И.М. ВИНОГРАДОВ

ОСОБЫЕ ВАРИАНТЫ МЕТОДА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

И. М. ВИНОГРАДОВ

ОСОБЫЕ ВАРИАНТЫ МЕТОДА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976

517. 1
В 49
УДК 511.2

Особые варианты метода тригонометрических сумм. И. М. Виноградов, изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1976.

В книге рассматриваются центральные проблемы аналитической теории чисел, решающая роль в исследовании которых принадлежит специальным вариантам известного метода автора, изложенного в монографии «Метод тригонометрических сумм в теории чисел». Эти варианты и сами являются мощным средством решения широкого круга задач теории чисел.

Книга будет полезна студентам, аспирантам и научным работникам, желающим серьезно заниматься теорией чисел.

Библ. 28 назв. Рис. 2.

В $\frac{20203-059}{053\ (02)\text{-}76}$ 36-76

© Главная редакция физико математической литературы издательства «Наука», 1976

Оглавление

Обозначения

Предполагается, что читатель хорошо знаком с текстом книги [1] и с помещенными там обозначениями. Кроме того, будем пользоваться следующими обозначениями:

C — постоянное число.

c — положительное постоянное число.

ε — произвольно малое положительное постоянное число, меньшее единицы.

θ — число с условием $|\theta| \leqslant 1$

При положительном B символическое неравенство $A \ll B$ показывает, что при некотором c имеем $|A| \leqslant cB$. При положительных A и B то же самое показывает и символическое неравенство $B \gg A$.

При вещественном h символ (h) обозначает расстояние от h до ближайшего целого числа, т. е.

$$\min(\{h\},\ 1-\{h\}).$$

Символ $\sum\limits_{a}$ обозначает сумму, распространенную на точно указываемые при этом значения a.

Знак ; между двумя формулами читается словом где.

Введение

Найденный мною в 1934 г. новый метод в аналитической теории чисел в дальнейшем быстро совершенствовался параллельно с расширением области его применения. В простейших вариантах этого метода существенную роль играли оценки сумм вида

$$\sum_{\Omega}\sum \xi(u)\,\eta(v)\,\Phi(u, v), \tag{1}$$

где $\Phi(u, v) = e^{2\pi i f(u,v)}$ с вещественной $f(u, v)$ (в качестве $\Phi(u, v)$ могут рассматриваться и функции некоторых других видов). Двойное же суммирование распространяется на целые точки заданной области Ω.

Именно таким путем в 1934 г. я добился решающего сдвига в проблеме Варинга, получив вместо прежнего $G(n) = O(n2^n)$ новый результат $G(n) = O(n \ln n)$ (известно, что получить результат, лучший чем $G(n) = O(n)$, уже нельзя). В том же году я добился значительного успеха и в другом вопросе — в проблеме о числе целых точек в области трех измерений, в частности, в асимптотической формуле $T = V + R$, выражающей число T целых точек шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ через его объем V; вместо прежнего $R = O\left(a^{\frac{3}{2}}\right)$ я получил новый результат $R = O(a^{1,4+\varepsilon})$ (в 1963 г. улучшенный мною до $R = O\left(a^{\frac{4}{3}}(\ln a)^6\right)$).

Опыт построения схемы решения проблемы Варинга помог мне найти схему решения задачи о достаточно очном приближении к любому δ, подчиненному условиям

$0 \leqslant \delta < 1$, посредством дробных частей значений целого многочлена. А эта схема в свою очередь помогла мне найти и близкую к ней схему вывода новых оценок сумм Г. Вейля, т. е. сумм вида

$$T(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = \sum_{0<x\leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)}. \tag{2}$$

Мои первые новые оценки сумм Г. Вейля опубликованы в 1935 г. При этом положенная в основу их вывода довольно сложная оценка для степени

$$|T(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)|^{2b}$$

в 1938 г. была заменена мною весьма простою оценкой для интеграла

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |T(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)|^{2b} \, d\alpha_n \ldots d\alpha_1,$$

причем теорема, содержащая последнюю оценку, получила название «теоремы о среднем». В дальнейшем как новые оценки сумм Г. Вейля, так и теорема о среднем неоднократно улучшались (последней значительной переработке они подверглись в монографии[2]).

В 1937 г. я нашел новый метод разыскания нетривиальных оценок сумм вида

$$\sum_{p\leqslant N} \Phi(p), \tag{3}$$

основанный на том факте, что такие суммы могут быть составлены путем только сложений и вычитаний из относительно небольшого (по сравнению с N) числа сумм двоякого вида — сумм вида (1) и сумм вида

$$\sum_{m'<m\leqslant m''} \Phi(dm). \tag{4}$$

Такое составление сумм (3) из более простых сумм достигается применением тождества (или же некоторых обобщений этого тождества)

$$\Phi(1)+\sum_{H<y\leqslant N}\Phi(y)=\sum\sum_{dm\leqslant N}\mu(d)\Phi(dm), \qquad (5)$$

где H — любое число с условием $1<H\leqslant\sqrt{N}$, y пробегает числа, не делящиеся на простые числа, не превосходящие H, d пробегает произведения простых чисел (включая пустое произведение, равное 1), не превосходящих H, наконец, m пробегает натуральные числа.

Тождество (5) — давно известное тождество. Крайне простой его вывод покоится на идее решета Эратосфена. Следствием этого тождества является знаменитое тождество Эйлера (p пробегает все простые числа):

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}=\prod\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\frac{1}{\sum\limits_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^s}};\quad s=\sigma+it,\ \sigma>1$$

(получаемое из него при $\Phi(m)=m^{-s}$ путем предельного перехода), легшее, вместе с его обобщениями на L-ряды, в основу современной теории функции $\zeta(s)$ и L-рядов. А специальные видоизменения тождества (5) послужили основанием известного метода Бруна.

Мой метод 1937 г. открыл путь к решению широких классов проблем теории простых чисел, прежним методам не поддававшихся.

Первою таким путем я нашел (1937 г.) нетривиальную оценку для суммы

$$\sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p},$$

с помощью которой вывел асимптотическую формулу для числа представлений нечетного числа N суммою трех нечетных простых чисел (откуда, как частное следствие, получалась и справедливость для всех достаточно больших N тернарной проблемы Гольдбаха).

В том же 1937 г. я нашел нетривиальную оценку для суммы

$$T'(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i(\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p)}, \tag{6}$$

аналогичной сумме Г. Вейля, но с суммированием, идущим по простым числам. Следствием этого явилась асимптотическая формула в проблеме Варинга в простых числах.

В дальнейшем с помощью того же метода были получены нетривиальные оценки разнообразных других сумм по простым числам (в частности, суммы $\sum\limits_{p \leqslant N} \chi(p+k)$). Были также рассмотрены всевозможные применения найденных оценок.

Возникла необходимость систематического изложения полученных с помощью моего метода результатов. Важным шагом в этом направлении явилась монография[2], целью которой, как указано во введении к ней, было глубокое ознакомление с моим методом 1934 г. в его применении к небольшому числу избранных важных проблем аналитической теории чисел. При этом в качестве избранных были рассмотрены проблемы, решающая роль в исследовании которых принадлежала вариантам моего метода, опирающимся на теорему о среднем. Последнее обстоятельство, в отношении метода изложения, придало этой монографии большую однородность.

В предлагаемой новой монографии рассматриваются проблемы, решающая роль в исследовании которых принадлежит более простым вариантам моего метода, не опирающимся на теорему о среднем. В соответствии с разнообразием этих вариантов оказалось целесообразным разбить эту монографию на шесть глав.

Глава 1 касается вопроса о числе целых точек в области трех измерений.

Глава 2 дает оценку $G(n)$ в проблеме Варинга.

Глава 3 посвящена вопросу о приближении к заданному числу δ с условием $0 \leqslant \delta < 1$ посредством дробных частей значений целого многочлена.

Глава 4 содержит оценки сумм вида

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}, \quad \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i k \alpha p} \right|, \quad \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i k f \sqrt{p}}, \quad \sum_{p \leqslant N} \chi(p+k),$$

а также некоторые применения этих сумм.

Глава 5 содержит вывод асимптотической формулы Харди и Литтльвуда в проблеме Гольдбаха.

Глава 6 дает пример элементарного варианта моего метода.

Более подробные сведения, касающиеся отдельных глав, помещены в начале глав.

Глава 1

О числе целых точек в области трех измерений

На основе поставленной Гауссом проблемы о среднем значении арифметических функций в первой половине 19-го века возникла проблема о разыскании асимптотической формулы для суммы

$$F(1)+\ldots+F(N),$$

где $F(n)$ — какая-либо арифметическая функция и N может неограниченно расти. Эта проблема в свою очередь привела к возникновению другой, к которой в большом ряде случаев она сводилась, проблемы о разыскании асимптотической формулы для числа целых точек в той или иной области двух, трех, или $n>3$, измерений.

Так, например, сам Гаусс рассматривал число T целых точек в области круга $x^2+y^2\leqslant N$ и дал для T формулу

$$T=\pi N+R; \qquad R=O(\sqrt{N}). \tag{1}$$

А Дирихле рассматривал число T' целых точек в области равнобочной гиперболы $x>0$, $y>0$, $xy\leqslant N$, и дал для T' формулу

$$T'=N(\ln N+2E-1)+R; \quad R=O(\sqrt{N}), \tag{2}$$

E — постоянная Эйлера.

Более точные результаты были получены лишь в начале 20-го столетия с помощью элементарного метода, разработанного Вороным, причем сам Вороной[3] (1903 г.) в формуле (2) получил $R=O\left(N^{\frac{1}{3}}\ln N\right)$, а Серпинский (1906 г.) в формуле (1) получил $R=O\left(N^{\frac{1}{3}}\right)$. Далее автор этой монографии разработал свой элементарный метод[4], с помощью которого (1917 г.) при единственном ограничении

$$\frac{1}{A} \leqslant f''(x) \leqslant \frac{k}{A} \tag{3}$$

(k — постоянное и A может неограниченно расти), налагаемом на функцию $f(x)$ в интервале $q < x \leqslant r$, вывел формулу

$$\sum_{q < x \leqslant r} \{f(x)\} = \frac{1}{2}(r-q) + R; \; R = O\left(\left(\frac{r-q}{A} + 1\right)(A \ln A)^{\frac{2}{3}}\right), \tag{4}$$

позволяющую получать решение проблемы о числе целых точек уже для весьма широкого класса двумерных областей. В этот класс, как частные случаи, вошли (правда, с несколько худшей оценкой для R) и вышеупомянутые области равнобочной гиперболы и круга. Как показал впоследствии Ярник, формула (4) для функции с условием (3) с точностью до логарифмического множителя неулучшаема.

Наряду с элементарными методами развивались и аналитические. Некоторые сведения о них имеются в известной монографии Хуа. Прямое отношение к этой главе имеет метод, основанный на разложении функции $\{f(x)\}$ (или функций, близких к ней) в ряд Фурье и на оценке суммы вида

$$S_m = \sum_{q < x \leqslant r} e^{2\pi i m f(x)}; \quad m \text{ — целое},$$

или же на приближенном выражении этой суммы через более короткую. Основная идея этого метода была видна уже в работе Вороного[5]; частный случай приближенного выражения суммы S_m через более короткую был рассмотрен в работе Харди и Литтльвуда[6]; в грубом виде схема метода была показана в применении к частным областям двух и трех измерений в моей работе[7].

В применении к областям двух измерений, с достаточно точной для этой цели общей леммой о приближенном выражении суммы S_m через более короткую, метод был опубликован в работе Корпута[8]. При этом на примере равнобочной гиперболы Корпут показал, что соединение основной формы метода с оценкой более коротких сумм по методу Г. Вейля позволяет вместо $R = O\left(N^{\frac{1}{3}} \ln N\right)$ получить $R = O(N^{0,33})$. В дальнейшем ученые улучшали как эту оценку для R в случае равнобочной гиперболы, так и оценку для R в случае круга. Наилучший результат был достигнут в случае круга. Здесь Хуа[9] получил $R = O\left(N^{\frac{13}{40}}\right)$. Доказано (Харди и Литтльвуд), что получить оценку, лучшую чем $R = O\left(N^{\frac{1}{4}} (\ln N)^2\right)$, уже нельзя.

В применении к областям трех измерений основная форма описываемого метода, построенная по схеме, представляющей собою улучшение использованной в моей работе[7], обладает большою гибкостью. Она позволяет рассматривать широкие классы случаев с довольно хорошей степенью точности[10], например, таким путем в асимптотической формуле

$$T = \frac{4}{3} \pi N^{\frac{3}{2}} + R,$$

выражающей число T целых точек в области шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant N$, вместо тривиального $R = O(N)$ получается $R = O\left(N^{\frac{3}{4}}\right)$. Известно, что получить результат, лучший чем $R = O\left(N^{\frac{1}{2}} \ln N\right)$, уже нельзя.

В 1934 г. я обнаружил, что соединение упомянутой основной формы с простейшим вариантом только что найденного мною тогда нового метода позволяет получить и значительно более точные оценки[11]. В дальнейшем первые, найденные на этом пути, новые результаты были усилены. В частности (1963 г.), в случае шара я получил[12] $R=O\left(N^{\frac{2}{3}}(\ln N)^6\right)$. Вывод последней оценки и является целью этой главы.

Леммы, участвующие в выводе, если они имеются в книге[1], или в монографии[2], приводятся без доказательств. Лемма о приближенном выражении суммы S_m через более короткую доказывается в необходимой для вывода весьма точной формулировке (достигаемой за счет наложения на функцию $f(x)$ существенных дополнительных ограничений).

В главе дается также краткое ознакомление с простейшим вариантом основной формы метода (используются только разложение функции $\psi(f(x))$ в ряд Фурье и несложно выводимая оценка суммы S_m) в применении к областям двух измерений. Это делается на примере вывода моей формулы (4) с уточненным остаточным членом.

Области $n>3$ измерений в этой главе не рассматриваются. Однако, ради полноты очерка, я скажу несколько слов и о них. Особо систематическому изучению подверглись два класса таких областей.

К первому классу относятся многомерные рациональные эллипсоиды. Здесь, если за главный член асимптотической формулы для числа целых точек области принять ее объем, вопрос о порядке остаточного члена R асимптотической формулы решается до конца $\left(R=O\left(N^{\frac{n}{2}-1}\right)\right)$, если $n>4$, или почти до конца $(R=O(N\ln N))$ при предполагаемом окончательном $R=O(N)$, если $n=4$, с помощью надлежащего видоизменения аддитивного метода Харди и Литтльвуда (Ландау, Вальфиш).

Ко второму классу относятся многомерные гиперболоиды $x_1\ldots x_n<N$, $x_1>0,\ldots, x_n>0$. Здесь Харди и Литтльвуд, существенно опираясь на теорию функции $\zeta(s)$, для остаточного члена R в асимптотической формуле, выражающей число целых точек, получили оценку[13]

$R=O\left(N^{1-\frac{3}{n+2}}\right)$. А. А. Карацуба, существенно используя сверх того и мой метод, получил принципиально новую оценку[14] $R=O\left(N^{1-\frac{c}{n^{2/3}}}\right)$. Предполагаемым окончательным результатом является $R=O\left(N^{\frac{n-1}{2n}+\varepsilon}\right)$.

Лемма 1. *Пусть в интервале $q<x\leqslant r$ функция $f''(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{A}\leqslant|f''(x)|\leqslant\frac{k}{A},$$

где k — постоянное и $A\geqslant 5k$. Пусть далее в том же интервале функция $\varphi(x)$ монотонна и подчинена условию $\varphi(x)\leqslant H$. Тогда для суммы

$$S=\sum_{q<x\leqslant r}\varphi(x)\,e^{2\pi i f(x)}$$

справедливо неравенство

$$S\leqslant H\left(\frac{r-q}{\sqrt{A}}+\sqrt{A}+\ln U\right);\quad U=\max(r-q,\ A).$$

Доказательство. Ограничимся лишь случаем $\varphi(x)=1$ (общий случай тривиально выводится из него посредством преобразования Абеля). Не нарушая общности, будем предполагать, что $r-q>5k\sqrt{A}$, что $f''(x)>0$ и что в интервале $q\leqslant x\leqslant r$ выполняется условие

$$f'(x)\leqslant\frac{U}{A}$$

(в противном случае, не меняя значения суммы S, функцию $f(x)$ можно заменить функцией $f(x)-x\,[f'(r)]$).

Пусть $m=[4U^3+1]$, а Q и R — наименьшее и наибольшее целые числа с условиями $q\leqslant Q-0{,}5$, $R+0{,}5\leqslant r$. Полагая

$$W_M=\int_{-0,5}^{0,5}\frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin\pi x}\,e^{2\pi i f(M+x)}\,dx,$$

находим

$$\sum_{M=Q}^{R} W_M = \sum_{n=-m}^{m} I_n; \quad I_n = \int_{Q-0,5}^{R+0,5} e^{2\pi i \eta_n(x)}\, dx;$$

$$\eta_n(x) = -nx + f(x). \tag{5}$$

Далее, замечая, что

$$\int_{-0,5}^{0,5} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x}\, dx = 1,$$

выводим

$$W_M = e^{2\pi i f(M)} + V_M;$$

$$V_M = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} \left(e^{2\pi i f(M+x)} - e^{2\pi i f(M)}\right) dx.$$

Отсюда, интегрируя по частям, находим

$$V_M = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)\pi} Y_x\, dx;$$

$$Y_x = \frac{e^{2\pi i f(M+x)}\, 2\pi i f'(M+x)}{\sin \pi x} - \frac{\left(e^{2\pi i f(M+x)} - e^{2\pi i f(M)}\right)\pi \cos \pi x}{\sin^2 \pi x},$$

$$Y_x \ll U^2, \quad V_M \ll U^{-1}, \quad W_M = e^{2\pi i f(M)} + O(U^{-1}). \tag{6}$$

Рассмотрим интеграл

$$I_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta e^{2\pi i \eta_n(x)} dx.$$

Пусть сначала $0 < \eta_n'(\alpha)$. Подстановкой $\eta_n(x) = u$ получим

$$I_\alpha^\beta = \int_{f'(\alpha)}^{f'(\beta)} \frac{e^{2\pi i u}}{\eta_n'(x)}\, du,$$

где $\eta_n'(x)$ должно рассматриваться как функция от u. Применяя известный прием, оба интеграла, как представляющий вещественную часть интеграла I_α^β, так и служащий коэффициентом при i его мнимой части, выразим знакопеременными рядами. Убедимся, что каждый из этих интегралов

$$\ll \frac{1}{\eta_n'(\alpha)}.$$

Вместе с тем получим

$$I_\alpha^\beta \leqslant \frac{1}{\eta'_n(\alpha)}.$$

Кроме того, при $0 \leqslant \eta'_n(\alpha)$ будет справедлива и оценка

$$I_\alpha^\beta \leqslant \sqrt{A}.$$

Действительно, при $\beta - \alpha \leqslant \sqrt{A}$ последняя тривиальна, а при $\beta - \alpha > \sqrt{A}$ она следует из $I_\alpha^\beta = I_\alpha^{\alpha+\sqrt{A}} + I_{\alpha+\sqrt{A}}^\beta$.

Пусть теперь $\eta'_n(\beta) < 0$. Подстановкой $x = -x_1$ мы приведем интеграл I_α^β к только что рассмотренному виду, откуда убедимся, что

$$I_\alpha^\beta \leqslant \frac{1}{-\eta'_n(\beta)} = \frac{1}{|\eta'_n(\beta)|}.$$

Кроме того при $\eta'_n(\beta) < 0$ будет справедлива и оценка

$$I_\alpha^\beta \leqslant \sqrt{A}.$$

Действительно при $\beta - \alpha \leqslant \sqrt{A}$ последняя тривиальна, а при $\beta - \alpha > \sqrt{A}$ она следует из $I_\alpha^\beta = I_\alpha^{\beta-\sqrt{A}} + I_{\beta-\sqrt{A}}^\beta$.

Пусть, наконец, $\eta'_n(\alpha) < 0 < \eta'_n(\beta)$. Тогда существует x_n с условием $\eta'_n(x_n) = 0$. При этом имеем

$$I_\alpha^\beta = I_\alpha^{x_n} + I_{x_n}^\beta,$$

откуда, согласно доказанному выше, находим

$$I_\alpha^\beta \leqslant \sqrt{A}.$$

Пусть Q' — наибольшее, не превосходящее $Q - 0{,}5$ число с целым $f'(Q')$, а R' — наименьшее, не меньшее $R + 0{,}5$ число с целым $f'(R')$. Имеем

$$\sum_{n=-m}^{m} I_n = T' + T'' + T'''; \quad T' = \sum_{n=f'(Q')-1}^{-m} I_n,$$

$$T'' = \sum_{n=f'(R')+1}^{m} I_n, \quad T''' = \sum_{n=f'(Q')}^{f'(R')} I_n,$$

откуда, применяя найденные выше для I_n оценки, получим

$$T' \ll \sum_{s=1}^{m+f'(Q')} \frac{1}{s} \ll \ln U, \; T'' \ll \sum_{s=1}^{m-f'(R')} \frac{1}{s} \ll \ln U,$$

$$T''' \ll (f'(R') - f'(Q) + 1)\sqrt{A} \ll \left(\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{A}} + \sqrt{A}\right).$$

Из (5) и (6) теперь уже легко следует справедливость леммы при $H=1$.

Лемма 1а (ослабленная лемма 3 гл. 2 монографии[2]). *Пусть в интервале $q \leqslant x \leqslant r$ функция $f(x)$ дважды дифференцируема, причем $f''(x)$ знакопостоянна, $|f''(x)|$ не превосходит некоторого постоянного, $f'(x)$ знакопостоянна и при некотором положительном δ, меньшем 0,5, удовлетворяет условию*

$$\delta \leqslant |f'(x)| < 0{,}5.$$

Тогда имеем

$$\sum_{q<x\leqslant r} e^{2\pi i f(x)} \ll \frac{1}{\delta} + \ln(r-q) + 1.$$

Доказательство. При условиях нашей леммы повторим рассуждения леммы 1. Из формул (5) и (6) легко найдем

$$\sum_{q<x\leqslant r} e^{2\pi i f(x)} = \sum_{n=-m}^{m} I_n + O(1);$$

$$I_n = \int_{q_0}^{r_0} e^{2\pi i \eta_n(x)}\, dx; \; \eta_n(x) = -nx + f(x),$$

где при $n=0$ берем $q_0=q$, $r_0=r$, а при других значениях n берем $q_0=Q-0{,}5$, $r_0=R+0{,}5$. Тогда окажется $I_0 \ll \frac{1}{\delta}$, а (поскольку $-0{,}5 < f'(x) < 0{,}5$) сумма $\sum I_n$, распространенная на оставшиеся значения n, будет $\ll \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n-0{,}5} \ll \ln(r-q)+1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* ρ — *целое положительное,* α *и* β — *вещественные,* $0<\Delta<0{,}1$, $\Delta\leqslant\beta-\alpha\leqslant 1-\Delta$. *Тогда существует периодическая функция* $\psi(x)$ *с периодом* 1 *и со следующими свойствами:*

1. $\psi(x)=1$ *в интервале* $\alpha+0{,}5\,\Delta\leqslant x\leqslant\beta-0{,}5\,\Delta$,

2. $0\leqslant\psi(x)\leqslant 1$ *в интервалах* $-0{,}5\,\Delta\leqslant x\leqslant\alpha+0{,}5\,\Delta$ *и* $\beta-0{,}5\,\Delta\leqslant x\leqslant\beta+0{,}5\,\Delta$,

3. $\psi(x)=0$ *в интервале* $\beta+0{,}5\,\Delta\leqslant x\leqslant 1+\alpha-0{,}5\,\Delta$,

4. $\psi(x)$ *разлагается в ряд Фурье вида*

$$\psi(x)=\beta-\alpha+\sum_{m=1}^{\infty}\left(g_m e^{2\pi imx}+h_m e^{-2\pi imx}\right),$$

где g_m *и* h_m *зависят только от* m, α, β, Δ, *причем*

$$|g_m|\leqslant\varkappa_m,\quad |h_m|\leqslant\varkappa_m;\quad \varkappa_m=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi m}, & \text{если } m\leqslant\Delta^{-1},\\[2mm] \dfrac{1}{\pi m}\left(\dfrac{\rho}{\pi m\Delta}\right)^{\rho}, & \text{если } m>\Delta^{-1}.\end{cases}$$

Доказательство. Эта лемма является видоизменением леммы 2 гл. 2 монографии[2].

Лемма 3. *Пусть* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_Q$ — *ряд чисел, подчиненных условию* $0\leqslant\delta_s<1$, *и пусть при заданных* ρ *и* Δ *и некотором* R *с условием* $R>\Delta Q$ *функция* $\psi(x)$ *подчинена условиям леммы* 2, *причем всегда для суммы*

$$U(\alpha,\ \beta)=\sum_{s=1}^{Q}\psi(\delta_s)$$

имеем неравенство

$$U(\alpha,\ \beta)-(\beta-\alpha)Q\leqslant R.$$

Тогда

а) *При любом* σ *с условием* $0<\sigma\leqslant 1$ *число* A_σ *значений* δ_s, *подчиненных неравенству* $\delta_s<\sigma$, *выражается формулой*

$$A_\sigma=\sigma Q+R_\sigma;\qquad R_\sigma\leqslant R.$$

б) *Имеем*

$$\sum_{s=1}^{Q}\delta_s-\frac{1}{2}Q\leqslant R.$$

Доказательство. При $0 < \beta - \alpha \leqslant 1$ символом $D(\alpha, \beta)$ будем обозначать число значений δ_s с условием $\alpha \leqslant \delta_s < \beta \pmod 1$.

В случае $2\Delta < \beta - \alpha \leqslant 1 - 2\Delta$ из очевидного неравенства

$$U(\alpha + 0{,}5\Delta, \ \beta - 0{,}5\Delta) \leqslant D(\alpha, \beta) \leqslant U(\alpha - 0{,}5\Delta, \ \beta + 0{,}5\Delta)$$

и из условий леммы следует неравенство

$$D(\alpha, \beta) - (\beta - \alpha) Q \leqslant R, \tag{7}$$

которое легко распространяется и на оставшиеся случаи, на случай $0 < \beta - \alpha < 2\Delta$ — с помощью тождества

$$D(\alpha, \beta) = D(\alpha, \alpha + 1 - 2\Delta) - D(\beta, \alpha + 1 - 2\Delta),$$

а на случай $1 - 2\Delta \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1$ — с помощью тождества

$$D(\alpha, \beta) = D(\alpha, \alpha + 0{,}5) + D(\alpha + 0{,}5, \beta).$$

Полагая в неравенстве (7) $\alpha = 0$ и $\beta = \sigma$, мы и убедимся в справедливости утверждения а).

Переходя к доказательству утверждения б), будем предполагать, что $RQ^{-1} < 0{,}1$ (в противном случае утверждение тривиально). Полагая $n = [QR^{-1}]$, $\nu = \frac{1}{n}$, согласно утверждению а) находим

$$\begin{aligned}
A_\nu &= \nu Q + R_\nu, & A_\nu &= \nu Q + R_\nu,\\
A_{2\nu} &= 2\nu Q + R_{2\nu}, & A_{2\nu} - A_\nu &= \nu Q + R_{2\nu} - R_\nu,\\
A_{3\nu} &= 3\nu Q + R_{3\nu}, & A_{3\nu} - A_{2\nu} &= \nu Q + R_{3\nu} - R_{2\nu},\\
&\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\\
A_{n\nu} &= n\nu Q + R_{n\nu}, & A_{n\nu} - A_{(n-1)\nu} &= \nu Q + R_{n\nu} - R_{(n-1)\nu}.
\end{aligned}$$

Сумма произведений правых частей равенств второго столбца соответственно на числа $0, \nu, 2\nu, \ldots, (n-1)\nu$ даст нижнюю границу для суммы $\sum\limits_{\delta} \delta_s$. А сумма произведений тех же самых правых частей соответственно на числа $\nu, 2\nu, 3\nu, \ldots, n\nu$ даст верхнюю границу для той же суммы. При этом как нижняя, так и верхняя границы легко приводятся к виду $0{,}5Q+O(R)$. Этим и доказывается справедливость утверждения б).

Лемма 4. *Пусть в интервале $q \leqslant x \leqslant r$ функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, причем*

$$\frac{1}{A} \leqslant f''(x) \leqslant \frac{k}{A},$$

где k — постоянное и $A \geqslant 5k$. Тогда имеем

$$\sum_{q<x\leqslant r} \{f(x)\} = \frac{1}{2}(r-q) + O(R); \qquad R = (r-q)A^{-\frac{1}{3}} + A^{\frac{2}{3}}.$$

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что q и r — целые. Взяв в качестве чисел δ_s слагаемые $\{f(x)\}$ суммы, стоящей в левой части доказываемого неравенства, и положив $\rho=1$, $\Delta = A^{-\frac{1}{3}}$, применим б) леммы 3. Наша лемма будет доказана, если мы установим, что

$$\sum_{q<x\leqslant r} \psi(f(x)) - \frac{1}{2}(r-q) \leqslant R. \tag{8}$$

Согласно лемме 2 имеем

$$\sum_{q<x\leqslant r} \psi(f(x)) = \sum_{m=1}^{\infty} (g_m U_m + h_m \overline{U}_m); \qquad U_m = \sum_{q<x\leqslant r} e^{2\pi i m f(x)},$$

$$g_m \leqslant \varkappa_m,\ h_m \leqslant \varkappa_m; \qquad \varkappa_m = \begin{cases} \dfrac{1}{m}, & \text{если } m \leqslant A^{\frac{1}{3}}, \\[2ex] \dfrac{A^{\frac{1}{3}}}{m^2}, & \text{если } m > A^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

Поскольку в интервале $q \leqslant x \leqslant r$ выполняется условие

$$\frac{m}{A} \leqslant m f''(x) \leqslant \frac{mk}{A},$$

при $m \leqslant A^{\frac{2}{3}}$, согласно лемме 1, будем иметь

$$U_m \leqslant (r-q)\sqrt{\frac{m}{A}} + \sqrt{\frac{A}{m}}.$$

Поэтому находим

$$\sum_{q<x\leqslant r}\psi(f(x))-\frac{1}{2}(r-q)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{0<m\leqslant A^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{m}\left((r-q)\sqrt{\frac{m}{A}}+\sqrt{\frac{A}{m}}\right)+$$

$$+\sum_{A^{\frac{1}{3}}<m\leqslant A^{\frac{2}{3}}}\frac{A^{\frac{1}{3}}}{m^2}\left((r-q)\sqrt{\frac{m}{A}}+\sqrt{\frac{A}{m}}\right)+\sum_{A^{\frac{2}{3}}<m}\frac{A^{\frac{1}{3}}}{m^2}(r-q),$$

откуда и убеждаемся в справедливости неравенства (8). Лемма доказана.

Лемма 5 (формула Сонина). *Пусть в интервале* $Q\leqslant\leqslant x\leqslant R$ *функция* $f(x)$ *имеет вторую непрерывную производную. Полагая*

$$\rho(x)=0{,}5-\{x\},\qquad\sigma(x)=\int_0^x\rho(z)\,dz,$$

будем иметь

$$\sum_{Q<x\leqslant R}f(x)=\int_Q^R f(x)\,dx+\rho(R)f(R)-\rho(Q)f(Q)-$$

$$-\sigma(R)f'(R)+\sigma(Q)f'(Q)+\int_Q^R\sigma(x)f''(x)\,dx.$$

Доказательство. См. решение вопроса 8 гл. 2 книги [1].

Теорема 1. *Число* T *целых точек в области круга*

$$x^2+y^2\leqslant a^2$$

выражается формулой

$$T=\pi a^2+O\left(a^{\frac{2}{3}}\right).$$

Доказательство. Имеем

$$T=1+4[a]+8\sum_{0<x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}}\left[\sqrt{a^2-x^2}\right]-4\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\right]^2.\qquad(9)$$

Полагая $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, в интервале $0<x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$ находим

$$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad f''(x)=\frac{-a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}},\quad \frac{1}{a}\leqslant|f''(x)|\leqslant\frac{\sqrt{8}}{a}.$$

Далее, согласно лемме 4, выводим

$$\sum_{0<x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}}\left\{\sqrt{a^2-x^2}\right\}=\frac{a}{2\sqrt{2}}+O\left(a^{\frac{2}{3}}\right).$$

А согласно лемме 5, находим

$$\sum_{0<x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{\pi a^2}{8}+\frac{a^2}{4}+\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{a}{\sqrt{2}}\right\}\right)\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{a}{2}+O(1).$$

Кроме того, имеем

$$\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\right]^2=\frac{a^2}{2}-2\frac{a}{\sqrt{2}}\left\{\frac{a}{\sqrt{2}}\right\}+O(1).$$

Учитывая доказанное, из формулы (9) мы и убедимся в справедливости утверждения теоремы.

Лемма 6. *Пусть H, U, A, q, r — вещественные числа с условиями*

$$H>0,\quad U\geqslant A\geqslant 1,\quad 0<r-q\leqslant U.$$

Пусть далее $f(x)$ и $\varphi(x)$ — вещественные алгебраические функции, степени которых ограничены, и пусть в интервале $q\leqslant x\leqslant r$ выполнены условия

$$A^{-1}\ll f''(x)\ll A^{-1},\qquad f'''(x)\ll\frac{1}{AU},$$

$$\varphi(x)\ll H,\quad \varphi'(x)\ll HU^{-1},\quad \varphi''(x)\ll HU^{-2}.$$

Тогда имеет место формула

$$\sum_{q<x\leqslant r}\varphi(x)e^{2\pi i f(x)}=$$

$$=\sum_{f'(q)\leqslant n\leqslant f'(r)}b_nZ_n+O(HT_q+HT_r+H\ln(U+1)),$$

где, определяя x_n равенством $f'(x_n)=n$, имеем

$$Z_n=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}}e^{2\pi i(-nx_n+f(x_n))},$$

причем $b_n = 1$, *если* n *отлично от* $f'(q)$ *и от* $f'(r)$, *и* $b_n = 0{,}5$, *если* n *равно одному из этих чисел. Всегда имеем* $Z_n \leqslant H\sqrt{A}$. *Наконец,* $T_q = 0$ *при целом* $f'(q)$ *и равно*

$$\min\left(\frac{1}{(f'(q))},\ \sqrt{A}\right)$$

в противном случае, а $T_r = 0$ *при целом* $f'(r)$ *и равно*

$$\min\left(\frac{1}{(f'(r))},\ \sqrt{A}\right)$$

в противном случае.

Доказательство. Будем предполагать, что $r - q$ больше некоторого достаточно большого постоянного числа, превосходящего 3, в противном случае лемма тривиальна. Кроме того, будем предполагать, что в интервале $q \leqslant x \leqslant r$ выполняется условие $0 \leqslant f'(x)$, $f'(x) \leqslant UA^{-1}$, в противном случае, не меняя величины сумм, стоящих в левой и правой частях доказываемого равенства, функцию $f(x)$ можно заменить функцией $f(x) + gx$ с целым g, выбрав последнее так, чтобы ($f'(r) - f'(q) < kUA^{-1}$) указанное условие выполнялось.

Пусть $m = [4U^3 + 1]$, а Q и R — наименьшее и наибольшее целые числа с условиями $q \leqslant Q - 0{,}5$, $R + 0{,}5 \leqslant r$. Полагая

$$W_M = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} \varphi(M + x) e^{2\pi i f(M+x)} dx,$$

находим

$$\sum_{M=Q}^{R} W_M = \sum_{n=-m}^{m} \int_{Q-0,}^{R+0,5} \varphi(x) e^{2\pi i \eta_n(x)} dx; \quad \eta_n(x) = -nx + f(x).$$

Далее, замечая, что

$$\int_{-0,5}^{0,5} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} dx = 1,$$

выводим

$$W_M = \varphi(M)\, e^{2\pi i f(M)} + V_m;$$

$$V_m = \int\limits_{-0,5}^{0,5} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} \times$$
$$\times \left(\varphi(M+x)\, e^{2\pi i f(M+x)} - \varphi(M)\, e^{2\pi i f(M)}\right) dx,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$V_m = \int\limits_{-0,5}^{0,5} \frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)\pi} Y_x dx;$$

$$Y_x = \frac{e^{2\pi i f(M+x)} (\varphi(M+x)\, 2\pi i f'(M+x) + \varphi'(M+x))}{\sin \pi x} -$$
$$- \frac{(\varphi(M+x)\, e^{2\pi i f(M+x)} - \varphi(M)\, e^{2\pi i f(M)})\, \pi \cos \pi x}{\sin^2 \pi x}.$$

Отсюда находим

$$Y_x \ll HU^2, \quad V_m \ll HU^{-1}, \quad W_M = \varphi(M)\, e^{2\pi i f(M)} + O(HU^{-1}),$$

$$\sum_{M=Q}^{R} \varphi(M)\, e^{2\pi i f(M)} = \sum_{n=-m}^{m} \int\limits_{Q-0,5}^{R+0,5} \varphi(x)\, e^{2\pi i \eta_n(x)} dx + O(H).$$

Из последней формулы легко получаем следующую, более удобную:

$$\sum_{q < M \leqslant r} \varphi(M)\, e^{2\pi i f(M)} = \sum_{n=-m}^{m} \int\limits_{q_0}^{r_0} \varphi(x)\, e^{2\pi i \eta_n(x)} dx + O(H), \quad (10)$$

где q_0 и r_0 определяются так: пусть n_q — ближайшее к $f'(q)$ значение n с условием $n_q \geqslant f'(q)$, а n_r — ближайшее к $f'(r)$ значение n с условием $n_r \leqslant f'(r)$. Тогда в случае $n_q \leqslant n \leqslant n_r$ полагаем $q_0 = q$, $r_0 = r$. В остальных же случаях берем $q_0 = Q - 0,5$, $r_0 = R + 0,5$.

При $\eta_n'(\alpha) > 0$ рассмотрим интеграл

$$I_\alpha^\beta = \int\limits_\alpha^\beta \varphi(x)\, e^{2\pi i \eta_n(x)} dx.$$

Подстановкой $\eta_n(x)=u$ мы приведем этот интеграл к виду

$$I_\alpha^\beta=\int\limits_{\eta_n(\alpha)}^{\eta_n(\beta)} \Phi(u)\, e^{2\pi i u} du; \qquad \Phi(u)=\frac{\varphi(u)}{\eta_n'(x)},$$

где $\eta_n'(x)$ рассматривается как функция от u. Поскольку $\Phi(u)$ — алгебраическая функция от u конечной степени, интеграл I_α^β можно разбить на конечное число интегралов, к каждому из которых можно применить известный прием. Получим оценку

$$|I_\alpha^\beta| \leqslant \frac{H}{\eta_n'(\alpha)}.$$

Кроме этой оценки, при $\eta_n'(\alpha)\geqslant 0$ справедлива и другая

$$I_\alpha^\beta \leqslant H\sqrt{A}.$$

Действительно, при $\beta-\alpha\leqslant\sqrt{A}$ последняя оценка тривиальна, а при $\beta-\alpha>\sqrt{A}$ она следует из $I_\alpha^\beta=I_\alpha^{\alpha+\sqrt{A}}+ + I_{\alpha+\sqrt{A}}^\beta$.

Итак, при $\eta_n'(\alpha)>0$ имеем

$$I_\alpha^\beta \leqslant H\min\left(\frac{1}{\eta_n'(\alpha)}, \quad \sqrt{A}\right).$$

Рассуждая аналогично, при $\eta_n'(\beta)<0$ получим

$$I_\alpha^\beta \leqslant H\min\left(\frac{1}{-\eta_n'(\beta)}, \quad \sqrt{A}\right).$$

Теперь можно оценить как сумму T значений $I_{q_0}^{r_0}$ с условием $\eta_n'(q_0)>0$ $(n<f'(q_0))$, так и сумму T' значений $I_{q_0}^{r_0}$ с условием $\eta_n'(r_0)<0$ $(f'(r_0)<n)$. Находим

$$T\leqslant \sum_{n=n_{q}-1}^{-m} \min\left(\frac{H}{\eta_n'(q)}, \ H\sqrt{A}\right) \leqslant \min\left(\frac{H}{n_q-f'(q)}, H\sqrt{A}\right)+ +H\ln U. \qquad (11)$$

Путем аналогичных рассуждений также выводим

$$T'\leqslant \min\left(\frac{H}{-n_r+f'(r)}\right), H\sqrt{A}\,\Big)+H\ln U. \qquad (12)$$

Далее остается рассмотреть лишь интегралы I_q^r с условием $f'(q) \leqslant n \leqslant f'(r)$. Определяя x_n равенством $f'(x_n) = n$ $(\eta'_n(x_n) = 0)$, интеграл I_q^r представим суммою

$$I_q^r = I_q^{x_n} + I_{x_n}^r. \tag{13}$$

При $r > x_n$ рассмотрим интеграл $I_{x_n}^r$. Полагая $x = x_n + z$, $r = x_n + \delta$, $\lambda(z) = \eta_n(x_n + z) - \eta_n(x_n)$, получим

$$I_{x_n}^r = e^{2\pi i \eta_n(x_n)} J_0^\delta; \quad J_0^\delta = \int_0^\delta \varphi(x_n + z) e^{2\pi i \lambda(z)} dz.$$

Далее подстановкой $\lambda(z) = u$ интеграл J_0^δ приведется к виду

$$J_0^\delta = \int_0^{\lambda(\delta)} \varphi(x_n + z) \frac{e^{2\pi i u}}{\lambda'(z)} du,$$

где $\frac{\varphi(x_n + z)}{\lambda'(z)}$ рассматривается как функция от u. Интеграл J_0^δ мы сравним с интегралом

$$J' = \int_0^{\lambda(\delta)} \varphi(x_n) \frac{e^{2\pi i u}}{\lambda'(z)} du.$$

Найдем

$$J_0^\delta - J' = \int_0^{\lambda(\delta)} \Phi(u) e^{2\pi i u} du; \quad \Phi(u) = \frac{\varphi(x_n + z) - \varphi(x_n)}{\lambda'(z)}.$$

Поскольку $\Phi(u)$ — алгебраическая функция от u конечной степени, интервал $0 \leqslant u \leqslant \lambda(\delta)$ можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых функция $\Phi(u)$ монотонна и не меняет знака. Обозначая буквою K наибольшее значение модуля функции $\Phi(u)$ в интервале $0 \leqslant u \leqslant \lambda(\delta)$, с помощью известного приема получим

$$J_0^\delta - J' \ll K.$$

А поскольку K является наибольшим значением модуля функции $\Phi(u)$, рассматриваемой и как функция от z в интервале $0 \leqslant z \leqslant \delta$, то из $\varphi(\gamma + z) - \varphi(\gamma) \ll HU^{-1}z$.

$\lambda'(z) \gg zA^{-1}$ выводим $K \ll HAU^{-1}$. Следовательно,

$$J_0^\delta - J' \ll HAU^{-1}.$$

В свою очередь интеграл J' мы сравним с интегралом

$$J'' = \int_0^{\lambda(\delta)} \varphi(x_n) \sqrt{\frac{A_0}{2u}} e^{2\pi i u} du; \quad A_0 = (\lambda''(x_n))^{-1}.$$

Получим

$$J' - J'' = \varphi(x_n) \int_0^{\lambda(\delta)} F(u) e^{2\pi i u} du; \quad F(u) = \frac{1}{\lambda'(z)} - \sqrt{\frac{A_0}{2u}},$$

откуда найдем

$$J' - J'' \ll HL,$$

где L — наибольшее значение модуля функции $F(u)$, рассматриваемой как функция от z в интервале $0 \leqslant z \leqslant \delta$. А так как

$$|F(u)| < \left| \frac{\frac{1}{(\lambda'(z))^2} - \frac{A_0}{2\lambda(z)}}{\frac{1}{\lambda'(z)}} \right| = \left| \frac{2\lambda(z) - A_0(\lambda'(z))^2}{2\lambda(z)\lambda'(z)} \right|,$$

$$\lambda(z) = \frac{z^2}{2A_0} + O\left(\frac{z^3}{AU}\right), \quad \lambda'(z) = \frac{z}{A_0} + O\left(\frac{z^2}{AU}\right),$$

$$\lambda(z) \gg \frac{z^2}{A}, \quad \lambda'(z) \gg \frac{z}{A},$$

то будем иметь $J' - J'' \ll HAU^{-1}$,

$$I'_{x_n} = \varphi(x_n) e^{2\pi i \eta_n(x_n)} \int_0^{\lambda(\delta)} \sqrt{\frac{A_0}{2u}} e^{2\pi i u} du + O(HAU^{-1}). \quad (14)$$

Далее, полагая $u = \frac{z^2}{2A_0}$, получим

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{A_0}{2u}} e^{2\pi i u} du = \int_0^\infty e^{2\pi i \frac{z^2}{2A_0}} dz = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{A_0}{2}}. \quad (15)$$

Кроме того, полагая $D_n = \left| \int_{\lambda(\delta)}^\infty \sqrt{\frac{A_0}{2u}} e^{2\pi i u} du \right|$ и пользуясь уже применявшимся приемом, получим

$$D_n \leqslant \sqrt{\frac{A_0}{2\lambda(\delta)}},$$

откуда, ввиду $\lambda(\delta) \geqslant \frac{\delta^2}{2A}$, $\lambda'(\delta) \leqslant \frac{k\delta}{A}$, найдем

$$D_n \leqslant \frac{1}{\lambda'(\delta)}.$$

А разбивая в случае $\lambda'(\delta) < A^{-0,5}$ интервал интегрирования на два: $\lambda(\delta) \leqslant u \leqslant \lambda(\delta)+1$ и $\lambda(\delta)+1 < u < \infty$, получим

$$D_n \ll \sqrt{A}.$$

Следовательно,

$$D_n \ll \min\left(\frac{1}{\lambda'(\delta)},\ \sqrt{A}\right) \ll \min\left(\frac{1}{f'(r)-f'(x_n)},\ \sqrt{A}\right) \ll \\ \ll \min\left(\frac{1}{\eta_n'(r)},\ \sqrt{A}\right).$$

Из (14), (15) и последнего неравенства выводим

$$I_{x_n}^r = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \varphi(x_n) e^{2\pi i \eta_n(x_n)} \frac{1}{\sqrt{f''(x_n)}} + O\left(H \min\left(\frac{1}{\eta_n'(r)},\ \sqrt{A}\right)\right),$$

где при $n_r = f'(r)$ первое слагаемое справа заменяется нулем. Отсюда находим

$$\sum_{n_q \leqslant n \leqslant n_r} I_{x_n}^r = \\ = \sum_{n_q \leqslant n \leqslant n_r} \frac{1}{2} Z_n + O\left(H \min\left(\frac{1}{\eta_n'(r)},\ \sqrt{A}\right) + H \ln U\right), \quad (16)$$

где при $n = n_r = f'(r)$ слагаемое $\frac{1}{2} Z_n$ заменяется нулем.

Совершенно аналогично (подстановка $x = -x_1$) получим

$$\sum_{n_q \leqslant n \leqslant n_r} I_q^{x_n} = \\ = \sum_{n_q \leqslant n \leqslant n_r} \frac{1}{2} Z_n + O\left(H \min\left(\frac{1}{\eta_n(q)},\ \sqrt{A}\right) + H \ln U\right), \quad (17)$$

где при $n = n_q = f'(q)$ слагаемое $\frac{1}{2} Z_n$ заменяется нулем.

Из (10), (11), (12), (13), (16) и (17) и следует справедливость нашей леммы.

Теорема 2. *Число T целых точек в области шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ выражается формулой*

$$T=\frac{4}{3}\pi a^3+O(R); \qquad R=a^{\frac{4}{3}}(\ln a)^6.$$

Доказательство. Плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=y$, $y=z$, $z=x$ область шара разбивается на 48 равновеликих областей. В качестве представителя этих областей мы будем рассматривать область Ω, ограниченную неравенствами

$$0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{a^2-y^2}{2}}, \quad x \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-y^2-x^2}.$$

А проекцию этой области на плоскость XOY — плоскую область, ограниченную неравенствами

$$0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{a^2-y^2}{2}},$$

мы будем называть областью Π.

Каждой целой точке области Π приведем в соответствие длину Z принадлежащего области Ω отрезка аппликаты этой точки, а также свое число γ, равное 1 для внутренних точек области, равное 0 для начала координат и для точек линии $x=\sqrt{\frac{a^2-y^2}{2}}$, наконец, равное 0,5 для остальных точек контура области. Легко убедимся, что распространенная на целые точки области Π сумма $G=\sum\limits_{\Pi}\gamma Z$ с ошибкой $\ll a$ равна объему V_Ω области Ω.

Диофантово уравнение $x^2+y^2=a^2-z^2$ при заданном z имеет $\ll a^\varepsilon$ решений. Поэтому число целых точек на поверхности шара $\ll a^{1+\varepsilon}$. Рассмотрим распространенную на целые точки области Ω сумму $T_\Omega=\sum\limits_{\Omega}\mu$, где μ равно 1 для внутренних точек, равно 0 для точек ребер и точек поверхности шара, наконец, равно 0,5 для остальных точек границы области. Нетрудно видеть, что T_Ω с ошибкой $\ll R$

равно $\sum\limits_{\Pi}\gamma(Z-\{Z\}+0{,}5)=G-\sum\limits_{\Pi}\gamma(\{Z\}-0{,}5)$ и, следовательно, с ошибкой $\leqslant R$ равно $V_{\Omega}-\sum\limits_{\Pi}\gamma(\{Z\}-0{,}5)$. С другой стороны, нетрудно видеть, что складывая значения T_{Ω}, отвечающие всем 48 областям Ω, мы с ошибкой $\leqslant R$ получим T.

Следовательно, если для каждой области Ω нам удастся доказать неравенство

$$\sum_{\Pi}\gamma(\{Z\}-0{,}5)\leqslant R,$$

теорема 2 будет доказана. Это неравенство, поскольку $\{Z\}=\{z\}=\left\{\sqrt{a^2-y^2-x^2}\right\}$, может быть заменено равносильным

$$\sum_{(\Pi_0)}\left(\left\{\sqrt{a^2-y^2-x^2}\right\}-0{,}5\right)\leqslant R, \tag{18}$$

где суммирование распространено на целые точки близкой к Π области Π_0, ограниченной неравенствами

$$0<y\leqslant\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y<x\leqslant\sqrt{\frac{a^2-y^2}{2}}.$$

Число целых точек области Π_0 обозначим буквою Q.

Чтобы доказать неравенство (18), применим b) леммы 3. В качестве чисел δ_s возьмем дроби $\left\{\sqrt{a^2-y^2-x^2}\right\}$, входящие в левую часть неравенства, а функцию $\psi(\delta_s)$ рассматриваем при $\rho=6$, $\Delta=a^{-\frac{2}{3}}$. Неравенство (18) будет доказано, если нам удастся установить, что

$$\sum_{(\Pi_0)}\psi\left(\sqrt{a^2-y^2-x^2}\right)-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)Q\leqslant R.$$

Применяя же свойство 4 леммы 2, убедимся, что для этой цели, полагая

$$W_m=\sum_{(\Pi_0)}e^{-2\pi i m\sqrt{a^2-y^2-x^2}},$$

$$V=\sum_{m=1}^{\infty}g_m\overline{W}_m,\quad V'=\sum_{m=1}^{\infty}h_mW_m$$

и учитывая при этом неравенства

$$g_m \leqslant \varkappa_m, \ h_m \leqslant \varkappa_m; \qquad \varkappa_m = \begin{cases} \dfrac{1}{m}, & \text{если} \quad m \leqslant \Delta^{-1}, \\ \dfrac{1}{m^7\Delta^6}, & \text{если} \quad m > \Delta^{-1}, \end{cases}$$

достаточно доказать неравенства

$$V \leqslant R, \quad V' \leqslant R.$$

Мы докажем лишь второе неравенство. Первое неравенство доказывается аналогично.

Рассмотрим W_m при условии $m \leqslant a^{0,8}$. Находим

$$W_m = \sum_{0<y\leqslant \frac{a}{\sqrt{3}}} L_y; \quad L_y = \sum_{y<x\leqslant \sqrt{\frac{a^2-y^2}{2}}} e^{-2\pi i m\sqrt{a^2-y^2-x^2}}.$$

К сумме L_y применим лемму 6. Получим

$$\varphi(x) = 1, \ f(x) = -m\sqrt{a^2-y^2-x^2}, \ f'(x) = \frac{mx}{\sqrt{a^2-y^2-x^2}},$$

$$f''(x) = \frac{m(a^2-y^2)}{(a^2-y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f'''(x) = \frac{3m(a^2-y^2)x}{(a^2-y^2-x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Положив $H=1$, $U=a$, $A=\frac{a}{m}$, убедимся, что условия леммы 6 соблюдены. После несложных вычислений получим

$$L_y = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{\frac{my}{\sqrt{a^2-2y^2}}\leqslant u\leqslant m} \frac{m(a^2-y^2)^{\frac{1}{4}} e^{-2\pi i\sqrt{(a^2-y^2)(m^2+u^2)}}}{(m^2+u^2)^{\frac{3}{4}}} -$$

$$- \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \frac{m(a^2-y^2)^{\frac{1}{4}} e^{-2\pi i\sqrt{(a^2-y^2)2m^2}}}{(2m^2)^{\frac{3}{4}}} + O(T+\ln a);$$

$$T = \min\left(\frac{1}{(\Phi(y))}, \ \sqrt{\frac{a}{m}}\right); \quad \Phi(y) = \frac{my}{\sqrt{a^2-2y^2}}.$$

Теперь оценим сумму

$$S = \sum_{0<y\leqslant\frac{a}{\sqrt{3}}} (T+\ln a).$$

Все значения y можно разбить на $\ll m$ последовательностей с условием, что для чисел одной и той же последовательности при некотором k будем иметь

$$k < \Phi(y) \leqslant k+1.$$

Сумма значений T, отвечающих числам какой-либо заданной последовательности, будет

$$\ll \sqrt{\frac{a}{m}} + \sum_{0 < s \leqslant \frac{a}{m}} \frac{a}{ms} \ll \frac{a}{m} \ln a.$$

Поэтому будем иметь

$$S \ll a \ln a.$$

Далее мы оценим сумму

$$S' = \sum_{0 < y \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}}} \frac{m(a^2 - y^2)^{\frac{1}{4}} e^{-2\pi i \sqrt{(a^2 - y^2)\, 2m^2}}}{(2m^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Полагая

$$H = \sqrt{\frac{a}{m}}, \quad U = a, \quad A = \frac{a}{m},$$

убедимся, что в отношении этой суммы выполнены условия леммы 1. Поэтому

$$S' \ll \sqrt{\frac{a}{m}} \left(\frac{a}{\sqrt{\frac{a}{m}}} + \sqrt{\frac{a}{m}} \right) \ll a.$$

В результате всего доказанного будем иметь

$$W_m = \sum_{0 < y \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}}} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \times$$

$$\times \sum_{\frac{my}{\sqrt{a^2 - 2y^2}} \leqslant u \leqslant m} \frac{m(a^2 - y^2)^{\frac{1}{4}} e^{-2\pi i \sqrt{(a^2 - y^2)(m^2 + u^2)}}}{(m^2 + u^2)^{\frac{3}{4}}} + O(a \ln a).$$

Отсюда, меняя порядок суммирования, получим

$$W_m = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{0<u\leqslant m} W_{m,u} + O(a\ln a);$$

$$W_{m,u} = \sum_{0<y\leqslant \frac{au}{\sqrt{m^2+2u^2}}} \frac{m(a^2-y^2)^{\frac{1}{4}} e^{-2\pi i\sqrt{(a^2-y^2)(m^2+u^2)}}}{(m^2+u^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Полагая

$$f(y) = -\sqrt{(a^2-y^2)(m^2+u^2)}, \quad H = \sqrt{\frac{a}{m}},$$

$$U = a, \quad A = \frac{a}{m},$$

убедимся, что в отношении суммы $W_{m,u}$ выполнены все условия леммы 6. После несложных вычислений получим

$$W_{m,u} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{0<v\leqslant u} \frac{ame^{-2\pi ia\sqrt{m^2+u^2+v^2}}}{m^2+u^2+v^2} + O\left(\sqrt{\frac{a}{m}}\ln a\right).$$

Отсюда найдем

$$W_m = W'_m + O(a\ln a);$$

$$W'_m = \sum_{0<u\leqslant m}\ \sum_{0<v\leqslant u} \frac{iame^{-2\pi ia\sqrt{m^2+u^2+v^2}}}{m^2+u^2+v^2}.$$

В частности, будем иметь $W'_m \leqslant am$, $W_m \leqslant am + a\ln a$.

Переходим к выводу неравенства для V'. Пусть $M_0 = \left[a^{\frac{1}{3}}(\ln a)^2\right]$ и k_1 — наименьшее целое число с условием $M_0 \cdot 2^{k_1} > a^{\frac{11}{15}}$. Находим

$$\sum_{0<m\leqslant M_0} h_m W_m \leqslant a^{\frac{4}{3}}(\ln a)^2, \qquad \sum_{M_0\cdot 2^{k_1}<m\leqslant a^{\frac{7}{9}}} h_m W_m \leqslant a^{\frac{1}{3}},$$

$$\sum_{m>a^{\frac{7}{9}}} h_m W_m \leqslant a^{\frac{4}{3}}, \quad \sum_{M_0<m\leqslant M_0\cdot 2^{k_1}} h_m\, a\ln a \leqslant a(\ln a)^2.$$

(При выводе первого и второго неравенств берем $W_m \leqslant am + a\ln a$; при выводе третьего берем $W_m \leqslant a^2$.)

Поэтому

$$V' = V_0 + O\left(a^{\frac{4}{3}} (\ln a)^2\right); \quad V_0 = \sum_{M_0 < m \leqslant M_0 \cdot 2^{k_1}} h_m W'_m.$$

Сумму V_0 можно разбить на k_1 сумм вида

$$V_M = \sum_{M < m \leqslant 2M} h_m W'_m.$$

Полагая $\lambda_r = \frac{r}{4M}$, $\mu_s = \frac{s}{4M}$, легко найдем

$$V_M = \frac{1}{16M^2} \sum_{0 < r \leqslant 4M} \sum_{0 < s \leqslant 4M} \sum_{0 \leqslant k \leqslant 2M} \sum_{0 \leqslant l \leqslant 2M} \sum_{M < m \leqslant 2M} h_m \times$$

$$\times \sum_{0 < u \leqslant 2M} \sum_{0 < v \leqslant 2M} \frac{iame^{-2\pi i a \sqrt{m^2 + u^2 + v^2}}}{m^2 + u^2 + v^2} \times$$

$$\times e^{2\pi i \lambda_r (m - u - k) + 2\pi i \mu_s (u - v - l)}.$$

Пусть $\xi(z)$ обозначает число решений уравнения $m^2 + u^2 = z$ и пусть $V_{M, r, s}$ обозначает часть V_M, отвечающую данной паре значений r и s. Находим

$$\sum_k e^{-2\pi i \lambda_r k} \leqslant \min\left(M, \frac{1}{(\lambda_r)}\right), \quad \sum_l e^{-2\pi i \mu_s l} \leqslant \min\left(M, \frac{1}{(\mu_s)}\right),$$

$$V_{M, r, s} \leqslant \frac{a\varkappa_M}{M} \min\left(M, \frac{1}{(\lambda_r)}\right) \min\left(M, \frac{1}{(\mu_s)}\right) \times$$

$$\times \sum_z \xi(z) \left| \sum_v \frac{e^{-2\pi i (\mu_s v + a\sqrt{z + v^2})}}{z + v^2} \right|.$$

Отсюда, суммируя по всем значениям r и s и заменяя при этом в сумме по z число μ_s тем его значением μ, при котором модуль этой суммы получает наибольшее значение, получим

$$V_M \leqslant a\varkappa_M (\ln a)^2 \sum_z \xi(z) \left| \sum_v \frac{e^{-2\pi i (\mu v + a\sqrt{z + v^2})}}{z + v^2} \right|,$$

откуда, учитывая неравенство $\sum_z (\xi(z))^2 \leqslant M^2 (\ln a)^3$, найдем

$$V_M^2 \ll a^2 \varkappa_M^2 M^4 (\ln a)^7 E;$$

$$E =$$

$$= \sum_{0<v\leqslant 2M} \sum_{0<v_1\leqslant 2M} \sum_{M^2<z\leqslant 8M^2} \frac{e^{-2\pi i\left(\mu(v-v_1)+a\left(\sqrt{z+v^2}-\sqrt{z+v_1^2}\right)\right)}}{(z+v^2)(z+v_1^2)}.$$

Часть суммы E, отвечающая случаю $v=v_1$, очевидно, $\ll M^{-1}$. Оставшаяся часть разбивается на две суммы — сумму E_1 с условием $v<v_1$ и сумму E_2 с условием $v>v_1$. При этом $|E_2|=|E_1|$. Поэтому

$$E \ll M^{-1} + |E_1|.$$

Далее находим

$$12M^2 E_1 =$$

$$= \sum_{0\leqslant j<12M^2} \sum_{v} \sum_{v_1} \sum_{M^2<z\leqslant 8M^2} \sum_{M^2<g\leqslant 12M^2} e^{2\pi i \frac{j(g-z-v^2)}{12M^2}} \times$$

$$\times \frac{e^{2\pi i\left(\mu(v_1-v)+a\sqrt{g+v_1^2-v^2}-a\sqrt{g}\right)}}{(g+v_1^2-v^2)g} = 12M^2 \sum_j E_j;$$

$$E_j \ll \frac{1}{M^2}\min\left(M^2, \frac{1}{(\gamma_j)}\right) U_j; \qquad \gamma_j = \frac{j}{12M^2},$$

$$U_j = \sum_{\substack{v \\ v<v_1}} \sum_{v_1} \left| \sum_{M^2<g\leqslant 12M^2} \frac{e^{2\pi i\left(\gamma_j g+a\sqrt{g+v_1^2-v^2}-a\sqrt{g}\right)}}{(g+v_1^2-v^2)g} \right| \ll$$

$$\ll \sum_{0<t\leqslant 4M^2} \eta(t)\,|R_t|,$$

где $\eta(t)$ — число решений уравнения $v_1^2-v^2=t$ и

$$R_t = \sum_{M^2<g\leqslant 12M^2} \frac{e^{2\pi i\left(\gamma_j g+a\sqrt{g+t}-a\sqrt{g}\right)}}{(g+t)g}.$$

При натуральных k рассмотрим числа вида $\tau=4M^2 2^{-k}$. Пусть τ' с $k=k_1$ — наименьшее τ с условием $\tau\geqslant a^{\frac{2}{3}}$, а τ'' с $k=k_0$ — наименьшее τ с условием $\tau''\geqslant a^{\frac{1}{9}} M^{\frac{5}{3}}$.

Часть суммы U_i, отвечающая случаю $t\leqslant\tau'$, очевидно,

$$\ll \sum_{0<t\leqslant\tau'} \frac{\eta(t)}{M^2} \ll a^{\frac{2}{3}} M^{-2}\ln a.$$

Оставшуюся часть разобьем на $k_1\ll\ln a$ сумм вида

$$S_\tau = \sum_{\tau<t\leqslant 2\tau} \eta(t)\,|R_t|.$$

Сумма R_t имеет вид, рассмотренный в леммах 1 и 6. Здесь, полагая

$$f(g)=\gamma_j g + a\left(\sqrt{g+t}-\sqrt{g}\right),\quad \varphi(g)=\frac{1}{(g+t)\,g},$$

будем иметь

$$f'(g)=\gamma_j+\frac{a}{2}\left((g+t)^{-\frac{1}{2}}-g^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$f''(g)=\frac{a}{4}\left(g^{-\frac{3}{2}}-(g+t)^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$U=M^2,\ \frac{M^5}{at}\ll A\ll\frac{M^5}{at},\ f'''(g)\ll\frac{1}{AU},\ H\ll M^{-4}.$$

К случаю $\tau'\leqslant\tau<\tau''$ применим лемму 1. Получим

$$R_t\ll a^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{9}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}M^{-\frac{3}{2}},$$

$$S_\tau\ll\left(a^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}}M^{-\frac{9}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{3}{2}}\right)\ln a,$$

откуда найдем

$$\sum_{\tau'\leqslant\tau<\tau''} S_t\ll a^{\frac{2}{3}} M^{-2}(\ln a)^2.$$

Наконец рассмотрим случай $\tau''\leqslant\tau\leqslant 2M^2$. К сумме R_t применим лемму 6. Определив $g_{w,t}$ равенством $f'(g_{w,t})=w$ и полагая

$$f'(M^2)=w_1(t),\quad f'(12M^2)=w_2(t),$$

$$\Phi(w,\ t)=\frac{2}{g_{w,t}(g_{w,t}+t)\sqrt{a\left(g_{w,t}^{-3/2}-(g_{w,t}+t)^{-\frac{3}{2}}\right)}},$$

$$\Psi(w,\ t)=\gamma_j g_{w,t}+a\left(\sqrt{g_{w,t}+t}-\sqrt{g_{w,t}}\right)-wg_{w,t},$$

будем иметь

$$R_t = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{w_1(t) < w \leqslant w_2(t)} \Phi(w, t) e^{2\pi i \Psi(w, t)} + O\left(a^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} M^{-\frac{3}{2}}\right),$$

откуда получим

$$S_\tau \ll G + a^{-\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}} M^{-\frac{3}{2}} \ln a;$$

$$G = \sum_{\tau < t \leqslant 2\tau} \eta(t) \left| \sum_{w_1(t) < w \leqslant w_2(t)} \Phi(w, t) e^{2\pi i \Psi(w, t)} \right|.$$

При этом следует отметить, что

$$\sum_{\tau'' \leqslant \tau \leqslant 2M^2} a^{-\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}} M^{-\frac{3}{2}} \ll a^{-\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} \ll a^{\frac{2}{3}} M^{-2}.$$

Оценим сумму G. Очевидно, $w_1 = w_1(t)$ и $w_2 = w_2(t)$ — убывающие функции от t. Поэтому функции $t'(w_1)$ и $t''(w_2)$, обратные указанным, будут также убывающими функциями (от w_1 и от w_2). При этом w может принимать лишь значения с условием $w_1(2\tau) < w \leqslant w_2(\tau)$, а t при заданном w лишь значения с условиями

$$\max(\tau, t'(w)) < t \leqslant \min(2\tau, t''(w)).$$

Находим (возвышая в квадрат и затем меняя порядок суммирования)

$$G^2 \ll \tau (\ln a)^3 \sum_{w_1(2\tau) < w' \leqslant w_2(\tau)} \sum_{w_1(2\tau) < w \leqslant w_2(\tau)} B_{w', w};$$

$$B_{w', w} = \sum_{t' < t \leqslant t'} \Phi_0(t) e^{2\pi i \Psi_0(t)};$$

$$\Phi_0(t) = \Phi(w', t) \Phi(w, t), \quad \Psi_0(t) = \Psi(w', t) - \Psi(w, t);$$

$$t' = \max(\tau, t'(w'), t'(w)), \quad t'' = \min(2\tau, t''(w'), t''(w)).$$

Далее для суммы $B_{w', w}$ получаем

$$\Phi_0(t) \ll H, \quad t'' - t' \ll U; \quad H = a^{-1}\tau^{-1}M^{-3}, \quad U = \tau.$$

Поскольку $w_2(\tau) - w_1(2\tau) \ll a\tau M^{-3}$, сумма всех $|B_{w', w}|$ с условием $w' = w$ будет

$$\ll a\tau M^{-3} HU \ll \tau M^{-6}.$$

Рассмотрим сумму $B_{w',\,w}$ с условием $w' > w$ (очевидно, $B_{w,\,w'} = \bar{B}_{w',\,w}$). Воспользовавшись равенством

$$\gamma + \frac{a}{2}\left((g_{w,\,t}+t)^{-\frac{1}{2}} - g_{w,\,t}^{-\frac{1}{2}}\right) = w,$$

найдем (беря частные производные по t)

$$\frac{\partial (g_{w,\,t}+t)}{\partial t} = \frac{g_{w,\,t}^{-\frac{3}{2}}}{g_{w,\,t}^{-\frac{3}{2}} - (g_{w,\,t}+t)^{-\frac{3}{2}}}.$$

Далее, воспользовавшись тем же равенством, найдем (беря частные производные по w)

$$\frac{\partial g_{w,\,t}}{\partial w} = \frac{4}{a}\,\frac{1}{g_{w,\,t}^{-\frac{3}{2}} - (g_{w,\,t}+t)^{-\frac{3}{2}}}$$

и также

$$\frac{\partial \Psi(w,\,t)}{\partial t} = \frac{a}{2}\,(g_{w,\,t}+t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда получим

$$\frac{\partial^2 \Psi(w,\,t)}{\partial t^2} = -\frac{a}{4}\,(g_{w,\,t}+t)^{-\frac{3}{2}}\,\frac{\partial (g_{w,\,t}+t)}{\partial t} = -\frac{a}{4}\,\frac{1}{(g_{w,\,t}+t)^{\frac{3}{2}} - g_{w,\,t}^{\frac{3}{2}}}.$$

А так как

$$\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{\partial^2 \Psi(w,\,t)}{\partial t^2} = \frac{3}{8}\,a\,\frac{(g_{w,\,t}+t)^{\frac{1}{2}} - g_{w,\,t}^{\frac{1}{2}}}{\left((g_{w,\,t}+t)^{\frac{3}{2}} - g_{w,\,t}^{\frac{3}{2}}\right)^2}\,\frac{\partial g_{w,\,t}}{\partial w} = \Omega(w,\,t);$$

$$\Omega(w,\,t) = \frac{3}{2}\,\frac{(g_{w,\,t}+t)^{\frac{1}{2}} - g_{w,\,t}^{\frac{1}{2}}}{\left(g_{w,\,t}^{-\frac{3}{2}} - (g_{w,\,t}+t)^{-\frac{3}{2}}\right)\left((g_{w,\,t}+t)^{\frac{3}{2}} - g_{w,\,t}^{\frac{3}{2}}\right)^2},$$

то, применяя формулу Лагранжа, при некотором w''' с условием $w < w''' < w'$ будем иметь

$$\frac{\partial^2 \Psi_0(t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi(w',\,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi(w,\,t)}{\partial t^2} = (w'-w)\,\Omega(w''',\,t).$$

Отсюда, полагая $w'-w=\sigma$, $A=\tau^2M^{-2}\sigma^{-1}$, выводим

$$\frac{1}{A}\ll\frac{\partial^2\Psi(t)}{\partial t^2}\ll\frac{1}{A}.$$

Применяя же лемму 1, находим (здесь $H=a^{-1}\tau^{-1}M^{-3}$, $U=\tau$)

$$B_{w',w}\ll a^{-1}\tau^{-1}M^{-2}\sigma^{\frac{1}{2}},$$

откуда убедимся, что сумма всех $|B_{w',w}|$ с условием $w'>w$ будет

$$\ll(w_2(\tau)-w_1(2\tau))\sum_{0<\sigma<w_2(\tau)-w_1(2\tau)}a^{-1}\tau^{-1}M^{-2}\sigma^{\frac{1}{2}}\ll a^{\frac{3}{2}}\tau^{\frac{3}{2}}M^{-\frac{19}{2}}.$$

Следовательно,

$$G^2\ll\tau(\ln a)^3\left(\tau M^{-6}+a^{\frac{3}{2}}\tau^{\frac{3}{2}}M^{-\frac{19}{2}}\right),$$

$$S_\tau\ll\left(\tau M^{-3}+a^{\frac{3}{4}}\tau^{\frac{5}{4}}M^{-\frac{19}{4}}\right)(\ln a)^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{3}{2}},$$

$$U_j\ll a^{\frac{2}{3}}M^{-2}\ln a+\left(M^{-1}+a^{\frac{3}{4}}M^{-\frac{9}{4}}\right)(\ln a)^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}},$$

$$E\ll M^{-1}+|E_1|\ll$$

$$\ll\left(a^{\frac{2}{3}}M^{-2}+M^{-1}+a^{\frac{3}{4}}M^{-\frac{9}{4}}+a^{-\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}\right)(\ln a)^{\frac{5}{2}}\ll$$

$$\ll\left(a^{\frac{2}{3}}M^{-2}+M^{-1}\right)(\ln a)^{\frac{5}{2}},$$

$$V_M^2\ll a^2\varkappa_M^2M^4\left(a^{\frac{2}{3}}M^{-2}+M^{-1}\right)(\ln a)^{\frac{19}{2}},$$

$$V_M\ll a\varkappa_M M^2\left(a^{\frac{1}{3}}M^{-1}+M^{-\frac{1}{2}}\right)(\ln a)^{\frac{19}{4}}.$$

Поэтому при $M\leqslant a^{\frac{2}{3}}$ будем иметь

$$V_M\ll a^{\frac{4}{3}}(\ln a)^{\frac{19}{4}},$$

а при $M>a^{\frac{2}{3}}$ будем иметь

$$V_M\ll\frac{a^5}{M^{\frac{11}{2}}}(\ln a)^{\frac{19}{4}}.$$

Отсюда найдем

$$V_0\ll a^{\frac{4}{3}}(\ln a)^{\frac{23}{4}},\quad V'\ll a^{\frac{4}{3}}(\ln a)^{\frac{23}{4}}.$$

Теорема доказана.

Глава 2

Оценка $G(n)$ в проблеме Варинга

В этой главе дано применение моего метода к выводу оценки для функции $G(n)$ Харди и Литтльвуда, представляющей собою наименьшее натуральное число r, которому можно привести в соответствие какое-либо положительное число N_0 с условием, что уравнение

$$N = x_1^n + \ldots + x_r^n$$

будет разрешимо в целых положительных $x_1, \ldots, x_r$ при любом целом N, не меньшем чем N_0.

В 1919 г. Харди и Литтльвуд нашли для $G(n)$ верхнюю границу вида

$$G(n) \leqslant n2^{n-2}h; \quad \lim_{n \to \infty} h = 1,$$

растущую с возрастанием n как величина порядка $n2^n$.

В 1934 г. с помощью своего метода я нашел принципиально новую верхнюю границу [15]

$$G(n) < n(6 \ln n + 10).$$

Эта граница растет с возрастанием n как величина порядка $n \ln n$ и (ввиду известного неравенства $G(n) > n$) уже не может быть заменена границей существенно более низкого порядка. В дальнейшем мне удалось снизить лишь коэффициент при $\ln n$ в скобках и получить

$$G(n) < n(3 \ln n + 11) \text{ [16]},$$
$$G(n) < n(2 \ln n + 4 \ln \ln n + 2 \ln \ln \ln n + 13) \text{ [17]}.$$

Вывод второй из последних оценок и является целью этой главы. Приступая к выводу, будем предполагать $n > 170\,000$, поскольку в противном случае вторая оценка всегда хуже первой.

Лемма 1. *Пусть* k_0 — *целое*, $k_0 \geqslant 6$, $k = 2k_0$, $r = 2r_0$, $r_0 = [k^2(2\ln k + \ln\ln k + 2{,}6]$, Y_0 — *целое положительное число*, $y_1, \ldots, y_r$ *независимо друг от друга пробегают значения* $1, \ldots, Y_0$, *наконец*, $\eta_s = y_1^s + \ldots + y_{r_0}^s - y_{r_0+1}^s - \ldots - y_r^s$. *Тогда для числа* T *решений системы*

$$\eta_k = l_k, \ \ldots, \ \eta_1 = l_1$$

имеем неравенство

$$T \leqslant Y_0^{r - \frac{k(k+1)}{2}}.$$

Доказательство. Эта лемма является тривиальным видоизменением теоремы 4 гл. 4 монографии [2].

Лемма 2. *Пусть* $f(x)$ *в интервале* $M \leqslant x \leqslant M'$ — *вещественная дифференцируемая функция, причем внутри интервала* $f'(x)$ *монотонна и знакопостоянна и при постоянном* δ *с условием* $0 < \delta < 1$ *удовлетворяет неравенству* $|f'(x)| \leqslant \delta$. *Тогда имеем*

$$\sum_{M < x \leqslant M'} e^{2\pi i f(x)} = \int_M^{M'} e^{2\pi i f(x)}\, dx + \theta\left(3 + \frac{2\delta}{1-\delta}\right).$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 3 гл. 2 монографии [2].

Лемма 3. *Пусть* $P > 1$, z — *вещественное*,

$$I = \int_0^P e^{2\pi i z x^n}\, dx.$$

Тогда имеем

$$|I| \leqslant Z; \quad Z = \begin{cases} P, & \text{если } |z| \leqslant P^{-n}, \\ \sqrt{2}\,|z|^{-\nu}, & \text{если } |z| > P^{-n}. \end{cases}$$

Доказательство. Случай $|z| \leqslant P^{-n}$ очевиден. Поэтому рассмотрим лишь случай $|z| > P^{-n}$, причем, не нарушая общности, будем предполагать, что $z > 0$. Введя подстановку $zx^n = u$, получим

$$I = U + iV; \quad U = \int_0^\sigma \psi(u) \cos 2\pi u \, du,$$

$$V = \int_0^\sigma \psi(u) \sin 2\pi u \, du, \quad \sigma = zP^n, \quad \psi(u) = \nu u^{\nu-1} z^{-\nu},$$

где $\psi(u)$ — убывающая функция от u. Рассмотрим интеграл U. Интервал $0 \leqslant u \leqslant \sigma$ его интегрирования с помощью чисел вида $0{,}25 + 0{,}5l$ с целым l мы разобьем на части, в соответствии с чем интеграл U представится знакопеременным рядом. Отсюда будет следовать, что

$$|U| \leqslant \int_0^1 \psi(u) \, du = z^{-\nu}.$$

Рассуждая аналогично, получим

$$|V| \leqslant z^{-\nu}.$$

Поэтому

$$|I| \leqslant \sqrt{z^{-2\nu} + z^{-2\nu}} = \sqrt{2}\, z^{-\nu}.$$

Лемма 4. *Пусть*

$$S_{a,q} = \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} x^n}, \quad q > 0, \quad (a, q) = 1.$$

Тогда имеем

$$|S_{a,q}| \ll q^{1-\nu}.$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма вопроса 11б гл. VI книги [1].

Лемма 5. *Пусть N_0 — целое положительное число и $S_{a,q}$ имеет значение, указанное в лемме 4. Тогда, полагая*

$$A(q) = \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 0 \leqslant a < q}} \left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{4n} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N_0}, \quad \mathfrak{S}(N_0) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q),$$

будем иметь

$$\mathfrak{S} \gg 1.$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 11 гл. 6 монографии [2].

Лемма 6. *Пусть r — целое положительное число, $N_1>0$, $K_r(N_1)$ — число решений в целых положительных $x_1, \ldots, x_r$ неравенства*

$$x_1^n+\ldots+x_r^n \leqslant N_1.$$

Тогда

$$K_r(N_1)=T_r N_1^{r\nu}-\theta r N_1^{r\nu-\nu}; \quad T_r=\frac{(\Gamma(1+\nu))^r}{\Gamma(r\nu+1)}, \quad \theta>0.$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 2 гл. 6 монографии [2].

Специальные обозначения. Пусть N_0 — целое число с условием $0{,}5N \leqslant N_0 \leqslant N$, $P=[N^\nu+1]$,

$$\tau=2nP^{n-1}, \quad X_0=[\sqrt{P}], \quad \tau_0=X_0^{n-0{,}5}, \quad \gamma=0{,}25(1-0{,}5\nu),$$

$$L_\alpha=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha x^n}.$$

Всякое число α интервала $-\tau^{-1} \leqslant \alpha \leqslant 1-\tau^{-1}$ мы представим (что всегда возможно) в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+z, \quad (a, q)=1, \quad 0 \leqslant a<q, \quad 0<q \leqslant \tau, \quad |z|<\frac{1}{q\tau}. \tag{1}$$

При этом мы назовем основным интервалом, отвечающим дроби $\frac{a}{q}$, всякий, где выполнено условие

$$q \leqslant P^\gamma;$$

очевидно, основные интервалы не перекрываются. Интервалы, оставшиеся после выделения основных интервалов, мы назовем дополнительными интервалами.

Лемма 7. *Пусть N_1 — целое, $N_0-P^{n-\nu} \leqslant N_1 \leqslant N_0$,*

$$I'(N_1)=\int_0^1 L_\alpha^{4n} e^{-2\pi i\alpha N_1}\, d\alpha$$

и пусть $I_0'(N_1)$ — часть интеграла $I'(N_1)$, распространенная на основные интервалы. Тогда

$$I_0'(N_0) \gg N^3.$$

Доказательство. Пусть $M=[0{,}5P^{n-\nu}+1]$, $N_0-2M \leqslant N_1 \leqslant N_0$. Пусть $H_{a,q}(N_1)$ — часть интеграла $I'(N_1)$, распространенная на основной интервал, отвечающий дроби $\frac{a}{q}$, и пусть α — какое-либо число этого интервала. Преобразовав сумму L_α подстановкой $x=qt+s$, где s пробегает числа $0, 1, \ldots, q-1$, а t при заданном s пробегает целые числа интервала $-sq^{-1}<t\leqslant(P-s)q^{-1}$, получим

$$L_\alpha=\sum_s\sum_t e^{2\pi i\left(\frac{as^n}{q}+z(qt+s)^n\right)}=\sum_s e^{2\pi i\frac{as^n}{q}}D(z);$$

$$D(z)=\sum_t e^{2\pi iz(qt+s)^n}.$$

Но в указанном для t интервале имеем

$$\left|\frac{d}{dt}z(qt+s)^n\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

Поэтому, согласно лемме 2, получим

$$D(z)=\int\limits_{-sq^{-1}}^{(P-s)q^{-1}}e^{2\pi iz(qt+s)^n}dt+5\theta=\frac{1}{q}\psi+5\theta;$$

$$\psi=\int\limits_0^P e^{2\pi izx^n}dx,\quad L_\alpha=\psi\frac{S_{a,q}}{q}+5\theta' q;$$

но, согласно леммам 3 и 4, находим

$$\psi\ll Z,\ \frac{S_{a,q}}{q}\ll q^{-\nu},\ \psi\frac{S_{a,q}}{q}\ll Zq^{-\nu};$$

$$Z=\begin{cases}P, & \text{если } |z|\leqslant P^{-n},\\ |z|^{-\nu}, & \text{если } |z|>P^{-n}.\end{cases}$$

Очевидно, $Zq^{-\nu}>q$; поэтому

$$L_\alpha^{4n}e^{-2\pi i\alpha N_1}=\psi^{4n}\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{4n}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1-2\pi izN_0}+O(f);$$

$$f=Z^{4n-1}q^{-3+\nu}+Z^{4n}q^{-4}zP^{n-\nu}.$$

Отсюда выводим

$$H_{a,q}(N_1)=\left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{4n}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N_1}R_q(N_0)+F;$$

$$R_q(N_0)=\int\limits_{-(q\tau)^{-1}}^{(q\tau)^{-1}}\psi^{4n}e^{-2\pi izN_0}dz,\quad F\ll\int\limits_0^{(q\tau)^{-1}}f\,dz\ll P^{3n-\nu}q^{-3+\nu}.$$

Далее, легко выводим

$$\int_{-\infty}^{-(q\tau)^{-1}} \psi^{4n} e^{-2\pi i z N_0}\, dz + \int_{(q\tau)^{-1}}^{\infty} \psi^{4n} e^{-2\pi i z N_0}\, dz \ll P^{3n-3} q^3.$$

Следовательно,

$$H_{a,q}(N_1) = \left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{4n} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N_1} R(N_0) + O(P^{3n-\nu} q^{-3+\nu});$$

$$R(N_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{4n} e^{-2\pi i z N_0}\, dz.$$

Но находим

$$I'(N_1) = \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} L_\alpha^{4n} e^{-2\pi i \alpha N_1}\, d\alpha + \int_{\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} L_\alpha^{4n} e^{-2\pi i \alpha N_1}\, d\alpha,$$

где левая часть есть число представлений числа N_1 в виде $x_1^n + \ldots + x_{4n}^n$ с целыми положительными $x_1, \ldots, x_{4n}$, а первое слагаемое правой части равно

$$H_{0,1}(N_1) = R(N_0) + O(P^{3n-\nu}).$$

Поэтому

$$\sum_{N'=1}^{M} \sum_{N''=1}^{M} I'(N_0 - N' - N'') = M^2 R(N_0) + G,$$

где

$$G \ll M^2 P^{3n-\nu} + P^{4n} \int_{\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} \frac{d\alpha}{4(\alpha)^2} \ll M^2 P^{3n-\nu}$$

и, согласно лемме 6, левая часть равна $4T_{4n} N^3 M^2 + O(N^{3-\nu^2} M^2)$. Отсюда следует, что

$$R(N_0) = 4T_{4n} N_0^3 + O(P^{3n-\nu}),$$

$$H_{a,q}(N_0) = 4T_{4n} N_0^3 \left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^{4n} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N_0} + O(P^{3n-\nu} q^{-3+\nu}).$$

Просуммировав это равенство по всем a, отвечающим данному q, и затем результат — по всем $q = 1, \ldots, [P^\nu]$, получим

$$I_0'(N_0) = 4T_{4n} N_0^3 \sum_{0 < q \leqslant P^\gamma} A(q) + O(P^{3n-\nu}).$$

Но $A(q) \ll q^{-3}$. Поэтому $\sum\limits_{q > P^{\gamma}} A(q) \ll P^{-2\gamma}$,

$$I_0'(N_0) = 4T_{4n} N_0^3 \mathfrak{S}(N_0) + O(P^{3n-\nu}).$$

Следовательно,

$$I_0'(N_0) \gg N^3$$

и, таким образом, лемма 7 доказана.

Теорема. *При целом n с условием $n > 170\,000$ имеем*

$$G(n) < n(2 \ln n + 4 \ln \ln n + 2 \ln \ln \ln n + 13).$$

Доказательство. Пусть

$$k_0 = [0{,}5 \ln n], \; k = 2k_0, \; r' = [k^2 (\ln k + 0{,}5 \ln \ln k + 1{,}3)],$$

$$r_0 = 2r', \; r = 2r_0, \; \delta = \frac{n - k_0 - 0{,}5}{n - 0{,}5}, \; k_2 = 3n.$$

Полагая

$$X_j = \left[X_0^{\delta^j}\right], \quad Y_j = [\sqrt{X_j}], \quad j = 0, \ldots, k_2 - 1,$$

рассмотрим переменные A_j' и A_j'', независимо друг от друга пробегающие значения

$$(X_j + y_{j,1})^n + \ldots + (X_j + y_{j,r'})^n, \quad y_{j,t} = 1, \ldots, Y_j.$$

Далее рассмотрим переменные $A_{j,1}$ и $A_{j,2}$, независимо друг от друга пробегающие значения $A_j' - A_j''$, и, наконец, рассмотрим переменное A_j, пробегающее значения $A_{j,1} - A_{j,2}$. Нетрудно видеть, что все значения $A_{j,1}$ (и $A_{j,2}$) подчинены неравенствам $-r_0 n X_j^{n-1} Y_j < A_{j,1} < r_0 n X_j^{n-1} Y_j$, а все значения A_j подчинены неравенствам $-rnX_j^{n-1} Y_j < A_j < rnX_j^{n-1} Y_j$.

Теперь рассмотрим переменные W_1 и W_2, независимо друг от друга пробегающие значения

$$A_{0,1} + \ldots + A_{k_2-1,1},$$

и переменное W, пробегающее значения $W_1 - W_2$.

Очевидно, при некотором c_2 все значения W_1 (и W_2) подчинены неравенствам $-c_2 X_0^{n-0{,}5} < W_1 < c_2 X_0^{n-0{,}5}$, и если для любого x, лежащего в интервале $-c_2 X_0^{n-0{,}5} < x < c_2 X_0^{n-0{,}5}$, $\xi(x)$ обозначает число решений уравнения $W_1 = x$, то распространенная на все значения x этого интервала сумма

$$\sum (\xi(x))^2$$

равна числу решений уравнения $W=0$; оценим это число.

Переменное W можно представить в виде

$$W = A_0 + \ldots + A_{k_2-1}, \tag{2}$$

где, очевидно,

$$A_j = X_j^{n-1} U_j^{(1)} + \ldots + X_j^{n-k} U_j^{(k)} + \ldots + X_j U_j^{(n-1)} + U_j^{(n)};$$

$$U_j^{(s)} = \binom{n}{s} \eta_j^{(s)}; \quad \eta_j^{(s)} = y_{j,1}^s + \ldots + y_{j,r_0}^s - y_{j,r_0+1}^s - \ldots - y_{j,r}^s$$

(каждое $y_{j,t}$ пробегает значения $1, \ldots, Y_j$). При этом $U_j^{(s)}$ подчинено неравенствам $-r_0 n^s Y_j^s < U_j^{(s)} < r_0 n^s Y_j^s$ и, согласно лемме 1, число решений системы $U_j^{(1)} = l_j^{(1)}, \ldots$ $\ldots, U_j^{(k)} = l_j^{(k)}$ будет

$$\leqslant Y_j^{r - \frac{k(k+1)}{2}}.$$

Рассмотрим сумму

$$B_j = X_j^{n-1} l_j^{(1)} + \ldots + X_j^{n-k} l_j^{(k)},$$

где $l_j^{(s)}$ пробегает целые числа интервала $-r_0 n^s Y_j^s < l_j^{(s)} <$ $< r_0 n^s Y_j^s$. Нетрудно видеть, что в интервале длиною X_j^{n-k} лежит

$$\leqslant \frac{Y_j^2}{X_j} \frac{Y_j^3}{X_j} \ldots \frac{Y_j^k}{X_j} = Y_j^{\frac{k(k+1)}{2} - 1} X_j^{-k+1}$$

значений B_j. Поэтому в интервале длиною $X_j^{n-k_0-0,5}$ лежит

$$\leqslant X_j^{k_0 - 0,5} Y_j^{\frac{k(k+1)}{2} - 1} X_j^{-k+1} Y_j^{r - \frac{k(k+1)}{2}} \leqslant Y_j^r X_j^{-k_0}$$

значений A_j. Отсюда и из (2) следует, что в интервале длиною $X_{k_2-1}^{n-k_0-0,5}$ лежит

$$\leqslant D; \quad D = (Y_0 \ldots Y_{k_2-1})^r (X_0 \ldots X_{k_2-1})^{-k_0} \leqslant$$

$$\leqslant (Y_0 \ldots Y_{k_2-1})^r X_0^{-(n-0,5)(1-\delta^{k_2})}$$

значений W. Тем более число решений уравнения $W=0$ будет $\leqslant D$.

Пусть $R=[X_0^{1-0,5\nu}]$ и v пробегает простые числа интервала $R<v\leqslant 2R$ (известно, что при некоторых c_3 и c_4 для числа R_0 таких простых чисел будем иметь

$$c_3\frac{R}{\ln R}<R_0<c_4\frac{R}{\ln R}\Big).$$

Пусть далее w пробегает числа

$$(X_0+y_0)^n+\ldots+(X_{k_2-1}+y_{k_2-1})^n;\quad y_j=1,\ \ldots,\ Y_j.$$

Рассмотрим сумму

$$Q_\alpha=\sum_v\sum_w e^{2\pi i\alpha v^n w}.$$

Находим

$$Q_\alpha^{r_0}\leqslant R_0^{r_0-1}V;\quad V=\sum_v\Big|\sum_w e^{2\pi i\alpha v^n w}\Big|^{r_0},$$

где V может быть представлено в виде

$$V=\sum_v\sum_W e^{2\pi i\alpha v^n W}=\sum_v\sum_x \xi(x)\,e^{2\pi i\alpha v^n x}. \tag{3}$$

Представив α в виде $\alpha=\frac{a}{q}+z$, $(a,\ q)=1$, $0\leqslant a<q$, $0<q\leqslant\tau_0$, $|z|\leqslant\frac{1}{q\tau_0}$, оценим сумму Q_α для значений α, принадлежащих дополнительным интервалам. При этом (очевидно, не нарушая общности) будем считать, что $z\geqslant 0$.

Сначала рассмотрим случай $q\geqslant R$. Находим

$$V\leqslant\sum_x\Big|\sum_{y=0}^{q-1}\xi(x)\,\eta(y)\,e^{2\pi ix\frac{ay+\psi(y)}{q}}\Big|,$$

где $0\leqslant\psi(y)<1$ и $\eta(y)$ — число решений сравнения $v^n\equiv y\ (\mathrm{mod}\ q)$. При этом имеем

$$\sum(\xi(x))^2\leqslant D,\ \ \eta(y)\leqslant q^\varepsilon.$$

Далее находим (y_1 независимо от y пробегает те же значения, что и y)

$$V^2\leqslant D\sum_x\sum_y\sum_{y_1}\eta(y)\,\eta(y_1)\,e^{2\pi ix\Phi(y,\ y_1)};$$

$$\Phi(y,\ y_1)=\frac{a(y-y_1)+\psi(y)-\psi(y_1)}{q},$$

$$V^2\leqslant Dq^{2\varepsilon}\sum_{y_1}\sum_y\min\Big(X_0^{n-0,5},\ \frac{1}{(\Phi(y,\ y_1))}\Big).$$

Пусть ρ при заданном y_1 обозначает абсолютно наименьший вычет числа $d(y-y_1)$ по модулю q. Тогда

$$(\Phi(y, y_1)) = \left(\frac{\rho+\sigma(\rho)}{q}\right); \quad |\sigma(\rho)| < 1.$$

Поэтому, расположив слагаемые суммы по y в порядке неубывания значений $|\rho|$, мы не уменьшим значения этой суммы, если не более чем три первых слагаемых заменим числом $X_0^{n-0,5}$, не более чем два следующих — числом $\frac{q}{1}$, не более чем два следующих — числом $\frac{q}{2}$ и т. д. Получим

$$V^2 \leqslant Dq^{2\varepsilon} \sum_{y_1} \left(X_0^{n-0,5} + \sum_{s=1}^{q} \frac{q}{s} \right) \leqslant Dq^{3\varepsilon} R_0 X_0^{n-0,5} \leqslant$$

$$\leqslant (Y_0 \ldots Y_{k_2-1})^r R_0^2 X_0^{-(1-0,5\nu)+(n-0,5)\delta^{k_2}+\varepsilon_1}, \tag{4}$$

$$Q_\alpha \leqslant Q' P^{-\sigma}; \quad \sigma = \frac{1-0,5\nu-(n-0,5)\delta^{k_2}+\varepsilon'}{2r_0},$$

где $Q' = (Y_0 \ldots Y_{k_2-1}) R_0$ есть число слагаемых суммы Q_α.

Далее рассмотрим случай $\sqrt{R} < q \leqslant R$. Здесь с незначительными изменениями пригодно доказательство, данное для предыдущего случая; именно в неравенстве (4) теперь вместо $q^{3\varepsilon}$ надо взять $\frac{R^2}{q^2} q^{\varepsilon}$, а вместо R_0 надо взять q. Получим

$$V^2 \leqslant D \frac{R^2}{q} q^{\varepsilon} X_0^{n-0,5},$$

в соответствии с чем прежнее σ теперь заменится новым

$$\sigma_1 = \frac{0,5(1-0,5\nu)-(n-0,5)\delta^{k_2}+\varepsilon'}{2r_0}.$$

Наконец, рассмотрим случай $q < \sqrt{R}$. Здесь имеем

$$\frac{1}{q\tau} < z < \frac{1}{q\tau_0}.$$

Часть суммы (3), отвечающая при заданном s, взятом из ряда $0, \ldots, q-1$, значениям v вида $qt+s$ (с целым t) может быть представлена в виде

$$V_s = \sum_x \sum_t \xi(x) \eta(t) e^{2\pi i x \Phi(t)}; \quad \Phi(t) = \frac{as^n}{q} + z(qt+s)^n,$$

где t пробегает целые числа с условием $R < (qt+s) \leqslant 2R$, а $\eta(t)$ равно 1 или 0, в зависимости от того, является $qt+s$ простым числом, или нет. Отсюда выводим

$$V_s^2 \leqslant X' \sum_{t_1} F;$$

$$F = \sum_t \min\left(X_0^{n-0,5},\ \frac{1}{(\Phi(t) - \Phi(t_1))}\right); \quad X' = \sum_x (\xi(x))^2.$$

Но при переходе t от какого-либо значения к значению, на единицу большему (если такое имеется), функция $\Phi(t)$ возрастает на число вида

$$nz(qt + q\theta + s)^{n-1} q,$$

не выходящее из границ

$$qA^{-1} \quad \text{и} \quad q \cdot 2^{n-1} A^{-1}; \quad A^{-1} = nzR^{n-1},$$

которые в свою очередь не выходят из границ

$$\frac{1}{R} \quad \text{и} \quad \frac{1}{X_0^{n-0,5-0,5\nu}}.$$

Поэтому, располагая слагаемые суммы F в порядке неубывания значений $(\Phi(t) - \Phi(t_1))$, мы не уменьшим значения этой суммы, если не более чем три первых слагаемых заменим числом $X_0^{n-0,5}$, не более чем два следующих — числом $\frac{A}{1}$, не более чем два следующих — числом $\frac{A}{2}$ и т. д. Получим

$$F \leqslant X_0^{n-0,5} + \sum_{s=1}^{R} \frac{A}{s} \leqslant X_0^{n-0,5},$$

$$V^2 \leqslant X' R_0 X_0^{n-0,5}, \quad Q_\alpha \leqslant Q' P^{-\sigma_1}.$$

Таким образом, всегда имеем

$$Q_\alpha \leqslant Q' P^{-\sigma_1}.$$

Пусть $P_0 = [0{,}25P]$, $P_1 = [0{,}5P_0^{1-\nu}]$, ..., $P_{k_3-1} = [0{,}5P_{k_3-2}^{1-\nu}]$, $k_3 = [n(\ln n + 2\ln\ln n + \ln\ln\ln n + 3)]$ и ξ_s пробегает значения P_s^n, $(P_s+1)^n$, ..., $(2P_s-1)^n$. Составим числа

$$u = \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_{k_3-1}.$$

Эти числа не равны между собою. Они удовлетворяют условию

$$P_0^n < u < (2P_0)^n;$$

число U этих чисел равно $P_0 \, P_1 \ldots P_{k_3-1}$. Оно удовлетворяет условию

$$U \gg P^{n-n(1-\nu)^{k_3}}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I(N) = \int_{-\tau_0^{-1}}^{-\tau_0^{-1}+1} L_\alpha^{4n} Q_\alpha S_\alpha^2 e^{-2\pi i \alpha N} \, d\alpha;$$

$$L_\alpha = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \alpha x^n}, \quad S_\alpha = \sum_u e^{2\pi i \alpha u}.$$

В соответствии с данным выше делением интервала интегрирования на основные и дополнительные интервалы интеграл $I(N)$ разобьется на сумму двух слагаемых:

$$I(N) = I_0(N) + I_1(N).$$

Сначала оценим $I_1(N)$. Находим (при некотором c_5)

$$I_1(N) \ll P^{4n} Q' U^2 P^{-n-\sigma_1+n(1-\nu)^{k_3}} \ll P^{4n} Q' U^2 P^{-n} P^{-c_5}.$$

Далее оценим $I_0(N)$. Очевидно (u_1 пробегает те же значения, что и u),

$$I_0(N) = \sum_v \sum_w \sum_u \sum_{u_1} I_0'(N - vw - u - u_1),$$

где $0{,}5N < N - vw - u - u_1 < N$. Поэтому, применяя лемму 7, найдем

$$I_0(N) \gg P^{3n} Q' U^2 \asymp P^{4n} Q' U^2 P^{-n}.$$

Из доказанного следует, что $I(N) \gg P^{4n} Q' U^2 P^{-n} > 0$, следовательно, N представляется суммою

$$4n + k_2 + 2k_3 \leqslant n(2 \ln n + 4 \ln \ln n + 2 \ln \ln \ln n + 13)$$

слагаемых вида x^n с целым положительным x. Теорема доказана.

Глава 3

Приближения дробными частями значений целого многочлена

В этой главе дается применение моего метода к вопросу о приближении к заданной правильной дроби посредством дробных частей значений целого многочлена [18]. Полученная теорема замечательна тем, что при малом количестве g значащих членов из нее в рассматриваемом вопросе можно извлечь результаты, значительно более точные чем те, которые можно извлечь из теоремы 1 гл. 5 монографии [2].

Специальные обозначения. Пусть $f(x)=a_h x^h+\ldots+a_n x^n$ — вещественный многочлен с g значащими членами, с положительными показателями, расположенными в возрастающем порядке, с $n>4$ и с суммою $h+\ldots+n$ показателей, равной D. Пусть f — один из показателей и приняты обозначения

$$\gamma=\frac{1}{g}, \quad \varphi=\frac{1}{f}, \quad \nu=\frac{1}{n}, \quad \rho=\frac{\gamma\varphi\nu}{4}\,\frac{\ln D}{(\ln D+1)\ln(D\ln D+D)}.$$

Пусть a_f представлено в виде

$$a_f=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q)=1, \quad q\geqslant c_0,$$

где c_0 достаточно велико. Тогда положим

$$b=\left[\frac{\ln(D\ln D+D)}{-\ln(1-\nu)}+1\right],$$

$$p=\left[\left(\frac{q}{2}\right)^{\varphi}\right], \; p_t=p^{(1-\nu)^{t-1}}; \; t=1, \ldots, b, \; \sigma=(1-\nu)^b.$$

Пусть, наконец,

$$\Delta=q^{-\rho}, \; M=q^{\rho(1+\varepsilon_1)}, \; \beta=[(b+1)g\varepsilon_1^{-1}+1],$$

где ε_1 выбрано достаточно малым.

Выбрав возрастающий ряд положительных меньших единицы постоянных $c_1, \ldots, c_g$ с неравным нулю определителем

$$\begin{vmatrix} c_1^{h-1} & \ldots & c_g^{h-1} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ c_1^{n-1} & \ldots & c_g^{n-1} \end{vmatrix}$$

и полагая

$$X_{t,s}=[p_t c_5],\ \xi_t=\left[p_t^{1-\varepsilon}\right];\quad t=1, \ldots, b,\quad s=1, \ldots, g,$$

обозначим символом $x_{t,s}$ переменное, пробегающее целые числа интервала

$$X_{t,s}-\xi_t<x_{t,s}\leqslant X_{t,s}+\xi_t.$$

Символом $G_{t,s}$ обозначим число $2\xi_t$ чисел $x_{t,s}$, а символом G обозначим число систем $(x_{1,1}, \ldots, x_{1,g}, \ldots, x_{b,1}, \ldots \ldots, x_{b,g})$. Очевидно,

$$G=G_{1,1} \ldots G_{1,g} \ldots G_{b,1} \ldots G_{b,g} \gg (p_1 \ldots p_b)^{g(1-\varepsilon)}.$$

Взяв при каждом $t=1, \ldots, b$ какие-либо свои целые $m_{t,1}, \ldots, m_{t,g}$ с условием $0<m_{t,s}\leqslant M$, полагаем

$$U_{t,r}=m_{t,1}x_{t,1}^r+\ldots+m_{t,g}x_{t,g}^r,$$
$$U_r=U_{1,r}+\ldots+U_{b,r};\ r=h, \ldots, n.$$

1. Число решений некоторой системы уравнений. Наметив некоторые интервалы с длинами

$$Mp_t^{h-1}, \ldots, Mp_t^{n-1},$$

оценим число Φ_t' систем $(x_{t,1}, \ldots, x_{t,g})$, при которых $U_{t,h}, \ldots, U_{t,n}$ соответственно лежат в этих интервалах. Пусть $(x_1, \ldots, x_g)$, $(x_1+\zeta_1, \ldots, x_g+\zeta_g)$ — две такие системы. Тогда

$$m_{t,1}\left((x_1+\zeta_1)^h-x_1^h\right)+\ldots+m_{t,g}\left((x_g+\zeta_g)^h-x_g^h\right)=\theta_h M p_t^{h-1}$$
$$\cdot\ \cdot$$
$$m_{t,1}\left((x_1+\zeta_1)^n-x_1^n\right)+\ldots+m_{t,g}\left((x_g+\zeta_g)^n-x_g^n\right)=\theta_n M p_t^{n-1},$$

что приводится к виду

$$m_{t,1}c_1^{h-1}\beta_{h,1}\zeta_1+\ldots+m_{t,g}c_g^{h-1}\beta_{h,g}\zeta_g=\frac{\theta_h}{h}M$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_{t,1}c_1^{n-1}\beta_{n,1}\zeta_1+\ldots+m_{t,g}c_g^{n-1}\beta_{n,g}\zeta_g=\frac{\theta_n}{n}M,$$

где при достаточно большом $c_0=c_0(\varepsilon,\ n)$ все $\beta_{r,s}$ будут настолько близки к единице, что определитель

$$\begin{vmatrix} c_1^{h-1}\beta_{h,1}, & \ldots, & c_g^{h-1}\beta_{h,g} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^{n-1}\beta_{n,1}, & \ldots, & c_g^{n-1}\beta_{n,g} \end{vmatrix}$$

будет $\gg 1$. Отсюда легко найдем

$$m_{t,s}\zeta_s \ll M,\quad \zeta_s \ll \frac{M}{m_{t,s}};\quad s=1,\ \ldots,\ g.$$

Поэтому

$$\Phi_t' \ll \frac{M^g}{m_{t,1}\ldots m_{t,g}}.$$

Далее, наметив некоторые интервалы с длинами

$$Mp_t^{h(1-\nu)},\ \ldots,\ Mp_t^{n(1-\nu)},$$

оценим число Φ_t систем $(x_{t,1},\ \ldots,\ x_{t,g})$, при которых $U_{t,h},\ \ldots,\ U_{t,n}$ соотьетственно лежат в этих интервалах. В силу

$$\frac{Mp_t^{h(1-\nu)}}{Mp_t^{h-1}}\cdots\frac{Mp_t^{n(1-\nu)}}{Mp_t^{n-1}}=p_t^{-\nu D+g}$$

будем иметь

$$\Phi_t \ll \frac{M^g p_t^{-\nu D+g}}{m_{t,1}\ldots m_{t,g}}.$$

Для чисел $U_{t,r}$ также имеем неравенство

$$U_{t,r} \ll Mp_t^r.$$

Пусть $\psi(z_h,\ \ldots,\ z_n)$ обозначает число решений системы

$$U_h=z_h,\ \ldots,\ U_n=z_n.$$

При заданных системах

$$(z_h, \ldots, z_n)$$
$$(U_{1,h}, \ldots, U_{1,n})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(U_{t-1,h}, \ldots, U_{t-1,n})$$

числа системы $(U_{t,h}, \ldots, U_{t,n})$ будут попадать в определенные интервалы с длинами соответственно

$$\leqslant Mp_t^{h(1-\nu)}, \ldots, \leqslant Mp_t^{n(1-\nu)}$$

и, следовательно, число различных таких систем будет $\leqslant \Phi_t$. Поэтому

$$\psi(z_h, \ldots, z_n) \leqslant \Phi;$$

$$\Phi = \Phi_1 \ldots \Phi_b = \frac{M^{gb}(p_1 \ldots p_b)^{g-\nu D}}{m_{1,1} \ldots m_{1,g} \ldots m_{b,1} \ldots m_{b,g}}. \tag{1}$$

Для числа U_r также имеем неравенство

$$U_r \leqslant Mp^r. \tag{2}$$

2. Оценка основной суммы. Оценим сумму

$$T = \sum_{y=1}^{p} \left| \sum\nolimits_0 e^{2\pi i(\alpha_h y^h U_h + \ldots + \alpha_n y^n U_n)} \right|,$$

где $\sum_0$ обозначает сумму, распространенную на все G систем $(x_{1,1}, \ldots, x_{1,g}, \ldots, x_{b,1}, \ldots, x_{b,g})$, т. е. на все G систем $(U_h, \ldots, U_n)$. Находим

$$T^2 \leqslant p \sum_{y=1}^{p} \sum\nolimits_0 \sum\nolimits_0 e^{2\pi i(\alpha_h y^h (U'_h - U_h) + \ldots + \alpha_n y^n (U'_n - U_n))},$$

где системы $(U'_h, \ldots, U'_n)$ — те же, что и системы $(U_h, \ldots, U_n)$.

Пусть $\Psi(u_h, \ldots, u_n)$ — число решений системы

$$U'_h - U_h = u_h, \ldots, U'_n - U_n = u_n. \tag{3}$$

В силу (1), очевидно, имеем

$$\Psi(u_h, \ldots, u_n) \leqslant G\Phi.$$

Согласно (2) существуют $c^{(h)}, \ldots, c^{(n)}$ с условием, что система (3) возможна лишь при $u_h, \ldots, u_n$, лежащих соответственно в интервалах

$$-c^{(h)}Mp^h \leqslant u_h \leqslant c^{(h)}Mp^h, \ \ldots, \ -c^{(n)}Mp^n \leqslant u_n \leqslant c^{(n)}Mp^n.$$

Заставляя $u_h, \ldots, u_n$ пробегать целые числа этих интервалов, находим

$$\sum_{u_h}\ldots\sum_{u_n}(\Psi(u_h, \ldots, u_n))^2 \leqslant$$

$$\leqslant G\Phi\sum_{u_h}\ldots\sum_{u_n}\Psi(u_h, \ldots, u_n) = G^3\Phi.$$

Из доказанного следует

$$|T|^2 \leqslant p\sum_{u_h}\ldots\sum_{u_n}\Psi(u_h, \ldots, u_n)\sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i(\alpha_h y^h u_h + \ldots + \alpha_n y^n u_n)},$$

$$T^4 \leqslant \frac{p^2G^3\Phi}{Mp^f}\sum_{u_h}\ldots$$

$$\ldots\sum_{u'_f}\sum_{u_f}\ldots\sum_{u_n}\left|\sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i(\alpha_h y^h u_h + \ldots + \alpha_f y^f(u'_f + u_f) + \ldots + \alpha_n y^n u_n)}\right|^2,$$

где введено дополнительное переменное u'_f, пробегающее целые числа интервала

$$-2c^{(f)}Mp^f \leqslant u'_f \leqslant 2c^{(f)}Mp^f.$$

Отсюда находим

$$T^4 \leqslant p^2G^3\Phi M^{-1}p^{-f}M^{g-1}p^{D-f}\sum_{u'_f}\sum_{u_f}\sum_{y_1=1}^{p}\sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i\alpha_f(y_1^f - y^f)(u'_f + u_f)} \leqslant$$

$$\leqslant G^3\Phi M^{g-2}p^{D-2f+2}\sum_{y_1=1}^{p}\sum_{y=1}^{p}\min\left(M^2p^{2f}, \frac{1}{4(\alpha_f(y_1^f - y^f))^2}\right).$$

При заданном y_1 разность $t = y_1^f - y^f$ пробегает некоторые целые числа интервала $-0{,}5q + 1 \leqslant t \leqslant 0{,}5q - 1$, причем, обозначая буквою r абсолютно наименьший вычет числа at по модулю q, мы приведем $(\alpha_f t)$ к виду

$$(\alpha_f t) = \left(\frac{r + 0{,}5\theta_r}{q}\right).$$

Здесь при $|r| > 0$ всегда будет $(\alpha_f t) > \frac{|r| - 0{,}5}{q}$. Поэтому, заменяя слагаемое двойной суммы числом M^2p^{2f}, если

$t=0$, и числом $\frac{q}{|r|-0{,}5}$, если $|r|>0$, будем иметь

$$\sum_{y_1=1}^{p}\sum_{y=1}^{p}\min\left(M^2p^{2f},\ \frac{1}{4\left(\alpha_f\left(y_1^f-y^f\right)\right)^2}\right)\leqslant pM^2p^{2f},$$

$$T^4\leqslant G^3\Phi M^g p^{D+3},\quad \frac{T}{pG}\leqslant\left(G^{-1}\Phi M^g p^{D-1}\right)^{\frac{1}{4}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{M^{g(b+1)}\,(p_1\ldots p_b)^{g\varepsilon-\nu D}\,p^{D-1}}{m_{1,1}\ldots m_{1,g}\ldots m_{b,1}\ldots m_{b,g}}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$T\leqslant pG\left(\frac{q^{\rho g(b+1)-\varphi+\varphi\sigma D+\varepsilon'}}{m_{1,1}\ldots m_{1,g}\ldots m_{b,1}\ldots m_{b,g}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Теорема. *Существует $c=c(n)$ с условием, что при любом вещественном A можно удовлетворить системе неравенств*

$$|f(z)-v-A|<cq^{-\rho},\quad 0<z<p^2$$

целыми z и v.

Доказательство. Согласно лемме 2 гл. 1 существует функция $\lambda(z)$ с периодом 1 и со свойствами:

1. $0\leqslant\lambda(z)\leqslant 1$ в интервале $A-\Delta\leqslant z\leqslant A+\Delta$.
2. $\lambda(z)=0$ в интервале $A+\Delta\leqslant z\leqslant 1+A-\Delta$.
3. $\lambda(z)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\lambda(z)=\Delta+\lambda_0(z);\quad \lambda_0(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(B_m e^{2\pi imz}+B'_m e^{-2\pi imz}\right),$$

причем B_m и B'_m зависят только от m, A и Δ и удовлетворяют неравенствам $B_m\leqslant F(m)$, $B'_m\leqslant F(m)$, где

$$F(m)=\begin{cases}\Delta\quad, & \text{если } m\leqslant\frac{1}{\Delta},\\ \frac{1}{\Delta^\beta m^{\beta+1}}, & \text{если } m>\frac{1}{\Delta}.\end{cases}$$

Рассмотрим сумму

$$H=\sum_{y=1}^{p}\left|\sum_{x_{1,1}}\lambda_0(f(yx_{1,1}))\times\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\times\sum_{x_{1,g}}\lambda_0(f(yx_{1,g}))\ldots\sum_{x_{b,1}}\lambda_0(f(yx_{b,1}))\ldots\sum_{x_{b,g}}\lambda_0(f(yx_{b,g}))\right|.$$

Здесь имеем

$$\sum_{x_{t,s}} \lambda_0 (f(yx_{t,s})) \leqslant \sum_{m_{t,s}=1}^{\infty} F(m_{t,s}) \left| \sum_{x_{t,s}} e^{2\pi i m_{t,s} f(yx_{t,s})} \right|.$$

Поэтому

$$H \leqslant \sum_{m_{1,1}=1}^{\infty} F(m_{1,1}) \ldots \sum_{m_{1,g}=1}^{\infty} F(m_{1,g}) \ldots \sum_{m_{b,1}=1}^{\infty} F(m_{b,1}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \sum_{m_{b,g}=1}^{\infty} F(m_{b,g}) |T|, \quad (4)$$

где T — сумма, рассмотренная в начале этого пункта. Ввиду

$$\sum_{m=1}^{\infty} F(m) \leqslant 1, \quad \sum_{m \leqslant M} \frac{F(m)}{m^{\frac{1}{4}}} \leqslant \Delta M^{\frac{3}{4}},$$

$$\sum_{m > M} F(m) \leqslant \frac{1}{\Delta^{\beta} M^{\beta}} \leqslant q^{-\rho g (b+1)}$$

сумма слагаемых правой части неравенства (4) с условием, что по меньшей мере одно $m_{t,s}$ превосходит M, будет

$$\leqslant pGq^{-\rho g (b+1)} = pG\Delta^{gb} q^{-\rho g},$$

а сумма оставшихся слагаемых будет

$$\leqslant pGq^{\frac{\rho g (b+1)}{4} - \frac{\varphi}{4} + \frac{\varphi \sigma D}{4} + \frac{3 \rho g b}{4} + \varepsilon \Delta g b} \leqslant$$

$$\leqslant pG\Delta^{gb} q^{\rho g \left(b + \frac{1}{4}\right) - \frac{\varphi}{4} + \frac{\varphi \sigma D}{4} + \varepsilon'},$$

где показатель степени q также отрицательный. Поэтому при некоторых c_1 и c_2 будет

$$H < pGc_1^{gb} \Delta^{gb} q^{-c_2 g b}.$$

Отсюда следует, что при некотором y и некоторых t и s имеет место неравенство (c_0 достаточно велико)

$$\frac{\left| \sum_{x_{t,s}} \lambda_0 (f(yx_{t,s})) \right|}{G_{t,s}} < c_1 \Delta q^{-c_2} < \Delta,$$

а при некотором частном значении $x_{t,s}$ также и неравенство

$$\lambda(f(yx_{t,s})) > 0,$$

которое и доказывает нашу теорему.

Пример. Пусть α — вещественное,

$$f(x) = \alpha x^n + x\sqrt{2}.$$

Разложив $\sqrt{2}$ в непрерывную дробь, рассмотрим ту пару соседних подходящих дробей, знаменатели q и q' которых удовлетворяют условию $q \leqslant \sqrt{\tau} < q'$. Ввиду ограниченности неполных частных имеем $q' \ll q$. Поэтому, применяя теорему, убедимся в возможности удовлетворить целыми z и v системе

$$|f(z) - v - A| < c\tau^{-\rho}, \quad 0 < z < \tau;$$

$$\rho = \frac{\ln(n+1)}{32n(\ln(n+1)+1)\ln((n+1)\ln(n+1)+(n+1))}.$$

Глава 4

Оценки простейших сумм по простым числам

В этой главе, с помощью указанных во введении сумм вида (1), выводятся оценки для ряда простейших сумм по простым числам. Схема вывода является тем или иным видоизменением схемы, впервые примененной мною (1937 г.) к выводу оценки для суммы

$$\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i k\alpha p}$$

в работе, посвященной разысканию асимптотической формулы в тернарной проблеме Гольдбаха. Напомню также, что систематическое изложение наиболее сложного варианта этой схемы в применении к выводу оценки для суммы

$$\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i f(p)}; \quad f(p)=\alpha_n p^n+\ldots+\alpha_1 p$$

дано в гл. 7 монографии[2].

Ввиду разнородности рассматриваемых сумм я счел полезным разбить эту главу на три раздела I, II и III.

Раздел I включает общие теоремы, дающие оценки сумм

$$\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}, \quad \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{p\leqslant N} {}^{2\pi i k\alpha p}\right|$$

и некоторые применения этих оценок.

Раздел II посвящен оценке суммы[21]

$$\sum_{p\leqslant N} e^{-2\pi i k f\sqrt{p}}$$

и применению этой оценки к выводу закона распределения значений дроби:

$$\{f\sqrt{p}\}; \quad p\leqslant N.$$

Наконец, раздел III посвящен оценке суммы[22]

$$\sum_{p \leqslant N} \chi(p+k).$$

Следует отметить, что соединение моего метода с результатами, полученными по методу Хассе — Вейля, позволяет найти нетривиальную оценку этой суммы и при более широких условиях [23, 24].

I. Оценки сумм $\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}$ и $\sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i k \alpha p} \right|$.

Лемма 1. *При вещественном* α, *подчиненном условиям*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 < q < N,$$

а) *для суммы*

$$V_g = \sum_{z=g}^{g+q'} \min\left(U, \frac{1}{(\alpha z)}\right); \quad q' < q, \ U > 0,$$

имеем неравенство

$$V_g \leqslant U + \ln q,$$

б) *а для суммы*

$$V = \sum_{0 < z \leqslant 0,5q} \frac{1}{(\alpha z)}$$

имеем неравенство

$$V \leqslant q \ln q.$$

Доказательство. Не нарушая общности, будем предполагать, что $q \geqslant 6$.

а) Вводя подстановку $z = g + t$ и представляя $q\alpha g$ в виде $B + \theta'$, где B — целое, а $\theta' < 0$ при $\theta \geqslant 0$ и $\theta' \geqslant 0$ при $\theta < 0$, получим

$$(\alpha z) = \left(\frac{B + \theta' + at + \theta t q^{-1}}{q}\right) = \left(\frac{\rho + \theta_\rho}{q}\right),$$

где ρ — наименьший неотрицательный вычет числа $B + at$ по модулю q. Сумма V_g примет вид

$$V_g = \sum_{\rho} \min\left(U, \frac{1}{\left(\frac{\rho + \theta_\rho}{q}\right)}\right).$$

Здесь слагаемые с $\rho=q-1$, $\rho=0$, $\rho=1$ заменим числом U, а при $0<s<0{,}5q$ слагаемые с $\rho=q-1-s$ и с $\rho=s+1$ (не учтенные при меньшем s) заменим числом $\frac{q}{s}$. Тогда получим

$$V_g \leqslant U+q\ln q.$$

б) Имеем

$$(\alpha z)=\left(\frac{az+\theta q^{-1}z}{q}\right)=\left(\frac{\rho+0{,}5\theta_\rho}{q}\right),$$

где ρ — наименьший неотрицательный вычет числа az по модулю q. Сумма V принимает вид

$$V=\sum_\rho \frac{1}{\left(\frac{\rho+0{,}5\theta_\rho}{q}\right)}.$$

При $0<s\leqslant 0{,}5q$ слагаемые с $\rho=q-s$ и с $\rho=s$ заменим, каждое, не меньшим числом $\frac{1}{s-0{,}5}$. Тогда получим

$$V\leqslant q\ln q.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть u и v пробегают возрастающие последовательности натуральных чисел и пусть*

$$1<U<N;\quad 2U\leqslant U'<4U,$$
$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,\,q)=1,\quad 1<q<N,$$
$$S=\sum_{U<u\leqslant U'}\ \sum_{uv\leqslant N} e^{2\pi i\alpha uv}.$$

Тогда имеем

$$S\leqslant N\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q\ln q}{N}+\frac{\ln q}{U}+\frac{U}{N}}.$$

Доказательство. Находим

$$S^2\leqslant U\sum_{U<t\leqslant U'}\ \sum_{tv\leqslant N}\ \sum_{tv_1\leqslant N} e^{2\pi i\alpha t(v-v_1)},$$

где, в указанных границах, t пробегает все натуральные числа. Меняя порядок суммирования (сначала при заданных v и v_1 суммируем по t), выводим

$$S^2 \leqslant U \sum_{v \leqslant \frac{N}{U}} \sum_{v_1 \leqslant \frac{N}{U}} \min\left(U, \frac{1}{(\alpha(v - v_1))}\right).$$

Часть выражения справа, отвечающая заданному v_1, согласно лемме 1, а), будет

$$\leqslant U\left(\frac{N}{Uq} + 1\right)(U + q\ln q).$$

Поэтому

$$S^2 \leqslant N\left(\frac{N}{Uq} + 1\right)(U + q\ln q) \leqslant N^2\left(\frac{1}{q} + \frac{q\ln q}{N} + \frac{\ln q}{U} + \frac{U}{N}\right),$$

откуда и убеждаемся в справедливости нашей леммы.

Теорема 1. *Пусть* $H = e^{0,5\sqrt{r}}$; $r = \ln N$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 < q < N, \quad S = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}.$$

Тогда имеем

$$S \leqslant Nr\ln r\left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q\ln q}{N}} + H^{-1}\sqrt{\ln q}\right).$$

Доказательство. Пусть P — произведение всех простых чисел, не превосходящих H^2, d пробегает делители числа P, m пробегает натуральные числа, а y пробегает произведения различных простых чисел, превосходящих H^2. Находим

$$\sum_{y \leqslant N} e^{2\pi i \alpha y} + O(NH^{-2}) = \sum_{d \leqslant N} \mu(d) S_d; \qquad (1)$$

$$S_d = \sum_{0 < m \leqslant Nd^{-1}} e^{2\pi i \alpha d m}.$$

Правую часть равенства (1) представим в виде $T' + T''$, где T' содержит слагаемые с условием $d > NH^{-2}$, а T'' — слагаемые с условием $d \leqslant NH^{-2}$.

Оценим T'. Пусть $\varkappa$ — число простых делителей числа d, входящего в T'. Тогда найдем

$$H^{2\varkappa} > NH^{-2}, \quad \varkappa > \sqrt{r} - 1, \quad \tau(d) < 2^{\sqrt{r}-1}.$$

Поэтому, учитывая неравенства

$$|S_d| \leqslant \frac{N}{d}, \qquad \sum_{0<d<N} \frac{\tau(d)}{d} \ll r^2$$

(неравенство (1) гл. 1 монографии [2]), получим

$$T' \ll \sum_{NH^{-2}<d\leqslant N} \frac{N}{d}\,\frac{\tau(d)}{2^{\sqrt{r}-1}} \ll \frac{Nr^2}{2^{\sqrt{r}-1}} \ll NH^{-1,3}.$$

Далее оценим T''. Пусть s_0 — наибольшее целое s с условием $(s_0-0{,}5)\,q<NH^{-2}$. Находим

$$S_d \ll \min\left(\frac{N}{d}, \frac{1}{(\alpha d)}\right), \quad T'' \ll \sum_{d\leqslant NH^{-2}} \min\left(\frac{N}{d}, \frac{1}{(\alpha d)}\right).$$

Разбивая правую часть последнего неравенства на слагаемые по схеме

$$\sum_{0<d\leqslant 0{,}5q} + \sum_{0{,}5q<d\leqslant 1{,}5q} + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{(s-0{,}5)\,q<d\leqslant(s+0{,}5)\,q} + \ldots + \sum_{(s_0-0{,}5)\,q<d\leqslant NH^{-2}}$$

и применяя к первому слагаемому оценку б) леммы 1, а к остальным слагаемым — оценку а) той же леммы, получим

$$T'' \ll q\ln q + \sum_{0<s\leqslant s_0}\left(\frac{N}{qs} + q\ln q\right) \ll$$
$$\ll q\ln q + \frac{Nr}{q} + NH^{-2}\ln q \ll Nr\left(\frac{q}{N} + \frac{1}{q} + H^{-2}\right).$$

Наконец, рассмотрим левую часть равенства (1). Обозначив символом y_k произведение y, имеющее ровно k простых сомножителей, рассмотрим сумму

$$T_k = \sum_{y_k\leqslant N} e^{2\pi i\alpha y_k}.$$

Пусть $k>1$. Сумму T_k сравним с суммой

$$T'_k = \sum_{H^2<y_1\leqslant NH^{-2(k-1)}} \sum_{y_1 y_{k-1}\leqslant N} e^{2\pi i\alpha y_1 y_{k-1}}.$$

Число слагаемых суммы T'_k с $y_1 y_{k-1}$, делящимся на отличный от единицы квадрат, очевидно, $\ll NH^{-2}$. А остальные слагаемые — те же, что и у суммы T_k, но каждое слагаемое суммы T_k входит в сумму T'_k ровно k раз. Поэтому

$$T_k = \frac{1}{k} T'_k + O\left(\frac{1}{k} NH^{-2}\right).$$

Оценим T'_k. Интервал $H^2 < y_1 \leqslant NH^{-2(k-1)}$ мы разобьем на $\leqslant r$ интервалов вида

$$Y_1 < y_1 \leqslant Y'_1; \quad 2Y_1 \leqslant Y'_1 < 4Y_1.$$

Согласно лемме 2 часть суммы T'_k, отвечающая интервалу такого вида, будет

$$\ll N \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q \ln q}{N} + \frac{\ln q}{Y_1} + \frac{Y_1}{N}} \ll$$
$$\ll N \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q \ln q}{N}} + H^{-1} \sqrt{\ln q} \right).$$

Оценку для T'_k получим, умножив последнее выражение на r. Следовательно, будем иметь

$$T_k \ll \frac{1}{k} Nr \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q \ln q}{N}} + H^{-1} \sqrt{\ln q} \right).$$

Просуммировав это неравенство по всем $\leqslant r$ значениям k и учтя, что $T_1 = S + O(H)$, убедимся, что левая часть неравенства (1) равна

$$S + R; \quad R \ll Nr \ln r \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q \ln q}{N}} + H^{-1} \sqrt{\ln q} \right).$$

Собирая все доказанное, мы и убедимся в справедливости нашей теоремы.

Лемма 3. *Пусть* $\varepsilon \leqslant 0{,}01$, $b_0 = e^{r^{1-\varepsilon}}$, $b = e^{r^{1-2\varepsilon}}$, $0 < q < e^{\sqrt{r}}$, $(l, q) = 1$, $0 \leqslant l < q$, $U \geqslant 0$, $W \geqslant b_0$, *F — произведение простых чисел, не превосходящих b и не делящих q, d пробегает произведения различных простых чисел, не превосходящих b_0 и не делящих q. Тогда имеем:*

а) *Число T чисел вида $qx + l$, взаимно простых с F, лежащих в интервале*

$$U < qx + l \leqslant U + W,$$

удовлетворяет условию

$$T \ll \frac{W r^{2\varepsilon}}{r \varphi(q)}.$$

б) *Справедливо неравенство*

$$\sum_d \frac{\mu(d)}{d} \ll \frac{r^{2\varepsilon}}{r}.$$

в) *Справедливо неравенство*

$$\sum_{d > N^{0,8}} \frac{1}{d} \ll e^{-r^{\varepsilon}}.$$

Доказательство. Утверждение а) следует из леммы 9 гл. 7 монографии[2]. Утверждение б) следует из оценки

$$\sum_d \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{p \leqslant b_0}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{p \setminus q}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \ll \frac{1}{\ln b_0}\frac{q}{\varphi(q)} \ll \frac{r^{2\varepsilon}}{r}.$$

Докажем утверждение в). При $d > N^{0,8}$ имеем $b_0^{\Omega(d)} > N^{0,8}$, $\Omega(d) > 0,8r^{\varepsilon}$. Пусть $p_1, \ldots, p_{\sigma_0}$ — все простые числа, не превосходящие b_0 и не делящие q. Находим

$$\sum_{\substack{d > N^{0,8} \\ \Omega(d) = s}} \frac{1}{d} < \frac{\left(\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_{\sigma_0}}\right)^s}{s!} \ll \left(\frac{e(c+\ln r)}{s}\right)^s \ll e^{-1,25s},$$

$$\sum_{d > N^{0,8}} \frac{1}{d} \ll \sum_{s > 0,8r^{\varepsilon}} e^{-1,25s} < e^{-r^{\varepsilon}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon < 0,01$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad \delta = |zN|, \quad (a, q) = 1,$$

$$0 \leqslant a < q, \quad \delta \leqslant e^{0,25r^{\varepsilon}}, \quad q \leqslant e^{0,25r^{\varepsilon}}.$$

Тогда для суммы

$$S = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}$$

имеем

$$S \ll Nr^{-1+\varepsilon_1}q^{-0,5},$$

или также

$$S \ll Nr^{-1+\varepsilon_1}q^{-0,5}\delta^{-0,5}, \text{ *если* } \delta \geqslant 1.$$

Доказательство. Пусть $b_0 = e^{r^{1-\varepsilon}}$, F_0 — произведение простых чисел, не превосходящих b_0 и не делящих q.

Пусть d пробегает делители числа F_0, m пробегает натуральные числа, взаимно простые с q, наконец, y пробегает натуральные числа, взаимно простые с $F_0 q$. Находим

$$\sum_{y \leqslant N} e^{2\pi i \alpha y} = \sum_{d \leqslant N} \mu(d) S_d; \quad S_d = \sum_{m \leqslant N d^{-1}} e^{2\pi i \alpha d m}. \qquad (2)$$

Правую часть равенства (2) представим в виде $U' + U''$, где U' содержит слагаемые с условием $d > N^{0,8}$, а U'' содержит слагаемые с условием $d \leqslant N^{0,8}$.

Сначала оценим U'. Применяя утверждение в) леммы 3, получим

$$U' \ll N e^{-r^{\varepsilon}}.$$

Далее оценим U''. Полагая $m = qs + l$, где l пробегает числа с условиями $(l, q) = 1$, $0 \leqslant l < q$, а s при заданном l пробегает числа с условием $0 < qs + l \leqslant N d^{-1}$, получим (лемма 3 гл. 2 монографии[2])

$$S_d = \sum_{l} e^{2\pi i \frac{a}{q} dl} \sum_{-lq^{-1} < s \leqslant N d^{-1} q^{-1} - l q^{-1}} e^{2\pi i z d q s} + O((\delta + 1) q) =$$

$$= \frac{\mu(q)}{q} \frac{N}{d} I + O((\delta + 1) q);$$

$$I = \int_0^1 e^{2\pi i z N v}\, dv, \quad I \ll \min(1, \delta^{-1}).$$

Отсюда найдем (б) и в) леммы 3):

$$U'' = \frac{\mu(q)}{q} N I \sum_{d \leqslant N^{0,8}} \frac{\mu(d)}{d} + O(N^{0,8} (\delta + 1) q) \ll$$

$$\ll N \frac{r^{2\varepsilon}}{rq} \min(1, \delta^{-1}).$$

Наконец, рассмотрим левую часть равенства (2). Обозначая символом y_k произведение, имеющее ровно k простых сомножителей, рассмотрим сумму

$$T_k = \sum_{y_k \leqslant N} e^{2\pi i \alpha y_k}.$$

При $k > 1$ эту сумму сравним с суммой

$$T'_k = \sum_{b_0 < y_1 \leqslant N b_0^{-(k-1)}} \sum_{y_1 y_{k-1} \leqslant N} e^{2\pi i \alpha y_1 y_{k-1}},$$

Число слагаемых суммы T'_k с $y_1 y_{k-1}$, делящимся на отличный от единицы квадрат, очевидно, $\ll N b_0^{-1}$. Остальные слагаемые — те же, что и у суммы T_k, но каждое слагаемое суммы T_k входит в T'_k ровно k раз. Поэтому

$$T_k = \frac{1}{k}\left(T'_k + O\left(N b_0^{-1}\right)\right).$$

Оценим сумму T'. Интервал $b_0 < y_1 \leqslant N b_0^{-(k-1)}$ мы разобьем на $\ll r$ интервалов вида

$$X < y' \leqslant X'; \quad 2X \leqslant X' < 4X,$$

причем примем обозначение

$$T'_k(X) = \sum_{X < y_1 < X'} \sum_{y_1 y_{k-1} \leqslant N} e^{2\pi i \alpha y_1 y_{k-1}}.$$

Положив $b = e^{r^{1-2\varepsilon}}$, мы разобьем первый координатный угол на квадраты:

$$\begin{gathered} b\xi < y_1 \leqslant b(\xi + 1), \\ b\eta < y_{k-1} \leqslant b(\eta + 1) \end{gathered} \tag{3}$$

с целыми ξ и η (y_1 — абсцисса, а y_{k-1} — ордината точки). Каждой целой точке (y_1, y_{k-1}) квадрата (3) мы сопоставим уже не степень

$$e^{2\pi i \alpha y_1 y_{k-1}} = e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} y_1 y_{k-1} + z y_1 y_{k-1}\right)},$$

а новую степень $e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} lh + z b^2 \xi\eta\right)}$, где l и h — наименьшие неотрицательные вычеты чисел y_1 и y_{k-1} — по модулю q. Эта новая степень отличается от прежней слагаемым, которое $\ll \delta b^2 b_0^{-1}$. Следовательно, новая сумма $T''_k(X)$, в которую обращается сумма $T'_k(X)$, отличается от последней слагаемым, которое

$$\ll N \delta b^2 b_0^{-1} \ll \frac{N}{r^2} e^{-0{,}9 r^{1-\varepsilon}}.$$

Сумму $T''_k(X)$ мы заменим приближенно суммою $T'''_k(X)$, содержащею слагаемые того же вида, как и сумма $T''_k(X)$, но распространенной на все целые точки (y_1, y_{k-1}) тех квадратов (3), у которых точка $(b\xi, b\eta)$ принадлежит области суммирования суммы $T''_k(X)$. Очевидно, $T'''_k(X)$ отличается от $T''_k(X)$ слагаемым, которое

$$\ll b\left(X+\frac{N}{X}\right)\ll Nbb_0^{-1}\ll\frac{N}{r^2}e^{-0,9r^{1-\varepsilon}}.$$

Рассмотрим часть $t(\xi, \eta)$ суммы $T'''_k(X)$, отвечающую квадрату (3). Пусть $L_\xi(l)$ — число значений y_1 вида $qx+l$, удовлетворяющих первому из неравенств (3), а $H_\eta(h)$ — число значений y_{k-1} вида $qy+h$, удовлетворяющих второму из неравенств (3). Тогда, согласно а) леммы 3, имеем ($L_\xi(l)=0$ при $(l, q)>1$ и $H_\eta(h)=0$ при $(h, q)>1$)

$$L_\xi(l)\ll K,\quad H_\eta(h)\ll K,\quad K=\frac{br^{4\varepsilon}}{r\varphi(q)}.$$

Поэтому

$$t(\xi, \eta)=\sum_{l=0}^{q-1}L_\xi(l)\sum_{h=0}^{q-1}H_\eta(h)\,e^{2\pi i\frac{a}{q}lh}e^{2\pi izb^2\xi\eta}.$$

Сумма T'''_k принимает вид

$$T'''_k(X)=\sum_{X_1<\xi\leqslant X'_1}\ \sum_{\xi\eta\leqslant N_1}t(\xi, \eta);\ X_1=\frac{X}{b},\ X'_1=\frac{X'}{b},\ N_1=\frac{N}{b^2}.$$

Отсюда находим

$$T'''_k(X)\ll$$

$$\ll\sum_{X_1<\xi\leqslant X'_1}\ \sum_{l=0}^{q-1}K\left|\sum_{\eta\leqslant N_1\xi^{-1}}e^{2\pi izb^2\xi\eta}\sum_{h=0}^{q-1}H_\eta(h)\,e^{2\pi i\frac{a}{q}lh}\right|,$$

$$|T'''_k(X)|^2\ll X_1qK^2\sum_\xi\sum_l\sum_\eta\sum_{\eta_1}e^{2\pi izb^2\xi(\eta-\eta_1)}\times$$

$$\times\sum_h\sum_{h_1}H_\eta(h)\,H_{\eta_1}(h_1)\,e^{2\pi i\frac{a}{q}l(h-h_1)},$$

где η_1 пробегает те же значения, что и η, а h_1 — те же значения, что и h. Отсюда, суммируя по l (при заданных значениях остальных букв), получим

$$|T'''_k|^2\ll X_1q^2K^2\sum_\xi\sum_\eta\sum_{\eta_1}e^{2\pi izb^2\xi(\eta-\eta_1)}\sum_{h=0}^{q-1}H_\eta(h)\,H_{\eta_1}(h).$$

Далее изменим порядок суммирования, учтя, что η и η_1 удовлетворяют условиям $0<\eta\leqslant N_1X_1^{-1}$, $0<\eta_1\leqslant N_1X_1^{-1}$, а ξ при заданных η и η_1 пробегает натуральные числа с условием

$$X_1<\xi\leqslant X_0;\quad X_0=\min\left(X_1',\ \frac{N_1}{\eta},\ \frac{N_1}{\eta_1}\right).$$

Просуммировав затем по ξ (при заданных значениях остальных букв), после тривиальных упрощений получим

$$|T_k'''(X)|^2\ll N_1q^3K^4\sum_{0\leqslant s\leqslant N_1X_1^{-1}}\min\left(X_1,\ \frac{1}{(zb^2s)}\right).$$

Сначала рассмотрим случай $\delta\leqslant 1$. Здесь, заменяя каждое слагаемое стоящей справа суммы числом X_1, получим

$$|T_k'''(X)|^2\ll N_1^2q^3K^4,\ T_k'''\ X)\ll N\frac{r^{\varepsilon'}}{r^2q^{0,5}},\ T_k'\ll N\frac{r^{\varepsilon''}}{rq^{0,5}}.$$

Далее рассмотрим случай $\delta>1$. Здесь, положив

$$s_0=\frac{N_1}{X_1\delta},$$

найдем

$$\sum_{0\leqslant s\leqslant N_1X_1^{-1}}\min\left(X_1,\ \frac{1}{(zb^2s)}\right)\ll$$

$$\ll\sum_{0\leqslant s\leqslant s_0}X_1+\sum_{s_0<s\leqslant N_1X_1^{-1}}\frac{N_1}{\delta s}\ll N_1\frac{\ln(e\delta)}{\delta},$$

$$T_k'\ll N\frac{r^{\varepsilon''}}{rq^{0,5}}\delta^{-0,5}.$$

Из полученных для T_k' $(k>1)$ оценок и равенства

$$S=T_1+O(r^{1-\varepsilon})$$

следует, что левая часть равенства (2) отличается от S слагаемым, которое

$$\ll Nr^{-1+\varepsilon_1}q^{-0,5}\min(1,\ \delta^{-0,5}).$$

Отсюда и из полученных ранее оценок для U' и U'' мы и убедимся в справедливости нашей теоремы.

Лемма 4. *Пусть* $\varepsilon_0 < 0{,}001$, $N^{0,2} \leqslant H \leqslant N^{0,3}$, F *произведение простых чисел с условием* $p \leqslant H$. *Тогда, полагая*

$$D = r^{\frac{\ln r - 1}{\ln(1+\varepsilon_0)}}; \quad r = \ln N,$$

делители d *числа* F, *не превосходящие* N, *можно распределить среди* $< D$ *совокупностей со следующими свойствами:*

а) *Числа* d, *принадлежащие одной и той же совокупности, обладают одним и тем же числом* β *простых сомножителей, а следовательно, одним и тем же значением* $\mu(d) = (-1)^\beta$.

б) *Одна из совокупностей, которую мы будем называть простейшей, состоит из единственного числа* $d = 1$. *Для этой совокупности полагаем* $\varphi = 1$ *и, следовательно, имеем* $\varphi = d = 1$. *Каждой из оставшихся совокупностей отвечает свое* φ *такое, что все числа этой совокупности удовлетворяют условию*

$$\varphi < d \leqslant \varphi^{1+\varepsilon_0}.$$

в) *При этом при любом* U *с условием* $0 \leqslant U < \varphi$ *существуют две такие совокупности чисел* d: *числа* d' *и числа* d'' (*совокупность чисел* d'' *может оказаться и простейшей*) *с соответствующими* φ' *и* φ'', *удовлетворяющими условиям* $\varphi'\varphi'' = \varphi$, $U \leqslant \varphi' < UH$, *что при некотором натуральном* B *все числа* d *выбранной совокупности, каждое* B *раз получим, если из всех произведений* $d'd''$ *выберем лишь удовлетворяющие условию* $(d', d'') = 1$.

Доказательство. Все простые делители числа F мы распределим среди $\tau + 1$ интервалов вида

$$e^{(1+\varepsilon_0)^t} < p \leqslant e^{(1+\varepsilon_0)^{t+1}},$$

которые получим, заставляя число t (номер интервала) пробегать значения $0, 1, \ldots, \tau$, где τ обозначает наибольшее целое число с условием

$$e^{(1+\varepsilon_0)^\tau} < H.$$

Из этого условия легко убедимся, что число $\tau+1$ всех интервалов удовлетворяет неравенству

$$\tau+1<\frac{\ln r-\ln 2}{\ln(1+\varepsilon_0)}+1<\frac{\ln r-1}{\ln(1+\varepsilon_0)}.$$

Каждый делитель d числа F с условием $1<d\leqslant N$ мы свяжем с неубывающим рядом $l_0, l_1, \ldots, l_\tau$, где l_t обозначает число простых сомножителей числа d, лежащих в интервале с номером t. Совокупность значений d, связанных с одним и тем же таким рядом, и будет тою совокупностью, о которой говорится в нашей лемме.

Так как каждое рассматриваемое d является произведением не более чем r простых сомножителей, то $l_t\leqslant r$ для каждого $t=0, 1, \ldots, \tau$. Следовательно, число различных совокупностей не превосходит

$$r^{\tau+1}<D.$$

Свойство а) совокупности следует из данного ее определения.

Рассмотрим какую-либо не простейшую совокупность. Пусть $d=p_1\ldots p_\beta$ — число этой совокупности с сомножителями, расположенными в возрастающем порядке. Пусть φ_s — левая граница интер ала, ограничивающего p_s, тогда правую границу можно представить в виде $\varphi_s^{1+\varepsilon_0}$. Поэтому при любом $s=1, \ldots, \beta$ будем иметь

$$\varphi_s<p_s\leqslant\varphi_s^{1+\varepsilon_0}.$$

А отсюда, полагая $\varphi=\varphi_1\ldots\varphi_\beta$, получим

$$\varphi<d\leqslant\varphi^{1+\varepsilon_0}.$$

Пусть U — число с условием $0<U<\varphi$. Обозначив буквою λ наименьшее число, удовлетворяющее неравенству $U<\varphi_1\ldots\varphi_\lambda$, рассмотрим две совокупности — чисел d', пробегающих произведения вида $p_1\ldots p_\lambda$, и чисел d'', пробегающих произведения вида $p_{\lambda+1}\ldots p_\beta$. Тогда совокупности чисел d' будет отвечать число $\varphi'=\varphi_1\ldots\varphi_\lambda$, а совокупности чисел d'' будет отвечать число

$\varphi'' = \varphi_{\lambda+1} \ldots \varphi_{\beta}$. При этом будем иметь

$$\varphi'\varphi'' = \varphi, \quad U < \varphi' \leqslant UH.$$

Равенство $d = d'd''$ возможно лишь в случае $(d', d'') = 1$, причем в этом случае оно имеет

$$B = \binom{k_1 + k_2}{k_1}$$

решений, где k_1 — число сомножителей φ_s произведения φ', равных φ_λ, а k_2 — число сомножителей φ_s произведения φ'', равных φ_λ.

Лемма 5. *Пусть при $x \leqslant N$ функция $\Phi(x)$ подчинена условию $|\Phi(x)| \leqslant \Phi_0$. Пусть p пробегает простые числа, Q обозначает произведение простых чисел с условием $N^{0,2} < p \leqslant N$, наконец,*

$$S = \sum_{p \leqslant N} \Phi(p), \quad W_s = \sum_{\substack{y_1 \setminus Q \\ y_1 \ldots y_s \leqslant N}} \ldots \sum_{y_s \setminus Q} \Phi(y_1 \ldots y_s).$$

Тогда при некоторых постоянных λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 будем иметь

$$S = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \lambda_3 W_3 + \lambda_4 W_4 + O(N^{0,8}\Phi_0).$$

Доказательство. Пусть

$$S_h = \sum_{z_h \leqslant N} \Phi(z_h),$$

где z_h пробегает делители числа Q, имеющие ровно h различных простых сомножителей. Среди входящих в W_s произведений $y_1 \ldots y_s$ число делящихся на отличный от единицы квадрат будет $\ll N^{0,8}$, а число равных данному z_h равно s^h. Поэтому

$$W_s = sS_1 + \ldots + s^4 S_4 + O(N^{0,8}\Phi_0).$$

Полагая в этом равенстве $s = 1, 2, 3, 4$, получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными S_1, S_2, S_3, S_4 с определителем, составленным из коэффициентов при них, не равным нулю. Отсюда (учтя равенство $S = S_1 + O(N^{0,2}\Phi_0)$ мы и убедимся в справедливости нашей леммы.

Лемма 6. *Пусть при $x < N$ функция $\Phi(x)$ подчинена условию $|\Phi(x)| \leqslant \Phi_0$. Пусть p пробегает простые числа, Q обозначает произведение простых чисел с условием $N^{0,2} < p \leqslant N$, наконец, при натуральном $s \leqslant 4$, имеем*

$$W_s = \sum_{\substack{y_1 \setminus Q \\ y_1 \ldots y_s \leqslant N}} \ldots \sum_{y_s \setminus Q} \Phi(y_1 \ldots y_s).$$

Тогда

$$W_s \ll \sum |T| + N^{0,8+\varepsilon}\Phi_0,$$

где суммирование распространяется на $\ll N^{\varepsilon}$ слагаемых двух видов.

Слагаемое $|T|$ первого вида удовлетворяет неравенству

$$|T| \leqslant \sum_{\delta} |T_\delta|,$$

где δ пробегает возрастающую последовательность натуральных чисел. Иногда последовательность сводится к единственному числу $\delta = 1$ и тогда слагаемое называется простейшим,

$$T_\delta = \sum_{\substack{X \leqslant \delta x < X^{1+\varepsilon_0} \\ \delta^2 xy \leqslant N}} \sum_{Y \leqslant \delta y < Y^{1+\varepsilon_0}} \Phi(\delta^2 xy);$$

$$N^{0,4} \leqslant X \ll N^{0,6}, \quad N^{0,8} \leqslant XY \leqslant N, \quad X \geqslant Y.$$

При этом x и y пробегают неубывающие последовательности натуральных чисел с условием, что $x = x_0$ при заданном x_0 имеет $\ll N^{\varepsilon}$ решений, а $y = y_0$ при заданном y_0 имеет $\ll N^{\varepsilon}$ решений.

Слагаемое $|T|$ второго вида представляется равенством

$$T = \sum_{\substack{X \leqslant x < X^{1+\varepsilon_0} \\ xm \leqslant N}} \sum_{M \leqslant m < M'} \Phi(xm), \quad X < N^{0,8}, \quad M > N^{0,2}.$$

При этом x пробегает неубывающую последовательность натуральных чисел с условием, что $x = x_0$ при заданном x_0 имеет $\ll N^{\varepsilon}$ решений, а m пробегает последовательные натуральные числа.

Кроме описанного «основного» подразделения слагаемых $|T|$ на два вида, иногда будем применять «особое» *подразделение на два вида, причем первый особый вид отличается от первого основного вида лишь условием*

$$N^{\frac{1}{3}} < X \leqslant N^{\frac{2}{3}} \quad (\text{вместо } N^{0,4} < X \leqslant N^{0,6}).$$

А второй особый вид отличается от второго основного вида лишь условием

$$X < N^{\frac{1}{3}}, \quad M > N^{\frac{2}{3}} \quad (\text{вместо } X < N^{0,8},\ M > N^{0,2}).$$

Доказательство. Пусть P — произведение простых чисел, подчиненных условию $p \leqslant N^{0,2}$. Тогда справедливо тождество

$$W_s = \sum_{\substack{d_1 \\ d_1 m_1 \dots d_s m_s \leqslant N}} \sum_{m_1} \dots \sum_{d_s} \sum_{m_s} \mu(d_1) \dots \mu(d_s)\, \Phi(d_1 m_1 \dots d_s m_s),$$

где каждое d_j пробегает делители числа P, а каждое m_j пробегает натуральные числа. Действительно, свяжем слагаемые правой части доказываемого тождества с целыми точками s-мерного гиперболоида $h_1 > 0, \dots, h_s > 0$, $h_1 \dots h_s \leqslant N$, отнеся к точке $(h_1, \dots, h_s)$ слагаемые с условием $d_1 m_1 = h_1, \dots, d_s m_s = h_s$. Сумма слагаемых с таким условием равна произведению

$$\sum_{d_1 \setminus (h_1, P)} \mu(d_1) \dots \sum_{d_s \setminus (h_s, P)} \mu(d_s)\, \Phi(h_1 \dots h_s),$$

как раз принимающему вид слагаемого суммы W_s тогда и только тогда, когда все $h_1, \dots, h_s$ взаимно просты с P, и обращающегося в нуль, если это не так.

Не нарушая общности, мы ограничимся лишь случаем $s = 4$. Согласно лемме 4 при каждом $j = 1, 2, 3, 4$ значения d распределятся среди $< D$ совокупностей $(H = N^{0,2})$. А значения m_j распределятся среди $\leqslant r$ интервалов вида

$$M_j \leqslant m_j < M_j'; \quad 2M_j \leqslant M_j' < 4M_j.$$

Пусть

$$T = \sum_{\substack{d_1 \\ d_1 d_2 d_3 d_4 m_1 m_2 m_3 m_4 \leqslant N}} \sum_{d_2} \sum_{d_3} \sum_{d_4} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{m_3} \sum_{m_4} \Phi(d_1 d_2 d_3 d_4 m_1 m_2 m_3 m_4),$$

где суммирование распространяется на четыре совокупности значений d_1, d_2, d_3, d_4, ограниченные неравенствами

$$\varphi^{(1)} \leqslant d_1 < F^{(1)}, \quad \varphi^{(2)} \leqslant d_2 < F^{(2)}, \quad \varphi^{(3)} \leqslant d_3 < F^{(3)},$$
$$\varphi^{(4)} \leqslant d_4 < F^{(4)}; \quad F^{(j)} = (\varphi^{(j)})^{1+\varepsilon_0},$$

и на четыре совокупности значений m_1, m_2, m_3, m_4, ограниченные неравенствами

$$M_1 \leqslant m_1 < M_1', \quad M_2 \leqslant m_2 < M_2',$$
$$M_3 \leqslant m_3 < M_3', \quad M_4 \leqslant m_4 < M_4'.$$

Находим

$$|W_4| \leqslant \sum |T|,$$

где суммирование распространяется на все $\ll (Dr)^4 \ll N^{\varepsilon}$ суммы T.

Сначала рассмотрим «тривиальную» сумму T с условием

$$\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)}M_1M_2M_3M_4 \leqslant N^{0,8}.$$

Для такой суммы, очевидно, имеем $|T| \ll N^{0,8+\varepsilon}\Phi_0$. Далее рассмотрим суммы T с условием

$$\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)} > N^{0,4}.$$

Пусть t — наименьшее число с условием $\varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(t)} > N^{0,4}$ и пусть

$$\varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(t-1)} N^{\gamma} = N^{0,4}$$

(при $t=1$ множитель при N^{γ} считаем равным 1). Находим $\varphi^{(t)} > N^{\gamma}$. Поэтому (лемма 4) существует натуральное B и две совокупности — чисел d' и чисел d'' с соответствующими числами φ' и φ'', удовлетворяющими условиям

$$\varphi'\varphi'' = \varphi^{(t)}, \quad N^{\gamma} < \varphi' \leqslant N^{\gamma+0,2},$$

такие, что все значения d_t, взятые каждое B раз, получим, если из всех произведений $d'd''$ выберем лишь удовлетворяющие условию $(d', d'') = 1$. Полагая

$$u = d_1 \ldots d_{t-1}, \quad v = d_{t+1} \ldots d_4 m_1 m_2 m_3 m_4,$$
$$U = \varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(t-1)}, \quad V = \varphi^{(t+1)} \ldots \varphi^{(4)} M_1 M_2 M_3 M_4,$$

будем иметь

$$N^{0,4} < U\varphi' < N^{0,6},$$

$$BT = \sum_{U\varphi' \leqslant ud' < (U\varphi')^{1+\varepsilon_0}} \sum \quad \sum_{\substack{\varphi'' V \leqslant d''v < (\varphi'' V)^{1+\varepsilon_0} \\ ud'd''v \leqslant N \\ (d', d'') = 1}} \sum \Phi(ud'd''v).$$

Отсюда находим

$$BT = \sum_{\delta} \mu(\delta) T_\delta;$$

$$T_\delta = \sum_{U\varphi' \leqslant \delta u d_0' < (U\varphi')^{1+\varepsilon_0}} \sum \quad \sum_{\substack{\varphi'' V \leqslant \delta d_0'' v \leqslant (\varphi'' V)^{1+\varepsilon_0} \\ \delta^2 u d_0' d_0'' v \leqslant N}} \sum \Phi(\delta^2 u d_0' d_0'' v),$$

где δ пробегает натуральные числа, а d_0' и d_0'' при заданном δ пробегают частные от деления на δ чисел d' и d'', кратных δ. Полагая $U\varphi' = X$, $ud_0' = x$, $d_0''v = y$, убедимся, что T является слагаемым первого вида.

Теперь рассмотрим сумму T с условием

$$\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)} < N^{0,4}.$$

Не нарушая общности, будем предполагать, что числа M_1, M_2, M_3, M_4 расположены в неубывающем порядке.

Пусть сначала $M_4 < N^{0,2}$. Пусть t — наименьшее число с условием

$$\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)} M_1 \ldots M_t > N^{0,4}.$$

Тогда, полагая

$$X = \varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)} M_1 \ldots M_t, \quad Y = M_{t+1} \ldots M_4,$$
$$x = d_1 d_2 d_3 d_4 m_1 \ldots m_t, \quad y = m_{t+1} \ldots m_4,$$

будем иметь

$$N^{0,4} < X < N^{0,6},$$

$$T = \sum_{X \leqslant x < X^{1+\varepsilon_0}} \quad \sum_{\substack{Y \leqslant y < Y^{1+\varepsilon_0} \\ xy \leqslant N}} \Phi(x, y),$$

откуда убедимся, что T является суммою первого вида (при $\delta = 1$).

Пусть, наконец, $M_4 > N^{0,2}$. Тогда, полагая

$$X = \varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)} M_1 M_2 M_3, \quad M = M_4,$$
$$x = d_1 d_2 d_3 d_4 m_1 m_2 m_3, \qquad m = m_4,$$

будем иметь

$$T = \sum_{X \leqslant x < X^{1+\varepsilon_0}} \sum_{\substack{M \leqslant m < M' \\ xm \leqslant N}} \Phi(xm); \quad X < N^{0,8}, \quad M > N^{0,2},$$

отсюда убеждаемся, что T является суммою второго вида.

Лемма для основного распределения слагаемых $|T|$ на два вида доказана. Обращаемся к особому распределению. Очевидно $\left(\text{ввиду } N^{\frac{1}{3}} < N^{0,4} < N^{0,6} < N^{\frac{2}{3}}\right)$, первый вид основного распределения является и первым видом особого. Поэтому перераспределим по-новому лишь слагаемые второго вида. Итак, пусть

$$\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)} < N^{0,4}, \quad M > N^{0,2}.$$

Если $M_1 > N^{\frac{2}{3}}$, то $(M = M_4)$ $|T|$ является слагаемым второго особого вида. Если же $N^{\frac{1}{3}} \leqslant M_4 < N^{\frac{2}{3}}$, то, положив $X = M$, убедимся, что $|T|$ является слагаемым первого особого вида. Пусть $M_4 < N^{\frac{1}{3}}$. Если $M_3 \geqslant N^{0,2}$, то, положив $X = M_3M_4$, убедимся, что $|T|$ является слагаемым первого особого вида. А если $M_3 < N^{0,2}$, то, взяв в качестве X наименьшее число вида $\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)}M_1 \ldots M_j$, превосходящее $N^{0,4}$, убедимся, что $|T|$ является слагаемым первого особого вида. Лемма доказана полностью.

Обобщение. *Лемма 6 останется верной, если переменные суммирования x, y, δ, m будут пробегать лишь значения, взаимно простые с каким-либо заданным натуральным числом q, не превосходящим N.*

Доказательство. Обобщение доказывается аналогично лемме 6, но предполагается, что переменные d_j, m_j, h_j пробегают лишь целые числа, взаимно простые с указанным натуральным числом.

Лемма 7. *Пусть K — целое, $K \leqslant N$, $\Phi(z) = e^{2\pi i \alpha k z}$, α — вещественное,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q < N,$$

и пусть $|T|$ — *слагаемое первого вида леммы* 6. *Тогда, полагая*

$$S_K = \sum_{k=1}^{K} |T|, \quad \Delta = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + N^{-0,2}},$$

будем иметь

$$S_K \ll K N^{1+\varepsilon} \Delta.$$

Доказательство. Имеем

$$|T| \leqslant \sum_{\delta} |T_\delta|;$$

$$T_\delta = \sum_{X \leqslant \delta x < X^{1+\varepsilon_0}} \sum_{\delta^2 xy \leqslant N} e^{2\pi i \alpha k \delta^2 xy}; \quad N^{0,4} \leqslant X \ll N^{0,6}.$$

Заставляя ξ пробегать последовательные натуральные числа, получим

$$T_\delta \ll N^{\varepsilon} \sum_{X \leqslant \delta\xi < X^{1+\varepsilon_0}} \left| \sum_{y \leqslant \frac{N}{\delta^2 \xi}} e^{2\pi i \alpha k \delta^2 \xi y} \right|,$$

$$T_\delta^2 \ll N^{\varepsilon'} \frac{X}{\delta} \sum_{X \leqslant \delta\xi < X^{1+\varepsilon_0}} \sum_{y_1 \leqslant \frac{N}{\delta^2 \xi}} \sum_{y \leqslant \frac{N}{\delta^2 \xi}} e^{2\pi i \alpha k \delta^2 \xi (y_1 - y)},$$

где y_1 пробегает те же значения, что и y. Меняя порядок суммирования (при заданных y_1 и y суммируем сначала по ξ), получим

$$T_\delta^2 \ll N^{\varepsilon''} \frac{X}{\delta} \sum_{y_1 \leqslant \frac{N}{\delta X}} \sum_{y \leqslant \frac{N}{\delta X}} \min\left(\frac{X}{\delta}, \frac{1}{(\alpha k \delta^2 (y_1 - y))}\right) \ll$$

$$\ll \frac{N^{1+\varepsilon'''}}{\delta^2} \sum_{0 \leqslant \eta \leqslant \frac{N}{\delta X}} \min\left(\frac{X}{\delta}, \frac{1}{(\alpha k \delta^2 \eta)}\right),$$

где η пробегает последовательные натуральные числа.

Не нарушая общности, будем считать, что $\Delta^{-1} \geqslant c_0$, где c_0 — достаточно большое, превосходящее единицу.

Имеем

$$|T| \leqslant T' + T''; \; T' = \sum_{\delta \leqslant \Delta^{-1}} |T_\delta|, \quad T'' = \sum_{\Delta^{-1} < \delta \leqslant \sqrt{N}} |T_\delta|,$$

$$T'' \ll \sum_{\Delta^{-1} < \delta \leqslant \sqrt{N}} \frac{N^{1+2\varepsilon}}{\delta^2} \ll N^{1+2\varepsilon}\Delta, \quad \sum_{k=1}^{K} T'' \ll K N^{1+2\varepsilon}\Delta.$$

Интервал $0 < \delta \leqslant \Delta^{-1}$ разобьем на $\ll r$ интервалов вида

$$D \leqslant \delta < D'; \quad 2D \leqslant D' < 4D,$$

причем положим

$$T(D) = \sum_{D \leqslant \delta < D'} |T_\delta|.$$

Находим

$$(T(D))^2 \ll D \sum_{D \leqslant \delta < D'} |T_\delta|^2 \ll$$

$$\ll \frac{N^{1+\varepsilon^{(4)}}}{D} \sum_{D \leqslant \delta < D'} \sum_{0 \leqslant \eta \leqslant \frac{N}{DX}} \min\left(\frac{X}{D}, \frac{1}{(\alpha k \delta^2 \eta)}\right) \ll$$

$$\ll \frac{N^{1+\varepsilon^{(5)}}}{D} \left(\sum_{0 < u < \frac{16DN}{X}} \min\left(\frac{X}{D}, \frac{1}{(\alpha k u)}\right) + X \right),$$

$$\left(\sum_{k=1}^{K} T(D)\right)^2 \ll K \sum_{k=1}^{K} (T(D))^2 \ll$$

$$\ll K \frac{N^{1+\varepsilon^{(5)}}}{D} \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{0 < u < \frac{16DN}{X}} \min\left(\frac{X}{D}, \frac{1}{(\alpha k u)}\right) + X \right) \ll$$

$$\ll K \frac{N^{1+\varepsilon^{(6)}}}{D} \left(\sum_{0 < v < \frac{16KDN}{X}} \min\left(\frac{X}{D}, \frac{1}{(\alpha v)}\right) + KX \right).$$

Отсюда, применяя лемму 1, а), получим

$$\left(\sum_{k=1}^{K} T(D)\right)^2 \ll K\frac{N^{1+\varepsilon^{(7)}}}{D}\left(\left(\frac{KDN}{Xq}+1\right)\left(\frac{X}{D}+q\right)+KX\right) \ll$$

$$\ll K^2N^{2+\varepsilon^{(7)}}\left(\left(\frac{1}{Xq}+\frac{1}{KN}\right)\left(\frac{X}{D}+q\right)+\frac{X}{N}\right) \ll K^2N^{2+\varepsilon^{(7)}}\Delta^2,$$

$$\sum_{k=1}^{K} T(D) \ll KN^{1+0,5\varepsilon^{(7)}}\Delta, \quad \sum_{k=1}^{K} T' \ll KN^{1+\varepsilon^{(7)}}\Delta,$$

$$S_K \ll KN^{1+\varepsilon_1}\Delta.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть* K — *целое*, $K \leqslant N$, $\Phi(z) = e^{2\pi i\alpha kz}$, α — *вещественное*,

$$\alpha = \frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q)=1, \quad 0<q<N,$$

и пусть T — *слагаемое второго вида леммы* 6. *Тогда, полагая*

$$S_K = \sum_{k=1}^{K} |T|, \quad \Delta_1 = \frac{1}{q}+\frac{q}{N}+N^{-0,2},$$

будем иметь

$$S_K \ll KN^{1+\varepsilon_1}\Delta_1.$$

Доказательство. Не нарушая общности, будем предполагать, что $\Delta_1^{-1} \geqslant c_1$, где c_1 — достаточно большое, превосходящее единицу. Имеем (пишем $x \leqslant cX^{1+\varepsilon_0}$ вместо $x \ll X^{1+\varepsilon_0}$)

$$S_K = \sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{\substack{X \leqslant x \leqslant cX^{1+\varepsilon_0} \\ xm \leqslant N}} \sum_{M \leqslant m < M'} e^{2\pi i\alpha kxm}\right|;$$

$$X < N^{0,8}, \quad M > N^{0,2};$$

суммируя по m при заданных k и x, находим

$$S_K \ll N^{\varepsilon'} \sum_{0<z\leqslant KcX^{1+\varepsilon_0}} \min\left(M, \frac{1}{(\alpha z)}\right).$$

В случае $KcX^{1+\varepsilon_0} \leqslant 0,5q$, согласно лемме 1, б) будем иметь

$$S_K \ll N^{\varepsilon'} q \ln q \ll N^{1+\varepsilon''}\frac{q}{N}.$$

А в случае $KcX^{1+\varepsilon_0} > 0{,}5q$, согласно лемме 1, а), будем иметь

$$S_K \leqslant N^{\varepsilon'} \frac{KcX^{1+\varepsilon_0}}{q}(M + q\ln q) \leqslant$$
$$\leqslant N^{\varepsilon''} KXM\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{M}\right) \leqslant KN^{1+\varepsilon''}\left(\frac{1}{q} + N^{-0,2}\right).$$

В обоих случаях лемма верна.

Теорема 3. *Пусть K — целое, $K \leqslant N$, α — вещественное,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q < N.$$

Тогда, полагая

$$V_K = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i\alpha kp} \right|,$$

будем иметь

$$V_K \leqslant KN^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2}\right).$$

Доказательство. Справедливость теоремы следует из лемм 5, 6, 7 и 8.

Теорема 4. *Пусть α — вещественное,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q < N.$$

Тогда при любом σ с условием $0 < \sigma \leqslant 1$ число A_σ значений $\{\alpha p\}$; $p \leqslant N$, подчиненных условию $\{\alpha p\} < \sigma$, выразится формулой

$$A_\sigma = \sigma\pi(N) + R_\sigma; \quad R_\sigma \leqslant N^{1+\varepsilon_1}\Delta, \quad \Delta = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2}.$$

Доказательство. Считая $\Delta < 0{,}1$ (что не нарушает общности), применим обозначения леммы 3 гл. 1, положив $\rho = 1$ и взяв в качестве ряда $\delta_1, \ldots, \delta_Q$ ряд дробей $\{\alpha p\}$, $p \leqslant N$ (следовательно, $Q = \pi(N)$). Применим утверждение а) леммы 3, гл. 1. Тогда для суммы

$$U(\alpha, \beta) = \sum_{p \leqslant N} \psi(\alpha p)$$

найдем неравенство

$$U(\alpha,\ \beta)-(\beta-\alpha)\pi(N)\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\varkappa_m\,|T_m|;\quad T_m=\sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i m\alpha p};$$

$$\varkappa_m=\begin{cases}\dfrac{1}{m}, & \text{если}\quad m\leqslant\dfrac{1}{\Delta},\\ \dfrac{1}{\Delta m^2}, & \text{если}\quad m>\dfrac{1}{\Delta}.\end{cases}$$

Числа m мы распределим среди интервалов вида

$$K\leqslant m<2K;\quad K=2^n\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

причем, полагая

$$W_K=\sum_{m=K}^{2K-1}\varkappa_m\,|T_m|,$$

убедимся (теорема 1), что при $K\leqslant\frac{1}{\Delta}$ будет

$$W_K\leqslant\frac{1}{K}KN^{1+\varepsilon}\Delta=N^{1+\varepsilon}\Delta;$$

при $\frac{1}{\Delta}<K\leqslant\frac{1}{2}N$ будет

$$W_K\leqslant\frac{1}{\Delta K^2}KN^{1+\varepsilon}\Delta=\frac{1}{\Delta K}N^{1+\varepsilon}\Delta.$$

Кроме того, тривиально найдем, что при $\frac{1}{2}N<K$ будет

$$W_K\leqslant\frac{1}{\Delta K}N=\frac{N}{\Delta^2NK}N\Delta<\frac{N}{K}N\Delta.$$

При этом получим

$$U(\alpha,\ \beta)-(\beta-\alpha)\pi(N)\leqslant\sum_K W_K\leqslant N^{1+\varepsilon_1}\Delta,$$

откуда, согласно указанному утверждению, и следует справедливость нашей теоремы.

Теорема 5. *Пусть q — целое число, $0<q<N$, и $\rho(p)$ обозначает остаток от деления p на q. Тогда при любом целом q_1 с условием $0<q_1\leqslant q$ число B_{q_1} значений $\rho(p)$, $p\leqslant N$, с условием $\rho(p)<q_1$ выражается формулой*

$$B_{q_1}=\frac{q_1}{q}\pi(N)+O\left(N^{1+\varepsilon_1}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+N^{-0,2}\right)\right).$$

Доказательство. Эта теорема является следствием теоремы 4 при $a=1$, $\theta=0$, $\sigma=\frac{q_1}{q}$.

II. Оценка суммы $\sum\limits_{p\leqslant N} e^{2\pi ikf\sqrt{p}}$.

Лемма 9. *Пусть* $|T|$ — *слагаемое первого особого вида леммы* 6, *причем* $\Phi(z)=e^{2\pi ikf\sqrt{z}}$, *где* k — *натуральное и* f — *положительное постоянное. Тогда имеем*

$$|T|\ll N^{1+\varepsilon_1-\frac{1}{8}}k^{\frac{1}{4}}.$$

Доказательство. Будем писать $\delta x\leqslant c_1X^{1+\varepsilon_0}$ вместо $\delta x\ll X^{1+\varepsilon_0}$ и $\delta y\leqslant c_2Y^{1+\varepsilon_0}$ вместо $\delta y\ll Y^{1+\varepsilon_0}$. Находим

$$|T|\ll\sum_{\delta}|T_\delta|;\quad T_\delta=\sum_{X\leqslant\delta x\leqslant c_1X^{1+\varepsilon_0}}\ \sum_{\substack{Y\leqslant\delta y\leqslant c_2Y^{1+\varepsilon_0}\\ \delta^2xy\leqslant N}} e^{2\pi ikf\delta\sqrt{xy}};$$

$$X\geqslant Y,\quad N^{0,8}<XY\leqslant N.$$

Заставляя ξ пробегать последовательные натуральные числа, получим

$$T_\delta^2\ll N^{\varepsilon}\frac{X}{\delta}\times$$

$$\times\sum_{X\leqslant\delta\xi\leqslant c_1X^{1+\varepsilon_0}}\ \sum_{\substack{Y\leqslant\delta y_1\leqslant c_2Y^{1+\varepsilon_0}\\ \delta^2\xi y_1\leqslant N}}\ \sum_{\substack{Y\leqslant\delta y\leqslant c_2Y^{1+\varepsilon_0}\\ \delta^2\xi y\leqslant N}} e^{2\pi ikf\delta\sqrt{\xi}\,(\sqrt{y_1}-\sqrt{y})},$$

где y_1 пробегает те же значения, что и y. Меняя порядок суммирования, т. е. сначала при заданных y_1 и y суммируя по ξ в границах

$$\frac{X}{\delta}\leqslant\xi\leqslant\min\left(c_1\frac{X^{1+\varepsilon_0}}{\delta},\ \frac{N}{\delta^2y_1},\ \frac{N}{\delta^2y}\right);$$

$$y_1\leqslant Y_0,\quad y\leqslant Y_0;\quad Y_0=\min\left(c_2\frac{Y^{1+\varepsilon_0}}{\delta},\ \frac{N}{\delta X}\right),$$

согласно лемме 1 гл. 1, получим

$$T_\delta^2\ll N^{\varepsilon}\frac{X}{\delta}\sum_{0<y_1\leqslant Y_0}\ \sum_{0<y\leqslant Y_0}\min\left(\frac{X}{\delta},\ \frac{X}{\delta}\left(\frac{k^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}|\sqrt{y_1}-\sqrt{y}|^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{X}{\delta}\right)^{\frac{3}{4}}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\left(\frac{X}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}|\sqrt{y_1}-\sqrt{y}|^{\frac{1}{2}}}\right)\right),$$

откуда, ввиду $\left|\sqrt{y_1}-\sqrt{y}\right|=\frac{s}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y}}<\frac{s}{\sqrt{y_1}}$; $s=|y_1-y|$, найдем

$$T_\delta^2 \ll N^\varepsilon \frac{X^2}{\delta^2} \sum_{0<y_1\leqslant Y_0} \sum_{0\leqslant s\leqslant Y_0} \min\left(1, \frac{k^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{X}{\delta}\right)^{\frac{3}{4}} y_1^{\frac{1}{4}}} + \frac{Y_0^{\frac{1}{4}}}{\left(\frac{X}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \delta^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}}}\right) \ll$$

$$\ll N^{\varepsilon'} \frac{X^2}{\delta^2}\left(Y+\frac{k^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{9}{4}}}{X^{\frac{3}{4}}}+\frac{Y^{\frac{7}{4}}}{X^{\frac{1}{4}}}\right) \ll$$

$$\leqslant N^{\varepsilon'} \frac{X^2Y^2}{\delta^2}\left(\frac{1}{Y}+\frac{k^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{4}}}{X^{\frac{3}{4}}}+\frac{1}{X^{\frac{1}{4}}Y^{\frac{1}{4}}}\right) \ll N^{2+\varepsilon'-\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{2}},$$

$$T_\delta \ll \frac{N}{\delta}^{1+0,5\varepsilon'-\frac{1}{8}} k^{\frac{1}{4}}, \quad T \ll N^{1+\varepsilon_1-\frac{1}{8}}k^{\frac{1}{4}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $|T|$ — слагаемое второго особого вида леммы 6, причем $\Phi(z)=e^{2\pi i k f\sqrt{z}}$, где k — натуральное и f — положительное постоянное. Тогда имеем*

$$|T| \ll N^{1+\varepsilon_0-\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Находим

$$|T| \ll \sum_{X\leqslant x<X^{1+\varepsilon_0}} \left|\sum_{\substack{M\leqslant m\leqslant M' \\ xm\leqslant N}} e^{2\pi i k f\sqrt{xm}}\right|,$$

откуда, согласно лемме 1 гл. 1, выводим

$$|T| \ll N^{\varepsilon_1} \sum_x M\left(\frac{k^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}}{M^{\frac{3}{4}}}+\frac{1}{M^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}}\right) \ll$$

$$\ll N^{\varepsilon_1}XM\left(\frac{k^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{4}}}{M^{\frac{3}{4}}}+\frac{1}{X^{\frac{1}{4}}M^{\frac{1}{4}}}\right) \ll N^{1+\varepsilon_0-\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть k — натуральное число, $k \leqslant N^{0,1}$, f — положительное постоянное и*

$$S_k = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i k f \sqrt{p}}.$$

Тогда имеем

$$S_k \ll N^{1+\varepsilon-\frac{1}{8}} k^{\frac{1}{4}}.$$

Доказательство. Справедливость теоремы следует из лемм 6, 9 и 10.

Теорема 7. *Пусть f — положительное постоянное. Тогда при любом σ с условием $0 < \sigma \leqslant 1$ число A_σ значений $\{f\sqrt{p}\}$; $p \leqslant N$, подчиненных условию $\{f\sqrt{p}\} < \sigma$, выражается формулой*

$$A_\sigma = \sigma\pi(N) + R_\sigma; \quad R_\sigma \ll N^{1+\varepsilon-0,1}.$$

Доказательство. Примем обозначения леммы 3 гл. 1. Взяв произвольно большое натуральное l, кратное 10, положим $\varepsilon_{(0)} = \frac{1}{l}$, $\Delta = N^{0,1+\varepsilon_{(0)}}$, $\rho = 0,1l$. Приняв в качестве чисел $\delta_1, \ldots, \delta_Q$ дроби $\{f\sqrt{p}\}$; $p \leqslant N$ (следовательно, $Q = \pi(N)$), применим утверждение a) леммы 3 гл. 1. Здесь для суммы

$$U(\alpha, \beta) = \sum_{p \leqslant N} \psi(f\sqrt{p})$$

получим неравенство

$$U(\alpha, \beta) - (\beta - \alpha)\pi(N) \ll \sum_{k=1}^{\infty} H(k)\,|S_k|; \quad S_k = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i k f \sqrt{p}};$$

$$H(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{если } k \leqslant \Delta^{-1}, \\[2mm] \dfrac{1}{\Delta^\rho k^{\rho+1}}, & \text{если } k > \Delta^{-1}, \end{cases}$$

$$S_k \ll \begin{cases} N^{1+\varepsilon-\frac{1}{8}} k^{\frac{1}{4}}, & \text{если } k \leqslant N^{0,1}, \\ N & \text{всегда}. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\sum U(\alpha, \beta) - (\beta - \alpha)\pi(N) \ll N^{1+\varepsilon_1-0,1},$$

и, следовательно, согласно утверждению a) леммы 3 гл. 1, наша теорема справедлива.

Пример. Полагая $f = 1/2$, $\sigma = 1/2$, для числа $D(N)$ простых чисел с условиями

$$p \leqslant N, \quad 0 \leqslant \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{p} \right\} < \frac{1}{2},$$

иными словами, для числа $D(N)$ простых чисел, не превосходящих N и попадающих в интервалы вида (n — целое) $(2n)^2 \leqslant p < (2n+1)^2$, будем иметь формулу

$$D(N) = \frac{1}{2} \pi(N) + O(N^{1+\varepsilon-0,1}).$$

Насколько эта формула отражает действительность, видно из следующей таблицы, где в качестве значений для N взяты числа вида $(2m)^2 - m$.

N	3	14	33	60	95	138	189	248	315	390
$2D(N)$	0	4	10	18	26	36	46	54	68	80
$\pi(N)$	2	6	11	17	24	38	42	58	65	77
N	473	564	663	770	885	1008	1139	1278	1425	1580
$2D(N)$	94	108	126	140	158	174	192	210	228	252
$\pi(N)$	91	103	121	136	153	168	189	206	224	249
N	1743	1914	2093	2280	2475	2678	2889	3108	3335	3570
$2D(N)$	276	294	316	336	366	388	420	446	470	496
$\pi(N)$	271	293	316	338	366	388	418	442	470	499
N	3813	4064	4323	4590	4865	5148	5439	5738	6045	6360
$2D(N)$	528	562	590	620	654	696	726	760	804	840
$\pi(N)$	529	560	590	620	651	686	718	754	788	828
N	6683	7014	7353	7700	8055	8418	8789	9168	9565	9950
$2D(N)$	866	904	938	980	1016	1056	1094	1132	1180	1222
$\pi(N)$	861	902	937	972	1007	1046	1090	1131	1178	1221

III. Оценка суммы $\sum\limits_{p\leqslant N}\chi(p+k)$.

Лемма 11. *Пусть q — простое нечетное, $(k, q)=1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q, $\xi(x)$ и $\eta(y)$ — неотрицательные,*

$$S=\sum_{x=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{q-1}\xi(x)\eta(y)\chi(xy+k);$$

$$\sum_{x=0}^{q-1}(\xi(x))^2\leqslant X_0,\quad \sum_{y=0}^{q-1}(\eta(y))^2\leqslant Y_0.$$

Тогда имеем

$$|S|\leqslant\sqrt{2X_0Y_0q}.$$

Доказательство. Находим

$$|S|^2\leqslant X_0\sum_{x=0}^{q-1}\sum_{y_1=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{q-1}\eta(y_1)\eta(y)\chi\left(\frac{xy_1+k}{xy+k}\right)$$

(слагаемые с xy_1+k, или с $xy+k$, кратным q, равны нулю). Часть правой части, отвечающая случаю $y_1=y$, не превосходит X_0Y_0q. Часть, отвечающая паре не равных между собою y_1 и y, но с одним из них равным нулю, численно $\leqslant X_0\eta(y)\eta(y_1)$. А часть, отвечающая паре не равных между собою и не равных нулю y и y_1, будет

$$X_0\eta(y_1)\eta(y)\chi\left(\frac{y_1}{y}\right)\sum_{x=0}^{q-1}\chi\left(1+\frac{k(yy_1^{-1}-1)}{xy+k}\right),$$

что численно $\leqslant X_0\eta(y_1)\eta(y)$. Из доказанного и из

$$\sum_{x=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{q-1}\eta(y_1)\eta(y)\leqslant qY_0$$

мы и убеждаемся в справедливости леммы.

Лемма 12. *Пусть q — простое нечетное, $(k, q)=1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q, $\xi(x)$ и $\eta(y)$ — неотрицательные, M и N — неотрицательные целые, а X*

и Y — положительные целые,

$$S=\sum_{x=M+1}^{M+X}\sum_{y=N+1}^{N+Y}\xi(x)\,\eta(y)\,\chi(xy+k);$$

$$\xi(x)\leqslant\alpha,\quad \eta(y)\leqslant\beta.$$

Тогда имеем

$$S\leqslant\alpha\beta XYF;\quad F=\sqrt{\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{q}+\frac{q}{XY}}.$$

Доказательство. Применим лемму 11. Число X_0 при $X\leqslant q$ заменяем числом $\alpha^2 X$, а при $X>q$ заменяем числом $\left(\alpha\frac{X}{q}\right)^2 q$. Число Y_0 при $Y\leqslant q$ заменяем числом $\beta^2 Y$, а при $Y>q$ заменяем числом $\left(\beta\frac{Y}{q}\right)^2 q$. Таким путем и убеждаемся в справедливости леммы.

Лемма 13. *Пусть q — простое нечетное, $(k, q)=1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q,*

$$T\leqslant\sum_{\delta}|T_\delta|,$$

где δ пробегает некоторую последовательность натуральных чисел, и T_δ — сумма вида

$$T_\delta=\sum_{\substack{\frac{X}{\delta}<x\leqslant\frac{X}{\delta}g\\ \\ xy\leqslant\frac{N}{\delta^2}}}\ \sum_{\frac{Y}{\delta}<y\leqslant\frac{Y}{\delta}h}\chi(\delta^2xy+k);\qquad g=c'X^{\varepsilon_0},\quad h=c''Y^{\varepsilon_0},$$

где X и Y — числа с условиями $N^{\frac{1}{3}}<X<N^{\frac{2}{3}}$, $XY>N^{\frac{2}{3}}$, причем $x=x_0$ при заданном x_0 имеет $\leqslant N^{\varepsilon'}$ решений и также $y=y_0$ при заданном y_0 имеет $\leqslant N^{\varepsilon'}$ решений. Тогда имеем

$$T\leqslant N^{1+\varepsilon_1}\Delta;\quad \Delta=\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+N^{-\frac{1}{6}}.$$

Доказательство. Не нарушая общности, ограничимся случаем $\Delta^{-1}\geqslant c_0$, где c_0 — достаточно большое постоянное, превосходящее единицу.

Будем считать также, что $Y>N^{\frac{1}{6}}$ (иначе $XY\leqslant N^{\frac{5}{6}}\leqslant\leqslant N\Delta$).

Можно ограничиться только значениями δ с условием $\delta < \Delta^{-1}$, так как

$$\sum_{\delta \geqslant \Delta^{-1}} |T_\delta| \leqslant \sum_{\delta \geqslant \Delta^{-1}} \frac{rN^{1+2\varepsilon}}{\delta^2} \leqslant N^{1+\varepsilon'}\Delta.$$

А поскольку тогда будет $\delta^2 < q$ и, следовательно, δ^2 не будет делиться на q, то слагаемые $\chi(\delta^2 xy + k)$ можно заменить слагаемым $\chi(xy+k')$; $\delta^2 k' \equiv k \pmod q$.

Полагая

$$\frac{X}{\delta} = X_\delta, \quad \frac{Y}{\delta} = Y_\delta, \quad \frac{N}{\delta^2} = N_{\delta^2},$$

получим

$$|T_\delta| = |T'_\delta|; \quad T'_\delta = \sum_{X_\delta \leqslant x \leqslant X_\delta g} \sum_{\substack{Y_\delta \leqslant y \leqslant Y_\delta h \\ xy \leqslant N_{\delta^2}}} \chi(xy+k').$$

Разбив интервал $X_\delta \leqslant x \leqslant X_\delta g$ на $\leqslant r$ интервалов вида

$$X'_\delta \leqslant x < X''_\delta, \quad 2X'_\delta \leqslant X''_\delta < 4X'_\delta,$$

положим

$$T''_\delta = \sum_{X'_\delta \leqslant x < X''_\delta} \sum_{\substack{Y'_\delta \leqslant y < Y''_\delta \\ xy \leqslant N_{\delta^2}}} \chi(xy+k').$$

При этом область суммирования суммы T''_δ мы заменим областью Ω, ограниченной неравенствами

$$X'_\delta \leqslant x < X''_\delta, \quad xy \leqslant N_{\delta^2},$$

считая в точках, не удовлетворяющих условию $Y'_\delta \leqslant y < Y''_\delta$, число решений $y = y_0$ равным нулю. Область Ω разбивается на две области — область Ω_1, ограниченную неравенствами

$$X'_\delta \leqslant x < X''_\delta, \quad 0 < y \leqslant \frac{N_{\delta^2}}{X''_\delta},$$

и область Ω_2, ограниченную неравенствами

$$X'_\delta \leqslant x < X''_\delta, \quad \frac{N_{\delta^2}}{X''_\delta} \leqslant y < \frac{N_{\delta^2}}{x}.$$

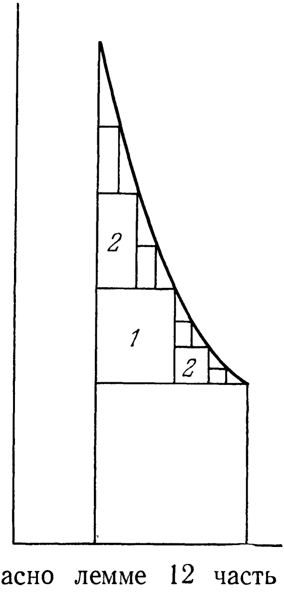
В соответствии с этим сумма T_δ разбивается на сумму двух слагаемых:

$$T''_\delta = T''_{\delta,\,\Omega_1} + T''_{\delta,\,\Omega_2}.$$

Сначала оценим сумму $T''_{\delta,\,\Omega_1}$. Применяя лемму 12, заменив в ней X и Y числами $X''_\delta - X'_\delta$ и $\frac{N_{\delta^2}}{X''_\delta}$, а α и β, каждое, числом $N^{\varepsilon'}$, получим

$$T''_{\delta,\,\Omega_1} \leqslant N_{\delta^2} N^{2\varepsilon'} F_\delta; \quad F_\delta = \sqrt{\frac{1}{X'_\delta} + \frac{X'_\delta}{N_{\delta^2}} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N_{\delta^2}}}.$$

Дальнейшей нашей задачей является получение оценки близкого порядка точности и для суммы $T''_{\delta,\,\Omega_2}$. При этом мы будем предполагать, что F_δ меньше достаточно малого положительного постоянного, меньшего единицы; в противном случае оценка такого же порядка точности тривиальна. Пусть $s = s_0$ — наибольшее целое число с условием $2^s \leqslant F_\delta^{-1}$. Из области Ω_2 выделим одну «первую», $2 = 2^1$ «вторых», $4 = 2^2$ «третьих» и т. д., наконец, 2^{s_0-1} «s_0-х» областей, согласно схеме, указанной на прилагаемом чертеже. Здесь s-я область представлена прямоугольником с основанием $\frac{X''_\delta - X'_\delta}{2^s}$ и с высотою,



точный порядок которой $\frac{N_{\delta^2}}{X'_\delta 2^s}$. Согласно лемме 12 часть суммы $T''_{\delta,\,\Omega_2}$, отвечающая одной из s-х областей, будет

$$\leqslant \frac{N_{\delta^2}}{2^{2s}} N^{2\varepsilon'} \sqrt{\frac{2^s}{X'_\delta} + \frac{X'_\delta 2^s}{N_{\delta^2}} + \frac{1}{q} + \frac{q 2^{2s}}{N_{\delta^2}}} \leqslant \frac{N_{\delta^2}}{2^s} N^{2\varepsilon'} F_\delta.$$

Следовательно, часть суммы $T''_{\delta,\,\Omega_2}$, отвечающая всем s-м областям, будет $\leqslant N_{\delta_2} N^{2\varepsilon'} F_\delta$. Отсюда, учитывая, что часть суммы $T''_{\delta,\,\Omega_2}$, отвечающая оставшейся части области Ω_2,

$$\ll \frac{X'_\delta}{2^{s_0}}\frac{N_{\delta^2}}{X'_\delta}N^{2\varepsilon'} \ll N_{\delta^2}N^{2\varepsilon'}F_\delta,$$

получим оценку

$$T''_{\delta,\,\Omega_2} \ll N_{\delta^2}N^{2\varepsilon'}F_\delta.$$

Последняя, в соединении с найденной выше оценкой для $T''_{\delta,\,\Omega_1}$, дает

$$T''_\delta \ll N_{\delta^2}N^{2\varepsilon'}F_\delta.$$

Отсюда и из $X'_\delta < X_\delta g \leqslant X_s N^{\varepsilon_0}$ находим

$$T''_\delta \ll N_{\delta^2}N^{2\varepsilon'+0,5\varepsilon_0}\sqrt{\frac{1}{X_\delta}+\frac{X_\delta}{N_{\delta^2}}+\frac{1}{q}+\frac{q}{N_{\delta^2}}},$$

откуда, вспомнив, что сумма T'_δ состоит из $\ll r$ сумм вида T_δ, и заменив X_δ и N_{δ^2} указанными выше их выражениями, получим

$$T_\delta \ll \frac{N^{1+2\varepsilon'+0,5\varepsilon_0}r}{\delta}\sqrt{\frac{1}{X}+\frac{X}{N}+\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}.$$

Просуммировав это неравенство по δ и учтя условие $N^{\frac{1}{3}} < X < N^{\frac{2}{3}}$, мы и получим указанную в лемме оценку для T.

Лемма 14. *Пусть q — простое нечетное, $(k, q) = 1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q и*

$$T = \sum_{X < x \leqslant Xg}\ \sum_{\substack{M \leqslant m < M' \\ xm \leqslant N}} \chi(xm+k); \quad g = cN^{\varepsilon_0}; \quad M > N^{\frac{2}{3}},$$

где $1 \leqslant X < N^{\frac{1}{3}}$, $M > N^{\frac{2}{3}}$, x пробегает неубывающую последовательность целых чисел с условием, что $x = x_0$ при заданном x_0 имеет $\leqslant N^{\varepsilon'}$ решений, а m пробегает натуральные числа. Тогда имеем

$$T \ll N^{1+\varepsilon_1}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}.$$

Доказательство. Пусть T_x — сумма членов суммы T с заданным x. При x, не делящемся на q, согласно известной теореме о сумме значений характера (см., например, вопрос 12а гл. 6 книги[1]), будем иметь

$$T_x \leqslant N^{\varepsilon'} r \sqrt{q}.$$

А при x, кратном q, тривиально найдем

$$T_x \leqslant N^{\varepsilon'} M.$$

Поэтому

$$T \leqslant N^{\varepsilon'} \frac{N}{M}\left(r\sqrt{q} + \frac{M}{q}\right) \leqslant N^{1+\varepsilon_1} \sqrt{\frac{q}{N} + \frac{1}{q}}.$$

Теорема 8. *Пусть q — простое нечетное, $(k, q) = 1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q и*

$$T = \sum_{p \leqslant N} \chi(p+k).$$

Тогда имеем

$$T \leqslant N^{1+\varepsilon_2}\left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-\frac{1}{6}}\right).$$

Доказательство. Эта теорема является следствием лемм 6 (особое подразделение), 13 и 14.

Следствие. *Пусть q — простое нечетное, $(k, q) = 1$. Число квадратичных вычетов (невычетов)* $\operatorname{mod} q$ *вида $p + k$, $p \leqslant N$, равно*

$$0{,}5\pi(N) + R(N),$$

где

$$R(N) \leqslant N^{1+\varepsilon_2}\left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-\frac{1}{6}}\right).$$

Глава 5

Асимптотическая формула в тернарной проблеме Гольдбаха

Краткая история возникшей в 1742 г. из переписки Гольдбаха с Эйлером проблемы Гольдбаха изложена во введении к монографии[2]. Эта проблема представляет собою гипотезу, согласно которой всякое четное число, не меньшее шести, представляется суммою двух нечетных простых чисел — бинарная проблема Гольдбаха, а всякое нечетное число, не меньшее девяти, представляется суммою трех нечетных простых чисел — тернарная проблема Гольдбаха. Харди и Литтльвуд первые стали рассматривать проблему Гольдбаха в гораздо более широкой постановке, чем только как проблему существования представлений, — эти ученые поставили вопрос об асимптотической формуле для числа представлений. В частности, они дали условный вывод такой формулы для тернарной проблемы Гольдбаха.

Найденный мною в 1937 г. метод оценки сумм по простым числам позволил[19, 20] в первую очередь найти оценку простейшей из таких сумм, а именно оценку суммы вида

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}.$$

Эта оценка в соединении с известными ранее теоремами, касающимися распределения простых чисел в арифметических прогрессиях, имеющих разность, не превосходящую некоторой медленно растущей функции $\psi(N)$ (теорема Пейджа, или же гораздо более точная в отношении порядка остаточного члена, но основанная на лемме Зигеля, теорема Вальфиша), дала возможность безусловно доказать асимптотическую формулу Харди и Литтльвуда в тернарной проблеме Гольдбаха.

В приводимом з есь доказательстве, помимо применения моих оценок (теоремы 1 и 2 гл. 4), я пользуюсь лишь простейшим вариантом теоремы Пейджа, причем доказательство строю так, чтобы область применения этого простейшего варианта была возможно меньшей. Усложнив вариант и несколько расширив область его применения, можно получить значительно более точный остаточный член[26].

Лемма 1 (Пейдж). *Пусть при заданном* ε_0 *заданы произвольно большие* c_1 *и* c. *Тогда число* $\pi(N, q, l)$ *простых чисел, не превосходящих* N, *заключенных в арифметической прогрессии*

$$qx+l; \quad 0<q\leqslant r^c, \quad (q, l)=1, \quad 0\leqslant l<q; \quad r=\ln N,$$

выражается формулой

$$\pi(N, q, l)=\frac{1}{q_1}\int_2^N \frac{dx}{\ln x}+H; \qquad q_1=\varphi(q),$$

где для всех q, *кроме, быть может, ряда исключительных, кратных какого-то одного* $q=q_0$, *удовлетворяющего условию*

$$q\geqslant r^{2-\varepsilon_0},$$

имеем неравенство

$$H\leqslant\frac{Nr^{-c}}{q_1 r}.$$

Доказательство. Эта лемма является следствием известной теоремы английского математика Пейджа[3].

Лемма 2. *Пусть* $N\geqslant 2$, $\ln N=r$, z — *вещественное*,

$$I(z)=\int_2^N \frac{e^{2\pi i z x}}{r}\,dx, \quad J(z)=\int_2^N \frac{e^{2\pi i z x}}{\ln x}\,dx.$$

Тогда имеем

$$I(z)\leqslant Z, \quad J(z)\leqslant Z;$$

$$Z=\begin{cases} Nr^{-1}, & \text{если } |z|\leqslant N^{-1}, \\ |z|^{-1}r^{-1}, & \text{если } N^{-1}<|z|\leqslant N^{-0,5}. \end{cases}$$

Доказательство. Для интеграла $I(z)$ оба случая ассматриваются тривиально. Для интеграла $J(z)$ первый случай также рассматривается тривиально, поэтому рассмотрим лишь второй случай, причем, не нарушая общности доказательства, будем предполагать, что $z>0$.

Применяя известное преобразование (ср. доказательство леммы 3 гл. 2), найдем (подстановка $2zx=u$)

$$J(z)=U+iV; \quad U=\int_{\sigma_0}^{\sigma}\psi(u)\cos\pi u\,du, \quad V=\int_{\sigma_0}^{\sigma}\psi(u)\sin\pi u\,du;$$

$$\sigma_0=4z, \quad \sigma=2Nz, \quad \psi(u)=\frac{1}{2z\ln\frac{u}{2z}},$$

$$|U|\leqslant\int_{\sigma_0}^{\sigma_0+1}\psi(u)\,du=\int_{2}^{2+(2z)^{-1}}\frac{dx}{\ln x}\ll z^{-1}r^{-1}, \quad |V|\ll z^{-1}r^{-1}.$$

Отсюда и следует справедливость леммы для второго случая интеграла $J(z)$.

Лемма 3. *Пусть* $\tau=Nr^{-c}$, *где* $c\geqslant 4$, *и пусть*

$$R=\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}(J(z))^3e^{-2\pi izN}\,dz,$$

где $J(z)$ *имеет значение, указанное в лемме* 2. *Тогда имеем*

$$R=\frac{N^2}{2r^3}+O\left(\frac{N^2}{r^4}\right).$$

Доказательство. Применим обозначения леммы 2. Интеграл R сравним с интегралом

$$R_0=\int_{-0,5}^{0,5}(I(z))^3e^{-2\pi iz}\,dz,$$

находим

$$R-R_0=\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}((J(z))^3-(I(z))^3)\,e^{-2\pi izN}\,dz+$$

$$+\left(\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}(I(z))^3e^{-2\pi izN}\,dz-R_0\right).$$

Здесь первое слагаемое правой части, ввиду леммы 2 и неравенства

$$|J(z)-I(z)|<\int_2^N\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{r}\right)dx\ll\frac{N}{r^2},$$

будет

$$\ll\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}Z^2\frac{N}{r^2}\,dx\ll\int_0^{N^{-1}}\frac{N^3}{r^4}\,dz+\int_{N^{-1}}^{\tau^{-1}}\frac{N}{r^4z^2}\,dz\ll\frac{N^2}{r^4}.$$

Второе же слагаемое правой части, ввиду леммы 2, будет

$$\ll\int_{\tau^{-1}}^{0,5}Z^3\,dz\ll\int_{\tau^{-1}}^{0,5}\frac{dz}{z^3r^3}\ll\frac{N^2}{r^{11}}.$$

Следовательно, $R-R_0\ll N^2r^{-4}$. Далее, полагая

$$R'=\int_{-0,5}^{0,5}(S(z))^3e^{-2\pi izN}\,dz;\quad S(z)=\sum_{x=3}^{N}\frac{e^{2\pi izx}}{r},$$

согласно лемме 2 гл. 2, будем иметь $I(z)-S(z)\ll r^{-1}$, $Z\gg r^{-1}$,

$$R_0-R'\ll\int_0^{0,5}Z^2r^{-1}\,dz=\int_0^{N^{-1}}\frac{N^2}{r^3}\,dz+\int_{N^{-1}}^{0,5}\frac{dz}{r^3z^2}\ll\frac{N}{r^3}.$$

Поэтому $R-R'\ll N^2r^{-4}$. Легко видеть что r^3R' выражает число представлений числа N в виде

$$N=x_1+x_2+x_3$$

с целыми x_1, x_2, x_3, превосходящими 2. При каждом $x_1=3$, 4, ..., $N-6$ равенство $x_2+x_3=N-x_1$ осуществляется $N-x_1-5$ раз; следовательно,

$$r^3R'=\sum_{x_1=3}^{N-6}(N-x_1-5)=\frac{(N-7)(N-8)}{2}=\frac{N^2}{2}+O(N),$$

откуда и убеждаемся в справедливости леммы.

Т е о р е м а. *Число $I(N)$ представлений нечетного положительного N в виде суммы*

$$N=p_1+p_2+p_3$$

с нечетными простыми p_1, p_2, p_3 выражается формулой

$$I(N)=\frac{N^2}{2r^3}S(N)+O\left(\frac{N^2}{r^{3,5-\varepsilon}}\right);$$

$$S(N)=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod{}''\left(1-\frac{1}{p^2-3p-1}\right),$$

причем $\prod\limits_p$ *распространяется на все простые числа, а* $\prod''$ — *лишь на простые делители числа N. При этом имеем* $S(N)>1$.

Следствие (тернарная проблема Гольдбаха). *Существует c_0 с условием, что всякое нечетное N, не меньшее чем c_0, есть сумма трех нечетных простых чисел.*

Доказательство. Полагая $\tau=Nr^{-7}$, имеем

$$I(N)=\int\limits_{-\tau^{-1}}^{-\tau^{-1}+1}S_\alpha^3e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha;\quad S_\alpha=\sum_{2<p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p}.$$

Интервал интегрирования интеграла $I(N)$ мы разобьем на интервалы первого и второго классов. Интервалами первого класса мы назовем интервалы, включающие все значения α вида

$$\alpha=\frac{a}{q}+z;\quad (a,\ q)=1,\quad -\tau^{-1}<z\leqslant\tau^{-1},\quad 0<q\leqslant r^3.$$

Очевидно (c_0 достаточно велико), интервалы первого класса друг на друга не налегают. Интервалами второго класса мы назовем интервалы, оставшиеся после выделения интервалов первого класса. Всякое α, принадлежащее интервалу второго класса, можно представить в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+z;\quad (a,\ q)=1,\quad -\frac{1}{q\tau}\leqslant z\leqslant\frac{1}{q\tau},\quad r^3<q\leqslant\tau.$$

Соответственно указанному разбиению интервала интегрирования интеграл $I(N)$ разобьется на два слагаемых:

$$I(N)=I_1(N)+I_2(N).$$

1. Оценка $I_2(N)$. Согласно теореме 1 гл. 4 при $q \geqslant r^7$ имеем

$$S_\alpha \ll Nr \ln r \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{qr}{N}}+re^{-0,5\sqrt{r}}\right) \ll Nr^{-2,5+\varepsilon_1}.$$

А согласно теореме 2 гл. 4 при $r^3 < q \leqslant r^7$ имеем

$$S_\alpha \ll Nr^{-2,5+\varepsilon_1}.$$

Поэтому

$$I_2(N) \ll Nr^{-2,5+\varepsilon_1} \int_0^1 |S_\alpha|^2 \, d\alpha =$$

$$= Nr^{-2,5+\varepsilon} \int_0^1 \sum_{2<p' \leqslant N} \sum_{2<p \leqslant N} e^{2\pi i\alpha(p'-p)} \, d\alpha \ll N^2 r^{-3,5+\varepsilon_1}.$$

2. Интервалы первого класса, отвечающие значениям q, не являющимися исключительными. Пусть $I_{a,q}$ — часть интеграла $I_1(N)$, отвечающая интервалу первого класса, включающему дробь $\frac{a}{q}$ со значением q, не являющимся исключительным. Взяв какое-либо $\alpha = \frac{a}{q}+z$ этого интервала, сумму S_α мы разобьем на $[r^{12}]$ слагаемых вида

$$S_{\alpha, N_1} = \sum_{N_1 - A < p \leqslant N_1} e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)p}; \quad A = N[r^{12}]^{-1}.$$

Для слагаемых суммы S_{α, N_1} имеем $|zN_1 - zp| \leqslant zA$. Число же этих слагаемых $\ll Ar^{-1}$. Поэтому

$$S_{\alpha, N_1} - e^{2\pi i z N_1} \sum_{N_1 - A < p \leqslant N_1} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} \ll zA^2 r^{-1} \ll Ar^{-6}.$$

Но (лемма 1 с $c = 17$) при заданном l с условием $0 \leqslant l < q$, $(l, q) = 1$, число простых чисел вида $qx + l$, лежащих в интервале $N_1 - A < p \leqslant N_1$, выражается формулой

$$\frac{1}{q_1} \int_{N_1 - A}^{N_1} \frac{dx}{\ln x} + O\left(\frac{Nr^{-17}}{q_1 r}\right).$$

Поэтому

$$S_{\alpha, N_1} = \sum_l e^{2\pi i \frac{a}{q} l} \frac{1}{q_1} \int_{N_1 - A}^{N_1} \frac{e^{2\pi z N_1}}{\ln x} \, dx + O(Ar^{-6}).$$

Далее находим (обозначения леммы 2)

$$\sum_l e^{2\pi i \frac{a}{q} l} = \mu(q), \quad |zN_1 - zx| \leqslant zA, \quad \int_{N_1-A}^{N_1} \frac{zA}{\ln x}\,dx \ll Ar^{-6},$$

$$S_{\alpha, N_1} = \frac{\mu(q)}{q_1} \int_{N_1-A}^{N_1} \frac{e^{2\pi i z x}}{\ln x}\,dx + O(Ar^{-6}),$$

$$S_\alpha = \frac{\mu(q)}{q_1} J(z) + O(Nr^{-6}),$$

$$\frac{J(z)}{q_1} \ll \frac{Z}{q_1}, \quad S_\alpha^3 - \frac{\mu(q)}{q_1^3}(J(z))^3 \ll \frac{Z^2}{q_1^2} Nr^{-6} + N^3 r^{-18},$$

$$I_{a,q} - \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} \frac{\mu(q)}{q_1^3}(J(z))^3 e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N}\,dz \ll$$

$$\ll \int_0^{\tau^{-1}} \left(\frac{Z^2}{q_1^2} Nr^{-6} + \frac{N^3}{q_1^2} r^{-12}\right) dz \ll N^2 r^{-8} q_1^{-2}.$$

Заставляя a пробегать приведенную систему вычетов по модулю q, отсюда получим

$$\sum_a I_{a,q} = G(q) R + O(Nr^{-5} q_1^{-1}); \quad G(q) = \frac{\mu(q)}{q_1^3} \sum_a e^{2\pi i \frac{a}{q} N},$$

откуда, ввиду леммы 3 и неравенства $G(q) \ll q_1^{-2}$, получим

$$\sum_a I_{a,q} = \frac{N^2}{2r^3} G(q) + O\left(\frac{N^2}{r^4 q_1}\right).$$

3. Основные интервалы, отвечающие исключительным значениям q. Пусть q принадлежит к числу исключительных. Тогда $q = q_0 k$, где k — целое с условием $0 < k \leqslant r^{1+\varepsilon_0}$ (поскольку $q \leqslant r^3$ и $q_0 \geqslant r^{2-\varepsilon_0}$). Полагая

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad -\tau \leqslant z \leqslant \tau, \quad \delta = |z| N,$$

$$S(q, \delta) = Nr^{-1+\varepsilon} q^{-0,5}, \quad \text{если } \delta \leqslant 1,$$

$$S(q, \delta) = Nr^{-1+\varepsilon} q^{-0,5} \delta^{0,5}, \quad \text{если } \delta \geqslant 1,$$

согласно теореме 2 гл. 4, будем иметь $S_\alpha \ll S(q, \delta)$. Вместе с тем получим

$$I_{a,q} \ll \int_0^{\tau^{-1}} (S(q, \delta))^3\,dz \ll N \int_0^{r^3} (S(q, \delta))^3\,d\delta \ll N^2 r^{-3+3\varepsilon} q^{-1,5}.$$

Заставляя a пробегать приведенную систему вычетов по модулю q, отсюда получим

$$\sum_a I_{a,q} \ll N^2 r^{-3+3\varepsilon} q^{-0,5}$$

или, ради единообразия (поскольку порядок первого члена ниже порядка второго),

$$\sum_a I_{a,q} = \frac{N^2}{2r^3} G(q) + O(N^2 r^{-3+3\varepsilon} r^{-0,5}).$$

4. Предварительная формула для $I(N)$. Находим (1, 2, 3)

$$I_1(N) - \sum_{q \leqslant r^3} \frac{N^2}{2r^3} G(q) \ll$$

$$\ll \sum_{q \leqslant r^3} \frac{N^2}{r^4 q_1^2} + \sum_{k < r^{1+\varepsilon_0}} \frac{N^2 r^{-3+3\varepsilon}}{q_0^{0,5} k^{0,5}} \ll \frac{N^2 r^{\varepsilon_4}}{r^{3,5}},$$

$$\sum_{q > r^3} \frac{N^2}{2r^3} G(q) \ll \sum_{q > r^3} \frac{N^2}{r^3 q_1^2} \ll \frac{N^2}{r^4},$$

$$I(N) = \frac{N^2}{2r^3} S(N) + O\left(\frac{N^2 r^{\varepsilon_0}}{r^{3,5}}\right);$$

$$S(N) = \sum_{q=1}^{\infty} G(q).$$

5. Преобразование и исследование $S(N)$. Очевидно, $G(q)$ может быть отлично от нуля лишь в случае, когда каноническое разложение числа q имеет вид $q = p_1 \ldots p_k$ (в частности, когда $q = 1$). При этом будет справедливо тождество

$$G(p_1) \ldots G(p_k) = G(p_1 \ldots p_k).$$

Действительно, в случае $k=2$ справедливость этого тождества следует из равенства

$$G(p_1)\,G(p_2)=\frac{1}{\varphi(p_1p_2)}\sum_{0<a_1<p_1}\sum_{0<a_2<p_2}e^{2\pi i\frac{a_1p_2+a_2p_1}{p_1p_2}N},$$

где $a_1p_2+a_2p_1$ пробегает приведенную систему вычетов по модулю p_1p_2. Обобщение же этого тождества на случай $k>2$ тривиально.

При $x>2$ имеем

$$\prod_{p\leqslant x}(1+G(p))=\sum_{q\leqslant x}G(q)+\sum_{q>x}{}'\,G(q),$$

где $\sum'$ распространяется на значения q, не делящиеся на простые, большие x. Ввиду абсолютной сходимости $S(N)$ при неограниченном возрастании x первое слагаемое правой части стремится к пределу $S(N)$, второе — к пределу нуль. Поэтому, заставляя p пробегать все простые числа, будем иметь

$$S(N)=\prod_p(1+G(p)).$$

Далее легко находим

$$G(p)=\frac{1}{(p-1)^3},\quad \text{если } N \text{ не делится на } p,$$

$$G(p)=-\frac{1}{(p-1)^2},\quad \text{если } N \text{ делится на } p.$$

Поэтому

$$S(N)=\prod{}'\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod{}''\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right),$$

где $\prod'$ распространяется на значения p, не делящие N, а $\prod''$ — на значения p, делящие N.

Здесь первое произведение правой части превосходит 2, второе же, поскольку, ввиду нечетности N, в нем $p=2$ отсутствует и всегда $p\leqslant p_1-1$, где p_1 — соседнее с p простое число справа, будет

$$>\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{6}{\pi^2}>0{,}6.$$

Отсюда найдем

$$S(N) > 1.$$

Выражение для $S(N)$ можно представить и в виде

$$S(N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod{}'' \left(\frac{1 - \frac{1}{(p-1)^2}}{1 + \frac{1}{(p-1)^3}} \right) =$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod{}'' \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right).$$

Теорема доказана.

Глава 6

Об одном элементарном варианте метода тригонометрических сумм

Мой метод тригонометрических сумм допускает элементарные (построенные без применения средств анализа) варианты. Например, интерес представляет вариант, существенную роль в котором играют леммы 3 и 4 этой главы (или их следствия). Форму такого варианта можно придать, например, методу доказательства теоремы о распределении вычетов и невычетов степени n по простому модулю p, примененному в моей старой работе 1925 г. Тот же вариант (соединенный с леммой 8, позволяющий сводить суммы по простым числам к суммам хорошо изученного вида) был применен мною и в работе 1953 г. к выводу теоремы о распределении простых чисел по заданному модулю.

Ознакомление с указанным вариантом в применении к доказательству несколько упрощенной теоремы моей работы 1925 г., а также в применении к доказательству теоремы моей работы 1953 г. и является целью этой главы.

Специальные обозначения. При $0<\sigma\leqslant 1$ символом $\psi(x)$ обозначаем функцию, определяемую условиями

$$\psi(x)=1-\sigma, \qquad \text{если } \{x\}<\sigma,$$
$$\psi(x)=-\sigma, \qquad \text{если } \{x\}\geqslant\sigma.$$

Лемма 1. *Пусть* $\tau\geqslant 1$. *Тогда всякое вещественное число* α *можно представить в виде*

$$\alpha=\frac{A}{Q}+\frac{\theta}{Q\tau}; \quad (A, Q)=1, \quad 0<Q\leqslant\tau, \quad |\theta|<1.$$

Доказательство. См. решение вопроса 4 в гл. 1, книги[1].

Лемма 2. *Пусть $\tau \geqslant 1$, α и β — вещественные, d — целое и*

$$\alpha = \frac{A}{Q} + \frac{\theta}{Q\tau}; \quad (A, Q) = 1, \quad 0 < Q \leqslant \tau, \quad |\theta| < 1.$$

Тогда для суммы

$$T = \sum_{x=d}^{d+Q-1} \{\alpha x + \beta\}$$

справедливо равенство вида

$$T = \frac{1}{2} Q + \theta'; \quad |\theta'| < 1.$$

Доказательство. При $Q \leqslant 2$ лемма тривиальна. Поэтому предполагаем, что $Q > 2$. Полагая $x = d + y$, получим

$$T = \sum_{y=0}^{Q-1} \left\{ \frac{Ay + f(y)}{Q} \right\}; \quad f(y) = (\alpha d + \beta) Q + \frac{\theta y}{\tau}.$$

Представив наименьшее значение функции $f(y)$ в виде $k + \varkappa$, где k и $\varkappa$ — его целая и дробная части, убедимся, что наибольшее значение функции $f(y)$ имеет вид

$$k + \varkappa + H; \quad H = \frac{|\theta|(Q-1)}{\tau} \quad \text{(следовательно, } 0 \leqslant H < 1\text{)}.$$

Обозначая буквою r наименьший неотрицательный вычет числа $Ay + k$ по модулю Q, получим

$$T = \sum_{r=0}^{Q-1} \left\{ \frac{r + \lambda(r)}{Q} \right\}; \quad \lambda(r) = \varkappa + \frac{|\theta| y}{\tau}, \quad \varkappa \leqslant \lambda(r) \leqslant \varkappa + H.$$

Далее, положим

$$\left\{ \frac{r + \lambda(r)}{Q} \right\} = \frac{r + \lambda(r)}{Q} - g_r. \tag{1}$$

Убедимся, что $g_r = 0$ для всех значений r, кроме, быть может, $r = Q - 1$, когда, и то лишь при $\varkappa + H \geqslant 1$, может иметь место и случай $g_r = 1$. Сложив почленно Q равенств, получаемых из равенства (1) при $r = 0, \ldots, (Q-1)$, найдем

$$T = \frac{1}{2} Q - \frac{1}{2} + \varkappa + \frac{1}{2} H - g_{Q-1},$$

откуда уже легко убедимся в справедливости нашей леммы как в случае $\varkappa+H<1$, так и в случае $\varkappa+H\geqslant 1$.

Лемма 3. *Пусть* $\tau\geqslant 1$, α *и* β — *вещественные*, d — *целое*,

$$\alpha=\frac{A}{Q}+\frac{\theta}{Q\tau};\quad (A,\ Q)=1,\quad 0<Q\leqslant\tau,\quad |\theta|<1.$$

Тогда для суммы

$$S=\sum_{x=d}^{d+Q-1}\psi(\alpha x+\beta)$$

справедливо неравенство

$$|S|<2.$$

Доказательство. Обозначим символом T_β сумму T леммы 2. Поскольку

$$\{\alpha x+\beta-\sigma\}-\{\alpha x+\beta\}=1-\sigma,\quad \text{если}\ \{\alpha x+\beta\}<\sigma,$$
$$\{\alpha x+\beta-\sigma\}-\{\alpha x+\beta\}=-\sigma,\quad \text{если}\ \{\alpha x+\beta\}\geqslant\sigma,$$

то имеем

$$T_{\beta-\sigma}-T_\beta=S,$$

откуда, применив лемму 2, мы и убедимся в справедливости нашей леммы.

Следствие. *Пусть* d — *целое*, $(A,\ q)=1$,

$$S=\sum_{\substack{x=d\\(x,\ q)=1}}^{d+q-1}\psi\left(\frac{ax}{q}\right).$$

Тогда имеем

$$|S|\leqslant 2\tau(q).$$

Доказательство. Находим

$$S=\sum_{\substack{0\leqslant r<q\\(r,\ q)=1}}\psi\left(\frac{r}{q}\right)=\sum_{\delta\setminus q}\mu(\delta)\sum_{r'=0}^{q\delta^{-1}-1}\psi\left(\frac{r'}{q\delta^{-1}}\right);$$

$$|S|\leqslant\sum_{\delta\setminus q}2\leqslant 2\tau(q).$$

Лемма 4. *Пусть* q — *натуральное число*, h — *целое*, x *пробегает* X_0 *последовательных чисел ряда* $1,\ \ldots,\ q$,

$$S_y=\sum_x\psi\left(\frac{xy+h}{q}\right).$$

Тогда имеем

$$\sum_{\substack{0<y\leqslant q\\(y,\,q)=1}} |S_y| < 4q(\ln q)^2.$$

Доказательство. При $q \leqslant 60$ лемма тривиальна. Поэтому предполагаем, что $q > 60$. При $X_0 = q$ лемма является следствием леммы 3. Поэтому предполагаем, что $X_0 < q$.

Оценим S_y. Для этой цели представим y/q в виде

$$\frac{y}{q} = \frac{A_0}{Q_0} + \frac{\theta_0}{Q_0 X_0}, \quad (A_0,\ Q_0) = 1, \quad 0 < Q_0 \leqslant X_0, \quad |\theta_0| < 1.$$

Пусть X_1 — остаток от деления X_0 на Q_0. Если $X_1 > 0$, то представляем y/q в виде

$$\frac{y}{q} = \frac{A_1}{Q_1} + \frac{\theta_1}{Q_1 X_1}, \quad (A_1,\ Q_1) = 1, \quad 0 < Q_1 \leqslant X_1, \quad |\theta_1| < 1,$$

и т. д., пока не придем к некоторому $X_{n+1} = 0$. Применяя лемму 3, убедимся, что

$$|S_y| < 2\left[\frac{X_0}{Q_0}\right] + 2\left[\frac{X_1}{Q_1}\right] + \ldots + 2\left[\frac{X_n}{Q_n}\right],$$

где сумма, стоящая в правой части (разумеется, и число n ее слагаемых), полностью определяется значением y. Отсюда находим

$$\sum_y |S_y| \leqslant \sum_y \left(2\frac{X_0}{Q_0} + 2\frac{X_1}{Q_1} + \ldots + 2\frac{X_n}{Q_n}\right).$$

Собранным из всех скобок слагаемым вида $2\frac{X}{Q}$ отвечает каждому своя система условий вида

$$\frac{y}{q} = \frac{A}{Q} + \frac{\theta}{QX}, \quad (A,\ Q) = 1, \quad 0 < Q \leqslant X, \quad |\theta| < 1. \quad (2)$$

Пусть B_Q — сумма тех из таких слагаемых, которым отвечает заданное значение Q. Пусть $(q,\ Q) = \delta$, $q = q_1\delta$, $Q = Q_1\delta$. Первое из условий (2) влечет за собою существование t с условиями

$$Q_1 y \equiv t \pmod{q_1}, \quad 0 < |t| < \frac{q_1}{X},$$

причем одно и то же значение t может отвечать не более чем δ различным значениям y. Далее находим

$$0<|t|<\frac{q_1}{Q_1\delta},\quad X<\frac{q_1}{|t|},\quad 2\frac{X}{Q}<2\frac{q_1}{|t|Q_1\delta},$$

откуда уже легко выводим

$$B_Q<\sum_{Q_1<q_1}\sum_{0<|t|<\frac{q_1}{Q_1\delta}}2\frac{q_1}{\delta Q_1|t|}\leqslant 4\sum_{Q<q}\sum_{0<t<\frac{q}{Q}}\frac{q}{Qt}<4q(\ln q)^2.$$

Переходим к доказательству упрощенной теоремы моей работы[27] 1925 г.

Лемма 5. *Пусть p — простое нечетное число, $p-1=nf$, n и f — целые, $1<n<p-1$. Пусть h — целое с условием $1<h<p-1$ и $\sigma=\frac{h}{p-1}$. Пусть y пробегает числа i-го класса (числа с условием $\operatorname{ind} y\equiv i \pmod n$) и пусть c_i — число чисел i-го класса в ряде $1,\ldots,h$. Тогда, полагая*

$$U=\sum_{0<y<p}\sum_{x=1}^{h}\psi\left(\frac{yx}{p}\right),$$

будем иметь

$$U=c_0c_i+c_1c_{1+i}+\ldots+c_{n-1}c_{n-1+i}-\frac{fh^2}{p-1}.$$

Доказательство. Справедливость теоремы следует из того факта, что среди слагаемых $\psi\left(\frac{yx}{p}\right)$, отвечающих принадлежащему s-му классу числу x, c_{s+i} равны $1-\sigma$, а остальные равны $-\sigma$.

Следствие. *Полагая вообще*

$$c_s=\frac{h}{n}+\delta_s,$$

будем иметь

$$U=\delta_0\delta_i+\delta_1\delta_{1+i}+\ldots+\delta_{n-1}\delta_{n-1+i}.$$

В частности, при $i=0$ будет

$$U=\delta_0^2+\delta_1^2+\ldots+\delta_{n-1}^2. \tag{3}$$

Доказательство тривиально.

Теорема. *Имеем*

$$\delta_0^2+\delta_1^2+\ldots+\delta_{n-1}^2<4p(\ln p)^2.$$

В частности, при каждом s *имеем*

$$|\delta_s|<2\sqrt{p}\ln p.$$

Доказательство. Теорема является следствием равенства (3) и леммы 4.

Лемма 6. *Пусть* $q>2$, $(a, q)=1$, x *пробегает* X *различных чисел ряда* $0, \ldots, q-1$, *каждое* $\leqslant \alpha$ *раз, а* y *пробегает* Y *различных чисел того же ряда, взаимно простых с* q, *каждое* $\leqslant \beta$ *раз. Тогда для суммы*

$$S=\sum\sum\psi\left(\frac{axy}{q}\right)$$

имеем неравенство

$$|S|<2\alpha\beta\sqrt{XYq}\ln q.$$

Доказательство. Не нарушая общности, предполагаем, что $q>60$. Находим (y_1 пробегает те же значения, что и y)

$$S^2\leqslant X\alpha^2\sum_{\xi=0}^{q-1}\sum_{y}\sum_{y_1}\psi\left(\frac{a\xi y}{q}\right)\psi\left(\frac{a\xi y_1}{q}\right)=X\alpha^2\sum_{y}S_y;$$

$$S_y=\sum_{u=0}^{q-1}\sum_{v}\psi\left(\frac{u}{q}\right)\psi\left(\frac{uv}{q}\right),$$

где v пробегает Y чисел ряда $0, \ldots, q-1$, взаимно простых с q, каждое $\leqslant\beta$ раз. Разбивая сумму S_y на две суммы, в одну из которых включа м слагаемые с $u<\sigma q$, а в другую — слагаемые с $u\geqslant\sigma q$, и применяя к каждой из этих сумм лемму !, получим

$$|S_y|<4\beta q(\ln q)^2\, 2(1-\sigma)\sigma<2\beta q(\ln q)^2,$$

$$S^2<2X\alpha^2Y\beta^2q(\ln q)^2,\quad |S|<\alpha\beta\sqrt{2XYq}\ln q.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $q>2$, $(a, q)=1$, x *пробегает числа, содержащиеся среди* X *последовательных целых чисел, каждое* $\leqslant\alpha$ *раз, а* y *пробегает числа, содержащиеся среди*

Y последовательных целых чисел, взаимно простых с q, каждое $\leqslant \beta$ раз. Тогда для суммы

$$S = \sum_x \sum_y \psi\left(\frac{axy}{q}\right)$$

имеем неравенство

$$S \leqslant XY\alpha\beta (\ln q) \sqrt{\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{q} + \frac{q}{XY}}.$$

Доказательство. Сумму S можно привести к виду, рассмотренному в лемме 6, заменив x и y сравнимыми с ними по модулю q числами x_0 и y_0 ряда $0, \ldots, q-1$. Соответственно такой замене числа X, α, Y, β заменятся некоторыми X_0, α_0, Y_0, β_0. При $X \leqslant q$, очевидно, можно оставить $X_0 = X$, $\alpha_0 = \alpha$, а при $X > q$ можно взять $X_0 = q$, $\alpha_0 = 2\alpha X q^{-1}$. При $Y \leqslant q$ можно оставить $Y_0 = Y$, $\beta_0 = \beta$, а при $Y > q$ можно взять $Y_0 = q$, $\beta_0 = 2\beta Y q^{-1}$. Всегда будет

$$|S| < 2\alpha_0\beta_0 \sqrt{X_0 Y_0 q} \ln q.$$

При этом

$$\alpha_0 \sqrt{X_0} = \begin{cases} \alpha X \sqrt{\frac{1}{X}} & \text{при } X \leqslant q, \\ 2\alpha X \sqrt{\frac{1}{q}} & \text{при } X > q, \end{cases}$$

$$\beta_0 \sqrt{Y_0} = \begin{cases} \beta Y \sqrt{\frac{1}{Y}} & \text{при } Y \leqslant q, \\ 2\alpha Y \sqrt{\frac{1}{q}} & \text{при } Y > q. \end{cases}$$

Отсюда уже легко убедимся в справедливости нашей леммы в каждом из четырех возможных случаев.

Лемма 8а. *Пусть*

$$1 \leqslant U < N, \quad 1 < \Delta \leqslant U, \quad U + \Delta \leqslant N,$$

$$S = \sum_x \sum_y \psi\left(\frac{axy}{q}\right),$$

где x и y пробегают целые числа, принадлежащие двум неубывающим последовательностям натуральных чисел *с условием, что $x = x_0$ при заданном x_0 имеет $\ll N^\varepsilon$ решений, а $y = y_0$ при заданном y_0 имеет $\ll N^\varepsilon$ решений, y пробегает значения, взаимно простые с q, и суммирование распространяется на область*

$$U < x \leqslant U + \Delta, \quad \frac{N}{U+\Delta} < y \leqslant \frac{N}{x}. \tag{4}$$

Тогда имеем

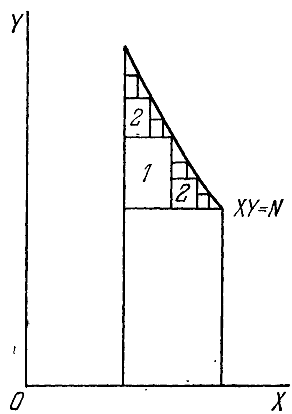
$$S \ll \frac{N^{1+\varepsilon_1}\Delta^2}{U^2} F, \quad F = \sqrt{\frac{1}{\Delta} + \frac{U^2}{N\Delta} + \frac{1}{q} + \frac{qU^2}{N\Delta^2}}.$$

Доказательство. Пусть $F \ll 1$ (в противном случае лемма тривиальна). Пусть r_0 — наибольшее целое число с условием $2^{r_0} < F^{-1}$. Из области (4) выделим «первую», «вторую», ..., r_0-ю области, согласно схеме, указанной на чертеже; здесь r-я область представляется прямоугольником с основанием

$$\frac{\Delta}{2^r}$$

и с высотою, имеющей точный порядок

$$\frac{N\Delta}{U^2 2^r}$$



(левая и нижняя стороны прямоугольника к области не причисляются). Число r-х областей равно 2^{r-1}. Согласно лемме 7 часть суммы S, отвечающая одной из r-х областей, будет

$$\ll \frac{\Delta}{2^r} \frac{N^{1+\varepsilon'}\Delta}{U^2 2^r} \sqrt{\frac{2^r}{\Delta} + \frac{U^2 2^r}{N\Delta} + \frac{1}{q} + \frac{qU^2 2^r}{N\Delta^2}} \ll \frac{N^{1+\varepsilon'}\Delta^2}{U^2 2^r} F.$$

Часть суммы S, отвечающая невыделенным областям, будет

$$\ll \frac{N^{1+\varepsilon'}\Delta}{U^2} \frac{\Delta}{2^{r_0}} \ll \frac{N^{1+\varepsilon'}\Delta^2}{U^2} F.$$

Поэтому

$$S \ll \frac{N^{1+\varepsilon'}\Delta^2}{U^2}\left(\sum_{r=1}^{r_0}\frac{2^{r-1}}{2^r \ln q}+1\right)F \ll \frac{N^{1+\varepsilon_1}\Delta^2}{U^2}F.$$

Лемма 8б. *Пусть, во изменение условий леммы* 8а, *суммирование распространяется не на область* (4), *а на область*

$$U < x \leqslant U+\Delta,\ Y_0 < y \leqslant Y_0+Y;$$
$$\Delta \ll U,\ 0 \leqslant Y_0 < Y_0+Y \leqslant \frac{N}{U+\Delta}.$$

Тогда имеем

$$S \ll \Delta Y N^{\varepsilon_1} F;\ F=\sqrt{\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{q}+\frac{q}{\Delta Y}}.$$

Доказательство. Эта лемма является следствием леммы 7.

Лемма 8. *Пусть* $|T|$ — *слагаемое первого особого вида обобщения леммы* 6 *гл.* 4; $\Phi(z)=\psi\left(\frac{az}{q}\right)$. *Тогда имеем*

$$T \ll N^{1+\varepsilon_2}F_2;\ F_2=\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+N^{-\frac{1}{6}}.$$

Доказательство. Имеем

$$T \ll \sum_{\delta}|T_\delta|;\ T_\delta=\sum_{\frac{X}{\delta}<x<\frac{X^{1+\varepsilon_0}}{\delta}}\ \sum_{xy\leqslant\frac{N}{\delta^2}}\psi\left(\frac{a\delta^2xy}{q}\right);\ N^{\frac{1}{3}}<x\leqslant N^{\frac{2}{3}}.$$

Не нарушая общности, будем предполагать, что $F_2 \ll 1$. Поскольку

$$T_\delta \ll \frac{N^{1+\varepsilon_2}}{\delta^2},\quad \sum_{\delta > F_2^{-1}}\frac{N^{1+\varepsilon_2}}{\delta^2} \ll N^{1+\varepsilon_2}F_2,$$

в дальнейшем будем рассматривать лишь случай $\delta \leqslant F_2^{-1}$.

Интервал $\frac{X}{\delta} < x \ll \frac{X^{1+\varepsilon_2}}{\delta}$ мы разобьем на $\ll \ln N$ интервалов вида

$$U < x \leqslant U';\quad 2U \leqslant U' < 4U,$$

в соответствии с чем сумма T_δ разобьется на столько же сумм вида

$$T_\delta(U)=\sum_{U<x\leqslant U'}\sum_{xy\leqslant N_1}\psi\left(\frac{a\delta^2xy}{q}\right);\quad N_1=\frac{N}{\delta^2}.$$

Разбивая область суммирования суммы $T_\delta(U)$ на две области:

$$U<x\leqslant U',\ \frac{N_1}{U'}<y\leqslant\frac{N_1}{x}\ \text{и}\ U<x\leqslant U',\ 0<y\leqslant\frac{N_1}{U'},$$

к суммам $T'_\delta(U)$ и $T''_\delta(U)$, отвечающим этим последним, применим соответственно леммы 8а и 8б. Получим

$\left(\Delta=U'-U,\ \ Y=\frac{N_1}{U'}\right)$

$$T'_\delta(U)\ll N_1^{1+\varepsilon'}F',\ T''_\delta(U)\ll N_1^{1+\varepsilon'}F';$$

$$F'=\sqrt{\frac{1}{U}+\frac{X\delta}{N_1}+\frac{1}{q}+\frac{q}{N_1}}.$$

Отсюда следует, что

$$T_\delta(U)\ll N_1^{1+\varepsilon'}F',\ T_\delta\ll N_1^{1+\varepsilon''}F'\ll$$
$$\ll N^{1+\varepsilon''}\sqrt{\frac{\delta}{X}+\frac{X\delta}{N}+\frac{1}{q}+\frac{q\delta^2}{N}}\ll\frac{N^{1+\varepsilon''}}{\delta}\sqrt{\frac{1}{X}+\frac{X}{N}+\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\ll$$
$$\ll\frac{N^{1+\varepsilon''}}{\delta}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+N^{-\frac{1}{6}}\right),$$

$$\sum_{\delta\leqslant F_2^{-1}}|T_\delta|\ll N^{1+\varepsilon_2}F_2.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть* $|T|$ — *слагаемое второго особого вида обобщения леммы* 6 *гл.* 4; $\Phi(z)=\psi\left(\frac{az}{q}\right)$. *Тогда имеем*

$$T\ll N^{1+\varepsilon_1}F;\ F=\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}.$$

Доказательство. Имеем

$$T=\sum_{X<x\leqslant X^{1+\varepsilon_0}}\ \sum_{\substack{M<m\leqslant M'\\ xm\leqslant N}}\psi\left(\frac{axm}{q}\right).$$

Интервал $X < x \leqslant X^{1+\varepsilon_0}$ мы разобьем на $\leqslant \ln N$ интервалов вида

$$U < x \leqslant U'; \quad 2U \leqslant U' < 4U,$$

в соответствии с чем сумма T разобьется на столько же сумм вида

$$T(U) = \sum_{\substack{U < x \leqslant U' \\ xm \leqslant N}} \sum_{M < m \leqslant M'} \psi\left(\frac{axm}{q}\right).$$

Для большей ясности доказательства мы разобьем сумму $T(U)$ на два слагаемых: на сумму $T'(U)$, распространенную на область

$$U < x \leqslant U', \ M < m \leqslant M_1; \ M_1 = \min\left(M', \frac{N}{U'}\right),$$

и на сумму $T''(U)$, распространенную на область

$$U < x \leqslant U', \ M_2 < m \leqslant M_3;$$
$$M_2 = \max\left(M, \frac{N}{U}\right), \ M_3 = \min\left(M', \frac{N}{x}\right).$$

Сначала оценим сумму $T'(U)$. Ее мы разобъем на сумму $T_1'(U)$, распространенную на область

$$U < x \leqslant U', \ M < m \leqslant M + \left[\frac{M_1 - M}{q}\right],$$

и на сумму $T_2'(U)$, расп остраненную на область

$$U < x \leqslant U', \quad M + \left[\frac{M_1 - M}{q}\right] < m \leqslant M_1.$$

Сумма $T_1'(U)$ будет непустой только при $M_1 - M \geqslant q$. Но в этом случае ее часть, отвечающую данному x, можно разбить на $\left[\frac{M_1 - M}{q}\right]$ сумм, каждая из которых, согласно следствию леммы 3, будет $\leqslant \tau(q)$. Следовательно,

$$T_1'(U) \leqslant XN^{\varepsilon'} \frac{M}{q} \tau(q) \leqslant N^{1+\varepsilon'} F.$$

Сумму $T_2'(U)$ оценим, пользуясь леммой 7. Положив

$$Y = M_1 - M - \left[\frac{M_1 - M}{q}\right]$$

(следовательно, $Y > q$), получим

$$T_2'(U) \ll UY \sqrt{\frac{1}{U} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{q} + \frac{q}{UY}} N^{\varepsilon''} \ll$$

$$\ll XY \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{XY}} N^{\varepsilon''} \ll N^{1+\varepsilon'} F.$$

Поэтому

$$T'(U) \ll N^{1+\varepsilon'} F.$$

Далее оценим сумму вида

$$T_0(U) = \sum_{U < x \leqslant U'} \sum_{\substack{m > M_0 \\ xm \leqslant N}} \psi\left(\frac{axm}{q}\right); \quad M_0 > \left[\frac{N}{U'}\right],$$

и покажем, что $T_0(U) \ll N^{1+\varepsilon'} F$.

Пусть сначала $U \leqslant \sqrt{\frac{N}{q}}$. Тогда сумма по m, отвечающая заданному x, разобьется на $\left[\frac{Nx^{-1} - M_0}{q}\right]$ полных сумм (с интервалом суммирования длиною q) и, быть может, одну неполную сумму (с интервалом суммирования длиною, меньшей q). Применяя к каждой полной сумме следствие леммы 3 и оценивая неполную сумму тривиально, получим

$$T_0'(U) \ll N^{\varepsilon'} \left(\frac{N}{q} \tau(q) + Uq\right) \ll N^{1+\varepsilon''} \left(\frac{1}{q} + \sqrt{\frac{q}{N}}\right) \ll N^{1+\varepsilon''} F.$$

Пусть теперь $U > \sqrt{\frac{N}{q}}$. Из интервала $M_0 < m \leqslant \frac{N}{x}$ выделим $\left[\frac{Nx^{-1} - M_0}{q}\right]$ полных интервалов, каждому из которых отвечает своя сумма $\sum\limits_m \psi\left(\frac{axm}{q}\right)$ порядка не выше $\tau(q)$. Сумма всех этих сумм будет $\ll \frac{N}{xq} \tau(q)$, причем

$$\sum_{U < x \leqslant U'} \frac{N}{xq} \tau(q) \ll N^{1+\varepsilon''} F.$$

Оставшаяся часть T_0' суммы T_0 распространяется на область криволинейных треугольников $\Big($при $\frac{N}{U} - M_0 < q$

эта область сводится к одному треугольнику — самой области суммирования суммы T). Пусть

$$s_0=\left[\frac{NU^{-1}-M_0}{q}\right].$$

Тогда каждому $s=0, \ldots, s_0$ отвечает свой криволинейный треугольник, ограниченный кривою $m=\frac{N}{x}$, прямою $m=$ $=M_0+sq$, наконец, прямою $x=\frac{N}{M_0+(s+1)\,q}$, если $s<s_0$, и прямою $x=U$, если $s=s_0$.

Основание Δ треугольника удовлетворяет неравенству

$$\Delta\leqslant\frac{N}{M_0+sq}-\frac{N}{M_0+(s+1)\,q}\ll\frac{Nq}{M_0^2}\ll\frac{qU^2}{N}.$$

Поэтому, согласно лемме 8а, часть $T'_{0,s}$ суммы T'_0, отвечающая s-му треугольнику, будет

$$\ll\frac{N^{1+\varepsilon}\Delta^2}{U^2}\sqrt{\frac{1}{\Delta}+\frac{U^2}{N\Delta}+\frac{1}{q}+\frac{qU^2}{N\Delta^2}}\ll$$
$$\ll\frac{N^{1+\varepsilon}\Delta}{U}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{U}+\sqrt{\frac{\Delta}{N}}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right).$$

А поскольку

$$\sqrt{\frac{\Delta}{N}}\ll\frac{\sqrt{\Delta}}{U}\ll\sqrt{\frac{q}{N}},$$

то имеем

$$T'_{0,s}\ll\frac{N^{1+\varepsilon}\Delta}{U}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}},\quad T'_0\ll N^{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}.$$

Отсюда, в соединении с доказанным раньше, находим

$$T_0(U)\ll N^{1+\varepsilon}F.$$

А поскольку сумма $T''(U)$ может быть представлена разностью двух сумм вида $T_0(U)$, то имеем

$$T''(U)\ll N^{1+\varepsilon_1}F.$$

Из найденных для $T'(U)$ и $T''(U)$ неравенств следует

$$T(U)\ll N^{1+\varepsilon_1}F,$$

откуда, наконец, находим

$$T < N^{1+\varepsilon_1} F.$$

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть p пробегает простые числа,*

$$S = \sum_{p \leqslant N} \psi\left(\frac{ap}{q}\right).$$

Тогда имеем

$$S \ll N^{1+\varepsilon} F_3; \quad F_3 = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-\frac{1}{6}}.$$

Доказательство. Теорема является следствием обобщения леммы 5 гл. 4, а также лемм 8 и 9 этой главы.

Литература

[1] И. М. Виноградов, Основы теории чисел, изд-во «Наука», 1971.

[2] И. М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, изд-во «Наука», 1971.

[3] G. Voronoi, Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques, J. fur Math. **126**, 241—282, 1903.

[4] И. М. Виноградов, Новый способ для получения асимптотических выражений арифметических функций, Изв. Российской Академии наук, 6 серия, **II**, 1347—1378, 1917

[5] G Voronoi, Об одной трансцендентной функции и ее приложениях к суммированию некоторых рядов, Annales scientifiques del 'Ecole normale superieure (3) **XXI**, 207—267, 1904.

[6] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ function, Acta Math. **37**, 193—239, 1914.

[7] И. М. Виноградов, О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя, Сообщения Харьк. Матем. об-ва, 1918 (оттиски вышли в свет в 1917 г и помечены этим же годом).

[8] J. G. van der Corput, Verschahrfung der Abschätzungen beim Teileproblem, Math. Ann. **87**, 39—65, 1922.

[9] L. K. Hua, The Lattice points in a circle, Quart. J. Math., Oxford, **13**, 18—29, 1942.

[10] И. М. Виноградов, О распределении дробных долей значений функции двух переменных, Известия Ленинградского политехн. ин-та **30**, 31—52, 1927.

[11] И. М. Виноградов, Число целых точек в шаре, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **9**, 17—38, 1935.

[12] И. М. Виноградов, К вопросу о числе целых точек в шаре, Изв. АН СССР **27**, 957—968, 1963.

[13] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, The approximate functional equation in the theory of the zeta — function with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz, Proc. London math. Soc. (2) **21**, 39—74, 1922.

[14] А. А. Карацуба, Оценки тригонометрических сумм методом И. М Виноградова и их применения, Труды ордена Ленина Математического ин-та им. В. А. Стеклова, **CXII**, изд-во «Наука», 1971, 241—255.
[15] И М. Виноградов, Новая оценка $G(n)$ в проблеме Варинга, Докл. АН СССР **5**, 249—253, 1934.
[16] И. М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **23**, 1—109, 1947.
[17] И. М. Виноградов, К вопросу о верхней границе для $G(n)$, Изв. АН СССР **29**, 637—692, 1959.
[18] И. М. Виноградов, Новые результаты в вопросе о распределении дробных частей многочлена, Докл. АН СССР **2**, 355—357, 1936.
[19] И. М. Виноградов, Представление нечетного числа суммою трех простых чисел, Докл. АН СССР **15**, 291—294, 1937.
[20] И. М. Виноградов, Оценки некоторых простейших тригонометрических сумм с простыми числами, Изв. АН СССР **3**, 391—398, 1938.
[21] И. М. Виноградов, Некоторое общее свойство распределения простых чисел, Матем. сб. **7**, 365—372, 1940.
[22] И. М. Виноградов, Уточнение метода, оценки сумм с простыми числами, Изв. АН СССР **7**, 17—34, 1943.
[23] И. М. Виноградов, Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии, Изв. АН СССР **30**, 481—496, 1966.
[24] А. А. Карацуба, Суммы характеров с простыми числами, Изв. АН СССР **34**, 299—321, 1970.
[25] A. Page, Proc. London math. soc. (2) **39**, 116—141, 1935.
[26] К. К. Марджанишвили, К доказательству теоремы Гольдбаха—Виноградова, Докл. АН СССР **30**, 681—684, 1941.
[27] И. М. Виноградов, Элементарное доказательство одного общего предложения из аналитической теории чисел, Известия Ленинградского политехн. ин-та **29**, 3—12, 1925.
[28] И. М. Виноградов, Элементарное доказательство одной теоремы теории простых чисел, Изв. АН СССР **17**, 3—12, 1953.

Иван Матвеевич Виноградов

Особые варианты
метода тригонометрических сумм

М., 1976 г., 120 стр.

Редактор *А. А. Карацуба*
Техн. редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *В. П. Сорокина*

Сдано в набор 11/VIII 1975 г. Подписано к печати 9/IV 1976 г. Бумага 84×108 $^1/_{32}$ № 1. Физ. печ. л. 3,75. Условн. печ. л. 6,3. Уч.-изд. л. 5,37. Тираж 6 500 экз. Т-05660. Цена книги в переплете 58 коп.; в обложке 34 коп. Заказ № 297.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука». Заказ № 798. Москва Г-99, Шубинский пер, 10.

34 коп.