \tilde{A}_j \sin [(1/\delta_j) t + \psi_j] + B_j, \quad (17.9)$$

где

$$\tilde{A}_j = 2 \sqrt{2\Gamma_j \delta_j (2\Gamma_j \delta_j + M_j)}; \quad B_j = 4\Gamma_j \delta_j + M_j. \quad (17.10)$$

Выражение (17.9) описывает осцилляции с частотой  $\omega_{Dj} = 1/\delta_j$  и фазой  $\psi_j$ , которая определяется начальными условиями.

Не следует, конечно, забывать, что из-за наличия связанных слагаемых система (17.8) не является точной. Тем не менее формула (17.9) удовлетворительно описывает процесс взаимодействия вблизи минимумов невозмущенных решений, в чем легко убедиться путем сравнения с результатами численного анализа. Это означает, что величины  $M_j$  и  $\Gamma_j$  можно рассматривать как постоянные в течение характерного времени осцилляций. При значительных вариациях невозмущенных величин необходимо учитывать временную зависимость  $\tilde{A}_j$  и  $B_j$ . Фаза  $\psi_j$  изменяется только при сильных изменениях невозмущенного решения. Наконец, временная зависимость величин  $M_j$  и  $\Gamma_j$  определяется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \partial M_j / \partial t &= \mp s_j 2u_0 u_1 u_2 \cos \Phi; \\ \frac{\partial \Gamma_j}{\partial t} &= s_j \left( \pm u_0 u_1 u_2 \cos \Phi \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + u_1 u_l \frac{\partial u_j}{\partial t} \sin \Phi - u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} \sum_k \beta_{jk} u_k^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

## Временная эволюция осцилляций

В течение времени развития и стабилизации неустойчивости величины  $M_j$  и  $\Gamma_j$  могут, конечно, очень сильно изменяться. Так, энергия волны  $M_j$ , пройдя через максимум, возвращается к первоначальному значению. Но энергия самосогласованного взаимодействия  $\Gamma_j$  продолжает изменяться, что указывает на существование механизма обмена энергией между крупномасштабным процессом временной эволюции и мелкомасштабными осцилляциями. Направление передачи энергии определяется фазой осцилляций в окрестности максимума. В условиях решения, показанного на рис. 17.1, эффективная энергия взаимодействия  $\Gamma_{\text{эф}}$ , соответствующая крупномасштабному процессу, убывает, что сказывается на эволюции фазы. Следует напомнить, что к уменьшению  $\Gamma_{\text{эф}}$  приводит также учет диссипации (см. гл. 15).

## Резонансное взаимодействие осцилляций

Из-за наличия осцилляций правые части (17.11) могут быть исчезающе малыми даже в окрестностях минимумов невозмущенных решений. Если амплитуды различных волн колеблются с одинаковой частотой, то их произведение дает стационарный (резонансный) вклад в  $\Gamma_j$ . При этом полная энергия самосогласованного взаимодействия  $\sum_j s_j \Gamma_j$  должна сохраняться (это действительно выполняется вследствие обмена энергией между осцилляциями). Отсюда вытекает, что если знаки  $s_j \delta_j$  для всех взаимодействующих волн не одинаковы, то амплитуды осцилляций этих волн могут увеличиваться одновременно (рис. 17.3). В противном случае нарастания нет (рис. 17.4).

Такая картина аналогична взрывной неустойчивости в системе трех связанных волн во всех отношениях, за исключением того, что здесь не важно, какая именно из волн имеет отрицательную энергию осцилляций. Весьма частному случаю равенства знаков энергий осцилляций соответствует решение солитонного типа (рис. 17.5), когда все амплитуды равны, а полная энергия взаимодействия обращается в нуль (ср. с гл. 14).

## Учет затухания

Можно ожидать, что в силу условия  $1/\delta_j \gg v_j$  затухание не будет влиять на общую картину нелинейного взаимодействия с учетом дисперсионных эффектов второго порядка. Численный анализ показывает, что это действительно так (рис. 17.6). Решение, представленное на рис. 17.6, соответствует случаю, когда осцилляции имеют нерезонансный характер и возбуждаются в окрестности первого максимума.

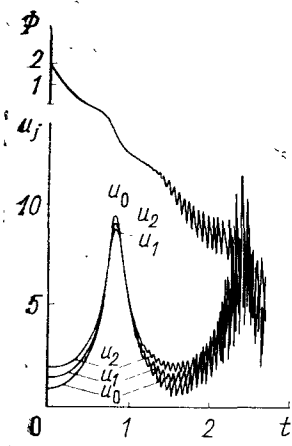


Рис. 17.3. Резонансное нарастание амплитуды колебаний при взаимодействии волн с энергиями различных знаков ( $\delta_j = -0,01$ ;  $\beta_{jk} = -0,05$ )

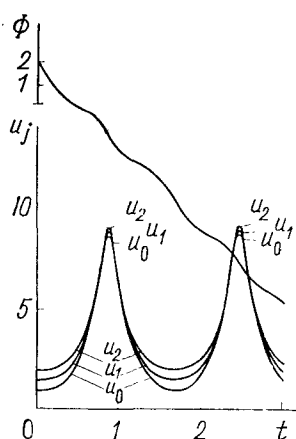


Рис. 17.4. Решение для случая трех взаимодействующих волн с энергиями различных знаков ( $\delta_0 = 0,01$ ;  $\delta_1 = \delta_2 = -0,01$ ;  $\beta_{jk} = -0,05$ ), указывающее на возможность устранения осцилляций с помощью такого подбора параметров, при котором энергии осцилляций всех трех волн приобретают одинаковый знак

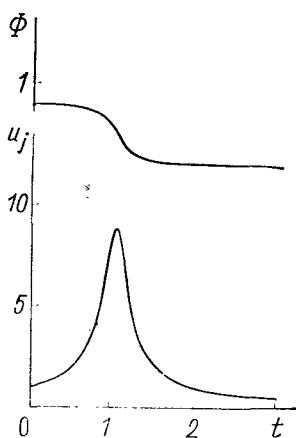


Рис. 17.5. Решение солитонного типа для системы трех взаимодействующих волн с энергиями различных знаков при равенстве всех начальных амплитуд ( $\Gamma = 0$ ;  $\delta_0 = 0,01$ ;  $\delta_1 = \delta_2 = -0,01$ ;  $\beta_{jk} = -0,05$ )

### Волны с энергией одного знака

Характерное проявление дисперсионных эффектов второго порядка сохраняется и тогда, когда все три взаимодействующие волны имеют энергии одинакового знака. Это хорошо иллюстрируется рис. 17.7, который соответствует резонансно нарастающим осцилляциям.

#### Предельный случай малых $\delta_j$

Представляет интерес поведение осцилляций в пределе  $\delta_j \rightarrow 0$ . Пренебрегая крупномасштабными колебаниями в (17.9), получаем

$$(\partial n_j / \partial t) = (1/\delta_j) \sqrt{2\delta_j \Gamma_j (2\delta_j \Gamma_j + M_j)} \cos[(1/\delta_j)t + \psi_j].$$

Учитывая, что при  $\delta_j \rightarrow 0$   $\Gamma_j \sim \delta_j$ , перепишем это соотношение в виде

$$\partial n_j / \partial t = \sqrt{(2/\delta_j) \Gamma_j M_j} \cos[(1/\delta_j)t + \psi_j].$$

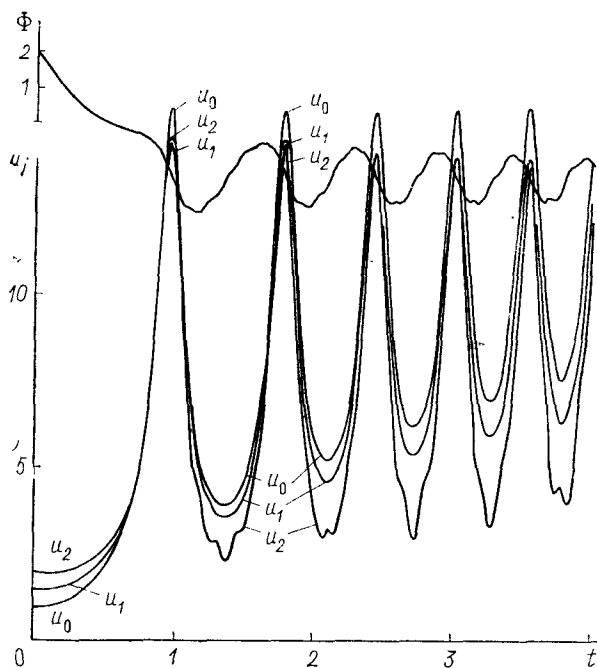


Рис. 17.6. Взаимодействие волн с энергиями различных знаков при наличии линейного затухания ( $\delta_0 = -0,005$ ;  $\delta_1 = -0,01$ ;  $\delta_2 = -0,02$ ;  $\beta_{jk} = -0,03$ ;  $\nu_0 = 0,05$ ;  $\nu_1 = 0,1$ ;  $\nu_2 = 0,2$ )

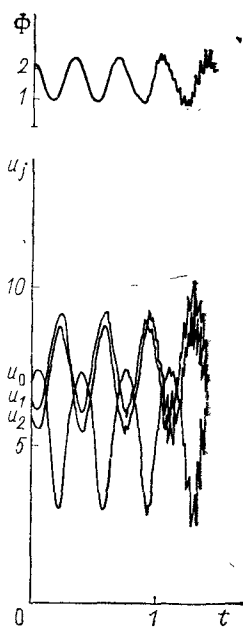


Рис. 17.7. Взаимодействие волн с энергиями одного знака ( $\delta_0 = -0,005$ ;  $\delta_1 = 0,005$ ;  $\delta_2 = -0,005$ ;  $\beta_{jk} = 0$ )

Отсюда следует, что амплитуда  $\partial n_j / \partial t$  не обязательно стремится к нулю вместе с  $\delta_j$ , так как  $\Gamma_j / \delta_j$  пропорционально производным осциллирующих величин. Таким образом, существует возможность получения конечных амплитуд  $\partial n_j / \partial t$  при  $\delta_j \rightarrow 0$ , т. е. мы приходим к одной из разновидностей релаксационных колебаний [5].

### Обсуждение результатов

Как мы убедились, учет дисперсионных эффектов второго порядка приводит к возникновению дополнительных осцилляций амплитуд и фаз взаимодействующих волн. Факт появления этих осцилляций не зависит от взаимодействия волн, так как их возбуждение обусловлено дополнительными начальными условиями, связанными с учетом вторых производных. Взаимодействие волн, однако, может оказывать сильное влияние на осцилляции, если амплитуды и фазы волн изменяются с частотой того же порядка, что и частота осцилляций, или если осцилляции имеют резонансный характер.

Интересно, что даже при малых  $\delta_j$  дисперсионные эффекты второго порядка не обязательно пренебрежимо малы. В связи с этим возникает вопрос о законности пренебрежения дисперсионными эффектами третьего и более высоких порядков. Ответить на этот вопрос, вообще говоря, очень трудно. В принципе ясно, что при учете эффектов более высокого порядка появляются новые временные масштабы [примерно  $1/\delta^{(k)}$  для эффекта  $(k+1)$ -го порядка]. Каждый новый порядок означает появление новой степени свободы. Поэтому кажется очень естественным предположить, что при учете очередного дисперсионного слагаемого на решение низшего порядка будут накладываться осцилляции с частотой  $1/\delta^{(k)}$ . Подбирая начальные условия надлежащим образом, можно добиться того, что амплитуды осциллирующих волн всех порядков, кроме второго, будут пренебрежимо малы. В таком случае влиянием дисперсионных эффектов высшего порядка можно пренебречь.

Однако, для того чтобы убедиться, что ряд (17.1) действительно сходится в каком-либо частном случае, необходимо вычислить все члены разложения, а это представляет собой задачу огромной трудности. Отметим лишь, что частота осцилляций  $\omega_{Dj}$ , соответствующая учету дисперсионных слагаемых второго порядка, должна принадлежать области сходимости разложения (17.1).

Дисперсионные эффекты второго порядка важны не только потому, что способны существенно влиять на эволюцию амплитуд и фаз взаимодействующих волн, они представляют интерес также и в чисто теоретическом плане. Дело в том, что при учете осцилляций амплитуды и фазы волн становятся менее определенными. Но этой неопределенности должна соответствовать большая определенность энергии волны (17.6), которая не может осциллировать. Поэтому самосогласованная часть энергии взаимодействия  $\Gamma_j$  играет роль некоторого в принципе неустраняемого минимума энергии, который лишь незначительно изменяется при взаимодействии волн.

### Задачи

17.1. Пусть амплитуда  $A^{(2)}$  имеет вид, установленный при решении задачи 5.4. Найти условие, при выполнении которого взаимодействие можно считать слабонелинейным.

17.2. Вывести выражение (17.6) для энергии поля с учетом дисперсионных эффектов второго порядка.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tsytoich V. N., Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1973, v. 7, p. 251.
2. Ott E. — Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 442.
3. Askne J., Dysthe K. B., Gudmestad O. T., Weiland J., Wilhelmsson H. — Phys. Lett., 1974, v. 48A, p. 21.
4. Weiland J. — Phys Scripta, 1975, v. 11, p. 294.
5. Minorsky N. Nonlinear Oscillations. Princeton, Van Nostrand, 1962.



## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН С КОНЕЧНОЙ ШИРИНОЙ СПЕКТРА В ПРОСТРАНСТВЕ ВОЛНОВЫХ ВЕКТОРОВ

При оценке области применимости теории когерентного взаимодействия волн неизбежно возникает вопрос фундаментального характера: как сильно зависят результаты этой теории от учета конечной ширины спектра взаимодействующих волн? Для ответа на этот вопрос требуется, вообще говоря, привлечение теории взаимодействия частично когерентных волн.

В этой главе предпринимается попытка изучения свойств такой общей системы на основе рассмотрения взаимодействия волновых пакетов, каждый из которых расщепляется на конечное число узких субпакетов, когерентно взаимодействующих с субпакетами других пакетов.

В результате такого рассмотрения показано, что при частично когерентном взаимодействии интенсивности «в среднем» осциллируют около уровней, определяемых в приближении случайных фаз. Более того, наблюдается общая тенденция ослабления взаимодействия при отклонении от когерентного состояния.

Анализ машинных экспериментов указывает на то, что вследствие нелинейного взаимодействия разброс фаз различных пакетов осциллирует и в среднем возрастает. Начальный разбаланс между фазами трех взаимодействующих волн (если таковой имеется) по прошествии некоторого времени сглаживается, так как фазы равномерно распределяются по пакетам в полном соответствии с предсказаниями теории.

### Волновые пакеты

Ограничимся рассмотрением волновых пакетов с незначительной шириной спектра в пространстве волновых векторов. Можно предполагать, что в этом случае система связанных волн будет иметь такой же вид, как и при рассмотрении волн типа уединенных фурье-компонент в  $k$ -пространстве, т. е. монохроматических волн [1].

Следует отметить, что подобная идеализация возможна только при рассмотрении неограниченной пространственно-однородной среды, когда амплитуды взаимодействующих волн изменяются во времени, но не в пространстве. Но даже в такой среде волны обычно имеют конечные спектры по  $k$ , а взаимодействие между волнами приводит к уширению этих спектров. Конечность спектра в  $k$ -пространстве означает немонохроматичность волны. Поле такой волны (или волнового пакета) естественно представить в виде суперпозиции монохроматических волн:

$$\bar{E}(\mathbf{r}, t) = \int \bar{E}_k \exp \{i [\omega(\mathbf{k}) t - \mathbf{k}\mathbf{r}]\} d\mathbf{k}, \quad (18.1)$$

где  $\omega(\mathbf{k})$  определяется дисперсионным уравнением.

## Время когерентности

Вследствие конечности спектра по  $\omega$  поле волнового пакета по истечении некоторого характеристического времени  $\tau$  будет заметно отличаться от соответствующего монохроматического поля. Это время можно оценить следующим образом. Предположим, что в начальный момент фазы всех компонент  $\bar{E}_k$  в (18.1) одинаковы, и обозначим  $\tau$  время, за которое различие между фазами волн с минимальной и максимальной частотами пакета достигнет  $\pi$ . Тогда

$$\tau = \pi/\delta\omega, \quad (18.2)$$

где  $\delta\omega$  — ширина частотного спектра.

Время  $\tau$ , определяемое выражением (18.2), будем называть временем когерентности. С помощью соотношения

$$\delta\omega \approx (\partial\omega/\partial k) \delta k$$

его можно связать также с шириной спектра в  $k$ -пространстве:

$$\tau \approx \pi/[(\partial\omega/\partial k) \delta k]. \quad (18.3)$$

При временах, больших  $\tau$ , фазы различных волн, образующих пакет, уже нельзя считать хорошо определенными, а при временах, значительно превышающих время когерентности, волновой пакет следует рассматривать как пакет со случайными фазами [1]. Математическое ожидание амплитуды такого пакета равно нулю. Напротив, при временах, много меньших времени когерентности, волновой пакет ведет себя как монохроматическая волна (пакет с когерентными фазами).

Таким образом, характер волнового пакета зависит от времени измерения или от характеристического времени физического процесса, в котором принимает участие рассматриваемый волновой пакет. Взаимодействие пакетов со случайными фазами существенно отличается [1—3] от взаимодействия когерентных пакетов. Ниже рассмотрен промежуточный случай.

### Взаимодействие волновых пакетов

При конечной ширине спектра точное резонансное условие для волновых векторов произвольно выбранных волн из трех пакетов не выполняется. Из общей процедуры вывода уравнений связанных волн (см. гл. 3) и теоремы о свертке ясно, что уравнение для фурье-компоненты  $A_k$  должно иметь вид

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} = \int v_{kk'} A_{k-k'} A_{k'} \exp[i\Delta\omega(k') t] dk', \quad (18.4)$$

где  $v_{kk'}$  — коэффициент связи, зависящий от  $k$  и  $k'$ , и

$$\Delta\omega(k') = \omega(k - k') + \omega(k') - \omega(k). \quad (18.5)$$

Уравнение (18.4) составляет основу для описания взаимодействия трех волновых пакетов в первом нелинейном порядке.

Предположим, что  $A_k$ ,  $A_{k-k'}$  и  $A_{k'}$  относятся к различным волновым пакетам. Тогда уравнение (18.4) будет описывать влияние двух различных фурье-компонент из двух пакетов на временную эволюцию фурье-компоненты из третьего пакета. В принципе это уравнение пригодно для описания как малых, так и больших  $\Delta\omega(\mathbf{k})$ . Однако существенный вклад во взаимодействие дают только те участки спектра по  $\mathbf{k}'$ , для которых  $\Delta\omega$  мало. Для реализации когерентного поведения волновых пакетов в течение времени взаимодействия их частотный спектр должен удовлетворять соотношению

$$\delta\omega_j \ll \pi/t_0, \quad (18.6)$$

где  $t_0$  — характерное время взаимодействия. Если это действительно так, то можно считать, что все волны, составляющие пакет, имеют одинаковую частоту. Тогда проинтегрируем (18.4) по

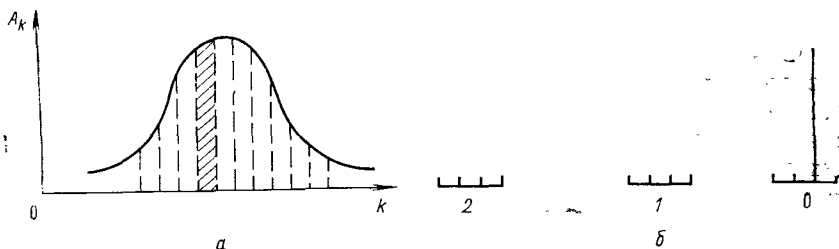


Рис. 18.1. Расщепление волнового пакета на парциальные волны (а) и начальное возбуждение парциальных волн (б)

$\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , пренебрегая при этом изменением  $\Delta\omega$  (для простоты будем считать постоянным также  $v_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ ):

$$\partial A_0 / \partial t = v_{\mathbf{k}_0 \mathbf{k}'_0} A_1 A_2 \exp(i\Delta\omega t), \quad (18.7)$$

где

$$A_0 = \int A_k dk; \quad A_1 = \int A_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} d(\mathbf{k}-\mathbf{k}'); \quad A_2 = \int A_{\mathbf{k}'} dk'. \quad (18.8)$$

Интегрирование в (18.8) проводится по той части каждого из пакетов, которая дает вклад во взаимодействие.

Аналогично можно получить два других уравнения типа (18.7), а тем самым и всю систему связанных уравнений, описывающую взаимодействие волновых пакетов в рассматриваемом приближении. Условие когерентности выражается в том, что при интегрировании по волновым пакетам рассогласование частот  $\Delta\omega$  предполагается постоянным. Если это условие не выполняется для всей области взаимодействия, то ее можно разбить на подобласти, в пределах которых  $\Delta\omega$  постоянно (рис. 18.1, а). Интегрирование по подобласти  $l$  волнового пакета  $\mathbf{k}$  приводит к понятию амплитуды парциальной волны  $A_{kl}$  (здесь индекс  $k$  ука-

зывает на принадлежность определенному волновому пакету, т. е. не волновое число). Уравнения движения для этих амплитуд записываются в виде

$$\frac{\partial A_{0j}}{\partial t} = \sum_{kl} v_{k_k k_l} A_{1k} A_{2l} \exp(i\Delta\omega_{jkl}t). \quad (18.9)$$

При этом центральные волновые векторы парциальных волн удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{k}_{0j} = \mathbf{k}_{1k} + \mathbf{k}_{2l}.$$

Проблема взаимодействия в последнем случае значительно усложняется, так как для ее рассмотрения требуется решение системы уравнений типа (18.9) для всех парциальных волн. Условие когерентности удовлетворяется теперь только на уровне взаимодействия парциальных волн, но не на уровне взаимодействия волновых пакетов в целом, которое приобретает частично когерентный характер.

Отметим, что из-за наличия в правой части (18.9) слагаемых, содержащих расстройку частоты  $\Delta\omega_{jkl}$ , амплитуды в общем случае осциллируют во времени. При большом числе парциальных волн со случайными фазами осциллирующие слагаемые компенсируют друг друга, и ненулевой вклад во взаимодействие дают лишь слагаемые с малыми  $\Delta\omega$ . В подобной ситуации взаимодействие является слабым, а его характерное время, наоборот, большим, что позволяет усреднить динамические уравнения по фазам [1] и получить тем самым уравнения для полных интенсивностей волновых пакетов (или чисел квантов). Эти уравнения известны как уравнения приближения случайных фаз и здесь рассматриваться не будут. Для сравнения, однако, полезно напомнить, что в таком приближении интенсивности волн с одинаковыми знаками энергии стремятся к стационарным значениям, удовлетворяющим соотношению

$$1/I_0 = 1/I_1 + 1/I_2, \quad (18.10)$$

где  $I_j$  — интенсивность пакета  $j$ , а индекс 0 соответствует пакету с максимальной частотой. Интенсивности  $I_j$  удовлетворяют также соотношениям Мэнли—Роу

$$I_0 + I_1 = M_{01}; \quad I_1 - I_2 = M_{12}. \quad (18.11)$$

### Уравнения и интегралы движения для системы трех волновых пакетов

Для более детального изучения взаимодействия трех волновых пакетов целесообразно преобразовать общую систему (18.9), записанную в комплексной форме, к системе уравнений относительно выбранных подходящим образом вещественных величин. При таком преобразовании будем предполагать, что волно-

вые пакеты достаточно хорошо локализованы в  $\mathbf{k}$ -пространстве, так что выполняется условие

$$|\Delta \mathbf{k}| \ll |\mathbf{k}|. \quad (18.12)$$

Если (18.12) удовлетворяется, то коэффициенты связи, зависящие от  $\mathbf{k}$  и  $\omega(\mathbf{k})$ , очень мало изменяются в пределах волновых пакетов. Пренебрегая этим изменением, мы будем считать все коэффициенты связи в уравнениях типа (18.9) постоянными и одинаковыми. Тогда естественно использовать такую нормировку (см. гл. 7), при которой эти коэффициенты равны единице.

Для перехода к вещественным уравнениям положим

$$A_{jk} = |A_{jk}| \exp(i\phi_{jk}), \quad (18.13)$$

где индексы  $j$  и  $k$  указывают номера волновых пакетов и парциальных волн соответственно, и введем величины

$$\Phi_{jkl} = \phi_{0j} - \phi_{1k} - \phi_{2l} \quad (18.14)$$

и

$$\Delta\omega_{jkl} = \omega_{0j} - \omega_{1k} - \omega_{2l}, \quad (18.15)$$

где

$$\omega_{jk} = \omega(\mathbf{k}_{jk}), \quad (18.16)$$

$\mathbf{k}_{jk}$  — центральные волновые векторы парциальных волн, удовлетворяющие условию согласования

$$\mathbf{k}_{0j} = \mathbf{k}_{1k} + \mathbf{k}_{2l}. \quad (18.17)$$

Обозначив ренормированные амплитуды  $|A_{jk}|$  как  $u_{jk}$ , получим следующую систему уравнений [4]:

$$\frac{\partial u_{0j}}{\partial t} = - \sum_{kl} u_{1k} u_{2l} \cos(\Phi_{jkl} + \Delta\omega_{jkl}t); \quad (18.18a)$$

$$\frac{\partial u_{1k}}{\partial t} = \sum_{jl} u_{0j} u_{2l} \cos(\Phi_{jkl} + \Delta\omega_{jkl}t); \quad (18.18б)$$

$$\frac{\partial u_{2l}}{\partial t} = \sum_{jk} u_{0j} u_{1k} \cos(\Phi_{jkl} + \Delta\omega_{jkl}t); \quad (18.18в)$$

$$\frac{\partial \phi_{0j}}{\partial t} = \sum_{kl} \frac{u_{1k} u_{2l}}{u_{0j}} \sin(\Phi_{jkl} + \Delta\omega_{jkl}t); \quad (18.18г)$$

$$\frac{\partial \phi_{1k}}{\partial t} = \sum_{jl} \frac{u_{0j} u_{2l}}{u_{1k}} \sin(\Phi_{jkl} + \Delta\omega_{jkl}t); \quad (18.18д)$$

$$\frac{\partial \phi_{2l}}{\partial t} = \sum_{jk} \frac{u_{0j} u_{1k}}{u_{2l}} \sin(\Phi_{jkl} + \Delta\omega_{jkl}t). \quad (18.18е)$$

Эта система записана в предположении, что знаки коэффициентов связи для волн из пакета 0 (эти волны составляют пакет с наибольшей частотой) противоположны знакам коэффициентов связи волн, принадлежащих пакетам 1 и 2.

Отметим, что суммы в правых частях (18.18) содержат произведения амплитуд всех парциальных волн, удовлетворяющих условию (18.17). Поэтому структура связи может в определенной степени зависеть от способа разбиения пакетов на парциальные волны. В связи с этим напомним, что согласно результатам гл. 9 влияние расстройки частоты на взаимодействие имеет пороговый характер в той области, где величина, обратная расстройке частоты, сравнима с характерным временем взаимодействия. Если расстройка меньше некоторого порогового значения, то сила связи изменяется незначительно. Но при  $\Delta\omega$ , превышающих пороговое значение, взаимодействие резко ослабляется [5—7]. Поэтому в первом приближении можно не учитывать влияние расстройки  $\Delta\omega_{jkl}$  на взаимодействие тех волн, для которых она меньше порогового значения, и опустить уравнения, в которых  $\Delta\omega_{jkl}$  превышает пороговое значение, получив тем самым систему типа (18.18) с  $\Delta\omega_{jkl}=0$ .

Для того чтобы найти интегралы движения и сравнить их с интегралами движения, полученными в приближении случайных фаз, введем следующее определение интенсивности волнового пакета:

$$I_j = \sum_k u_{jk}^2. \quad (18.19)$$

Такое определение согласуется с тем фактом, что соотношение (18.6) выполняется только для отдельных парциальных волн, но не для пакета в целом. На основе (18.18) получим

$$\frac{\partial I_n}{\partial t} = \mp 2 \sum_{jkl} u_{0j} u_{1k} u_{2l} \cos \Phi_{jkl}, \quad (18.20)$$

где знак «минус» соответствует пакету 0 и суммирование проводится по всем волнам, участвующим во взаимодействии. Таким образом, сумма одна и та же для всех  $I_n$  ( $n=0, 1, 2$ ), что приводит к соотношениям Мэнли—Роу

$$I_0 + I_1 = M_1; \quad I_1 - I_2 = M_2. \quad (18.21)$$

Эти соотношения имеют тот же вид, что и в приближении случайных фаз. Введя еще сумму  $\sum_k u_{jk}^2 \partial \Phi_{jkl} / \partial t$ , получим сохраняющуюся величину, соответствующую энергии взаимодействия [4]:

$$\sum_{jkl} u_{0j} u_{1k} u_{2l} \sin \Phi_{jkl} = \Gamma, \quad (18.22)$$

где суммирование снова проводится по всем волнам, дающим неисчезающий вклад во взаимодействие.

Закон сохранения (18.22) указывает на определенную степень корреляции между фазами взаимодействующих волн и поэтому не имеет места в приближении случайных фаз. Существенно, что эти корреляции могут сохраняться на протяжении всего времени взаимодействия. Заметим также, что вид законов сохранения (18.21) и (18.22) не зависит от способа разбиения пакетов на парциальные волны.

## Сравнение с когерентным трехволновым взаимодействием

Как видно из системы уравнений (18.18), при малых временах когерентности (т. е. при относительно широких частотных спектрах взаимодействующих волн) число степеней свободы системы возрастает. Напомним, что трехволновая система описывается уравнениями

$$\partial u_j^2 / \partial t = \mp 2u_0 u_1 u_2 \cos \Phi; \quad (18.23a)$$

$$\partial \Phi / \partial t = \Gamma (u_0^{-2} - u_1^{-2} - u_2^{-2}), \quad (18.23b)$$

где

$$\Gamma = u_0 u_1 u_2 \sin \Phi. \quad (18.24)$$

Возвращаясь к описанию взаимодействия волновых пакетов, определим величины

$$\left\langle \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{I_j} \sum_k u_{jk}^2 \frac{\partial \phi_{jk}}{\partial t} = \frac{\Gamma}{I_j} \quad (18.25)$$

и

$$\left\langle \frac{\partial \Phi_{jkl}}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right\rangle. \quad (18.26)$$

Используя (18.20), получаем

$$\left. \begin{aligned} \partial I_j / \partial t &= \mp 2n \langle u_{0j} u_{1k} u_{2l} \cos \Phi_{jkl} \rangle; \\ \langle \partial \Phi_{jkl} / \partial t \rangle &= \Gamma (I_0^{-1} - I_1^{-1} - I_2^{-1}), \end{aligned} \right\} \quad (18.27)$$

где

$$\Gamma = n \langle u_{0j} u_{1k} u_{2l} \sin \Phi_{jkl} \rangle. \quad (18.28)$$

Здесь  $n$  — число связей, т. е. число слагаемых в суммах (18.20) и (18.22).

В соответствии с (18.23a) знак производной амплитуды определяется фазой  $\Phi$ , а соотношение (18.23b) указывает на то, что знак производной фазы изменяется в момент прохождения интенсивностями уровней, соответствующих приближению случайных фаз. Отсюда следует, что интенсивности должны испытывать колебания относительно этих уровней. Амплитуда этих колебаний, однако, ни при каких обстоятельствах не уменьшается, т. е. интенсивности не выходят на уровень, соответствующий приближению случайных фаз. Тем не менее из (18.27) видно, что в частично когерентном взаимодействии интенсивности в среднем также имеют тенденцию к колебаниям около уровней, характерных для приближения случайных фаз, но взаимодействие в этом случае слабее, чем при наличии когерентности. Взаимодействие оказывается особенно слабым, если слагаемые правой части (18.20) стремятся к нулю. Для этого необходимо, чтобы множители  $\cos \Phi_{jkl}$  имели случайный характер и не коррелировали с произведением амплитуд  $u_{0j} u_{1k} u_{2l}$ . Колебания интенсивностей около

уровней, соответствующих приближению случайных фаз, обусловлены усредненным изменением  $\Phi_{jkl}$ . В то же время по мере развития взаимодействия фазы все более перемешиваются, что приводит к ослаблению взаимодействия и к постепенному приближению их интенсивностей к уровню, характерному для приближения случайных фаз. Следует, однако, иметь в виду, что в силу соотношения (18.28) всегда существует некоторая конечная амплитудно-фазовая корреляция, и поэтому по прошествии некоторого времени тенденция выхода на уровень, соответствующий приближению случайных фаз, ослабляется, а затем и совсем утрачивается.

Возможность описания частично когерентной системы с помощью соотношений (18.27) означает, что некоторую информацию о такой системе можно получить непосредственно на основе знания свойств соответствующей когерентной системы. Такой путь был использован в работе [8] при рассмотрении влияния частотного уширения линий и связанной с таким уширением неопределенности фаз на неустойчивую систему взрывного типа, а также в работе [9] при исследовании влияния эволюции неопределенности фаз на фазу конкретной волны в системе со стабилизацией взрывной неустойчивости за счет нелинейного сдвига частоты третьего порядка.

Отметим, что поведение стабилизированной системы взрывного типа имеет тот же периодический характер, что и в устойчивой системе, рассматриваемой в настоящей главе. Разброс фаз какой-либо одной волны из этой системы за характерное время взаимодействия передается двум другим волнам. В результате возникают колебания разброса фаз, которые в конечном счете приводят к равномерному распределению фаз между взаимодействующими волнами. Это подтверждается и численным решением системы типа (18.18).

Усредненные уравнения (18.27) описывают колебания относительно уровня случайных фаз. Для того чтобы исследовать приближение к этому уровню, необходимо более детальное описание. Продолжая аналогию с когерентным взаимодействием, заметим, что в выражение для потенциальной функции  $\pi$  входит величина  $G^2$ , возрастанию которой соответствует уменьшение осцилляций амплитуды (см. гл. 9). В связи с этим представляет интерес изучение величины

$$\sum_j G_j^2 = \sum_j \left[ \sum_{kl} u_{0j} u_{1k} u_{2l} \sin \Phi_{jkl} \right]^2,$$

которая анализируется численным методом в последнем разделе настоящей главы.

Второе выражение (18.27) можно обобщить на случай, когда нельзя пренебрегать влиянием рассогласованных слагаемых в связанных уравнениях на среднее значение производной фазы по времени. Для учета этого влияния необходимо обобщить интеграл



движения  $\Gamma$ . В качестве отправной точки используем гамильтониан системы

$$H = \sum_{jk} \omega_{jk} u_{jk}^2 + 2 \sum_{jkl} u_{0j} u_{1k} u_{2l} \sin \theta_{jkl}, \quad (18.29)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{jkl} &= \theta_{0j} - \theta_{1k} - \theta_{2l}; \\ \theta_{jk} &= \omega_{jk} t + \phi_{jk}. \end{aligned} \quad (18.30)$$

При наличии рассогласования полная волновая энергия  $\sum_{jk} \omega_{jk} \times u_{jk}^2$  не сохраняется и необходимо найти новый способ разбиения  $H$  на две постоянные части. Это можно сделать, вводя сдвинутые частоты  $\omega'_{jk}$  так, чтобы выполнялось соотношение

$$\omega'_{0j} = \omega'_{1k} + \omega'_{2l}.$$

Тогда получим

$$\omega_{jk} = \omega'_{jk} + \Delta\omega_{jk}; \quad \Delta\omega_{jkl} = \Delta\omega_{0j} - \Delta\omega_{1k} - \Delta\omega_{2l}.$$

Нетрудно проверить, что

$$W' = \sum_{jk} \omega'_{jk} u_{jk}^2 \quad (18.31)$$

является интегралом движения, а это дает основание определить величину

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{jk} \Delta\omega_{jk} u_{jk}^2 + \sum_{ikl} u_{0j} u_{1k} u_{2l} \sin \theta_{jkl}, \quad (18.32)$$

которая и представляет собой искомое обобщение интеграла движения  $\Gamma$ .

Теперь можно найти величину  $\langle \partial\theta_{jkl}/\partial t \rangle$ . Действуя так же, как при расчете  $\langle \partial\Phi_{jkl}/\partial t \rangle$  из (18.26), и используя при этом (18.30) и (18.32), находим

$$\left\langle \frac{\partial\theta_j}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{I_j} \sum_k u_{jk}^2 \frac{\partial\theta_{jk}}{\partial t} = \frac{1}{I_j} \left( \Gamma - \frac{1}{2} \sum_{jk} \Delta\omega_{jk} u_{jk}^2 \right) + \frac{1}{I_j} \sum_k u_k^2 \omega_{jk}$$

и

$$\left\langle \frac{\partial\theta_{jkl}}{\partial t} \right\rangle = \langle \Delta\omega \rangle + \left( \Gamma - \frac{1}{2} \sum_{jk} \Delta\omega_{jk} u_{jk}^2 \right) \left( \frac{1}{I_0} - \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right), \quad (18.33)$$

где  $\langle \Delta\omega \rangle = \langle \omega_0 \rangle - \langle \omega_1 \rangle - \langle \omega_2 \rangle$ ;  $\langle \omega_j \rangle = (1/I_j) \sum_k u_{jk}^2 \omega_{jk}$ .

В предположении, что центральные частоты полностью согласованы, величина  $\langle \Delta\omega \rangle$  мала. При этом тенденция к осцилляциям около уровня случайных фаз сохраняется. При больших  $\langle \Delta\omega \rangle$  взаимодействие будет испытывать усреднение того же типа, что и при наличии когерентности.

## Уширение и распад волны накачки при проникновении в плазму

Численный анализ системы (18.18) мы проведем для случая, представляющего особый интерес в связи с проблемой взаимодействия лазерного излучения с плазмой. Предположим, что волна с максимальной частотой представляет собой лазерную волну большой амплитуды, проникающую в плазму, где имеются плазменные или ионно-звуковые волны шумового характера. Отметим, что при решении такой задачи в качестве независимой переменной следовало бы использовать пространственную координату, но существо решения от этого не изменяется.

Для того чтобы решить (18.18), прежде всего необходимо определить число волн в каждом пакете и структуру связи. Число волн выберем равным четырем (анализ для восьми волн не приводит к каким-либо новым особенностям), а структуру связи зададим резонансным условием (18.17) для центральных волновых векторов каждого пакета. Разрешение по волновым векторам между соседними парциальными волнами, вообще говоря, зависит от относительной ширины их спектров. Поскольку эти величины можно выбрать произвольным образом, предположим, что все парциальные волны имеют спектры одинаковой ширины и, следовательно, разрешение по волновым числам постоянно. Предположим также, что центральные парциальные волны каждого из трех пакетов полностью согласованы (в пакете с четным числом волн центральной считается та из двух волн, которая имеет большее волновое число  $k$ ).

Качественный вид начального возбуждения показан на рис. 18.1, б. В результате связи между сильно возбужденной волной  $u_{02}$  и парами волн  $u_{12}, u_{22}; u_{11}, u_{23}$  и  $u_{13}, u_{21}$  амплитуды плазменных волн начинают нарастать, что приводит в дальнейшем к уширению спектра волны из пакета 0 из-за связи с боковой волной  $u_{01}$ . Это происходит при временах порядка времени ослабления амплитуды волны накачки  $u_{02}$ . Полное представление о временной эволюции интенсивностей дает рис. 18.2, который соответствует такому случаю, когда фазы волн из пакетов 1 и 2 изменяются линейно в интервале от 0 до  $2\pi$ , фазы волны из пакета 0 заключены в интервале от 0 до  $\pi/2$ , а начальные интенсивности  $I_1$  и  $I_2$  равны [в силу соотношения (18.21) это равенство не нарушается в течение всего времени взаимодействия].

Для исследования эволюции фаз  $\phi_{jk}$  введем усредненную фазу

$$\langle \phi_j \rangle = \frac{1}{I_j} \sum u_{jk}^2 \phi_{jk}. \quad (18.34)$$

Здесь согласно нашему выбору  $0 \leq \phi_{jk} < 2\pi$  и уширение фазы

$$\delta \phi_j = (1/I_j) \sum u_{jk}^2 | \phi_{jk} - \langle \phi_j \rangle |, \quad (18.35)$$

где  $| \phi_{ij} - \langle \phi_j \rangle | \leq \pi$ .

Предположим, что в ситуации, которой соответствует рис. 18.2, разброс фаз волн из пакетов 1 и 2 близок к 1,5, а разброс фаз

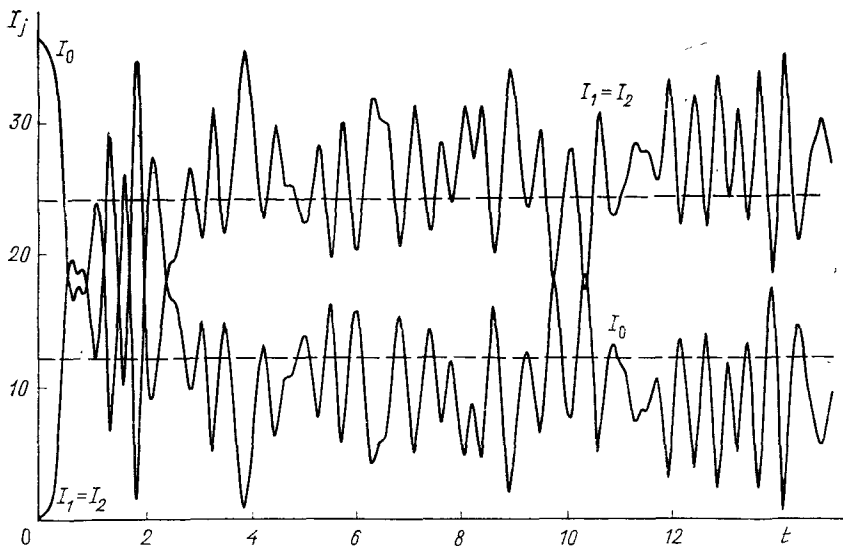


Рис. 18.2. Результаты численного анализа системы (18.18), полученные при выборе в каждом пакете четырех парциальных волн с начальными амплитудами  $u_{0j}=0,1$  ( $j \neq 2$ ),  $u_{02}=6$ ,  $u_{1j}=u_{2j}=0,2$  в предположении, что фазы  $\phi_{1k}$  и  $\phi_{2l}$  изменяются линейно в интервале от 0 до  $2\pi$  и  $0 \leq \phi_{0j} \leq \pi/2$ . Пунктирными линиями показан уровень интенсивности, рассчитанный в приближении случайных фаз при  $\Gamma \approx 0,62$

волн из пакета 0 первоначально очень мал. Тогда за время распада волны накачки разброс фаз волн из пакета 0 быстро увеличивается и затем осциллирует случайным образом (рис. 18.3).

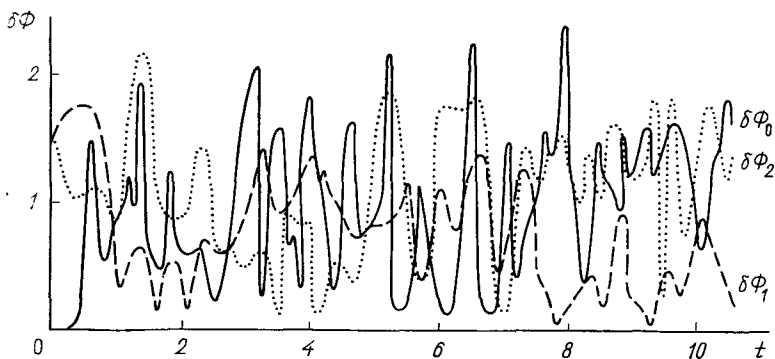


Рис. 18.3. Эволюция разброса фаз в случае, соответствующем рис. 18.2

Отметим, что приближению случайных фаз соответствует значение

$$\delta\phi_j = \pi/2. \quad (18.36)$$

В промежутке между временем распада  $t_1$  и временем  $t_2$ , при котором начинается выход на уровень случайных фаз, существует область симметричных осцилляций. В ней возбуждены все парциальные волны и наблюдается большой разброс фаз.

При  $t > t_1$  сильная корреляция между произведениями амплитуд  $u_{0j}u_{1k}u_{2l}$  и множителем  $\cos \Phi_{jkl}$  ослабляется, в результате чего интенсивности стремятся к уровням, соответствующим приближению случайных фаз. Характер этого процесса, вообще говоря, зависит от значения интеграла движения (в рассмотренном выше случае  $\Gamma = -0,62$ ). При малых значениях  $\Gamma$  влияние интенсивностей на усредненную производную фазы также мало, тогда как при больших  $|\Gamma|$  системе присущи сильные корреляции, которые приводят к тому, что фазы испытывают сильные осцилляции на протяжении длительного времени. Однако в промежутке между  $t_1$  и  $t_2$  характер осцилляций практически не зависит от  $\Gamma$  при изменении этой величины в очень широких пределах.

Зависимость от  $\Gamma$  изучали с помощью изменения начального уровня возбуждения пакетов 1 и 2 при сохранении уровня возбуждения пакета 0 и всех начальных фаз. В результате было показано, что характер осцилляций, как и разность  $t_2 - t_1$ , остается почти неизменным до тех пор, пока  $\Gamma$  имеет тот же порядок величины, что и  $M_1 = I_0 - I_1$  ( $I_2 = I_1$ ). Интересно сравнить этот результат с результатом для когерентного взаимодействия, когда корни потенциальной функции  $\pi(x)$  очень мало изменяются при изменении  $\Gamma$ , если  $\Gamma \ll M$ . В частности, очень мало зависит от  $\Gamma$  периодичность процесса, так как она определяется разностью корней полинома  $\pi(x)$ . При начальных условиях, используемых в рассматриваемых машинных экспериментах, начальное значение  $\Gamma^2$  близко к величине

$$\sum_j \Gamma_j^2 = \sum_j \left[ \sum_{kl} u_{0j} u_{1k} u_{2l} \sin \Phi_{jkl} \right]^2,$$

временная эволюция которой показана на рис. 18.4. При  $t > t_2$  величина  $\sum_j \Gamma_j^2$  сильно увеличивается, что соответствует выходу на уровень, характерный для приближения случайных фаз.

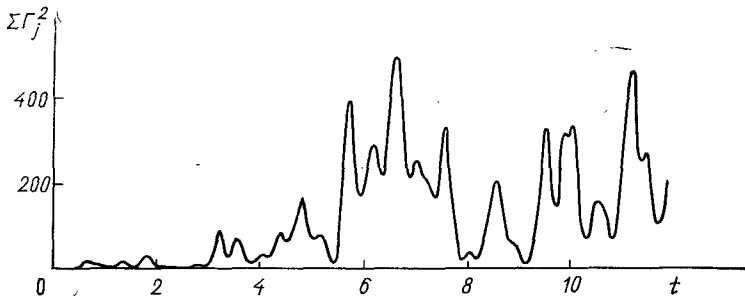


Рис. 18.4. Временная эволюция величины  $\sum_j \Gamma_j^2$ , рассчитанная на основе численных данных рис. 18.2

Если изменить начальные условия таким образом, чтобы фазы принимали случайные значения из интервала  $0—2\pi$ , то можно ожидать ослабления амплитудно-фазовой корреляции, а следовательно, и уменьшения области регулярных осцилляций в промежутке между  $t_1$  и  $t_2$ . Такое предположение полностью подтверждается результатом машинного эксперимента (рис. 18.5).

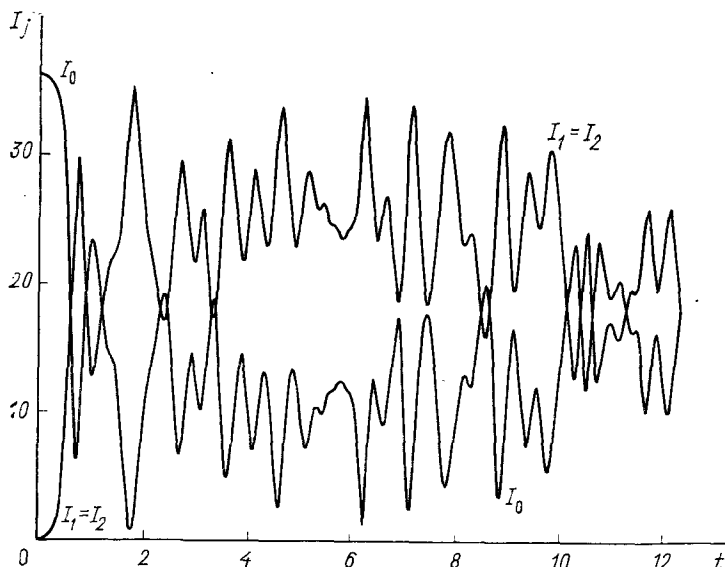


Рис. 18.5. Результаты численного анализа системы (18.18), полученные при тех же начальных значениях амплитуд, что и данные рис. 18.2, но при нерегулярном изменении начальных фаз волн из пакетов 1 и 2 в диапазоне от 0 до  $2\pi$  и  $\Gamma=0,46$

Зависимости, изображенные на рис. 18.6, отвечают тем же начальным условиям, что и рис. 18.5, при следующих наборах частот взаимодействующих волн:

$$\omega_{01} = 2005; \quad \omega_{11} = 1505; \quad \omega_{21} = 500;$$

$$\omega_{02} = 2000; \quad \omega_{12} = 1500; \quad \omega_{22} = 500;$$

$$\omega_{03} = 1995; \quad \omega_{13} = 1495; \quad \omega_{23} = 500;$$

$$\omega_{04} = 1990; \quad \omega_{14} = 1485; \quad \omega_{24} = 500.$$

Как видно, расстройка частоты способствует перемешиванию фаз, а тем самым и эффективному уменьшению области симметричных осцилляций.

### Эволюция разброса фаз

С помощью надлежащего выбора начальных условий для амплитуд можно исследовать временную эволюцию разброса фаз какого-либо волнового пакета [4]. Рис. 18.7 соответствует случаю,

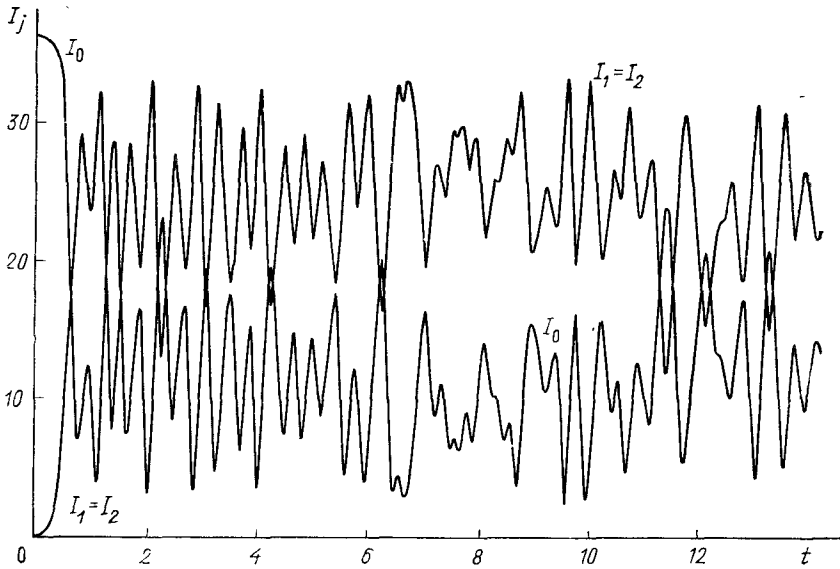


Рис. 18.6. Решение, полученное при учете рассогласования частот

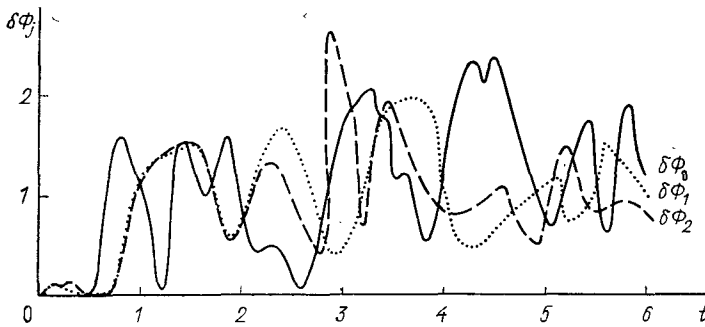


Рис. 18.7. Временная эволюция первоначально малого разброса фаз волн из пакета 0 при условии, что начальный разброс фаз волн из пакетов 1 и 2 равен нулю

когда первоначально имеется небольшой разброс фаз волн из пакета 0, а фазы всех волн, принадлежащих пакетам 1 и 2, равны. Так как вначале пакеты 1 и 2 слабо возбуждены, они оказываются очень чувствительными к передаче разброса фаз, и поэтому уже при временах, меньших распадного времени  $t_1$ , приобретают некоторый разброс фаз. В окрестности времени  $t_1$  разброс фаз волн из пакета 0 испытывает резкий рост, после чего наступает период колебаний разброса фаз между различными пакетами. К концу процесса, изображенного на рис. 18.7, разброс

фаз почти одинаков для всех пакетов. Следует обратить внимание на сходство такой картины с эволюцией фаз при когерентном трехволновом взаимодействии [9].

### Обсуждение результатов

Проблема взаимодействия частично когерентных волн в общем случае очень сложна, так как она сводится к рассмотрению взаимодействия в системе большого числа волн или осцилляторов [10—18]. Можно показать, что такая система по истечении достаточно большого времени может возвратиться к своему начальному состоянию [19]. Однако при коротких временных масштабах эта система стремится к выходу на уровень, соответствующий приближению случайных фаз. Когда фазы становятся случайными, взаимодействие ослабляется и надо увеличивать число парциальных волн, чтобы по-прежнему удовлетворялись условия когерентности парциальных взаимодействий. Но при этом вклад во взаимодействие дают только нелинейные слагаемые с очень малой расстройкой частоты. Тогда все остальные слагаемые можно отбросить, а это как раз и соответствует описанию в рамках приближения случайных фаз [1—3, 20].

Интересно, что указанная тенденция ясно проявляется уже при учете только четырех или восьми волн в каждом пакете. Вместе с тем не следует забывать, что при конечном числе волн в системе всегда есть остаточная корреляция, выражаемая соотношением (18.28). Поэтому рассматриваемый случай соответствует промежуточному состоянию между трехволновым когерентным взаимодействием и турбулентностью, когда число взаимодействующих волн очень велико [21].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М., Наука, 1967.
2. Engelmann F., Wilhelmsson H. — Z. Naturforsch., 1969, Bd 24a, S. 206.
3. Davidson R. C. Methods in Nonlinear Plasma Theory. N. Y., Academic Press, 1972.
4. Weiland J., Wilhelmsson H., Kaufman A. N., Tsytovich V. N. — Phys. Scripta, 1975, v. 11, p. 275.
5. Anderson D., Wilhelmsson H. — Ibid., p. 341.
6. Fisher P. K., Hirshfield J. L. — Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 567.
7. Kaufman A. N. — Phys. Rev. Lett., 1971, v. 27, p. 376.
8. Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1973, v. 7, p. 209.
9. Wilhelmsson H. — Ibid., 1974, v. 9, p. 61.
10. Fermi E., Pasta J., Ulam S. — In: Collected Papers of E. Fermi. Document LA-1740, 1955.
11. Jackson E. A. — J. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 551, 686.
12. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1967, т. 52, с. 1081.
13. Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. М., Мир, 1964.
14. Walker G., Ford J. — Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 416.
15. Ford J., Lunsford G. — Ibid., 1970, v. A1, p. 59.
16. Колмогоров А. Н. — Докл. АН СССР, 1954, т. 98, с. 527.
17. Moser J. — Nachr. Acad. Wiss. Göttingen. II Math.-phys. Kl. 1, 1962.
18. Арнольд В. И. — Математические записки, 1963, т. 18, с. 9.

19. Терлецкий Я. П. Статистическая физика. М., Высшая школа, 1973.  
 20. Davidson R. C. — *Phys. Fluids*, 1967, v. 10, p. 1707.  
 21. Nishikawa K., Fried B. D. — *Ibid.*, 1973, v. 16, p. 1321.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Чандрасекар С.** Стохастические проблемы в физике и астрономии. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1947.  
**Чандрасекар С.** Принципы звездной динамики. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1948.  
**Arnold V. I., Avez A.** *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. N. Y., Benjamin, 1962.  
**Ford J., Walters J.** *Computer Studies of Energy Sharing and Ergodicity for Non-linear Oscillator Systems*. — *J. Math. Phys.*, 1963, v. 4, p. 1293.  
**Moser J.** *Lectures on Hamiltonian Systems*. — In: *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1968, N 81.  
**Goel N. S., Maitra S. C., Montroll E. W.** On the Volterra and Other Nonlinear Models of Interacting Populations. — *Rev. Mod. Phys.*, 1971, v. 43, p. 231.  
**Weinstock J.** *Nonlinear Theory of Frequency Shifts and Broadening of Plasma Waves*. — *Phys. Fluids*, 1972, v. 15, p. 454.  
**Zwanzig R.** *Nonlinear Generalized Langevin Equations*. — *J. Statist. Phys.*, 1973, v. 16, p. 215.  
**Chang J., Chang J. S.** Effect of Satellite Waves on the Resonant Three-Wave Coupling. — *Phys. Fluids*, 1973, v. 16, p. 706.  
**Tamir S.** Effect of Partial Coherence on Laser-Driven Plasma Instabilities. — *Ibid.*, p. 1169.  
**Kaw P. K., Lin A. T., Dawson J. N.** Quasiresonant Mode Coupling of Electron Plasma Waves. — *Ibid.*, p. 1967.  
**Thomson J. J., Faehl R. J., Kruer W. L.** — Mode-Coupling Saturation of the Parametric Instability and Electron Heating. — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 31, p. 918.  
**Захаров В. Е.** К проблеме стохастизации одномерных цепочек нелинейных осцилляторов. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1973, т. 65, с. 219.  
**Thomson J. J., Karush J. I.** Effects of Finite Bandwidth Driver on the Parametric Instability. — *Phys. Fluids*, 1974, v. 17, p. 1608.  
**Di Bona G., Masselot C.** *Nonlinear Stochastic Theory for a Plasma Driven by Strong High-Frequency Electric Fields*. — *Ibid.*, p. 739.  
**Руденко О. В., Чиркин А. С.** Теория нелинейного взаимодействия немонахроматических и шумовых волн в слабодиспергирующих средах. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1974, т. 67, с. 1903.  
**Ablowitz M. J., Haberman R.** *Resonantly Coupled Nonlinear Evolution Equations*. — *J. Math. Phys.*, 1975, v. 16, p. 2301.  
**Fisch N. J., Bers A.** Resonance Broadening for Wave-Particle and Wave-Wave Turbulence. — *Phys. Rev. Lett.*, 1975, v. 35, p. 373.  
**Kummer M.** An Interaction of Three Resonant Modes in a Nonlinear Lattice. — *J. Math. Analysis and Appl.*, 1975, v. 52, p. 64.  
**Kohler W. E.** Wave Propagation with Stochastically Coupled Propagating and Evanescent Modes. — *J. Math. Phys.*, 1975, v. 16, p. 536.  
**Hasegawa A.** Dynamics of Ensemble of Plane Waves in Nonlinear Dispersive Media. — *Phys. Fluids*, 1975, v. 18, p. 77.  
**Matsuda Y., Crawford F. W.** *Computational Study of Nonlinear Plasma Waves: II. Sideband Instability and Satellite Growth*. — *Ibid.*, p. 1346.  
**Franklin R. N.** The Sideband Instability. — In: *Proc. 3rd Intern. Congr. on Waves and Instabilities in Plasmas*. Palaiseau, 1977; *J. Phys.*, 1977, v. 38, p. 1.  
**Winfrey J. H., Dunlop M. L.** *Computer Study of Many Waves in the Small Cold Beam and Plasma Interaction*. — *Plasma Phys.*, 1977, v. 19, p. 901.  
**Gervais F., Olivain J., Quemeneur A.** Observation of Nonlinear Landau Damping of a Broad-Band Spectrum of Electron Plasma Waves. — *Phys. Fluids*, 1977, v. 20, p. 1488.  
**Sato T.** *Nonlinear Transport Instability in a Diffusive Plasma*. — *Ibid.*, 1978, v. 21, p. 600.



## НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЬНОГО ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Цель этой главы — рассмотрение проблемы трехволнового взаимодействия в связи с задачей воздействия мощного электромагнитного излучения, создаваемого внешними источниками, на плазму. При достаточно высоких уровнях такого излучения достигаются пороги различных вынужденных процессов (см. гл. 20, где приведен конкретный пример расчета пороговых значений амплитуд внешних полей). Тогда нелинейные процессы начинают существенно влиять на динамику плазмы, что вызывает такие эффекты, как, например, вынужденное рассеяние.

Ниже кратко обсуждается проблема рассеяния мощного лазерного излучения в ограниченной плазменной системе. Несколько более детально рассмотрены явления, связанные с возбуждением нарастающих волн (в частности, образование каверн в профилях плотности).

### Воздействие мощного излучения на плазму

Проблема взаимодействия мощного электромагнитного излучения с плазмой вызывает повышенный интерес в современной физике плазмы [1—3]. Находятся в стадии разработки или планируются мощные лазеры и источники радиоизлучения, предназначенные для использования в установках термоядерного синтеза как с инерциальным, так и с магнитным удержанием плазмы. Возможность получения термоядерной энергии зависит не только от успешного решения технологических задач, связанных с разработкой таких источников, но не в меньшей мере и от глубины понимания проблемы эффективной связи мощного излучения с плазмой.

Необходимо отметить, что при тех уровнях мощности, которые представляют интерес для разработчиков термоядерных устройств, сколько-нибудь полное решение этой проблемы еще не получено. Причина заключается, с одной стороны, в том, что существует предел аналитических возможностей изучения этой проблемы. С другой стороны, применение вычислительных методов хотя и позволяет в принципе получить результаты для уровней мощности, превосходящих любые уровни, когда-либо достигнутые в лабораторных условиях, также носит ограниченный характер или из-за того, что используемые модели чересчур грубы для правильного отражения реальных физических явлений в трехмерных системах, или из-за трудности интерпретации результатов. Неудивительно, что до настоящего времени проведено множество экспериментов по взаимодействию сильного излучения с плазмой, и тем не менее удовлетворительного согласия с тео-

ретическими предсказаниями пока нет. Например, типичное экспериментальное значение доли мощности лазерного излучения, рассеянного плотной плазмой, составляет около 20% (или еще меньше), тогда как теоретические модели предсказывают значительно большую долю рассеянного излучения в аномальных условиях.

Проблема взаимодействия мощного излучения с плазмой имеет очень общий характер, но особое место при ее рассмотрении должно отводиться описанию явления вынужденного рассеяния падающего излучения на коллективных колебаниях плазмы. Процесс стимулированного рассеяния заключается, как известно, в том, что падающее излучение доводит амплитуды колебаний до высокого уровня и одновременно рассеивается на этих колебаниях, вследствие чего возникает согласованная резонансная система падающих, рассеянных и плазменных волн. Такая система описывается связанными нелинейными уравнениями трехволнового взаимодействия вида

$$\left. \begin{aligned} (\partial/\partial t + v_0 \partial/\partial x) A_0 &= c_{12} A_1 A_2; \\ (\partial/\partial t + v_1 \partial/\partial x) A_1 &= c_{02} A_0 A_2^*; \\ (\partial/\partial t + v_2 \partial/\partial x) A_2 &= c_{01} A_0 A_1^*, \end{aligned} \right\} \quad (19.1)$$

где  $A_j$  и  $v_j$  — комплексная амплитуда нормального колебания и групповая скорость волны  $j$ ;  $c_{ij}$  — коэффициенты связи волн  $i$  и  $j$  (вещественные в отсутствие диссипации).

Уравнения (19.1) соответствуют когерентному взаимодействию в пространственно-однородной системе, в качестве которой мы выберем слой конечной толщины. При наличии в такой системе падающей волны  $(\omega_0, k_0)$  возникает рассеянная волна  $(\omega_1, k_1)$  и аномально нарастает амплитуда плазменной волны  $(\omega_2, k_2)$ . Резонансные условия запишем в виде

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2; \quad k_0 = -k_1 + k_2.$$

В частности, если коллективной является ионно-звуковая волна (случай вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна), то

$$\omega_1 \approx \omega_0; \quad k_1 \approx k_0; \quad \omega_2 \approx k_2 V_s \approx 2(V_s/c) \omega_0,$$

где  $V_s \sim \sqrt{T_e/m_i}$  — скорость ионно-звуковой волны, определяемая температурой электронов  $T_e$  и массой ионов  $m_i$ . Именно такой случай представляет особый интерес в связи с проблемой взаимодействия лазерного излучения с плазмой.

### Исследования вынужденного излучения

Попытки получения стационарного решения задачи нелинейного рассеяния в плазменном слое на основе уравнений (19.1) предпринимались в ряде работ [4—7]. Характерная трудность, с которой приходится сталкиваться при решении этой задачи, свя-

зна с рассмотрением возбуждения волн в ограниченном объеме плазмы при надлежащем учете граничных условий. Действительно, априори отнюдь не очевидно, какое из решений (19.1), записанных в эллиптических функциях, ответственно за рассеяние в стационарном состоянии. Результаты численного исследования пространственно-временной задачи [5, 6] указывают на то, что временная эволюция приводит к установлению пространственно-стационарных решений аperiодического типа, тогда как пространственно-периодические решения неустойчивы и эволюционируют к аperiодическим решениям. Учитывая, что есть только одно решение аperiодического типа, можно предположить, что именно оно определяет стационарное состояние. В пользу такого предположения свидетельствуют некоторые дополнительные аргументы, вытекающие из аналитического рассмотрения [7].

Параметрическое возбуждение коллективных колебаний в плазме с учетом конечной ширины спектра волны накачки рассматривалось в работах [8—12]. В частности, в [12] анализировался случай абсолютной неустойчивости в неоднородной плазме. Оказывается, что неоднородность плазмы в сочетании с конечностью ширины спектра волны накачки может при определенных условиях приводить к подавлению эффекта насыщения параметрической неустойчивости, тогда как в однородной плазме конечность ширины спектра сказывается лишь на численном значении порога развития параметрической неустойчивости.

### **Возбуждение нарастающих волн и модуляция профилей плотности плазмы**

Численные эксперименты по взаимодействию лазерного излучения с плазмой [13—15] указывают на существование интересного явления модуляции плотности плазмы в окрестности критической точки, т. е. точки, в которой плазменная частота равна частоте накачки. Причиной этой модуляции может служить осцилляционная двухпотоковая неустойчивость [16], которая в параметрическом приближении приводит к появлению только нарастающей волны. Такая неустойчивость может возбуждаться волной накачки с большим значением  $\lambda$  и частотой, равной или несколько меньшей плазменной частоты, либо в результате турбулентной перекачки энергии плазменных волн в область малых  $k$  вследствие распада плазменных волн на плазменные и ионно-звуковые волны (явление конденсации плазмонов). Для развития неустойчивости радиационное давление (пондеромоторная сила) должно превосходить пороговое значение, которое обычно оценивается следующим образом:

$$\epsilon_0 |\bar{E}|^2 / N_0 M c_s^2 > 12 k_{\text{эф}}^2 / k_D^2. \quad (19.2)$$

Здесь  $k_{\text{эф}}$  — характерное волновое число для плазменных волн;  $k_D$  — дебаевское волновое число;  $c_s$  — скорость ионно-звуковых волн;  $M$  — масса ионов и  $N_0$  — плотность плазмы.

В общем случае при нелинейности уравнений, описывающих плазму, рассматриваемую неустойчивость называют модуляционной. Эта неустойчивость, открытая в работе [17], в рамках согласованного подхода описывается уравнениями [18]:

$$2i\omega_{pe}\partial\bar{E}/\partial t + 3v_{Te}^2 \nabla^2 \bar{E} = \omega_{pe}^2 (\delta n/N_0) \bar{E}; \quad (19.3a)$$

$$\partial^2 \delta n / \partial t^2 - c_s^2 \nabla^2 \delta n = (\epsilon_0 / 4M) \nabla^2 |\bar{E}|^2, \quad (19.3b)$$

где  $\bar{E}$  — амплитуда высокочастотного электрического поля;  $\delta n$  — модуляция плотности плазмы;  $v_{Te}^2 = (T_e/m_e)$ . Уравнение (19.3a) описывает захват пакетов плазменных волн областями пониженной плотности плазмы, а уравнение (19.3b) — образование таких областей вследствие радиационного давления (вывод этих уравнений см. в Приложении IV).

В одномерных системах развитие неустойчивости приводит к балансу радиационного и теплового давлений, что достаточно для стабилизации неустойчивости. Но в двух- и трехмерных системах для получения стабилизации необходимо привлекать другие механизмы [19].

Из порогового условия (19.2) видно, что неустойчивость начинает развиваться при малых значениях волнового числа. Их можно найти из дисперсионного уравнения для плазменных волн, в котором вместо квадрата плазменной частоты  $\omega_{pe}^2$  следует использовать величину  $\omega_{pe}^2 (1 + \delta n/N_0)$ , учитывающую наличие модуляций плотности плазмы. В результате получим модифицированное дисперсионное уравнение вида

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2 + (\delta n/N_0) \omega_{pe}^2. \quad (19.4)$$

Предположим далее, что первоначально  $\partial^2 \delta n / \partial t^2 \approx 0$ . Тогда из (19.3b) найдем

$$\delta n = -\epsilon_0 |\bar{E}|^2 / 4M c_s^2. \quad (19.5)$$

Подставляя (19.5) в (19.4) и требуя, чтобы последнее слагаемое в (19.4) превосходило предыдущее, приходим к (19.2) при учете того, что  $k_D = \omega_{pe}/v_{Te}$ . Последнее и предпоследнее слагаемые в (19.4) можно интерпретировать как величины, соответствующие потенциальной и кинетической энергиям плазменных волн (плазмонов), которые оказываются захваченными, если доминирует потенциальная энергия [20]. Таким образом, пороговое условие (19.2) непосредственно связано с квазистатическим выражением (19.5). В связи с этим следует отметить, что (19.5) имеет ограниченную область применимости и теряет силу, например, при возбуждении ионно-звуковых волн.

В одномерном случае можно получить стационарное решение уравнений (19.3). Используя ренормировку

$$\begin{aligned} x &\rightarrow (3v_{Te}^2/2\omega_{pe}c_s) x; & t &\rightarrow (3v_{Te}^2/2\omega_{pe}c_s^2) t; \\ \delta n &\rightarrow 4c_s^2 N_0 / 3v_{Te}^2; & |\bar{E}|^2 &\rightarrow (16MN_0 c_s^4 / 3\epsilon_0 v_{Te}^2) |\bar{E}|^2, \end{aligned}$$

перепишем эту систему в безразмерном виде:

$$i\partial\bar{E}/\partial t + \partial^2\bar{E}/\partial x^2 = \delta n\bar{E}; \quad (19.6a)$$

$$\partial^2\delta n/\partial t^2 - \partial^2\delta n/\partial x^2 = \partial^2 |E|^2/\partial x^2. \quad (19.6б)$$

Система (19.6) имеет следующие интегралы движения [21—24]:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{E}|^2 dx;$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{i}{2} \left( \bar{E} \frac{\partial \bar{E}^*}{\partial x} - \bar{E}^* \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} \right) + \delta n V \right] dx;$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left| \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} \right|^2 + \delta n |\bar{E}|^2 + \frac{1}{2} \delta n^2 + \frac{1}{2} V^2 \right] dx,$$

где введена функция  $V$ , определяемая уравнением

$$\partial \delta n / \partial t + \partial V / \partial x = 0. \quad (19.7)$$

Соотношение (19.7) можно рассматривать как уравнение непрерывности, и поэтому величина  $V$  играет роль гидродинамического потока частиц [22]. Интегралы движения  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  отвечают законам сохранения числа квантов излучения, импульса и энергии соответственно. В квазистатическом приближении слагаемые, содержащие  $V$ , в  $I_2$  и  $I_3$  отсутствуют.

Можно определить также потенциал гидродинамического потока с помощью соотношения [22]

$$\partial u / \partial t = \delta n + |E|^2. \quad (19.8)$$

В квазистатическом приближении  $\partial u / \partial t = 0$ . В терминах потенциала  $u$  уравнение (19.6б) переписывается как

$$\partial \delta n / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2,$$

что с учетом (19.7) дает

$$V = -\partial u / \partial x.$$

На рис. 19.1, а—в представлена картина развития модуляционной неустойчивости, полученная в результате численного решения

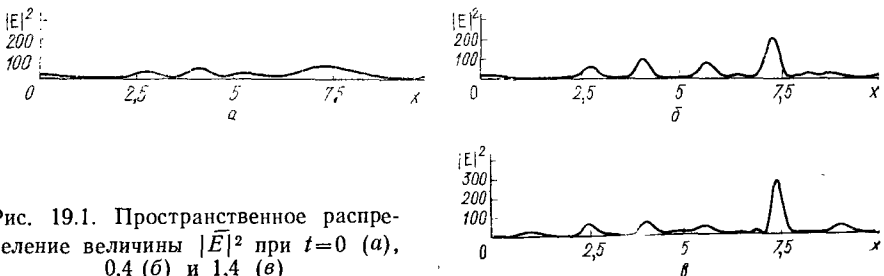


Рис. 19.1. Пространственное распределение величины  $|E|^2$  при  $t=0$  (а), 0,4 (б) и 1,4 (в)

системы (19.6) на основе расчета временных зависимостей 31 фурье-компоненты электрического поля и возмущения плотности плазмы. Фазы фурье-компонент поля  $E$  выбирали случайным образом, а начальную плотность определяли из условия  $\delta n = -|E|^2$ . Расчет проведен для  $I_1=22,20$ ,  $I_2=0,00$  и  $I_3=-363$ .

Заметим, что решение (19.6), соответствующее балансу радиационного и теплового давления, имеет вид (см., например, [22])

$$\bar{E} = E_m \exp [i (\Delta k x - \Delta \omega t)] / \text{ch} [A (x - vt)]; \quad (19.9a)$$

$$\delta n = - |E|^2 / (1 - v^2), \quad (19.9b)$$

где  $E_m$  — амплитудное значение электрического поля. Сдвиги волновых чисел  $\Delta k$  и частот  $\Delta \omega$  обусловлены доплеровским эффектом и нелинейностью. Огибающая распространяется со скоростью  $v = v_g / c_s$ , где  $v_g = 3k_{\text{эф}} v_{Te}^2 / \omega_{pe}$ . Сдвиги  $\Delta k$  и  $\Delta \omega$  определяются соотношениями

$$\Delta k = v/2; \quad \Delta \omega = v^2/4 - E_m^2/2(1 - v^2).$$

Наконец,

$$A = E_m [2(1 - v^2)]^{-1/2}.$$

Устойчивый волновой пакет вида (19.9) называют солитоном. Солитоны обладают явно выраженными свойствами частиц и могут взаимодействовать между собой. Например, возможен процесс слияния двух солитонов с излучением ионно-звуковой волны и распад одного солитона на два при поглощении ионно-звуковой волны. Типы реакций определяются интегралами движения  $I_1-I_3$  [18, 21—26]. Для реализации одномерных солитонов необходимо использовать сильное магнитное поле, так как эти солитоны неустойчивы относительно поперечных возмущений [27, 28].

Если предположить, что квазистатическое решение остается приближенно справедливым и в динамических условиях, то можно подставить (19.5) в (19.3a) и получить тем самым уравнение для  $\bar{E}$ , содержащее кубическую нелинейность, т. е. совпадающее по форме с уравнением четырехволнового взаимодействия (см. гл. 14). Это уравнение также имеет солитонное решение вида (19.9) и называется нелинейным уравнением Шредингера. Его общее решение можно получить методом обратной задачи рассеяния [29]. В рассматриваемом приближении солитоны не взаимодействуют и излучение ионно-звуковых волн невозможно.

Следует подчеркнуть, что проблема модуляционной неустойчивости вызывает значительный интерес также в связи с задачами лазерного и пучкового нагрева плазмы [30, 31] и общей проблемой плазменной турбулентности [19, 21—25, 32, 33].

Отметим в заключение, что здесь упомянут только один вид модуляционной неустойчивости. Аналогичные явления могут быть обусловлены и ионно-звуковыми солитонами [34, 35], неустойчивостью в конусе потерь [36], солитонами в области верхнего

гибридного резонанса [37, 38], захватом электромагнитного излучения [39, 40], модуляционной неустойчивостью альфвеновских волн [41] и др. Таким образом, обсуждаемые явления представляют интерес также для задач нагрева замагниченной плазмы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Galeev A. A., Sagdeev R. Z. — Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 603.
2. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М., Наука, 1973.
3. Brueckner K. A., Jorna S. — Rev. Mod. Phys., 1974, v. 46, p. 325.
4. Anderson D., Wilhelmsson H. — Nucl. Fusion, 1974, v. 14, p. 537; 1975, v. 15, p. 201, 387; Phys. Scripta, 1975, v. 11, p. 341.
5. Harvey R. W., Schmidt G. — Phys. Fluids, 1975, v. 18, p. 1395.
6. Forslund D. W., Kindel J. M., Lindman E. L. — Ibid., p. 1002.
7. Fuchs V., Beaudry G. — J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 208.
8. Valeo E., Oberman C. R. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 1035.
9. Baldis H. A., Pepin H., Johnston T. W. — Opt. Comm., 1975, v. 15, p. 311.
10. Thomson J. J. — Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 237.
11. Anderson D., Wilhelmsson H. — Phys. Lett., 1976, v. 56A, p. 37.
12. Laval G., Pellat R., Pesme D. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 192.
13. Forslund D., Kindel J., Lindman E. — Phys. Fluids, 1975, v. 18, p. 1017.
14. Valeo E. J., Kruer W. L. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 750.
15. Chen H. H., Liu C. S. — In: Plasma Physics: Nonlinear Theory and Experiments. Ed. by H. Wilhelmsson. Nobel Foundation Symp. N 36. N. Y., Plenum Press, 1977, p. 131.
16. Nishikawa K. — J. Phys. Soc. Jap., 1968, v. 24, p. 916.
17. Веденов А. А., Рудаков Л. И. — Докл. АН СССР, 1964, т. 159, с. 767.
18. Захаров В. Е. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1972, т. 62, с. 1745.
19. Galeev A. A., Sagdeev R. Z., Shapiro V. D., Shevchenko V. I. — [15], p. 188.
20. Abdulloev Kh. O., Bogoljubskij I. L., Makhankov V. G. — Phys. Lett., 1974, v. 48A, p. 161; Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 21.
21. Abdulloev Kh. O., Bogoljubskij I. L., Makhankov V. G. — Ibid., p. 21.
22. Ter Haar D. — [15], p. 202.
23. Watanabe M. — Phys. Lett., 1976, v. 57A, p. 331.
24. Дегтярев Л. М., Маханьков В. Г., Рудаков Л. И. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 67, с. 533.
25. Lebedev A. N., Tsytovich V. N. — Phys. Scripta, 1975, v. 11, p. 266.
26. Pereira N. R., Sudan R. N., Denavit J. Cornell Univ. Lab. Rep. LPS 191, 1976.
27. Denavit J., Pereira N. R., Sudan R. N. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 1435.
28. Schmidt G. — Ibid., 1975, v. 34, p. 724.
29. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1971, т. 61, с. 118.
30. Ryutov D. D. — [15], p. 284.
31. Shamel H., Lee Y. C., Morales G. J. — Phys. Fluids, 1976, v. 19, p. 849.
32. Kingsep A. S., Rudakov L. I., Sudan R. N. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1482.
33. Tsytovich V. N. — [15], p. 166.
34. Ikezi H., Taylor R. J., Baker D. R. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 11.
35. Nishikawa K., Kaw P. K. — Phys. Lett., 1975, v. 50A, p. 455.
36. Morales G. J., Lee Y. C. — Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 930.
37. Kaufman A. N., Stenflo L. — Phys. Scripta, 1975, v. 11, p. 269.
38. Porkolab M., Goldman M. V. — Phys. Fluids, 1976, v. 12, p. 872.
39. Kaw P., Schmidt G., Wilcox T. — Ibid., 1973, v. 16, p. 1522.
40. Gersten J. I., Tzoar N. — Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 934.
41. Lashmore-Davies C. N. — Phys. Fluids, 1976, v. 19, p. 587.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Vedenov A. A., Gordeev A. V., Rudakov L. I. Oscillations and Instability of a Weakly Turbulent Plasma. — *Plasma Phys.*, 1967, v. 9, p. 719.
- Dupree T. H. Nonlinear Theory of Low-Frequency Instabilities. — *Phys. Fluids*, 1968, v. 11, p. 2680.
- Shanny R., Kruer W., Dawson J. Investigations of Externally Driven Large Amplitude Plasma Waves. — *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1968, p. 1542.
- Taniuti T., Washimi H. Self-Trapping and Instability of Hydromagnetic Waves Along the Magnetic Field in a Cold Plasma. — *Phys. Rev. Lett.*, 1968, v. 21, p. 209.
- Kaw P. K., Dawson J. Laser-Induced Anomalous Heating of a Plasma. — *Phys. Fluids*, 1969, v. 12, p. 2586.
- Цытович В. Н. Теория низкочастотных электромагнитных свойств турбулентной плазмы. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1969, т. 57, с. 141.
- Hasegawa A. Stimulated Modulational Instabilities of Plasma Waves. — *Phys. Rev.*, 1970, v. A1, p. 1746.
- Dum C. T., Dupree T. H. Nonlinear Stabilization of High-Frequency Instabilities in a Magnetic Field. — *Phys. Fluids*, 1970, v. 13, p. 2064.
- Babuel-Peyrissac J. P., Bobin J. L. Stimulated Ion-Acoustic Wave Generator in a Laser Created Plasma. — In: *Proc. 10th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases*, Oxford, 1971, p. 329.
- Perkins F. W., Flick J. Parametric Instabilities in Inhomogeneous Plasmas. — *Phys. Fluids*, 1971, v. 14, p. 2012.
- Rudakov L. I., Tsytovich V. N. The Theory of Plasma Turbulence for Strong Wave-Particle Interaction. — *Plasma Phys.*, 1971, v. 13, p. 213.
- Kaufman A. N., Kaw P. K., Kruer W. Anomalous Absorption of Intense Electromagnetic Waves in Plasma. — *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion*, 1972, v. 1, p. 39.
- Kruer W. L., Dawson J. M. Anomalous High-Frequency Resistivity of a Plasma. — *Phys. Fluids*, 1972, v. 15, p. 446.
- Рудаков Л. И. Торможение электронных пучков в плазме с высоким уровнем ленгмюровских солитонов. — *Докл. АН СССР*, 1972, т. 207, с. 821.
- Цытович В. Н. Развитие представлений о плазменной турбулентности. — *Успехи физ. наук*, 1972, т. 108, с. 143.
- Rosenbluth M. N., White R. B., Liu C. S. Temporal Evolution of a Three-Wave Parametric Instability. — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 31, p. 1190.
- Ichikawa Y. H., Suzuki T., Taniuti T. Modulational Instability of Electron Plasma Waves. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1973, v. 34, p. 1089.
- Fried B. D., Ichikawa Y. H. On the Nonlinear Schrödinger Equation for Langmuir Waves. — *Ibid.*, p. 1073.
- White R. B., Liu C. S., Rosenbluth M. N. Parametric Decay of Obliquely Incident Radiation. — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 31, p. 520.
- Weinstock J., Bezzerides B. Nonlinear Saturation of Parametric Instabilities: Spectrum of Turbulence and Enhanced Collision Frequency. — *Phys. Fluids*, 1973, v. 16, p. 2287.
- Galeev A. A., Sagdeev R. Z. Parametric Phenomena in a Plasma. — *Nucl. Fusion*, 1973, v. 13, p. 603.
- Ikezi H. Experiments of Ion-Acoustic Solitary Waves. — *Phys. Fluids*, 1973, v. 16, p. 1668.
- Thomson J. J., Faehl R. J., Kruer W. L. Mode-Coupling Saturation of the Parametric Instability and Electron Heating. — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 31, p. 918.
- Kaufman A. N., Cohen B. I. Nonlinear Interaction of Electromagnetic Waves in a Plasma Density Gradient. — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 30, p. 1306.
- Кляцкин В. И., Татарский В. И. Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики. — *Успехи физ. наук*, 1973, т. 110, с. 499.
- Hora H. Striated Jets due to Nonlinear Ponderomotive Forces in Laser Produced Plasmas at Obliquely Incident Light. — *Phys. Fluids*, 1974, v. 17, p. 939.
- Manheimer W. M. Connection Between the Linear and Nonlinear Theory of Anomalous Reflection from a Plasma Slab. — *Ibid.*, p. 1634.



- Drake J. F., Kaw P. K., Lee Y. C., Schmidt G., Liu C. S., Rosenbluth M. N.** Parametric Instabilities of Electromagnetic Waves in Plasmas. — *Ibid.*, p. 778.
- Whitfield D. W. A.** Parametric Instability Arising in Inhomogeneous Plasmas. — *Ibid.*, p. 995.
- Thomson J. J., Faehl R. J., Krueer W. L., Bodner S.** Electron Heating due to Parametric Instability Turbulence. — *Ibid.*, p. 973.
- Montes C.** Relaxation Oscillations in Weak Turbulence. The case of Nonlinear Wave-Particle Interaction. — *J. Plasma Phys.*, 1974, v. 11, p. 141.
- White R., Kaw P., Pesme D., Rosenbluth M. N., Laval G., Huff R., Varma R.** Absolute Parametric Instabilities in Inhomogeneous Plasmas. — *Nucl. Fusion*, 1974, v. 14, p. 45.
- Lee Y. C., Kaw P. K.** Temporal Electrostatic Instabilities in Inhomogeneous Plasmas. — *Phys. Rev. Lett.*, 1974, v. 32, p. 135.
- Hasegawa A., Chen L.** Plasma Heating by Alfvén-Wave Phase Mixing. — *Ibid.*, p. 454.
- Nishikawa K., Hojo H., Mima K., Ikezi H.** Coupled Nonlinear Electron-Plasma and Ion-Acoustic Waves. — *Ibid.*, v. 33, p. 148.
- Makhankov V. G.** On Stationary Solutions of the Schrödinger Equation with a Self-Consistent Potential Satisfying Boussinesq's Equation. — *Phys. Lett.*, 1974, v. 50A, p. 42.
- Walsh J. E., Freese K. B., Levine J. S.** Time Dependence of Electron Scattering in a Beam-Plasma System. — *Phys. Rev. Lett.*, 1974, v. 32, p. 346.
- Nicholson D. R., Kaufman A. N.** Parametric Instabilities in Turbulent, Inhomogeneous Plasma. — *Ibid.*, v. 33, p. 1204.
- Valeo E. J., Krueer W. L.** Solitons and Resonant Absorption. — *Ibid.*, p. 750.
- Альбер Я. И., Кротова З. Н., Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтейгер В. Ю.** Об эффектах индуцированного рассеяния при падении электромагнитного импульса на слой плазмы. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1974, т. 66, с. 574.
- Larsson J., Stenflo L.** Threshold Fields of Parametric Instabilities. — *Beitr. Plasma Phys.*, 1974, Bd 14, S. 7.
- Силин В. П., Стародуб А. Н.** Вынужденное комбинационное рассеяние в неоднородной плазме. — *Журн. эксперим. и теорет. физ.*, 1974, т. 67, с. 2110.
- Рубенчик А. М., Рыбак И. Я., Стурман Б. И.** О высокочастотном нагреве плазмы в сильном магнитном поле. — Там же, с. 1364.
- Das G. C.** Ion-Acoustic Solitary Waves in Multicomponent Plasmas with Negative Ions. — *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 1975, v. PS-3, p. 168.
- Krueer W. L., Valeo E. J., Estabrook K. G.** Limitation of Brillouin Scattering in Plasmas. — *Phys. Rev. Lett.*, 1975, v. 35, p. 1076.
- Cairns R. A.** An Absolute Raman Instability in an Inhomogeneous Plasma. — *J. Plasma Phys.*, 1975, v. 14, p. 327.
- Lin A. T., Dawson J. M.** Stimulated Compton Scattering of Electromagnetic Waves in Plasma. — *Phys. Fluids*, 1975, v. 18, p. 201.
- Thomson J. J., Krueer W. L., Bodner S. E., De Groot J. S.** Parametric Instability Thresholds and Their Control. — *Ibid.*, p. 849.
- Ferrari A., Trussoni E., Zaninetti L.** Parametric Excitation of Relativistic Plasma Oscillations by Strong Electromagnetic Waves. — *Phys. Lett.*, 1975, v. 54A, p. 186.
- Gorbunov L. M.** Development of Parametric Instability in a Bounded Region of Space. — *Phys. Fluids*, 1975, v. 18, p. 689.
- Параметрический резонанс и диагностика лазерной плазмы/А. Н. Крохин, В. В. Пустоголов, А. А. Рупасов и др.** — *Письма ЖЭТФ*, 1975, т. 22, с. 47.
- Shukla P. K., Yu M. Y., Spatschek K. H.** Conversion and Stabilization of Parametric Instabilities by Frequency Shift. — In: *Proc. 12th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Eindhoven*, 1975, p. 333.
- Watanabe S., Ishihara O., Tanaka H.** Recurrence of Ion Waves and Soliton-Like Interaction. — *Plasma Phys.*, 1975, v. 17, p. 345.
- Offenberger A. A., Cervenec M. R., Yam A. M., Pasternak A. W.** Stimulated Brillouin Scattering from CO<sub>2</sub> Laser Produced Plasma. — *Phys. Lett.*, 1975, v. 55A, p. 87.

- Capjack C. E., James C. R.** Heating Rates for a Beat Frequency Laser Heated Plasma. — *Canad. J. Phys.*, 1975, v. 53, p. 2606.
- Моисеев С. С.** Нелинейные волновые процессы в неоднородной плазме. — *Физика плазмы*, 1975, т. 1, с. 5.
- Нелинейная** теория модуляционной неустойчивости плазменных волн/А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, Ю. С. Сигов и др. — Там же, с. 10.
- Параметрическое** возбуждение быстрой магнитозвуковой волны и быстрые электроны в плазме/Л. Л. Пасечник, В. В. Пустовалов, В. Ф. Семенюк и др. — Там же, с. 21.
- Петвиашвили В. И.** Трехмерные солитоны необыкновенной и ленгмюровской волн. — Там же, с. 28.
- Karpman V. I.** On the Dynamics of Sonic Langmuir Solitons. — *Phys. Scripta*, 1975, v. 11, p. 263.
- Nishikawa K., Kaw P. K.** Propagation of Solitary Ion-Acoustic Waves in Inhomogeneous Plasmas. — *Phys. Lett.*, 1975, v. 50A, p. 453.
- Bezerides B., Du Bois D. F.** Electron Heating and Landau Damping in Intense Localized Electric Fields. — *Phys. Rev. Lett.*, 1975, v. 34, p. 1381.
- Weinstock J., Bezerides B.** Saturation and Spectrum of the Oscillating Two-Stream Instability. — *Phys. Fluids*, 1975, v. 18, p. 251.
- Kaw P., Mima K., Nishikawa K.** Envelope Solutions for Random-Phase Plasmons. — *Phys. Rev. Lett.*, 1975, v. 34, p. 803.
- Lashmore-Davies C. N.** The Relationship Between Modulational Instability and Oscillating Two-Stream Instability. — *Nucl. Fusion*, 1975, v. 15, p. 213.
- Nishikawa K., Lee Y. C., Liu C. S.** Langmuir Wave Turbulence-Condensation and Collapse. — *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion*, 1975, v. 2, p. 63.
- Захаров В. Е.** Неустойчивость и нелинейные колебания солитонов. — *Письма ЖЭТФ*, 1975, т. 22, с. 464.
- Захаров В. Е., Матрюков А. Ф., Сынах В. С.** О динамике коллапса ленгмюровских волн в высокотемпературной плазме. — *Физика плазмы*, 1975, т. 1, с. 614.
- Будиева О. Б., Захаров В. Е., Сынах В. С.** О некоторых моделях волновых коллапсов. — Там же, с. 606.
- Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.** Нелинейные эффекты в неоднородной плазме. — *Успехи физ. наук*, 1975, т. 116, с. 546.
- Porkolab M.** High Frequency Parametric Wave Phenomena and Plasma Heating. — In: *Invited Paper at the 12th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases*. Eindhoven, 1975; *Physica (The Netherlands)*, 1976, v. 82c, p. 86.
- Sagdeev R. Z., Forstlund D., Galeev A. A.** Report on Working Group on Stimulated Backscattering. — *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion*, 1976, v. 2, p. 97.
- Das G. C.** Korteweg-de Vries Equation for Nonlinear Ion-Acoustic Waves in a Plasma with Negative Ions. — *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 1976, v. PS-4, p. 199.
- Turechek J. J., Chen F. F.** Detection of Brillouin Backscattering in Underdense Plasmas. — *Phys. Rev. Lett.*, 1976, v. 36, p. 720.
- Bezerides B., Du Bois D. F.** Coupling Saturation in the Nonlinear Theory of Parametric Decay Instabilities. — *Ibid.*, p. 729.
- Bourdier A., Di Bona G., Fortin X., Masselot C.** Parametric Instabilities Below the Electron Plasma Frequency due to Relativistic Corrections. — *Phys. Rev.*, 1976, v. A13, p. 887.
- Brueckner K. A.** Energy Deposition in Laser-Heated Plasmas. — *Phys. Rev. Lett.*, 1976, v. 36, p. 677.
- Ott E.** Scaling of Plasma Turbulence Resulting from Parametric Instabilities. — *Phys. Fluids*, 1976, v. 19, p. 341.
- Cicconi G., Rosatelli C.** Parametric Resonance Instabilities in Argon and Neon Plasmas. — *J. Appl. Phys.*, 1976, v. 47, p. 922.
- Ferrari L. A., Haye R. J., McQuade A. W.** Anomalous Penetration of High-Frequency Electromagnetic Waves into a Plasma. — *Phys. Fluids*, 1976, v. 19, p. 457.
- Prasad D.** Enhanced Coherent Raman Emission from Uniform Plasmas. — *Ibid.*, p. 464.

- Massey R., Berggren K., Pientrzyk Z. A.** Observation of Stimulated Brillouin Back-scattering from Underdense Plasma. — *Phys. Rev. Lett.*, 1976, v. 36, p. 963.
- Akiyama H., Kando M., Minami K., Takeda S.** Nonlinear Interaction of High-Frequency Electromagnetic Field with a Nonuniform Plasma. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1976, v. 40, p. 839.
- Guzdar P., Sen A.** Modulation Instability in the Presence of Langmuir Turbulence. — *Phys. Lett.*, 1976, v. 55A, p. 479.
- Schamel H., Shukla P. K.** Envelope Solitons in the Presence of Nonisothermal Electrons. — *Phys. Rev. Lett.*, 1976, v. 36, p. 968.
- Mahaffey R. A., Trivelpiece A. W.** Parametric Excitation of Nonneutral Plasma Surface Ripples. — *Ibid.*, p. 1044.
- Yu M. Y., Spatschek K. H.** Anomalous Damping of Ion-Acoustic Waves in the Presence of Strong Langmuir Turbulence. — *Phys. Fluids*, 1976, v. 19, p. 705.
- Porkolab M., Arunasalam V., Luchmann N. C., Schmitt J. P. M.** Parametric Instabilities and Plasma Heating in an Inhomogeneous Plasma. — *Nucl. Fusion*, 1976, v. 16, p. 269.
- Felber F. S., Marburger J. H.** Nonlinear Optical Reflection and Transmission in Overdense Plasmas. — *Phys. Rev. Lett.*, 1976, v. 36, p. 1176.
- Yabe T., Niu K.** Numerical Analysis of the Stability of Laser-Driven-Pellet Implosion. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1976, v. 40, p. 1164.
- Nicholson D. R.** Parametric Instabilities in Plasma with Sinusoidal Density Modulation. — *Phys. Fluids*, 1976, v. 19, p. 889.
- Pant H. C., Eidmann K., Sachsenmaier P., Sigel R.** Threshold of the  $2\omega_{pe}$  Instability in a Laser Produced Plasma. — *Opt. Comm.*, 1976, v. 16, p. 396.
- Hasegawa A., Chen L.** Parametric Decay of Kinetic Alfvén Wave and its Application to Plasma Heating. — *Phys. Rev. Lett.*, 1976, v. 36, p. 1362.
- Sigel R., Eidman K., Pant H. C., Sachsenmaier P.** Reflection from an Unstable Obliquely Irradiated Laser Plasma. — *Ibid.*, p. 1369.
- Thode L. E.** Plasma Heating by Scattered Relativistic Electron Beams: Correlations among Experiment, Simulation and Theory. — *Phys. Fluids*, 1976, v. 19, p. 831.
- Tsyтович V. N.** Strong Interaction of Relativistic Electron Beams with Gas and Plasma. — In: *Proc. 12th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases*. Eindhoven, 1976, p. 141.
- Sodha M. S., Sharma R. P., Kaushik S. C.** Interaction of Intense Laser Beams with Plasma Waves: Stimulated Raman Scattering. — *J. Appl. Phys.*, 1976, v. 47, p. 3518.
- Liu C. S., Rosenbluth M. N.** Parametric Decay of Electromagnetic Waves into Two Plasmons and its Consequences. — *Phys. Fluids*, 1976, v. 19, p. 967.
- Dobrowolny M., Ferrari A., Bosia G.** Plasma Instabilities of a Relativistically Strong Electromagnetic Wave. — *Plasma Phys.*, 1976, v. 18, p. 441.
- Drake J. F., Lee Y. C., Nishikawa K., Tsintsadze N. L.** Breaking of Large Amplitude Waves as a Result of Relativistic Electron-Mass Variation. — *Phys. Rev. Lett.*, 1976, v. 36, p. 196.
- Wong A. Y.** Electromagnetic Wave Interactions with Inhomogeneous Plasmas. Univ. of California Rep. PPG-277, 1976.
- Ichikawa Y. H., Yajima N., Takano K.** Coherent States and the Korteweg-de Vries Equation for a System of Interacting Phonons. — *Progr. Theor. Phys.*, 1976, v. 55, p. 1723.
- Mio K., Ogino T., Minami K., Takeda S.** Modulational Instability and Envelope-Solitons for Nonlinear Alfvén Waves Propagating along the Magnetic Field in Plasmas. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1976, v. 41, p. 667.
- Mio K., Ogino T., Minami K., Takeda S.** Modified Nonlinear Schrödinger Equation for Alfvén Waves Propagating along the Magnetic Field in Cold Plasmas. — *Ibid.*, p. 265.
- Anderson D., Bonnedal M.** Saturation of the Stimulated Raman Scattering Instability by Means of Particle Trapping. — *Phys. Lett.*, 1976, v. 57A, p. 437.
- Larsson J., Stenflo L., Tegeback R.** Enhanced Fluctuations in a Magnetized Plasma due to the Presence of an Electromagnetic Wave. — *J. Plasma Phys.*, 1976, v. 16, p. 37.

- Watanabe M., Nishikawa K.** On the Dynamics of Langmuir Wave Soliton. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1976, v. 41, p. 1029.
- Mittal M. L., Prahalad Y. S., Nayak D. G.** Effects of Noise on the Parametric Amplification of Alfvén Waves. — *Plasma Phys.*, 1976, v. 18, p. 801.
- Chen L., Vaclavik J.** Kinetic Modulational Instability of Langmuir Turbulence. — *Phys. Lett.*, 1976, v. 58A, p. 185.
- Yu M. Y., Shukla P. K.** Filamentation Instabilities Associated with Ordinary Electromagnetic Waves in Collisional Plasma. — *Ibid.*, p. 175.
- Heimann P.** Experimental Investigation of the Parametric Decay Instability in a Weakly Ionized Plasma. — *Czechosl. J. Phys.*, 1976, v. B26, p. 769.
- Kruer W. L.** Simulations of Laser Light Absorption. — *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion*, 1976, v. 2, p. 139.
- Kono M., Yajima N.** Instability of Coherent Ion Acoustic Wave in a Phonon Gas. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1976, v. 41, p. 272.
- Ikemura T.** Parametric Coupling of Two Langmuir Waves in an Inhomogeneous Plasma. II. Stabilizing Effects due to Ponderomotoric Force Created by an Intense Pump Field. — *Ibid.*, p. 281.
- Itakura A.** Frequency Shift of an Electron Plasma Oscillation in a Modulated Beam-Plasma System. — *Ibid.*, p. 305.
- Sato T.** A New Type of Nonlinear Plasma Equation. I. Formulation. — *Ibid.*, p. 309.
- Sato T.** A New Type of Nonlinear Plasma Equation. II. Annihilative and Transparent Interactions of Pulses. — *Ibid.*, p. 315.
- Cramer N. F.** Parametric Excitation of Ion-Cyclotron and Fast Waves by Nonuniform Pump Magnetic Field. — *Plasma Phys.*, 1976, v. 18, p. 749.
- Fuchs V.** Nonlinear Theory of Stimulated Backscattering in a Bounded Dissipative Plasma. — *Phys. Fluids*, 1976, v. 19, p. 1554.
- Matsumoto H., Yasuda Y.** Computer Simulation of Nonlinear Interaction Between a Monochromatic Whistler Wave and an Electron Beam. — *Ibid.*, p. 1513.
- Громов С. Н., Пасечник Л. Л., Семенюк В. Ф.** Понижение порога параметрической неустойчивости при инжекции в плазму электронного пучка. — *Письма ЖЭТФ*, 1976, т. 23, с. 509.
- Камилов К., Стенфло Л., Хакимов Ф. Х., Цытович В. Н.** Взаимодействие продольных и поперечных волн в сильнотурбулентной плазме. — *Журн. техн. физ.*, 1976, т. 46, с. 680.
- Ситенко А. Г.** Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме. Киев, Наукова думка, 1977.
- Stenflo L.** Coupling Coefficients for a Cold Plasma in a Circularly Polarized Wave. — *Plasma Phys.*, 1977, v. 19, p. 1187.
- Dysthe K. B., Pecseli H. L.** Nonlinear Langmuir Wave Modulation in Collisionless Plasmas. — *Ibid.*, p. 931.
- Goldman M. V., Nicholson D. R.** Dissipative Langmuir Shock. — *Phys. Fluids*, 1977, v. 20, p. 756.
- Morales G. J., Lee Y. C.** Generation of Density Cavities and Localized Electric Fields in a Nonuniform Plasma. — *Ibid.*, p. 1135.
- Fejer J. A.** Parametric Instabilities in the Ionosphere. — *J. Phys.*, 1977, v. 38, p. 55.
- Silin V. P.** The Absolute Parametric Instabilities and the Plasma Heating. — *Ibid.*, p. 153.
- Anderson D., Wilhelmsson H.** Interpretation of Enhanced Laser-Plasma Backscattering due to Prepulse Radiation. — *Phys. Lett.*, 1977, v. 64A, p. 47.
- Watanabe S.** Self-Modulation of a Nonlinear Ion Wave Packet. — *J. Plasma Phys.*, 1977, v. 17, p. 487.
- Wong A. W.** Cavitons. — *J. Phys.*, 1977, v. 38, p. 27.
- Sigel R.** Experiments on Intense Laser Irradiation of Plasmas. — *Ibid.*, p. 35.
- Вильгельмссон Х., Накач Р.** Некоторые аспекты нелинейного взаимодействия волн в плазме. — *Физика плазмы*, 1977, т. 3, с. 338.
- Sanuku H., Schmidt G.** Nonlinear Drift Wave in a Collisionless Non-Uniform Plasma. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1977, v. 42, p. 260.
- Fuchs V.** Convective Brillouin Amplification in a Homogeneous Plasma Slab. — *Phys. Lett.*, 1977, v. 59A, p. 455.

- Fuchs V.** Three-Wave Parametric Decay Instability with Arbitrary Dissipation in Homogeneous Plasmas. — *Phys. Fluids*, 1977, v. 20, p. 1535.
- Faehl R. J., Kruer W. L.** Laser Light Absorption by Short Wavelength Ion Turbulence. — *Ibid.*, p. 55.
- Яньков В. В.** Баллистические моды и замедление электронного пучка ленгмюровскими солитонами. — *Физика плазмы*, 1977, т. 3, с. 404.
- Давыдова Т. А., Шамрай К. П.** Модуляционная неустойчивость в неоднородном поле накачки. — Там же, с. 591.
- Cary J. R., Kaufman A. N.** Ponderomotive Force and Linear Susceptibility in Vlasov Plasma. — *Phys. Rev. Lett.*, 1977, v. 39, p. 402.
- Baumgärtel K., Sauer K.** Stationary Nonlinear Interactions Between High- and Low-Frequency Waves and the Generation of Density Cavities in a Plasma. — *J. Plasma Phys.*, 1977, v. 19, p. 183.
- Rowland H. L., Papadopoulos K.** Simulations of Nonlinearly Stabilized Beam-Plasma Interactions. — *Phys. Rev. Lett.*, 1977, v. 39, p. 1276.
- Sinha M., Sundaram A. K.** Effect of an Electron Beam on Pump-Driven Quasi-Modes. — *Nucl. Fusion*, 1978, v. 18, p. 199.
- Chen H. H., Liu C. S.** Nonlinear Wave and Soliton Propagation in Media with Arbitrary Inhomogeneities. — *Phys. Fluids*, 1978, v. 21, p. 377.
- Cohen B. L., Kaufman A. N.** Effects of Beat-Wave Electron Trapping on Stimulated Raman and Thomson Scattering. — *Ibid.*, 1978, v. 21, p. 404.
- Brinca A. L.** The Coherent Wave-Particle Resonance Perturbed by Turbulence. — *J. Plasma Phys.*, 1978, v. 19, p. 43.
- Stenflo L.** Stimulated Scattering Processes in Magnetized Plasmas. — *Phys. Scripta*, 1978, v. 17, p. 9.
- Zagorodny A. G., Tegeback R., Usenko A. S., Yakimenko I. P.** Enhanced Fluctuations in Semi-Infinite Plasmas. — *Ibid.*, v. 18, p. 182.
- Stenflo L., Yakimenko I. P.** Scattering of Electromagnetic Waves on Enhanced Fluctuations in Bounded Plasmas. — *Ibid.*, p. 151.
- Stenflo L.** Higher-Order Nonlinearities in the Theory of Parametric Decay Instabilities. — *Ibid.*, v. 17, p. 5.
- Porkolab M.** Parametric Processes in Magnetically Confined CTR Plasmas. — *Nucl. Fusion*, 1978, v. 18, p. 367.
- Fukumasa O., Abe H., Itatami R.** Anomalous Effect of Weak Collisions on the Nonlinear Interaction in a Small-Cold-Beam, Warm-Plasma System. — *Phys. Rev. Lett.*, 1978, v. 40, p. 393.
- Mima K., Hasegawa A.** Nonlinear Instability of Electromagnetic Drift Waves. — *Phys. Fluids*, 1978, v. 21, p. 81.
- Wee W., De Groot J. S.** Ponderomotive Force and DC Magnetic Field Generation Induced by Laser Absorption. — *Ibid.*, p. 124.
- Kruer W. L.** The Rebirth of Brillouin Scattering in Laser-Plasma Experiments. — *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion*, 1978, v. 4, p. 13.
- Fuchs V., Beaudry G.** Threshold Behavior of the Three-Wave Parametric-Decay Interaction in Bounded Inhomogeneous Plasmas. — *Phys. Fluids*, 1978, v. 21, p. 280.
- Lisak M., Peterson B., Wilhelmsson H.** Coupled Nonlinear Schrödinger Equations Including Growth and Damping. — *Phys. Lett.*, 1978, v. 66A, p. 83.
- Hasegawa A., Mima K.** Pseudo-Three-Dimensional Turbulence in Magnetized Non-Uniform Plasma. — *Phys. Fluids*, 1978, v. 21, p. 78.
- Буриная Т. М., Волокитин А. С.** К теории тепловой модуляционной неустойчивости. — *Письма ЖЭТФ*, 1978, т. 27, с. 321.
- Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.** О возбуждении конвективных ячеек альфвеновскими волнами. — Там же, с. 361.
- Williams E. A., Albritton J. R., Rosenbluth M. N.** Effect of Spatial Turbulence on Parametric Instabilities. — *Phys. Fluids*, 1979, v. 22, p. 139.

## ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ГИБРИДНЫХ РЕЗОНАНСОВ В ПЛАЗМЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ИОНЫ ПРИМЕСИ

В этой главе рассмотрено параметрическое возбуждение гибридных резонансов в простом частном случае, когда две волны, принимающие участие в трехволновом взаимодействии, являются обыкновенными электромагнитными волнами. Получены пороги и инкременты неустойчивостей при наличии смеси ионов различных сортов.

Предполагается, что волна накачки электромагнитного типа, распространяющаяся перпендикулярно направлению постоянного магнитного поля, взаимодействует с двумя другими волнами, одна из которых является необыкновенной волной (волной нижнего или верхнего гибридного резонанса [1, 2]), а другая — обыкновенной электромагнитной волной. Решение такой задачи представляет интерес в связи с исследованием свойств термоядерной плазмы. Так как концентрация примесей (тяжелых ионов) в такой плазме может достигать уровня, способного существенно влиять на дисперсионные характеристики плазмы [3, 4], примесные ионы включаются в схему расчета динамики системы. При этом предполагается, что плотность электронов постоянна, а относительная концентрация примесей различных сортов может изменяться. Кроме того, считают, что основным компонентом плазмы является водород ( $Z_i=1$ ).

Рассматриваемая проблема исследовалась во многих работах как на гидродинамическом [5, 6], так и на кинетическом [7, 8] уровне описания. Ниже использован параметрический подход в рамках гидродинамического описания, на основе которого удастся определить пороги и коэффициенты нарастания, а также изучить их зависимость от расстройки частоты, диссипативных эффектов и наличия примесей. В частном случае отсутствия магнитного поля полученные выражения переходят в соотношения, описывающие вынужденное комбинационное рассеяние и рассеяние Мандельштама—Бриллюэна.

### Исходные уравнения

Предположим, что постоянное магнитное поле направлено вдоль оси  $z$  декартовой системы координат, а мощная падающая волна распространяется вдоль оси  $x$ . Более того, будем считать, что вектор напряженности электрического поля падающей волны направлен вдоль оси  $z$ , т. е. она является обыкновенной электромагнитной волной. Для начала рассмотрим бесстолкновительную плазму.

Введем индексы  $j=e, i, k$  для указания величин, относящихся к электронам, протонам и ионам примеси соответственно. Будем использовать следующие обозначения:  $m$  и  $q$  — масса и заряд частицы;  $N_0$  — невозмущенная плотность плазмы;  $n$  — возмущение

плотности частиц;  $v$  — гидродинамическая скорость частицы;  $E$  и  $B$  — напряженности электрического и магнитного полей;  $u$  — тепловая скорость частиц. В нелинейных уравнениях удержим только те нелинейные слагаемые, которые описывают связь между различными волнами.

Уравнения движения в рассматриваемом случае имеют вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{q}{m} (E_x + v_y B_0) + \frac{u^2}{N_0} \frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{q}{m} v_z B_y; \quad (20.1)$$

$$\partial v_y / \partial t + (q/m) v_x B_0 = 0; \quad (20.2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{q}{m} E_z = -v_x \left( -\frac{q}{m} B_y + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right). \quad (20.3)$$

Из уравнения непрерывности и уравнения Пуассона следует, что

$$\partial n / \partial t + N_0 \partial v_x / \partial x = 0; \quad (20.4)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_j n_j. \quad (20.5)$$

Наконец, уравнения Максвелла сводятся к соотношениям

$$-\partial E_z / \partial x + \partial B_y / \partial t = 0; \quad (20.6)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \mu_0 \sum N_{0j} q_j v_{jz} = \mu_0 \sum n_j q_j v_{jz}. \quad (20.7)$$

Нелинейные слагаемые в каждом из уравнений (20.1) — (20.7) вынесены в правую часть.

Заметим также, что из условия сохранения полного заряда вытекает соотношение

$$N_{0i} = N_{0e} / (1 + \sum C_k Z_k), \quad (20.8)$$

где  $C_k$  — относительная концентрация и  $Z_k$  — зарядовое число примесных ионов сорта  $k$ .

Исключая компоненты поля  $E_x$ ,  $E_y$  и  $B_y$ , а также скорость  $v_x$  из уравнений (20.1) — (20.7), получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 n_e}{\partial t^2} - u_e^2 \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} + \omega_{He}^2 n_e + \omega_{pe}^2 (n_e - n_i - \sum Z_k n_k) = N_{0e} \frac{\partial}{\partial x} \left( v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \quad (20.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} - u_i^2 \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} + \omega_{Hi}^2 n_i + \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2}{1 + \sum C_k Z_k} (n_i - n_e + \sum Z_k n_k) = \\ = \frac{N_{0e}}{1 + \sum C_k Z_k} \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (20.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 n_k}{\partial t^2} - u_k^2 \frac{\partial^2 n_k}{\partial x^2} + \omega_{Hk}^2 n_k + \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2 C_k Z_k}{1 + \sum C_{k'} Z_{k'}} (n_i - n_e + \sum Z_{k'} n_{k'}) = \\ = \frac{N_{0e} C_k Z_k^2}{1 + \sum C_{k'} Z_{k'}} \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (20.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \omega_{pe}^2 \left[ 1 + \frac{1}{1 + \Sigma C_k Z_k} \left( \frac{m_e}{m_i} + \Sigma C_k Z_k^2 \frac{m_l}{m_i} \right) \right] v_z = \\ = \frac{\omega_{pe}^2}{N_{0e}} v_z \left( n_e + \frac{m_e}{m_i} n_i + \Sigma \frac{m_e}{m_i} Z_k^2 n_k \right), \end{aligned} \quad (20.12)$$

где  $\omega_{pe} = (N_{0e} e^2 / m_e \epsilon_0)^{1/2}$  — электронная плазменная частота;  $\omega_{Hj} = q_j B_0 / m_j$  — циклотронная частота для частиц различного сорта.

Анализ уравнений (20.9) — (20.12) можно существенно упростить, используя приближенное равенство  $\Sigma Z_{k'} n_{k'} \approx Z_k n_k$ , которое означает пренебрежение влиянием тяжелых ионов других сортов на динамику иона избранного сорта  $k$ . В большинстве случаев пренебрежение законно. Тогда уравнение (20.12) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega_{Hk}^2 + \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2 C_k Z_k^2}{1 + \Sigma C_{k'} Z_{k'}} \right) n_k + \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2 C_k Z_k}{1 + \Sigma C_{k'} Z_{k'}} \times \\ \times (n_i - n_e) = \frac{N_{0e} C_k Z_k^2}{1 + \Sigma C_{k'} Z_{k'}} \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (20.13)$$

Из (20.13) видно, что связь  $n_k$  с  $n_e$ ,  $n_i$  и  $v_z$  определяется простыми дифференциальными операторами, а это открывает возможность получения дисперсионного уравнения из условия существования нетривиального решения системы уравнений (20.9), (20.10), (20.12) и (20.13).

### Дисперсионное уравнение и его решения

Предположим, что напряженность электрического поля падающей волны накачки имеет вид

$$\vec{E}_0 = 2E_0 \hat{z} \sin(\omega_0 t - k_0 x), \quad (20.14)$$

и выразим  $z$ -компоненту скорости электронов как

$$v_z = 2v_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) + v_{\sim}, \quad v_{\sim} \ll v_0, \quad (20.15)$$

где

$$v_0 = (|e| / m_e \omega_0) E_0. \quad (20.16)$$

Предполагая еще, что пространственно-временная зависимость плотности электронов определяется соотношением

$$n_e = 2n_{0e} \cos(\omega t - kx) \quad (20.17)$$

и учитывая (20.12), представим скорость  $v_{\sim}$  в следующем виде:

$$v_{\sim} = 2v_{\sim}^+ \cos[(\omega + \omega_0) t - (k + k_0) x] + 2v_{\sim}^- \cos[(\omega - \omega_0) t - (k - k_0) x], \quad (20.18)$$

что дает

$$(\partial/\partial x)(v_z \partial v_z / \partial x) = -2k^2 v_0 (v_{\sim}^+ + v_{\sim}^-) \cos(\omega t - kx). \quad (20.19)$$



Пренебрегая в (20.12) слагаемыми, пропорциональными  $m_e/m_i$ , получаем

$$\nu_{\pm}^{\pm} = \frac{n_{0e}v_0}{N_{0e}} \omega_{pe}^2 \frac{1}{(\omega \pm \omega_0)^2 - c^2(k \pm k_0)^2 - \omega_{pe}^2}. \quad (20.20)$$

Подстановка (20.19) и (20.20) в (20.9), (20.10) и (20.13) приводит к дисперсионному уравнению [6]

$$D_H(\omega, k) = -k^2 v_0^2 (1/D_{EM}^+ + 1/D_{EM}^-), \quad (20.21)$$

где величины

$$D_{EM}^{\pm} = (\omega \pm \omega_0)^2 - c^2(k \pm k_0)^2 - \omega_{pe}^2 \quad (20.22)$$

представляют собой дисперсионные функции обыкновенных электромагнитных волн на смешанных частотах, а  $D_H$  описывает гибридную волну и определяется выражением

$$D_H = 1/\chi_e + 1/\{\chi_i + [1 - \Sigma\chi_k/(1 + \chi_k)]^{-1}\}. \quad (20.23)$$

Здесь

$$\chi_e = \omega_{pe}^2/(\omega_{He}^2 + k^2 u_e^2 - \omega^2); \quad (20.24)$$

$$\chi_i = \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{1 + \Sigma C_k Z_k} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_{Hi}^2 + k^2 u_i^2 - \omega^2)}; \quad (20.25)$$

$$\chi_k = \frac{m_e}{m_i} \frac{C_k Z_k^2}{1 + \Sigma C_k Z_k} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_{Hk}^2 + k^2 u_k^2 - \omega^2)}. \quad (20.26)$$

Заметим, что при  $\chi_k \ll 1$  выражение (20.23) упрощается:

$$D_H = 1/\chi_e + 1/(\chi_i + 1 + \Sigma\chi_k). \quad (20.27)$$

Отсюда следует, что для свободной гибридной волны

$$1 + \chi_e + \chi_i + \Sigma\chi_k = 0, \quad (20.28)$$

а параметрическое возбуждение описывается соотношением

$$1 + \chi_e + \chi_i + \Sigma\chi_k = -k^2 v_0^2 \frac{\omega_{pe}^4}{(\omega_{He}^2 + k^2 u_e^2 - \omega^2)^2} \left( \frac{1}{D_{EM}^+} + \frac{1}{D_{EM}^-} \right). \quad (20.29)$$

Уравнение (20.28) имеет решения двух типов, которые соответствуют так называемым ниже- и верхнегибридному резонансам. Характерные частоты нижегибридных резонансов удовлетворяют неравенствам

$$\omega_{Hi}^2 \ll \omega_{pi}^2 \approx \omega_{LH}^2 \ll \omega_{He}^2 \approx \omega_{pe}^2. \quad (20.30)$$

Соответствующее решение уравнения (20.28) имеет вид

$$\omega_{LH}^2 = \frac{\omega_{He}^2 + k^2 u_e^2}{\omega_{pe}^2 + k^2 u_e^2 + \omega_{He}^2} \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2}{1 + \Sigma C_k Z_k} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{k^2 u_i^2}{(\omega_{LH}^0)^2} + \Sigma C_k Z_k^2 \frac{m_i}{m_k} \left( 1 + \frac{k^2 u_k^2}{(\omega_{LH}^0)^2} \right) \right], \quad (20.31)$$

где  $\omega_{LH}^0$  — частота нижнегибридного резонанса, найденная без учета температурных эффектов и примеси, т. е.

$$(\omega_{LH}^0)^2 = \omega_{pi}^2 \omega_{He}^2 / (\omega_{He}^2 + \omega_{pe}^2). \quad (20.32)$$

Используя (20.31), перепишем исходное дисперсионное уравнение (20.29) в виде

$$\omega^2 - \omega_{LH}^2 = G (1/D_{EM}^+ + 1/D_{EM}^-), \quad (20.33)$$

где

$$G = k^2 v_0^2 \frac{\omega_{pe}^6}{(\omega_{pe}^2 + k^2 u_e^2 + \omega_{He}^2)^2} \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{1 + \Sigma C_k Z_k} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{k^2 u_i^2}{(\omega_{LH}^0)^2} + \Sigma C_k Z_k^2 \frac{m_i}{m_e} \left( 1 + \frac{k^2 u_k^2}{(\omega_{LH}^0)^2} \right) \right]. \quad (20.34)$$

Нетрудно видеть, что при тех значениях частоты  $\omega$ , которые являются решениями уравнения (20.33),  $D_{EM}^- \ll D_{EM}^+$ , так что слагаемым  $1/D_{EM}^-$  можно пренебречь [6].

Введем частоту второй электромагнитной волны  $\omega_2 = \omega_0 - \omega_{LH}$ . Учитывая, что в резонансных условиях  $D_{EM}^-(k_0 - k, \omega_2) = 0$  и  $\omega_0^2 - c^2 k^2 - \omega_{pe}^2 = 0$ , получаем волновое число гибридной волны, при котором резонансное условие выполняется точно:

$$k = k_0 [1 \pm (1 - \omega_{LH}(2\omega_0 - \omega_{LH})/k^2 c^2)]^{1/2}. \quad (20.35)$$

При наличии расстройки частоты используем обозначение

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_{LH} - \omega_2 \quad (20.36)$$

и преобразуем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - \omega_{LH}^2 = G / [(\omega_0 - \omega)^2 - \omega_2^2] \quad (20.37)$$

к следующему виду:

$$(\omega - \omega_{LH})^2 - \Delta\omega(\omega - \omega_{LH}) + G/4\omega_2\omega_{LH} = 0. \quad (20.38)$$

При выводе (20.38) использованы приближенные соотношения

$$\omega + \omega_{LH} \approx 2\omega_{LH}; \quad \omega_0 - \omega + \omega_2 \approx 2\omega.$$

Решением уравнения (20.38) является

$$\omega \equiv \omega_1 = \omega_{LH} + \Delta\omega/2 \pm (1/2) [(\Delta\omega)^2 - G/\omega_{LH}\omega_2]^{1/2}. \quad (20.39)$$

### Инкременты и пороги

Рассмотрим тот из корней (20.39), который при  $G/\omega_{LH}\omega_2 > (\Delta\omega)^2$  и экспоненциальном факторе  $\exp(i\omega t)$  соответствует нарастающую во времени, т. е.

$$\omega_1 = \omega_{LH} + \Delta\omega/2 - (i/2) [G/\omega_{LH}\omega_2 - (\Delta\omega)^2]^{1/2}. \quad (20.40)$$

Из этого соотношения вытекают пороговое условие

$$G = \omega_{LH}\omega_2 (\Delta\omega)^2 \quad (20.41)$$

и следующее выражение для максимального инкремента:

$$\gamma_m = (1/2) (G/\omega_{LH}\omega_2)^{1/2}, \quad (20.42)$$

которое имеет место при  $\Delta\omega=0$ . Если  $|\Delta\omega| > 2\gamma_m$ , то нарастания нет.

Для учета затухания взаимодействующих волн введем искусственно, как это обычно делают при изучении параметрических явлений (см., например, [9]), линейные коэффициенты затухания параметрически возбуждаемых волн  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (т. е. нижнегибридной волны с частотой  $\omega_1$  и электромагнитной волны с частотой  $\omega_2$ ). Тогда амплитуды будут подчиняться уравнениям

$$\left. \begin{aligned} (\partial^2/\partial t^2 + 2\Gamma_1\partial/\partial t + \omega_1^2) a_1 &= c_1 a_2 a_0; \\ (\partial^2/\partial t^2 + 2\Gamma_2\partial/\partial t + \omega_2^2) a_2 &= c_2 a_1 a_0, \end{aligned} \right\} \quad (20.43)$$

где  $a_0$  — амплитуда волны накачки и предполагается, что затухание мало.

При учете затухания аналогом (20.38) является уравнение вида

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_{LH})^2 - \Gamma_1\Gamma_2 + G/4\omega_{LH}\omega_2 - [i(\Gamma_1 + \Gamma_2) + \Delta\omega](\omega - \omega_{LH}) + \\ + i\Delta\omega\Gamma_1 = 0. \end{aligned} \quad (20.44)$$

Вблизи порога, где  $\omega$  вещественно,  $\omega - \omega_{LH} = \Delta\omega\Gamma_1/(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ , что совместно с (20.44) приводит к следующему пороговому условию:

$$G/4\omega_{LH}\omega_2 = \Gamma_1\Gamma_2 [1 + (\Delta\omega)^2/(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2]. \quad (20.45)$$

Инкремент в отсутствие расстройки частоты ( $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_{LH} - \omega_2 = 0$ )

$$\gamma_m = (1/2) \{ [G/\omega_{LH}\omega_2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2]^{1/2} - (\Gamma_1 + \Gamma_2) \}. \quad (20.46)$$

Заметим, что с помощью соотношений (20.31) и (20.34) фигурирующую в (20.46) величину  $G/\omega_{LH}\omega_2$  можно представить в виде

$$\frac{G}{\omega_{LH}\omega_2} = k^2 v_0^2 \frac{\omega_{LH}\omega_{pe}^4}{\omega_2 (\omega_{pe}^2 + k^2 u_e^2 + \omega_{He}^2) (\omega_{He}^2 + k^2 u_e^2)}. \quad (20.47)$$

Используя это соотношение, получаем из условия (20.45) следующее выражение для квадрата модуля порогового значения напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} |E_0|_{\text{пор}}^2 &= (4\Gamma_1\Gamma_2/k^2) [1 + (\Delta\omega)^2/(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2] - \\ &- (m_e^2 \omega_0^2 / e^2) (\omega_2 / \omega_{LH}\omega_{pe}^4) (\omega_{He}^2 + k^2 u_e^2) (\omega_{pe}^2 + k^2 u_e^2 + \omega_{He}^2). \end{aligned} \quad (20.48)$$

Для того чтобы связать формально введенные величины  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с определенными физическими параметрами, необходимо записать дисперсионные соотношения с учетом диссипативных эффектов. В частности, введя в выражение (20.22) частоту соударений электронов  $\nu_e$ , получим для второй электромагнитной волны

$$2\Gamma_2 = (\omega_{pe}^2/\omega_2^2) \nu_e. \quad (20.49)$$

Аналогично для низкочастотной нижегибридной волны учет частоты соударений ионов  $\nu_i$  дает

$$2\Gamma_1 \approx \nu_i + O(m_e/m_i). \quad (20.50)$$

В пределе  $B_0 \rightarrow 0$  нижегибридная волна переходит в ионно-звуковую, для которой

$$\omega_a^2 = k^2 u_e^2 \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{1 + \sum C_k Z_k} \left[ 1 + \frac{k^2 u_i^2}{(\omega_a^2)^2} + \sum C_k Z_k \frac{m_i}{m_e} \left( 1 + \frac{k^2 u_k^2}{(\omega_a^0)^2} \right) \right], \quad (20.51)$$

где  $(\omega_a^0)^2 = k^2 u_e^2 m_e/m_i = k^2 T_e/m_i$ .

В том же пределе

$$|E_0|_{\text{пор}}^2 = \nu_a \nu_2 \left[ 1 + \frac{4(\Delta\omega)^2}{(\omega_{pe}^2 \nu_2/\omega_2^2 + \nu_a)^2} \right] \frac{m_e^2 \omega_0^2}{e^2} \times \\ \times (u_e^2/\omega_a \omega_2 \omega_{pe}^3) (\omega_{pe}^2 + k^2 u_e^2)^{3/2}. \quad (20.52)$$

При  $|\Delta\omega| \ll (1/2)(\omega_{pe}^2 \nu_2/\omega_2^2 + \nu_a)$  и  $k^2 u_e^2 \ll \omega_{pe}^2$  это выражение сводится к хорошо известному результату для вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна [5]

$$|E_0|_{\text{пор}}^2 = (\nu_a \nu_2/\omega_a \omega_2) m_e^2 u_e^2 \omega_0^2/e^2. \quad (20.53)$$

Величина  $\nu_a$  в области достаточно больших волновых чисел [таких, что  $k > (T_e/T_i)^2 (\nu_e/u_e)$ ] определяется электронным затуханием Ландау [9]:

$$\nu_a \approx [(m_e/m_i) \omega_a]^{1/2}.$$

В процессе параметрического возбуждения верхнегибридного резонанса принимают участие только электроны, что хорошо видно из выражения для верхнегибридной частоты

$$\omega_{UH}^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 u_e^2 + \omega_{He}^2, \quad (20.54)$$

которое является высокочастотным пределом общего выражения (20.28). Естественно, что в этом случае наличие примесей не влияет на параметрическое возбуждение.

Расчет инкрементов и порогов приводит к прежним выражениям, в которые надо подставить величину

$$G/\omega_H \omega_2 = k^2 \omega_{pe}^2 \nu_0^2/\omega_{UH} \omega_2,$$

а в качестве частоты верхнегибридной волны следует взять [5, 6]  $\omega_2 = \omega_0 - \omega_{UH}$ .

В ряде работ рассматривались различные стимулированные процессы в немагнитной плазме [10—17]. Работа [9] содержит обзор результатов, полученных как для параметрического рассеяния, так и для неустойчивостей, развивающихся вследствие поглощения сильных электромагнитных волн, которые распространяются в однородной немагнитной плазме. В обоих случаях возможны два типа неустойчивостей, которые на языке квазичастиц могут быть выражены следующим образом: фотон распадается на фотон и плазмон ( $t \rightarrow t' + l$ ) или на фотон и фонон ( $t \rightarrow t' + s$ ) — при рассеянии, и фотон распадается на два плазмона ( $t \rightarrow l + l$ ) или на плазмон и фотон ( $t \rightarrow l + s$ ) — при поглощении. Существенно, что все эти процессы могут протекать в короне, образующейся при лазерном облучении термоядерной мишени [10].

### Задачи

20.1. В настоящей главе в качестве первичных ионов были приняты ионы водорода. Как изменяются результаты рассмотрения, если предположить, что ионы имеют массовое и зарядовое числа  $A_i$  и  $Z_i$ ? Обобщить выражение для нижнегибридной частоты (20.31) таким образом, чтобы оно стало пригодным для описания системы ионов с произвольными значениями  $A_i$  и  $Z_i$ .

20.2. Предположим, что первичными являются ионы дейтерия ( $Z_D/A_D = 1/2$ ). Изменится ли частота нижнегибридного резонанса из-за наличия примесей, если эти примеси полностью ионизованы ( $Z_h/A_h \approx 1/2$ )? Как повлияют на результат температурные эффекты?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stix T. H. — Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 878.
2. Ишимару С. Основные принципы физики плазмы. М., Атомиздат, 1975.
3. Kritz H., Eldridge O. — Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 465.
4. Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1976, v. 14, p. 60.
5. Larsson J., Stenflo L. — Beitr. Plasma Phys., 1974, Bd 14, S. 7.
6. Hung N. T. — Plasma Phys., 1975, v. 17, p. 633.
7. Cano R., Etievant C., Fidone I., Granata G. — Nucl. Fusion, 1969, v. 9, p. 223.
8. Stenflo L. — J. Plasma Phys., 1972, v. 7, p. 107.
9. Bornatici M. — J. Plasma Phys., 1975, v. 14, p. 105.
10. Rosenbluth M. N., Sagdeev R. Z. — Comments Plasma Phys. Controlled Fusion, 1972, v. 1, p. 129.
11. Галеев А. А., Лаваль Г., О'Нейл Т. М., Розенблют М. Н., Сагдеев Р. З. Обратное параметрическое рассеяние нелинейной электромагнитной волны в плазме. — Письма ЖЭТФ, 1973, т. 17, с. 48.
12. Galeev A. A., Sagdeev R. Z. — Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 603.
13. Liu C. S., Rosenbluth M. N., White R. B. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 697.
14. Liu C. S., Rosenbluth M. N. Institute for Advanced Study, Princeton Univ. Rep. COO 3237-11, 1972.
15. Nishikawa K. — J. Phys. Soc. Jap., 1968, v. 24, p. 916, 1152.
16. Bornatici M., Cavaliere A., Engelmann F. — Phys. Fluids, 1969, v. 12, p. 2362.
17. Anderson D., Wilhelmsson H. — Phys. Scripta, 1975, v. 11, p. 341.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Fidone I., Granata G., Teichmann J.** Nonlinear Wave Mixing at Hybrid Frequencies in an Inhomogeneous Plasma. — *Phys. Fluids*, 1971, v. 14, p. 737.
- Casati G., Maroli C.** Nonlinear Resonant Mode Conversion in a Plasma at the Upper Hybrid Frequency. — In: *Proc. 10th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases*. Oxford, 1971, p. 325.
- Hooke W. M., Bernabei S.** Direct Observation of Waves Propagating Near the Lower-Hybrid-Resonance Frequency. — *Phys. Rev. Lett.*, 1972, v. 28, p. 407.
- Porkolab M.** Parametric Instabilities in a Magnetic Field and Possible Applications to Heating of Plasmas. — *Nucl. Fusion*, 1972, v. 12, p. 329.
- Porkolab M., Chang R. P. H.** Theory of Parametric Instability of Low-Hybrid Waves. — *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1973, v. 18, p. 1313.
- Chang R. P. H., Porkolab M.** Experimental Observation of the Non-Oscillatory Parametric Instability and Plasma Heating at the Lower-Hybrid Frequency. — *Ibid.*, p. 1314.
- Fidone I.** Parametric Decay Near the Lower-Hybrid Resonance. — *Phys. Fluids*, 1973, v. 16, p. 1544.
- Puri S., Tutter M.** Lower-Hybrid Resonance Heating of a Plasma in a Parallel-Plate Waveguide. — *Nucl. Fusion*, 1973, v. 13, p. 55.
- Bernabei S., Chu T. K., Hooke W. M., Motley R. W.** Parametric Decay of Plasma Waves Near the Lower-Hybrid Frequency. I. Identification of Modes. — *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1973, v. 18, p. 1314.
- Motley R. W., Bernabei S., Chu T. K., Hooke W. M., Jassby D. L.** Parametric Decay of Plasma Waves Near the Lower-Hybrid Frequency. II. Ion Heating. — *Ibid.*
- Capjack C. F., James C. R.** Optical Mixing Near the Cyclotron Frequency for Plasma Heating. — *Phys. Fluids*, 1974, v. 17, p. 948.
- Porkolab M.** Theory of Parametric Instability Near the Lower-Hybrid Frequency. — *Ibid.*, p. 1432.
- Satya Y., Sen A., Kaw P.** Anomalous Plasma Heating at Lower-Hybrid Frequency. — *Nucl. Fusion*, 1974, v. 14, p. 19.
- Hasegawa A., Chen L.** Theory of Plasma Heating by Nonlinear Excitation of Lower-Hybrid Resonance. — *Phys. Fluids*, 1975, v. 18, p. 1325.
- Yatsui K., Imai T.** Plasma Heating by Lower-Hybrid Parametric Instability Pumped by an Electron Beam. — *Phys. Rev. Lett.*, 1975, v. 35, p. 1279.
- Yamagiwa K., Kozima H., Kato K.** Excitation of Lower-Hybrid Waves in a Coaxial Type Double Plasma. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1975, v. 39, p. 555.
- Puri S.** Lower-Hybrid Absorption at the Ion Cyclotron Harmonics. — *Phys. Lett.*, 1975, v. 55A, p. 99.
- Chen L., Berger R. L.** Saturation of the Parametric Decay Instability Near the Lower-Hybrid Frequency. Princeton Univ. Rep. MATT-1169, 1975.
- Imai T., Yatsui K.** Threshold of Lower-Hybrid Parametric Instability in a Modulated Electron-Beam-Plasma System. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1975, v. 39, p. 1633.
- Krishnan S., Ravidra M. P.** Ion Heating by the Lower-Hybrid Mode. — *Phys. Rev. Lett.*, 1975, v. 34, p. 938.
- Kaufman A. N., Stenflo L.** Upper-Hybrid Solitons. — *Phys. Scripta*, 1975, v. 11, p. 269.
- Morales G. J., Lee Y. C.** Nonlinear Filamentation of Lower-Hybrid Cones. — *Phys. Rev. Lett.*, 1975, v. 35, p. 930.
- Днепровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Переверзев Г. В., Погосян А. В.** Поглощение волн в плазме на ионном гибридном резонансе. — *Физика плазмы*, 1975, т. 1, с. 623.
- Swanson D. G.** Mode Conversion and Tunneling at the Two-Ion Hybrid Resonance. — *Phys. Rev. Lett.*, 1976, v. 36, p. 316.
- Rogister A., Hasselberg G.** Theory of Parametric Heating of Plasma in the Lower-Hybrid Frequency Range. — *Phys. Fluids*, 1976, v. 19, p. 108.
- Fidone I., Granata G.** Anomalous Absorption Near the Lower-Hybrid Frequency. — *Ibid.*, p. 293.

- Berger R. L., Perkins F. W.** Thresholds of Parametric Instabilities Near the Lower-Hybrid Frequency. — *Ibid.*, p. 406.
- Porkolab M., Goldman M. V.** Upper-Hybrid Solitons and Oscillating-Two-Stream Instability. — *Ibid.*, p. 872.
- Bujarbauda S., Satya Y. S.** Decay Instability of Lower-Hybrid Wave in a Cold Homogeneous Plasma. — *Phys. Lett.*, 1976, v. 55A, p. 409.
- Fidone I.** Radio Frequency Ion Heating Near the Lower-Hybrid Frequency. — *Phys. Fluids*, 1976, v. 19, p. 334.
- Mendonca J. T.** Enhanced Scattering at the Upper-Hybrid Resonance. — *Plasma Phys.*, 1976, v. 18, p. 405.
- Huba J. D., Papadopoulos K.** Nonlinear Stabilization of the Lower-Hybrid-Drift Instability by Electron Resonance Broadening. — *Phys. Fluids*, 1978, v. 21, p. 121.
- Демченко В. В., Кравцов П. И.** Параметрическое возбуждение нелинейных колебаний вблизи верхнего гибридного резонанса. — *Журн. техн. физ.*, 1978, т. 48, с. 637.

## ГЛАВА 21

### НЕРЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТИПА ВОЛНА — ВОЛНА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ С ВОЛНАМИ

Рассмотрим частный случай трехволнового взаимодействия, когда частота волны биений, возникающей в результате нелинейного взаимодействия двух первичных волн, не совпадает с какой-либо из частот коллективных волновых движений в плазме (иными словами, волна биений не находится в резонансе с плазменной волной). Заметим, что благодаря наличию затухания Ландау, уширяющего спектр волны биений, некоторая связь между первичными волнами и коллективными явлениями в плазме существует и в этом случае. Кроме того, имеется связь между первичными волнами и частицами плазмы. Поэтому можно установить определенное соотношение между взаимодействиями типа волна — волна и волна — частица.

Как известно [1—3], все взаимодействия волн в бесстолкновительной плазме удобно классифицировать по признаку волна — волна или волна — частица. Частицы, захваченные потенциальными ямами распространяющихся волн, могут эффективно обмениваться энергией с волнами, если фазовые скорости волн совпадают со скоростями частиц. Тогда же, когда связь частиц с волнами слабая, временная эволюция амплитуд волн определяется преимущественно взаимодействием этих волн с волнами в плазме. Именно связь типа волна — волна (в частности, резонансная связь) и была основным предметом рассмотрения в предыдущих главах. Заметим, что формализм теории взаимодействия волна — волна можно использовать и при исследовании взаимодействия двух волн с частицами плазмы.

Предположим, что при взаимодействии двух первичных волн возникает волна биений с частотой  $\omega_B$ , отличающейся на величину  $\Delta\omega$  от частоты  $\omega_2$  определенного коллективного колебания

в плазме, т. е.  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_B$ . Тогда, следуя работе [4], введем подстановку  $A_B = A_2 \exp(-i\Delta\omega t)$ , с помощью которой преобразуем исходную систему уравнений трехволнового взаимодействия для недиссипативной среды

$$\left. \begin{aligned} \partial A_0 / \partial t &= c_{12} A_1 A_2 \exp(-i\Delta\omega t); \\ \partial A_1 / \partial t &= c_{02} A_0 A_2^* \exp(i\Delta\omega t); \\ \partial A_2 / \partial t &= c_{01} A_0 A_1^* \exp(i\Delta\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

к следующему виду:

$$\partial A_0 / \partial t = c_{1B} A_1 A_B; \quad (21.2a)$$

$$\partial A_1 / \partial t = c_{0B} A_0 A_B^*; \quad (21.2b)$$

$$(\partial / \partial t + i\Delta\omega) A_B = c_{01} A_0 A_1^*. \quad (21.2b)$$

Учитывая медленность изменения амплитуды  $A_B$ , можно предположить, что второе слагаемое левой части (21.2b) доминирует и определяет тем самым простое выражение  $A_B$  через произведение амплитуд  $A_0$  и  $A_1$ :

$$A_B = (c_{01} / i\Delta\omega) A_0 A_1^*. \quad (21.3)$$

Подстановка этого выражения в (21.2a) и (21.2b) приводит к уравнениям

$$\partial A_0 / \partial t = (c_{01} c_{1B} / i\Delta\omega) A_0 A_1 A_1^*; \quad (21.4a)$$

$$\partial A_1 / \partial t = -(c_{01} c_{0B} / i\Delta\omega) A_0 A_0^* A_1, \quad (21.4b)$$

которые дают

$$(\partial / \partial t) |A_0|^2 = 2 \operatorname{Im} (c_{01} c_{1B} / \Delta\omega) |A_0|^2 |A_1|^2; \quad (21.5a)$$

$$(\partial / \partial t) |A_1|^2 = -2 \operatorname{Im} (c_{01} c_{0B} / \Delta\omega) |A_0|^2 |A_1|^2. \quad (21.5b)$$

Нетрудно видеть, что при отсутствии затухания волны биений правые части уравнений (21.5) обращаются в нуль, а это означает, что амплитуды первичных волн не изменяются в процессе взаимодействия [5]. Если же учесть затухание волны биений (оно всегда существует из-за взаимодействия волн с частицами), то между интенсивностями первичных волн появится некоторая связь, которая и описывается уравнениями (21.5). Таким образом, наличие волны биений можно рассматривать как определенный способ поддержания связи между первичными волнами и частицами плазмы.

Вводя обозначение  $\Delta\omega = \Delta\omega_0 + i\gamma$  и пренебрегая для простоты зависимостью коэффициентов связи от затухания, преобразуем уравнения (21.5) к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} |A_0|^2 = -\frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\Delta\omega_0)^2} c_{01} c_{1B} |A_0|^2 |A_1|^2; \quad (21.6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |A_1|^2 = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\Delta\omega_0)^2} c_{01} c_{0B} |A_0|^2 |A_1|^2. \quad (21.6b)$$



Из этих уравнений ясно видно, что волна биений действительно приводит к установлению связи между первичными волнами. По существу, этот процесс можно интерпретировать как взаимодействие волн и частиц. Если, в частности, диссипация энергии волны биений обусловлена затуханием Ландау, то первичные волны взаимодействуют с резонансными частицами, скорости которых равны фазовой скорости волны биений (нелинейное затухание Ландау). Такое взаимодействие оказывается возможным благодаря тому, что затухание Ландау приводит к уширению спектра волны биений, в результате которого этот спектр перекрывается с резонансной областью для нелинейного взаимодействия в окрестности частоты  $\omega_2$ . Согласно предыдущему рассмотрению, можно предположить, что ширина этой области составляет  $2\gamma_0$ , где  $\gamma_0$  — инкремент при резонансном параметрическом усилении.

Отметим, что фигурирующий в (21.6) множитель  $[6] 2\gamma/[\gamma^2 + (\Delta\omega_0)^2]$  достигает максимального значения при  $\gamma = \Delta\omega_0$  и стремится к нулю при малых и больших  $\gamma$ . Такое поведение вполне согласуется с качественной картиной, представленной на рис. 21.1.

Перепишем уравнения (21.6) следующим образом:

$$(\partial/\partial t) |A_0|^2 = -\kappa_0 |A_0|^2 |A_1|^2; \quad (21.7a)$$

$$(\partial/\partial t) |A_1|^2 = \kappa_1 |A_0|^2 |A_1|^2, \quad (21.7b)$$

где

$$\kappa_0 = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\Delta\omega_0)^2} c_{01}c_{1B}; \quad \kappa_1 = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\Delta\omega_0)^2} c_{01}c_{CB}. \quad (21.7b)$$

Введя еще преобразование

$$I_0 = \kappa_1 |A_0|^2; \quad I_1 = \kappa_0 |A_1|^2, \quad (21.8)$$

получим

$$\partial I_0/\partial t = -I_0 I_1; \quad \partial I_1/\partial t = I_0 I_1. \quad (21.9)$$

Эта система имеет интеграл движения

$$I_0 + I_1 = m_1 = I_0(0) + I_1(0) \quad (21.10)$$

и решение вида

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= m_1 I_0(0) / [I_0(0) + I_1(0) \exp(m_1 t)]; \\ I_1 &= m_1 I_1(0) / [I_1(0) + I_0(0) \exp(-m_1 t)]. \end{aligned} \right\} \quad (21.11)$$

Временная зависимость величин  $I_0$  и  $I_1$  показана на рис. 21.2. Как видно, энергия монотонно передается от одной волны к другой (ср. с [7]). Скорость этого процесса, а следовательно, и возможность его практического применения (например, для нагрева плазмы) зависит, в соответствии с (21.7b) и (21.8), от соотношения параметров  $\Delta\omega_0$  и  $\gamma$ . Возможность использования рассматриваемого процесса для нагрева плазмы привлекает в последнее время значительное внимание [6, 8].

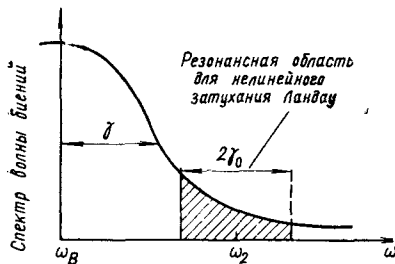


Рис. 21.1. Качественная картина перекрытия спектра затухающей волны биений и области нелинейного затухания Ландау

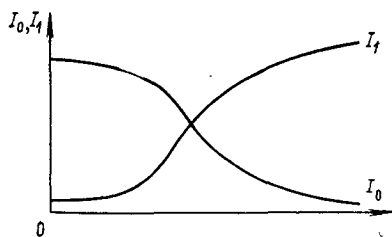


Рис. 21.2. Перекачка энергии между связанными колебаниями ( $I_0$  — интенсивность волны накачки)

Отметим, что описывать взаимодействие типа волна — частица с помощью коэффициентов связи для взаимодействия типа волна — волна можно также в теории стимулированного рассеяния электронов — явления, описанного еще в 1933 г. [9] и вызывающего интерес и в наши дни в связи с исследованиями по взаимодействию лазерного излучения с плазмой [10—12].

Рассмотренные примеры показывают, что явление связи первичных волн через затухающую нерезонансную волну биений позволяет установить полезное соотношение между теориями взаимодействий типа волна — волна и волна — частица.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davidson R. C. *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. N. Y. — Lond., Academic Press, 1972.
2. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. — В кн.: *Вопросы теории плазмы*. Вып. 7. М., Атомиздат, 1973.
3. Цытович В. Н. *Нелинейные эффекты в плазме*. М., Наука, 1967.
4. Anderson D. — *Phys. Scripta*, 1976, v. 13, p. 117.
5. Rosenbluth M. N., Coppi B., Sudan R. N. — *Ann. Phys.*, 1969, v. 55, p. 248.
6. Cohen B. I., Kaufman A. N., Watson K. M. — *Phys. Rev. Lett.*, 1972, v. 29, p. 581.
7. Nishikawa K. — In: *Proc. Japan-U. S. Seminar on Laser Interaction with Matter*. Tokyo, 1972, p. 267.
8. Capjack C. E., James C. R. — *Phys. Fluids*, 1974, v. 17, p. 948.
9. Kapitza P. L., Dirac P. A. M. — *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1933, v. 29, p. 297.
10. Dawson J. M. *UCLA Rep. P.O.G.-191*, 1974.
11. Ott E., Manheimer W. M., Klein H. H. — *Phys. Fluids*, 1974, v. 17, p. 1757.
12. Albritton J. R. — *Ibid.*, 1975, v. 18, p. 51.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Tang C. L. — *J. Appl. Phys.*, 1966, v. 37, p. 2945.  
 Montes C. *Relaxation Oscillations in Weak Turbulence. The Case of Nonlinear Wave-Particle Interactions*. — *J. Plasma Phys.*, 1974, v. 11, p. 141.  
 Nakach R., Wilhelmsson H. — *Phys. Rev.*, 1976, v. A14, p. 451.  
 Hirota R., Satsuma J. *N-Soliton Solutions of Nonlinear Network Equations Describing a Volterra System*. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1976, v. 40, p. 89.

- Rosen B., Roycraft T., Schmidt G. Stevens Inst. Techn. Rep. SIT-293, 1976.  
 Montes C. Photon Soliton due to Induced Compton Scattering. — In: Plasma Physics: Nonlinear Theory and Experiments. Ed. by H. Wilhelmsson. Nobel Foundation Symp. N 36, N. Y., Plenum Press, 1977, p. 222.  
 Wilhelmsson H. — In: Plasma Physics: Nonlinear Theory and Experiments. Ed. By H. Wilhelmsson. Nobel Foundation Symp. N 36. N. Y., Plenum Press, 1977, p. 432.  
 Anderson D., Bondeson A. — Ibid., p. 447.

## ГЛАВА 22

### КОНВЕКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭФФЕКТАМИ, И АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ ПЛАЗМЫ

Время удержания плазмы в термоядерных установках с магнитным полем существенно зависит от скорости диффузии частиц поперек магнитного поля. Несмотря на то что изучение этой проблемы имеет длинную историю, до сих пор отсутствует достаточно полное понимание процессов диффузии в некоторых областях значений напряженности магнитного поля.

Классическое выражение для коэффициента диффузии

$$D = \rho^2 \nu_i,$$

где  $\rho$  — ларморовский радиус иона и  $\nu_i$  — эффективная частота ион-ионных столкновений, несправедливо в случае термоядерной плазмы даже в условиях термодинамического равновесия. Причина заключается в том, что при больших значениях  $B$  ( $\omega_{ci} > \omega_{pi}$ ) основным носителем тепловой энергии служат конвективные колебания с частотой  $\omega \approx i\mu k_{\perp}^2$  ( $\mu$  — ионная вязкость,  $k_{\parallel} = 0$ ). Эти колебания вызывают конвекцию частиц поперек магнитного поля, которая и приводит к усилению диффузии [1—4].

Известны три характерных режима диффузии в магнитоактивной плазме. При малых  $B$  тепловая энергия локализуется в бернштейновских и гибридных колебаниях — это случай классической диффузии, т. е.  $D \sim 1/B^2$ . В промежуточной области напряженностей магнитного поля  $D$  почти не зависит от  $B$ , и, наконец, при больших  $B$  имеет место диффузия боровского типа, т. е.  $D \sim 1/B$ . Эти результаты получены аналитически [2—4], а также подтверждены численными [3, 4, 7] и лабораторными [5, 10, 11] экспериментами.

Вместе с тем лабораторные эксперименты указывают на увеличение коэффициента диффузии при надтепловом возбуждении конвективных колебаний. Такое возбуждение может осуществляться в турбулентной плазме в результате нелинейных взаимодействий, например, дрейфовых волн [9, 13, 14]. Недавно, однако, было показано [15], что в неоднородной плазме с искривленным и (или) неоднородным магнитным полем  $B$  линейные конвектив-

ные колебания могут трансформироваться в колебания с конечной собственной частотой в области благоприятной кривизны. Это должно приводить к осцилляции конвективных потоков и снижению диффузии до незначительного уровня. В связи с этим возникает задача исследования нелинейного возбуждения конвективных движений частиц плазмы.

### Нелинейное возбуждение конвективных ячеек

В работах [8, 13, 14, 16] предполагается существование двух механизмов возбуждения конвективных ячеек: нелинейной связи между дрейфовыми или альфвеновскими волнами [13, 14] и модуляционной неустойчивости [8, 16]. В этих работах рассмотрены физические модели, в которых конвективные ячейки имеют нулевую собственную частоту. В подобных системах степень возбуждения резко возрастает при реализации условий для резонансного взаимодействия.

Если же конвективные ячейки имеют конечную собственную частоту, то ситуация существенно усложняется. Возможность резонансного возбуждения сохраняется и в этом случае, но возбуждаемые конвективные движения не дают значительного вклада в диффузию. Поэтому больший интерес представляет рассмотрение нелинейных биений с нулевой частотой или нелинейной самомодуляции дрейфовых (или иных) колебаний. Основную опасность представляет формирование ячеек вследствие модуляционной неустойчивости, так как при этом поля нулевой частоты локализируются в пространстве и возрастают по величине.

Выделим произвольный слой плазмы, ограниченный плоскостями  $x=0$  и  $x=L/2$ . Предположим, что магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ , а направления градиента давления и дрейфового потока противоположны положительным направлениям осей  $x$  и  $y$  соответственно. Будем считать, что вдоль направления  $x$  имеют место периодические граничные условия и, следовательно, поле в этом направлении имеет вид стоячей волны. В направлении  $y$  волны могут распространяться и локализоваться из-за модуляционной неустойчивости.

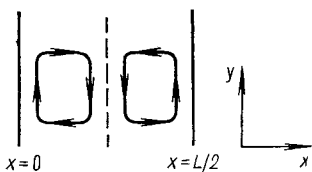


Рис. 22.1. Вихри, локализованные по  $x$  в силу периодических граничных условий и по  $y$  из-за модуляционной неустойчивости

Применяя к рассматриваемой системе метод редукции теории возмущений в форме [17], можно получить нелинейное уравнение Шредингера или уравнение Кортевега—де Вриза и затем легко исследовать условия развития модуляционной неустойчивости. Для дрейфовых волн, подчиняющихся уравнению Хасегавы—Мима [18], это выполнено в работе [16].

Используем следующее разложение потенциала:

$$\phi(x) = \phi^0(x) + \sum_{\alpha, l} \varepsilon^\alpha \phi_l^{(\alpha)}(x, \xi, \tau) \exp[il(k_{\parallel}z + k_y y - \omega t)], \quad (22.1)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр;  $l$  — номер гармоники;  $\phi^{(0)}(x)$  — невозмущенное поле нулевого порядка. Переменные  $\xi$  и  $\tau$  описывают медленное изменение поля по координате  $y$  и времени  $t$ .

Имея в виду рассмотрение модуляции квазикогерентных волн, положим  $\phi_l^{(1)} = 0$  при  $|l| \neq 1$ . Кроме того, примем следующие граничные условия по  $x$ :

$$\phi^{(\alpha)}(0, \xi, \tau) = \phi^{(\alpha)}(L, \xi, \tau) = 0, \quad \alpha = 0. \quad (22.2)$$

Нетрудно убедиться в том, что компонента потенциала с нулевой частотой  $\phi_0^{(2)}$  возникает из-за наличия пондеромоторной силы  $|\phi_1^{(1)}|^2$ , т. е. она является результатом самобиений первой гармоники. Подобная компонента существует, разумеется, при наличии любой волны, но ее значение резко возрастает в случае модуляционной неустойчивости из-за эффекта локализации поля. Нелинейная конвективная ячейка определяется именно полем  $\phi_0^{(2)}$ .

Заметим, что граничное условие (22.2) удовлетворяется, если поле имеет вид стоячей волны в направлении  $x$ , т. е.  $\phi_1^{(2)} \sim \sim \sin(2\pi/L)x$ . Тогда  $\phi_0^{(2)} \sim \sim \sin(4\pi/L)x$ . Таким образом, период конвективной ячейки оказывается равным  $L/2$  в полном соответствии с картиной, изображенной на рис. 22.1.

### Аномальная диффузия

Коэффициент диффузии можно оценить обычным способом [3, 15]. Поле  $\phi_0^{(2)}$  вызывает конвективный поток  $v_k = k_{\perp} \phi_{0k}^{(2)}/B$ , показанный на рис. 22.1. Этот поток приводит к перемешиванию областей низкой и высокой плотности, которое описывается коэффициентом диффузии

$$D = \sum_k v_k^2 \tau_k, \quad (22.3)$$

где  $\tau_k$  — время декорреляции (предполагается, что  $v_k \tau_k < k^{-1}$ ). Если столкновительная вязкость мала по сравнению с  $D$ , то

$$\tau_k = (k^2 D)^{-1}. \quad (22.4)$$

Для определения  $D$  необходимо знать спектр конвективных ячеек  $\phi_{0k}^{(2)}$ . Его расчет в общем случае труден. В качестве примера используем здесь спектр вида

$$e\phi_k/\Gamma = \Gamma(\rho/a)(ka)^{-1}, \quad (22.5)$$

полученный в работах [14, 15] ( $\Gamma$  — уровень возбуждения;  $a$  — поперечный размер плазмы;  $T_e = T_i = T$ ).

Подставляя (22.4) и (22.5) в (22.3), находим

$$D^2 = \Gamma^2 \frac{T^2}{e^2 B^2} \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \sum_k \frac{1}{(ka)^2},$$

или, после перехода от суммирования к интегрированию:

$$D = \Gamma(\rho/a) (T/eB) [(1/2\pi) \ln(k_{\text{макс}}/k_{\text{мин}})]^{1/2}. \quad (22.6)$$

Сравним это выражение с классическим коэффициентом диффузии  $D_{\text{кл}} = \rho^2 v_i$ , где  $v_i = \omega_{pi} / n\lambda_{Di}^3$  — эффективная частота ион-ионных столкновений:

$$D/D_{\text{кл}} = \Gamma(n\lambda_{Di}^3 v_{Ti} / 2a\omega_{pi}) [(1/2\pi) \ln(k_{\text{макс}}/k_{\text{мин}})]^{1/2}. \quad (22.7)$$

При  $e\phi/T \approx 0,1$  имеем  $\Gamma \approx 10$  для больших ячеек. Так как плазменный параметр  $(n\lambda_{Di}^3)^{-1} \ll 1$ , при  $\omega_{ci} > \omega_{pi}$  ( $v_{Ti}/\omega_{pi} > \rho$ ) легко получаем  $D/D_{\text{кл}} \gg 1$  [последний сомножитель в (22.7) обычно порядка единицы].

Диффузия, обусловленная ячейками  $\phi_0^{(2)}$ , сильно зависит от уровня возбуждения последних. Рассмотрим в качестве иллюстрации два примера. Первый из них связан с возбуждением конвективных ячеек дрейфовыми альфвеновскими волнами [19, 20], когда

$$\phi_0^{(2)} = \frac{k_y^2}{k_x (\partial\omega/\partial k_y + v_{Di} - c_0)} \frac{c}{B} \left( 1 - \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{\omega^2} \right) |\phi_1^{(1)}|^2. \quad (22.8)$$

Здесь  $v_{Di}$  — скорость диамагнитного дрейфа;  $c_0$  — скорость  $\mathbf{E} \times \mathbf{V}$ -дрейфа, возникающего из-за наличия невозмущенного поля  $E$ ;  $v_A$  — альфвеновская скорость. Поскольку

$$1 - k_{\parallel}^2 v_A^2 / \omega^2 \sim k_y^2 v_{Di}^2 / \omega^2; \\ \partial\omega/\partial k_y + v_{Di} - c_0 \sim v_{Di} = cT/eBa,$$

можно записать:

$$\phi_0^{(2)} \approx \frac{k_y^2 a}{k_x} \frac{k_y^2 v_{Di}^2}{\omega^2} \frac{e |\phi_1^{(1)}|}{T} |\phi_1^{(1)}|.$$

Отсюда следует, что при  $\omega \geq k_y v_{Di}$ ,  $k_y a > 1$  и  $e |\phi_1^{(1)}| / T < 1$

$$|\phi_0^{(2)}| \leq |\phi_1^{(1)}|.$$

Второй пример связан с возбуждением электростатических колебаний при  $v_{Di} \approx 0$  [21]. В этом случае

$$\hat{\phi}_0^{(2)} = \frac{2k_y^2 + (k_y v_0 / AC) [(k_y v^* / A) C - v^*]}{(\partial\omega/\partial k - c_0) 4k_x^2 + v_0 v^* / c} 2k_x |\hat{\phi}_1^{(1)}|^2, \quad (22.9)$$

где

$$v_0 = \frac{g}{\omega_{ci}} \sqrt{\frac{m_i}{T_e}}; \quad v^* = \frac{\sqrt{T_e m_i}}{eBa}; \quad \hat{\phi} = \frac{e\phi}{T}; \\ A = \omega - k_y (c_0 + v_0); \quad C = \partial\omega/\partial k_y - c_0 - v_0;$$

$g$  — центробежное ускорение в направлении  $x$ .

Для оценки (22.9) по порядку величины положим  $C = v_0$ ,  $A = k_y v_0$  и учтем, что слагаемые  $(k_y v^*/A)C$  и  $v^*$  сравнимы по величине, но взаимно не уничтожаются. Тогда получим

$$\widehat{\phi}_0^{(2)} \approx \frac{2k_y^2 + v^*/v_0}{4k_x^2 v_0 + v^*} 2k_x |\widehat{\phi}_1^{(1)}|^2.$$

Так как  $v_0 \sim v^* < 1$  и  $|\widehat{\phi}_1^{(1)}| = |e\phi_1^{(1)}/T_e| \leq 1$ , при  $|k_x \rho| < 1$  ( $\rho = \frac{1}{\omega_{ci}} \sqrt{T_e/m_i}$ ) получим

$$|\phi_0^{(2)}| < |\phi_1^{(1)}|.$$

Приведенные здесь выражения для  $\phi_0^{(2)}$  получены в предположении, что  $|\phi_0^{(2)}| < |\phi_1^{(1)}|$ . Однако при этом игнорировалась возможность резонанса, который может возникать, например, при  $\partial\omega/\partial k \approx c_0 - v_{Di}$ , как это видно из соотношения (22.8). В резонансных условиях имеет место иная оценка:  $\phi_0^{(2)} \sim \phi_1^{(1)}$  [16]. Это означает, что интенсивность конвективного колебания  $\phi_0^{(2)}$  может быть сравнимой с интенсивностью возбуждающей дрейфовой волны, а следовательно, условие  $e\phi_0^{(2)}/T \approx 0,1$  и вытекающая из него оценка  $\Gamma \approx 10$  выглядят вполне реалистично.

Отметим также, что из-за малости  $v^*$  коэффициент связи для электростатических колебаний ( $k_{\parallel} = 0$ ) значительно превышает (при  $k_x \rho \approx 1$ ) аналогичный коэффициент для электромагнитных колебаний ( $k_{\parallel} \neq 0$ ).

## Обсуждение

Рассмотренные выше примеры показывают, что коэффициент диффузии, обусловленный нелинейной самомодуляцией дрейфовых волн, может значительно превышать классическое значение. Вполне возможно, что именно этот механизм лежит в основе явления усиления диффузии, которое обнаружено экспериментально в работах [5, 10, 11] и, согласно [15], не может быть объяснено с помощью представлений о конвективных ячейках. В последней работе отмечается также, что время жизни конвективных ячеек в системе с неоднородным полем может сильно сокращаться из-за магнитной накачки. Этот механизм затухания, однако, может компенсироваться линейной неустойчивостью возбуждающих дрейфовых волн.

Подчеркнем в заключение, что основную неопределенность в расчеты типа приведенного выше вносит  $k$ -спектр. Для его определения необходимо детально рассмотреть нелинейное взаимодействие конвективных ячеек (такое рассмотрение требуется и в связи с проблемой поперечной устойчивости ячеек, поскольку конвективные ячейки с произвольной зависимостью поля от  $x$  мо-

гут быть представлены в виде суперпозиции ячеек с гармонической зависимостью). Можно ожидать, что при выполнении условия  $v_{k\tau_k} < k^{-1}$  порядок величины  $D$  почти не будет зависеть от деталей спектра по  $k$ , так как множитель  $k_{\text{мин}}$  ненамного превышает единицу.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967.
2. Taylor J. B., McNamara B. — Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 1492.
3. Dawson J. M., Okuda H., Carlile R. N. — Phys. Rev. Lett., 1971, v. 27, p. 491.
4. Okuda H., Dawson J. M. — Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 408.
5. Tamano T., Prater R., Ohkawa T. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 431.
6. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 66, с. 2056.
7. Dawson J. M., Okuda H., Rosen B. — Methods Computational Phys., 1976, v. 16, p. 282.
8. Mima K., Lee Y. C. UCLA Rep. PPG-321. Univ. of California, 1977.
9. Cheng C. Z., Okuda H. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 708.
10. Drake J. R., Greenwood J. R., Navratil G. A., Post R. S. — Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 148.
11. Navratil G. A., Post R. S., Erhardt A. B. — Ibid., p. 156.
12. Петвиашвили В. И., Похотелов О. А. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1977, т. 73, с. 498.
13. Сардеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. — Физика плазмы, 1978, т. 4, с. 551.
14. Cheng C. Z., Okuda H. — Nucl. Fusion, 1978, v. 18, p. 587.
15. Hassam A. B., Kulsrud R. M. — Phys. Fluids, 1979, v. 22, p. 2097.
16. Nozak K., Taniuti T., Watanabe K. Nagoya Univ. Rep. DPNU-40-78, DPNU-52-78, 1978.
17. Taniuti T. e. a. — Progr. Theor. Phys. Suppl., 1974, N 55, p. 1.
18. Hasegawa A., Mima K. — Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 87.
19. Weiland J., Sanuki H. — Phys. Lett., 1979, v. 72A, p. 221.
20. Sanuki H., Weiland J. Rep. IEET/PP-1979-13 Chalmers Univ. of Technology, Göteborg, 1979.
21. Ravlenko V. P., Weiland J. Rep. IEET/PP-15 Chalmers Univ. of Technology, Göteborg, 1979.

#### ГЛАВА 23

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ В ПЛАЗМЕ

Настоящая глава содержит краткий обзор некоторых результатов экспериментальных работ по исследованию нелинейных эффектов в плазме, выполненных в последние два десятилетия. Сначала упоминается ряд ранних работ пионерского характера, а затем обсуждаются наиболее интересные результаты лабораторных экспериментов, выполненных как со свободной, так и с замагниченной плазмой, включая исследование взаимодействия лазерного излучения с плазмой. Рассматриваются также те численные эксперименты, результаты которых в наиболее ясной форме демонстрируют роль нелинейных эффектов, особенно в



том аспекте, который представляет интерес в связи с основной целью данной книги, т. е. роль когерентных взаимодействий в плазме.

Первые экспериментальные результаты по нелинейным эффектам в плазме относятся примерно к 1965 г. [1—10]. Эти результаты были получены в США и Японии и явились началом длительного и активного периода исследований [11—110] в лабораториях различных стран мира, особенно в СССР, где было выполнено также большинство теоретических разработок по нелинейным эффектам в плазме.

### Ранние исследования

В ранних экспериментальных работах по исследованию нелинейных эффектов в плазме, выполненных в США в середине шестидесятых годов, исследовались резонансы Тонкса — Даттнера, т. е. возбуждения типа электроакустических волн в радиально-неоднородном плазменном столбе [1, 2]. Вследствие того что в резонансных условиях существует сильная связь падающего излучения с плазменными волнами, в рассматриваемой системе могут развиваться коллективные колебания очень большой амплитуды, вместе с которыми ярко проявляются такие нелинейные явления, как генерация второй гармоники возбуждающего поля или возникновение излучения на частоте биений двух одновременно существующих колебаний.

Следует подчеркнуть, что в экспериментах подобного рода электронная плотность, при которой наступает резонанс для первичного поля, изменяется с частотой другого резонанса из-за наличия связи, т. е. рассматриваемые явления обусловлены внутренними нелинейными свойствами исследуемых систем и поэтому могут быть отделены от других нелинейных эффектов (типа люксембург-горьковского эффекта, градиентной связи и т. п. — см. гл. 24).

Японские экспериментальные работы середины шестидесятых годов были посвящены исследованиям параметрических явлений в плазме с магнитным полем [3], аномального циклотронного излучения [4], возбуждения высших гармоник и субгармоник электронных плазменных колебаний [5], смешивания частот при аномальном циклотронном излучении [6], возбуждения электронных и ионных плазменных колебаний в результате параметрического резонанса [7].

В дальнейшем исследовались возбуждение продольных плазменных колебаний при нелинейном резонансном взаимодействии двух поперечных электромагнитных волн с частотами, разность которых была равна плазменной частоте [8], а также нелинейная связь, лежащая в основе таких явлений, как вынужденное комбинационное рассеяние и рассеяние света на свете в плазме. Экспериментально наблюдался также эффект одновременного возбуждения плазменных и ионно-звуковых волн при распространении

нии сильной электромагнитной волны с частотой  $\omega = \omega_p$  [9]. Наконец, следует упомянуть работу [10], посвященную сравнительному исследованию бесстолкновительного затухания плазменных волн большой и малой амплитуды.

### Лабораторные эксперименты

За первыми экспериментальными исследованиями нелинейных эффектов в плазме последовал нарастающий поток работ [11—39], в которых с помощью улучшенной диагностической техники [23] детально исследовались высокочастотные и низкочастотные колебания в плазме (плазменные, ионно-звуковые, циклотронные и гибридные волны) и их нелинейные взаимодействия. Было экспериментально доказано существование трехволнового взаимодействия взрывного типа [26].

Во многих экспериментах исследовалась возможность использования параметрической неустойчивости для нагрева лабораторной и ионосферной плазмы [40—64], который приводит, в частности, к резкому возрастанию уровня некогерентного рассеяния в ионосферной плазме [61]. Было продолжено также изучение свойств ионно-звуковых волн, возбуждаемых с помощью резонансов Тонкса — Датнера, и связанных с ними явлений, в частности исследовались эффективная частота соударений [62] и нелинейный сдвиг частоты [63].

Из числа многих элегантных и весьма тонких экспериментов, выполненных в последние годы, упомянем здесь исследование параметрической неустойчивости ионно-звуковой волны в системе плазма — лучок, при которой линейно-устойчивая волна в результате нелинейного взаимодействия распадается на две линейно-

устойчивые волны большой амплитуды с частотой, равной половине частоты первоначальной волны (рис. 23.1) [64]. В этом

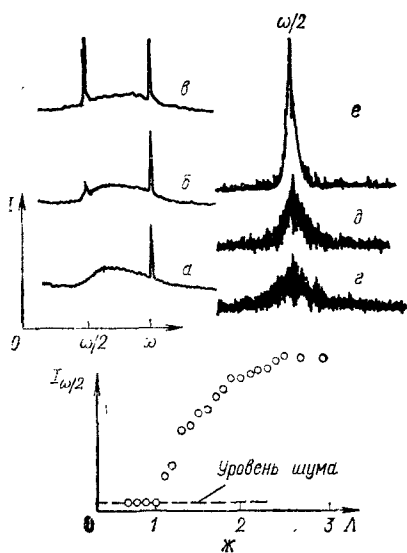


Рис. 23.1. Нелинейный распадный спектр:

*a—г* — частотный спектр сигнала с ленточного зонда, расположенного так, что  $x = 11$  см; *a—г*: горизонтальное сканирование (частотный диапазон 0—500 кГц, ширина полосы 10 кГц, интенсивность накачки  $\lambda = 0,9; 1,1$  и  $1,2$ , нормированная на пороговое значение  $\Delta n_e/n_{e0} = 0,025$ ); *г—e*: горизонтальное сканирование (частотный диапазон 0—1 кГц, центрированный возле частоты  $\omega/2$ , ширина полосы 10 Гц; интенсивность накачки  $\lambda = 1,0; 1,05$  и  $1,1$ ); *ж*: нарастание амплитуд субгармоник ( $\omega/2\pi = 411$  кГц). Из работы Stern R. A., Decker J. F., Platzman P. M. Decay Instability of the Ion-Beam Mode.—Phys. Rev. Lett., 1974 v. 32, p. 359—по разрешению авторов и Американского физического общества

эксперименте отчетливо выявляется когерентная природа взаимодействия. По мере увеличения амплитуды волны накачки уменьшается ширина линии субгармоники при одновременном возрастании ее амплитуды и степени когерентности, так что в конечном счете энергетический уровень этой линии может превысить начальную энергию волны накачки (такой процесс возможен вследствие распада волны накачки).

Другой интересный пример — исследование связанных солитонов плазменного и ионно-звукового типов [65]. В этой работе теоретически и экспериментально показана возможность самомодуляции высокочастотного электрического поля, частота которого близка к электронной плазменной частоте. Самомодуляция порождает локализованные поля, которым соответствует уменьшение плотности плазмы. В результате поле оказывается захваченным «ямками» плотности, распространяющимися с ионно-звуковой скоростью. Интерпретация этого явления в рамках модели связанных уединенных волн (плазменных и ионно-звуковых) приводит к количественному согласию с результатами эксперимента. В работе [66] было проведено исследование динамики «кавитонов» и захвата электромагнитных полей радиодиапазона.

В многочисленных экспериментах с плазменно-пучковыми системами [67—79] изучался эффект захвата частиц. В частности, в работах [68, 69] исследовали влияние нелинейных эффектов на неустойчивость и боковые моды в таких системах. Измерение распределения электронов по энергиям при наличии волн большой амплитуды произведено в [71, 72]. Обширный обзор экспериментальных исследований по нелинейным эффектам при взаимодействии нерелятивистских и релятивистских пучков с плазмой представлен в работе [73], где нашли отражение такие вопросы, как нелинейная стадия развития низкочастотных неустойчивостей в плазменно-пучковых системах, спектральное распределение энергии возбуждаемых полей, пространственно-временные корреляционные функции, существование скачков фазы, дисперсионные характеристики низкочастотных колебаний и энергетические потери пучка, обусловленные коллективными взаимодействиями с плазмой.

Огромное стимулирующее воздействие на развитие работ по нелинейным взаимодействиям в плазме, возникающей при лазерном облучении твердых мишеней, оказала идея лазерного термоядерного синтеза [80, 81]. Проведено большое число экспериментальных работ, посвященных исследованию генерации гармоник, параметрического возбуждения различных стимулированных процессов и аномального нагрева плазмы [82—94].

Следует отметить, что малые размеры областей взаимодействия в плазменной короне, окружающей твердые мишени (порядка 100 мкм), чрезвычайно затрудняют диагностику лазерной плазмы. Тем не менее удалось определить [89] пороговые значения характеристик различных нелинейных процессов и получить

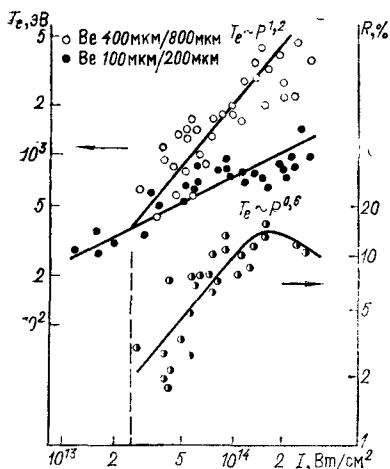


Рис. 23.2. Зависимости электронной температуры  $T_e$  и отражательной способности  $R$  от интенсивности лазерного излучения  $I$  при бомбардировке твердой дейтериевой мишени. Пунктиром показано пороговое значение интенсивности для параметрической неустойчивости. Из работы Yamanaka С., Yamanaka Т., Sasaki Т., Mizui J., Kang Н. В. Brillouin Backscattering and Parametric Double Resonance in Laser-Produced Plasma. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 1038 — по разрешению авторов и Американского физического общества.

полезную информацию о влиянии этих процессов на излучение в надпороговой области (рис. 23.2).

Серьезная трудность при исследовании и интерпретации взаимодействия лазерного излучения с плазмой связана с тем, что излучение большой интенсивности может существенно влиять на профили плотности плазмы [92, 94]. В работе [93] в экспериментах по отражению было обнаружено спектральное уширение рассеянного света.

Проведенные до настоящего времени исследования возможности осуществления управляемого лазерного термоядерного синтеза указывают на необходимость значительного увеличения мощности лазерного излучения. Учитывая, что новые мощные лазерные установки находятся в стадии разработки, можно надеяться на дальнейший прогресс исследований нелинейного взаимодействия лазерного излучения с плазмой.

### Численные эксперименты

Трудности аналитического описания деталей (а нередко и сущности) процессов нелинейного взаимодействия волн в реальных плазменных системах стимулировали проведение широких численных исследований нагрева магнитоактивной (и немагнитной) плазмы [95—103] и нелинейных эффектов при взаимодействии лазерного излучения с плазмой [104—110]. Такие исследования вскрывают характерные особенности лабораторных систем, которые нелегко предсказать на основе использования аналитических методов.

Следует отметить, что с помощью численных экспериментов можно изучать и такие проблемы, которые пока недоступны лабораторному исследованию. Можно, например, ставить вопрос о том, что произойдет при увеличении мощности лазерного излучения до значений, далеких от современных возможностей экспериментальной техники.

Полученные в результате численных экспериментов фазовые пространства [97—99, 101, 103—105, 108, 109] дают ясное представление об эффектах когерентности и захвата, способствующее лучшему пониманию физической сущности рассматриваемых проблем и дальнейшим успехам в их аналитическом исследовании. Вместе с тем не следует забывать, что интерпретация результатов и даже осуществимость численных экспериментов нередко оказываются весьма проблематичными.

На рис. 23.3 приведены результаты численного исследования для случая, когда одновременно наблюдаются вынужденное ком-

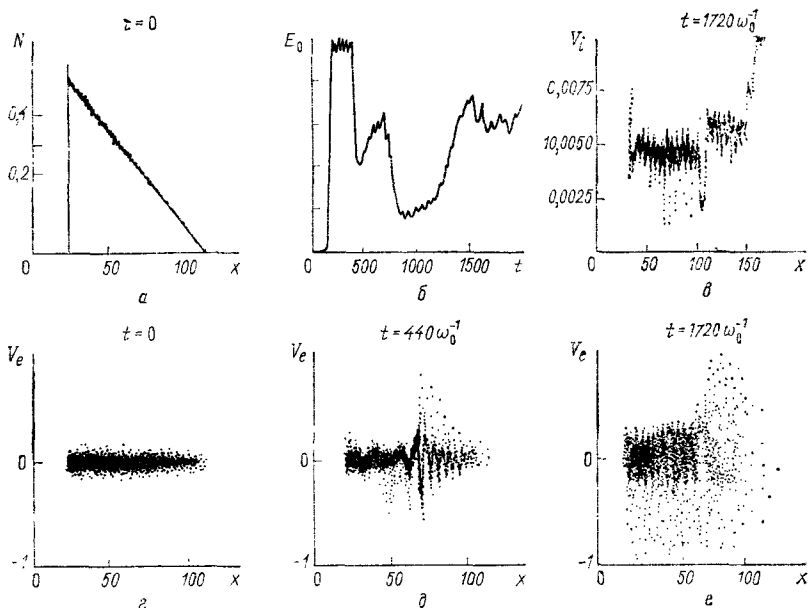


Рис. 23.3. Результаты численного эксперимента по вынужденному рассеянию Мандельштама — Бриллюэна:

$a$  — профиль плотности плазмы;  $b$  — амплитуда электрического поля прошедшей волны;  $c$  — распределение ионов в фазовой плоскости  $x-V_x$ ;  $d$  — распределение электронов в фазовой плоскости  $x-V_x$ . Параметры системы:  $n_{\text{макс}}/n_c=0,5$ ;  $v_0/c=0,1$ ;  $M_i/m_e=1836$ ;  $\Gamma_0/\Gamma_i=10$ ;  $v_e/c=0,05$ ; длина —  $150 c/\omega_0$ ; число частиц — 20 000; число ячеек — 1024; шаг по  $t-2\omega_0^{-1}$ ;  $V$  — скорость в единицах  $c$ . Из работы Forslund D. W., Kindel J. M., Lindman E. L. Nonlinear Behaviour of Stimulated Brillouin and Raman Scattering in Laser-Irradiated Plasmas.—Phys. Rev. Lett. 1973, v. 30, p. 739 — по разрешению авторов и Американского физического общества

бинационное рассеяние и рассеяние Мандельштама — Бриллюэна. Начальный профиль плазмы изображен на рис. 23.3,  $a$  (лазерное излучение с частотой  $\omega_0$  падает справа и распространяется в плазме до области с плотностью около  $n_{\text{макс}}/n_c \approx 0,5$ , где  $n_c$  — критическая плотность, определяемая из условия  $\omega_{pe} = \omega_0$ ).

Зависимость амплитуды прошедшего света от времени приведена на рис. 23.3, б. После 100%-ного прохождения в начальный момент времени наблюдается первый минимум при  $t = 500\omega_0^{-1}$ , обусловленный стимулированным комбинационным рассеянием. Второй минимум возникает при  $t = 1000\omega_0^{-1}$  из-за наличия вынужденного рассеяния Манделъштама — Бриллюэна. В дальнейшем происходит нагрев электронов, который приводит к увеличению глубины проникновения поля в плазму.

Картина в фазовой плоскости (см. рис. 23.3, д) указывает на возбуждение электронных плазменных волн при  $t = 440\omega_0^{-1}$ , которые в этот момент являются высококогерентными и поэтому могут приводить к сильному отражению из-за вынужденного комбинационного рассеяния. Аналогичная картина наблюдается и в ионной фазовой плоскости при  $t = 1000\omega_0^{-1}$  (вынужденное рассеяние Манделъштама — Бриллюэна). Фазовые пространства электронов и ионов при  $t = 1720\omega_0^{-1}$  изображены на рис. 23.3, в, е. Ясно видны ионные волны. В интервале времен между  $t = 440\omega_0^{-1}$  и  $t = 1720\omega_0^{-1}$  происходит существенный нагрев электронов за счет явления захвата частиц.

Эффект изменения профиля плотности плазмы под воздействием мощного лазерного излучения исследовали в работах [107, 108, 110], результаты которых указывают на ключевую роль этого эффекта в поглощении лазерного излучения плазмой [108] и свидетельствуют о необходимости построения самосогласованной теории профиля плотности плазмы [110].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stern R. A. — Appl. Phys. Lett., 1964, v. 4, p. 80.
2. Stern R. A. — Phys. Rev. Lett., 1965, v. 14, p. 538.
3. Kato K., Kawasaki E. — J. Phys. Soc. Jap., 1965, v. 20, p. 1521.
4. Terumichi Y. — Ibid., p. 1524.
5. Kawabe T., Kojima S., Takayama K. — Ibid., p. 1539.
6. Honzawa T., Tanaka S. — Ibid., p. 2089.
7. Kato K., Yoseli M., Kiyama S., Watanabe S. — Ibid., p. 2097.
8. Stern R. A., Tzoar N. — Phys. Rev. Lett., 1966, v. 16, p. 785.
9. Stern R. A., Tzoar N. — Ibid., v. 17, p. 903.
10. Malmberg J. H., Wharton C. B. — Ibid., 1967, v. 19, p. 775.
11. Widner M. M., Hsuan H. C. S., Lonngren K. E. — Phys. Lett., 1968, v. 26A, p. 553.
12. Fedorchenko V. D., Muratov V. I., Rutkevich B. N. — Nucl. Fusion, 1968, v. 8, p. 37.
13. Pointu A. M., Pomeau Y., Constantin A. — Phys. Lett., 1968, v. 26A, p. 567.
14. Sato N., Ikezi H., Takachaschi N., Yamaschita Y. — Phys. Rev., 1969, v. 183, p. 278.
15. Sato M. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, p. 998.
16. Porkolab M., Chang R. P. H. — Phys. Fluids, 1969, v. 12, p. 1697.
17. Demokan O., Hsuan H. C. S., Lonngren K. E. — J. Appl. Phys., 1970, v. 41, p. 2122.
18. Wong A. Y., Baker D. R., Booth N. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, p. 804.

19. Григорьева Л. И., Смердов Б. И., Чечкин В. В. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1970, т. 58, с. 1234.
20. Rutkevich B. N., Fedorchenko V. D., Muratov V. I. — Nucl. Fusion, 1971, v. 11, p. 51.
21. Eubank H. P. — Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 2551.
22. Takamura S., Aihara S., Takayama K. — J. Phys. Soc. Jap., 1971, v. 31, p. 925.
23. Bekefi G. — In: Proc. 10th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Oxford, 1971, p. 299.
24. Franklin R. N., Smith G. J., Hamberger S. M., Lampis G. — Ibid., p. 324.
25. Stern R. A. — Ibid., p. 319.
26. Hopman H. J. — Ibid., p. 323.
27. Chang R. P. H., Porkolab M., Grek B. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 206.
28. Chu T. K., Hendel H. W. — Ibid., v. 29, p. 634.
29. Cano R., Fidone I., Schwartz M. J., Zanfagna B. — [23], p. 332.
30. Cano R., Fidone I., Granata G. — In: Proc. 5th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Phys. Grenoble, 1972, p. 136.
31. Franklin R. N., Hamberger S. M., Smith G. J. — Ibid., p. 133.
32. Baranchuk N. S., Levitsky S. M., Kormelyuk M. A., Filonenko E. G. — In: Proc. 12th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Eindhoven, 1975, p. 317.
33. Keen B. E., Fletcher W. H. W. — J. Phys., 1973, v. A6, p. 124.
34. Moisan M. — Plasma Phys., 1974, v. 16, p. 1.
35. Klein L. A., Cheo B. R., Stern R. A. — J. Appl. Phys., 1974, v. 45, p. 5218.
36. Carcek M., Tavzes R. — [32], p. 318.
37. Michelsen P., Hirschfield J. L. — Phys. Fluids, 1975, v. 17, p. 2205.
38. Gervais F., Matthieussent G., Olivain J., Quemeneur A. — [32], p. 321.
39. Edgley P. D., Franklin R. N., Hamberger S. M., Motley R. W. — Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 1269.
40. Chu T. K., Hendel H. W., Dawson J. M. — Comments Plasma Phys. Controlled Fusion, 1972, v. 1, p. 111.
41. Symposium on Plasma Heating in Toroidal Devices. Intern. School of Plasma Physics (Varena, 1974). Ed. by Compositori. Bologna, 1974, p. 1—267.
42. Геккер И. П., Сизухин О. В. — Письма ЖЭТФ, 1969, т. 9, с. 408.
43. Dreicer H., Henderson D. B., Ingraham J. C. — Phys. Rev. Lett., 1971, v. 26, p. 1616.
44. Сергеев К. Ф., Трофимов В. Е. — Письма ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 236.
45. Captain J. J., Ichtchenko D., Lallia P. e. a. — [23], p. 339.
46. Porkolab M., Arunasalam V., Ellis R. A. (Jr). — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 1438.
47. De Koch L. C. J. M., Sato T. — [30], p. 127.
48. Chu T. K., Bernabei S., Motley R. W. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 211.
49. Hooke W. M., Bernabei S. — Ibid., 1972, v. 28, p. 407.
50. Hooke W. M., Bernabei S. — Ibid., v. 29, p. 1218.
51. Chang R. P. H., Porkolab M. — Ibid., 1973, v. 31, p. 1241.
52. Glagolev V. M., Krivov N. A., Skosyrev Yu. V. — In: Proc. 4th Intern. Conf. on Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion. Madison, 1971, p. 531.
53. Hendel H. W., Flick J. T. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 199.
54. Анисимов А. И., Виноградов Н. И., Полоскин Б. П. — Журн. техн. физ., 1973, т. 43, с. 727.
55. Chang R. P. H., Porkolab M. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 1227.
56. Mizuno K., De Groot J. S. — Ibid., 1975, v. 35, p. 219.
57. Porkolab M. — [32], Part 2, p. 317.
58. Corti S., Fontanesi M., Grosso G., Sindoni E. — Ibid., p. 319.
59. Yatsui K., Imai T. — Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 1279.
60. Geckelman W., Stenzel R. L. — Ibid., p. 1708.
61. Carlson H. C. — J. Geophys. Res., 1972, v. 77, p. 1242.
62. Ikezawa S., Okuda T. — [32], p. 324.
63. Ikezawa S., Okuda T. — J. Appl. Phys., 1975, v. 46, p. 4606.
64. Stern R. A., Decker J. F., Platzman P. M. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 359.

65. Ikezi H., Nishikawa K., Hojo H., Mima K. — In: Proc. 5th Conf. on Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion. V. 2. Vienna, IAEA, 1975, p. 609.
66. Kim H. C., Stenzel R. L., Wong A. Y. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 886.
67. Fedorchenko V. D., Rutkevich B. N., Muratov V. I. — Nucl. Fusion, 1971, v. 11, p. 43.
68. Franklin R. N., Hamberger S. M., Ikezi H., Lampis G., Smith G. J. — In: Proc. 3rd Intern Conf. on Q Plasmas. Elsinore, 1971, p. 327.
69. Ikezi H., Kiwamoto Y., Mima K., Nishikawa K. — Ibid., p. 334.
70. Guillemot M., Olivain J., Perceval F., Quémeneur A. — Ibid., p. 304.
71. Barblian E. P., Jurgens B. — Ibid., p. 317.
72. Guillemot M., Olivain J., Perceval F., Quémeneur A. — In: Proc. 10th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Oxford, 1971, p. 316.
73. Bakai A. S. e. a. — [52], p. 113.
74. Jungwirth K., Piffel V., Ullschmied J. — [30], p. 154.
75. Норман H. J., Jurgens B., Wakeren J. H. A. — Ibid., p. 152.
76. Wong A. Y., Quon B. H., Ripin B. H. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 26, p. 1299.
77. Lee A., Gleman S., Jones W. D. — Ibid., 1974, v. 32, p. 1225.
78. Корнилов Е. А., Ковпик О. Ф. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1975, т. 68, с. 530.
79. Козырев Ю. М., Найда А. П. — Там же, 1974, т. 67, с. 2104.
80. Басов Н. Г., Захаров С. Д., Крюков П. Г., Сенатский Ю. В., Чекалин С. В. — Письма ЖЭТФ, 1968, т. 8, с. 26.
81. Floux F., Cognard D., Deneud L.-G. e. a. — Phys. Rev., 1970, v. A1, p. 821.
82. Caruso A., De Angelis A., Gatti G., Gratton R., Martellucci S. — Phys. Lett., 1969, v. 29A, p. 316.
83. Caruso A., De Angelis A., Gatti G., Gratton R., Martellucci S. — Ibid., 1970, v. 33A, p. 29.
84. Piar G., Meyer B., Decroisette M. — [23], p. 331.
85. Waki M., Yamanaka T., Kang H.-B., Yoshida K., Yamanaka C. — J. Appl. Phys., 1972, v. 11, p. 420.
86. Yamanaka C., Yamanaka T., Sasaki T. e. a. — Phys. Rev., 1972, v. A6, p. 2335.
87. Bobin J. L., Decroisette M., Meyer B., Vitel Y. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 594.
88. Goldman L. M., Soures J., Lubin M. J. — Ibid., v. 31, p. 1184.
89. Yamanaka C., Yamanaka T., Sasaki T. e. a. — Ibid., 1974, v. 32, p. 1038.
90. Басов Н. Г., Крохин О. Н., Пустовалов В. В. и др. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 67, с. 118.
91. Yamanaka C., Yokoyama M., Nakai S. e. a. — [65], p. 421.
92. Eidman K., Van Kessel C., Key M. H. e. a. — Ibid., p. 357.
93. Baldis H. A., Pepin H., Johnston T. W. — Phys. Lett., 1976, v. 56A, p. 37.
94. Eidman K., Sigel R. — Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 799.
95. Hasegawa A., Kamimura T. — J. Phys. Soc. Jap., 1965, v. 20, p. 1525.
96. Krue W. L., Kaw P. K., Dawson J. M., Oberman C. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, p. 987.
97. Krue W. L., Dawson J. M. — Phys. Fluids, 1972, v. 15, p. 446.
98. Denavit J., Sudan R. N. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 404.
99. Chen L., Birdsall C. K. — Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 2229.
100. Dum C. T., Chodura R., Biskamp D. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 1231.
101. Emery M. H., Joyce G., Shohet J. L. — Plasma Phys., 1975, v. 17, p. 757.
102. Polyndov A. N., Sigov Yu. S. — [32], p. 332.
103. Astrelin V. T., Buchelnikova N. S. — Ibid., p. 283.
104. Forslund D. W., Kindel J. M., Lindman E. L. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 249.
105. Forslund D. W., Kindel J. M., Lindman E. L. — Ibid., 1973, v. 30, p. 739.
106. Krue W. L., Estabrook K. G., Sinz K. H. — Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 952.
107. Krue W. L., Estabrook K. G., Valeo E. J. — Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 1076.
108. Krue W. L., Valeo E., Estabrook K., Thomson J., Langdon B., Lasinski B. — [65], p. 525.
109. Biskamp K., Wefter H. — Ibid., p. 507.



110. Forslund D. W., Kindel J. M., Lee K., Lindman E. L. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 35.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Lee W. W., Kuo Y. Y., Okuda H. Numerical Simulations of Collisionless Drift Instabilities for Low-Density Plasmas. — Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 617.
- Van Andel H. W. H., Teichman J., Mah S. Q. Dynamic Stabilization of Dissipative Drift Modes by Oscillation Azimuthal Magnetic Field — Experiment and Theory. — Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 442.
- Nakamura S. Experimental Studies of Explosive Instability in an Ion Beam-Plasma System. — J. Phys. Soc. Jap., 1977, v. 42, p. 280.
- Sugaya R., Sugawa M., Nomoto H. Experimental Observation of Explosive Instability due to a Helical Electron Beam. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 27.
- Watt R. G., Brooks R. D., Pietrzyk Z. A. Observation of Stimulated Raman Backscatter from a Preformed Underdense Plasma. — Ibid., 1978, v. 41, p. 170.
- Sugaya R., Sugawa M., Nomoto H. Observation of Explosive Instability in an Electron Beam-Plasma System. — Phys. Lett., 1978, v. 69A, p. 265.
- Porkolab M., Chang R. P. H. Nonlinear Wave Effects in Laboratory Plasmas: A Comparison Between Theory and Experiment. — Rev. Mod. Phys., 1978, v. 50, p. 745.
- Jones M. E., Fukai J. Evolution of the Explosive Instability in a Simulated Beam Plasma. — Phys. Fluids, 1979, v. 22, p. 132.
- Kerst R. A., Raether M. Observation of the Decay Instability of a Beam Plasma Wave. — Phys. Lett., 1979, v. 69A, p. 329.
- Nicholson D. R., Aamodt R. E., Liu C. S. Nonlinear Landau Damping in Mirror Plasmas. — Phys. Fluids, 1979, v. 22, p. 114.

#### ГЛАВА 24

### НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В настоящей главе кратко обсуждаются некоторые направления развития исследований нелинейных процессов в плазме, а также фундаментальные явления, связанные с такими процессами.

Роль нелинейных эффектов в современной физике плазмы хорошо отражается широкой распространенностью в специальной литературе, посвященной исследованию плазмы, прилагательного «аномальный», которое очень часто фигурирует в наименованиях различных характеристик плазмы и протекающих в ней процессов (говорят, например, об аномальной диффузии, аномальном сопротивлении, аномальном поглощении или рассеянии и т. п.). Использование этого прилагательного стало столь привычным, что нелинейные эффекты в плазме, по существу, следует рассматривать скорее как нормальное явление, чем как аномальное. Действительно, фундаментальные теоретические и экспериментальные исследования последних лет показывают, что в совокупности нелинейные эффекты образуют главную составную часть общей картины плазменных явлений.

Для развития плазменных исследований на современном этапе весьма характерен сдвиг теоретических усилий в направлении

объяснения экспериментальных данных. Нелинейные явления по-прежнему привлекают большой интерес теоретиков, и их изучение составляет одну из наиболее интересных и увлекательных задач физики плазмы. Для того чтобы правильно интерпретировать наблюдаемые экспериментальные данные и предсказывать возможные результаты будущих экспериментов, необходимо более глубокое понимание существа нелинейных процессов, чем то, которое достигнуто сейчас. Теоретические работы в этом направлении стимулируют также постановку новых лабораторных и численных экспериментов, которые в последнее время стали чрезвычайно полезным средством вскрытия и изучения новых особенностей нелинейных явлений.

Теория нелинейных явлений в физике плазмы вобрала в себя достижения многих смежных областей, в которых основательно изучались те или иные нелинейные явления. Исторически первые работы по взаимодействию сильных и слабых электромагнитных волн в плазме основывались на предположении, что сильная волна существенно влияет на параметры плазмы. Примером такой кросс-модуляции может служить хорошо известный люксембург-горьковский эффект [1—5], который возникает в результате влияния сильной волны на частоту соударений электронов с нейтральными частицами и последующей передачи модуляции второй волне, распространяющейся в том же регионе, что и первая. Явления типа описанных в [1—5], для которых характерно наличие временной модуляции параметров плазмы, в определенном смысле можно рассматривать как нелинейные [6].

Нелинейные плазменные колебания впервые изучались в работах [7, 8] и при наличии температурных эффектов — в работе [9]. Строгая теория нелинейных колебаний развита в [10] при учете эффекта захвата частиц. Другие примеры нелинейных плазменных колебаний рассматривались в [11, 12]. Ряд ранних работ был посвящен также изучению релятивистской плазмы [13, 14].

Вскоре после этого были выполнены пионерские экспериментальные исследования (см. гл. 23), а затем были опубликованы результаты численных экспериментов [15], которые продемонстрировали важную роль солитонов, являющихся решением уравнения Кортевега — де Вриза. В этом уравнении учитывается как дисперсия, так и нелинейность, поэтому оно имеет фундаментальное значение, например, в связи с проблемой формирования ударных волн в горячей плазме.

Бесстолкновительным ударным волнам посвящено много работ [16—22]. В магнитосферных исследованиях было получено первое убедительное доказательство существования ударных волн, образующихся при втекании потока плазмы, имеющего сверхзвуковую скорость (солнечный ветер), в магнитное поле Земли [16]. В 1965 г. появились первые сообщения [17—19] о лабораторных экспериментах по бесстолкновительным ударным волнам в плазме. С тех пор это направление быстро развивается

и в настоящее время представляет собой особую дисциплину со своим предметом исследования [20—22], в которой многое уже понято благодаря интенсивной аналитической, вычислительной и лабораторной работе; в частности, продемонстрировано большое значение для рассматриваемого явления нелинейных (аномальных) эффектов (см. обзор [22], посвященный этой проблеме).

В 1967 г. появился ряд работ, посвященных плазменно-волновому эхо [23—29]. Соответствующий эксперимент, сводящийся к смешению двух продольных волн с различными частотами, подтвердил указанную еще в работе Ландау характерную особенность бесстолкновительного затухания, которая заключается в том, что частицы не утрачивают информации о возбуждении даже при полном затухании волны (см., например, [28]). В эксперименте две волны с различными частотами возбуждались в разных точках плазмы и сигнал разностной частоты (эхо) наблюдался в некоторой третьей точке, расположенной на большом (по сравнению с длиной затухания Ландау) расстоянии от первых двух точек. Эховый сигнал возникал при надлежащем выборе точки наблюдения вследствие наличия нелинейной связи.

Значительное внимание в физике плазмы уделяется флуктуационным явлениям [30—39]. Центральное место в расчетах флуктуационных спектров занимают флуктуационно-диссипативная теорема и функции линейного отклика. В последние годы теория флуктуаций обобщена на случаи турбулентной плазмы [31, 32], параметрического воздействия мощного излучения на плазму [33—38], плазмы с активными молекулами [39] и т. п.

Интенсивно разрабатывается проблема турбулентности плазмы [40, 41] и ее приложения к исследованию лабораторных [40] и астрофизических [42] явлений. Подход к этой проблеме основан, естественно, на использовании приближения случайных фаз. Для астрофизических приложений особый интерес представляет возможность статистического ускорения частиц в турбулентной плазме [42—44]. Что же касается лабораторных экспериментов, то в них главное внимание продолжают уделять проблеме аномального сопротивления [45—48]. Сейчас, однако, твердо установлено, что для достижения желаемого уровня температур в термоядерных установках требуются, помимо джоулева, и другие механизмы нагрева (такие, например, как нижегибридный резонанс или инжекция пучков частиц в плазму).

Многочисленные работы по параметрическим процессам [49—56], взаимодействию пучков частиц и лазерного излучения с плазмой, а также по связи волна — частица уже упоминались в гл. 23 и здесь необходимо лишь еще раз подчеркнуть их большое влияние на общее развитие нелинейной физики плазмы. Отметим дополнительно некоторые новые результаты по нелинейному проникновению электромагнитных волн в плазму и нераспаданному механизму диссипации их энергии [57], нелинейной деформации нижегибридного конуса [58], влиянию ленгмюровской турбулентности на стимулированное рассеяние Манделштама —

Бриллюэна [59] и влиянию стохастических эффектов на параметрическую связь [60, 61].

Большое значение для физики плазмы в целом и ее приложений к исследованию потоков космической плазмы в окрестности Земли и планет имеет проблема нестационарного нелинейного обтекания разреженной плазмой различных материальных объектов. В связи с этим интенсивно исследуется нелинейная динамика разреженного ионизованного газа [62].

Активно исследуются ленгмюровские солитоны и сильная турбулентность. Ленгмюровская турбулентность имеет тенденцию к «конденсации» волн в пространстве волновых чисел, которая приводит к их локализации в длинноволновой области спектра, где линейной затухание мало [63—72]. Это, в свою очередь, вызывает трехмерную фокусировку ленгмюровских волн и появление локальных сингулярностей амплитуд. В результате в плазме могут образовываться области пониженной плотности (каверны), которые играют роль своеобразных резонаторов для ленгмюровских волн. За конечное время каверны коллапсируют до размеров, характерных для пересечения траектории электронов [63]. Коллапс каверн приводит к сильной диссипации энергии длинноволновых ленгмюровских колебаний и в связи с этим играет важную роль в теории ленгмюровской турбулентности.

Отметим, что коллапс можно рассматривать как нелинейную стадию развития ранее исследованных неустойчивостей в системах ленгмюровских и ионно-звуковых волн [65]. Для коллапса ленгмюровских волн характерно наличие порогового значения амплитуды, которое зависит от спектра колебаний и не может быть найдено в рамках приближения случайных фаз. Для его определения разработана специальная процедура усреднения по «быстрому времени» [63].

Нелинейная диссипация сильных электромагнитных волн наблюдается также в окрестности точки плазменного резонанса [73]. Из-за малой групповой скорости плазмоны, возникающие вследствие линейной трансформации электромагнитного поля вблизи плазменного резонанса, собираются в окрестности этой точки, что приводит к понижению порога развития нелинейных эффектов, деформации профиля плотности плазмы, а затем и к образованию каверн (модуляционная неустойчивость). При этом эволюция каверн и полей в них носит взрывной характер. Неустойчивость ограничивается формированием узкой области взаимодействия с резонансным поглощением энергии плазмонов электронами. Тем самым механизм модуляционной неустойчивости приводит к нелинейному поглощению электромагнитных волн [73]. Теоретические результаты качественно согласуются с экспериментальными, которые показывают, что электромагнитные поля проникают в плазму достаточно глубоко лишь в тех случаях, когда они имеют вид импульсов настолько малой длины, что за время существования поля модуляционная неустойчивость не успевает развиться [74].

Отметим в заключение возможность взрывной неустойчивости типа конуса потерь в зеркальных ловушках, предсказанной в работе [75] на основе анализа параметрической связи дрейфовой конусной волны с отрицательной энергией и низкочастотной волны с положительной энергией в окрестности ионно-циклотронной частоты. В результате этой неустойчивости anomalно нарастают амплитуды ионно-циклотронной волны накачки и распадной волны с положительной энергией, а вместе с ними и общий уровень турбулентности в рассматриваемой системе. Этот результат согласуется с экспериментально наблюдаемым фактом увеличения уровня флуктуаций при формировании турбулентного спектра.

Приведенный здесь краткий обзор некоторых направлений исследований нелинейных эффектов в плазме уместно закончить предложением, которым начинается последняя из упомянутых в этом обзоре работ [75]: «Взаимодействие когерентного состояния с волной большой амплитуды и турбулентным состоянием, образованным композицией многих волн со случайными фазами, и влияние этого взаимодействия на заряженные частицы принадлежит к числу фундаментальных проблем нелинейной физики плазмы».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tellegen B. D. H. — Nature, 1933, v. 131, p. 840.
2. Bailey V. A., Martyn D. F. — Nature, 1934, v. 133, p. 218.
3. Van der Pol B. — Onde électr., 1935, v. 14, p. 804.
4. Huxley L. G. H., Ratcliffe J. A. — Proc. IEE, 1949, v. 96.3, p. 433.
5. Гинзбург В. Л. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1948, т. 12, с. 293; см. также: Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Наука, 1967, с. 588—629; Гинзбург В. Л. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1958, т. 35, с. 1573; Гинзбург В. Л., Гуревич А. В. — Успехи физ. наук, 1960, т. 70, с. 201; Fortschr. Phys., 1960, Bd 8, S. 97.
6. Whitmer R. F., Barrett E. B. — Phys. Rev., 1961, v. 121, p. 661; 1962, v. 125, p. 1478.
7. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я. — Докл. АН СССР, 1951, т. 80, с. 193.
8. Половин Р. В. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1957, т. 31, с. 354.
9. Wilhelmsson H. — Phys. Fluids, 1961, v. 4, p. 335.
10. Bernstein I. B., Green J. M., Kruskal M. D. — Phys. Rev., 1957, v. 108, p. 546.
11. Sturrock P. A. — Proc. Roy. Soc., 1957, v. A242, p. 277.
12. Dawson J. — Phys. Rev., 1959, v. 113, p. 383.
13. Ахиезер А. И., Половин Р. В. — Докл. АН СССР, 1955, т. 102, с. 919.
14. Электродинамика плазмы/А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин и др. — М., Наука, 1974.
15. Zabusky N. J., Kruskal M. — Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 240.
16. Ness N. F., Scarse C. S., Seek J. B. — J. Geophys. Res., 1964, v. 69, p. 3531.
17. Paul J. W. M., Holmes L. S., Parkinson M. J., Sheffield J. — Nature, 1965, v. 208, p. 133.
18. Kurtmullaev R. Kh., Nesterikhin Yu. E., Pilski V. I., Sagdeev R. Z. — In: Proc. 2nd Intern. Conf. Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion. V. 2. Vienna, IAEA, 1965, p. 367.
19. Goldenbaum G. C., Hintz E. — Phys. Fluids, 1965, v. 8, p. 2111.
20. Sagdeev R. Z. — Rev. Plasma Phys., 1966, v. 4, p. 23.
21. Taylor R. J., Baker D. R., Ikezi H. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, p. 206.
22. Biskamp D. — Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 719.

23. Gould R. V., O'Neil T. M., Malmberg J. H. — Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 219.
24. O'Neil T. M., Gould R. W. — Phys. Fluids, 1968, v. 11, p. 134.
25. Malmberg J. H., Warton C. B., Gold R. W., O'Neil T. M. — Phys. Rev. Lett., 1968, v. 20, p. 95; Phys. Fluids, 1968, v. 11, p. 1147.
26. Ikezi H., Takahashi N. — Phys. Rev. Lett., 1968, v. 20, p. 140.
27. Baker D. R., Ahern N. R., Wong A. Y. — Ibid., p. 318.
28. Nishikawa K. — In: Statistical Physics of Charged Particle Systems (1968 Tokyo Summer Lectures in Theor. Phys.). Ed. by R. Kubo and T. Kihara. Tokyo, Syokabo and N. Y., Bengamin, 1969, p. 178.
29. Guillemot M., Olivain J., Perceval F., Quemeneour A. — In: Proc. 3rd Intern. Conf. on Q Plasmas. Elsinore, 1971, p. 231.
30. Ситенко А. Электромагнитные флуктуации в плазме. Харьков, Изд-во Харьковского ун-та, 1965.
31. Ichimaru S. — [28], p. 69.
32. Ишимару С. Основные принципы физики плазмы. М., Атомиздат, 1975.
33. Du Bois D. F. — [28], p. 87.
34. Быченко В. Ю., Силин В. П., Тихончук В. Т. — В кн.: Краткие сообщения по физике, № 8. М., ФИАН СССР, 1972, с. 27.
35. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М., Наука, 1975.
36. Ситенко А. Г. Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме. Киев, Наукова думка, 1977.
37. Zagorodny A. G., Tegeback R., Usenko A. S., Yakimenko I. P. — Phys. Scripta, 1978, v. 18, p. 182.
38. Stenflo L., Yakimenko I. P. — Ibid., p. 151.
39. Wilhelmsson H., Yakimenko I. P. — Ibid., v. 17, p. 523.
40. Кадомцев Б. Б. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1964.
41. Коврижных Л. М. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1965, т. 48, с. 1114; Кадомцев Б. Б., Погуде О. П. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 5. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1967.
42. Каплаи С. А., Цытович В. Н. Плазменная астрофизика. М., Наука, 1972.
43. Tsyтович V. N. — In: Proc. 7th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Belgrade, 1965.
44. Заславский Г. М., Чириков Б. В. — Успехи физ. наук, 1971, т. 105, с. 3.
45. Bertotti V., De Barbieri O. — J. Plasma Phys., 1968, v. 2, p. 465.
46. Nishikawa K., Ichikawa Y.-H. — Phys. Fluids, 1969, v. 12, p. 2563.
47. Сагдеев Р. З. — В кн.: Проблемы теории плазмы. Киев, Наукова думка, 1972, с. 278.
48. Vekshtein G. E., Ryutov D. D., Sagdeev R. Z. — In: Proc. 4th Conf. on Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion. V. 2. Vienna, IAEA, 1972, p. 153.
49. Силин В. П. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1965, т. 48, с. 1679.
50. Алиев Ю. М., Силин В. П., Уотсон Х. — Там же, 1966, т. 50, с. 943.
51. Горбунов Л. М., Силин В. П. — Там же, 1965, т. 49, с. 1973.
52. Galeev A. A., Sagdeev R. Z. — Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 603.
53. Ivanov A. A. — Rev. Plasma Phys., 1975, v. 6, p. 161.
54. Martinov N., Samain A. — Plasma Phys., 1973, v. 15, p. 783.
55. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. — Успехи физ. наук, 1973, т. 109, с. 225.
56. Vedenov A. A., Ryutov D. D. — Rev. Plasma Phys., 1975, v. 6, p. 1.
57. Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 66, с. 1651.
58. Morales G. J., Lee Y. C. — Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 930.
59. Guzdar P. N. — Ibid., p. 1635.
60. Anderson D., Wilhelmsson H. — Phys. Lett., 1976, v. 56A, p. 37.
61. Bondeson A. — Phys. Scripta (to be publ.)
62. Gurevich A. V., Pitaevsky L. P. — Prog. Aerospace Sci., 1975, v. 16, p. 227.
63. Вedenov A. A., Рудаков Л. И. — Докл. АН СССР, 1964, т. 159, с. 767.
64. Захаров В. Е., Шабат А. Б. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1971, т. 61, с. 118.
65. Захаров В. Е. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1972, т. 62, с. 1745.

66. Дегтярев Л. М., Маханьков В. Г., Рудаков Л. И. — Там же, 1974, т. 67, с. 533.
67. Криворучко С. М., Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. — Там же, с. 2092.
68. Горев В. В., Рудаков Л. И. — Письма ЖЭТФ, 1975, т. 21, с. 532.
69. Wong A. Y., Quon V. H. — Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 1499.
70. Abdulloev Kh. O., Bogolyubskij I. L., Makhankov V. G. — Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 21.
71. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е., Рудаков Л. И. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1975, т. 68, с. 115.
72. Nishikawa K., Lee Y. C., Liu C. S. — Comments Plasma Phys., 1975, v. 2, p. 63.
73. Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. — Письма ЖЭТФ, 1975, т. 21, с. 539.
74. Wong A. Y., Stenzel R. L., Kim H. C., Chen F. F. — In: Proc. 5th Intern. Conf. on Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion. V. 2. Vienna, IAEA, 1975, p. 589.
75. Liu C. S., Aamodt R. E. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 95.

## ПРИЛОЖЕНИЕ I

### НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

#### Изотропная плазма

**Электромагнитные волны.** В отсутствие магнитного поля дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в плазме имеет очень простой вид

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2, \quad (I.1)$$

где  $\omega_p = (N_0 e^2 / m \epsilon_0)^{1/2}$  — плазменная частота;  $c$  — скорость света в вакууме;  $N_0$  — невозмущенная плотность электронов;  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона;  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Из (I.1) следует, что волны с частотами, меньшими  $\omega_p$ , имеют комплексные  $k$  и сильно затухают. Кроме того, вытекающее из (I.1) соотношение

$$(\omega/k) \partial \omega / \partial k = c^2 \quad (I.2)$$

указывает на то, что фазовая скорость  $\omega/k$  всегда больше  $c$ . Поэтому частицы не могут находиться в резонансе с электромагнитными волнами и, следовательно, эти волны не испытывают затухания Ландау.

**Плазменные воли.** Дисперсионное уравнение электронных плазменных волн можно записать в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 u^2, \quad (I.3)$$

где  $u$  — средняя квадратическая тепловая скорость.

Для холодной плазмы  $u=0$  и плазменные волны не могут распространяться, так как их групповая скорость обращается в нуль — в этом случае говорят о плазменных колебаниях.

При гидродинамическом подходе слагаемое  $3k^2 u^2$  в правой части (I.3) появляется благодаря учету газокINETического давления в уравнении движения электронов. При более последовательном кинетическом подходе это слагаемое соответствует учету первого члена в разложении по  $(kv/\omega)$ . В рамках кинетического подхода получается также затухание Ландау, обусловленное передачей энергии волн частицам, скорости которых несколько меньше  $\omega/k$ .

**Ионно-звуковые волны.** Эти воли принадлежат к классу низкочастотных волн, при рассмотрении которых существенно необходим учет движения ионов. Конечно, из-за большой массы ионы не успевают следовать за быстрыми колебаниями электронов. Более того, разделение заряда, возникающее вследствие движения ионов, немедленно экранируется электронами и, таким образом, при обычных условиях зарождение ионно-звуковых волн блокируется электронами. Если, однако, температура электронов велика по сравнению с температурой ионов ( $T_e/T_i \gg 1$ ), то электроны не могут полностью экранировать электростатическое поле. Напротив, некоторое электростатическое поле должно существовать для того, чтобы уравновесить силу электронного давления. Это поле воздействует на ионы, имеющие малую температуру. В результате возникают ионно-звуковые волны, скорость которых определяется давлением электронов и массой ионов. Дисперсионные свойства этих волн характеризуются уравнением

$$\omega^2 = (k_B T_e / m_i) k^2 / (1 + \lambda_D^2 k^2), \quad (I.4)$$

где  $k_B$  — постоянная Больцмана;  $\lambda_D$  — дебаевский радиус. При стремлении  $T_i$  к  $T_e$  ионно-звуковые волны сильно затухают из-за резкого возрастания затухания Ландау [1]. В выражениях типа (I.4) постоянную Больцмана  $k_B$  обычно опускают. При этом подразумевают, что температура измеряется в энергетических единицах.



## Магнитоактивная плазма

Проблема распространения волн в магнитоактивной плазме достаточно сложна из-за тензорного характера диэлектрической проницаемости такой плазмы. При распространении под произвольным углом к направлению магнитного поля волна имеет как продольные, так и поперечные компоненты поля и в случае холодной однородной плазмы подчиняется дисперсионному уравнению Эпплтона—Хартри [1].

**Продольное распространение.** Если, однако, волна распространяется вдоль направления магнитного поля, то общее уравнение Эпплтона—Хартри сильно упрощается и принимает вид

$$k^2 = (\omega^2/c^2) [1 - \omega_p^2/\omega(\omega \pm \omega_{He})], \quad (1.5)$$

где  $\omega_{He} = eB/m$ .

Уравнение (1.5) описывает две волны круговой поляризации с противоположными направлениями вращения векторов электрических полей. Эти волны называют циклотронными, их частным случаем являются вистлеры, для которых  $\omega \ll \omega_{He}$ ,  $\omega_p$  (в физике твердого тела эти волны называют геликонами). Когда  $\omega \approx \omega_{He}$ , наблюдается циклотронный резонанс, при котором сильно возрастает затухание вследствие передачи энергии волн резонансным частицам плазмы.

В области частот, определяемой неравенством

$$\omega^2 \gg \omega_{He}\omega_{Hi}, \quad (1.6)$$

можно пренебречь движением ионов. Из тех областей, где это неравенство не выполняется, особый интерес представляет область распространения альфвеновских волн, которая задается соотношениями  $\omega \ll \omega_{Hi}$  и  $\omega_p^2 \gg \omega_{He}\omega_{Hi}$ . Альфвеновские волны удовлетворяют одному из дисперсионных уравнений

$$k^2 = (\omega^2/c^2) \omega_p^2/\omega_{He}\omega_{Hi} \quad (1.7)$$

или

$$k^2 = (\omega^2/c^2) \omega_p^2/\omega_{He}\omega_{Hi} \cos^2 \theta, \quad (1.8)$$

где  $\theta$  — угол между направлениями распространения волны и внешнего магнитного поля. Для альфвеновских волн характерно то, что компонента скорости частиц, перпендикулярная магнитному полю, одинакова у электронов и ионов.

**Поперечное распространение.** Когда волна распространяется под прямым углом к направлению постоянного магнитного поля, общее тензорное уравнение разбивается на два дисперсионных соотношения. Одно из них соответствует так называемой обыкновенной волне [1], вектор электрического поля которой параллелен направлению магнитного поля. Другое уравнение описывает необыкновенную волну, которая имеет продольную и поперечную (относительно направления распространения и магнитного поля) компоненты вектора электрического поля. Частным случаем необыкновенной волны является гибридная волна. Поперечная компонента электрического поля этой волны стремится к нулю, и при выполнении дисперсионного соотношения

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2 + k^2 u_e^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Hi}^2 + k^2 u_i^2 - \omega^2} = 0 \quad (1.9)$$

мы приходим к гибриднему резонансу.

Решения уравнения (1.9) существуют как в высокочастотной области, где движением ионов можно пренебречь, так и в области низких частот, где ионы играют существенную роль. В высокочастотной области имеет место верхнегибридный резонанс, который наблюдается на частоте

$$\omega_{UH}^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 u_e^2 + \omega_{He}^2, \quad (1.10)$$

тогда как частота нижнегибридного резонанса определяется соотношением

$$\omega^2 \approx \frac{\omega_{He}^2 \omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2 + k^2 u_e^2 + \omega_{He}^2} \left[ 1 + \frac{k^2 u_i^2}{(\omega_{LH}^0)^2} \right], \quad (1.11a)$$

где

$$(\omega_{LH}^0)^2 = \frac{|\omega_{He}\omega_{Hi}| \omega_{pe}^2}{\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2}, \quad (I.116)$$

причем  $k^2 u_e^2 \ll \omega_{pe}^2$ .

При записи (I.116) использовано равенство  $\omega_{pe}^2 \omega_{Hi} = \omega_{pi}^2 |\omega_{He}|$ .

Напомним, что параметры термоядерной плазмы обычно удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$\omega_{Hi}^2 \ll \omega_{pi}^2 \approx \omega_{LH} \approx \omega_{He}^2 \approx \omega_{pe}^2. \quad (I.12)$$

Отметим, кроме того, что кинетический вклад ионов в (I.11а) оказывается одинаковым в пределах как слабого, так и сильного магнитного поля, несмотря на то, что разложения общего дисперсионного соотношения в этих пределах совершенно различны [2]. Наконец, упомянем об интересных возможностях использования рассматриваемого резонанса в целях нагрева плазмы (см. список литературы к гл. 20).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Clemmow P. C., Dougherty J. P. *Electrodynamics of Particles and Plasmas*. Lond., Addison—Wesley, 1969.
2. Wilhelmsson H. — *Phys. Scripta*, 1976, v. 14, p. 60.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Ситенко А. Г. *Электромагнитные флуктуации в плазме*. Харьков, Изд-во харьковского ун-та, 1965.
- Boyd T. J. M., Sanderson J. J. *Plasma Dynamics*. N. Y., Nelson, 1969.
- Бекефи Дж. *Радиационные процессы в плазме*. Пер. с англ. М., Мир, 1971.
- Yeh K. C., Liu C. H. *Theory of Ionospheric Waves*. N. Y., Academic Press, 1972.
- Электродинамика плазмы*/А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин и др. М., Наука, 1974.
- Chen F. F. *Introduction to Plasma Physics*. N. Y., Plenum Press, 1974.
- Кролл Н. Трайвеллис А. *Основы физики плазмы*. Пер. с англ. М., Мир, 1975.
- Ишимару С. *Основные принципы физики плазмы*. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1975.

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

### ВЫВОД УРАВНЕНИЙ СВЯЗАННЫХ ВОЛН В РАМКАХ КИНЕТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ПЛАЗМЫ

Для иллюстрации метода получения уравнений связанных волн при кинетическом описании плазмы рассмотрим простейший случай взаимодействия трех продольных волн без учета столкновений (см. работу Stenflo L. — *Plasma Phys.*, 1970, v. 12, p. 509).

Исходным уравнением при кинетическом подходе служит бесстолкновительное уравнение Больцмана

$$\partial F/\partial t + v\partial F/\partial r + (q/m) E\partial F/\partial v = 0, \quad (II.1)$$

где  $F$  — функция распределения по скоростям. Предположим, что невозмущенная часть этой функции  $F_0$  однородна в пространстве, а направления распространения волн не обязательно совпадают. Обозначим  $f$  возмущенную часть

функции распределения, обусловленную наличием волн, и подставим суммарную величину

$$F = F_0 + f \quad (\text{II.2})$$

в уравнение (II.1), выполнив при этом преобразование Фурье по пространственным переменным. В результате получим

$$\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial t} - ikv \bar{f}_k + \frac{q}{m} \bar{E}_k \frac{\partial F_0}{\partial v} = -\frac{q}{m} \left( \bar{E} \frac{\partial f}{\partial v} \right)_k. \quad (\text{II.3})$$

Нелинейное слагаемое перенесено в правую часть этого уравнения.

Электрическое поле удовлетворяет уравнению Пуассона

$$-(q/m) ik \bar{E}_k = \omega_p^2 \bar{n}_k / N_0, \quad (\text{II.4})$$

где  $\bar{n}_k = \int \bar{f}_k dv$ ;  $q$  — заряд и  $N_0$  — невозмущенная плотность частиц.

Наконец, для дальнейшего потребуется еще функция линейного отклика

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{\omega_p^2}{N_0 k^2} \int dv \frac{k \partial F_0 / \partial v}{\omega - kv}. \quad (\text{II.5})$$

Напомним, что при вычислении интеграла в выражениях типа (II.5) следует использовать правило обхода Ландау.

Введем теперь величину

$$a = c \int \frac{\bar{f}_k}{\omega - kv} dv \quad (\text{II.6})$$

и вычислим производную по времени от этой величины:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = c \int \frac{\partial \bar{f}_k / \partial t}{\omega - kv} dv = c \int \frac{ikv \bar{f}_k - (q/m) \bar{E} \partial F_0 / \partial v}{\omega - kv} dv.$$

Прибавляя и вычитая слагаемое  $i\omega \bar{f}_k$  в числителе подынтегрального выражения, приходим к уравнению

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -icn + i\omega a - \frac{q}{m} c \int \frac{E \partial F_0 / \partial v}{\omega - kv} dv, \quad (\text{II.7})$$

где в силу продольности рассматриваемого волнового движения  $\mathbf{E} = \bar{E}(\mathbf{k}/k)$ . Используя дисперсионное уравнение  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0$  совместно с (II.4) и (II.5), видим, что

$$\partial a / \partial t = i\omega a, \quad (\text{II.8})$$

т. е. введенную здесь величину  $a$  действительно можно принять в качестве нормального колебания. С учетом нелинейного слагаемого из (II.3) уравнение для этой величины приобретает вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} - i\omega a = -\frac{qc}{m} \int \frac{(E \partial f / \partial v)_k}{\omega - kv} dv. \quad (\text{II.9})$$

Уравнение (II.9) составляет основу для рассмотрения взаимодействия трех волн, удовлетворяющих резонансным условиям

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (\text{II.10a})$$

и

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2. \quad (\text{II.10b})$$

Например, для волны 0 имеем

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} - i\omega_0 a_0 = -\frac{qc}{m} \int \frac{E_1 \partial \bar{f}_2 / \partial v + E_2 \partial \bar{f}_1 / \partial v}{\omega_0 - k_0 v} dv, \quad (\text{II.11})$$

где  $\bar{E}_1 = \bar{E}_{\mathbf{k}_1}$ ;  $\bar{f}_1 = \bar{f}_{\mathbf{k}_1}$  и т. д. Выполним интегрирование по частям в правой

части (II.11):

$$\int \frac{\mathbf{E}_2 \partial \bar{f}_1 / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} d\mathbf{v} = -\mathbf{k} \bar{\mathbf{E}}_2 \int \frac{\bar{f}_1 d\mathbf{v}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \quad (\text{II.12})$$

и подставим в это соотношение линейное выражение

$$\bar{f}_k = i \frac{q}{m} \frac{\bar{\mathbf{E}}_k \partial F_0 / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}, \quad (\text{II.13})$$

которое вытекает из линеаризованного уравнения (II.3) в предположении гармонической временной зависимости. В результате получим

$$\int \frac{\bar{\mathbf{E}}_2 \partial \bar{f}_1 / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} d\mathbf{v} \approx -\frac{iq}{m} \mathbf{k} \mathbf{E}_2 \int \frac{\bar{\mathbf{E}}_1 \partial F_0 / \partial \mathbf{v}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 (\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v})} d\mathbf{v}. \quad (\text{II.14})$$

Справедливо также соотношение вида (II.14) с перестановкой индексов 1 и 2.

Введем продольное поле

$$\bar{E}_j = (\mathbf{k}_j / k_j) \bar{E}_j \quad (\text{II.15})$$

и диэлектрическую проницаемость второго порядка

$$\epsilon^{(2)} = \frac{q}{2m} \frac{\omega_p^2}{N_0 k_0^2} \int \frac{d\mathbf{v}}{(\omega_0 - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_0)^2} \left[ \frac{(\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_1 \partial F_0 / \partial \mathbf{v}}{\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v}} + \frac{(\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_2 \partial F_0 / \partial \mathbf{v}}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v}} \right]. \quad (\text{II.16})$$

Подстановка (II.14)–(II.16) в (II.11) приводит к уравнению

$$\partial a_0 / \partial t - i\omega_0 a_0 = (2i\epsilon_0 c k_0^2 \epsilon^{(2)} / q k_1 k_2) \bar{E}_1 \bar{E}_2. \quad (\text{II.17})$$

Дальнейшее преобразование этого уравнения выполним с помощью соотношений, вытекающих из (II.6) и (II.13):

$$a \approx \frac{iq}{m} c \int \frac{\bar{\mathbf{E}}_k \partial F_0 / \partial \mathbf{v}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} d\mathbf{v},$$

а также из (II.5):

$$\omega \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \bar{\mathbf{E}}_k = -\frac{\omega_p^2 \omega}{N_0 k} \int \frac{\bar{\mathbf{E}}_k \partial F_0 / \partial \mathbf{v}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} d\mathbf{v}.$$

Определяя  $c$  в виде  $c = iq\omega / \epsilon_0 k$ , находим

$$a = \omega (\partial \epsilon / \partial \omega) \bar{\mathbf{E}}_k, \quad (\text{II.18})$$

что представляет собой не что иное, как линейное соотношение между  $a$  и  $E$ , введенное в гл. 5.

Для получения стандартной формы уравнений связанных волн остается переписать правую часть (II.17) с учетом (II.18). Результирующее уравнение принимает вид

$$\partial a_0 / \partial t - i\omega_0 a_0 = c_{12} a_1 a_2, \quad (\text{II.19})$$

где

$$c_{12} = -\frac{2k_0 \omega_0}{k_1 k_2} \frac{\epsilon^{(2)}}{\omega_1 (\partial \epsilon / \partial \omega_1) \omega_2 \partial \epsilon / \partial \omega_2}. \quad (\text{II.20})$$

Аналогично можно вывести два других уравнения с коэффициентами

$$c_{02} = \frac{2k_0 \omega_1}{k_1 k_2} \frac{\epsilon^{(2)}}{\omega_0 (\partial \epsilon / \partial \omega_0) \omega_2 \partial \epsilon / \partial \omega_2}$$

и

$$c_{01} = \frac{2k_0 \omega_2}{k_1 k_2} \frac{\epsilon^{(2)}}{\omega_0 (\partial \epsilon / \partial \omega_0) \omega_1 \partial \epsilon / \partial \omega_1}.$$

Отметим в заключение, что, в отличие от гл. 2, мы использовали здесь соотношения вида

$$f = \sum_{\mathbf{k}} \bar{f}_{\mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{k}r) + \bar{f}_{\mathbf{k}}^* \exp(i\mathbf{k}r),$$

что эквивалентно иной нормировке динамических переменных и приводит к появлению дополнительного множителя 2 в выражениях для коэффициентов связи. Такая нормировка была использована в гл. 6 и 15.

### ПРИЛОЖЕНИЕ III

#### ВЫВОД УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ МОДУЛЯЦИОННУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Будем исходить из гидродинамических уравнений движения в одномерной системе:

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_{\alpha} v_{\alpha}) = 0; \quad (\text{III.1a})$$

$$\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial t} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E - \frac{\gamma_{\alpha} T_{\alpha}}{m_{\alpha} n_{\alpha}} \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial x} - v_{\alpha} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x}; \quad (\text{III.1б})$$

$$\epsilon_0 \partial E / \partial x = -e (n_e - n_i). \quad (\text{III.1в})$$

Индекс  $\alpha$  указывает сорт частиц (в дальнейшем вместо  $m_e$  и  $m_i$  будем писать  $m$  и  $M$  соответственно). Температура  $T$  выражается в энергетических единицах.

Представим плотности ионов  $n_i$  и электронов  $n_e$  в виде следующих сумм:

$$n_i = N_0 + \delta n; \quad n_e = N_0 + \delta n + \delta n_e,$$

где  $N_0$  — невозмущенная плотность плазмы;  $\delta n$  — низкочастотная модуляция плотности;  $\delta n_e$  — высокочастотные осцилляции электронной плотности. Будем рассматривать динамику высокочастотных и низкочастотных компонент по отдельности, предполагая при этом, что высокочастотное электрическое поле колеблется с частотой, близкой к плазменной частоте  $\omega_{pe}$ . Для временных масштабов, соответствующих этим колебаниям, эволюция системы описывается уравнениями:

$$\delta \delta n_e / \partial t + (\partial / \partial x) [(N_0 + \delta n) v_e] = 0; \quad (\text{III.2a})$$

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} = -\frac{e}{m} E - \frac{3T_e}{m(N_0 + \delta n)} \frac{\partial \delta n_e}{\partial x}; \quad (\text{III.2б})$$

$$\epsilon_0 \partial E / \partial x = -e \delta n_e. \quad (\text{III.2в})$$

При записи уравнения для высокочастотной компоненты мы пренебрегли наличием низкочастотной компоненты скорости  $v_e$ , которая в комбинации с высокочастотной компонентой может давать дополнительный вклад.

В результате дифференцирования уравнений (III.2a) и (III.2б) получим

$$\begin{aligned} \partial^2 \delta n_e / \partial t^2 + (\partial / \partial x) [(N_0 + \delta n) \partial v_e / \partial t] &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_e}{\partial t} &= -\frac{e}{m} \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{3T_e}{m(N_0 + \delta n)} \frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

При записи второго из этих уравнений учтено, что в адиабатическом приближении для электронов  $\gamma_e = 3$ . Комбинируя полученные уравнения, имеем

$$\frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} - (N_0 + \delta n) \left[ \frac{e}{m} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{3T_e}{m(N_0 + \delta n)} \frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial x^2} \right]. \quad (\text{III.3})$$

Кроме того, на основе (III.2в) получим следующее уравнение для электрического поля:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 \left( 1 + \frac{\delta n}{N_0} \right) E - 3v_{Te}^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right] = 0,$$

где  $v_{Te}^2 = T_e/m$ .

Представим далее электрическое поле в виде

$$E = \frac{1}{2} \bar{E}_0(t) \exp(-i\omega_{pe}t) + \text{к. с.}$$

и воспользуемся приближенным равенством

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \approx -\frac{1}{2} \left[ 2i\omega_{pe} \frac{\partial \bar{E}_0}{\partial t} + \omega_{pe}^2 \bar{E}_0 \right] \exp(-i\omega_{pe}t) + \text{к. с.},$$

пренебрегая второй производной  $E_0$  по времени. Тогда получим следующее уравнение для поля  $\bar{E}_0(t)$ :

$$i\omega_{pe} \frac{\partial \bar{E}_0}{\partial t} + \frac{3}{2} v_{Te}^2 \frac{\partial^2 \bar{E}_0}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \omega_{pe}^2 \frac{\delta n}{N_0} \bar{E}_0. \quad (\text{III.4})$$

Это уравнение описывает захват пакетов плазменных волн областями пониженной плотности плазмы.

С другой стороны, при временных масштабах, характерных для ионного движения, уравнение движения для электронов можно записать в виде

$$\frac{e}{m} E_s = -\frac{T_e}{m(N_0 + \delta n)} \frac{\partial \delta n}{\partial x} - v_e \frac{\partial v_e}{\partial x}. \quad (\text{III.5})$$

Здесь под  $E_s$  подразумевается низкочастотная компонента поля, а слагаемым  $\partial v_e / \partial t$ , т. е. инерцией электронов, пренебрегают, причем электроны считаются изотермическими ( $\gamma_e = 1$ ). Динамика ионов описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(N_0 + \delta n) v_i] &= 0; \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{e}{M} E_s - \frac{3T_i}{M(N_0 + \delta n)} \frac{\partial \delta n}{\partial x}. \end{aligned}$$

Слагаемое  $v_i \partial v_i / \partial x$  здесь отброшено, и ионы считаются адиабатическими, т. е.  $\gamma_i = 3$ . В результате дифференцирования по времени получим

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ v_i \frac{\partial \delta n}{\partial t} + (N_0 + \delta n) \left( \frac{e}{m} E_s - \frac{3T_i}{M(N_0 + \delta n)} \frac{\partial \delta n}{\partial x} \right) \right] = 0.$$

Опустим далее слагаемое  $(\partial/\partial x)(v_i \partial \delta n / \partial t)$  и предположим, что  $\delta n \ll N_0$ . Исключив еще  $E_s$  с помощью (III.5), придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - \frac{(T_e + 3T_i)}{M} \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} = \frac{Nm}{M} \frac{\partial}{\partial x} \left( v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} \right). \quad (\text{III.6})$$

В правой части этого уравнения фигурирует низкочастотная компонента, которая играет роль пондеромоторной силы, вызывающей модуляции плотности за характерное для ионов время. Эту компоненту можно выделить в результате следующей процедуры усреднения:

$$\langle v_e \partial v_e / \partial x \rangle = (1/2) (\partial/\partial x) \langle v_e^2 \rangle = (1/4) (\partial/\partial x) |\bar{v}_e|^2,$$

где  $|\bar{v}_e|$  — амплитудное значение  $v_e$ . Учитывая, что  $\partial v_e / \partial t \approx -(e/m)E$ , имеем

$$|\bar{v}_e|^2 = \frac{e^2}{\omega_{pe}^2 m^2} |\bar{E}_0|^2$$

и, следовательно,

$$\langle v_e \delta v_e / \partial x \rangle = (1/4) (e_0 / m N_0) \partial |\bar{E}_0|^2 / \partial x.$$

Остается еще вспомнить выражение для скорости ионно-звуковых колебаний  $c_s = [(T_e + 3T_i) / M]^{1/2}$ , чтобы придать (III.6) следующую окончательную форму:

$$\partial^2 \delta n / \partial t^2 - c_s^2 \partial^2 \delta n / \partial x^2 = (e_0 / 4M) \partial^2 |\bar{E}_0|^2 / \partial x^2. \quad (\text{III.7})$$

Это уравнение описывает модуляции плотности плазмы, а в совокупности с (III.4) образует самосогласованную систему уравнений, достаточную для рассмотрения модуляционной неустойчивости. Обобщение этой системы на трехмерный случай очевидно: для этого достаточно заменить производную  $\partial / \partial x$  оператором  $\nabla$  и скалярное поле векторным полем  $\bar{E}$ . В результате получим систему (19.3).

Как видно, к модуляционной неустойчивости приводит наличие действующей на электроны ponderomotorной силы (аналогичной силой, действующей на ионы, можно пренебречь). Они вызывают медленную модуляцию плотности электронов, которой затем подвергаются и ионы из-за появления амбиполярных сил.

Следует отметить, что в приведенном здесь выводе не учтены нелинейности высшего порядка. Тем не менее можно полагать, что полученные уравнения правильно описывают модуляционную неустойчивость в большинстве практически интересных случаев.

## ПРИЛОЖЕНИЕ IV

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Основная проблема теории слабых нелинейностей — возмущение гармонического осциллятора внешней (нелинейной) силой. Эта проблема была предметом исследования множества работ по теоретической и математической физике [1—24]. Недостатком обычной теории возмущений является наличие секулярностей, которые можно устранить лишь при учете вкладов всех порядков. Несекулярные методы теории возмущений были впервые развиты в связи с задачами небесной механики [1—3]. Позднее эти методы нашли широкое применение в теории нелинейного распространения волн.

Для получения приближенных решений, свободных от расходимостей, был предложен ряд специальных процедур устранения секулярных вкладов. Так, в исторически первой работе [1] проводилось разложение в ряд как зависимых, так и независимых переменных, и секулярности устранялись с помощью дополнительных степеней свободы, связанных с разложениями независимых переменных.

Выбирая время в качестве независимой переменной и учитывая слабость нелинейности, разумно ввести в рассмотрение временные вариации, медленные по сравнению с линейными гармоническими колебаниями. Таким образом, возникают два временных масштаба, один из которых (соответствующий быстрым колебаниям) должен быть исключен. В методе Пуанкаре [2] это осуществляется подходящим выбором канонических преобразований при использовании гамильтонова формализма описания недиссипативных систем. Аналогичный метод применяется в работе [3]. В методе Боголюбова—Крылова—Митропольского (БКМ) [4, 5] система не считается консервативной и короткий временной масштаб исключается с помощью специальной техники усреднения. Этот метод получил дальнейшее развитие в работах [6, 7]. В работе [8] предложен новый итерационный метод для консервативных систем, а в [9] указана интересная возможность использования квантовомеханических когерентных состояний.

Если условие слабой нелинейности не выполняется, то проблема резко усложняется, и для этого случая какие-либо общие методы решения еще не разработаны. Следует, однако, упомянуть модель пробных волн [10], в которой

параметром разложения служит напряженность поля, и метод разложения по возвратным временам Пуанкаре [11].

В нелинейных плазменных исследованиях также уделяется большое внимание разработке несекулярных методов теории возмущений. В работе [12] развит гамильтонов формализм для трех взаимодействующих волн. Из многочисленных приложений метода БКМ [13—17] отметим теорию эффектов высшего порядка [13], анализ систем с несколькими быстрыми фазами [14] и обобщение теории на случай возмущения нелинейного осциллятора [15]. Один из вариантов метода БКМ использован в работе [17] при общем рассмотрении резонансов и устойчивости нелинейных консервативных систем. Метод многовременных приближений нашел применение также при анализе нелинейных эффектов в слабо-диссипативной среде [18].

Для системы связанных нелинейных уравнений с несколькими переменными возникает проблема сокращения числа переменных. Один из способов разрешения этой проблемы — применение метода нормальных колебаний (см. гл. 3). Другие приемы рассмотрены в работах [19—21], где выводятся модельные уравнения, в которых учтены нелинейность, дисперсия и диссипация. К нелинейным модельным уравнениям такого же типа приводит рассмотрение проблемы возбуждения ударных волн и солитонов [22]. Следует упомянуть также работу [23], посвященную математической стороне проблемы нелинейных волн в холодной плазме.

В связи с тем что аналитическое решение нелинейных дифференциальных уравнений представляет собой трудную задачу, часто приходится прибегать к использованию численных методов. Однако в последнее время наметился значительный прогресс в этой области. Именно, было показано существование весьма широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений, решаемых методом обратной задачи рассеяния [24—31].

В заключение отметим серию обзорных статей [32], в которых можно найти достаточно полные сведения по уравнениям, описывающим нелинейную эволюцию, методам редукции в теории возмущений и приложениям метода обратной задачи рассеяния (см. также [33]).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lindstedt A. Ueber die Integration einer für die Störungstheorie wichtigen Differentialgleichung. — *Astron. Nachr.*, 1882, v. 103, p. 211.
2. Poincaré H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Paris, Gauthier—Villars, 1892.
3. Von Zeipel H. *Recherches sur le Mouvement des Petites Planètes*. — *Arkiv. mat. astron. fys.*, 1916, v. 11, p. 1.
4. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. *Введение в нелинейную механику*. Киев, Изд-во АН УССР, 1937.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М., Наука, 1974.
6. Frieman E. A. On a New Method in the Theory of Irreversible Processes. — *J. Math. Phys.*, 1963, v. 4, p. 410.
7. Sandri G. The Foundations of Nonequilibrium Statistical Mechanics. — *Ann. Phys.*, 1963, v. 24, p. 332; *Nuovo cimento*, 1965, v. 36, p. 67.
8. Einaudi F. On the Convergence of an Iterative Method for Studying Nonlinear Oscillations without Damping. — *SIAM J. Appl. Math.*, 1975, v. 29, p. 1.
9. Bhaumik K., Dutta-Roy B. The Classical Nonlinear Oscillator and the Coherent State. — *J. Math. Phys.*, 1975, v. 16, p. 1131.
10. Dupree T. H. A Perturbation Theory for Strong Plasma Turbulence. — *Phys. Fluids*, 1966, v. 9, p. 1773.
11. Eminhizer C. R., Helleman R. H. G., Montroll E. W. On a Convergent Nonlinear Perturbation Theory without Small Denominators or Secular Terms. — *J. Math. Phys.*, 1976, v. 7, p. 121.
12. Siegman A. E. Obtaining the Equations of Motion for Parametrically Coupled Oscillators or Waves. — *Proc. IEEE*, 1966, v. 54, p. 756.
13. Musen P. On the High Order Effects in the Methods of Krylov—Bogoliubov and Poincaré. — *J. Astron. Sci.*, 1975, v. 12, p. 129.



14. Coffey T., Ford G. W. Nonlinear Perturbations. — J. Math. Phys., 1969, v. 10, p. 998.
15. Cap F. Averaging Method for the Solution of Nonlinear Differential Equations with Periodic Nonharmonic Solutions. Preprint Z-640-71396. Goddard Space Flight Center, Greenbelt, 1971.
16. Kakutani T., Sugimoto N. Krylov—Bogoliubov—Mitropolsky Method for Nonlinear Wave Modulation. — Phys. Fluids, 1974, v. 17, p. 1617.
17. Dysthe K. B., Gudmestad O. T. On Resonance and Stability of Conservative Systems. Report 01-74. The Auroral Observatory, Tromsø, Norway, 1974.
18. Jancel R. Theoretical Method for the Analysis of Nonlinear Effects in Weakly Dissipative Media. — Phys. Rev., 1975, v. A12, p. 1662.
19. Taniuti T., Yajima N. Perturbation Method for a Nonlinear Wave Modulation. I. — J. Math. Phys., 1969, v. 10, p. 1369.
20. Asano N., Taniuti T., Yajima N. Perturbation Method for a Nonlinear Wave Modulation. II. — Ibid., p. 2020.
21. Taniuti T., Wei C. C. Reductive Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation. — J. Phys. Soc. Jap., 1968, v. 24, p. 941.
22. Ott E., Manheimer M., Book D. L., Boris J. P. Model Equations for Mode Coupling Saturation in Unstable Plasmas. — Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 855.
23. Chian A. C. L., Clemmow P. C. Nonlinear Periodic Waves in a Cold Plasma: a Quantitative Analysis. — J. Plasma Phys., 1975, v. 14, p. 505.
24. Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation. — Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1095.
25. Lax P. D. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves. — Comm. Pure Appl. Math., 1968, v. 21, p. 467.
26. Miura R. M. Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. I. A Remarkable Explicit Nonlinear Transformation. — J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 1202.
27. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1971, т. 61, с. 118.
28. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur M. Nonlinear Evolution Equations of Physical Significance. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 125.
29. Kodama Y. Complete Integrability of Nonlinear Evolution Equations. — Progr. Theor. Phys., 1975, v. 54, p. 669.
30. Chu F. Y. F., Scott A. C. Inverse Scattering Transform for Wave-Wave Scattering. — Phys. Rev., 1975, v. A12, p. 2060.
31. Chu F. Y. F. Backlund Transformation for the Wave-Wave Scattering Equations. — Ibid., p. 2065.
32. Reductive Perturbation Method for Nonlinear Wave Propagation. — Suppl. Progr. Theor. Phys., 1974, v. 55, p. 1.
33. Exact Treatment of Nonlinear Lattice Waves. — Ibid., 1976, v. 59, p. 1.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

2.1. Если некоторая волна характеризуется большим коэффициентом затухания, то ее амплитуда на начальной стадии процесса уменьшается. Одновременно уменьшается затухание. В конечном счете оно становится меньше, чем параметрическое усиление, и в результате развивается параметрическая неустойчивость.

2.2.

а)

$$n_1, n_2 \sim \exp[-bt + n_0(0) \sqrt{c_1 c_2} (1/\nu) (\exp(\nu t) - 1)];$$

б)

$$n_1, n_2 \sim \exp\{-bt + n_0(0) \sqrt{c_1 c_2} [t_{\infty}/(\rho - 1)] \{[(1 - t/t_{\infty})^{\rho-1}]^{-1} - 1\}\}.$$

2.3.

$$n_1 = \sqrt{c_1 [(1/c_0) n_0^2(0) + (1/c_1) n_1^2(0)]}.$$

2.4. а) Инкремент выходит на уровень насыщения, составляющий —  $d/c$ .  
 б) При  $\tau > 0$  инкремент первоначально осциллирует в окрестности точки —  $d/c$ . Эти осцилляции, однако, носят неустойчивый характер, так как по мере увеличения амплитуды уменьшается характеристическое время нарастания для ненасыщенной системы. Когда это время становится меньше  $\tau$ , механизм насыщения утрачивает эффективность и в системе развивается взрывная неустойчивость.

3.1.

$$a = \bar{E} - i \frac{m}{e} \frac{\omega_p^2 \omega}{\omega^2 - k^2 u_p^2} \bar{v}_p - i \frac{m}{e} \frac{\omega_b^2 \omega}{(\omega - kV_b)^2 - k^2 u_b^2} \bar{v}_b - \\ - i \frac{e}{\varepsilon_0} \frac{k u_p^2}{\omega^2 - k^2 u_p^2} \bar{n}_p - i \frac{e}{\varepsilon_0} \frac{(\omega - kV_b) V_b + k u_b^2}{(\omega - kV_b)^2 - k^2 u_b^2}.$$

4.1.

$$(1/2) \omega \varepsilon_0 \operatorname{Im} \varepsilon \bar{E} \bar{E}^*.$$

4.2.

$$S = (1/4) [\partial D(\omega, k) / \partial k] \bar{E} \bar{E}^*.$$

5.1. Мнимые числа.

5.2. При выводе амплитуды нормального колебания  $a$  коэффициенты подбирают так, чтобы в выражении  $\partial a / \partial t - i \omega a$  коэффициенты при всех полевых величинах обращались в нуль. Поэтому нормальные волны имеют частоту  $\omega$  независимо от изменения полевых величин.

5.3.

$$\sigma^{(2)} = \frac{\varepsilon_0 e}{m} \omega_p^2 \omega \frac{k \omega_1 \omega_2 + k_1 \omega \omega_2 + k_2 \omega \omega_1}{\omega^2 \omega_1^2 \omega_2^2}.$$

5.4.

$$\frac{\partial A^{(2)}}{\partial t} - \frac{i}{\omega_0 - \omega_1} \frac{\partial^2 A^{(2)}}{\partial t^2} = \text{N.L.}$$

5.5.

$$\partial \langle W \rangle / \partial t = (\varepsilon_0 / 4) (\bar{E}^* \partial A / \partial t + \bar{E} \partial A^* / \partial t); \\ \langle W \rangle = (\varepsilon_0 / 8) (\bar{E} A^* + \bar{E}^* A).$$

5.6.

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + i \frac{D(\omega_r)}{(\partial D / \partial \omega)_{\omega=\omega_r}} \bar{E} = \frac{1}{(\partial D / \partial \omega)_{\omega=\omega_r}} \text{N.L.}$$

6.2.

$$a_{\pm} = \left\{ 2 \mp \sum_{\sigma} \frac{\omega_{H\sigma} \omega_{p\sigma}^2}{\omega_{\pm} (\omega_{\pm} - kV_{d\sigma} \pm \omega_{H\sigma})} \right\} \bar{E}_{\pm}$$

или в другой записи

$$a_{\pm} = (1/\omega) (\partial / \partial \omega) (\omega^2 \varepsilon_T) \bar{E}_{\pm}.$$

7.1.

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} \approx - \frac{\varepsilon_0^2}{2} \sum_j \frac{\nu_j A_j A_j^*}{\partial D_j / \partial \omega_j}.$$

7.2.

$$W_0/\omega_0 + W_1/\omega_1 = M_{01}; \quad W_1/\omega_1 - W_2/\omega_2 = M_{12}.$$

8.1.

При  $kV_b - \omega_{pb} \gg \omega_p$ .

8.2.

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - kV_b)(\omega - kV_b - iv)}.$$

8.3.

$$\varphi = \pm \operatorname{tg}^{-1} \left( v / \sqrt{4\omega_p^2 - v^2} \right).$$

8.4.

$$\cos \varphi < - (1/2) N_0 v_0 / V_b n_0.$$

8.5. Нет.

9.1. При  $u_1^2(0) = u_2^2(0)$  (ср. с рис. 1.3).

9.2. Энергия связи.

9.3.

$$u_j(t) = \frac{\exp(-vt)}{1/u_j(0) - (1/v) [1 - \exp(-vt)]}.$$

9.4.

а)

$$\pi(u_0^2) = -2 [u_0^2 (M_{01} - u_0^2) (M_{02} - u_0^2) - \Gamma^2];$$

б)

$$k = [(a_2 - a_3)/(a_1 - a_3)]^{1/2}.$$

10.1. Нет. Если какая-либо из амплитуд уменьшается в среднем быстрее других, то слагаемое в уравнении динамики фаз, содержащее эту амплитуду в знаменателе, становится доминирующим. Тогда фаза  $\Phi$  изменится так, чтобы абсолютное значение этого слагаемого стало меньше. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока рассматриваемая амплитуда снова не начнет нарастать.

10.2.

$$u_j(t) = u_j(0) [1 - \exp(-vt_\infty)] / \{1 - \exp[-v(t_\infty - t)]\},$$

где

$$u_j(0) [\cos(\Phi + \theta_{ij}) \cos(\Phi + \theta_{jk})]^{1/2} = \\ = u_k(0) [\cos(\Phi + \theta_{jk}) \cos(\Phi + \theta_{kl})]^{1/2}, \quad j, k, l = 0, 1, 2,$$

и

$$t_\infty = -\frac{1}{v} \operatorname{In} \left\{ 1 - \frac{v}{u_j(0) [\cos(\Phi + \theta_{ij}) \cos(\Phi + \theta_{jk})]^{1/2}} \right\}.$$

11.1. а). Нет.

б) Да. В рассматриваемом случае  $\sigma(t) = v_2 u_2 / (u_0 + u_1 + u_2)$ , т. е. может принимать очень малые значения (что соответствует неустойчивой системе), если только комбинированная скорость затухания мала. Последнее имеет место вблизи порога стабилизации неустойчивости, где  $t_\infty$  очень велико. Полезно заметить в связи с этим, что время нарастания взрывной неустойчивости в системе без затухания может быть конечным, если одна из начальных амплитуд стремится к нулю.

12.1. Сильно возбужденная затухающая волна отвечает величине  $dy/dt$ . Если  $dy/dt$  на начальной стадии процесса велико, то маятник совершает вращательное движение и, следовательно, имеет постоянную амплитуду колебаний. Однако из-за наличия затухания его кинетическая энергия постепенно умень-

шается, и спустя некоторое время она будет близка к нулю вблизи верхней точки. Это время соответствует времени перехода. По истечении его маятник колеблется с убывающей амплитудой. При  $\Gamma \neq 0$  маятник первоначально не вращается, а колеблется с постоянной амплитудой.

13.1. а) Продольные волны будут неустойчивыми. По мере нарастания их амплитуд влияние поперечных волн становится пренебрежимо малым.

б) Нет. Колебание типа  $2L$  практически не зависит от поперечных волн, тогда как для последних  $u_{0T}^2 + u_{1T}^2 = M_2$ , где  $M_2$  определяется из начальных условий. Следовательно, перекачка энергии колебания  $2L$  в энергию колебаний  $0T$  и  $1T$  невозможна.

14.1. В (7.11) слагаемое, связанное с наличием расстройки, имеет меньшую степень относительно амплитуд волн, чем слагаемое  $u_0 u_1 u_2 \sin \Phi$ , и поэтому оно играет доминирующую роль при малых амплитудах, определяя, в частности, порог взаимодействия. В (14.11) аналогичное слагаемое имеет, наоборот, более высокую степень. Следовательно, оно доминирует при больших амплитудах и определяет, в частности, максимальный для данного взаимодействия уровень амплитуд.

14.2. Как и ранее,  $\Gamma^2$  соответствует энергия связи частиц, осциллирующих в потенциальной яме  $\pi(x)$  (ср. с задачей 9.2).

15.1. Две.

15.2.  $u_2$ .

16.1.

$$k_2 = - (1/V_b) \left( \sqrt{\omega_p^2 - v^2/4} - 2 \sqrt{\omega_{pb}^2 - v^2/4} \right).$$

16.2.

$$a = \bar{E} - i \frac{m}{e} \frac{\omega_p^2}{\omega - iv} \bar{v}_p - i \frac{eV_b}{\varepsilon_0 (\omega - kV_b)} \bar{n} - i \frac{m}{e} \frac{\omega_{pb}^2 \omega}{(\omega - kV_b) (\omega - kV_b - iv)} \bar{v}_b;$$

$$a = \left[ 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega - iv)^2} + \frac{\omega_{pb}^2 kV_b}{(\omega - kV_b)^2 (\omega - kV_b - iv)} + \frac{\omega_{pb}^2 \omega}{(\omega - kV_b) (\omega - kV_b - iv)^2} \right] \bar{E}.$$

16.3. Коэффициенты связи имеют вид

$$c_{12} = - \frac{c_0}{\omega_1 (\partial \varepsilon / \partial \omega_1) \omega_2 \partial \varepsilon / \partial \omega_2};$$

$$c_{02} = \frac{c_1}{\omega_0 (\partial \varepsilon / \partial \omega_0) \omega_2^* \partial \varepsilon^* / \partial \omega_2};$$

$$c_{01} = \frac{c_2}{\omega_0 (\partial \varepsilon / \partial \omega_0) \omega_1^* \partial \varepsilon^* / \partial \omega_1},$$

где

$$c_0 = \frac{e\omega_0}{m} \left\{ \omega_{pb}^2 [k_0 (\omega_1 - k_1 V_b) (\omega_2 - k_2 V_b) + k_1 (\omega_0 - k_0 V_b) (\omega_2 - k_2 V_b) + \right. \\ \left. + k_2 (\omega_0 - k_0 V_b) (\omega_1 - k_1 V_b) - iv [k_1 (\omega_2 - k_2 V_b) + k_2 (\omega_1 - k_1 V_b)]] \times \right. \\ \left. \times [(\omega_0 - k_0 V_b) (\omega_1 - k_1 V_b) (\omega_2 - k_2 V_b) (\omega_0 - k_0 V_b - iv) (\omega_1 - k_1 V_b - iv)] \times \right. \\ \left. \times (\omega_2 - k_2 V_b - iv)^{-1} + \omega_p^2 [k_0 \omega_1 \omega_2 + k_2 \omega_0 \omega_1 + k_1 \omega_0 \omega_2 - iv (k_1 \omega_2 + \right. \\ \left. + k_2 \omega_1)] [\omega_0 \omega_1 (\omega_0 - iv) (\omega_1 - iv) (\omega_2 - iv)]^{-1} \right\};$$

$$c_i = \frac{e\omega_j}{m} \left\{ \omega_{pb}^2 [k_0 (\omega_1^* - k_1 V_b) (\omega_j - k_j V_b) + k_j (\omega_0 - k_0 V_b) (\omega_1^* - k_1 V_b) + k_1 (\omega_0 - \right. \\ \left. - k_0 V_b) (\omega_j - k_j V_b) - iv [k_0 (\omega_1^* - k_1 V_b) + k_1 (\omega_0 - k_0 V_b)]] [(\omega_0 - k_0 V_b) (\omega_j - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -k_j V_b) (\omega_1^* - k_1 V_b) (\omega_0 - k_0 V_b - i\nu) (\omega_j - k_j V_b - i\nu) (\omega_1^* - k_1 V_b + i\nu)]^{-1} + \\
 & + \omega_p^2 [k_0 \omega_j \omega_1^* + k_1 \omega_0 \omega_j + k_j \omega_0 \omega_1^* - i\nu (k_0 \omega_1^* + k_1 \omega_0)] [\omega_0 \omega_j \omega_1^* (\omega_0 - i\nu) (\omega_j - \\
 & - i\nu) (\omega_1^* + i\nu)]^{-1}, \quad j, l = 1, 2,
 \end{aligned}$$

81

$$\begin{aligned}
 \omega_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_j} = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_j - i\nu)^2} + \frac{\omega_{pb}^2 k_j V_b}{(\omega_j - k_j V_b)^2 (\omega_j - k_j V_b - i\nu)} + \\
 + \frac{\omega_{pb}^2 \omega_j}{(\omega_j - k_j V_b) (\omega_j - k_j V_b - i\nu)^2}.
 \end{aligned}$$

17.1.  $\tilde{A} \ll \omega_0 / (\omega_0 - \omega_1) B$  [в обозначениях (17.9) и задачи 5.4].

20.1.

$$\begin{aligned}
 \omega_{LH}^2 = \frac{\omega_{He}^2 + k^2 u_e^2}{\omega_{pe}^2 + k^2 u_e^2 + \omega_{He}^2} \frac{m_e}{m_H} \frac{\omega_{pe}^2}{Z_i + \sum C_k Z_k} \left[ \frac{Z_i^2}{A_i} \left( 1 + \frac{k^2 u_i^2}{(\omega_{LH}^0)^2} \right) + \right. \\
 \left. + \sum \frac{C_k Z_k^2}{A_k} \left( 1 + \frac{k^2 u_k^2}{(\omega_{LH}^0)^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

20.2. В этом приближении примеси не будут оказывать никакого влияния, но при учете температурных эффектов и неполной ионизации тяжелых ионов такое влияние будет иметь место.

## АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аннигиляция 96  
Аномальное рассеяние 156  
Ансамбль фаз 13  
Асимптотическое разложение 78  
— решение 69, 112
- Вектор Умова—Пойнтинга 28  
Взаимодействие волна—волна 10, 15, 177  
— волна—частица 15, 177—181  
— волн перезонансное 177  
— параметрическое 14, 174, 188  
— плазма—пучок 188  
— продольных волн 41—43, 206  
— и поперечных волн 26, 42  
— турбулентное 153  
— четырехволновое 93, 160  
Вистлер 203  
Вынужденное рассеяние 14, 155—157  
— — комбинационное 14, 15, 158, 187, 190, 191  
— — комptonовское 14, 180  
— — Мандельштама—Бриллюэна 14, 15, 156, 168, 191  
Волны альфвеновские 161, 203  
— бнений 177, 179  
— верхнегибридные 15, 168, 171  
— высокочастотные 188, 189, 207  
— ионно-звуковые 156, 157, 160, 189  
— ионно-пучковые 188  
— квазимонохроматические 28, 30  
— ленгмюровские 24  
— накачки 189  
— необыкновенные 158, 203  
— нижнегибридные 168, 171—174, 203  
— низкочастотные 188  
— плазменные 118, 125, 157, 202  
— поперечные 23—25, 31, 36, 40—42  
— продольные 23, 31, 40, 54, 87  
— пучковые 127, 128  
— с нулевой энергией 119  
— отрицательной энергией 12, 56—60, 75, 87, 118, 199  
— — положительной энергией 74, 75  
— ударные 210  
— уединенные (солитоны) 196, 210  
— электромагнитные 23, 28, 87, 197—199, 202—204
- Волны электромагнитные обыкновенные 168, 171, 173, 203  
Время взаимодействия 10  
— — характеристическое 10, 63, 69, 141  
— взрыва 19, 65, 69, 102  
— когерентности 20, 140  
— отклика 29
- Гамильтониан 52, 55, 92, 101, 209, 210  
Гармонический осциллятор 210  
Гидродинамическая модель 40, 118—120  
Гидродинамические уравнения 24  
Глубина проникновения 192  
Граничные условия 157  
Групповая скорость 36, 198
- Дебаевское волновое число 157  
Динамический фазовый угол 53, 68  
Дисперсия 29, 90  
Дисперсионная функция плазмы 121  
Дисперсионные осцилляции 13, 131, 134—138  
Диссипация линейная 128, 168  
— нелинейная 94, 106, 117, 199  
Доплеровский сдвиг 41, 55, 73  
Дрейфовое движение 40
- Закон сохранения заряда 169  
— — импульса 55, 159  
— — числа квантов 159  
— — энергии 52, 54, 55, 147, 159  
Затухание бесстолкновительное 197  
— столкновительное 75, 127, 129  
— Ландау линейное 15, 37, 75, 127, 174  
— — нелинейное 15, 177—180  
— нелинейное эффективное 94, 117  
Захват плазмонов 158  
— частиц 192  
— электронов 191
- Излучение высокочастотное 14  
— лазерное 156, 190  
— мощное 155  
— электромагнитное 155  
Инверсная населенность 12, 87

- Инерциальное удержание 155  
 Интеграл столкновений 43, 120
- Кавитон** 155, 189, 198  
**Каноническое преобразование** 209  
**Колебания:**  
   ленгмюровские нелинейные 196  
   нормальные 25—27, 36, 44, 205, 210  
   общее определение 36  
   кинетическое описание 204  
   плазменные релятивистские 196  
**Коллапс** 92, 198  
**Конденсация плазмонов** 157, 198  
**Корреляция фаз** 139, 144  
**Критерий устойчивости** 53, 68  
**Кросс-модуляция** 196
- Лагранжиан** 44  
**Лазерный синтез** 14, 15, 155, 175, 189  
**Ленгмюровская турбулентность** 198  
**Локализация фаз** 61, 65, 110, 114  
**Люксембург-горьковский эффект** 196
- Маятник** 17  
 — пелинейный 83—86  
**Метод когерентных фаз** 10, 104  
 — Боголюбова — Крылова — Митропольского 85, 209  
 — обратной задачи рассеяния 210  
 — Пуанкаре 209  
 — связанных волн 11, 24, 36, 210  
**Модели столкновений** 125, 130  
**Молекулы с инверсной населенностью** 87
- Накачка** 157, 189  
 — импульсная 199  
**Насыщение** 20, 90  
**Небесная механика** 209  
**Некогерентное рассеяние** 188  
**Нелинейная оптика** 10, 61  
**Нелинейное дисперсионное соотношение** 35  
**Нелинейный сдвиг частоты** 13, 90, 94, 100, 105  
**Неопределенность фаз** 138, 146  
**Неустойчивость абсолютная** 157  
 — взрывная 10, 61—63, 86, 112, 129, 198  
 — двухпоточковая 119  
 — осцилляционная 157  
 — модуляционная 157, 159, 161, 198  
 — параметрическая 14, 17, 18, 188  
**Нормировка амплитуд** 53, 54
- Плазма:**  
   бесстолкновительная 23, 168, 177  
   ионосферная 196  
   космическая 198  
   лабораторная 190  
   лазерная 91, 148, 156, 190  
   магнитоактивная 14  
   неоднородная 157  
   разреженная 198  
   термоядерная 155, 168  
   холодная 122  
   — нагрев 160, 188  
   — турбулентность 15, 157, 160, 197  
**Плазмон** 158, 198  
**Плотность:**  
   критическая 157, 191  
   модуляция 157, 207, 208  
   — низкочастотная 158, 209, 210  
   профиль самосогласованный 192  
**Порог для взрывной неустойчивости** 70, 91, 128, 129  
 — — нелинейного взаимодействия 63, 144, 156, 168, 198  
 — — параметрической неустойчивости 18  
**Поляризация** 29, 40, 42  
 — круговая 42  
**Пондеромоторная сила** 158, 208  
**Приближение линейное** 23, 35, 37  
 — квазистатическое 158, 159  
 — случайных фаз 10, 135, 142  
**Примеси** 15, 168, 172, 174  
**Примесные ионы** 15, 168  
**Проблема народонаселения** 17, 21  
 — секularity 209  
**Проводимость второго порядка** 37  
 — третьего порядка 91, 93  
**Пространственно-временная корреляционная функция** 189  
**Процесс адиабатический** 44, 130, 207, 208  
 — изотермический 44, 130, 208  
**Пучок:**  
   релятивистский 189  
   — инжекция 197  
   — тепловая скорость 123—126, 128  
   частиц 160, 191
- Радиационное давление** 157, 158, 160  
**Рассеяние света на свете** 187  
**Резонансное поглощение** 198  
 — уширение 92  
**Резонансы Гонкса—Датнера** 187  
**Резонатор** 198  
**Рекombинация** 21  
**Ренормировка** 53, 158
- Самомодуляция** 189  
**Сдвиг волнового числа** 160  
**Система ионный пучок—плазма** 188  
 — отсчета 73  
 — пучок — плазма 13, 56, 92, 118—130, 189  
**Солитонов формирование** 157—160, 198

- Солитоны 196, 201  
 — ионно-звуковые 188  
 — ленгмюровские 198  
 Солнечный ветер 196  
 Соотношения Мэнли—Роу 52, 79,  
 132, 142, 144  
 — симметрии 41, 54, 102, 132  
 Состояние когерентное (квантово-  
 механическое) 209  
 — стационарное 157  
 — турбулентное 10, 198  
 Среда анизотропная 29  
 — диспергирующая 29, 35, 57  
 — изотропная 28  
 Статистический ансамбль 66
- Теория возмущений 23, 210  
 — связанных воли 23  
 Токн второго порядка 34  
 — высших порядков 33  
 — индуцированные 28, 34  
 — нелинейные 34, 35  
 — третьего порядка 91, 93  
 Точка отсчета 122  
 — плазменного резонанса 198  
 — резонансная 122
- Уравнение Больцмана 23, 121, 204  
 — Вольтерра 22  
 — Кортевега—де Вриза 196  
 — связанных волн 27, 52—54, 93—  
 96, 127—129, 143  
 — Шредингера нелинейное 160  
 Условие когерентности 140—142, 153  
 Уширение фаз 13, 148
- Фазовое пространство 66  
 Флуктуации в плазме 15, 197
- Флуктуационно-диссипативная тео-  
 рема 197  
 Фокусировка фаз 13, 148, 150  
 Функция:  
 дисперсионная 32, 36, 121, 131  
 диэлектрического отклика 197  
 распределения 40, 120  
 — максвелловская с дрейфом 121  
 эллиптическая 12, 61, 64, 80, 84,  
 98, 101—103  
 — модуль 63, 80
- Частичная когерентность 11, 13,  
 139—149  
 Частота ионная циклотронная 199  
 — столкновений 120, 124, 127, 178,  
 196  
 — — эффективная 188  
 — циклотронная 170  
 — электронная плазменная 24, 189
- Эволюция нелинейной системы 72, 77  
 Электрический диполь 29  
 Энергия волны 23—27, 54, 61, 73—  
 75, 79, 119  
 — взаимодействия эффективная 106,  
 134  
 — кинетическая 56, 158  
 — поля 28, 31, 35, 56—59  
 — потенциальная 159  
 — свободная 73  
 Эффекты дисперсионные 34, 37, 170  
 — — второго порядка 131—138  
 — — высших порядков 23, 56, 210  
 — стохастические 198  
 — фазовые 11, 20



## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие к русскому изданию . . . . .	3
Предисловие редактора английского издания . . . . .	6
Предисловие авторов к английскому изданию . . . . .	7
Предисловие авторов к русскому изданию . . . . .	8
Система единиц и обозначения . . . . .	9
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>10</b>
Список литературы . . . . .	16
<b>Глава 2. Простые примеры нелинейных явлений . . . . .</b>	<b>17</b>
Параметрическая неустойчивость . . . . .	17
Три изменяющиеся амплитуды . . . . .	18
Учет кубической нелинейности . . . . .	19
Задачи . . . . .	22
Список литературы . . . . .	22
<b>Глава 3. Теория связанных волн . . . . .</b>	<b>23</b>
Вывод уравнений связанных волн . . . . .	23
Задачи . . . . .	27
Список литературы . . . . .	28
Дополнительная литература . . . . .	28
<b>Глава 4. Энергия поля в диспергирующей среде . . . . .</b>	<b>28</b>
Общие выражения для энергии поля волны . . . . .	28
Энергия продольных и поперечных волн . . . . .	31
Задачи . . . . .	33
Рекомендуемая литература . . . . .	33
<b>Глава 5. Формулировка теории нелинейного взаимодействия волн в представлении нелинейных токов . . . . .</b>	<b>33</b>
Нелинейные уравнения поля и дисперсионные вклады выс- ших порядков . . . . .	34
Линейное затухание и неустойчивость . . . . .	37
Связанные уравнения для волн . . . . .	37
Задачи . . . . .	39
Список литературы . . . . .	39
Дополнительная литература . . . . .	39

<b>Глава 6. Трехволновое взаимодействие в плазме</b>	40
Гидродинамическое описание	40
Кинетическое описание	43
Обсуждение результатов	44
Задачи	44
Список литературы	45
Дополнительная литература	45
<b>Глава 7. Энергетические соотношения</b>	52
Задачи	56
Список литературы	56
Дополнительная литература	56
<b>Глава 8. Волны с отрицательной энергией</b>	56
Система плазма — пучок	56
Эффекты высшего порядка	58
Неконсервативные системы	59
Задачи	60
Список литературы	60
Дополнительная литература	60
<b>Глава 9. Решения уравнений связанных волн</b>	61
Метод нелинейного потенциала	61
Пространственно-временная эволюция	67
Задачи	67
Список литературы	68
Дополнительная литература	68
<b>Глава 10. Критерий устойчивости и асимптотическое поведение системы трех взаимодействующих волн</b>	68
Общие свойства решений системы уравнений связанных волн для стационарной среды	68
Решение для нестационарной среды	72
Преобразование инерциальных систем отсчета и проблема устойчивости трехволнового взаимодействия	73
Задачи	75
Список литературы	75
Дополнительная литература	75
<b>Глава 11. Нелинейное взаимодействие волн с различным затуханием при взрывной неустойчивости</b>	75
Приближенное решение для стационарной среды	76
Решение для нестационарной среды	77
Асимптотические разложения	78
Частные случаи	78
Задачи	78
Список литературы	78
Дополнительная литература	78

<b>Глава 12. Влияние затухания на взаимодействие волн с энергиями одного знака</b>	<b>79</b>
Решение для трех затухающих волн	79
Решение для одной затухающей волны	82
Задачи	87
Список литературы	87
<b>Глава 13. Взрывная неустойчивость системы двух электромагнитных и трех плазменных волн</b>	<b>87</b>
Уравнения движения	87
Интегралы движения и аналитические решения системы связанных уравнений	88
Задача	90
Список литературы	90
<b>Глава 14. Нелинейные эффекты третьего порядка и стабилизация взрывной неустойчивости</b>	<b>90</b>
Общая характеристика взаимодействия волн при учете нелинейных эффектов третьего порядка	91
Вывод связанных уравнений с учетом нелинейных токов третьего порядка	93
Решение для недиссипативной среды	95
Задачи	103
Список литературы	103
Дополнительная литература	103
<b>Глава 15. Роль затухания при учете нелинейных эффектов третьего порядка</b>	<b>104</b>
Приближенный учет линейного затухания	105
Коэффициенты связи второго порядка с различными фазовыми углами	111
Задачи	118
Список литературы	118
<b>Глава 16. Численный анализ взрывной неустойчивости в системе плазма — пучок</b>	<b>118</b>
Используемые модели и предположения	118
Гидродинамическая модель	120
Кинетическая модель	121
Численный анализ коэффициентов связи	122
Численные значения параметров	123
Результаты численного анализа	123
Численное решение связанных уравнений	128
Обсуждение результатов	130
Задачи	130
Список литературы	131
Дополнительная литература	131

<b>Глава 17. Дисперсионные эффекты второго порядка</b>	131
Постановка задачи	131
Качественный анализ решения	132
Влияние начальных условий	134
Временная эволюция осцилляций	135
Резонансное взаимодействие осцилляций	135
Учет затухания	135
Волны с энергией одного знака	136
Предельный случай малых $\delta_j$	136
Обсуждение результатов	137
Задачи	138
Список литературы	138
<b>Глава 18. Взаимодействие волн с конечной шириной спектра в пространстве волновых векторов</b>	139
Волновые пакеты	139
Время когерентности	140
Взаимодействие волновых пакетов	140
Уравнения и интегралы движения для системы трех волновых пакетов	142
Сравнение с когерентным трехволновым взаимодействием	145
Уширение и распад волны накачки при проникновении в плазму	148
Эволюция разброса фаз	151
Обсуждение результатов	153
Список литературы	153
Дополнительная литература	154
<b>Глава 19. Нелинейное возбуждение волн в плазме при наличии сильного внешнего электромагнитного излучения</b>	155
Воздействие мощного излучения на плазму	155
Исследования вынужденного излучения	156
Возбуждение нарастающих волн и модуляция профилей плотности плазмы	157
Список литературы	161
Дополнительная литература	162
<b>Глава 20. Параметрическое возбуждение гибридных резонансов в плазме, содержащей ионы примеси</b>	168
Исходные уравнения	168
Дисперсионное уравнение и его решения	170
Инкременты и пороги	172
Задачи	175
Список литературы	175
Дополнительная литература	176
<b>Глава 21. Нерезонансное взаимодействие типа волна — волна и взаимодействие частиц с волнами</b>	177
Список литературы	180
Дополнительная литература	180

<b>Глава 22. Конвективное движение частиц, обусловленное нелинейными эффектами, и аномальная диффузия плазмы</b>	181
Нелинейное возбуждение конвективных ячеек	182
Аномальная диффузия	183
Обсуждение	185
Список литературы	186
<b>Глава 23. Экспериментальное исследование нелинейных эффектов в плазме</b>	186
Ранние исследования	187
Лабораторные эксперименты	188
Численные эксперименты	190
Список литературы	192
Дополнительная литература	195
<b>Глава 24. Направления развития нелинейных плазменных исследований</b>	195
Список литературы	199
<i>Приложение I. Некоторые типы волн в плазме</i>	202
Изотропная плазма	202
Магнитоактивная плазма	203
Список литературы	204
Дополнительная литература	204
<i>Приложение II. Вывод уравнений связанных волн в рамках кинетического описания плазмы</i>	204
<i>Приложение III. Вывод уравнений, описывающих модуляционную неустойчивость</i>	207
<i>Приложение IV. Математические методы нелинейной теории возмущений</i>	209
Список литературы	210
Ответы к задачам	211
Алфавитно-предметный указатель	216